Adriano Almeida Gonçalves Siqueira

CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ NÃO LINEAR DE ROBÔS
MANIPULADORES SUBATUADOS

Tese apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor
em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

verso

Dedicatória

Aos meus pais Erivaldo e Noramir.
À minha esposa Flaviane e ao meu filho João Vítor,
fruto do nosso amor e inspiração para novos sonhos.

verso

Agradecimentos

A Deus e à memória das pessoas queridas que certamente intercedem por mim.

Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra pela orientação e confiança depositada na realização deste trabalho.

A todos os companheiros do Laboratório de Sistemas Inteligentes pela disposição em ajudar sempre que necessário e pelas valiosas trocas de informações.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo que de alguma forma contribuíram na realização desta pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro.

verso

Epígrafe

“If you do not know what you are up against,
plan for the worst and optimize.”

[HAYKIN (1999), p. 132]

Resumo

SIQUEIRA, A. A. G. (2004). *Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear de manipuladores subatuados*. Tese(Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento, implementação e análise de técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para robôs manipuladores subatuados, sujeitos a incertezas paramétricas e distúrbios externos. Na primeira parte, duas abordagens são consideradas para robôs manipuladores individuais subatuados. A primeira abordagem consiste em representar robôs manipuladores como um sistema não linear na forma quase-linear com parâmetros variantes e utilizar técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares a parâmetros variantes baseadas em desigualdades matriciais lineares. Na segunda abordagem, uma solução explícita do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para robôs manipuladores é encontrada via teoria dos jogos diferenciais. Com este mesmo procedimento, também são implementados os controles misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais para robôs manipuladores. Também é desenvolvido um sistema tolerante a falhas para robôs manipuladores baseado em sistemas Markovianos e em controladores Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Na segunda parte, o modelo dinâmico de robôs manipuladores cooperativos subatuados é representado na forma de espaço de estados, possibilitando a aplicação dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para controle de posição, juntamente com controle das forças de esmagamento, de um objeto.

Palavras-chave: controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear; robôs manipuladores subatuados.

Abstract

SIQUEIRA, A. A. G. (2004). *Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control of underactuated robot manipulators*. PhD Thesis - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

This work presents the development, implementation and analysis of nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control techniques applied to underactuated manipulators, under parametric uncertainties and external disturbances. At the first part, two approaches are considered for underactuated individual manipulators. The first approach consists in representing manipulators as nonlinear systems in the quasi-linear parameter varying form and in controlling them via $\mathcal{H}_\infty$ control for linear parameter varying systems based on linear matrix inequalities. At the second approach, an explicit solution to the nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control problem for manipulators is found via differential game theory. With this procedure, it is also implemented the nonlinear mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, nonlinear adaptive $\mathcal{H}_\infty$, and nonlinear adaptive $\mathcal{H}_\infty$ with neural networks controls. Also is developed a fault tolerant system for manipulators based on Markovian systems and Markovian $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, and $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controls. At the second part, the dynamic model of underactuated cooperative manipulators is represented in the state space form in order to apply the nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ controls to position control, plus the squeeze force control, of an object.

Keywords: nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control; underactuated manipulators.

Lista de Figuras

FIGURA 5.1	Distúrbios externos, configuração AAA.	64
FIGURA 5.2	Posição angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.	66
FIGURA 5.3	Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.	66
FIGURA 5.4	Torque aplicado, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.	66
FIGURA 5.5	Posição angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.	69
FIGURA 5.6	Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.	69
FIGURA 5.7	Torque aplicado, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.	69
FIGURA 5.8	Posição angular das juntas, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.	71
FIGURA 5.9	Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.	71

FIGURA 5.10 Torque aplicado, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.	71
FIGURA 5.11 Posição angular das juntas, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.	73
FIGURA 5.12 Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.	73
FIGURA 5.13 Torque aplicado, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios	73
FIGURA 5.14 Posição das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.	75
FIGURA 5.15 Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.	75
FIGURA 5.16 Torque aplicado, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.	75
FIGURA 5.17 Posição das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios. . .	78
FIGURA 5.18 Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios.	78
FIGURA 5.19 Torque aplicado, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios. . .	78
FIGURA 5.20 Distúrbios externos, configuração APA, experimento.	81
FIGURA 5.21 Posição angular das juntas, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento. . .	85
FIGURA 5.22 Velocidade angular angular das juntas, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e expe- rimento.	85

FIGURA 5.23 Torque aplicado, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.	85
FIGURA 5.24 Posição angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e experimento.	87
FIGURA 5.25 Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e expe- rimento.	87
FIGURA 5.26 Torque aplicado, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e experimento.	87
FIGURA 5.27 Posição angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 2.	88
FIGURA 5.28 Configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 2: velocidade angular das juntas e torque aplicado.	89
FIGURA 5.29 Posição angular das juntas, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.	91
FIGURA 5.30 Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.	91
FIGURA 5.31 Torque aplicado, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.	91
FIGURA 5.32 Posição das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.	94
FIGURA 5.33 Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.	94
FIGURA 5.34 Torque aplicado, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.	94
FIGURA 5.35 Posição das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.	98

FIGURA 5.36 Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.	98
FIGURA 5.37 Torque aplicado, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.	98
FIGURA 5.38 Distúrbio, configuração PAP, experimento.	102
FIGURA 5.39 Posição angular das juntas, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.	105
FIGURA 5.40 Velocidade angular das juntas, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.	105
FIGURA 5.41 Torque aplicado, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.	105
FIGURA 5.42 Posição angular das juntas, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.	107
FIGURA 5.43 Velocidade angular das juntas, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.	107
FIGURA 5.44 Torque aplicado, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.	107
FIGURA 6.1 Reconfiguração em movimento, controle $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV: posição das juntas e torques.	111
FIGURA 6.2 Reconfiguração em movimento, controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos: posição das juntas e torques.	111
FIGURA 6.3 Reconfiguração com freios, controle $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV: posição das juntas e torques.	111
FIGURA 6.4 Reconfiguração com freios, controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos: posição das juntas e torques.	112
FIGURA 6.5 Modelo de um sistema Markoviano.	113
FIGURA 6.6 Modelo Markoviano do UArm II.	119

FIGURA 6.7	Distúrbios externos, controle Markoviano.	133
FIGURA 6.8	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por reali- mentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	136
FIGURA 6.9	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por reali- mentação do estado, velocidades angulares e torques.	136
FIGURA 6.10	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por reali- mentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	137
FIGURA 6.11	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por reali- mentação do estado, velocidades angulares e torques.	137
FIGURA 6.12	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	138
FIGURA 6.13	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.	138
FIGURA 6.14	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por reali- mentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.	139
FIGURA 6.15	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por reali- mentação da saída, velocidades angulares e torques.	139
FIGURA 6.16	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por reali- mentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.	140
FIGURA 6.17	Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por reali- mentação da saída, velocidades angulares e torques.	140
FIGURA 6.18	Seqüência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por re- alimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	143
FIGURA 6.19	Seqüência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por re- alimentação do estado, velocidades angulares e torques.	143
FIGURA 6.20	Seqüência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	144

FIGURA 6.21 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.	144
FIGURA 6.22 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.	145
FIGURA 6.23 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.	145
FIGURA 6.24 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.	146
FIGURA 6.25 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.	146
FIGURA 6.26 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.	147
FIGURA 6.27 Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.	147
FIGURA 10.1 Sistema cooperativo formado por dois UArm II.	173
FIGURA 10.2 Distúrbios externos.	175
FIGURA 10.3 Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.	177
FIGURA 10.4 Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.	178
FIGURA 10.5 Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.	178
FIGURA 10.6 Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	178

FIGURA 10.7	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	179
FIGURA 10.8	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.	179
FIGURA 10.9	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.	179
FIGURA 10.10	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.	180
FIGURA 10.11	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.	182
FIGURA 10.12	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.	182
FIGURA 10.13	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	182
FIGURA 10.14	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	183
FIGURA 10.15	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2. . . .	183
FIGURA 10.16	Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.	183

FIGURA 10.17 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.	184
FIGURA 10.18 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.	185
FIGURA 10.19 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.	185
FIGURA 10.20 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	185
FIGURA 10.21 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.	186
FIGURA 10.22 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.	186
FIGURA 10.23 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.	186
FIGURA 10.24 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.	187
FIGURA 10.25 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.	189
FIGURA 10.26 Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.	189

FIGURA 10.27	Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2. . . .	189
FIGURA 10.28	Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2. . . .	190
FIGURA 10.29	Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.	190
FIGURA 10.30	Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.	190
FIGURA A.1	Underactuated Arm II.	210
FIGURA A.2	Esquema ilustrativo do robô manipulador.	210
FIGURA A.3	UArm II, fonte de tensão, placa de controle e computador.	212
FIGURA A.4	Interface gráfica do UMCE.	215
FIGURA A.5	Comandos de acionamento.	216
FIGURA A.6	Parâmetros do experimento.	217
FIGURA A.7	Parâmetros dinâmicos.	218
FIGURA A.8	Alteração de parâmetros e gráficos.	218
FIGURA A.9	Janela de gráficos.	219
FIGURA A.10	Interface gráfica do ambiente de controle.	220
FIGURA A.11	Janela de gráficos do objeto.	221
FIGURA A.12	Janela de gráficos dos manipuladores.	221

Lista de Tabelas

TABELA 5.1	Valores iniciais e finais de θ , configuração AAA.	76
TABELA 5.2	Índices de desempenho: Configuração AAA, sem distúrbios.	80
TABELA 5.3	Índices de desempenho: Configuração AAA, com distúrbios.	80
TABELA 5.4	Funções base e γ , fase 1.	83
TABELA 5.5	Funções base e γ , fase 2.	84
TABELA 5.6	Valores iniciais e finais de $\bar{\theta}$, configuração APA, primeira fase.	92
TABELA 5.7	Valores iniciais e finais de θ , configuração APA, segunda fase.	93
TABELA 5.8	Índices de desempenho: Configuração APA, experimento.	100
TABELA 5.9	Índices de desempenho: Configuração PAP, experimento.	108
TABELA 6.1	Juntas controladas nas configurações AAP, APA e PAA.	117
TABELA 6.2	Juntas controladas nas configurações APP, PAP e PPA.	117
TABELA 6.3	Estados Markovianos da Seqüência AAA-APA e Pontos de Linearização	120
TABELA 6.4	Estados Markovianos da Seqüência AAA-PAA-PAP e Pon- tos de Linearização	122
TABELA 6.5	Índices de desempenho - Seqüência AAA-APA.	134
TABELA 6.6	Índices de desempenho - Seqüência AAA-PAA-PAP.	141
TABELA 10.1	Parâmetros do objeto.	174

TABELA 10.2	Índices de desempenho - Configuração totalmente atuada. .	181
TABELA 10.3	Índices de desempenho - Configuração subatuada.	188
TABELA A.1	Parâmetros do robô.	211
TABELA A.2	Funções <i>dlls</i> utilizadas.	213

Lista de Abreviaturas e Siglas

AAA	Ativa-Ativa-Ativa
AAP	Ativa-Ativa-Passiva
APA	Ativa-Passiva-Ativa
APP	Ativa-Passiva-Passiva
PAA	Passiva-Ativa-Ativa
PAP	Passiva-Ativa-Passiva
PPA	Passiva-Passiva-Ativa
CC	Corrente Contínua
dll	dynamically linked libraries
DMLs	Desigualdades Matriciais Lineares
DTMJLS	Discrete Time Markovian Jump Linear Systems
ERC	Equação de Riccati Congelada
gdl	graus de liberdade
LMI	Linear Matrix Inequality
LPV	Linear com Parâmetros Variantes
quase-LPV	quase Linear com Parâmetros Variantes
UArm II	Underactuated Arm II
UMCE	Underactuated Manipulator Control Environment
VxD	Virtual Device Driver

Lista de Símbolos

Parte I - Robôs Manipuladores Individuais

γ	nível de atenuação dos distúrbios
w	entrada de distúrbio
z	saída controlada
x	estado do sistema
$\mathcal{L}_2(0, T)$	conjunto de sinais com energia limitada no intervalo $[0, T]$, $\left\{w : \int_0^T \ w(t)\ ^2 dt < \infty\right\}$
$\ \cdot\ $	norma euclidiana de um vetor ($\ z\ ^2 = z^T z$ para $z \in \mathbb{R}^k$)
$V(x, t), V(\tilde{x}, t)$	funções de Lyapunov
u	entrada de controle
y	saída medida
$\rho(\cdot)$	parâmetros variantes
$\dot{\rho}(\cdot)$	derivada dos parâmetros variantes
F_P^ν	conjunto de variação dos parâmetros
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$	conjunto de funções continuamente diferenciáveis que fazem o mapeamento de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$
$\nu_1, \dots, \nu_m$	limites das taxas de variação dos parâmetros
m	número de parâmetros variantes
A, B, C, D	matrizes do sistema LPV
z_1, z_2	saídas controladas
w_1, w_2	entradas de distúrbios
K_P	controlador dinâmico
x_K	estado do controlador

A_K, B_K, C_K, D_K	matrizes do controlador
x_{clp}	estado do sistema em malha fechada
$A_{clp}, B_{clp}, C_{clp}, D_{clp}$	matrizes do sistema em malha fechada
$X(\rho(t)), Y(\rho(t))$	variáveis matriciais das DMLs
$f_i(\rho(t)), g_i(\rho(t))$	funções base das variáveis $X(\rho(t))$ e $Y(\rho(t))$
X_i, Y_i	matrizes coeficientes das variáveis $X(\rho(t))$ e $Y(\rho(t))$
M	número de funções base
L	número de pontos da divisão do conjunto de parâmetros
τ	vetor de torques nas juntas
$M(q)$	matriz de inércia
$V(q, \dot{q})$	vetor dos termos de Coriolis e forças centrífugas
$b(q, \dot{q})$	vetor dos termos não inerciais
$C(q, \dot{q})$	matriz de Coriolis e forças centrífugas
$G(q)$	vetor das forças gravitacionais
$F(\dot{q})$	vetor das forças friccionais
q	vetor de posição das juntas
M_0, C_0, F_0, G_0	valores nominais das matrizes dinâmicas
$\Delta M, \Delta C, \Delta F, \Delta G$	incertezas paramétricas das matrizes dinâmicas
τ_d	distúrbios externos de energia limitada
q^d	trajetória de referência para a posição das juntas
$\tilde{x}$	estado para manipuladores totalmente atuados
$\tilde{q}$	erro de acompanhamento de trajetória
n	número de juntas
n_a	número de juntas ativas
n_p	número de juntas passivas
q_c	vetor de posição das juntas controladas
q_r	vetor de posição das juntas restantes
τ_a	vetor de torques nas juntas ativas
q_c^d	trajetória de referência para as juntas controladas
$\tilde{x}_c$	estado para manipuladores subatuados
$\tilde{q}_c$	erro de acompanhamento de trajetória para as juntas controladas

$F(x_e)$	vetor de estimativa da dinâmica de manipuladores
Q, R	matrizes de ponderação
$P(\tilde{x}, t)$	matriz solução da equação de Riccati
u^*, w^*	controle ótimo e pior distúrbio
$\lambda_{max}(R)$	maior autovalor da matriz R
$Q_1, Q_2, Q_{1f}, Q_{2f}, P_0$	matrizes de ponderação
$P_1(\tilde{x}, t), P_2(\tilde{x}, t)$	matrizes solução das equações de Riccati acopladas
$Y(\cdot)$	matriz de regressão
θ	vetor dos parâmetros incertos
$\hat{\theta}$	estimativa do parâmetro θ
$\mathcal{L}_\infty(0, T)$	conjunto de sinais limitados no intervalo $[0, T]$
S	matriz de ponderação da estimativa de θ
$F(x_e, \Theta)$	conjunto de redes neurais
Θ	vetor dos parâmetros do conjunto de redes neurais
Ξ	matriz dos níveis de ativação das camadas escondidas
$F_k(x_e, \Theta_k)$	rede neural k
Θ_k	vetor dos parâmetros da rede neural k
ξ_k	vetor dos níveis de ativação das camadas escondidas da rede neural k
p_k	número de neurônios na camada escondida
w_{ij}^k	pesos da camada de entrada da rede neural k
m_i^k	limiares dos neurônios da rede neural k
Z	matriz de ponderação da estimativa de Θ
τ_c	vetor de torques nas juntas controladas
τ_r	vetor de torques nas juntas restantes
τ_{ac}	vetor de torques nas juntas ativas sendo controladas
$\overline{F}(x_e)$	vetor de estimativa da dinâmica de manipuladores subatuados
$\overline{Y}(\cdot)$	matriz de regressão para manipuladores subatuados
$\overline{\theta}$	vetor dos parâmetros incertos para manipuladores subatuados
$\hat{\overline{\theta}}$	estimativa do parâmetro $\overline{\theta}$

$\overline{S}$	matriz de ponderação da estimativa de $\overline{\theta}$
$\hat{M}$	matriz de inércia estimada
$\hat{b}$	vetor de torques não inerciais estimado
q_u	vetor de posição das juntas passivas
q_a	vetor de posição das juntas ativas
$D(q, \dot{q})$	matriz de Coriolis e forças centrífugas para manipuladores subatuados
D_0	matriz de Coriolis e forças centrífugas nominal
ΔD	incerteza paramétrica da matriz de Coriolis e forças centrífugas
$\tilde{x}_u$	estado para manipuladores subatuados
$\overline{F}(x_{e_u})$	vetor de estimativa da dinâmica de manipuladores subatuados, controle com redes neurais
$\overline{F}(x_{e_u}, \overline{\Theta})$	conjunto de redes neurais para manipualdores subatuados
$\overline{\Theta}$	vetor dos parâmetros do conjunto de redes neurais para manipualdores subatuados
$\overline{\Xi}$	matriz dos níveis de ativação das camadas escondidas para manipualdores subatuados
m_i	massa do i -ésimo link
I_i	inércia do i -ésimo link
l_i	comprimento do i -ésimo link
lc_i	distância entre a i -ésima junta e o centro de massa do i -ésimo ligamento
f_i	coeficientes do vetor dependente da velocidade $F(\dot{q})$
t_0	tempo inicial
t_f	tempo final desejado
$q_{i_0}, \dot{q}_{i_0}, \ddot{q}_{i_0}$	valores iniciais da posição, velocidade e aceleração das juntas
$q_{f_0}, \dot{q}_{f_0}, \ddot{q}_{f_0}$	valores finais da posição, velocidade e aceleração das juntas
$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	norma $\mathcal{L}_2$ do estado
$E[\tau]$	somatório das áreas dos torques
t_r	tempo gasto para as juntas alcançarem as posições desejadas
t_b	tempo de acionamento dos freios na fase de reconfiguração
P, Λ	matrizes de probabilidades do modelo Markoviano

α, β	constantes de ponderação do Controle Markoviano
K_P, K_D	ganhos dos controladores PD preliminares
APA_u	primeira fase de controle da configuração APA
APA_l	segunda fase de controle da configuração APA
PAA_u	primeira fase de controle da configuração PAA
PAA_l	segunda fase de controle da configuração PAA
PAP_{u1}	primeira fase de controle da configuração PAP
PAP_{u2}	segunda fase de controle da configuração PAP
PAP_l	terceira fase de controle da configuração PAP
P_0, P_f, P_s	matrizes de probabilidades do modelo Markoviano
T_{MS}, N	número de estados Markovianos
n_{lp}	número de pontos de linearização
n_{fc_i}	número de possíveis configurações quando i falhas ocorrem
n_{cp_i}	número de fases de controle para uma configuração com i falhas
$\Theta(k)$	cadeia de Markov
μ	distribuição de probabilidades da cadeia de Markov no instante inicial
$F_{\Theta(k)}$	ganho dos controladores Markovianos por realimentação do estado
G	sistema Markoviano
G_c	controlador Markoviano por realimentação da saída

Parte II - Robôs Manipuladores Cooperativos

k	número de manipuladores do sistema cooperativo
q_i	vetor das coordenadas generalizadas do manipulador i
x_o	vetor das coordenadas Cartesianas do objeto
$\varphi_i(x_o, q_i)$	restrições geométricas do manipulador i
J_{o_i}	matriz Jacobiana da restrição (relaciona as velocidades do efetuador do manipulador i e do centro de massa do objeto)
J_i	matriz Jacobiana geométrica do manipulador i (relaciona as velocidades do efetuador e das juntas do manipulador i)

$\dot{\varphi}_i(x_o, q_i)$	restrições de velocidade do manipulador i
θ	vetor contendo as coordenadas cartesianas do objeto e as coordenadas generalizadas das juntas
J_o, J	matrizes Jacobianas do sistema cooperativo
$M_o(x_o)$	matriz de inércia do objeto
$C_o(x_o, \dot{x}_o)$	matriz de Coriolis e forças centrípetas do objeto
$G_o(x_o)$	vetor dos torques gravitacionais do objeto
h	forças aplicadas no objeto
h_i	forças aplicadas no objeto pelo efetuador do manipulador i
$M_i(q_i)$	matriz de inércia do manipulador i
$C_i(q_i, \dot{q}_i)$	matriz de Coriolis e forças centrípetas do manipulador i
$G_i(q_i)$	vetor dos torques gravitacionais do manipulador i
τ_i	torques aplicados no manipulador i
$M(\theta)$	matriz de inércia do sistema cooperativo
$C(\theta, \dot{\theta})$	matriz de Coriolis e forças centrípetas do sistema cooperativo
$G(\theta)$	vetor dos torques gravitacionais do sistema cooperativo
h_o	projeção de h no centro de massa do objeto
h_{ro}	forças resultantes no objeto
h_{oE}	forças de esmagamento
h_{oM}	forças de movimento
X_E	subespaço de esmagamento
τ_v	entrada de controle virtual
q_p	vetor das posições das juntas passivas
P_{AP}	matriz de permutação
J_{AP}	matriz Jacobiana do sistema cooperativo subatuado
τ_a	torques aplicados nas juntas ativas
h_{oE}^d	forças de esmagamento desejadas
n_e	número de componentes das forças de esmagamento sendo controlados
$\tilde{x}$	estado do sistema cooperativo
$\tilde{x}_o$	erro de acompanhamento de trajetória

x_o^d	trajetória de referência para a posição do objeto
$\widehat{M}_0, \widehat{C}_0, \widehat{G}_0$	valores nominais das matrizes dinâmicas do sistema cooperativo
$\Delta\widehat{M}, \Delta\widehat{C}, \Delta\widehat{G}$	incertezas paramétricas das matrizes dinâmicas do sistema cooperativo
m_o	massa do objeto
l_o	comprimento do objeto
a_o	distância entre efetuadores e centro de massa do objeto
I_o	momento de inércia do objeto
$E[h_{oE}]$	somatório das áreas das forças de esmagamento

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xxiii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxv
Lista de Símbolos	xxvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	4
1.3 Descrição do trabalho	4
1.4 Estrutura do texto	5
I Robôs manipuladores individuais	9
2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV	11
2.1 Introdução	11
2.2 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas não lineares variantes no tempo .	14
2.3 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares variantes no tempo	15
2.4 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas LPV	16
2.5 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV por realimentação do estado	17
2.6 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas LPV por realimentação da saída .	18
2.7 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV por realimentação da saída	20
2.8 Considerações computacionais	23

2.9	Modelo quase-LPV para sistemas não lineares com entradas afins . . .	24
3	Manipuladores subatuados	27
3.1	Introdução	27
3.2	Manipuladores totalmente atuados	31
3.3	Manipuladores subatuados	33
4	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	37
4.1	Manipuladores totalmente atuados	38
4.1.1	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	39
4.1.2	Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear	42
4.1.3	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	46
4.1.4	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais	48
4.2	Manipuladores subatuados	51
5	Resultados experimentais	61
5.1	Trajetórias desejadas e índices de desempenho	61
5.2	Configuração AAA	63
5.2.1	Controle quase-LPV por realimentação do estado	63
5.2.2	Controle quase-LPV por realimentação da saída	67
5.2.3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	70
5.2.4	Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear	72
5.2.5	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	74
5.2.6	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais	76
5.3	Configuração APA	79
5.3.1	Controle quase-LPV por realimentação do estado	82
5.3.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	84
5.3.3	Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear	89
5.3.4	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear	92
5.3.5	Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais	95
5.4	Configuração PAP	100
5.4.1	Controle quase-LPV por realimentação do estado	101
5.4.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	104
6	Controles Markovianos aplicados ao robô UArm II	109
6.1	Ocorrência de falhas	109

6.2	Sistemas Markovianos	112
6.3	O robô UArm II como um sistema Markoviano	114
6.3.1	Pontos de linearização	116
6.3.2	Configurações após a ocorrência de falhas	116
6.3.3	Estados Markovianos	117
6.4	Seqüência de falhas AAA-APA	118
6.5	Seqüência de falhas AAA-PAA-PAP	121
6.6	Controles Markovianos por realimentação do estado	123
6.6.1	Controle Markoviano $\mathcal{H}_2$	124
6.6.2	Controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$	125
6.6.3	Controle Markoviano Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	126
6.7	Controles Markovianos por realimentação da saída	129
6.7.1	Controle Markoviano $\mathcal{H}_2$	130
6.7.2	Controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$	131
6.8	Resultados Experimentais	132
6.8.1	Seqüência de falhas AAA-APA	132
6.8.2	Seqüência de falhas AAA-PAA-PAP	135
II	Robôs manipuladores cooperativos	149
7	Introdução	151
8	Modelo dinâmico de robôs manipuladores cooperativos	155
8.1	Robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados	155
8.2	Robôs manipuladores cooperativos subatuados	160
8.3	Controle das forças de esmagamento	163
9	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para manipuladores cooperativos	167
9.1	Modelo quase-LPV para robôs manipuladores cooperativos	167
9.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	169
10	Resultados Experimentais	173
10.1	Trajetória desejada e índices de desempenho	174
10.2	Configuração totalmente atuada	175
10.2.1	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV	176

10.2.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	180
10.3	Configuração subatuada	181
10.3.1	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV	181
10.3.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos	187
11	Conclusão	191
	Referências Bibliográficas	195
A	UArm II e Ambientes de controle	209
A.1	UArm II	209
A.2	Ambiente de controle do UArm II	215
A.3	Ambiente de controle do manipulador cooperativo	220
B	Matrizes dinâmicas e matrizes de regressão	223
C	Matrizes soluções X e Y, e matrizes P e Λ	229
C.1	Matrizes soluções X e Y dos controladores quase-LPV	229
C.2	Matrizes P e Λ dos controles Markovianos	233

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Um dos problemas presentes na robótica é o controle de robôs manipuladores sujeito a incertezas paramétricas e distúrbios externos, [SAGE et al. (1999)]. Estas perturbações, além de deteriorarem o desempenho do manipulador, podem provocar instabilidade no sistema e, conseqüentemente, perigo para os usuários. O grau de dificuldade aumenta quando são considerados manipuladores com o número de atuadores menor que o número de graus de liberdade, denominados subatuados. Manipuladores subatuados podem ser úteis quando é importante a redução de peso, consumo de energia e custo, mas o grau de destreza do manipulador deve ser mantido, por exemplo, em aplicações espaciais.

O controle de manipuladores subatuados é particularmente difícil pois, devido às restrições não holonômicas de segundo grau geradas pela subatuação, não é possível controlar todas as juntas do manipulador ao mesmo tempo para uma posição desejada utilizando uma lei de controle linear por realimentação, [ORIOLO E NAKAMURA (1991)]. Assim, uma forma de posicionar o manipulador é: primeiro, as juntas sem atuadores são controladas utilizando o acoplamento dinâmico existente entre estas e as juntas atuadas; em seguida, as juntas com atuadores são controladas, mantendo as juntas não atuadas com os freios acionados, [BERGERMAN (1996)].

Dentre os diversos controles já desenvolvidos para atenuar os efeitos de pertur-

baixões, o controle $\mathcal{H}_\infty$ é o mais estudado e aplicado nos últimos anos. Tal controlador faz com que a relação entre as normas induzidas $\mathcal{L}_2$ dos sinais de entrada (distúrbios) e saída seja limitada por um nível de atenuação γ , ou seja, o ganho $\mathcal{L}_2$ do sistema em malha fechada seja limitado, [DOYLE et al. (1992)]. Para sistemas não lineares, a obtenção de controladores $\mathcal{H}_\infty$ é baseada em equações e inequações de Hamilton-Jacobi, que são de difícil solução quando os sistemas possuem elevado número de estados, [SCHAFT (1992)]. Um procedimento alternativo é representar o sistema não linear na forma quase-linear com parâmetros variantes (quase-LPV), sendo os parâmetros dependentes dos estados, e utilizar os controladores $\mathcal{H}_\infty$ desenvolvidos para sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV). A utilização de controladores desenvolvidos para sistemas LPV em sistemas quase-LPV é possível desde que os valores dos estados e de suas derivadas observados após a aplicação do controlador não sejam superiores aos limites utilizados no projeto, [HUANG E JADBABAIE (1998)].

Uma solução global para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para robôs manipuladores totalmente atuados foi encontrada em [CHEN et al. (1994)], baseada na teoria dos jogos diferenciais e utilizando propriedades dinâmicas de robôs manipuladores. No trabalhos [CHEN E CHANG (1997)], [CHEN et al. (1997)] e [CHANG E CHEN (1997)], as soluções dos problemas de controles misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais para robôs manipuladores foram apresentadas, respectivamente. Embora outros trabalhos abordem o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para robôs manipuladores, [SAGE et al. (1999)], apenas em [POSTLETHWAITE E BARTOSZEWICZ (1998)] resultados experimentais foram apresentados utilizando uma metodologia semelhante a [CHEN et al. (1994)]. Não há na literatura, implementação dos controladores desenvolvidos em [CHEN E CHANG (1997)], [CHEN et al. (1997)] e [CHANG E CHEN (1997)], em robôs manipuladores reais.

A subatuação em um manipulador também pode ser decorrente de uma falha em uma de suas juntas, fazendo com que o atuador pare de funcionar e a junta fique livre. Quando isto ocorre, deseja-se que o manipulador finalize a tarefa sendo realizada ou volte para a posição inicial para possíveis reparos. Após a ocorrência da

falha, o manipulador muda da configuração totalmente atuada para a configuração subatuada, sendo necessário realizar uma reconfiguração do controle. Os controladores já desenvolvidos para manipuladores totalmente atuados e subatuados não garantem que o sistema mantenha-se estável quando a reconfiguração do controle é realizada com o manipulador em movimento. É necessário frear o manipulador, e após a reconfiguração do controle, reiniciar o movimento. Tal procedimento pode provocar mais danos se as velocidades das juntas forem altas antes da utilização dos freios. Além disto, o torque utilizado para reiniciar o movimento pode ser alto, o que aumenta o consumo de energia. Portanto, o desenvolvimento de um sistema tolerante a falhas, no qual a estabilidade é mantida mesmo utilizando-se uma fase de reconfiguração do controle com o manipulador em movimento é importante para a redução dos custos e manutenção dos equipamentos.

Quando dois ou mais robôs manipuladores trabalham em conjunto para realizar determinada tarefa, como por exemplo, transportar um objeto, diz-se que eles formam um robô manipulador cooperativo. Se o objeto está rigidamente conectado aos efetuadores dos manipuladores, além do controle de posição do objeto, deve-se controlar as forças aplicadas neste para evitar o seu esmagamento. Assim, o controle de manipuladores cooperativos está dividido no controle de posicionamento do objeto e no controle das forças de esmagamento, [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)]. Se incertezas paramétricas e distúrbios externos estão presentes nos manipuladores, os dois controles são afetados. Em [LIAN et al. (2002)], apenas resultados simulados da aplicação de um controle lógico Fuzzy adaptativo com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ em robôs cooperativos são apresentados. Além disto, falhas do tipo junta livre podem ocorrer nas juntas de um ou mais manipuladores. Neste caso, o robô manipulador cooperativo torna-se subatuado. Como alguns graus de acionamento foram perdidos, alguns componentes das forças de esmagamento não podem ser controlados, [TINÓS (2003)].

1.2 Objetivos

Neste trabalho, propõe-se desenvolver, implementar e analisar controladores robustos para manipuladores individuais e cooperativos subatuados, visando atenuar os efeitos de incertezas paramétricas e distúrbios externos.

Além disto, busca-se desenvolver um sistema tolerante a falhas para manipuladores que garanta a estabilidade do sistema quando a reconfiguração pós-falha é realizada sem que o manipulador pare completamente.

1.3 Descrição do trabalho

A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento, implementação e análise de controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para o problema de acompanhamento de trajetória de robôs manipuladores individuais e cooperativos subatuados. Duas abordagens são consideradas para robôs manipuladores individuais. A primeira abordagem consiste em representar robôs manipuladores subatuados como sistemas não lineares na forma quase-LPV e utilizar o controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV, [WU et al. (1996)]. A segunda abordagem é a extensão do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos diferenciais, desenvolvido em [CHEN et al. (1994)], para robôs manipuladores subatuados, sendo esta uma das contribuições originais do trabalho. Com este mesmo procedimento, implementa-se os controles misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, [CHEN E CHANG (1997)], adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, [CHEN et al. (1997)] e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais, [CHEN E CHANG (1997)]. A implementação dos controladores é realizada nos manipuladores experimentais subatuados UArm II, do Laboratório de Sistemas Inteligentes, da Universidade de São Paulo.

Na segunda parte do trabalho, os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV e $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos são aplicados no sistema cooperativo formado pelos dois manipuladores Uarm II. Para aplicar estes controladores utiliza-se o procedimento de redução de ordem descrito em [MCCLAMROCH E WANG (1988)] para representar a dinâmica de um robô manipulador cooperativo totalmente atuado e subatuado na forma de um manipulador individual. Assim, as equações

em espaço de estados do erro de acompanhamento de trajetória do objeto para robôs manipuladores cooperativos são construídas, sendo os distúrbios derivados de incertezas paramétricas e distúrbios externos no torque.

Além disto, desenvolve-se um sistema tolerante a falhas para o robô manipulador UArm II, de tal forma que a reconfiguração de controle seja realizada com o manipulador em movimento. Para tal, um modelo Markoviano do manipulador UArm II é proposto, considerando todas as possibilidades de ocorrência de falhas e as mudanças de pontos de linearização. Duas seqüências de falhas são utilizadas na obtenção dos resultados experimentais com os controladores Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado e $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída. O sistema tolerante a falhas apresentado neste trabalho é o primeiro na literatura que utiliza um modelo Markoviano completo de um robô manipulador sujeito a falhas do tipo junta livre.

1.4 Estrutura do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

Na **Parte I** é realizado o estudo do controle de robôs manipuladores individuais totalmente atuados e subatuados.

No **Capítulo 2**, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares variantes no tempo [LU (1996)] é apresentado juntamente com a inequação de Hamilton-Jacobi correspondente ao caso de informação completa do estado (realimentação do estado). Também são apresentados os resultados para sistemas LPV com taxa de variação dos parâmetros limitada para o caso de realimentação do estado e da saída [WU (1995); WU et al. (1996)], a representação de um sistema não linear na forma quase-LPV [HUANG E JADBABAIE (1998)] e os procedimentos computacionais para solução de desigualdades matriciais lineares dependentes dos parâmetros [WU et al. (1996)].

No **Capítulo 3** são apresentadas as equações no espaço de estados do erro de acompanhamento de referência para manipuladores totalmente atuados e subatua-

dos. Estas equações são, na realidade, representações quase-LPV destes sistemas.

No **Capítulo 4**, as soluções dos problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear, misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais para robôs manipuladores, desenvolvidas, respectivamente, em [CHEN et al. (1994)], [CHEN E CHANG (1997)], [CHEN et al. (1997)] e [CHANG E CHEN (1997)] , são descritas. Também é apresentada a extensão destes controles para manipuladores subatuados.

No **Capítulo 5** são apresentados os resultados obtidos da implementação, no robô manipulador UArm II, dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para manipuladores.

No **Capítulo 6**, o modelo Markoviano do robô manipulador UArm II sujeito a falhas do tipo junta livre é apresentado. Controles Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado e $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída são utilizados. Tais controladores garantem que a estabilidade do sistema será mantida mesmo com a ocorrência de uma falha, sem a necessidade de parar completamente o manipulador no período de reconfiguração pós falha. Duas seqüências de falhas são consideradas nos resultados experimentais.

Na **Parte II** é realizado o estudo do controle de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados.

No **Capítulo 8**, o modelo dinâmico e a cinemática de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados são apresentados. Também é apresentado o controle das forças de esmagamento proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)] e utilizado neste trabalho.

No **Capítulo 9** são apresentadas as equações em espaço de estados do erro de acompanhamento de trajetória do objeto para robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados, sendo os distúrbios derivados de incertezas paramétricas e distúrbios externos. Estas equações são utilizadas no projeto de controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV e via teoria dos jogos.

No **Capítulo 10**, os resultados obtidos da implementação dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares no robô manipulador cooperativo formado por dois manipuladores UArm II são apresentados.

No **Capítulo 11** são apresentadas observações sobre os resultados experimentais obtidos com a implementação dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares e dos controladores Markovianos.

Parte I

Robôs manipuladores individuais

Capítulo 2

Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV

Neste capítulo é apresentado o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares e sua solução baseada em inequações de Hamilton-Jacobi. Entretanto, a obtenção de tal solução pode ser consideravelmente complexa para sistemas com muitos estados. Um procedimento alternativo consiste em representar o sistema não linear como um sistema quase-linear com parâmetros variantes e resolver o problema utilizando desigualdade matriciais lineares.

2.1 Introdução

Um importante objetivo no estudo de sistemas de controle é projetar controladores que atenuam os efeitos de distúrbios externos. Um dos mais populares procedimentos para obter este objetivo é o controle $\mathcal{H}_\infty$, sendo que o controlador é projetado de tal forma que o sistema em malha fechada tenha ganho $\mathcal{L}_2$ limitado, ou seja, a relação entre as normas induzidas $\mathcal{L}_2$ dos sinais de entrada (distúrbios) e saída seja limitada por um nível de atenuação γ [DOYLE et al. (1992); FRANCIS (1987)]. A solução em espaço de estados para o controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares foi demonstrada em [DOYLE et al. (1989); ZHOU et al. (1995); ZHOU E DOYLE (1998)], nos quais equações algébricas de Riccati são utilizadas para o cálculo do

controlador. Este trabalho foi estendido para sistemas lineares variantes no tempo (com horizonte de tempo finito) em [LIMEBEER et al. (1992)].

A generalização do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares invariantes no tempo (ou com horizonte infinito) foi primeiramente apresentada por [SCHAFT (1991); SCHAFT (1992)]. Vários trabalhos foram realizados posteriormente [BALL et al. (1991); HELTON E ZHAN (1994); HUANG E JADBABAIE (1998); ISIDORI (1994); ISIDORI (1994b); ISIDORI E ASTOLFI (1992); ISIDORI E KANG (1995); JADBABAIE et al. (1998); JAMES E BARAS (1995); LU (1995); LU (1996); LU E DOYLE (1993); LU E DOYLE (1993b); LU E DOYLE (1994); LU E DOYLE (1995); PRIMBS et al. (1998); SHAKED E SOUZA (1995); SU et al. (1999)]. Basicamente, na generalização para sistemas não lineares, as condições necessárias e suficientes para que o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ tenha solução consistem em resolver equações (inequações) de Hamilton-Jacobi. Em particular, [SCHAFT (1991)] mostrou que no caso de informação completa do estado (realimentação do estado), ou seja, quando as variáveis de medida contém todos os estados da planta sendo controlada, a solução do problema pode ser determinada pela solução de uma equação (ou inequação, como em [SCHAFT (1992)]) de Hamilton-Jacobi. Esta equação é a versão não linear da equação de Riccati considerada em [DOYLE et al. (1989)] para o correspondente problema de controle sub-ótimo $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares. Em [BALL et al. (1991); ISIDORI (1994); ISIDORI E ASTOLFI (1992); ISIDORI E KANG (1995); LU E DOYLE (1993); LU E DOYLE (1993b)], o problema de atenuação de distúrbios é estendido para o caso de realimentação da saída, ou seja, quando as variáveis de medida são funções ou contém parte dos estados da planta. Os autores de [BALL et al. (1991)] estabeleceram condições necessárias para a solução do problema de atenuação via realimentação da saída. Mais precisamente, eles provaram, sob certas condições, a necessidade de solução para a inequação de Hamilton-Jacobi introduzida em [SCHAFT (1992)] e para uma inequação de Hamilton-Jacobi dual, que é a versão não linear da equação de Riccati associada com o correspondente problema de estimativa de estado subótimo $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares. As soluções destas duas inequações de Hamilton-Jacobi desacopladas devem obedecer uma condição de acoplamento que, novamente, é análoga à condição de acoplamento existente entre

as soluções das equações de Riccati correspondentes no caso de sistemas lineares. Portanto, [BALL et al. (1991)] verifica o princípio da separação para sistemas não lineares. Em [LU (1996); ORLOV E ACHO (2001)], o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares variantes no tempo é considerado.

Várias ferramentas foram desenvolvidas com o objetivo de obter soluções globais para as inequações de Hamilton-Jacobi [HELTON E ZHAN (1994); ISIDORI (1994b); SCHAFT (1992)]. Entretanto, não há algoritmos eficientes para resolver tais inequações para sistemas com grande número de estados. Um procedimento alternativo com propriedades computacionais interessantes é proposto em [LU E DOYLE (1993); LU E DOYLE (1995)]. Baseado na possibilidade do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ linear ser caracterizado como um problema convexo, ou seja, utilizando-se desigualdades matriciais lineares (DMLs) [PACKARD E DOYLE (1993)], os autores analisaram a convexidade do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear e caracterizaram as soluções em termos de desigualdades matriciais não lineares, sendo na realidade DMLs dependentes do estado. A solução de DMLs é encontrada utilizando o método recentemente desenvolvido do ponto interior [NESTEROV E NEMIROVSKI (1994)].

Por outro lado, técnicas semelhantes foram desenvolvidas para sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) [APKARIAN (1997); APKARIAN E ADAMS (1998); APKARIAN E BIANNIC (1995); APKARIAN E GAHINET (1995); APKARIAN et al. (1995); BECKER E PACKARD (1994); WU (1995); WU et al. (1996); WU et al. (2000)] fornecendo controladores dependentes dos parâmetros, também chamados de ganhos escalonados, que satisfazem a condição de ganho $\mathcal{L}_2$ menor que γ . Alguns destes autores, [APKARIAN E BIANNIC (1995); APKARIAN et al. (1995); BECKER E PACKARD (1994)], utilizaram funções de Lyapunov quadráticas fixas para garantir a estabilidade e desempenho. Entretanto, tais procedimentos são conservadores, pois permitem que os parâmetros tenham taxa de variação arbitrária, e além disso, alguns sistemas não são sempre estabilizados quando uma função de Lyapunov simples é utilizada [WU et al. (1996)]. Esta limitação pode ser eliminada utilizando funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros [APKARIAN E ADAMS (1998); WU (1995); WU et al. (1996); WU et al. (2000)], que permitem incorporar o conhecimento da taxa de variação na análise e

síntese dos controladores. Procedimentos computacionais utilizando funções base e dividindo o espaço de parâmetros foram desenvolvidos em [APKARIAN E ADAMS (1998); APKARIAN E BIANNIC (1995); APKARIAN et al. (1995); WU (1995); WU et al. (1996)] para obter a solução das DMLs de dimensão infinita geradas por estas técnicas.

Para a classe de sistemas não lineares com entradas afins, várias técnicas de projeto fornecem representações lineares dependentes de parâmetros (ou dos estados) para as dinâmicas não lineares. O procedimento de Equação de Riccati Congelada (do inglês *Frozen*, ERC) [CLOUTIER et al. (1996)], no qual os parâmetros variantes do sistema são fixados em valores específicos, é o mais simples em termos de complexidade computacional e implementação, embora não haja garantia de estabilidade, e diferentes representações utilizadas no projeto por ERC apresentaram desempenhos diferentes para uma mesma planta não linear [HUANG E JADBABAIE (1998); HUANG E LU (1996)]. Quando a técnica LPV é aplicada em sistemas não lineares, os parâmetros variantes são funções do estado ao invés de variáveis “livres”. Este tipo de representação dos sistemas não lineares é denominada quase-LPV (quase linear com parâmetros variantes).

2.2 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas não lineares variantes no tempo

Considere um sistema não linear variante no tempo com entrada de distúrbio afim $w \in \mathbb{R}^p$ e saída controlada $z \in \mathbb{R}^q$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)w, \\ z &= h(x, t) + k(x, t)w,\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo $f(0, t) = 0$ e $h(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$, e $x \in \mathbb{R}^n$ o estado. Assume-se que $f(x, t)$, $g(x, t)$, $h(x, t)$ e $k(x, t)$ são funções continuamente diferenciáveis em relação a x e contínuas em t .

O sistema (2.1) possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ no intervalo $[0, T]$ se:

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt, \quad (2.2)$$

para todo $T \geq 0$ e todo $w \in \mathcal{L}_2(0, T)$ com o sistema iniciando em $x(0) = 0$. Para sistemas lineares invariantes no tempo, a condição de ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ corresponde à condição de a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência entre a entrada de distúrbio e a saída controlada ser limitada por γ , ou seja, $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

Lema 2.1 (LU (1996)) *O sistema (2.1), com $R(x, t) = I - k^T(x, t)k(x, t) > 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}^n$, possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ no intervalo $[0, T]$ se, e somente se, existe uma solução não negativa $V(x, t)$, com $V(0, 0) = 0$, para a desigualdade de Hamilton-Jacobi:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)(f(x, t) - g(x, t)R^{-1}(x, t)k^T(x, t)h(x, t)) \\ + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)g(x, t)R^{-1}(x, t)g^T(x, t) \frac{\partial V}{\partial x}^T(x, t) \\ + h^T(x, t)(I - k(x, t)k^T(x, t))h(x, t) \leq 0. \end{aligned}$$

2.3 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares variantes no tempo por realimentação do estado

Considere o seguinte problema de controle de um sistema não linear variante no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g_1(x, t)w + g_2(x, t)u, \\ z &= h_1(x, t) + k_{12}(x, t)u, \\ y &= \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w, \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo $u \in \mathfrak{R}^r$ a entrada de controle e $y \in \mathfrak{R}^{n+p}$ a saída medida. Neste caso, o estado x e o distúrbio w estão disponíveis para o controlador, sendo este da forma

$u = F(x, t)$. Assume-se que:

$$k_{12}^T(x, t) \begin{bmatrix} h_1(x, t) & k_{12}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.1 (LU (1996)) *Considere o sistema não lineares variantes no tempo, (2.3). O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para este sistema tem solução se existe uma função não negativa $V(x, t)$ que satisfaz a seguinte inequação de Hamilton-Jacobi:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)f(x, t) + h_1^T(x, t)h_1(x, t) + \\ + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) [g_1(x, t)g_1^T(x, t) + g_2(x, t)g_2^T(x, t)] \frac{\partial V}{\partial x}^T(x, t) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Além disso, a realimentação do estado

$$u = -\frac{1}{2}g_2^T(x, t)\frac{\partial V}{\partial x}^T(x, t)$$

resolve o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$.

2.4 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas LPV

Considere o seguinte sistema LPV:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho(t))x + B(\rho(t))w, \\ z &= C(\rho(t))x + D(\rho(t))w, \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo que $\rho(t) \in F_P^\nu$ e $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ são funções matriciais contínuas com dimensões apropriadas. F_P^ν é o conjunto no qual os parâmetros $\rho(t)$ podem variar:

$$F_P^\nu = \{ \rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) : \rho(t) \in P, |\dot{\rho}_i| \leq \nu_i, i = 1, \dots, m \},$$

sendo $P \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto, e $\nu = [\nu_1 \cdots \nu_m]^T$ com $\nu_i \geq 0$.

O lema a seguir fornece uma condição de suficiência para que o sistema tenha ganho $\mathcal{L}_2$ limitado por γ , considerando a matriz $D(\rho(t))$ nula.

Lema 2.2 (WU et al. (1996)) *Se existe uma função definida positiva continuamente diferenciável $W : \Re^m \rightarrow \Re^{n \times n}$ tal que:*

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \pm \left(\nu_i \frac{\partial W}{\partial \rho_i} \right) + A^T(\rho)W(\rho) + W(\rho)A(\rho) + C^T(\rho)C(\rho) & W(\rho)B(\rho) \\ B^T(\rho)W(\rho) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.6)$$

para todo $\rho(t) \in P$, então o sistema LPV (2.5), com $D(\rho(t)) = 0$, possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ para toda trajetória paramétrica $\rho(t) \in F_P^\nu$.

Note que (2.6) na realidade representa 2^m inequações, sendo que o termo $\sum \pm(\cdot)$ indica que toda combinação $+(\cdot)$ e $-(\cdot)$ deve ser satisfeita. O ponto chave deste resultado é a utilização de uma função de Lyapunov dependente do parâmetro $V(x, t) = x^T(t)W^{-1}(\rho(t))x(t)$. Esta função captura a natureza variante da planta LPV, o que não ocorre quando se utiliza funções de Lyapunov com W sendo uma matriz constante, como no caso de sistemas lineares invariantes no tempo.

2.5 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV por realimentação do estado

Considere o problema de síntese do controle por realimentação do estado sendo $z_1 \in \Re^{q_1}$ e $z_2 \in \Re^{q_2}$ as saídas controladas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\rho(t))x + B_1(\rho(t))w + B_2(\rho(t))u, \\ z_1 &= C_1(\rho(t))x, \\ z_2 &= C_2(\rho(t))x + u. \end{aligned} \quad (2.7)$$

O objetivo é encontrar uma função contínua em $\rho(t)$, $F(\rho(t))$, tal que o sistema em malha fechada possua ganho $\mathcal{L}_2$ menor que γ com lei de realimentação do estado igual a $u = F(\rho(t))x$.

Lema 2.3 (WU et al. (1996)) *Se existe uma função matricial contínua diferen-*

ciável $X(\rho(t)) > 0$ para todo $\rho(t) \in P$ que satisfaz

$$\begin{bmatrix} E(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.8)$$

sendo

$$E(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm \left(\nu_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right) + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T - B_2(\rho)B_2^T(\rho)$$

e $\hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$, então, com lei de realimentação do estado

$$u = -(B_2(\rho)X^{-1}(\rho) + C_2(\rho))x,$$

o sistema em malha fechada possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$ para toda trajetória paramétrica $\rho(t) \in F_P^\nu$.

O resultado acima é uma generalização natural da teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares. Novamente uma função de Lyapunov paramétrica na forma $V(x, t) = x^T(t)X^{-1}(\rho(t))x(t)$ é assumida. Como resultado, deve-se resolver as DMLs paramétricas (2.8), que é um problema de otimização convexo com dimensão infinita.

2.6 Análise do ganho $\mathcal{L}_2$ para sistemas LPV por realimentação da saída

Nesta seção, o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas LPV por realimentação da saída é estudado. Um controlador dependente do parâmetro que estabiliza a malha fechada do sistema LPV e garante que o ganho $\mathcal{L}_2$ entre o distúrbio e a saída controlada seja limitado por um nível de atenuação γ é encontrado.

Considere o sistema LPV em malha aberta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\rho(t))x + B_{11}(\rho(t))w_1 + B_{12}(\rho(t))w_2 + B_2(\rho(t))u, \\ z_1 &= C_{11}(\rho(t))x + D_{1111}(\rho(t))w_1 + D_{1112}(\rho(t))w_2, \\ z_2 &= C_{12}(\rho(t))x + D_{1121}(\rho(t))w_1 + D_{1122}(\rho(t))w_2 + u, \\ y &= C_2(\rho(t))x + w_2,\end{aligned}\tag{2.9}$$

sendo $\rho(t) \in F_P^\nu$, $w_1(t) \in \Re^{p_1}$ e $w_2(t) \in \Re^{p_2}$ as entradas de distúrbio, e $y(t) \in \Re^s$ a saída medida.

O controlador K_P de dimensão n , dependente do parâmetro $\rho(t)$ e de sua derivada, $\dot{\rho}(t)$, é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K(\rho(t), \dot{\rho}(t))x_K + B_K(\rho(t), \dot{\rho}(t))y, \\ u &= C_K(\rho(t), \dot{\rho}(t))x_K + D_K(\rho(t), \dot{\rho}(t))y,\end{aligned}\tag{2.10}$$

sendo $\rho(t) \in F_P^\nu$ e $x_K \in \Re^n$ o estado do controlador.

Define-se $x_{clp}^T = [x^T \ x_K^T]$, $z^T = [z_1^T \ z_2^T]$ e $w^T = [w_1^T \ w_2^T]$. Então o sistema LPV em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{clp} &= A_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t))x_{clp} + B_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t))w, \\ z &= C_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t))x_{clp} + D_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t))w,\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}A_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t)) &= \begin{bmatrix} A(\rho) + B_2(\rho)D_K(\rho, \dot{\rho})C_2(\rho) & B_2(\rho)C_K(\rho, \dot{\rho}) \\ B_K(\rho, \dot{\rho})C_2(\rho) & A_K(\rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix}, \\ B_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t)) &= \begin{bmatrix} B_{11}(\rho) & B_{12}(\rho) + B_2(\rho)D_K(\rho, \dot{\rho}) \\ 0 & B_K(\rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix}, \\ C_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t)) &= \begin{bmatrix} C_{11}(\rho) & 0 \\ C_{12}(\rho) + D_K(\rho, \dot{\rho})C_2(\rho) & C_K(\rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix}, \\ D_{clp}(\rho(t), \dot{\rho}(t)) &= \begin{bmatrix} D_{1111}(\rho) & D_{1112}(\rho) \\ D_{1121}(\rho) & D_{1122}(\rho) + D_K(\rho, \dot{\rho}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Lema 2.4 (WU (1995)) *Dado o sistema LPV em malha aberta (2.9) e o nível de atenuação $\gamma > 0$. Se existem uma função $W \in \mathcal{C}^1$ e funções matriciais contínuas (A_K, B_K, C_K, D_K) tais que $W(\rho(t)) > 0$ e*

$$\begin{bmatrix} E_{clp}(\rho, \beta) & W(\rho)B_{clp}(\rho, \beta) & \gamma^{-1}C_{clp}^T(\rho, \beta) \\ B_{clp}^T(\rho, \beta)W(\rho) & -I & \gamma^{-1}D_{clp}^T(\rho, \beta) \\ \gamma^{-1}C_{clp}(\rho, \beta) & \gamma^{-1}D_{clp}(\rho, \beta) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.11)$$

sendo

$$E_{clp}(\rho, \beta) = A_{clp}^T(\rho, \beta)W(\rho) + W(\rho)A_{clp}(\rho, \beta) + \sum_{i=1}^m \left(\beta_i \frac{\partial W}{\partial \rho_i} \right),$$

para todo $\rho(t) \in P$ e $\beta \leq \nu_i, i = 1, \dots, m$, então o sistema LPV em malha fechada com o controlador K_P definido em (2.10) é estável e possui ganho $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$.

2.7 Síntese do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV por realimentação da saída

Para simplificar a notação, define-se:

$$D_{11}(\rho) = \begin{bmatrix} D_{1111}(\rho) & D_{1112}(\rho) \\ D_{1121}(\rho) & D_{1122}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} D_{111.}(\rho) \\ D_{112.}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111}(\rho) & D_{1112}(\rho) \\ D_{1121}(\rho) & D_{1122}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} D_{11.1}(\rho) & D_{11.2}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111}(\rho) & D_{1112}(\rho) \\ D_{1121}(\rho) & D_{1122}(\rho) \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.2 (WU (1995)) *Dado o sistema LPV (2.9) e o conjunto compacto P .*

Um controlador K_P será encontrado se e somente se existirem funções matriciais $X \in \mathcal{C}^1$ e $Y \in \mathcal{C}^1$, tal que para todo $\rho(t) \in P$, $X(\rho(t)) > 0$, $Y(\rho(t)) > 0$, e as seguintes desigualdades sejam satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}(\rho) & X(\rho)C_{11}^T(\rho) & \gamma^{-1}\hat{B}(\rho) \\ C_{11}(\rho)X(\rho) & -I & \gamma^{-1}D_{111.}(\rho) \\ \gamma^{-1}\hat{B}^T(\rho) & \gamma^{-1}D_{111.}^T(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}(\rho) & Y(\rho)B_{11}^T(\rho) & \gamma^{-1}\tilde{C}^T(\rho) \\ B_{11}^T(\rho)Y(\rho) & -I & \gamma^{-1}D_{11.1}^T(\rho) \\ \gamma^{-1}\tilde{C}(\rho) & \gamma^{-1}D_{11.1}(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} X(\rho) & \gamma^{-1}I \\ \gamma^{-1}I & Y(\rho) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.14)$$

sendo

$$\hat{E}(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm \left(\nu_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right) + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T - B_2(\rho)B_2^T(\rho),$$

$$\tilde{E}(\rho) = \sum_{i=1}^m \pm \left(\nu_i \frac{\partial Y}{\partial \rho_i} \right) + \tilde{A}^T(\rho)Y(\rho) + Y(\rho)\tilde{A}(\rho)^T - C_2^T(\rho)C_2(\rho)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{A}(\rho) &= A(\rho) - B_2(\rho)C_{12}(\rho), & \hat{B}(\rho) &= B_1(\rho) - B_2(\rho)D_{112.}(\rho), \\ \tilde{A}(\rho) &= A(\rho) - B_{12}(\rho)C_2(\rho), & \tilde{C}(\rho) &= C_1(\rho) - D_{11.2}(\rho)C_2(\rho). \end{aligned}$$

Se as condições são satisfeitas, e considerando o conjunto compacto P e as funções contínuas em $\mathcal{C}^1$, é possível perturbar $X(\rho)$ tal que as duas DMLs (2.12 e 2.13) ainda são satisfeitas e $Q(\rho) = Y(\rho) - \gamma^{-2}X^{-1}(\rho) > 0$ uniformemente em P .

Define-se:

$$\begin{aligned}
\Omega(\rho) &= -D_{1122}(\rho) - D_{1121}(\rho)[\gamma^2 I - D_{1111}^T(\rho)D_{1111}]^{-1}D_{1111}^T(\rho)D_{1112}, \\
\bar{A}(\rho) &= A(\rho) + B_2(\rho)\Omega(\rho)C_2(\rho), \\
\bar{B}_1(\rho) &= B_1(\rho) + B_2(\rho)\Omega(\rho)D_{21}, \\
\bar{C}_1(\rho) &= C_1(\rho) + D_{12}\Omega(\rho)C_2(\rho), \\
\bar{D}_{11}(\rho) &= D_{11}(\rho) + D_{12}\Omega(\rho)C_2(\rho), \\
D_h(\rho) &= [I - \gamma^{-2}\bar{D}_{11}(\rho)\bar{D}_{11}^T(\rho)]^{-1}, \\
D_t(\rho) &= [I - \gamma^{-2}\bar{D}_{11}^T(\rho)\bar{D}_{11}(\rho)]^{-1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F(\rho) &= - (D_{12}^T D_h(\rho) D_{12})^{-1} [(B_2(\rho) + \gamma^{-2} \bar{B}_1(\rho) \bar{D}_{11}^T(\rho) D_h(\rho) D_{12})^T X^{-1}(\rho) \\
&\quad + D_{12}^T D_h(\rho) \bar{C}_1(\rho)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\rho) &= - [Y^{-1}(\rho)(C_2(\rho) + \gamma^{-2} D_{21} D_t(\rho) \bar{D}_{11}^T(\rho) \bar{C}_1(\rho))^T + \bar{B}_1(\rho) D_t(\rho) D_{21}^T] \\
&\quad \star (D_{21} D_t(\rho) D_{21}^T)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(\rho, \dot{\rho}) &= - [X^{-1}(\rho)A_F(\rho) + A_F^T(\rho)X^{-1}(\rho) + \sum_{i=1}^s \dot{\rho}_i \frac{\partial X^{-1}}{\partial \rho_i} + C_F^T(\rho)C_F(\rho) \\
&\quad + (X^{-1}(\rho)\bar{B}_1(\rho) + C_F^T(\rho)\bar{D}_{11}(\rho)) \\
&\quad \star (\gamma^{-2}I - \bar{D}_{11}^T(\rho)\bar{D}_{11}(\rho))^{-1}(\bar{B}_1^T(\rho)X^{-1}(\rho) + \bar{D}_{11}^T(\rho)C_F(\rho))],
\end{aligned}$$

com $A_F(\rho) = \bar{A}(\rho) + B_2(\rho)F(\rho)$ e $C_F(\rho) = \bar{C}_1(\rho) + D_{12}(\rho)F(\rho)$. Seja:

$$\begin{aligned}
M(\rho, \dot{\rho}) &= H(\rho, \dot{\rho}) + F^T(\rho) [B_2^T(\rho)X^{-1}(\rho) + D_{12}^T(\rho)(\bar{C}_1(\rho) + D_{12}(\rho)F(\rho))] \\
&\quad [\gamma^2 Q(\rho)(-Q^{-1}(\rho)Y(\rho)L(\rho)D_{21} - \bar{B}_1(\rho)) + F^T(\rho)D_{12}^T\bar{D}_{11}(\rho)] \\
&\quad \star [\gamma^{-2}I - \bar{D}_{11}^T(\rho)\bar{D}_{11}(\rho)]^{-1} [\bar{B}_1^T(\rho)X^{-1}(\rho) + \bar{D}_{11}^T(\rho)(\bar{C}_1(\rho) + D_{12}(\rho)F(\rho))].
\end{aligned}$$

Um controlador próprio K_P que resolve o problema de realimentação de saída é

dado por:

$$\begin{aligned} A_K(\rho(t), \dot{\rho}(t)) &= \bar{A}(\rho) + B_2(\rho)F(\rho) + Q^{-1}(\rho)Y(\rho)L(\rho)C_2(\rho) - \gamma^{-2}Q^{-1}(\rho)M(\rho, \dot{\rho}), \\ B_K(\rho(t)) &= -Q^{-1}(\rho)Y(\rho)L(\rho), \\ C_K(\rho(t)) &= F(\rho), \\ D_K(\rho(t)) &= \Omega(\rho). \end{aligned}$$

2.8 Considerações computacionais

Um esquema computacional prático [HUANG E JADBABAIE (1998); WU (1995); WU et al. (1996)] pode ser utilizado para resolver as desigualdades matriciais lineares presentes na análise e síntese dos problemas LPV. Por simplicidade, considere o problema de encontrar $X(\rho(t))$ na Equação (2.8). Primeiro, escolha um conjunto de funções $\mathcal{C}^1$, $\{f_i(\rho(t))\}_{i=1}^M$, como base para $X(\rho)$, ou seja,

$$X(\rho(t)) = \sum_{i=1}^M f_i(\rho(t))X_i, \quad (2.15)$$

sendo $X_i \in S^{n \times n}$ a matriz coeficiente para $f_i(\rho(t))$. Se $X(\rho(t))$ em (2.8) é substituída por (2.15), o problema de realimentação do estado transforma-se na seguinte otimização:

$$\min_{\{X_i\}_{i=1}^M} \gamma^2,$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} E^*(\rho) & \sum_{j=1}^M f_j(\rho)X_j C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho) \sum_{j=1}^M f_j(\rho)X_j & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\sum_{j=1}^M f_j(\rho)X_j > 0, \quad (2.16)$$

sendo

$$E^*(\rho) = - \sum_{i=1}^m \pm \left(\nu_i \sum_{j=1}^M \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i} X_j \right) + \sum_{j=1}^M f_j(\rho) (\hat{A}(\rho) X_j + X_j \hat{A}(\rho)^T) - B_2(\rho) B_2^T(\rho).$$

Note que (2.16) são DMLs em termos das variáveis matriciais $\{X_i\}_{i=1}^M$ que devem ser satisfeitas para todo parâmetro $\rho(t)$ em P . Para resolver este problema de otimização de dimensão infinita, divide-se o conjunto de parâmetros P em L pontos $\{\rho_k\}_{k=1}^L$ em cada dimensão. Então calcula-se as DMLs acima para estes pontos. Desde que (2.8) consiste em 2^m vínculos, um total de $(2^m + 1)L^m$ desigualdades matriciais afins em termos das M variáveis matriciais $\{X_i\}$ devem ser resolvidas. Uma aproximação da densidade de pontos particionados, L , que garante uma solução global das DMLs é dada em [WU (1995); WU et al. (1996)].

No projeto do controlador LPV por realimentação da saída, um total de $(2^{(m+1)} + 1)L^m$ desigualdades matriciais devem ser resolvidas em função das variáveis $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$. As variáveis $\{Y_i\}$ são definidas a partir da escolha de funções base para a função matricial $Y(\rho)$, de forma análoga ao realizado para $X(\rho)$.

Este esquema computacional possui algumas limitações. O número de parâmetros considerados e o número de divisões L devem ser escolhidos tais que a solução seja alcançada em um número de iterações realizáveis. Outro problema é a falta de justificativa teórica na escolha das funções base para $X(\rho)$ e $Y(\rho)$. Geralmente, escolhem-se funções similares às encontradas nas matrizes de estado $A(\rho(t))$ [APKARIAN E ADAMS (1998)].

2.9 Modelo quase-LPV para sistemas não lineares com entradas afins

Controladores com ganho escalonado tem sido utilizados para controlar sistemas não lineares. Tradicionalmente, o projeto de tais controladores é baseado em aproximações lineares invariantes da planta não linear em vários pontos de operação. Conforme as variáveis do sistema se aproximam de um ponto de operação, o ganho

relacionado a este ponto é selecionado. O desenvolvimento da técnica LPV gerou um meio sistemático de projetar controladores que se modificam de acordo com a variação dos parâmetros. Tratando as dinâmicas não lineares como sistemas lineares dependentes do estado, pode-se aplicar a técnica LPV para uma classe de sistemas não lineares.

Lema 2.5 (HUANG E JADBABAIE (1998)) *Suponha uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável com $f(0) = 0$. Então, uma função contínua matricial $A(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser sempre encontrada tal que $f(x) = A(x)x$.*

Note que $A(x)$ no lema acima não é uma linearização de $f(x)$. De fato, tem-se um número infinito de possíveis representações matriciais $A(x)$ para uma dada $f(x)$.

Exemplo 2.1 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:*

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

As funções:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x_1^2 \end{bmatrix}$$

são representações matriciais para $f(x)$.

A dinâmica não linear (2.1) pode ser transformada para:

$$\dot{x} = A(x)x + g(x)w,$$

que assemelha-se a um sistema linear exceto que as matrizes de estado dependem das variáveis de estado ao invés de serem constantes. Para manter o número de parâmetros variantes nas matrizes de estado $A(x)$ e $g(x)$ a um mínimo, a dependência destas matrizes nas variáveis de estado será mudada para $\rho(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ com $m < n$, isto é, $A(x)$ e $g(x)$ tornam-se $A(\rho(x))$ e $g(\rho(x))$, respectivamente. Por enquanto, $\rho(x)$ pode simplesmente representar parte das variáveis de estado.

A seguinte representação do sistema não linear com entradas afins, denominada representação quase-LPV, será usada para o problema de síntese do controlador por realimentação do estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\rho(x))x + B_1(\rho(x))w + B_2(\rho(x))u, \\ z_1 &= C_1(\rho(x))x, \\ z_2 &= C_2(\rho(x))x + u.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Esta representação é diferente do modelo LPV (2.7), apenas pelo fato que os parâmetros ρ_i são agora funções das variáveis de estado, isto é, $\rho = \rho(x)$. Visando atenuar os efeitos das entradas externas para todas as trajetórias paramétricas permitidas, o tratamento LPV inevitavelmente introduzirá algum conservadorismo devido à conexão entre os parâmetros e as variáveis.

Uma das dificuldades quando o Lema 2.3 é aplicado, é determinar os limites da taxa de variação de ρ , pois este não é conhecido *a priori*. Um meio de resolver este problema é restringir $X(\rho)$ no Lema 2.3 a ser constante, ou seja, $X(\rho) = X_1$. Sendo que a taxa de variação ν não influencia neste caso, o ganho $\mathcal{L}_2$ é garantido limitado para todas as trajetórias de estado. Entretanto, é muito conservador restringir nossa busca por funções de Lyapunov quadráticas com matriz constante. Um procedimento mais prático é usar a melhor estimativa dos limites da taxa de variação dos parâmetros. Esta aproximação deve ser verificada após a aplicação do controlador no sistema quase-LPV.

Para o problema de síntese do controlador por realimentação da saída, o sistema não linear será representado na seguinte forma quase-PLV:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\rho(x))x + B_{11}(\rho(x))w_1 + B_{12}(\rho(x))w_2 + B_2(\rho(x))u, \\ z_1 &= C_{11}(\rho(x))x + D_{1111}(\rho(x))w_1 + D_{1112}(\rho(x))w_2, \\ z_2 &= C_{12}(\rho(x))x + D_{1121}(\rho(x))w_1 + D_{1122}(\rho(x))w_2 + u, \\ y &= C_2(\rho(x))x + w_2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Capítulo 3

Manipuladores subatuados

Neste capítulo, as equações em espaço de estados do erro de acompanhamento de trajetória para robôs manipuladores totalmente atuados e subatuados são apresentadas, sendo os distúrbios derivados de incertezas paramétricas e distúrbios externos. Estas equações são, na realidade, representações quase-LPV das dinâmicas não lineares dos manipuladores e serão utilizadas no projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear como descrito no Capítulo 2. A representação quase-LPV generalizada de manipuladores subatuados, apresentada na Seção 3.3, é originalmente desenvolvida neste trabalho. Em [BECKER (1995)], a técnica LPV é aplicada no sistema subatuado *Acrobot*, com uma representação quase-LPV específica.

3.1 Introdução

A dificuldade de controlar as coordenadas generalizadas de um manipulador com o objetivo de seguir uma trajetória desejada pode ser de considerável grandeza se incertezas paramétricas e distúrbios externos estiverem presentes. A pesquisa realizada em [SAGE et al. (1999)] faz um apanhado das várias abordagens utilizadas em robôs manipuladores nos últimos anos para sobrepor esta dificuldade, mostrando diferentes formas de representar robôs manipuladores (linearização por realimentação de estados, flexíveis [TOMEI (1994); TOMEI (1995)]) e diferentes métodos de controle (robusto [JOHANSSON (1990)], $\mathcal{H}_\infty$ não linear [CHEN E CHANG (1997); CHEN

et al. (1994); POSTLETHWAITE E BARTOSZEWICZ (1998); TOMEI (1995)], adaptativo [CHANG E CHEN (1997)].

Particularmente em [JOHANSSON (1990)], um controle de movimento ótimo com minimização dos torques aplicados e um controle adaptativo são apresentados. A equação do erro de acompanhamento do estado, proposta naquele trabalho, é utilizada em [CHEN et al. (1994)] para resolver o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para um manipulador totalmente atuado. Uma solução explícita global para este problema, formulado como um jogo *minimax* (líder-seguidor), é desenvolvida utilizando teoria dinâmica dos jogos [BASAR E BERNHARD (1990); BASAR E OLSDER (1982)]. Baseado nesta teoria, deve-se resolver uma equação *minimax* de Bellman-Isaacs, que, após algumas modificações, é a equação de Hamilton-Jacobi encontrada em [LU (1996)] para o problema de controle de realimentação do estado. Utilizando a equação do erro de acompanhamento do estado e uma escolha apropriada da função de Lyapunov, a equação *minimax* de Bellman-Isaacs é então transformada para uma equação algébrica de Ricatti, cuja solução pode ser facilmente encontrada a partir de propriedades dos robôs manipuladores. O resultado de [CHEN et al. (1994)] é um tipo de linearização por realimentação de estados com um termo não linear introduzido na aceleração de controle. Utilizando a mesma metodologia, resultados semelhantes podem ser encontrados para o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear de robôs manipuladores [CHEN E CHANG (1997)]. Neste caso, duas equações algébricas de Ricatti são derivadas buscando satisfazer índices de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

Nos trabalhos [CHEN et al. (1994)] e [CHEN E CHANG (1997)], os parâmetros nominais do robô manipulador são assumidos conhecidos, o que muitas vezes não se verifica na prática. Em [CHEN et al. (1997)], os autores propõem um algoritmo de controle adaptativo que garante desempenho $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas robóticos com parâmetros incertos (ou desconhecidos) e distúrbios externos. Neste caso, os parâmetros do manipulador são estimados através de uma lei de controle que utiliza a matriz de regressão resultante de uma parametrização linear. Porém, existem dificuldades neste método: os parâmetros podem variar rapidamente, o cálculo da matriz de regressão pode consumir muito tempo e incertezas no modelo não são

consideradas. Para eliminar estas limitações, redes neurais são utilizadas para representar a função descritiva do modelo em [CHANG E CHEN (1997)]. A atualização dos parâmetros das redes neurais é feita através de um algoritmo adaptativo com desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Neste método, não são necessários o conhecimento do modelo dinâmico do robô manipulador e o cálculo da matriz de regressão.

De acordo com [SAGE et al. (1999)], outros trabalhos tratam de $\mathcal{H}_\infty$ não linear para robôs manipuladores, embora somente [POSTLETHWAITE E BARTOSZEWICZ (1998)] possua resultados experimentais utilizando uma metodologia semelhante a [CHEN et al. (1994)].

Uma aplicação da técnica LPV em um manipulador flexível é apresentada em [APKARIAN E ADAMS (1998)]. A solução para o caso de realimentação da saída é encontrada utilizando-se as mesmas ferramentas desenvolvidas em [WU et al. (1996)]: escolha de funções base e partição do espaço dos parâmetros. Com o objetivo de melhorar o desempenho e rejeitar perturbações, pesos foram acrescentados na saída e na entrada do sistema nominal.

Manipuladores subatuados, ou seja, com menos atuadores que graus de liberdade, também são de grande interesse para muitos pesquisadores [ARAI (1996); ARAI E TACHI (1991); ARAI et al. (1993); ARAI et al. (1997); ARAI et al. (1998); BARBEIRO (2001); BECKER (1995); BERGERMAN (1996); BERGERMAN et al. (2000); LUCA et al. (1997); LYNCH et al. (1998); MACIEL (2001); MARECZEK et al. (1998); NAKASHIMA (2001); ORIOLO E NAKAMURA (1991); SABER (1999); SABER (2000); SABER E MEGRETSKI (1998); SUZUKI et al. (1996); TERRA et al. (1999); TERRA et al. (2000b); TERRA et al. (2000c); TERRA et al. (2001)]. A controlabilidade deste tipo de sistema mecânico foi primeiramente apresentada em [ORIOLO E NAKAMURA (1991)]. Neste artigo, é provada a impossibilidade de controlar todas as juntas de um manipulador subatuado ao mesmo tempo para uma posição desejada utilizando uma lei de controle linear por realimentação, devido às restrições não holonômicas de segundo grau geradas pela subatuação.

O comportamento não linear de um manipulador com dois ligamentos, sendo a segunda junta passiva, foi estudado em [SUZUKI et al. (1996)] baseado em mapas

de Poincaré gerados pela aplicação de uma entrada senoidal na aceleração da junta ativa. O sistema mostrou-se caótico quando amplitudes elevadas para esta entrada são utilizadas, enquanto que, para baixas amplitudes o posicionamento da junta passiva segue uma trajetória bem comportada. Desta forma, uma estratégia de controle foi desenvolvida: primeiro, controla-se a junta ativa até a posição desejada; em seguida, a junta passiva é controlada pela variação da amplitude da entrada senoidal no atuador da junta ativa. A junta ativa retornará à sua posição inicial, pois a sua posição também apresentará um comportamento senoidal. Uma técnica semelhante é descrita em [LUCA et al. (1997)] e [HONG (2002)].

Uma outra estratégia de controle foi apresentada em [ARAI E TACHI (1991)]. Inicialmente, todas as juntas passivas (sem atuadores) são controladas para suas posições finais desejadas. Em seguida, com as juntas passivas freadas, as juntas ativas (com atuadores) são controladas. Em [BERGERMAN (1996)], três possibilidades de selecionar as juntas a serem controladas em cada fase de controle são apresentadas. Pode-se escolher apenas juntas passivas, passivas e ativas ou apenas ativas. Um controle robusto utilizando estrutura variável é proposto naquele trabalho.

Resultados simulados utilizando a técnica LPV aplicada a um sistema subatuado específico, o robô *Acrobot*, foram obtidos em [BECKER (1995)], entretanto, não há na literatura referência à implementação de técnica semelhante em robôs subatuados reais. Estudos sobre planejamento de trajetórias livres de colisão para manipuladores subatuados foram realizados em [BERGERMAN (1996); LYNCH et al. (1998)].

Diversas técnicas de controle foram aplicadas ao robô manipulador subatuado UArm II [BARBEIRO (2001); FARFAN (2000); MACIEL (2001); NAKASHIMA (2001); TERRA et al. (1999); TERRA et al. (2000); TERRA et al. (2000b); TERRA et al. (2000c); TERRA et al. (2001)], um robô planar de três juntas cuja configuração (totalmente atuado ou subatuado) pode ser facilmente alterada via *software*. Uma linearização por realimentação de estados com compensação na forma de espaço de estados é utilizada para calcular os controladores ótimo [MACIEL (2001)], $\mathcal{H}_\infty$ linear subótimo [NAKASHIMA (2001)] e via síntese μ [BARBEIRO (2001)]. Em [TERRA et al. (1999)], um controlador com custo garantido projetado

via DMLs e utilizando uma linearização em torno de pontos de operação é encontrado. Tais controladores mostraram-se eficazes no controle de posicionamento para várias configurações subatuadas. Os resultados descritos em [TERRA et al. (1999)] foram agrupados a resultados de detecção de falhas e apresentados em [TERRA et al. (2001)] como um controle de robôs manipuladores tolerante a falhas.

3.2 Manipuladores totalmente atuados

A equação dinâmica de robôs manipulador totalmente atuados pode ser formulada pela teoria de Lagrange [CRAIG (1986)] como:

$$\begin{aligned}\tau &= M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q), \\ &= M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q)\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo $q \in \mathbb{R}^n$ o vetor das posições angulares das juntas, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia (simétrica e positiva definida), $V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ o vetor das forças centrípetas e de Coriolis, $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de Coriolis, $F(\dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ o vetor dos torques de fricção, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ o vetor dos torques gravitacionais e $\tau \in \mathbb{R}^n$ o vetor dos torques aplicados. As incertezas paramétricas podem ser introduzidas dividindo as matrizes e os vetores paramétricos $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, $F(\dot{q})$ e $G(q)$ em uma parte nominal e uma perturbada:

$$\begin{aligned}M(q) &= M_0(q) + \Delta M(q), \\ C(q, \dot{q}) &= C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}), \\ F(\dot{q}) &= F_0(\dot{q}) + \Delta F(\dot{q}), \\ G(q) &= G_0(q) + \Delta G(q),\end{aligned}$$

sendo $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $F_0(\dot{q})$ e $G_0(q)$ as matrizes e os vetores nominais, e $\Delta M(q)$, $\Delta C(q, \dot{q})$, $\Delta F(\dot{q})$ e $\Delta G(q)$ as incertezas paramétricas. Distúrbios externos de energia finita, τ_d , podem ser também introduzidos. Após estas considerações a Equação (3.1) fica:

$$\tau + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q),\tag{3.2}$$

com

$$\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta F(\dot{q}) + \Delta G(q) - \tau_d).$$

O estado é composto pelo erro de acompanhamento de trajetória e sua derivada:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}^d \\ q - q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo q^d e $\dot{q}^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada e sua correspondente velocidade, respectivamente. Assume-se que as variáveis q^d , $\dot{q}^d$ e $\ddot{q}^d$ (aceleração desejada) satisfazem os limites físicos e cinemáticos do objeto de controle. A equação dinâmica em espaço de estados de manipuladores totalmente atuados é encontrada utilizando (3.2) e (3.3):

$$\dot{\tilde{x}} = A(q, \dot{q})\tilde{x} + Bu + Bw, \quad (3.4)$$

com

$$\begin{aligned} A(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C_0(q, \dot{q}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w &= M_0^{-1}(q)\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d), \\ u &= M_0^{-1}(q)(\tau - M_0(q)\ddot{q}^d - C_0(q, \dot{q})\dot{q}^d - F_0(\dot{q}) - G_0(q)). \end{aligned}$$

Pela equação acima, o torque aplicado pode ser dado por:

$$\tau = M_0(q)(\ddot{q}^d + u) + C_0(q, \dot{q})\dot{q}^d + F_0(\dot{q}) + G_0(q).$$

Embora a matriz $M_0(q)$ dependa explicitamente das posições, pode-se considerá-la como função do erro de acompanhamento de posição e do tempo [JOHANSSON (1990)]. Tal afirmação pode ser visualizada pela seguinte observação:

$$M_0(q) = M_0(\tilde{q} + q^d(t)) = M_0(\tilde{x}, t). \quad (3.5)$$

O mesmo pode ser dito para $C_0(q, \dot{q})$. Portanto, a Equação (3.4) pode ser considerada uma representação quase-LPV para robôs manipuladores, ou seja, com $A(\tilde{x}, t)$. Nota-se que esta representação foi gerada naturalmente a partir de um sistema não linear escolhendo-se a matriz $C_0(q, \dot{q})$. Existem várias possibilidades de se escolher a matriz $C_0(q, \dot{q})$, entretanto, a mais utilizada é a que faz com que a matriz $(C_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}_0(q, \dot{q}))$ seja anti-simétrica, [LEWIS et al. (1993)].

3.3 Manipuladores subatuados

Robôs manipuladores subatuados são sistemas mecânicos com menos atuadores que graus de liberdade. Por esta razão, o controle das juntas passivas (sem atuadores) é feito considerando o acoplamento dinâmico entre elas e as juntas ativas (com atuadores). Aqui, considera-se que as juntas passivas possuem freios. A estratégia é controlar, aplicando torques nas ativas, todas as juntas passivas até alcançar a posição final desejada, e então, acionar os freios. Em seguida, todas as juntas ativas são controladas.

Considere um manipulador com n juntas, das quais n_p são passivas e n_a são ativas. Sabe-se que não mais que n_a juntas podem ser controladas em cada instante com auxílio de freios [ARAI E TACHI (1991)]. Utilizando-se disto, agrupa-se as n_a juntas sendo controladas no vetor $q_c \in \mathbb{R}^{n_a}$. As juntas restantes são agrupadas no vetor $q_r \in \mathbb{R}^{n-n_a}$. Existem duas possibilidades de se formar o vetor q_c [BERGERMAN (1996)]:

1. q_c contém somente juntas passivas: quando $n_p \geq n_a$ e todas as outras juntas passivas, se houver alguma, são mantidas freadas;
2. q_c contém juntas ativas e passivas: quando $n_p < n_a$.

A estratégia de controle é: primeiro, escolha o vetor q_c satisfazendo as possibilidades 1 ou 2 (de acordo com n_p), até que todas as juntas passivas cheguem a posição final desejada, neste instante as juntas passivas são freadas; segundo, controle as juntas ativas até a posição desejada considerando o manipulador totalmente atuado.

A Equação (3.2) pode ser particionada como:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ar}(q) & M_{ac}(q) \\ M_{ur}(q) & M_{uc}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ar}(q, \dot{q}) & C_{ac}(q, \dot{q}) \\ C_{ur}(q, \dot{q}) & C_{uc}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a(\dot{q}) \\ F_u(\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a(q) \\ G_u(q) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

na qual os índices a e u representam as juntas ativas e passivas livres (freios não acionados), respectivamente. Isolando o vetor $\ddot{q}_r$ na segunda linha de (3.6) e substituindo na primeira linha, obtém-se:

$$\tau_a + \bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = \bar{M}_0(q)\ddot{q}_c + \bar{C}_0(q, \dot{q})\dot{q}_c + \bar{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r + \bar{F}_0(q, \dot{q}) + \bar{G}_0(q), \quad (3.7)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{M}_0(q) &= M_{ac}(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)M_{uc}(q), \\ \bar{C}_0(q, \dot{q}) &= C_{ac}(q, \dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)C_{uc}(q, \dot{q}), \\ \bar{E}_0(q, \dot{q}) &= C_{ar}(q, \dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)C_{ur}(q, \dot{q}), \\ \bar{F}_0(q, \dot{q}) &= F_a(\dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)F_u(\dot{q}), \\ \bar{G}_0(q) &= G_a(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)G_u(q), \\ \bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) &= \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)\delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d). \end{aligned}$$

Notando-se a similaridade entre as equações (3.7) e (3.2), a menos do termo $\bar{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r$, o desenvolvimento de uma representação em espaço de estados para manipuladores subatuados é feito naturalmente. Define-se o estado como:

$$\tilde{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{q}_c - \dot{q}_c^d \\ q_c - q_c^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_c \\ \tilde{q}_c \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação em espaço de estados de manipuladores subatuados pode ser dada por:

$$\dot{\tilde{x}}_c = \bar{A}(q, \dot{q})\tilde{x}_c + \bar{B}\bar{u} + \bar{B}\bar{w}, \quad (3.8)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{A}(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -\bar{M}_0^{-1}(q)\bar{C}_0(q, \dot{q}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{w} &= \bar{M}_0^{-1}(q)\bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d), \\ \bar{u} &= \bar{M}_0^{-1}(q)(\tau_a - \bar{M}_0(q)\ddot{q}_c^d - \bar{C}_0(q, \dot{q})\dot{q}_c^d - \bar{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r - \bar{F}_0(q, \dot{q}) - \bar{G}_0(q)).\end{aligned}$$

Pela equação acima, o torque aplicado nas juntas ativas pode ser dado por:

$$\tau_a = \bar{M}_0(q)(\ddot{q}_c^d + \bar{u}) + \bar{C}_0(q, \dot{q})\dot{q}_c^d + \bar{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r + \bar{F}_0(q, \dot{q}) + \bar{G}_0(q).$$

As mesmas considerações de dependência das matrizes $M(q)$ e $C(q, \dot{q})$ podem ser observadas para as matrizes $\bar{M}(q)$ e $\bar{C}(q, \dot{q})$ em relação aos erros de posição e de velocidade das juntas controladas. Assim, pode-se representar manipuladores subatuados na forma quase-LPV sendo $\bar{A}(\tilde{x}_c, q_r, \dot{q}_r, t)$.

Capítulo 4

Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos para robôs manipuladores subatuados

A solução para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear de robôs manipuladores totalmente atuados apresentada neste capítulo, e desenvolvida em [CHEN et al. (1994)], consiste em realizar uma transformação de estados a partir da Equação (3.4) e aplicar a teoria dos jogos diferenciais. Escolhendo-se uma função de Lyapunov dependente do estado, o problema *minimax* gerado pela teoria dos jogos, reduz-se a uma equação de Riccati, cuja solução pode ser facilmente encontrada escolhendo-se apropriadamente a função P contida na função de Lyapunov e utilizando a propriedade de anti-simetria das matrizes dinâmicas do manipulador. Esta equação é uma particularização da equação de Hamilton-Jacobi para o caso não linear variante no tempo (2.4). Esta mesma estratégia foi utilizada em [CHEN E CHANG (1997)], [CHEN et al. (1997)] e [CHANG E CHEN (1997)] para resolver o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais, respectivamente. Na extensão destas soluções para o caso subatuado, contribuição original deste trabalho, foi realizada a dedução de novas equações do erro de acompanhamento do estado necessárias para satisfazer as condições de positividade e simetria da matriz P e de anti-simetria das matrizes dinâmicas.

4.1 Manipuladores totalmente atuados

Considere a definição de estado para manipuladores totalmente atuados, Equação (3.3). Utiliza-se a seguinte transformação de estados [CHEN et al. (1994); JOHANSSON (1990)]:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

sendo $T_1 = [T_{11} \ T_{12}]$ com $T_{11}, T_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes a serem determinadas. Assume-se que a matriz T_{11} é diagonal, ou seja, $T_{11} = t_{11}I$. A equação dinâmica em espaço de estados de manipuladores totalmente atuados (3.4) fica:

$$\dot{\tilde{x}} = A_T(\tilde{x}, t)\tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t)T_{11}(-F(x_e) + \tau) + B_T(\tilde{x}, t)w, \quad (4.2)$$

com

$$\begin{aligned} A_T(\tilde{x}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C_0(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\ B_T(\tilde{x}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_0^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w &= T_{11}\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d), \\ x_e &= [q^T \ \dot{q}^T \ (q^d)^T \ (\dot{q}^d)^T \ (\ddot{q}^d)^T] \end{aligned}$$

e

$$F(x_e) = M_0(q)(\ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\ddot{\tilde{q}}) + C_0(q, \dot{q})(\dot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}) + F_0(\dot{q}) + G_0(q). \quad (4.3)$$

Seleciona-se a entrada de controle como $u = T_{11}(-F(x_e) + \tau)$, que em termos das variáveis de transformação $\tilde{z}_1$ e do estado $\tilde{x}$ pode ser dado por:

$$u = \begin{bmatrix} M(q) & C(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} = M(q)T_1\dot{\tilde{x}} + C(q, \dot{q})T_1\tilde{x}. \quad (4.4)$$

Quando os valores das matrizes paramétricas $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $F_0(\dot{q})$ e $G_0(q)$ são conhecidos, pode-se calcular exatamente o termo $F(x_e)$ e usar a lei de controle, $\tau = F(x_e) + T_{11}^{-1}u$.

A relação entre os torques aplicados e a entrada de controle também pode ser dada por:

$$\tau = M_0(q)\ddot{q} + C_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q), \quad (4.5)$$

com

$$\ddot{q} = \ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{\ddot{q}} - T_{11}^{-1}M_0^{-1}(q) (C_0(q, \dot{q})B^T T_0 \tilde{x} - u.) \quad (4.6)$$

As equações acima representam uma tipo de linearização por realimentação de estados, contendo um termo não linear na aceleração de controle (4.6).

4.1.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

Considera-se nesta seção que o termo $F(x_e)$ está disponível para o controle. A aplicação do controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear requer que os efeitos do distúrbio combinado w no sistema sejam minimizados pela estratégia de controle. Com esta intenção, e sujeito à dinâmica do erro de acompanhamento, o seguinte critério de desempenho, incluindo um nível de atenuação de distúrbio desejado γ , é proposto:

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \max_{0 \neq w(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) \right) dt}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} w^T(t) w(t) \right) dt} \leq \gamma^2, \quad (4.7)$$

sendo Q e R matrizes de ponderação e $\tilde{x}(0) = 0$. Este critério de desempenho é semelhante ao apresentado pela Equação (2.2), sendo que neste caso matrizes de ponderação são acrescentadas no estado e na entrada de controle.

A solução do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ (4.7), relacionado à equação de estado, (4.2), pode ser explicitamente encontrada pela teoria dos jogos diferenciais [BASAR E BERNHARD (1990); BASAR E OLSDER (1982)] e uma apropriada escolha da função de Lyapunov $V(\tilde{x}, t)$ [CHEN et al. (1994)].

A metodologia apresentada por [CHEN et al. (1994)] para resolver este problema é resumida a seguir. O critério de desempenho (4.7) pode ser modificado para formar o seguinte problema *minimax*:

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \max_{0 \neq w(\cdot) \in \mathcal{L}_2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T(t) w(t) \right) dt \leq 0,$$

com $\tilde{x}(0) = 0$.

Definindo a função de custo:

$$J(\tilde{x}(t), u, w, t) = \int_t^\infty L(\tilde{x}(s), u(s), w(s)) ds,$$

sendo $L(\tilde{x}, u, w)$ o Lagrangiano dado por:

$$L(\tilde{x}, u, w) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T(t) w(t).$$

Definindo-se a função de Lyapunov:

$$V(\tilde{x}(t), t) = \min_{u(\cdot)} \max_{w(\cdot)} J(\tilde{x}(t), u, w, t),$$

o critério de desempenho (4.7) fica:

$$V(\tilde{x}(0), 0) = \min_{u(\cdot)} \max_{w(\cdot)} J(\tilde{x}(0), u, w, 0) \leq 0,$$

com $\tilde{x}(0) = 0$.

De acordo com a teoria dos jogos diferenciais, a solução deste problema *minimax* (ou líder-seguidor) é encontrada se existe uma função de Lyapunov continuamente diferenciável $V(\tilde{x}, t)$ que satisfaz a seguinte equação *minimax* de Bellman-Isaacs:

$$-\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \min_{u(\cdot)} \max_{w(\cdot)} \left\{ L(\tilde{x}, u, w) + \left(\frac{\partial V(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} \right)^T \tilde{x} \right\},$$

com condição terminal $V(\tilde{x}(\infty), \infty) = 0$.

Escolhendo a função de Lyapunov da forma:

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \quad (4.8)$$

sendo $P(\tilde{x}, t)$ uma matriz simétrica definida positiva para todo t , a equação de

Bellman-Isaacs fornece a seguinte equação de Riccati:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\tilde{x}, t) + P(\tilde{x}, t)A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t) \\ - P(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t) \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}I \right) B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t) + Q = 0. \end{aligned}$$

A equação acima pode ser gerada a partir da Equação (2.4), considerando o critério de desempenho (4.7), tomando-se uma representação quase-linear da dinâmica não linear e utilizando a função $V(x, t)$ como descrito na Equação (4.8). O controle ótimo correspondente e o pior caso de distúrbio são dados, respectivamente, por:

$$u^* = -R^{-1}B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}$$

e

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2}B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}.$$

Com uma escolha apropriada da matriz $P(\tilde{x}, t)$ e sendo a matriz $(C_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}_0(q, \dot{q}))$ anti-simétrica [CHEN et al. (1994)], a equação de Riccati pode ser simplificada para uma equação matricial algébrica. A matriz $P(\tilde{x}, t)$ escolhida por [CHEN et al. (1994); JOHANSSON (1990)] é:

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0(\tilde{x}, t) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0, \quad (4.9)$$

sendo K uma matriz simétrica definida positiva. A equação algébrica simplificada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}I \right) B^T T_0 + Q = 0. \quad (4.10)$$

O controle ótimo e o pior caso de distúrbio podem ser reescritos, respectivamente como:

$$u^* = -R^{-1}B^T T_0 \tilde{x} \quad (4.11)$$

e

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2}B^T T_0 \tilde{x}.$$

A condição terminal é satisfeita para esta escolha de $P(\tilde{x}, t)$, [CHEN et al. (1994)]. Então, para solucionar o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, deve-se encontrar matrizes K e T_0 que resolvam a equação algébrica (4.10).

A solução da Equação (4.10) é:

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

e

$$K = \frac{1}{2} (Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1) - \frac{1}{2} (Q_{21}^T + Q_{12}),$$

com as condições: $K > 0$ e $R < \gamma^2 I$. A matriz R_1 é o resultado da fatoração de Cholesky:

$$R_1^T R_1 = \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1} \quad (4.13)$$

e a matriz simétrica definida positiva Q é fatorada como:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Finalmente, o algoritmo de projeto pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Escolha um nível desejado de atenuação, $\gamma > 0$.
2. Selecione a matriz de peso $R > 0$ tal que $\lambda_{\max}(R) < \gamma^2$ e a matriz de peso Q como (4.14) e satisfazendo $K > 0$.
3. Calcule a fatoração de Cholesky (4.13) e T_0 (4.12).
4. Obtenha o controle ótimo u (4.11) e o torque aplicado ótimo (4.5) e (4.6).

4.1.2 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear

Na aplicação do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, além da atenuação dos efeitos dos distúrbios externos, a obtenção do mínimo custo quadrático ($\mathcal{H}_2$ ótimo) é requerida, [CHEN E CHANG (1997)]. Portanto, o controle $\mathcal{H}_2$ ótimo deve ser obtido

vinculado ao critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$.

Considere o sistema perturbado (4.2). Dado um nível de atenuação $\gamma > 0$ e matrizes de ponderação Q_1 , Q_2 e R , o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ tem solução se o critério ótimo $\mathcal{H}_2$:

$$\min_{u(t)} \left(\tilde{x}^T(t_f) Q_{2f} \tilde{x}(t_f) + \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t) Q_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt \right), \quad (4.15)$$

pode ser alcançado para alguma matriz definida positiva $Q_{2f} = Q_{2f}^T > 0$, sujeito ao critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$:

$$\begin{aligned} \max_{w(t) \in \mathcal{L}_2[0, t_f]} \left(\tilde{x}^T(t_f) Q_{1f} \tilde{x}(t_f) + \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t) Q_1 \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)) dt \right) \\ \leq \tilde{x}^T(0) P_0 \tilde{x}(0), \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo $P_0 = P_0^T > 0$ e $Q_{1f} = Q_{1f}^T > 0$.

Seja

$$J_1(u, w) = \tilde{x}^T(t_f) Q_{1f} \tilde{x}(t_f) + \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t) Q_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)) dt$$

e

$$J_2(u, w) = \tilde{x}^T(t_f) Q_{2f} \tilde{x}(t_f) + \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T(t) Q_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt.$$

O problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ com critérios de desempenho (4.15) e (4.16) é equivalente a encontrar um par $(u^*(t), w^*(t))$ tal que:

$$J_2(u^*, w^*) \leq J_2(u, w^*) \quad \forall u(t) \in \mathcal{L}_2[0, t_f]$$

e

$$J_1(u^*, w^*) \geq J_1(u^*, w) \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2[0, t_f],$$

sendo $u^*(t)$ e $w^*(t)$ as soluções do problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Teorema 4.1 (CHEN E CHANG (1997)) *Dado o sistema perturbado (4.2), se*

o controle ótimo e o pior caso de distúrbio são dados, respectivamente, por:

$$u^* = -R^{-1}B_T^T(\tilde{x}, t)P_2(\tilde{x}, t)\tilde{x} \quad (4.17)$$

e

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2}B_T^T(\tilde{x}, t)P_1(\tilde{x}, t)\tilde{x}, \quad (4.18)$$

sendo $P_1(\tilde{x}, t)$ e $P_2(\tilde{x}, t)$ as soluções das seguinte equações de Riccati acopladas:

$$\begin{aligned} -\dot{P}_1(\tilde{x}, t) = & P_1(\tilde{x}, t)A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t)P_1(\tilde{x}, t) + Q_1 \\ & - [P_1(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t) \quad P_2(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t)] \begin{bmatrix} \frac{-1}{\gamma^2}I & R^{-1} \\ R^{-1} & -R^{-1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} B_T^T(\tilde{x}, t)P_1(\tilde{x}, t) \\ B_T^T(\tilde{x}, t)P_2(\tilde{x}, t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

e

$$\begin{aligned} -\dot{P}_2(\tilde{x}, t) = & P_2(\tilde{x}, t)A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t)P_2(\tilde{x}, t) + Q_2 \\ & - [P_1(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t) \quad P_2(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t)] \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\gamma^2}I \\ \frac{-1}{\gamma^2}I & R^{-1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} B_T^T(\tilde{x}, t)P_1(\tilde{x}, t) \\ B_T^T(\tilde{x}, t)P_2(\tilde{x}, t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

com $P_1(\tilde{x}(t_f), t) = Q_{1f}$, $P_2(\tilde{x}(t_f), t) = Q_{2f}$, $P_1(\tilde{x}, t) = P_1^T(\tilde{x}, t) \geq 0$ e $P_2(\tilde{x}, t) = P_2^T(\tilde{x}, t) \geq 0$, então (4.17) e (4.18) são as soluções do problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Analogamente à solução da equação de Riccati para o controle $\mathcal{H}_\infty$, descrita na Seção 4.1.1, uma escolha apropriada das matrizes $P_1(\tilde{x}, t)$ e $P_2(\tilde{x}, t)$ transforma as equações de Riccati acopladas (4.19) e (4.20) em equações matriciais algébricas acopladas. Assim, as matrizes $P_1(\tilde{x}, t)$ e $P_2(\tilde{x}, t)$ são dadas por [CHEN E CHANG (1997)]:

$$P_1(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0(\tilde{x}, t) & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} T_0 \quad (4.21)$$

e

$$P_2(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0(\tilde{x}, t) & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} T_0, \quad (4.22)$$

sendo K_1 e K_2 matrizes constantes, simétricas e definidas positivas.

Substituindo (4.21) e (4.22) nas equações (4.19) e (4.20), e sendo a matriz $(C_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}_0(q, \dot{q}))$ anti-simétrica, as equações de Riccati acopladas fornecem as seguintes equações algébricas acopladas:

$$\begin{bmatrix} 0 & K_1 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix} - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 + Q_1 = 0 \quad (4.23)$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & K_2 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{2}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 + Q_2 = 0. \quad (4.24)$$

O controle ótimo e o pior caso de distúrbio podem ser reescritos, respectivamente como:

$$u^* = -R^{-1} B^T T_0 \tilde{x} \quad (4.25)$$

e

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} B^T T_0 \tilde{x}.$$

Para resolver as equações (4.23) e (4.24) algumas restrições são impostas às matrizes peso Q_1 , Q_2 e R . Subtraindo (4.24) de (4.23), tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & K_1 - K_2 \\ K_1 - K_2 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma^2} T_0^T B B^T T_0 + Q_1 - Q_2 = 0.$$

Sendo $(1/\gamma^2)T^T B B^T T$ positiva definida, a seguinte restrição deve ser assumida para garantir que as equações (4.23) e (4.24) tenham solução:

$$Q_1 > Q_2 > 0.$$

Por simplicidade, assume-se $Q_2 = \alpha Q_1$, com $0 < \alpha < 1$. A matriz simétrica

definida positiva Q_1 pode ser fatorada como:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11}^T Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

e sendo

$$R = \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} \right) \gamma^2 I, \quad (4.27)$$

as soluções das equações (4.23) (4.24) são dadas por:

$$T_0 = \begin{bmatrix} (1-\alpha)^{1/2} Q_{11} & (1-\alpha)^{1/2} Q_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} (Q_{11}^T Q_{22} + Q_{22}^T Q_{11}) - \frac{1}{2} (Q_{12}^T + Q_{12})$$

e

$$K_2 = \frac{1}{4} (Q_{11}^T Q_{22} + Q_{22}^T Q_{11}) - \frac{1}{4} (Q_{12}^T + Q_{12}).$$

Para garantir que as matrizes K_1 e K_2 sejam definidas positivas, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$Q_{11}^T Q_{22} + Q_{22}^T Q_{11} > Q_{12}^T + Q_{12}. \quad (4.29)$$

Finalmente, o algoritmo de projeto pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Escolha um nível desejado de atenuação, $\gamma > 0$.
2. Selecione α , sendo $0 < \alpha < 1$, e a matriz peso Q_1 como (4.26) e satisfazendo (4.29).
3. Calcule R (4.27) e T_0 (4.28).
4. Obtenha o controle ótimo u (4.25) e o torque aplicado ótimo (4.5) e (4.6).

4.1.3 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Os controladores descritos acima assumem que os valores das matrizes $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $F_0(\dot{q})$ e $G_0(q)$ estão disponíveis para o cálculo do termo $F(x_e)$, Equação

(4.3). Porém, em sistemas robóticos reais incertezas paramétricas são inevitáveis, o que torna impreciso o valor de $F(x_e)$. Nesta seção, a suposição de parametrização linear de $F(x_e)$ será utilizada na obtenção de uma lei de controle adaptativa para estimar os valores dos parâmetros incertos, [CHEN et al. (1997)]. Assim, o termo $F(x_e)$ pode ser expresso como sendo:

$$F(x_e) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}^d - T_{11}T_{12}\ddot{x}_2, \ddot{q}^d - T_{11}^{-1}T_{12}\ddot{x}_2)\theta,$$

sendo $Y(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ a matriz de regressão composta de funções conhecidas e o parâmetro $\theta \in \mathbb{R}^p$ um vetor de componentes que dependem dos parâmetros incertos do manipulador.

Então, um problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas robóticos pode ser formulado como segue: dado um nível de atenuação γ , o problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ tem solução se existir um controlador dinâmico de realimentação do estado

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} &= \alpha(\tilde{x}, t), \\ \tau &= Y(\cdot)\hat{\theta} + u(\tilde{x}, t),\end{aligned}$$

tal que o sistema em malha fechada satisfaça o seguinte critério, para qualquer condição inicial:

$$\int_0^T (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u) dt \leq \tilde{x}^T(0) P_0 \tilde{x}(0) + \tilde{\theta}^T(0) S_0 \tilde{\theta}(0) + \gamma^2 \int_0^T (w^T w) dt,$$

para matrizes $Q = Q^T > 0$, $R = R^T$, $P_0 = P_0^T > 0$, e $S_0 = S_0^T > 0$, sendo $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ o erro de estimativa dos parâmetros. Além disso, se o distúrbio for limitado e com energia finita, isto é, $w \in \mathcal{L}_\infty[0, T] \cap \mathcal{L}_2[0, T]$, para todo $T \geq 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} [q(t) - q^d(t)] = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{q}(t) - \dot{q}^d(t)] = 0$.

Se a função Lyapunov for escolhida da forma:

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T S \tilde{\theta},$$

sendo $P(\tilde{x}, t)$ a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati obtida na Seção 4.1.1, a solução do problema de controle adaptativo [CHEN et al. (1997)], para qualquer matriz simétrica definida positiva S , é dada por:

$$\dot{\hat{\theta}} = -S^{-1}Y^T(\cdot)T_{11}B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}, \quad (4.30)$$

$$\tau = Y(\cdot)\hat{\theta} - T_{11}^{-1}R^{-1}B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t)\tilde{x}. \quad (4.31)$$

Analogamente à Seção 4.1.1, uma solução simplificada pode ser dada para as equações (4.30-4.31) como função das matrizes soluções da equação algébrica (4.10):

$$\dot{\hat{\theta}} = -S^{-1}Y^T(\cdot)T_{11}B^TT_0\tilde{x}, \quad (4.32)$$

$$\tau = Y(\cdot)\hat{\theta} - T_{11}^{-1}R^{-1}B^TT_0\tilde{x}. \quad (4.33)$$

4.1.4 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais

Para calcular a matriz de regressão $Y(\cdot)$, o modelo dinâmico do sistema robótico deve representá-lo satisfatoriamente. Entretanto, dinâmicas não modeladas geralmente estão presentes, o que invalida a parametrização linear. Além disso, o procedimento descrito na seção anterior considera que os parâmetros dinâmicos variam lentamente, o que não é válido para alguns casos, [CHANG E CHEN (1997)].

Nesta seção, um conjunto de redes neurais, $F(x_e, \Theta)$, sendo Θ o vetor contendo os parâmetros ajustáveis da rede, é utilizado para aproximar o termo desconhecido $F(x_e) - \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)$ em (4.2). O conjunto de redes é definido por:

$$F(x_e, \Theta) = \begin{bmatrix} F_1(x_e, \Theta_1) \\ \vdots \\ F_n(x_e, \Theta_n) \end{bmatrix}.$$

As redes neurais $F_k(x_e, \Theta_k)$, para $k = 1, \dots, n$ são compostas de neurônios não lineares na camada escondida e neurônios lineares nas camadas de entrada e saída. Por simplicidade, os pesos ajustáveis Θ_k para $k = 1, \dots, n$ são colocados entre as

camadas escondida e de saída. Tais redes neurais são da forma:

$$\begin{aligned} F_k(x_e, \Theta_k) &= \sum_{i=1}^{p_k} H \left(\sum_{j=1}^{5n} w_{ij}^k x_{ej} + m_i^k \right) \Theta_{ki} \\ &= \xi_k^T \Theta_k, \end{aligned} \quad (4.34)$$

com

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \Theta_{k1} \\ \vdots \\ \Theta_{kp_k} \end{bmatrix}$$

e

$$\xi_k = \begin{bmatrix} H \left(\sum_{j=1}^{5n} w_{1j}^k x_{ej} + m_1^k \right) \\ \vdots \\ H \left(\sum_{j=1}^{5n} w_{p_k j}^k x_{ej} + m_{p_k}^k \right) \end{bmatrix},$$

sendo p_k o número de neurônios na camada escondida. Os pesos w_{ij}^k e os limiares m_i^k para $1 \leq i \leq p_k$, $1 \leq j \leq 5n$ são constantes definidas pelo projetista, e H é a função tangente hiperbólica:

$$H(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Portanto, o sistema de redes neurais completo pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} F(x_e, \Theta) &= \begin{bmatrix} F_1(x_e, \Theta_1) \\ \vdots \\ F_n(x_e, \Theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^T \Theta_1 \\ \vdots \\ \xi_n^T \Theta_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \xi_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2^T & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{bmatrix} \\ &= \Xi \Theta. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Define-se a constante ótima de aproximação dos parâmetros como:

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta \in \Omega_\Theta} \max_{x_e \in \Omega_e} \|F(x_e, \Theta) - (F(x_e) - \tau_d)\|_2. \quad (4.36)$$

Aqui a rede neural parametrizada linearmente é utilizada para a aproximação da dinâmica desconhecida. Note que não é necessário o conhecimento da equação de Θ^* pois este valor pode ser aprendido por uma lei adaptativa.

Se τ é escolhido da forma:

$$\tau = F(x_e, \Theta) + u,$$

sendo u a entrada de controle, a equação em espaço de estados do manipulador, (4.2), fica:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_T(\tilde{x}, t)\tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t)T_{11}(F(x_e, \Theta) - F(x_e, \Theta^*) + F(x_e, \Theta^*) - F(x_e) + u) \\ &\quad + B_T(\tilde{x}, t)T_{11}\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ &= A_T(\tilde{x}, t)\tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t)T_{11}(F(x_e, \Theta) - F(x_e, \Theta^*) + u) + B_T(\tilde{x}, t)w, \end{aligned}$$

sendo

$$w = T_{11}(F(x_e, \Theta^*) - F(x_e) + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)).$$

Tendo em vista que o erro de aproximação w não é conhecido exatamente, não é possível uma estratégia de controle que irá anular completamente esse efeito. Com a introdução de um critério de performance neural adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ é esperado que esse erro se torne o menor possível ou pelo menos dentro de um nível de atenuação pré estabelecido.

O problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ baseado em redes neurais pode ser resolvido se, para uma dada trajetória de referência desejada q^d e um nível de atenuação $\gamma > 0$, existir um controlador dinâmico via realimentação do estado:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \beta(\tilde{x}, t), \\ \tau &= F(x_e, \Theta) + u(\tilde{x}, t), \end{aligned}$$

tal que o sistema em malha fechada, para qualquer condição inicial, satisfaça o

seguinte índice quadrático:

$$\int_0^T (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + u^T R u) dt \leq \tilde{x}^T(0) P_0 \tilde{x}(0) + \tilde{\Theta}^T(0) Z_0 \tilde{\Theta}(0) + \gamma^2 \int_0^T (w^T w) dt,$$

sendo $Q = Q^T > 0$, $P_0 = P_0^T > 0$, $Z_0 = Z_0^T > 0$ e $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$ o erro de estimativa do parâmetro da rede neural. Além disso, se o erro de aproximação tiver energia finita, isto é, $w \in \mathcal{L}_2[0, t]$ para todo $t \geq 0$, então as variáveis $\tilde{x}(t)$, $\Theta(t)$, e $\tau(t)$ são limitadas.

Se a função de Lyapunov é selecionada da forma:

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x} + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}^T Z \tilde{\Theta},$$

sendo $P(\tilde{x}, t)$ a matriz solução, simétrica definida positiva da equação de Riccati obtida na Seção 4.1.1, e considerando (4.35), a lei de controle adaptativa com redes neurais fica:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -Z^{-1} \Xi^T T_{11} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \\ \tau &= \Xi \Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B_T^T(\tilde{x}, t) P(\tilde{x}, t) \tilde{x}, \end{aligned}$$

para qualquer matriz simétrica definida positiva Z . As equações acima são a solução do problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ baseado em redes neurais [CHANG E CHEN (1997)].

A solução simplificada fica:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= -Z^{-T} \Xi^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}, \\ \tau &= \Xi \Theta - T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}. \end{aligned}$$

4.2 Manipuladores subatuados

Para aplicar as metodologias das seções anteriores em manipuladores subatuados, deve-se utilizar uma representação em espaço de estados diferente da apresentada pela Equação (3.8) pois, a matriz $\overline{M}_0(q)$, definida em (3.7), é definida negativa (pos-

sibilidade 1 do controle das passivas) ou indefinida (possibilidade 2), e não simétrica. Além disso, a matriz $(\bar{C}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\bar{M}}_0(q, \dot{q}))$ não é anti-simétrica. Portanto, deve-se particionar a Equação (3.2) de tal forma que a matriz de inércia relacionada às juntas controladas seja simétrica e definida positiva e a propriedade de anti-simetria seja satisfeita. As equações em espaços de estados de manipuladores subatuados descritas a seguir constituem contribuição original deste trabalho.

Assim, a Equação (3.2) pode ser particionada como:

$$\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_r(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{rr}(q) & M_{rc}(q) \\ M_{cr}(q) & M_{cc}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} C_{rr}(q, \dot{q}) & C_{rc}(q, \dot{q}) \\ C_{cr}(q, \dot{q}) & C_{cc}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_r(\dot{q}) \\ F_c(\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_r(q) \\ G_c(q) \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

sendo τ_r o vetor dos torques nas juntas restantes e τ_c o vetor dos torques nas juntas controladas. Por simplicidade de notação, o índice 0 representando o sistema nominal é retirado das equações. Se a possibilidade escolhida para o controle for 1, o vetor $\tau_c = 0$, pois o torque nas juntas passivas é nulo. Se a possibilidade for 2, o vetor é da forma $\tau_c = [\tau_{ac} \ 0]$, sendo τ_{ac} o torque nas juntas ativas sendo controladas. A segunda linha de (4.37) é:

$$\tau_c + \delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = M_{cr}(q)\ddot{q}_r + M_{cc}(q)\ddot{q}_c + C_{cr}(q, \dot{q})\dot{q}_r + C_{cc}(q, \dot{q})\dot{q}_c + F_c(\dot{q}) + G_c(q).$$

Isolando as acelerações das juntas controladas, obtém-se:

$$\ddot{q}_c = -M_{cc}^{-1}(q) (C_{cc}(q, \dot{q})\dot{q}_c + F_c(\dot{q}) + G_c(q) - \bar{\tau} - \delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)), \quad (4.39)$$

sendo $\bar{\tau} = \tau_c - M_{cr}(q)\ddot{q}_r + C_{cr}(q, \dot{q})\dot{q}_r$.

Introduzindo uma trajetória de referência desejada para as juntas controladas, a Equação (4.39) fica:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_c = & -M_{cc}^{-1}(q) \left(C_{cc}(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}}_c + M_{cc}(q)\ddot{\tilde{q}}_c^d + C_{cc}(q, \dot{q})\dot{q}_c^d \right. \\ & \left. + F_c(\dot{q}) + G_c(q) - \bar{\tau} - \delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

com $\ddot{\tilde{q}}_c = \ddot{q}_c - \ddot{q}_c^d$ e $\dot{\tilde{q}}_c = \dot{q}_c - \dot{q}_c^d$.

Na forma de espaço de estados, escolhendo o estado como:

$$\tilde{x}_c = \begin{bmatrix} \dot{q}_c - \dot{q}_c^d \\ q_c - q_c^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_c \\ \tilde{q}_c \end{bmatrix},$$

a Equação (4.40) fica

$$\dot{\tilde{x}}_c = A(q, \dot{q})\tilde{x}_c + B_0(q, \dot{q}, \ddot{q}_c^d, \dot{q}_c^d) + B\bar{\tau} + B\delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d), \quad (4.41)$$

com

$$\begin{aligned} A(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -M_{cc}^{-1}(q)C_{cc}(q, \dot{q}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ B_0(q, \dot{q}, \ddot{q}_c^d, \dot{q}_c^d) &= \begin{bmatrix} -M_{cc}^{-1}(q) (M_{cc}(q)\ddot{q}_c^d + C_{cc}(q, \dot{q})\dot{q}_c^d + F_c(\dot{q}) + G_c(q)) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} M_{cc}^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando uma transformação similar a (4.1), a entrada de controle é escolhida como

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} M_{cc}(q) & C_{cc}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} = M_{cc}(q)T_1\dot{\tilde{x}}_c + C_{cc}(q, \dot{q})T_1\tilde{x}_c. \quad (4.42)$$

A equação dinâmica em espaço de estados de manipuladores subatuados é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_c &= \bar{A}_T(q, \dot{q}, t)\tilde{x}_c + \bar{B}_T(q, \dot{q}, t)\bar{u} + \bar{B}_T(q, \dot{q}, t)\bar{w}, \\ &= \bar{A}_T(q, \dot{q}, t)\tilde{x}_c + \bar{B}_T(q, \dot{q}, t)T_{11}(-\bar{F}(x_e) + \bar{\tau}) + \bar{B}_T(q, \dot{q}, t)\bar{w} \end{aligned} \quad (4.43)$$

com

$$\begin{aligned}\bar{A}_T(q, \dot{q}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_{cc}^{-1}(q)C_{cc}(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\ \bar{B}_T(q, \dot{q}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_{cc}^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{w} &= T_{11}\delta_c(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d),\end{aligned}$$

e

$$\bar{F}(x_e) = M_{cc}(q)(\ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_c) + C_{cc}(q, \dot{q})(\dot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_c) + F_c(\dot{q}) + G_c(q). \quad (4.44)$$

Note que as matrizes $M_{cc}(q)$ e $C_{cc}(q, \dot{q})$ podem ser descritas como funções apenas das juntas controladas, ou seja, $M_{cc}(q_c)$ e $C_{cc}(q_c, \dot{q}_c)$. Como será visto nos resultados experimentais, Capítulo 5, esta condição pode ser satisfeita em determinadas configurações. Assim, considerando a observação (3.5), as matrizes de estado são descritas como funções do estado e do tempo, $\bar{A}_T(\tilde{x}_c, t)$ e $\bar{B}_T(\tilde{x}_c, t)$. De forma similar, tem-se que $\bar{F}(x_e) = \bar{F}(x_{ec})$, com $x_{ec} = [q_c^T \ \dot{q}_c^T \ (q_c^d)^T \ (\dot{q}_c^d)^T \ (\ddot{q}_c^d)^T]$.

A Equação (4.42) pode ser manipulada de tal forma que a aceleração das juntas controladas é dada por:

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_c - T_{11}^{-1}M_{cc}^{-1}(q_c) (C_{cc}(q_c, \dot{q}_c)B^T T_0 \tilde{x}_c - \bar{u}).$$

A equação acima fornece a aceleração necessária para as juntas controladas acompanharem a trajetória de referência desejada. Os torques nas juntas ativas podem ser calculados utilizando esta aceleração de controle. Para isso, a Equação (3.1) é particionada como em [BERGERMAN (1996)]:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ar}(q) & M_{ac}(q) \\ M_{ur}(q) & M_{uc}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a(q, \dot{q}) \\ b_u(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

sendo que os índices a e u representam juntas ativas e juntas passivas freadas, respectivamente, e $b(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) + F(\dot{q}) + G(q)$. Isolando o vetor $\ddot{q}_r$ na segunda

linha de (4.45) e substituindo na primeira linha, obtém-se:

$$\tau_a = (M_{ac}(q) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)M_{uc}(q))\ddot{q}_c + b_a(q, \dot{q}) - M_{ar}(q)M_{ur}^{-1}(q)b_u(q, \dot{q}). \quad (4.46)$$

Considerando a equação em espaço de estados para o caso subatuado (4.43), a matriz $P(\tilde{x}_c, t)$ pode ser escolhida como

$$P(\tilde{x}_c, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_{cc}(\tilde{x}_c, t) & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0,$$

pois a matriz $M_{cc}(q_c, \dot{q}_c)$ é simétrica positiva definida, e sendo a matriz $(C_{cc}(q_c, \dot{q}_c) - \frac{1}{2}\dot{M}_{cc}(q_c, \dot{q}_c))$ é anti-simétrica, os mesmos algoritmos de projeto descritos nas Seções 4.1.1 e 4.1.2 podem ser aplicados para o caso subatuado.

Para o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, o termo $\overline{F}(x_{e_c})$, Equação (4.44), é linearmente parametrizável como:

$$\overline{F}(x_{e_c}) = \overline{Y}(q_c, \dot{q}_c, \dot{q}_c^d - T_{11}T_{12}\tilde{x}_{c2}, \ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{x}}_{c2})\overline{\theta}.$$

Assim, a lei de controle adaptativa, na forma simplificada, é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\overline{S}^{-1}\overline{Y}^T(\cdot)T_{11}B^T T_0 \tilde{x}_c, \\ \overline{\tau} &= \overline{Y}(\cdot)\hat{\theta} - T_{11}^{-1}R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_c. \end{aligned}$$

Considerando as Equações (4.39) e (4.46), a relação entre $\overline{\tau}$ e τ_a é dada por:

$$\ddot{q}_c = -\hat{M}_{cc}^{-1}(q) \left(\hat{C}_{cc}(q, \dot{q})\dot{q}_c + \hat{F}_c(\dot{q}) + \hat{G}_c(q) - \overline{\tau} \right), \quad (4.47)$$

e

$$\tau_a = \left(\hat{M}_{ac}(q) - \hat{M}_{ar}(q)\hat{M}_{ur}^{-1}(q)\hat{M}_{uc}(q) \right) \ddot{q}_c + \hat{b}_a(q, \dot{q}) - \hat{M}_{ar}(q)\hat{M}_{ur}^{-1}(q)\hat{b}_u(q, \dot{q}),$$

sendo $\hat{M}_{ii}$ e $\hat{b}_i$ partições da matriz $\hat{M}(q)$ e do vetor $\hat{b}(q, \dot{q}) = \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{F}(\dot{q}) + \hat{G}(q)$, respectivamente. $\hat{M}(q)$ e $\hat{b}(q, \dot{q})$ são calculados utilizando o vetor dos parâmetros

estimados $\hat{\theta}$. A aceleração de controle, Equação (4.47), também pode ser dada por:

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_c^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_c - T_{11}^{-1}\hat{M}_{cc}^{-1}(q_c) \left(\hat{C}_{cc}(q_c, \dot{q}_c)B^T T_0 \tilde{x}_c - \bar{u} \right),$$

sendo $\bar{u} = -R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_c$.

No caso do controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais, o procedimento de cálculo do torque nas juntas ativas através da aceleração de controle, Equação (4.46), não pode ser utilizado, pois, considera-se que as equações que descrevem a matriz $M(q)$ e o vetor $b(q, \dot{q})$ não são conhecidas. Assim, uma nova equação em espaço de estados deve ser considerada de tal forma que o torque nas juntas ativas seja calculado pelas saídas das redes neurais e pela entrada de controle, sem necessidade de calcular o modelo dinâmico do robô.

A equação (3.2) pode ser reescrita por:

$$\tau + \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = M_0(q)\ddot{q} + D_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q), \quad (4.48)$$

com

$$\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -(\Delta M(q)\ddot{q} + \Delta D(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta F(\dot{q}) + \Delta G(q) - \tau_d).$$

sendo que o vetor das forças centrípetas e de Coriolis é representado por $V(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q})\dot{q} = D_0(q, \dot{q})\dot{q} + \Delta D(q, \dot{q})\dot{q}$, com $D_0(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A motivação para reescrever a matriz $C_0(q, \dot{q})$ como $D_0(q, \dot{q})$ será definida em seguida. Aqui, considera-se que apenas uma junta passiva, q_u , é controlada por uma junta passiva, q_a , ou seja, $q_c = q_u \in \mathbb{R}$ e $q_r = q_a \in \mathbb{R}$. Assim, a Equação (4.48) é particionada como:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \\ \delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa}(q) & M_{au}(q) \\ M_{ua}(q) & M_{uu}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{aa}(q, \dot{q}) & D_{au}(q, \dot{q}) \\ D_{ua}(q, \dot{q}) & D_{uu}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a(\dot{q}) \\ F_u(\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a(q) \\ G_u(q) \end{bmatrix}.$$

Isolando o vetor $\ddot{q}_a$ na segunda linha e substituindo na primeira linha, obtém-se:

$$\tau_a + \bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) = \bar{M}_0(q)\ddot{q}_u + \bar{D}_0(q, \dot{q})\dot{q}_u + \bar{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_a + \bar{F}_0(\dot{q}) + \bar{G}_0(q), \quad (4.49)$$

com

$$\begin{aligned}
\overline{M}_0(q) &= M_{au}(q) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)M_{uu}(q), \\
\overline{D}_0(q, \dot{q}) &= D_{au}(q, \dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)D_{uu}(q, \dot{q}), \\
\overline{E}_0(q, \dot{q}) &= D_{aa}(q, \dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)D_{ua}(q, \dot{q}), \\
\overline{F}_0(\dot{q}) &= F_a(\dot{q}) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)F_u(\dot{q}), \\
\overline{G}_0(q) &= G_a(q) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)G_u(q), \\
\overline{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) &= \delta_a(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) - M_{aa}(q)M_{ua}^{-1}(q)\delta_u(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d).
\end{aligned}$$

O estado é definido como:

$$\tilde{x}_u = \begin{bmatrix} \dot{q}_u - \dot{q}_u^d \\ q_u - q_u^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_u \\ \tilde{q}_u \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

Considerando uma transformação de estados similar a (4.1), a equação em espaço de estados é dada por:

$$\dot{\tilde{x}}_u = \overline{A}_T(\tilde{x}_u, t)\tilde{x}_u + \overline{B}_T(\tilde{x}_u, t)T_{11}(-\overline{F}(x_{e_u}) + \tau_a) + \overline{B}_T(\tilde{x}_u, t)\overline{w},$$

com

$$\begin{aligned}
\overline{A}_T(\tilde{x}_u, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -\overline{M}_0(q)^{-1}\overline{D}_0(q, \dot{q}) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1}T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\
\overline{B}_T(\tilde{x}_u, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} \overline{M}_0^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\overline{w} &= \overline{M}_0(q)T_{11}\overline{M}_0^{-1}(q)\overline{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}),
\end{aligned}$$

e

$$\overline{F}(x_{e_u}) = \overline{M}_0(q)(\ddot{q}_u^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\tilde{q}}_u) + \overline{D}_0(q, \dot{q})(\dot{q}_u^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_u) + \overline{E}_0(q, \dot{q})\dot{q}_a + \overline{F}_0(\dot{q}) + \overline{G}_0(q).$$

O torque aplicado nas juntas ativas é dado por:

$$\tau_a = \overline{F}(x_{e_u}) + T_{11}^{-1}\overline{u},$$

e para o controle adaptativo com redes neurais, o termo $\overline{F}(x_{e_u})$ pode ser escrito como:

$$\overline{F}(x_{e_u}, \overline{\Theta}) = \overline{\Xi}\overline{\Theta}, \quad (4.51)$$

com $\overline{\Xi}$ e $\overline{\Theta}$ como na Seção 4.1.4.

Quando apenas uma junta passiva é controlada por uma junta ativa, $\overline{M}_0(q)$ é escalar e sempre negativa. Para simplificar a equação de Riccati, como na Seção 4.1.1, $P_u(\tilde{x}_u, t)$ deve ser definida positiva para todo $\tilde{x}_u$ e t . Portanto, $P_u(\tilde{x}_u, t)$ é selecionada como:

$$P_u(\tilde{x}_u, t) = T_0^T \begin{bmatrix} -\overline{M}_0(\tilde{x}_u, t) & 0 \\ 0 & K_c \end{bmatrix} T_0,$$

sendo K_c um número positivo. Com esta escolha de $P_u(\tilde{x}_u, t)$, a entrada de controle fica:

$$\overline{u} = +R^{-1}B^T T_0 \tilde{x}_u.$$

Além disso, a matriz $D_0(q, \dot{q})$ deve ser definida de tal forma que $\overline{D}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\overline{M}}_0(q, \dot{q})$ seja anti-simétrica. Neste caso, como este termo é escalar, ele deve ser nulo. Considerando a Equação (4.49), com uma escolha apropriada de $D_{ac}(q, \dot{q})$ e $D_{uc}(q, \dot{q})$, resultados da partição de $D_0(q, \dot{q})$, a condição de anti-simetria pode ser satisfeita. Os demais elementos de $D_0(q, \dot{q})$, $D_{ar}(q, \dot{q})$ e $D_{ur}(q, \dot{q})$, são determinados tal que $D_0(q, \dot{q})\dot{q} = V(q, \dot{q})$. Note que a matriz resultante $D_0(q, \dot{q})$ é diferente de $C_0(q, \dot{q})$.

Com estas definições, o problema de controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes pode ser resolvido para manipulador subatuados como na Seção 4.1.4. Neste caso, a lei de

controle é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Theta}} &= + \bar{Z}^{-T} \bar{\Xi}^T T_{11} B^T T_0 \tilde{x}_u, \\ \tau_a &= \bar{\Xi} \bar{\Theta} + T_{11}^{-1} R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}_u.\end{aligned}$$

Com este procedimento, pode-se controlar um manipulador subatuado com n_p juntas passivas: as juntas passivas são controladas uma de cada vez, aplicando-se torque em uma junta ativa; as demais juntas passivas e ativas são mantidas bloqueadas.

Capítulo 5

Resultados experimentais

Com o objetivo de validar as técnicas apresentadas nos Capítulos 2 a 4, experimentos foram realizados utilizando-se os manipuladores subatuados UArm II (Apêndice A) para 3 configurações: AAA, APA e PAP. Utiliza-se a norma $\mathcal{L}_2$ do vetor de estados e o somatório das áreas dos torques para comparar os resultados. Alguns destes resultados foram relatados nos artigos: [BUOSI et al. (2003); BUOSI et al. (2004); MACIEL et al. (2002); SIQUEIRA E TERRA (2001); SIQUEIRA E TERRA (2001b); SIQUEIRA E TERRA (2001c); SIQUEIRA E TERRA (2002); SIQUEIRA E TERRA (2002b); SIQUEIRA E TERRA (2002c); SIQUEIRA et al. (2003); SIQUEIRA et al. (2003b); SIQUEIRA E TERRA (2003); SIQUEIRA E TERRA (2004d); SIQUEIRA E TERRA (2004e); YASIN et al. (2002)].

5.1 Trajetórias desejadas e índices de desempenho

A trajetória de referência para a junta i , $q_i^d(t)$, utilizada neste trabalho, é um polinômio do quinto grau descrito por:

$$q_i^d(t) = a_i + b_i(t - t_0) + c_i(t - t_0)^2 + d_i(t - t_0)^3 + e_i(t - t_0)^4 + f_i(t - t_0)^5, \quad (5.1)$$

satisfazendo:

$$q_i^d(t_0) = q_{i_0}, \quad \dot{q}_i^d(t_0) = \dot{q}_{i_0}, \quad \ddot{q}_i^d(t_0) = \ddot{q}_{i_0},$$

$$q_i^d(t_f) = q_{i_f}, \quad \dot{q}_i^d(t_f) = \dot{q}_{i_f}, \quad \ddot{q}_i^d(t_f) = \ddot{q}_{i_f},$$

sendo t_0 o tempo inicial, t_f o tempo final desejado, q_{i_0} , $\dot{q}_{i_0}$, $\ddot{q}_{i_0}$ os valores iniciais da posição, velocidade e aceleração, respectivamente, e q_{i_f} , $\dot{q}_{i_f}$, $\ddot{q}_{i_f}$ os valores finais desejados para posição, velocidade e aceleração, respectivamente. Calculando os polinômios de velocidade e aceleração, e substituindo as restrições dadas acima, os coeficientes do polinômio (5.1) são dados por [LEWIS et al. (1993)]:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \\ f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 & T^4 & T^5 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 & 4T^3 & 5T^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6T & 12T^2 & 20T^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{i_0} \\ \dot{q}_{i_0} \\ \ddot{q}_{i_0} \\ q_{i_f} \\ \dot{q}_{i_f} \\ \ddot{q}_{i_f} \end{bmatrix},$$

sendo $T = t_f - t_0$. Os valores de t_f são adequadamente escolhidos levando-se em conta a diferença entre as posições inicial e final das juntas. Assume-se que as velocidades e acelerações iniciais e finais desejadas são nulas, ou seja, $\dot{q}_{i_0} = 0$, $\ddot{q}_{i_0} = 0$, $\dot{q}_{i_f} = 0$ e $\ddot{q}_{i_f} = 0$.

Sendo que os controladores projetados apresentam índices de desempenho diferentes, utiliza-se como forma de comparar os resultados experimentais obtidos os seguintes índices: a norma $\mathcal{L}_2$ do vetor de estados,

$$\mathcal{L}_2[\tilde{x}] = \left(\frac{1}{(t_r - t_0)} \int_{t_0}^{t_r} \|\tilde{x}(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

e o somatório das áreas dos torques,

$$E[\tau] = \sum_{i=0}^n \left(\int_{t_0}^{t_r} |\tau_i(t)| dt \right),$$

sendo t_r o tempo gasto para todas as juntas alcançarem as posições desejadas e $\tau_i(t)$ o torque da junta i . A norma $\mathcal{L}_2$ dos erros de acompanhamento de trajetória, representados aqui pelo vetor de estados, é um índice de desempenho largamente

utilizado na literatura para comparação de controladores, [BERGHUIS et al. (1995); JARITZ E SPONG (1996); REYES E KELLY (2001); WHITCOMB et al. (1993)]. A análise do somatório das áreas dos torques é importante pois está diretamente relacionado com o consumo de energia do manipulador.

Para cada controlador foram realizados 5 experimentos e calculados os valores médios de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$, como sugerido em [BERGHUIS et al. (1995)]. Os gráficos apresentados neste trabalho correspondem aos experimentos que mais se aproximam dos valores médios.

5.2 Configuração AAA

Para esta configuração, seis tipos de controles foram projetados: quase-LPV por realimentação do estado, quase-LPV por realimentação da saída, $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais.

O experimento foi realizado para posição inicial $q(0) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ e posição final desejada $q(t_f) = [-20^\circ \ 30^\circ \ -30^\circ]^T$, com $t_f = [4.0 \ 4.0 \ 4.0]s$. Para verificar a robustez dos controladores, distúrbios externos do tipo senóide amortecida, iniciando em $t = 1.5 \ s$, foram introduzidos artificialmente nos motores das juntas. Os distúrbios são dados por:

$$\tau_d = \begin{bmatrix} -1.5e^{-2t}\sin(2\pi t) \\ 0.5e^{-2t}\sin(2\pi t) \\ -0.25e^{-2t}\sin(2\pi t) \end{bmatrix}.$$

A Figure 5.1 mostra os distúrbios utilizados. Os valores máximos representam aproximadamente 50 % dos valores máximos dos torques observados nos experimentos sem a introdução deste distúrbio.

5.2.1 Controle quase-LPV por realimentação do estado

Para aplicar o algoritmo descrito na Seção 2.5, o sistema de controle do robô manipulador deve ser representado pela Equação (2.17). Portanto, escolhe-se como

Figura 5.1: Distúrbios externos, configuração AAA.

parâmetros os estados representando os erros de posição das juntas 2 e 3, ou seja, $m = 2$ e

$$\rho(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\tilde{q}_2$ e $\tilde{q}_3$ os erros de posição das juntas 2 e 3, respectivamente. Esta escolha é baseada no fato que a matriz de inércia, $M(q)$, e a matriz de Coriolis, $C(q, \dot{q})$, são funções da posição das juntas 2 e 3, e como visto anteriormente, são dependentes do erro de posição destas juntas. A matriz $C(q, \dot{q})$ também dependente das velocidades angulares das juntas 1, 2 e 3. Entretanto, uma escolha de ρ que também considere os erros de velocidade das juntas, ou seja, ρ contendo 5 elementos, faz com que número de desigualdades matriciais a serem resolvidas cresça absurdamente (veja Seção 2.8).

Consideram-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto o sistema pode ser descrito pela Equação (2.17) com:

$$\begin{aligned} A(\rho(x)) &= A(\rho(\tilde{x})) \\ B_1(\rho(x)) &= B \\ B_2(\rho(x)) &= B \\ C_1(\rho(x)) &= I \\ C_2(\rho(x)) &= 0 \end{aligned}$$

sendo as matrizes $A(\rho(\tilde{x}))$ e B obtidas da Equação (3.4).

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-30, 30]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq 50^\circ/s$. Como foi visto anteriormente, uma alternativa para a escolha das funções utilizadas como base para $X(\rho)$, consiste em utilizar funções contidas nas matrizes de estado. A função trigonométrica *coseno* está presente nas matrizes $M(q)$ e $C(q, \dot{q})$ que compõem a matriz de estado A , e portanto, as funções escolhidas foram:

$$\begin{aligned} f_1(\rho(\tilde{x})) &= 1 \\ f_2(\rho(\tilde{x})) &= \cos(\tilde{q}_2) \\ f_3(\rho(\tilde{x})) &= \cos(\tilde{q}_3). \end{aligned}$$

O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos ($L = 5$). Cada um dos 25 sistemas lineares, L^m , gerados pela combinação dos parâmetros ρ fornece 5 DMLs, $1 + 2^m$. Ou seja, 125 DMLs devem ser resolvidas simultaneamente para as variáveis X_i (veja Seção 2.8). Para resolver este problema foi utilizado o *toolbox Linear Matrix Inequalities (LMI)* do MatLab[©] [GAHINET et al. (1995)]. O valor de atenuação mínimo encontrado foi $\gamma = 1.2$. Os valores das matrizes X_i são mostrados no Apêndice C.

Os resultados experimentais: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, com e sem distúrbios, são mostrados nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4, respectivamente.

O controle quase-LPV apresentou bom desempenho, alcançando a posição final desejada no tempo pré-estabelecido. Nota-se que as curvas de posição angular e velocidade angular apresentam um comportamento suave ao longo da trajetória sem a presença de distúrbios, sendo esta uma característica desejada. Entretanto, as curvas de torque apresentam oscilações, principalmente na parte final da trajetória, o que pode comprometer a integridade dos atuadores quando estes forem acionados por um longo período. Verifica-se que o controlador também apresentou bom desempenho na presença de distúrbios externos nos torques. Nota-se o aparecimento de oscilações nos gráficos de posição e velocidade. Após a introdução dos distúrbios, houve um aumento dos torques visando atenuar os efeitos destes distúrbios.

Figura 5.2: Posição angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.3: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.4: Torque aplicado, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação do estado: sem distúrbios e com distúrbios.

5.2.2 Controle quase-LPV por realimentação da saída

Para aplicar o algoritmo descrito na Seção 2.6, o sistema de controle do robô manipulador deve ser representado pela Equação (2.18). A equação dinâmica de um manipulador totalmente atuado com distúrbio, (3.2), pode ser colocada na forma de espaço de estados considerando as posições e as velocidades angulares como estado, ou seja, $x = [\dot{q} \ q]^T$. Assim tem-se:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + B(x)\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d) \quad (5.2)$$

com

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)(C_0(q, \dot{q}) + \tilde{F}_0) & 0 \\ & I_n \\ & & 0 \end{bmatrix} \\ B(x) &= \begin{bmatrix} M_0^{-1}(q) \\ 0 \end{bmatrix} \\ u &= \tau - G_0(q). \end{aligned}$$

sendo que o atrito depende linearmente da velocidade, isto é, $F_0 = \tilde{F}_0\dot{q}$, sendo $\tilde{F}_0 \in \Re^n$ uma matriz diagonal constante.

Considera-se como distúrbios do sistema a posição angular desejada, q^d , e o distúrbio combinado, $\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)$, ou seja: $w_1 = q^d$ e $w_2 = \delta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau_d)$. As saídas do sistema, z_1 e z_2 , são o erro de posição, $[q^d - q]$, e a variável de controle u , respectivamente. Como somente a medida da posição é precisa, a saída de controle será dada pelo erro de posição, isto é, $y = [q^d - q]$. Escolhe-se como parâmetros os estados representando as posições angulares das juntas das juntas 2 e 3, ou seja, $m = 2$ e

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$$

Portanto o sistema pode ser descrito pela Equação (2.18) com:

$$\begin{aligned} A(\rho(x)) &= A(\rho(x)) & D_{1111}(\rho(x)) &= 0 \\ B_{11}(\rho(x)) &= B(\rho(x)) & D_{1112}(\rho(x)) &= I \\ B_{12}(\rho(x)) &= 0 & D_{1121}(\rho(x)) &= 0 \\ B_2(\rho(x)) &= B(\rho(x)) & D_{1122}(\rho(x)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(\rho(x)) &= [0 \quad -I] & D_{12}(\rho(x)) &= [0 \quad -I]^T \\
C_{12}(\rho(x)) &= 0 & D_{21}(\rho(x)) &= [0 \quad -I] \\
C_2(\rho(x)) &= [0 \quad -I] & D_{22}(\rho(x)) &= 0
\end{aligned}$$

sendo as matrizes $A(\rho(x))$ e $B(\rho(x))$ obtidas da Equação (5.2).

O controlador K_P definido na Equação (2.10) depende da derivada do parâmetro ρ que neste caso são as velocidades das juntas 2 e 3. Entretanto, considera-se que não há informação sobre estas variáveis, ou seja, não se considera aqui a medida indireta da velocidade. Para contornar este problema, a matriz $X(\rho)$ é definida como constante, levando o termo com dependência em $\dot{\rho}$ a zero no cálculo da função $H(\rho, \dot{\rho})$:

$$\sum_{i=1}^m \dot{\rho}_i \frac{\partial X^{-1}}{\partial \rho_i} = 0.$$

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-30, 30]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq 60^\circ/s$. As funções utilizadas como base para a matrizes $Y(\rho)$ foram:

$$\begin{aligned}
g_1(\rho(x)) &= 1 \\
g_2(\rho(x)) &= \cos(q_2) \\
g_3(\rho(x)) &= \cos(q_3).
\end{aligned}$$

O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos ($L = 5$). Cada um dos 25 sistemas lineares, L^m , gerados pela combinação dos parâmetros ρ fornece 9 DMLs, $1 + 2^{(m+1)}$. Ou seja, 225 DMLs devem ser resolvidas simultaneamente para as variáveis X e Y_i . O valor de atenuação mínimo encontrado foi $\gamma = 2.3$. Os valores das matrizes X e Y_i são mostrados no Apêndice C.

Os parâmetros do manipulador, as posições iniciais e finais são os mesmos utilizados no controle por realimentação do estado. Os resultados experimentais: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, com e sem distúrbios, são mostrados nas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente.

As curvas de posição angular e velocidade angular, sem a aplicação dos distúrbios, apresentam pequenas oscilações, ou seja, o comportamento neste caso não é

Figura 5.5: Posição angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.6: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.7: Torque aplicado, configuração AAA, controle quase-LPV por realimentação da saída: sem distúrbios e com distúrbios.

tão suave como o apresentado nas Figuras 5.2 e 5.3 para controle quase-LPV por realimentação do estado. Entretanto, as curvas de torque mostram-se mais suaves em comparação aos resultados da Figura 5.4. Note que a resposta deste controlador é mais lenta em relação ao controle por realimentação do estado, o que era esperado pela característica dinâmica do controlador por realimentação da saída. Com a aplicação do distúrbio, as oscilações aumentaram, entretanto, o posicionamento das juntas é alcançado no mesmo tempo apresentado no caso sem distúrbio.

5.2.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

Quando aplicada a metodologia de projeto do controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos para robôs manipuladores, descrita na Seção 4.1.1, o nível de atenuação encontrado para o caso totalmente atuado foi $\gamma = 3.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = I_3, \quad Q_2 = 2I_3, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5I_3,$$

sendo I_k uma matriz identidade de ordem k . Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 3.35 & 0 & 0 & 6.71 & 0 & 0 \\ 0 & 3.35 & 0 & 0 & 6.71 & 0 \\ 0 & 0 & 3.35 & 0 & 0 & 6.17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta metodologia também foi aplicada no robô manipulador UArm II. Os parâmetros do manipulador, as posições iniciais e finais são os mesmos utilizados nas seções anteriores. Os resultados experimentais: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, com e sem distúrbios, são mostrados nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10, respectivamente.

Figura 5.8: Posição angular das juntas, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.9: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.10: Torque aplicado, configuração AAA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: sem distúrbios e com distúrbios.

O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos também apresentou bom desempenho. Os resultados são semelhantes aos apresentados pelo controle LPV por realimentação da saída. Embora o desempenho do sistema tenha sido afetado pela introdução dos distúrbios, verifica-se que as juntas alcançaram a posição final desejada no tempo pré-estabelecido.

5.2.4 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da aplicação do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, descrito na Seção 4.1.2, no robô UArm II. O nível de atenuação encontrado para o caso totalmente atuado foi $\gamma = 3.0$. O valor de α utilizado foi 0.2. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_{11} = 0.6I_3, \quad Q_{22} = 1I_3 \quad e \quad Q_{12} = 0 \quad .$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.2, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$R = \begin{bmatrix} 4.26 & 0 & 0 \\ 0 & 4.26 & 0 \\ 0 & 0 & 4.26 \end{bmatrix} .$$

e

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1.71 & 0 & 0 & 2.85 & 0 & 0 \\ 0 & 1.71 & 0 & 0 & 2.85 & 0 \\ 0 & 0 & 1.71 & 0 & 0 & 2.85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Os parâmetros do manipulador, as posições iniciais e finais são os mesmos utilizados no controle por realimentação do estado. Os resultados experimentais: posição angular, velocidade angular e torque aplicado, com e sem distúrbios, são mostrados nas Figuras 5.11, 5.12 e 5.13, respectivamente.

Figura 5.11: Posição angular das juntas, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.12: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.13: Torque aplicado, configuração AAA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios .

O controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear também apresentou bom desempenho, sendo semelhante ao apresentado pelo controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos.

5.2.5 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Para o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, os parâmetros θ podem ser definidos por qualquer combinação dos parâmetros dinâmicos (massa, momento de inércia, etc.) para obter a parametrização linear de $F(x_e)$, dada por $Y(\cdot)\theta$. Considerando que os ligamentos 1 e 2 são idênticos, ou seja, $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$, $lc_1 = lc_2$, e $I_1 = I_2$, os parâmetros utilizados são:

$$\theta_1 = m_1 lc_1^2 = m_2 lc_2^2,$$

$$\theta_2 = m_2 l_1^2,$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 lc_2,$$

$$\theta_4 = m_3 l_1^2 = m_3 l_2^2 = m_3 l_1 l_2,$$

$$\theta_5 = m_3 lc_3^2,$$

$$\theta_6 = m_3 l_1 lc_3 = m_3 l_2 lc_3,$$

$$\theta_7 = I_1 = I_2,$$

$$\theta_8 = I_3,$$

$$\theta_9 = f_1,$$

$$\theta_{10} = f_2,$$

$$\theta_{11} = f_3.$$

A matriz de regressão $Y(\cdot)$ gerada pela parametrização linear é mostrada no Apêndice A. O nível de atenuação e as matrizes de ponderação são os mesmos utilizados no controle não linear, Seção 5.2.3, ou seja, $\gamma = 3.0$ e $Q_1 = I_3$, $Q_2 = 2I_3$, $Q_{12} = 0$ e $R = 5I_3$. As Figuras 5.14 a 5.16 mostram os resultados experimentais, com e sem distúrbios, para o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não-linear, considerando $S = 10I_{11}$ e os valores iniciais de θ como mostrados na Tabela 5.1. Os valores finais de θ , para o caso com distúrbios, também são mostrados na mesma tabela.

Figura 5.14: Posição das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.15: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.16: Torque aplicado, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: sem distúrbios e com distúrbios.

Tabela 5.1: Valores iniciais e finais de θ , configuração AAA.

$\theta(inicial)$	$\theta(final)$
$\theta_1 = 0.0078$	$\theta_1 = 0.0140$
$\theta_2 = 0.0350$	$\theta_2 = 0.0378$
$\theta_3 = 0.0166$	$\theta_3 = 0.0152$
$\theta_4 = 0.0258$	$\theta_4 = 0.0306$
$\theta_5 = 0.0037$	$\theta_5 = 0.0149$
$\theta_6 = 0.0098$	$\theta_6 = 0.0195$
$\theta_7 = 0.0075$	$\theta_7 = 0.0137$
$\theta_8 = 0.0060$	$\theta_8 = 0.0172$
$\theta_9 = 0.2500$	$\theta_9 = 0.2464$
$\theta_{10} = 0.1500$	$\theta_{10} = 0.1436$
$\theta_{11} = 0.1000$	$\theta_{11} = 0.0996$

5.2.6 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais

Para o cálculo da rede neural $F_k(x_e, \Theta_k)$ do controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais, define-se a seguinte variável auxiliar:

$$xx = \sum_{i=1}^n (q_i - q_i^d) + \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i - \dot{q}_i^d) - \sum_{i=1}^n \ddot{q}_i. \quad (5.3)$$

Então pode-se calcular a matriz Ξ como sendo:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1^T & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2^T & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^T \end{bmatrix},$$

com

$$\xi_1 = [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{14} \ \xi_{15} \ \xi_{16} \ \xi_{17}]^T,$$

$$\xi_2 = [\xi_{21} \ \xi_{22} \ \xi_{23} \ \xi_{24} \ \xi_{25} \ \xi_{26} \ \xi_{27}]^T,$$

$$\xi_3 = [\xi_{31} \ \xi_{32} \ \xi_{33} \ \xi_{34} \ \xi_{35} \ \xi_{36} \ \xi_{37}]^T,$$

e

$$\begin{aligned}\xi_{11} = \xi_{21} = \xi_{31} &= \frac{e^{xx-3} - e^{-xx+3}}{e^{xx-3} + e^{-xx+3}}, \\ \xi_{12} = \xi_{22} = \xi_{32} &= \frac{e^{xx-2} - e^{-xx+2}}{e^{xx-2} + e^{-xx+2}}, \\ \xi_{13} = \xi_{23} = \xi_{33} &= \frac{e^{xx-1} - e^{-xx+1}}{e^{xx-1} + e^{-xx+1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{14} = \xi_{24} = \xi_{34} &= \frac{e^{xx} - e^{-xx}}{e^{xx} + e^{-xx}}, \\ \xi_{15} = \xi_{25} = \xi_{35} &= \frac{e^{xx+1} - e^{-xx-1}}{e^{xx+1} + e^{-xx-1}}, \\ \xi_{16} = \xi_{26} = \xi_{36} &= \frac{e^{xx+2} - e^{-xx-2}}{e^{xx+2} + e^{-xx-2}}, \\ \xi_{17} = \xi_{27} = \xi_{37} &= \frac{e^{xx+3} - e^{-xx-3}}{e^{xx+3} + e^{-xx-3}}.\end{aligned}$$

Note que, com essa definição, foram escolhidas 7 camadas escondidas para a rede neural com os pesos w_{ij}^k assumindo os valores 1 ou -1 e os limiares m_i os valores $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Os parâmetros da rede Θ são:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= [\Theta_{11} \ \Theta_{12} \ \Theta_{13} \ \Theta_{14} \ \Theta_{15} \ \Theta_{16} \ \Theta_{17}]^T, \\ \Theta_2 &= [\Theta_{21} \ \Theta_{22} \ \Theta_{23} \ \Theta_{24} \ \Theta_{25} \ \Theta_{26} \ \Theta_{27}]^T, \\ \Theta_3 &= [\Theta_{31} \ \Theta_{32} \ \Theta_{33} \ \Theta_{34} \ \Theta_{35} \ \Theta_{36} \ \Theta_{37}]^T.\end{aligned}$$

O nível de atenuação e as matrizes de ponderação são os mesmos utilizados no controle não linear, Seção 5.2.3, ou seja, $\gamma = 3.0$ e $Q_1 = I_3$, $Q_2 = 2I_3$, $Q_{12} = 0$ e $R = 5I_3$. Os resultados, com e sem distúrbios, com $Z = 10I_{21}$ e $\Theta(0) = [0 \cdots 0]_{21 \times 1}^T$, são mostrados nas Figuras 5.17 a 5.19.

Figura 5.17: Posição das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.18: Velocidade angular das juntas, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios.

Figura 5.19: Torque aplicado, configuração AAA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: sem distúrbios e com distúrbios.

Quanto à rejeição a distúrbios externos, nota-se que o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais obteve o melhor resultado, saindo muito pouco da trajetória desejada.

Nota-se que os efeitos das incertezas paramétricas presentes no robô experimental UArm II (como observado anteriormente no Apêndice A), foram absorvidos pelos seis controladores projetados. Os testes com a introdução de distúrbios demonstram a robustez destes controladores. As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$ para todos os controladores considerando os resultados sem a introdução do distúrbio e com o distúrbio, respectivamente. Como observado pelos gráficos, o melhor desempenho com relação ao erro de acompanhamento de trajetória é alcançado pelo controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais. Entretanto, este controlador apresentou o maior consumo de energia, representado pelo índice $E[\tau]$. Note que os menores consumos de energia são obtidos pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV por realimentação da saída e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Com a introdução do distúrbio, o menor aumento proporcional do erro de acompanhamento foi obtido pelo controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, passando de 0.1089 para 0.1307. O maior aumento foi obtido pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV por realimentação da saída, passando de 0.1065 para 0.1456.

5.3 Configuração APA

A primeira configuração subatuada utilizada para validar as técnicas descritas é denominada APA, ou seja, a junta 2 é passiva e as juntas 1 e 3 são ativas. Sendo que a configuração APA possui $n_a = 2$, duas juntas podem ser controladas em cada fase. Na primeira fase, o vetor de juntas controladas, q_c , é escolhido como $q_c = [q_2 \ q_3]^T$, i.e., uma junta passiva, 2, e uma ativa, 3, são selecionadas (possibilidade 2 descrita na Seção 3.3). Na segunda fase, as juntas ativas são controladas considerando o manipulador totalmente atuado, pois, nesta fase a junta passiva, 2, é mantida freada, desde que ela já alcançou a posição final desejada. Portanto, duas fases de controle são necessárias para controlar todas as juntas até a posição final desejada.

As posições inicial e final consideradas foram, respectivamente, $q(0) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$

Tabela 5.2: Índices de desempenho: Configuração AAA, sem distúrbios.

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Quase-LPV, real. do estado	0.1041	0.4030
Quase-LPV, real. da saída	0.1065	0.2946
$\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos	0.1139	0.3853
Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	0.1089	0.3064
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$	0.1038	0.4195
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais	0.0907	0.4755

Tabela 5.3: Índices de desempenho: Configuração AAA, com distúrbios.

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Quase-LPV, real. do estado	0.1355	0.4814
Quase-LPV, real. da saída	0.1456	0.3173
$\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos	0.1467	0.4359
Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	0.1307	0.3257
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$	0.1293	0.5147
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais	0.1152	0.5450

e $q(t_{f_{APA1}}, t_{f_{APA2}}) = [20^\circ \ 20^\circ \ 20^\circ]^T$. Os vetores $t_{f_{APA1}} = [1.0 \ 1.0]s$ e $t_{f_{APA2}} = [5.0 \ 5.0]s$ referem-se aos tempos das trajetórias desejadas para as fases 1 e 2, respectivamente. Para verificar a robustez do controlador, distúrbios externos no torque, τ_d , do tipo senóide amortecida, iniciando em $t = 0.3 \ s$, foram introduzidos nas juntas ativas 1 e 3. Para a simulação, os distúrbios utilizados foram:

$$\begin{aligned}\tau_{d_1} &= 0.2e^{-4t}\sin(4\pi t) \\ \tau_{d_3} &= -0.03e^{-6t}\sin(4\pi t),\end{aligned}$$

Quando se realizou os experimentos, os distúrbios utilizados foram:

$$\begin{aligned}\tau_{d_1} &= 0.5e^{-4t}\sin(4\pi t) \\ \tau_{d_3} &= -0.05e^{-6t}\sin(4\pi t),\end{aligned}$$

Os valores máximos destes distúrbios, simulação e experimento, representam aproximadamente 40 % dos valores dos torques obtidos no instante em que os distúrbios foram introduzidos. A Figura 5.20 mostra os distúrbios utilizados durante o experimento.

Figura 5.20: Distúrbios externos, configuração APA, experimento.

5.3.1 Controle quase-LPV por realimentação do estado

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos da implementação do controle quase-LPV por realimentação do estado. Uma análise da influência das funções base para $X(\rho)$ é realizada considerando quatro conjuntos de funções para cada fase.

Para a primeira fase, escolhe-se como parâmetros os estados representando os erros de posição das juntas 2 e 3, ou seja,

$$\rho(\tilde{x}_c) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\tilde{q}_2$ e $\tilde{q}_3$ os erros de posição das juntas 2 e 3, respectivamente. Considera-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto, o sistema pode ser descrito pela Equação (2.17) com:

$$\begin{aligned} A(\rho(x)) &= \overline{A}(\rho(\tilde{x}_c)) \\ B_1(\rho(x)) &= \overline{B} \\ B_2(\rho(x)) &= \overline{B} \\ C_1(\rho(x)) &= I_4 \\ C_2(\rho(x)) &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

sendo as matrizes $\overline{A}(\rho(\tilde{x}_c))$ e $\overline{B}$ obtidas da Equação (3.8).

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-30, 30]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq 50^\circ/s$. O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos, ou seja $L = 5$. Os conjuntos de funções base utilizados e os valores de atenuação mínimos encontrados para cada conjunto são mostrados na Tabela 5.4.

Para a segunda fase, os parâmetros escolhidos e que compõem o vetor de estados foram:

$$\rho(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_3 & \dot{\tilde{q}}_3 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\tilde{q}_3$ e $\dot{\tilde{q}}_3$ os erros de posição e velocidade da junta 3, respectivamente. As saídas do sistema são as mesmas consideradas na primeira fase, portanto, o sistema possui

Tabela 5.4: Funções base e γ , fase 1.

Conjunto	Funções base	γ
1	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \tilde{q}_2$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = \tilde{q}_3$	$\gamma = 1.20$
2	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \cos(\tilde{q}_2)$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = \cos(\tilde{q}_3)$	$\gamma = 1.35$
3	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \frac{2}{\pi}\tilde{q}_2$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = (\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}\tilde{q}_2)^2 - \frac{1}{2})$	$\gamma = 1.35$
4	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \frac{2}{\pi}\tilde{q}_3$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = (\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}\tilde{q}_3)^2 - \frac{1}{2})$	$\gamma = 1.35$

a mesma estrutura descrita na Equação (5.4).

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-50, 50]^\circ/s$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [50^\circ/s \ 30^\circ/s^2]$. O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos, ou seja $L = 5$. Os conjuntos de funções base utilizados e os valores de atenuação mínimos encontrados para cada conjunto são mostrados na Tabela 5.5.

Para a primeira fase, o desempenho dos quatro controladores projetados, referentes aos quatro conjuntos de funções base, foram similares. Entretanto, para a segunda fase, o controlador projetado considerando o terceiro conjunto de funções apresentou o pior desempenho, e foi necessário aumentar o valor de γ (de $\gamma = 1.80$ para $\gamma = 2.50$) para melhorar o desempenho. Portanto, pode-se ajustar adequadamente γ para obter desempenho equivalentes entre os controladores projetados com funções diferentes. Neste trabalho, serão apresentados somente os resultados simulados e experimentais obtidos considerando o conjunto 1 (menor valor de γ encontrado) para as duas fases de controle. Os gráficos de posição angular, velocidade angular e torque são mostrados nas Figuras 5.21 a 5.23.

Tabela 5.5: Funções base e γ , fase 2.

Conjunto	Funções base	γ
1	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \tilde{q}_3$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = \dot{\tilde{q}}_3$	$\gamma = 1.5$
2	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \cos(\tilde{q}_3)$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = \cos(\dot{\tilde{q}}_3)$	$\gamma = 1.8$
3	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \frac{2}{\pi}\tilde{q}_3$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = (\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}\tilde{q}_3)^2 - \frac{1}{2})$	$\gamma = 2.5$
4	$f_1(\rho(\tilde{x}_c)) = 1$ $f_2(\rho(\tilde{x}_c)) = \frac{2}{\pi}\dot{\tilde{q}}_3$ $f_3(\rho(\tilde{x}_c)) = (\frac{3}{2}(\frac{2}{\pi}\dot{\tilde{q}}_3)^2 - \frac{1}{2})$	$\gamma = 1.8$

5.3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

Para a metodologia de projeto descrita na Seção 4.1.1 dois controladores foram projetados, alterando-se os valores de γ e das matrizes de ponderação. Para o primeiro controlador, denominado controlador 1, o nível de atenuação encontrado para a primeira fase de controle da configuração APA foi $\gamma = 4.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = I_2, \quad Q_2 = 4I_2, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5I_2.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2.69 & 0 & 10.79 & 0 \\ 0 & 2.69 & 0 & 10.79 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a segunda fase de controle, o nível de atenuação foi $\gamma = 4.5$. As matrizes

Figura 5.21: Posição angular das juntas, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

Figura 5.22: Velocidade angular angular das juntas, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

Figura 5.23: Torque aplicado, configuração APA, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = I_2, \quad Q_2 = 4I_2, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5I_2.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2.58 & 0 & 10.31 & 0 \\ 0 & 2.58 & 0 & 10.31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz $M_{cc}(q)$ na primeira fase de controle, $M_{cc}(q) = [M_{22}(q) \ M_{23}(q); M_{32}(q) \ M_{33}(q)]$, é função apenas das posições das juntas 2 e 3, que são as juntas controladas nesta fase. Na segunda fase de controle a junta 2 está bloqueada e $M_{cc}(q) = [M_{11}(q) \ M_{13}(q); M_{31}(q) \ M_{33}(q)]$ é função apenas da posição da junta q_3 , novamente uma junta controlada desta fase. O mesmo pode ser considerado para a matriz $C_{cc}(q, \dot{q})$. Portanto, as matrizes são funções apenas das juntas controladas para as duas fases de controle da configuração APA.

A seguir serão apresentados os resultados simulados e experimentais. Os distúrbios descritos na seção anterior também foram utilizados na simulação e no experimento. Os gráficos de posição angular são mostrados na Figura 5.24, os gráficos de velocidade angular na Figura 5.25, e os gráficos de torque na Figura 5.26.

Para o segundo controlador, denominado controlador 2, o nível de atenuação encontrado para a primeira fase de controle da configuração APA foi $\gamma = 2.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 3.5I_2.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1, verificando que todas as

Figura 5.24: Posição angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e experimento.

Figura 5.25: Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e experimento.

Figura 5.26: Torque aplicado, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1: simulação e experimento.

condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 5.29 & 0 & 21.17 & 0 \\ 0 & 15.87 & 0 & 15.87 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a segunda fase de controle, o nível de atenuação foi $\gamma = 2.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = I_2, \quad Q_2 = 4I_2, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 3.5I_2.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 5.29 & 0 & 21.17 & 0 \\ 0 & 5.29 & 0 & 21.17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nas Figuras 5.27 e 5.28 a seguir, são apresentados os resultados experimentais para este controlador. Os distúrbios descritos anteriormente também foram considerados neste experimento.

Figura 5.27: Posição angular das juntas, configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 2.

Figura 5.28: Configuração APA, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 2: velocidade angular das juntas e torque aplicado.

Note que, para o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 2 (quando se diminuiu o valor de γ para níveis próximos aos do controle quase-LPV), há uma deterioração no posicionamento de junta 3, Figura 5.27, e um aumento no torque aplicado, Figura 5.28, em comparação com o controlador 1. Portanto, um melhor desempenho para o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos é encontrado com valores de γ superiores ao controle quase-LPV. Tal observação poderia indicar que o controle quase-LPV é mais robusto que o $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos. Entretanto, as equações em espaço de estados e os funcionais utilizados no projeto de cada controlador são diferentes, o que torna impossível uma comparação entre os controladores considerando os valores de γ . Uma comparação quantitativa entre estes controladores será feita no final desta seção, mediante a utilização dos índices de desempenho descritos na Seção 5.1.

5.3.3 Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da aplicação do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear para a configuração APA. O nível de atenuação encontrado para a primeira fase de controle foi $\gamma = 4.0$. O valor α utilizado foi 0.1. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_{11} = 2I_2, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Q_{12} = 0.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.2, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$R = \begin{bmatrix} 7.58 & 0 \\ 0 & 7.58 \end{bmatrix}$$

e

$$T_0 = \begin{bmatrix} 7.59 & 0 & 11.38 & 0 \\ 0 & 7.59 & 0 & 3.79 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a segunda fase de controle, o nível de atenuação encontrado foi $\gamma = 3.0$. O valor α utilizado foi 0.1. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_{11} = 1I_2, \quad Q_{22} = 4I_2 \quad e \quad Q_{12} = 0.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.2, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$R = \begin{bmatrix} 4.26 & 0 \\ 0 & 4.26 \end{bmatrix}$$

e

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2.85 & 0 & 11.38 & 0 \\ 0 & 2.85 & 0 & 11.38 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A seguir serão apresentados os resultados simulados e experimentais. Os distúrbios descritos na seção anterior também foram utilizados na simulação e no experimento. Os gráficos de posição angular são mostrados na Figura 5.29, os gráficos de velocidade angular na Figura 5.30, e os gráficos de torque na Figura 5.31.

Figura 5.29: Posição angular das juntas, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.

Figura 5.30: Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.

Figura 5.31: Torque aplicado, configuração APA, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: simulação e experimento.

5.3.4 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da aplicação do controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear para a configuração APA. Para a primeira fase, os parâmetros utilizados para obter a parametrização linear de $\bar{F}(x_e)$, dada por $\bar{Y}(\cdot)\bar{\theta}$, são:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_1 &= m_1 l c_1^2 = m_2 l c_2^2, \\ \bar{\theta}_2 &= m_3 l_1^2 = m_3 l_2^2 = m_3 l_1 l_2, \\ \bar{\theta}_3 &= m_3 l c_3^2, \\ \bar{\theta}_4 &= m_3 l_1 l c_3 = m_3 l_2 l c_3, \\ \bar{\theta}_5 &= I_1 = I_2, \\ \bar{\theta}_6 &= I_3, \\ \bar{\theta}_7 &= f_1, \\ \bar{\theta}_8 &= f_3.\end{aligned}$$

A matriz de regressão $\bar{Y}(\cdot)$ gerada pela parametrização linear é mostrada no Apêndice A. O nível de atenuação e as matrizes de ponderação são os mesmos utilizados no controle não linear, ou seja, $\gamma = 4.0$ e $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 4I_2$, $Q_{12} = 0$ e $R = 5I_2$. Considerou-se $\bar{S} = 10I_8$. Os valores iniciais e finais (obtidos do experimento) de $\bar{\theta}$ são mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Valores iniciais e finais de $\bar{\theta}$, configuração APA, primeira fase.

$\bar{\theta}(inicial)$	$\bar{\theta}(final)$
$\bar{\theta}_1 = 0.0078$	$\bar{\theta}_1 = 0.0087$
$\bar{\theta}_2 = 0.0258$	$\bar{\theta}_2 = 0.0267$
$\bar{\theta}_3 = 0.0037$	$\bar{\theta}_3 = 0.0053$
$\bar{\theta}_4 = 0.0098$	$\bar{\theta}_4 = 0.0121$
$\bar{\theta}_5 = 0.0075$	$\bar{\theta}_5 = 0.0084$
$\bar{\theta}_6 = 0.0060$	$\bar{\theta}_6 = 0.0076$
$\bar{\theta}_7 = 0.2500$	$\bar{\theta}_7 = 0.2453$
$\bar{\theta}_8 = 0.1000$	$\bar{\theta}_8 = 0.0972$

Para a segunda fase, considera-se o manipulador como sendo totalmente atuado, sendo os parâmetros utilizados para obter a parametrização linear de $F(x_e)$, dada por $Y(\cdot)\theta$, dados por:

$$\theta_1 = m_1 l c_1^2 = m_2 l c_2^2,$$

$$\theta_2 = m_2 l_1^2,$$

$$\theta_3 = m_2 l_1 l c_2,$$

$$\theta_4 = m_3 l_1^2 = m_3 l_2^2 = m_3 l_1 l_2,$$

$$\theta_5 = m_3 l c_3^2,$$

$$\theta_6 = m_3 l_1 l c_3 = m_3 l_2 l c_3,$$

$$\theta_7 = I_1 = I_2,$$

$$\theta_8 = I_3,$$

$$\theta_9 = f_1,$$

$$\theta_{10} = f_3.$$

A matriz de regressão $Y(\cdot)$ gerada pela parametrização linear é mostrada no Apêndice A.

Tabela 5.7: Valores iniciais e finais de θ , configuração APA, segunda fase.

$\theta(inicial)$	$\theta(final)$
$\theta_1 = 0.0087$	$\theta_1 = 0.0085$
$\theta_2 = 0.0350$	$\theta_2 = 0.0348$
$\theta_3 = 0.0166$	$\theta_3 = 0.0162$
$\theta_4 = 0.0267$	$\theta_4 = 0.0260$
$\theta_5 = 0.0053$	$\theta_5 = 0.0052$
$\theta_6 = 0.0121$	$\theta_6 = 0.0117$
$\theta_7 = 0.0084$	$\theta_7 = 0.0081$
$\theta_8 = 0.0076$	$\theta_8 = 0.0075$
$\theta_9 = 0.2453$	$\theta_9 = 0.2438$
$\theta_{10} = 0.0972$	$\theta_{10} = 0.0960$

Figura 5.32: Posição das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.

Figura 5.33: Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.

Figura 5.34: Torque aplicado, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear: simulação e experimento.

O nível de atenuação e as matrizes de ponderação são os mesmos utilizados no controle não linear, ou seja, $\gamma = 4.5$ e $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 4I_2$, $Q_{12} = 0$ e $R = 5I_2$. Considerou-se $S = 10I_{10}$. Os valores iniciais e finais (obtidos do experimento) de θ são mostrados na Tabela 5.7. Note que os valores iniciais dos elementos de θ que são iguais aos elementos de $\bar{\theta}$ correspondem aos valores finais destes. As Figuras 5.32 a 5.34 mostram os resultados simulados e experimentais, com distúrbios, para o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não-linear.

5.3.5 Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais

Como visto na Seção 4.2, no controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais para manipuladores subatuados deve-se controlar, em cada fase, uma junta passiva utilizando uma junta ativa. Para a configuração APA, pode-se controlar a junta passiva 2, aplicando torque na junta ativa 1. Nesta primeira fase, a junta ativa 3 é mantida bloqueada. Na segunda fase, controla-se as juntas 1 e 3, sendo o manipulador considerado totalmente atuado pois, a junta passiva 2 já alcançou a posição final desejada e está bloqueada. Para a primeira fase, a matriz $D_0(q, \dot{q})$ deve ser definida de tal forma que o termo $\bar{D}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\bar{M}}_0(q, \dot{q})$ seja anti-simétrico. Os termos $\bar{M}_0(q)$ e $\bar{D}_0(q, \dot{q})$ são valores escalares dados por:

$$\bar{M}_0(q) = M_{12}(q) - \frac{M_{11}(q)M_{22}(q)}{M_{21}(q)}, \quad (5.5)$$

e

$$\bar{D}_0(q, \dot{q}) = D_{12}(q, \dot{q}) - \frac{M_{11}(q)D_{22}(q, \dot{q})}{M_{21}(q)}, \quad (5.6)$$

com $M_{ij}(q)$ e $D_{ij}(q, \dot{q})$ sendo os ij -elementos das matrizes $M_0(q)$ e $D_0(q, \dot{q})$, respectivamente. O termo $\bar{D}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\bar{M}}_0(q, \dot{q})$ é dado por:

$$\bar{D}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\bar{M}}_0(q, \dot{q}) = D_{12}(q, \dot{q}) - \frac{M_{11}(q)D_{22}(q, \dot{q})}{M_{21}(q)} - \frac{1}{2}\dot{M}_{12}(q, \dot{q}) + \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{M}_{11}(q, \dot{q})M_{22}(q)}{M_{21}(q)} + \frac{1}{2} \frac{M_{11}(q)\dot{M}_{22}(q, \dot{q})}{M_{21}(q)} - \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_{11}(q)M_{22}(q)\dot{M}_{21}(q, \dot{q})}{M_{21}^2(q)}. \quad (5.9)$$

Como $\overline{D}_0(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{\overline{M}}_0(q, \dot{q})$ é escalar, para ser anti-simétrico ele deve se nulo. Portanto, D_{12} e D_{21} são selecionados de forma a satisfazer esta condição, ou seja:

$$D_{12} = \frac{1}{2}\dot{M}_{12}(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\frac{\dot{M}_{11}(q, \dot{q})M_{22}(q)}{M_{21}(q)}, \quad (5.10)$$

e

$$D_{22} = \frac{1}{2}\dot{M}_{22}(q, \dot{q}) - \frac{1}{2}\frac{M_{22}(q)\dot{M}_{21}(q, \dot{q})}{M_{21}(q)}. \quad (5.11)$$

Os demais elementos de $D_0(q, \dot{q})$ podem ser calculados a partir da igualdade, $V(q, \dot{q}) = D_0(q, \dot{q})\dot{q}$, como:

$$\begin{aligned} D_{11}(q, \dot{q}) &= \frac{V_1(q, \dot{q}) - D_{12}(q, \dot{q})\dot{q}_{c2}}{\dot{q}_{c1}}, \\ D_{21}(q, \dot{q}) &= \frac{V_2(q, \dot{q}) - D_{22}(q, \dot{q})\dot{q}_{c2}}{\dot{q}_{c1}}, \\ D_{13} &= 0, \\ D_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Desde que a junta 3 é mantida bloqueada nesta fase, a terceira linha de $D_0(q, \dot{q})$ não tem influência no sistema de controle, e por conveniência, pode ser definida como a terceira linha de $C_0(q, \dot{q})$.

Define-se variáveis auxiliares para a primeira e segunda fases de controle como em 5.3 com $i = 2$ e $i = 1, 3$, respectivamente. A matriz $\overline{\Xi}$, da primeira fase, é definida como:

$$\overline{\Xi} = \begin{bmatrix} \xi_2^T \end{bmatrix},$$

e a matriz Ξ , da segunda fase, é definida como:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1^T & 0 \\ 0 & \xi_3^T \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

com

$$\begin{aligned}\xi_1 &= [\xi_{11} \ \xi_{12} \ \xi_{13} \ \xi_{14} \ \xi_{15} \ \xi_{16} \ \xi_{17}]^T, \\ \xi_2 &= [\xi_{21} \ \xi_{22} \ \xi_{23} \ \xi_{24} \ \xi_{25} \ \xi_{26} \ \xi_{27}]^T, \\ \xi_3 &= [\xi_{31} \ \xi_{32} \ \xi_{33} \ \xi_{34} \ \xi_{35} \ \xi_{36} \ \xi_{37}]^T,\end{aligned}$$

sendo que $\xi_{i1}, \dots, \xi_{i7}$ para $i = 1, 2, 3$ são definidos na Seção 5.2.6. Os parâmetros da rede $\bar{F}(x_{e_u}, \bar{\Theta})$, primeira fase, são dados por:

$$\bar{\Theta} = [\bar{\Theta}_{12} \ \bar{\Theta}_{12} \ \bar{\Theta}_{13} \ \bar{\Theta}_{14} \ \bar{\Theta}_{15} \ \bar{\Theta}_{16} \ \bar{\Theta}_{17}]^T,$$

e os parâmetros da rede $F(x_e, \Theta)$, segunda fase, são dados por:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= [\Theta_{11} \ \Theta_{12} \ \Theta_{13} \ \Theta_{14} \ \Theta_{15} \ \Theta_{16} \ \Theta_{17}]^T, \\ \Theta_2 &= [\Theta_{21} \ \Theta_{22} \ \Theta_{23} \ \Theta_{24} \ \Theta_{25} \ \Theta_{26} \ \Theta_{27}]^T.\end{aligned}$$

Os níveis de atenuação e as matrizes de ponderação são $\gamma = 4.0$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 4$, $Q_{12} = 0$, e $R = 5$, para a primeira fase, e $\gamma = 4.5$, $Q_1 = I_2$, $Q_2 = 4I_2$, $Q_{12} = 0$, e $R = 5I_2$, para a segunda fase. Considera-se que apenas o distúrbio na junta 1, τ_{d_1} , é aplicado.

Os resultados simulados e experimentais, com distúrbios, para o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais, com $\bar{Z} = 10I_7$ e $\bar{\Theta}(0) = [0 \dots 0]_{7 \times 1}^T$, $Z = 10I_{14}$ e $\Theta(0) = [0 \dots 0]_{14 \times 1}^T$, são mostrados nas Figuras 5.35 a 5.37.

Verifica-se, a partir dos gráficos apresentados, que as cinco técnicas utilizadas mostraram-se capazes de controlar as juntas do robô manipulador quando este se encontra na configuração subatuada APA. Os gráficos com resultados simulados são

Figura 5.35: Posição das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.

Figura 5.36: Velocidade angular das juntas, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.

Figura 5.37: Torque aplicado, configuração APA, controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais: simulação e experimento.

praticamente iguais para as três técnicas.

Entretanto, os resultados experimentais apresentaram algumas diferenças, principalmente nos gráficos de posição e torque aplicado. Nos gráficos de posição dos controles $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1, Figura 5.24, misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, Figura 5.29, e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, Figura 5.32, verifica-se que a terceira junta sofre uma oscilação nos instantes finais de seu posicionamento, o que não ocorreu com o controle via representação quase-LPV. Tal comportamento pode ser justificado pela utilização de um tipo de linearização por realimentação do estado e de uma entrada de controle linear, Equação (4.25). No controle quase-LPV, a entrada de controle é não linear (veja Lema 2.3). Nos gráficos de torque, os picos de torque alcançados quando se utilizou o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, controlador 1, Figura 5.26, e o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, Figura 5.31, foram menores aos do controle quase-LPV, Figura 5.23.

Algumas diferenças também são observadas entre os gráficos com resultados simulados e experimentais para as três técnicas. Os níveis dos torques aplicados no caso experimental são maiores aos encontrados para o caso simulado, Figuras 5.23, 5.26 e 5.31. O mesmo pode ser observado com relação à posição angular mínima alcançada pela junta 1 durante a primeira fase de controle.

A Tabela 5.8 apresenta os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$ obtidos pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para a configuração APA.

Observa-se que o controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ apresentou melhor erro de acompanhamento de trajetória e, além disto, menor consumo de energia. Os valores de $E[\tau]$ obtidos pelos controladores quase-LPV, $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ confirmam a observação feita acima sobre os máximos picos de torque. O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais apresentou erro de acompanhamento maior, entretanto, deve-se considerar que a estratégia de controle é diferente neste caso (na primeira fase, controla-se a junta 2, e na segunda fase, as juntas 1 e 3). Além disso, a rede neural apresenta atraso na estimativa do termo $\overline{F}(x_{e_u})$, e como a duração da trajetória desejada para a junta 2 é pequena, $t_f = 1.0$ s, este atraso é refletido no posicionamento da junta 2, Figura 5.35. Para a configuração AAA, como a duração da trajetória desejada é maior, $t_f = 5.0$ s, este atraso da rede neural não provoca

Tabela 5.8: Índices de desempenho: Configuração APA, experimento.

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Quase-LPV, real. do estado	0.1060	0.4076
$\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos	0.1133	0.2941
Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	0.1020	0.2412
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$	0.1053	0.4561
Adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais	0.2475	0.5488

alteração no desempenho do controlador.

5.4 Configuração PAP

Uma outra configuração subatuada utilizada para validar as técnicas descritas é denominada PAP. Neste caso as juntas 1 e 3 são passivas e a junta 2 é ativa. Sendo que a configuração PAP possui $n_a = 1$, uma única junta pode ser controlada em cada fase. Na primeira fase, o vetor de juntas controladas, q_c , é escolhido como $q_c = [q_3]$, i.e., a junta passiva 3 é selecionada (possibilidade 1 descrita na Seção 3.3). Nesta fase a junta passiva 1, é mantida freada, desde que ela será controlada em seguida. Portanto, na segunda fase, a junta passiva 1 é selecionada e $q_c = [q_1]$ (possibilidade 1, novamente). Nesta fase a junta passiva, 3, é mantida freada, desde que ela já alcançou a posição final desejada. Finalmente, a junta ativa, 2, é controlada para sua posição final desejada.

A princípio três fases de controle são necessárias para controlar todas as juntas até a posição final desejada. Entretanto, uma fase auxiliar pode ser necessária entre as fases 1 e 2, se, ao final da fase 1, a junta ativa 2 estiver posicionada de tal forma que ao realizar a fase 2, ela se desloque fora do espaço de trabalho dela.

Nesta fase auxiliar, a junta ativa 2 é controlada para retornar à posição inicial, sendo o controlador o mesmo utilizado na fase 3. Os componentes do vetor $t_{f_{PAP}} = [t_{f_1} \ t_{f_a} \ t_{f_2} \ t_{f_3}]$ referem-se aos tempos das trajetórias desejadas para as fases 1, auxiliar (quando necessária), 2 e 3, respectivamente.

As posições inicial e final consideradas foram, respectivamente, $q(0) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ e $q(t_{f_{PAP}}) = [20^\circ \ 20^\circ \ 20^\circ]^T$, sendo $t_{f_{PAP}} = [0.7 \ 4.0 \ 1.0 \ 3.0]s$. Neste caso, a fase auxiliar deve ser realizada entre as fases 1 e 2, para evitar que a junta 2 se desloque fora do espaço de trabalho. Para verificar a robustez dos controladores, um distúrbio externo no torque τ_d do tipo senóide amortecida, iniciando em $t = 0.3 \ s$, foi introduzido na junta ativa 2.

Para a simulação, o distúrbio utilizado foi:

$$\tau_{d_2} = -0.5e^{-6t}\sin(4\pi t).$$

Quando se realizou os experimentos, o distúrbio utilizado foi:

$$\tau_{d_2} = e^{-6t}\sin(4\pi t).$$

Os valores máximos destes distúrbios, simulação e experimento, representam aproximadamente 25 % dos valores dos torques obtidos no instante em que o distúrbio foi introduzido. A Figura 5.38 mostra o distúrbio utilizado durante o experimento. Este mesmo distúrbio também foi introduzido 0.3 s após o início do controle da junta passiva 1.

5.4.1 Controle quase-LPV por realimentação do estado

Para a primeira fase, controle da junta passiva 3, escolhe-se como parâmetros os estados do sistema, ou seja, os erros de posição e velocidade da junta 3. Portanto:

$$\rho(\tilde{x}_c) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_3 & \dot{\tilde{q}}_3 \end{bmatrix}^T$$

Figura 5.38: Distúrbio, configuração PAP, experimento.

sendo $\tilde{q}_3$ e $\dot{\tilde{q}}_3$ os erros de posição e de velocidade da junta 3, respectivamente. Considera-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e de velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto, o sistema pode ser descrito pela Equação (2.17) com:

$$\begin{aligned}
 A(\rho(x)) &= \overline{A}(\rho(\tilde{x}_c)) \\
 B_1(\rho(x)) &= \overline{B} \\
 B_2(\rho(x)) &= \overline{B} \\
 C_1(\rho(x)) &= I_2 \\
 C_2(\rho(x)) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

sendo as matrizes $\overline{A}(\rho(\tilde{x}_c))$ e $\overline{B}$ obtidas da Equação (3.8).

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-50, 50]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [50^\circ/s \ 30^\circ/s^2]$. As funções utilizadas como base foram:

$$\begin{aligned}
 f_1(\rho(\tilde{x}_c)) &= 1 \\
 f_2(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\tilde{q}_3) \\
 f_3(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\dot{\tilde{q}}_3).
 \end{aligned}$$

O espaço dos parâmetros foi dividido em 5 pontos, ou seja $L = 5$. O valor de

atenuação mínimo encontrado foi $\gamma = 2.0$. Os valores das matrizes X_i são mostrados no Apêndice C.

Para a segunda fase, controle da junta passiva 1, os parâmetros escolhidos foram:

$$\rho = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \dot{\tilde{q}}_1 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\tilde{q}_2$ e $\dot{\tilde{q}}_1$ os erros de posição da junta 2 e de velocidade da junta 1, respectivamente. Note que o primeiro parâmetro, $\tilde{q}_2$, não faz parte do vetor de estados do sistema pois, $\tilde{x}_c = [\tilde{q}_1 \quad \dot{\tilde{q}}_1]^T$. A escolha do estado $\tilde{q}_1$ como parâmetro não acrescentaria variação às matrizes A , B_1 e B_2 , pois estas não são função deste estado. As saídas do sistema, z_1 e z_2 , são os erros de posição e de velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente..

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-50, 50]^\circ/s$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [50^\circ/s \quad 30^\circ/s^2]$. As funções base utilizadas foram:

$$\begin{aligned} f_1(\rho(\tilde{x}_c)) &= 1 \\ f_2(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\tilde{q}_2) \\ f_3(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\dot{\tilde{q}}_1). \end{aligned}$$

O valor de atenuação mínimo encontrado, para $L = 5$ foi $\gamma = 1.5$. Os valores das matrizes X_i são mostrados no Apêndice C.

Para a última fase, controle da junta ativa 2, os parâmetros escolhidos foram:

$$\rho = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \dot{\tilde{q}}_2 \end{bmatrix}^T$$

sendo $\tilde{q}_2$ e $\dot{\tilde{q}}_2$ os erros de posição e de velocidade da junta 2, respectivamente. As saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e de velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente..

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-50, 50]^\circ/s$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [50^\circ/s \quad 30^\circ/s^2]$. As funções base utilizadas foram:

$$\begin{aligned}
f_1(\rho(\tilde{x}_c)) &= 1 \\
f_2(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\tilde{q}_2) \\
f_3(\rho(\tilde{x}_c)) &= \cos(\tilde{\dot{q}}_2).
\end{aligned}$$

O valor de atenuação mínimo encontrado, para $L = 5$, foi $\gamma = 1.8$. Os valores das matrizes X_i são mostrados no Apêndice C. Os resultados simulados e experimentais são mostrados nas Figuras 5.39 a 5.41.

5.4.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

Quando aplicada a metodologia de projeto descrita na Seção 4.1.1, o nível de atenuação encontrado para a primeira fase de controle da configuração PAP foi $\gamma = 5.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = 0.8, \quad Q_2 = 1.5, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2.0 & 3.75 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Para a segunda fase de controle, o nível de atenuação foi $\gamma = 5.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = 0.5, \quad Q_2 = 3, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 1.25 & 7.50 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Figura 5.39: Posição angular das juntas, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

Figura 5.40: Velocidade angular das juntas, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

Figura 5.41: Torque aplicado, configuração PAP, controle quase-LPV por realimentação do estado: simulação e experimento.

Para a terceira e última fase de controle, o nível de atenuação foi $\gamma = 3.0$. As matrizes de ponderação utilizadas foram:

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 2.2, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = 5.$$

Aplicando o algoritmo de projeto descrito na Seção 4.1.1, verificando que todas as condições são satisfeitas, obtém-se:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 3.35 & 7.38 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

A seguir serão apresentados os resultados simulados e experimentais. Os distúrbios descritos na seção anterior também foram utilizados na simulação e no experimento. Os gráficos de posição angular são mostrados na Figura 5.42, os gráficos de velocidade angular na Figura 5.43, e os gráficos de torque na Figura 5.44.

As duas técnicas apresentaram resultados experimentais semelhantes. Os picos de torque obtidos com o controle quase-LPV foram ligeiramente superiores aos do controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos. Algumas diferenças são observadas entre os gráficos com resultados simulados e experimentais para as duas técnicas. Os picos dos torques aplicados no caso experimental são significativamente maiores aos encontrados para o caso simulado, Figuras 5.41 e 5.44.

A Tabela 5.9 apresenta os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$ obtidos pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares para a configuração PAP. Observa-se que o controlador $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV via realimentação do estado apresentou melhor erro de acompanhamento de trajetória, mas com um maior consumo de energia.

Figura 5.42: Posição angular das juntas, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.

Figura 5.43: Velocidade angular das juntas, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.

Figura 5.44: Torque aplicado, configuração PAP, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: simulação e experimento.

Tabela 5.9: Índices de desempenho: Configuração PAP, experimento.

Controlador	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Quase-LPV, real. do estado	0.1389	0.4123
$\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos	0.1683	0.3504

Capítulo 6

Controles Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ aplicados ao robô manipulador UArm II

Neste capítulo é apresentado um modelo Markoviano completo do robô manipulador de três juntas UArm II sujeito a falhas do tipo junta livre. Todas as possíveis configurações pós-falha são consideradas. Controles Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado e $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída são utilizados. Tais controladores garantem que a estabilidade do sistema será mantida mesmo com a ocorrência de uma falha, sem a necessidade de parar completamente o manipulador no período de reconfiguração pós falha.

6.1 Ocorrência de falhas

A configuração subatuada de um robô manipulador pode ser resultante da ocorrência de uma falha do tipo junta livre. Embora alguns controladores determinísticos, como por exemplo os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares descritos nos capítulos anteriores, já tenham sido projetados para as configurações antes (totalmente atuado) e depois da falha (subatuado), eles não garantem a estabilidade do sistema considerando a mudança súbita de configuração.

Para verificar este comportamento, um experimento foi realizado considerando o robô manipulador UArm II inicialmente na configuração AAA. As posições inicial e final eram $q(0) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ e $q(t_f) = [20^\circ \ 20^\circ \ 20^\circ]^T$, respectivamente, sendo $t_f = [4.0 \ 4.0 \ 4.0] \text{ s}$. Quando as posições das juntas alcançaram aproximadamente 15° , em $t = 2.8 \text{ s}$, uma falha do tipo junta livre artificial foi introduzida na junta 2. Assume-se que um sistema de detecção de falhas tal como o apresentado em [TERRA E TINÓS (2001)] indica a ocorrência da falha tão logo ela aconteça. Assim, o controlador é mudado da configuração totalmente atuado para a subatuado mantendo o movimento do manipulador. Como pode ser visto na Figura 6.1, os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV não foram capazes de reagir imediatamente à ocorrência da falha. O mesmo é observado quando os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via teoria dos jogos são utilizados, Figura 6.2.

Um procedimento alternativo na presença de falha é utilizar os freios durante a fase de reconfiguração de controle. Neste caso, todas as juntas são freadas por t_b segundos entre a detecção da falha e o início da fase de controle da configuração APA. O tempo t_b é selecionado de acordo com a dinâmica do manipulador e o tempo de resposta dos freios. Uma desvantagem deste procedimento é a necessidade de acionar os freios mesmo que as juntas estejam se movendo com velocidades elevadas, que pode provocar danos em alguns componentes. Este procedimento foi implementado no manipulador UArm II. Para este manipulador, quando os freios são acionados, ocorrem algumas oscilações na posição das juntas que levam no máximo 1 segundo para desaparecerem. Portanto, definiu-se $t_b = 1.0 \text{ s}$. Estas oscilações podem ser observadas nos resultados do experimentado utilizando os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV (Figura 6.3) e os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via teoria dos jogos (Figura 6.4). Note uma outra desvantagem deste procedimento: é necessário um alto torque para reiniciar o movimento do manipulador após a fase de reconfiguração. Nas próximas seções deste capítulo, o objetivo é projetar um controlador que elimina a necessidade de utilizar os freios nas juntas entre as configurações totalmente atuado e subatuado.

Figura 6.1: Reconfiguração em movimento, controle $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV: posição das juntas e torques.

Figura 6.2: Reconfiguração em movimento, controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos: posição das juntas e torques.

Figura 6.3: Reconfiguração com freios, controle $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV: posição das juntas e torques.

Figura 6.4: Reconfiguração com freios, controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos: posição das juntas e torques.

6.2 Sistemas Markovianos

Sistemas Markovianos discretos são uma classe particular de sistemas que variam no tempo de maneira aleatória [HOEL et al. (1987)]. Considere que no instante de tempo k um sistema desconhecido se encontra na configuração i , e deseja-se saber qual é a probabilidade de, no instante $k + 1$, o sistema estar na configuração j . A principal característica dos sistemas Markovianos é que a probabilidade do sistema estar na configuração j no instante seguinte depende apenas da configuração em que o sistema se encontra, independentemente do instante de tempo considerado. Sempre que o sistema estiver na configuração i , a probabilidade dele estar na configuração j no instante seguinte é p_{ij} .

Admite-se que o sistema considerado contém ao todo N configurações agrupadas em um conjunto S . Se $N = 3$ o sistema pode ser representado de forma esquemática pela Figura 6.5, e pode-se coletar todas as probabilidades p_{ij} para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ em uma matriz P denominada matriz de probabilidades de transição:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

e observe que a soma de cada uma das linhas de P deve ser igual a 1.

As mudanças de configuração (ou estado) de um sistema com tais características

Figura 6.5: Modelo de um sistema Markoviano.

são chamados saltos Markovianos. O registro dos estados pelos quais o sistema passou origina o que se denomina cadeia de Markov, e é representada por Θ . Um exemplo de cadeia de Markov para o sistema representado na Figura 6.5 poderia ser

$$\Theta = [1, 1, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, \dots] \quad (6.2)$$

Alguns controladores foram desenvolvidos para garantir estabilidade e performance de sistemas Markovianos, dos quais destacam-se os controladores discretos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados, desenvolvidos em [COSTA E MARQUES (2000)], [COSTA E DO VAL (1996)] e [COSTA E MARQUES (1998)], respectivamente. Para o problema de realimentação da saída, em [DE FARIAS et al. (2000)] foram propostos os controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas Markovianos contínuos.

Em [FARFAN (2000)], um modelo Markoviano é utilizado para representar o robô manipulador subatuado UArm II, considerando as mudanças de pontos de operação do sistema linearizado e a ocorrência de falhas do tipo junta livre como saltos Markovianos. Entretanto, o modelo Markoviano proposto naquele trabalho considera apenas a sequência de falhas AAA-APA e somente resultados simulados da aplicação dos controles $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados são apresentados.

Neste trabalho é desenvolvido um modelo Markoviano completo do robô manipulador UArm II, que considera todas as possibilidade de falhas. Os resultados

experimentais obtidos da implementação no manipulador UArm II dos controles Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado e $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, considerando duas seqüências de falhas, AAA-APA e AAA-PAA-PAP, comprovam que o sistema mantém a estabilidade sem parar completamente o manipulador no período de reconfiguração pós falha.

6.3 O robô UArm II como um sistema Markoviano

Nesta seção, a dinâmica de manipuladores subatuados, Equação (3.7), é representada por:

$$\tau_a = \overline{M}_0(q)\ddot{q}_c + \overline{b}_0(q, \dot{q}) + \overline{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}), \quad (6.3)$$

com $\overline{b}_0(q, \dot{q}) = \overline{C}_0(q, \dot{q})\dot{q}_c + \overline{D}_0(q, \dot{q})\dot{q}_r + \overline{F}_0(q, \dot{q}) + \overline{G}_0(q)$. O manipulador totalmente atuado (3.2) pode ser representado pela Equação (6.3), considerando $q_c = q$, $\overline{M}_0(q) = M_0(q)$ e $\overline{b}_0(q, \dot{q}) = b_0(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q})\dot{q} + F_0(\dot{q}) + G_0(q)$.

A linearização da dinâmica de um manipulador totalmente atuado ou subatuado, representados pela Equação (6.3), em torno de um ponto de operação com posição q_0 e velocidade $\dot{q}_0$, fornece um sistema linear na forma:

$$\dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \bar{B}\tau + \bar{B}\bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad (6.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cc} 0 & I \\ -\frac{\partial}{\partial q} \left(\overline{M}_0^{-1}(q)\overline{b}_0(q, \dot{q}) \right) & -\overline{M}_0^{-1}(q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\overline{b}_0(q, \dot{q}) \right) \end{array} \right] \bigg|_{(q_0, \dot{q}_0)}, \\ \bar{B} &= \left[\begin{array}{c} 0 \\ \overline{M}_0^{-1}(q) \end{array} \right] \bigg|_{(q_0)}, \\ \tilde{x} &= \left[\begin{array}{c} q^d - q \\ \dot{q}^d - \dot{q} \end{array} \right] \end{aligned}$$

e q^d a trajetória desejada. Um controlador proporcional derivativo (PD) preliminar

pode ser introduzido no torque aplicado na forma $\tau = [K_P \ K_D]\tilde{x} + u$, sendo u a entrada de controle, para compensar incertezas no modelo. As variáveis de saída controladas do sistema, z , são definidas como ponderações dos erros de posição, $\alpha(q^d - q)$, e da entrada de controle, βu . As variáveis de saída medidas, y , são os erros de posição, $(q^d - q)$. Portanto, o sistema fica

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + B\bar{\delta}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ z &= C_1\tilde{x} + Du, \\ y &= C_2\tilde{x},\end{aligned}\tag{6.5}$$

com

$$\begin{aligned}A &= \left[\begin{array}{cc} 0 & I \\ -\frac{\partial}{\partial q} \left(\bar{M}_0^{-1}(q)\bar{b}_0(q, \dot{q}) \right) + \bar{M}_0^{-1}(q)K_P & -\bar{M}_0^{-1}(q) \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\bar{b}_0(q, \dot{q})) - K_D \right] \end{array} \right] \Bigg|_{(q_0, \dot{q}_0)}, \\ B &= \bar{B}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 \\ \beta I \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sendo α e β constantes definidas pelo projetista e utilizadas para ajustar o controlador.

O projeto dos controladores Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado são baseados em sistemas discretos. Portanto, o sistema acima deve ser discretizado, fornecendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{B}\bar{\delta}(k) \\ z(k) &= \tilde{C}_1\tilde{x}(k) + \tilde{D}u(k).\end{aligned}\tag{6.6}$$

O modelo Markoviano do manipulador UArm II desenvolvido neste trabalho descreve as mudanças de pontos de linearização e a ocorrência de falhas do tipo junta livre considerando um robô planar de três juntas.

6.3.1 Pontos de linearização

O espaço de trabalho de cada junta é dividido em setores, denominados ν . Para cada combinação de $\nu/2$, de cada junta, define-se um ponto de operação para o manipulador. A escolha destes setores deve ser feita de forma a garantir a representatividade do modelo Markoviano para o espaço de trabalho considerado.

Neste trabalho, o espaço de trabalho de cada junta foi dividido em dois setores, com $\nu = 10^\circ$ (o experimento realizado busca posicionar cada junta em 20° , iniciando na posição 0°). Para cada setor, um ponto foi definido, sendo, 5° para o primeiro setor e 15° para o segundo. Todas as possibilidades de posicionamento das três juntas, q_1, q_2, q_3 , nestes dois pontos são usadas para mapear o espaço de trabalho do manipulador. Portanto, oito pontos de linearização, com as velocidades consideradas nulas, foram obtidos e são mostrados na lado direito da Tabela (6.3).

6.3.2 Configurações após a ocorrência de falhas

Considera-se neste trabalho que duas ou mais falhas não ocorrem simultaneamente. Para um robô manipulador com três juntas, sete configurações podem ser alcançadas após a ocorrência de falhas: AAP, APA, PAA, APP, PAP, PPA e PPP.

As configurações AAP, APA e PAA possuem $n_a = 2$, portanto, de acordo com a Seção 3.3, duas fases são necessárias para controlar todas as juntas até a posição desejada. Na primeira fase, o vetor das juntas controladas, q_c , contém a junta passiva e uma junta ativa (possibilidade 2 da Seção 3.3). Na segunda fase, q_c contém as juntas ativas. Nesta fase, as juntas passivas são mantidas freadas. A Tabela 6.1 mostra as juntas controladas nas duas fases para cada configuração. A primeira fase é denotada pelo subscrito u ; e a segunda fase pelo subscrito l . Por exemplo, para a configuração APA tem-se as fases APA_u e APA_l .

As configurações APP, PAP e PPA possuem $n_a = 1$, portanto, três fases são necessárias para controlar todas as juntas. Na primeira fase, o vetor das juntas controladas, q_c , contém uma junta passiva (possibilidade 1). Na segunda fase, q_c contém a outra junta passiva. Na terceira fase, q_c contém a junta ativa. Nas fases

Tabela 6.1: Juntas controladas nas configurações AAP, APA e PAA.

	Fase 1	Fase 2
AAP	1, 3	1, 2
APA	2, 3	1, 3
PAA	1, 3	2, 3

1 e 2, mantêm-se freadas as juntas passivas que não são controladas. A Tabela 6.2 mostra as juntas controladas nas três fases para cada configuração. A primeira fase é denotada pelo subscrito $u1$; a segunda fase pelo subscrito $u2$; e terceira fase pelo subscrito l . Por exemplo, para a configuração PPA tem-se as fases PPA_{u1} , PPA_{u2} e PPA_l .

Tabela 6.2: Juntas controladas nas configurações APP, PAP e PPA.

	Fase 1	Fase 2	Fase 3
APP	2	3	1
PAP	1	3	2
PPA	1	2	3

Denota-se aqui as configurações com pelo menos uma junta ativa (AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP e PPA) como configurações controláveis, visto que na configuração PPP não é possível o posicionamento que nenhuma das juntas.

6.3.3 Estados Markovianos

Os estados do modelo Markoviano do robô manipulador UArm II são os modelos dinâmicos linearizados nos 8 pontos de linearização para todas as fases das configurações controláveis, mais a configuração PPP. Para um robô manipulador com n juntas, o número de estados Markovianos, T_{MS} , é dado por:

$$T_{MS} = n_{lp} \times \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n_{cp_i} \times n_{fc_i}) + 1 \right) + 1,$$

sendo $n_{fc_i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ o número de possíveis configurações controláveis quando i falhas ocorrem, $n_{cp_i} = \text{ceil}(\frac{n}{n-i})$ o número de fases de controle para uma configuração controlável com i falhas ($\text{ceil}(x)$ é o inteiro imediatamente superior ou igual a x) e n_{lp} o número de pontos de linearização.

Neste trabalho, $n = 3$ e $n_{lp} = 8$, portanto, $T_{MS} = 129$ estados Markovianos. A Fig. 6.6 mostra todas as possíveis seqüências de falhas para o robô manipulador UArm II e representa o modelo Markoviano. As matrizes de probabilidades P_f , P_s , P_0 e P_{100} indicam, respectivamente, a probabilidade de uma ocorrência de falha, a probabilidade da junta passiva alcançar a posição desejada, a probabilidade da junta defeituosa voltar a funcionar corretamente (neste modelo $P_0 = 0$), e a probabilidade do manipulador, estando na configuração PPP, permanecer nela (sendo $P_0 = 0$, $P_{100} = 1$).

Nos experimentos realizados neste trabalho, duas seqüências de falhas são consideradas: seqüência AAA-APA e seqüência AAA-PAA-PAP.

6.4 Seqüência de falhas AAA-APA

A seqüência de falhas AAA-APA é representada no modelo Markoviano pelos números 1, 2 e 3 na Figura 6.6. O sistema robótico inicia o movimento na configuração AAA. Se uma falha ocorre na junta 2, o sistema muda para a fase APA_u da configuração APA. Quando a junta passiva alcança a posição desejada o sistema muda para a fase APA_l . De acordo com a Tabela 6.1, o vetor das juntas controladas, q_c , é selecionado como $q_c = [q_2 \ q_3]^T$ para a fase APA_u , e $q_c = [q_1 \ q_3]^T$ para a fase APA_l .

Define-se três conjuntos de estados Markovianos: o primeiro conjunto define operação normal, AAA, sendo que todas as juntas são ativas; o segundo conjunto, APA_u , define uma falha e a segunda junta é destravada; e o terceiro conjunto, APA_l , define uma falha e a segunda junta é travada. A Tabela 6.3 mostra os estados Markovianos agrupados nos conjuntos AAA, APA_u e APA_l , e relaciona-os com os pontos de linearização utilizados neste trabalho.

Figura 6.6: Modelo Markoviano do UArm II.

As dimensões das matrizes A , B , C_1 , C_2 e D_1 para as fases APA_u e APA_l são menores que para a configuração AAA. Entretanto, para os controladores Markovianos utilizados neste trabalho, todos os sistemas devem possuir a mesma dimensão. Para resolver este problema, linhas e colunas de zeros são introduzidas nas matrizes de forma apropriada.

Tabela 6.3: Estados Markovianos da Seqüência AAA-APA e Pontos de Linearização

Estados Markovianos			Pontos de Linearização					
AAA	APA_u	APA_l	q_{1_0}	q_{2_0}	q_{3_0}	$\dot{q}_{1_0}$	$\dot{q}_{2_0}$	$\dot{q}_{3_0}$
1	9	17	5	5	5	0	0	0
2	10	18	15	5	5	0	0	0
3	11	19	5	15	5	0	0	0
4	12	20	15	15	5	0	0	0
5	13	21	5	5	15	0	0	0
6	14	22	15	5	15	0	0	0
7	15	23	5	15	15	0	0	0
8	16	24	15	15	15	0	0	0

De acordo com o modelo Markoviano têm-se 24 estados Markovianos. Para o projeto dos controladores Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, deve-se agrupá-los em uma matriz P de dimensão 24×24 contendo as probabilidades de transição entre eles. A matriz P foi particionada em 9 submatrizes de dimensão 8×8 , mostrada em (6.7). Pode-se, independentemente, modelar a operação normal, a operação com falhas e a possibilidade de ocorrência de falha, ajustando as submatrizes de P .

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} P_{AAA} & P_f & P_0 \\ \hline P_0 & P_{APA_u} & P_s \\ \hline P_0 & P_s & P_{APA_l} \end{array} \right]. \quad (6.7)$$

Os elementos p_{ij} da matriz P representam a probabilidade do sistema, estando no estado i , ir para o ponto j no próximo instante de tempo. Os elementos p_{ii} da

matriz P , ou seja, os elementos da diagonal, representam a probabilidade do sistema permanecer no estado em que se encontra, i . Isto implica que $\sum_j p_{ij} = 1$ para toda linha i de P .

A submatriz P_{AAA} agrupa as relações entre estados Markovianos da condição normal e a submatriz diagonal P_f agrupa as probabilidades de uma falha ocorrer quando o sistema estiver em operação normal. Quando uma falha ocorre, o estado Markoviano do sistema somente pode mudar do conjunto AAA para o conjunto APA_u . Esta característica é representada pela submatriz nula P_0 no primeiro bloco de linhas de P . Depois da ocorrência da falha, o sistema está no conjunto APA_u ou APA_l , e considera-se o segundo e o terceiro blocos de linhas de P . A submatriz P_{APA_u} agrupa as probabilidades entre os estados Markovianos do conjunto APA_u , P_{APA_l} agrupa as probabilidades entre os estados Markovianos do conjunto APA_l , P_0 representa que o junta defeituosa não pode ser reparada, e a matriz P_s representa a probabilidade do estado Markoviano mudar do conjunto APA_u para o conjunto APA_l e vice-versa.

Para o projeto dos controladores Markovianos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída uma outra matriz de transição Λ é utilizada. A definição da matriz Λ será feita na Seção 6.7, por ora, os elementos da diagonal da matriz Λ são a soma dos elementos fora da diagonal da linha correspondente da matriz P , veja Apêndice C.

6.5 Seqüência de falhas AAA-PAA-PAP

A seqüência de falhas AAA-PAA-PAP é representada no modelo Markoviano pelos números 1, 4, 5, 6, 7, e 8, Figura 6.6. O sistema robótico inicia o movimento na configuração AAA. Se uma falha ocorre na junta 1, o sistema muda para a fase PAA_u da configuração PAA. Se a segunda falha (junta 3) ocorre durante a fase PAA_u , o sistema muda para a fase PAP_{u1} da configuração PAP. Se as falhas nas juntas 1 e 3 ocorrem simultaneamente, o sistema muda da configuração AAA para a fase PAP_{u1} . A segunda falha também pode ocorrer durante a fase PAA_l , quando a junta 1 já alcançou a posição desejada. Neste caso, o sistema muda da fase PAA_l para a fase PAP_{u2} .

De acordo com as Tabelas 6.1 e 6.2, o vetor das juntas controladas, q_c , é selecionado como $q_c = [q_1 \ q_3]^T$ para a fase PAA_u; $q_c = [q_2 \ q_3]^T$ para a fase PAA_l; $q_c = q_1$ para a fase PAP_{u1}; $q_c = q_3$ para a fase PAP_{u2}; e $q_c = q_2$ para a fase PAP_l. Define-se seis conjuntos de estados Markovianos referentes às fases AAA, PAA_u, PAA_l, PAP_{u1}, PAP_{u2} e PAP_l. Para esta seqüência de falhas, têm-se 48 estados Markovianos, Tabela 6.4, portanto, a dimensão da matriz de probabilidades de transição P é 48×48 . De forma análoga à seção anterior, a matriz P é particionada em 36 sub-matrizes de dimensão 8×8 , mostradas na Equação (6.8). As sub-matrizes P_0 , P_f e P_s são as mesmas utilizadas na Seção 6.4.

$$P = \begin{bmatrix} P_{AAA} & P_f & P_0 & P_f & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_{PAA_u} & P_s & P_f & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_s & P_{PAA_l} & P_0 & P_f & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_{PAP_{u1}} & P_s & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_s & P_{PAP_{u2}} & P_s \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_s & P_s & P_{PAP_l} \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Tabela 6.4: Estados Markovianos da Seqüência AAA-PAA-PAP e Pontos de Linearização

Estados Markovianos						Pontos de Linearização					
AAA	PAA _u	PAA _l	PAP _{u1}	PAP _{u2}	PAP _l	q_{1_0}	q_{2_0}	q_{3_0}	$\dot{q}_{1_0}$	$\dot{q}_{2_0}$	$\dot{q}_{3_0}$
1	9	17	25	33	41	5	5	5	0	0	0
2	10	18	26	34	42	15	5	5	0	0	0
3	11	19	27	35	43	5	15	5	0	0	0
4	12	20	28	36	44	15	15	5	0	0	0
5	13	21	29	37	45	5	5	15	0	0	0
6	14	22	30	38	46	15	5	15	0	0	0
7	15	23	31	39	47	5	15	15	0	0	0
8	16	24	32	40	48	15	15	15	0	0	0

6.6 Controles Markovianos por realimentação do estado

Nesta seção, considera-se os problemas de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado resolvidos, respectivamente, em [COSTA E MARQUES (2000)], [COSTA E DO VAL (1996)] e [COSTA E MARQUES (1998)], para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos Markovianos.

Ao longo desta seção, a seguinte notação é utilizada: $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são os espaços Euclidianos real e complexo n -dimensionais, respectivamente. $\mathbb{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ denota o espaço linear normado de todas as matrizes complexas $n \times m$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço linear normado de todas as matrizes reais $n \times m$. Por simplicidade, $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ sempre que $n = m$. Denote $(\cdot)^T$ para transposto conjugado, e $\mathbb{H}^{m,n}$ o espaço linear formado por todas as seqüências de matrizes complexas $V = (V_1, \dots, V_N)$, com $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ para $i = 1, \dots, N$. Por simplicidade, $\mathbb{H}^{n,n} = \mathbb{H}^n$. De forma similar, $\mathbb{G}^{m,n}$ denota o espaço linear formado por todas as seqüências de matrizes reais $U = (U_1, \dots, U_N)$, com $U_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \dots, N$.

Define-se o operador

$$\mathcal{E}(\cdot) = (\mathcal{E}_1(\cdot), \dots, \mathcal{E}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n),$$

e para $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^n$,

$$\mathcal{E}_i(V) = \sum_{j=1}^N p_{ij} V_j.$$

sendo p_{ij} os elementos da matriz de probabilidades de transição P .

Denota-se por l_2^r o espaço de Hilbert formado pela seqüência de variáveis aleatórias de segunda ordem $w = (w(0), w(1), \dots)$ com $w(k) \in \mathbb{R}^r$ tais que

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|w(k)\|_2^2 < \infty,$$

sendo

$$\|w(k)\|_2^2 = E(\|w(k)\|^2).$$

Considere o sistema linear discreto sujeito a saltos Markovianos:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\Theta(k)}x(k) + B_{\Theta(k)}u(k) + W_{\Theta(k)}w(k) \\ z(k) &= C_{\Theta(k)}x(k) + D_{\Theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0 \\ \Theta(0) &= \Theta_0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

com $A = (A_1, \dots, A_N) \in \mathbb{H}^n$, $B = (B_1, \dots, B_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$, $W = (W_1, \dots, W_N) \in \mathbb{H}^{r,n}$, $w = (w(0), w(1), \dots) \in l_2^r$, $C = (C_1, \dots, C_N) \in \mathbb{H}^{n,s}$, e $D = (D_1, \dots, D_N) \in \mathbb{H}^{m,s}$ com $D_i^T D_i > 0$ para $\forall i$. Θ representa uma cadeia de Markov assumindo valores no conjunto $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$. Portanto, sempre que $\Theta(k) = i$, tem-se $A_{\theta(k)} = A_i$, $B_{\theta(k)} = B_i$, $W_{\theta(k)} = W_i$, $C_{\theta(k)} = C_i$ e $D_{\theta(k)} = D_i$. Θ_0 é o estado Markoviano inicial da cadeia de Markov.

6.6.1 Controle Markoviano $\mathcal{H}_2$

Nesta técnica de controle busca-se minimizar o seguinte funcional:

$$J(x, \Theta, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} E \left\{ \begin{bmatrix} x^T(k) & u^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\Theta(k)} & L_{\Theta(k)} \\ L_{\Theta(k)}^T & R_{\Theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \right\} \tag{6.10}$$

sujeito a (6.9) com $w = 0$, $L = (L_1, \dots, L_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$, $Q = (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbb{H}^{n^T}$, e $R = (R_1, \dots, R_N) \in \mathbb{H}^{m^T}$. Assume-se que Q_i e R_i , $i \in \mathcal{S}$, são hermitianas.

A lei de controle que minimiza o funcional (6.10) é dada por

$$u(k) = F_{\Theta(k)}x(k),$$

sendo $F = (F_1, \dots, F_N)$ com

$$F_i = - \left(B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i \right)^{-1} \left(B_i^T \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^T \right) \tag{6.11}$$

e $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{H}^{n^T}$ a solução das equações de Riccati acopladas abaixo, para $i \in \mathcal{S}$, como mostrado em [COSTA E MARQUES (2000)]:

$$-X_i + A_i^T \mathcal{E}_i(X) A_i + Q_i - \left(A_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i + L_i \right) \left(B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i \right)^{-1} \left(B_i^T \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^T \right) = 0.$$

6.6.2 Controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$

O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ consiste em obter um controlador que estabilize o sistema (6.9) e garanta que a norma entre o distúrbio de entrada e a saída medida seja menor que o nível de atenuação γ . Por simplicidade, e sem perda de generalidade, assume-se que $D_i^T D_i = I$ e que $C_i^T D_i = 0$, [COSTA E DO VAL (1996)]. Define-se $\mathcal{Z}(\Theta_0, w) = (z(0), z(1), \dots)$ como sendo o conjunto de todas as saídas do sistema (6.9), e a seguinte norma:

$$\|\mathcal{Z}(\Theta_0, \cdot)\| = \sup_{w \in l_2^T} \frac{\|\mathcal{Z}(\Theta_0, w)\|_2}{\|w\|_2}. \quad (6.12)$$

Seja $Q_i = C_i^T C_i$, $i = 1, \dots, N$, e suponha que (C, A) seja detectável na média quadrática. Dado $\gamma > 0$, existe $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n, m}$ que estabiliza (A, B) na média quadrática e $\|\mathcal{Z}_F(\Theta_0, \cdot)\| < \gamma$ para todo Θ_0 se e somente se existir $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\text{i) } I - \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } X_i &= Q_i + A_i^T \mathcal{E}_i(X) A_i - A_i^T \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\gamma} W_i \end{bmatrix} \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i^T \\ \frac{1}{\gamma} W_i^T \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\gamma} W_i \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_i^T \\ \frac{1}{\gamma} W_i^T \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) A_i \\ &= Q_i + F_i^T F_i - G_i^T G_i + \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\gamma} W_i G_i \right)^T \mathcal{E}_i(X) \\ &\quad \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\gamma} W_i G_i \right), \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N$, sendo que

$$\begin{aligned} F_i &= - \left(I + B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i + \frac{1}{\gamma^2} B_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i \left(I - \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. W_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i \right)^{-1} B_i^T \left(I + \frac{1}{\gamma^2} \mathcal{E}_i(X) W_i \left(I - \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} W_i^T \right) \mathcal{E}_i(X) A_i \\ &= - (I + B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^T \mathcal{E}_i(X) \left(A_i + \frac{1}{\gamma} W_i G_i \right), \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} G_i &= \left(I - \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i + \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \\ &\quad \left(\frac{1}{\gamma^2} W_i^T (I - \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^T \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^T) \mathcal{E}_i(X) A_i \right) \\ &= \left(I - \frac{1}{\gamma^2} W_i^T \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \frac{1}{\gamma} W_i^T \mathcal{E}_i(X) (A_i + B_i F_i). \end{aligned} \quad (6.15)$$

iii) $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$, sendo $\mathcal{L}(\cdot) = (\mathcal{L}_1(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N(\cdot))$ é definido como:

$$\mathcal{L}_i(\cdot) = \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\gamma} W_i G_i \right)^T \mathcal{E}_i(\cdot) \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\gamma} W_i G_i \right) \quad (6.16)$$

para $i = 1, \dots, N$.

As equações (6.13) a (6.16) fornecem condições necessárias e suficientes para a existência de solução para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$, [COSTA E DO VAL (1996)].

6.6.3 Controle Markoviano Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Dado $\gamma > 0$, o problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ consiste em encontrar $F = (F_1, \dots, F_N)$ que estabilize o sistema (6.9) e que minimize ζ sujeito a $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \gamma$, sendo Σ_F o sistema em malha fechada, com $u(k) = F_{\Theta(k)} x(k)$. Assume-se que $D_i^T D_i > 0$ e $C_i^T D_i = 0$.

Suponha que (C, A) seja detectável na média quadrática e que $\gamma > 0$ seja um número real fixado. Se existirem $X = (X_1, \dots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$

tais que

$$-X_i + (A_i + B_i F_i)^T \mathcal{E}_i(X) (A_i + B_i F_i) + (C_i + D_i F_i)^T (C_i + D_i F_i) + \frac{1}{\gamma^2} X_i W W^T X_i \leq 0, \quad (6.17)$$

para $i \in \mathcal{S}$, então $F = (F_1, \dots, F_N)$ estabiliza o sistema (6.9) na média quadrática [COSTA E MARQUES (1998)], e

$$\|\Sigma_F\|_\infty^2 \leq \gamma^2(1 - \delta) \leq \gamma^2, \quad (6.18)$$

$$\|\Sigma_F\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^N \text{tr}\{W^T X_i W\}, \quad (6.19)$$

sendo que

$$\delta \in \left(0, \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^N \text{tr}\{W^T X_i W\}\right). \quad (6.20)$$

Utiliza-se a seguinte aproximação para resolver o problema de controle misto:

Para $\gamma > 0$ fixado, encontrar $X = (X_1, \dots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \dots, F_N)$ tais que

$$\text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^N W^T X_i W \right\} \quad (6.21)$$

seja minimizado e esteja sujeito à restrição (6.17).

Assume-se que a matriz P não é exatamente conhecida, mas que pertence a um conjunto convexo $\mathbb{P}$ definido como

$$\mathbb{P} = \left\{ P; P = \sum_{t=1}^q \alpha_t P^t, \text{ com } \alpha_t \geq 0, \sum_{t=1}^q \alpha_t = 1 \right\}, \quad (6.22)$$

sendo $P^t = [p_{ij}^t]$, $t = 1, \dots, q$, matrizes de probabilidades de transição conhecidas. Na sequência se mostrará que uma aproximação para este problema pode ser obtida através de um problema de otimização convexo sujeito a DMLs.

Seja, $\Gamma_i^t = \left[\sqrt{p_{i1}^t} I \cdots \sqrt{p_{iN}^t} I \right] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^{Nn}, \mathbb{C}^n)$ para $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, q$.

Define-se o seguinte problema de otimização:

Obtenha $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{G}^n, Q = (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbb{G}^n, L = (L_1, \dots, L_N) \in$

$\mathbb{G}^n$, e $Y = (Y_1, \dots, Y_N) \in \mathbb{G}^{n,m}$ tais que

$$\xi = \min \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^N D^T X_i D \right\}, \quad (6.23)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_i A_i^T + Y_i^T B_i^T & Q_i M_i^T & Y_i^T J_i^T & D \\ A_i Q_i + B_i Y_i & L_i & 0 & 0 & 0 \\ M_i Q_i & 0 & I_n & 0 & 0 \\ J_i Y_i & 0 & 0 & I_n & 0 \\ D^T & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 I_r \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.24)$$

$$\begin{bmatrix} L_i & L_i \Gamma_i^t \\ \Gamma_i^{tT} L_i & \operatorname{diag}\{Q\} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.26)$$

$$X_i = X_i^T > 0, \quad (6.27)$$

$$Q_i = Q_i^T > 0, \quad (6.28)$$

$$L_i = L_i^T > 0, \quad (6.29)$$

sendo $\operatorname{diag}\{Q\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{Nn})$ a matriz formada por $Q_1, \dots, Q_N$ na diagonal e zeros nas posições restantes.

Admite-se que o problema acima tenha uma solução X, Q, L e Y , e $F = (F_1, \dots, F_N)$ seja dado por $F_i = Y_i Q_i^{-1}$, e $\xi = \sum_{i=1}^N \operatorname{tr}\{W^T X_i W\}$. Então F estabiliza robustamente o sistema (6.9) e $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \gamma$ para todo $P \in \mathbb{P}$ [COSTA E MARQUES (1998)].

6.7 Controles Markovianos por realimentação da saída

Considere as seqüências de matrizes reais: $A = (A_1, \dots, A_N)$, $\dim(A_i) = n \times n$; $E = (E_1, \dots, E_N)$, $\dim(E_i) = n \times m$; $B = (B_1, \dots, B_N)$, $\dim(B_i) = n \times r$; $C_1 = (C_{11}, \dots, C_{1N})$, $\dim(C_{1i}) = p \times n$; $D_1 = (D_{11}, \dots, D_{1N})$, $\dim(D_{1i}) = p \times r$; $C_2 = (C_{21}, \dots, C_{2N})$, $\dim(C_{2i}) = q \times n$; e $D_2 = (D_{21}, \dots, D_{2N})$, $\dim(D_{2i}) = q \times m$; $i = 1, \dots, N$.

Considere também uma cadeia de Markov homogênea e contínua, $\Theta = \{\Theta(t) : t > 0\}$ tendo S como espaço de estados e com probabilidade de transição $Pr(\theta_{t+\Delta t} = j | \theta_t = i)$ dada por:

$$Pr(\Theta(t + \Delta t) = j | \Theta(t) = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}(t)\Delta + o(\delta) & \text{if } i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}(t)\Delta + o(\delta) & \text{if } i = j \end{cases},$$

sendo $\lambda_{ij}(t) \geq 0$ a taxa de probabilidade de transição de i para j ($i \neq j$), e:

$$\lambda_{ii}(t) = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}(t),$$

como em [DE FARIAS et al. (2000)]. $\Lambda = [\lambda_{ij}(t), i \in S, j \in S]$ é a matriz de transição para os controladores descritos nesta seção. A distribuição de probabilidades da cadeia de Markov no tempo inicial é dada por $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ de tal forma que $Pr(\Theta(0) = i) = \mu_i$. O sistema linear contínuo sujeito a saltos Markovianos é dado por:

$$G : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\theta(t)}x(t) + E_{\theta(t)}w(t) + B_{\theta(t)}u(t), \\ z(t) = C_{1\theta(t)}x(t) + D_{1\theta(t)}u(t), \\ y(t) = C_{2\theta(t)}x(t) + D_{2\theta(t)}w(t), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6.30)$$

com $w \in \mathcal{L}_2(0, T)$, $E(|x_0|^2) < \infty$, $\Theta(0) \sim \mu$, e sendo $x = \{x(t), t \geq 0\}$, $z = \{z(t), t \geq 0\}$, e $y = \{y(t), t \geq 0\}$, respectivamente, o estado, a saída controlada, e a saída medida do sistema G . Portanto, sempre que $\Theta(t) = i \in S$, tem-se $A_{\theta(t)} = A_i$, $E_{\theta(t)} = E_i$, $B_{\theta(t)} = B_i$, $C_{1\theta(t)} = C_{1i}$, $D_{1\theta(t)} = D_{1i}$, $C_{2\theta(t)} = C_{2i}$, e $D_{2\theta(t)} = D_{2i}$. O

controlador dinâmico é da forma:

$$G_c : \begin{cases} \dot{v}(t) = A_{c\theta(t)}v(t) + B_{c\theta(t)}y(t), \\ u(t) = C_{c\theta(t)}v(t), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (6.31)$$

no qual considera-se as matrizes $A_c = (A_{c1}, \dots, A_{cN})$, $\dim(A_{ci}) = n \times n$; $B_c = (B_{c1}, \dots, B_{cN})$, $\dim(B_{ci}) = n \times q$; e $C_c = (C_{c1}, \dots, C_{cN})$, $\dim(C_{ci}) = p \times n$.

6.7.1 Controle Markoviano $\mathcal{H}_2$

O problema de controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída é encontrar um controlador (A_c, B_c, C_c) tal que a norma $\|G\|_2$ do sistema em malha fechada é minimizada.

Teorema 6.1 (DE FARIAS et al. (2000)) *O problema de controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída é resolvido pela seguinte minimização:*

$$\min \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(Z_i) \quad (6.32)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i^T + B_i F_i + F_i^T B_i^T + \lambda_{ii} Y_i & Y_i C_{1i}^T + F_i^T D_{1i}^T & R_i(Y) \\ C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & -I & 0 \\ R_i^T(Y) & 0 & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0, \quad (6.33)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I & E_i \\ I & X_i & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i^T & E_i^T X_i + D_{2i}^T L_i^T & Z_i \end{bmatrix} > 0, \quad (6.34)$$

$$A_i^T X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}^T L_i^T + C_{1i}^T C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j < 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.35)$$

sendo

$$R_i(Y) = \left[\sqrt{\lambda_{1i}} Y_i \cdots \sqrt{\lambda_{(i-1)i}} Y_i, \sqrt{\lambda_{(i+1)i}} Y_i \cdots \sqrt{\lambda_{1N}} Y_i \right]$$

e

$$S_i(Y) = -\text{diag}(Y_1 \cdots Y_{i-1}, Y_{i+1} \cdots Y_N),$$

$i = 1, \dots, N$. O controlador correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} C_{ci} &= F_i Y_i^{-1} \\ B_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} L_i \\ A_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} M_i Y_i^{-1} \end{aligned} \quad (6.36)$$

sendo

$$M_i = -A_i^T - X_i A_i Y_i - X_i B_i F_i - L_i C_{2i} Y_i - C_{1i}^T (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) - \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i.$$

6.7.2 Controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$

O problema de controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída é encontrar um controlador (A_c, B_c, C_c) tal que a norma $\|G\|_\infty$ do sistema em malha fechada é menor que o nível de atenuação γ .

Teorema 6.2 (DE FARIAS et al. (2000)) *O problema de controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída é resolvido pelo seguinte conjunto de DMLs:*

$$\begin{bmatrix} A_i^T X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}^T L_i^T + C_{1i}^T C_{1i} + \sum_{j=i}^N \lambda_{ij} X_j & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i^T X_i + D_{2i}^T L_i^T & -\gamma^{-2} I \end{bmatrix} < 0, \quad (6.37)$$

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i^T + B_i F_i + F_i^T B_i^T + \lambda_{ii} Y_i + \gamma^{-2} E_i E_i^T & Y_i C_{1i}^T + F_i^T D_{1i}^T & R_i(Y) \\ C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & -I & 0 \\ R_i^T(Y) & 0 & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0, \quad (6.38)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0. \quad (6.39)$$

O controlador correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} C_{ci} &= F_i Y_i^{-1} \\ B_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} L_i \\ A_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} M_i Y_i^{-1} \end{aligned} \quad (6.40)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_i &= -A_i^T - X_i A_i Y_i - X_i B_i F_i - L_i C_{2i} Y_i - C_{1i}^T (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) \\ &\quad - \gamma^{-2} (X_i E_i + L_i D_{2i}) E_i^T - \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i. \end{aligned}$$

6.8 Resultados Experimentais

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos da implementação dos controladores Markovianos no robô experimental UArm II. Tais controladores foram calculados de acordo com as Seções 6.6 e 6.7, e usando o *toolbox Discrete Time Markovian Jump Linear Systems (DTMJLS)*, desenvolvido por Ricardo P. Marques, veja [MARQUES (1997)] para mais detalhes. Alguns destes resultados foram relatados nos artigos: [SIQUEIRA E TERRA (2004b); SIQUEIRA E TERRA (2004c); SIQUEIRA E TERRA (2004d)].

6.8.1 Seqüência de falhas AAA-APA

As posições inicial e final consideradas foram, respectivamente, $q(0) = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ e $q(t_f) = [20^\circ \ 20^\circ \ 20^\circ]$, sendo $t_f = [4.0 \ 4.0 \ 4.0] \text{ s}$. A configuração inicial foi AAA, com ponto de operação iniciando em 1. As mudanças de um estado Markoviano para outro são definidas de acordo com a posição real das juntas do manipulador em relação aos setores delimitados pelo ângulo de 10° , como definido na Seção 6.3. Para validar o controlador tolerante a falha proposto, uma falha artificial foi introduzida em $t = 2.8 \text{ s}$, alterando o estado Markoviano da configuração AAA para a configuração APA_u, mantendo o ponto de linearização considerado. Distúrbios externos

foram introduzidos para verificar a robustez dos controladores:

$$\tau_d = \begin{bmatrix} 0.3e^{-2(t-2.8)^2} \sin(4\pi t) \\ 0.015e^{-2(t-2.8)^2} \sin(5\pi t) \\ 0.009e^{-2(t-2.8)^2} \sin(6\pi t) \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Estes distúrbios consistem de funções normais com oscilações senoidais, Figura 6.7.

Figura 6.7: Distúrbios externos, controle Markoviano.

Para estes experimentos, os controladores preliminares PD foram definidos como:

$$K_{P_{AAA}} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix}, \quad K_{D_{AAA}} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$K_{P_{APA_u}} = \begin{bmatrix} -1.10 & -0.05 \\ -0.07 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad K_{D_{APA_u}} = \begin{bmatrix} -0.07 & -0.01 \\ -0.04 & 0.06 \end{bmatrix},$$

$$K_{P_{APA_l}} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.19 \\ 0.06 & 0.29 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_{D_{APA_l}} = \begin{bmatrix} 0.27 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Os controladores Markovianos foram calculados considerando $\alpha = 20$ para a configuração AAA, $\alpha = 20$ para as fases APA_u e APA_l e $\beta = 1$, para o caso de realimentação do estado, e $\alpha = 50$ e $\beta = 100$ para todas as configurações para o caso de realimentação da saída, Equação (6.5). Note que as matrizes $\tilde{C}_1$ e $\tilde{D}$, definidas

na Seção 6.3, satisfazem as condições $\tilde{C}_1^T \tilde{D} = 0$ e $\tilde{D}^T \tilde{D} = I$ do controlador $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado. Para o controlador Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação do estado, as matrizes de ponderação são $Q = \tilde{C}_1^T \tilde{C}_1$ e $R = I$. Os valores da matriz de probabilidades de transição P e da matriz de transição Λ são mostrados no Apêndice C. O melhor valor de γ encontrado para os controladores Markovianos $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado foi $\gamma = 10$. Para o controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, define-se $\mu = (1, 0, \dots, 0)$, pois o sistema sempre começa no estado Markoviano 1. O melhor valor de γ encontrado para o controlador Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída foi $\gamma = 1.5$.

Os resultados experimentais, posição das juntas, cadeia de Markov, velocidade e torque, para os controles Markovianos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, e $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, são mostrados nas Figuras 6.8 a 6.17.

Tabela 6.5: Índices de desempenho - Sequência AAA-APA.

	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Markoviano $\mathcal{H}_2$, real. do estado	0.2544	0.6412
Markoviano $\mathcal{H}_\infty$, real. do estado	0.2377	0.6158
Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, real. do estado	0.2334	0.6048
Markoviano $\mathcal{H}_2$, real. da saída	0.1674	0.5423
Markoviano $\mathcal{H}_\infty$, real. da saída	0.1548	0.4537

Mesmo após a introdução da falha artificial, o sistema manteve a estabilidade para todos os controladores Markovianos. Os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$, Seção 5.1, para os resultados obtidos são mostrados na Tabela 6.5. Note que os controladores Markovianos por realimentação da saída apresentaram menor erro de acompanhamento de trajetória, índice $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$, e menor energia consumida, índice $E[\tau]$. Entre os controladores por realimentação do estado, o controle $\mathcal{H}_2$ gastou mais energia que os

controladores $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, com erro de acompanhamento maior. As cadeias de Markov também podem indicar diferenças de robustez entre os controladores. Pode-se observar que o estado referente à posição mais próxima da posição final desejada (estado 24) é alcançado mais rapidamente nos controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ que nos controladores $\mathcal{H}_2$.

Para o caso em que se considerou a utilização de freios durante a fase de reconfiguração, Figuras 6.3 e 6.4 da Seção 6.1, os valores da energia total consumida pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV e via teoria dos jogos foram, respectivamente, $E[\tau] = 0.7788$ Nms e $E[\tau] = 0.8291$ Nms. Este valores são aproximadamente 20% maiores que o valor máximo obtido pelos controladores Markovianos, $E[\tau] = 0.6412$ Nms.

6.8.2 Sequência de falhas AAA-PAA-PAP

Os experimentos foram realizados para as mesmas posições iniciais e finais consideradas na sequência de falhas AAA-APA. Neste caso, duas falhas artificiais foram introduzidas: a primeira em $t = 2.8$ s, mudando o estado Markoviano da configuração AAA para a fase PAA_u; e a segunda em $t = 3.0$ s mudando o estado Markoviano da fase PAA_u para a fase PAP_{u1}. O distúrbio de torque (6.41) também foi introduzido para verificar a robustez dos controladores.

Para estes experimentos, os controladores preliminares PD foram definidos como:

$$\begin{aligned}
 K_{P_{AAA}} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix}, & K_{D_{AAA}} &= \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}, \\
 K_{P_{PAA_u}} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, & K_{D_{PAA_u}} &= \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \\
 K_{P_{PAA_l}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & K_{D_{PAA_l}} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \\
 K_{P_{PAP_{u1}}} &= -0.5, & K_{D_{PAP_{u1}}} &= -0.01, & K_{P_{PAP_{u2}}} &= -10,
 \end{aligned}$$

Figura 6.8: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.9: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.10: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.11: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.12: Sequência AAA-APA, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.13: Sequência AAA-APA, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.14: Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.15: Seqüência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.

Figura 6.16: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.17: Sequência AAA-APA, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.

$$K_{DPAP_{u2}} = -0.7, \quad K_{PPAP_l} = 2, \quad \text{e} \quad K_{DPAP_l} = 0.5.$$

Os controladores Markovianos foram calculados considerando $\alpha = 20$ para a configuração AAA; $\alpha = 40$ para as fases PAA_u e PAA_l; $\alpha = 10$ para as fases PAP_{u1}, PAP_{u2} e PAP_l; e $\beta = 1$, para o caso de realimentação do estado, e $\alpha = 50$ e $\beta = 100$ para todas as configurações para o caso de realimentação da saída. Os valores da matriz de probabilidades de transição P e da matriz de transição Λ são mostrados no Apêndice C. O melhor valor de γ encontrado para os controladores Markovianos $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado foi $\gamma = 10$. Para o controlador Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, $\gamma = 1.5$. Os resultados experimentais, posição das juntas, cadeia de Markov, velocidade e torque, para todos os controles Markovianos são mostrados nas Figuras 6.18 a 6.27.

Os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$ para a sequência de falhas AAA-PAA-PAP são mostrados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Índices de desempenho - Sequência AAA-PAA-PAP.

	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)
Markoviano $\mathcal{H}_2$, real. do estado	0.2176	0.6945
Markoviano $\mathcal{H}_\infty$, real. do estado	0.2085	0.6919
Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, real. do estado	0.2062	0.6932
Markoviano $\mathcal{H}_2$, real. da saída	0.1809	0.4465
Markoviano $\mathcal{H}_\infty$, real. da saída	0.1845	0.4271

Novamente, os controladores Markovianos por realimentação da saída apresentaram menor erro de acompanhamento de trajetória, e menor energia consumida. Entre os controladores por realimentação do estado, a menor energia consumida é alcançada com o controlador $\mathcal{H}_\infty$, e o menor erro de acompanhamento é conseguido

com controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Entre os controladores por realimentação da saída, ocorre o inverso, ou seja, a menor energia consumida é alcançada com o controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, e o menor erro de acompanhamento é conseguido com controlador $\mathcal{H}_\infty$. Pode-se observar que, neste caso, as cadeias de Markov apresentaram comportamentos semelhantes.

Figura 6.18: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.19: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.20: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.21: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.22: Seqüência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.23: Seqüência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentação do estado, velocidades angulares e torques.

Figura 6.24: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.25: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_2$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.

Figura 6.26: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, posições das juntas e cadeia de Markov.

Figura 6.27: Sequência AAA-PAA-PAP, controle Markoviano $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída, velocidades angulares e torques.

Parte II

Robôs manipuladores cooperativos

Capítulo 7

Introdução

Observando a facilidade com que os humanos conseguem deslocar volumes maiores quando utilizam dois braços ao invés de apenas um, pesquisadores buscam reproduzir este aumento de eficiência através da utilização de vários robôs manipuladores individuais agindo cooperativamente no deslocamento de objetos. Tais sistemas mecânicos são chamados robôs manipuladores cooperativos.

Robôs manipuladores cooperativos podem movimentar vários tipos de objetos: rígidos, flexíveis, com vários graus de liberdade; e com várias formas de conexão entre o objeto e os efetadores dos manipuladores: rigidamente conectados, deslizantes. O número de graus de liberdade (gdl) do sistema cooperativo é igual ao número de gdl do objeto, mais a soma do número de gdl dos manipuladores, menos o número de restrições independentes derivadas de todas as conexões entre objeto e efetadores. O aumento do número de gdl do sistema cooperativo, dependendo do tipo de objeto e do tipo de conexão, pode dificultar a ação de controle. Neste trabalho, considera-se que o objeto é rígido e está rigidamente conectado aos efetadores dos manipuladores.

A interação dinâmica entre as partes do sistema cooperativo é representada pelas forças aplicadas no objeto pelos efetadores. O componente de torque referente à projeção destas forças nas coordenadas das juntas é o que diferencia a dinâmica de cada robô manipulador do sistema cooperativo da dinâmica de um manipulador individual.

Quando as considerações sobre o tipo de objeto e o tipo de conexão descritas

acima são satisfeitas, as forças aplicadas podem ser decompostas entre as forças que promovem o movimento do objeto, chamadas forças de movimento, e as forças de esmagamento, que não contribuem para o movimento, mas podem provocar danos ao objeto e aos efetuadores. Portanto, a minimização dos efeitos da força de esmagamento deve ser sempre considerada no projeto de controladores para robôs manipuladores cooperativos. Entretanto, o movimento dos manipuladores provoca esmagamento devido ao componente de esmagamento da força inercial de d'Alembert. Estas forças de esmagamento provocadas pelo movimento tornam-se nulas quando a velocidade dos manipuladores convergem para zero [TINÓS (2003)].

Um controle híbrido de movimento e força de esmagamento, considerando de forma independente o controle das posições do objeto e da força de esmagamento, foi proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)]. Os autores demonstram que pode-se projetar uma lei de controle de movimento estável sem considerar o esmagamento e, em seguida, projetar uma lei de controle da força de esmagamento estável, considerando a força de esmagamento provocada pelo movimento como uma perturbação.

Quando uma ou mais juntas de sistema robótico cooperativo são passivas, diz-se que os robôs manipuladores cooperativos são subatuados. Poucas pesquisas foram realizadas considerando o controle deste tipo de robô manipulador [BERGERMAN et al. (1997); LIU E XU (1997); LIU et al. (1999); TINÓS (2003)]. Controladores robustos utilizando a linearização por realimentação de estados foram propostos em [BERGERMAN et al. (1997); LIU E XU (1997)]. Em [LIU et al. (1999)], considerou-se que o sistema cooperativo é formado por dois manipuladores e o número de juntas ativas (n_a) é igual ou superior ao número de coordenadas de posição do objeto (n). Dois controladores foram propostos: o primeiro é baseado no controle proporcional-derivativo clássico com compensação dos termos gravitacionais, neste caso o controle das forças de esmagamento não é considerado; o segundo é baseado no procedimento de redução de ordem proposto em [MCCLAMROCH E WANG (1988)] com a utilização de $n_a - n$ juntas para o controle das forças de esmagamento. Entretanto, neste caso o controle do movimento está acoplado ao controle de esmagamento, o que não garante a estabilidade do sistema [TINÓS

(2003)].

Um sistema robótico cooperativo tolerante a falhas foi proposto em [TINÓS (2003)]. Redes neurais artificiais são utilizadas na detecção e isolamento de falhas dos tipos junta livre (passiva), junta bloqueada, posição incorreta e velocidade incorreta. O controle híbrido de movimento e força de esmagamento proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)] foi estendido para o caso de robôs manipuladores subatuados, considerando a matriz Jacobiana entre as velocidades do centro de massa e as velocidades das juntas ativas. Resultados experimentais foram obtidos utilizando dois manipuladores UArm II rigidamente conectados ao objeto.

Robôs manipuladores cooperativos, assim como os manipuladores individuais, estão sujeitos a incertezas paramétricas e distúrbios externos. Em [LIAN et al. (2002)], um controle lógico Fuzzy adaptativo com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ é desenvolvido para sistemas robóticos cooperativos. Baseado no procedimento de redução de ordem para manipuladores com restrições proposto em [MCCLAMROCH E WANG (1988)], a dinâmica do robô manipulador cooperativo é reescrita como a dinâmica de um sistema totalmente atuado com restrições. O controlador consiste de dois componentes: 1) controle adaptativo baseado no modelo e com estrutura de modos deslizantes e 2) controle lógico Fuzzy. Tal controlador garante convergência dos erros de movimento e de força de esmagamento para zero com desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e na presença de distúrbios externos e incertezas paramétricas.

Neste trabalho, utiliza-se o procedimento de redução de ordem descrito em [MCCLAMROCH E WANG (1988)] para representar a dinâmica de um robô manipulador cooperativo totalmente atuado e subatuado na forma de um manipulador individual. Desenvolve-se uma representação quase-LPV de manipuladores cooperativos e uma equação em espaço de estados para aplicação do controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos. A implementação deste controlador robusto e do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV no manipulador cooperativo formado por dois manipuladores subatuados UArm II, apresentada no Capítulo 10, é uma das contribuições deste trabalho. Os resultados obtidos com o manipulador cooperativo na forma subatuada são comparados com os resultados obtidos com o controlador híbrido de posição e força proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)], e

estendido para o caso subatuado em [TINÓS (2003)].

Capítulo 8

Modelo dinâmico de robôs manipuladores cooperativos

Neste capítulo, as equações que descrevem o comportamento dinâmico e a cinemática de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados são apresentadas. Também é apresentada a decomposição das forças no objeto em forças de movimento e forças de esmagamento. O controle das forças de esmagamento proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)] e estendido para o caso subatuado em [TINÓS (2003)] é utilizado neste trabalho.

8.1 Robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados

Considere um sistema robótico cooperativo consistindo de k manipuladores não redundantes com o mesmo número de graus de liberdade n . Seja $q_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor das coordenadas generalizadas do manipulador i e $x_o \in \mathbb{R}^n$ o vetor das coordenadas Cartesianas do objeto. Quando estes robôs estão rigidamente conectados ao objeto posicionando-o de maneira cooperativa, um conjunto de cadeias cinemáticas fechadas é formado, sendo as restrições geométricas dadas por $\varphi_i(x_o, q_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Assume-se que tais restrições são descritas por funções suaves conhecidas e que nenhum manipulador alcance uma posição de singularidade durante

o movimento. Portanto, pode-se encontrar um conjunto aberto $\Theta_i \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $\Omega_i : \Theta_i \mapsto \mathbb{R}_n$ tal que $q_i = \Omega_i(x_o)$ e $\varphi_i(x_o, q_i) = \varphi_i(x_o, \Omega_i(x_o)) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$.

Sejam $J_{o_i}(x_o, q_i)$ e $J_i(x_o, q_i)$ as matrizes Jacobianas de $\varphi_i(x_o, q_i)$ com relação a x_o e q_i , isto é, $J_{o_i}(x_o, q_i) = \partial\varphi_i/\partial x_o$ e $J_i(x_o, q_i) = \partial\varphi_i/\partial q_i$, respectivamente. Portanto, a restrição de velocidade pode ser dada por:

$$\dot{\varphi}_i(x_o, q_i) = J_{o_i}(x_o, q_i)\dot{x}_o + J_i(x_o, q_i)\dot{q}_i = 0.$$

Pelas considerações acima, tem-se que a relação:

$$\dot{q}_i = (\partial\Omega_i(x_o))/(\partial x_o)\dot{x}_o = -J_i^{-1}(x_o, \Omega_i(x_o))J_{o_i}(x_o, \Omega_i(x_o))\dot{x}_o,$$

para $i = 1, 2, \dots, k$, será sempre possível. Portanto, as restrições cinemáticas são expressas por:

$$\theta = \begin{bmatrix} x_o \\ q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o \\ \Omega_1(x_o) \\ \vdots \\ \Omega_k(x_o) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} I_n \\ -J^{-1}(x_o)J_o(x_o) \end{bmatrix} \dot{x}_o \equiv B(x_o)\dot{x}_o, \quad (8.1)$$

sendo

$$J(x_o) = \begin{bmatrix} J_1(x_o, \Omega_1(x_o)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(x_o, \Omega_2(x_o)) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}$$

e

$$J_o(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o_1}(x_o, \Omega_1(x_o)) \\ J_{o_2}(x_o, \Omega_2(x_o)) \\ \vdots \\ J_{o_k}(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}.$$

A dinâmica do robô manipulador cooperativo é encontrada a partir das dinâmicas dos manipuladores individuais e da dinâmica do objeto. Esta é dada por:

$$M_o(x_o)\ddot{x}_o + C_o(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + G_o(x_o) = \sum_{i=1}^k J_{o_i}^T(x_o, \Omega_i(x_o))h_i = J_o^T(x_o)h, \quad (8.2)$$

sendo $M_o(x_o)$ a matriz de inércia, $C_o(x_o, \dot{x}_o)$ a matriz dos termos centrífugos e de Coriolis, $G_o(x_o)$ o vetor dos termos gravitacionais do objeto e $h = [h_1^T \cdots h_k^T]^T$, com $h_i \in \mathbb{R}^n$ a força aplicada no objeto pelo efetuador do robô i .

A equação dinâmica do manipulador i é dada por:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + G_i(q_i) = \tau_i + J_i^T(x_o, \Omega_i(x_o))h_i, \quad (8.3)$$

sendo $M_i(q_i)$ a matriz de inércia, $C_i(q_i, \dot{q}_i)$ a matriz dos termos centrífugos e de Coriolis, $G_i(q_i)$ o vetor dos termos gravitacionais e τ_i o vetor dos torques aplicados no robô i .

Então, a dinâmica do robô manipulador cooperativo pode ser dada por:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_o^T(x_o) \\ J^T(x_o) \end{bmatrix} h, \quad (8.4)$$

sendo

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_1(q_1) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k(q_k) \end{bmatrix},$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1(q_1, \dot{q}_1) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_k(q_k, \dot{q}_k) \end{bmatrix},$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_1(q_1) \\ \vdots \\ G_k(q_k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_k \end{bmatrix}.$$

Seja h_o a projeção de h no centro de massa do objeto dada por:

$$h_o = J_{oq}^T(x_o)h,$$

sendo

$$J_{oq}(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o1}(x_o, \Omega_1(x_o)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{o2}(x_o, \Omega_2(x_o)) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{ok}(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix}.$$

Portanto, a força resultante no objeto $h_{ro} = J_o^T(x_o)h$ pode ser reescrita como:

$$h_{ro} = A^T J_{oq}^T(x_o)h = A^T h_o,$$

sendo $A^T = [I_n \ I_n \ \cdots \ I_n] \in \mathfrak{R}^{n \times (nk)}$. A matriz A^T tem posto linha pleno, portanto, existe um espaço nulo não-trivial, denominado aqui subespaço de esmagamento X_E , dado por $X_E = \{h_{oE} \in \mathfrak{R}^{nk} | A^T h_{oE} = 0\}$. Se h_o pertence ao espaço nulo X_E , a força resultante não contribui para o movimento do objeto. Define-se a seguinte decomposição ortogonal da projeção das forças aplicadas nos efetuadores: $h_o = h_{oE} + h_{oM}$, sendo h_{oE} a projeção do vetor h_o em X_E , denominada forças de esmagamento, e h_{oM} as forças de movimento. As forças de esmagamento h_{oE} pertencem ao núcleo de A^T , $h_{oE} \in \mathcal{N}(A^T)$, enquanto que h_{oM} pertencem ao complemento ortogonal de X_E , $h_{oM} \in X_M = \mathcal{N}(A^T)^\perp$, denominado aqui subespaço de movimento. A dimensão de X_M é n e, como $X_M \oplus X_E = \mathfrak{R}^{nk}$, a dimensão de X_E é $n(k-1)$. Fisicamente, as forças de esmagamento são compostas por forças de compressão, tensão e torção que não afetam o movimento, sendo este resultante somente da ação das forças de movimento. Ao se utilizar a matriz A^T para a análise das forças de esmagamento,

evita-se o problema de incoerência de unidades verificado em [DUFFY (1990)], o que ocorreria se fosse utilizada a matriz J_o^T , como proposto em [LIAN et al. (2002)].

Substituindo esta decomposição da projeção das forças aplicadas em (8.4), tem-se:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau + J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)h_{oM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix} h_{oE}. \quad (8.5)$$

Define-se uma entrada de controle auxiliar como:

$$\tau_v = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau + J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)h_{oM} \end{bmatrix},$$

e a Jacobiana $\bar{A}(x_o) = [A \ J_{oq}^{-1}(x_o)J(x_o)]$. A dinâmica do sistema cooperativo fica:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau_v + \bar{A}^T(x_o)h_{oE}. \quad (8.6)$$

Particiona-se a entrada de controle auxiliar, τ_v , em dois vetores: $\tau_{v1} = A^T h_{oM}$ e $\tau_{v2} = \tau + J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)h_{oM}$. Assim, o torque aplicado pode ser calculado por:

$$\tau = \tau_{v2} - J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)(A^T)^+ \tau_{v1}, \quad (8.7)$$

sendo $(A^T)^+ = A(A^T A)^{-1}$ a pseudo-inversa de A^T . As forças de movimento são $h_{oM} = (A^T)^+ \tau_{v1}$. Portanto, o problema de controle do sistema cooperativo reduz-se a encontrar uma entrada de controle auxiliar que garanta estabilidade e robustez com relação a distúrbios.

Considerando as restrições cinemáticas (8.1), pode-se reescrever (8.6) somente em termos das variáveis independentes x_o , $\dot{x}_o$, ou seja, em termos das coordenadas do objeto:

$$M(x_o)B(x_o)\ddot{x}_o + \left(M(x_o)\dot{B}(x_o) + C(x_o, \dot{x}_o)B(x_o) \right) \dot{x}_o + G(x_o) = \tau_v + \bar{A}^T(x_o)h_{oE}. \quad (8.8)$$

Se (8.8) é pré-multiplicada por $B^T(x_o)$, a equação dinâmica do robô manipulador

cooperativo torna-se independente da força interna, pois $B^T(x_o)\bar{A}^T(x_o)h_{oE} = 0$. Portanto, tem-se:

$$\bar{M}(x_o)\ddot{x}_o + \bar{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \bar{G}(x_o) = \bar{\tau}_v, \quad (8.9)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{M}(x_o) &= B^T(x_o)M(x_o)B(x_o), \\ \bar{C}(x_o, \dot{x}_o) &= B^T(x_o)M(x_o)\dot{B}(x_o) + B^T(x_o)C(x_o, \dot{x}_o)B(x_o), \\ \bar{G}(x_o) &= B^T(x_o)G(x_o) \\ \bar{\tau}_v &= B^T(x_o)\tau_v. \end{aligned}$$

8.2 Robôs manipuladores cooperativos subatuados

Considere agora que das nk juntas do sistema cooperativo descrito na seção anterior, n_a são juntas ativas e n_p são juntas passivas. Pode-se reescrever as restrições cinemáticas (8.1) como:

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} x_o \\ q_a \\ q_p \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} I_n \\ -J_{AP}^{-1}(x_o)J_o(x_o) \end{bmatrix} \dot{x}_o \equiv \tilde{B}(x_o)\dot{x}_o, \quad (8.10)$$

sendo $q_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ o vetor de posição das juntas ativas, $q_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ o vetor de posição das juntas passivas e $J_{AP}(x_o)$ a matriz Jacobiana entre as velocidades das juntas ativas e passivas e as velocidades dos efetuadores dos manipuladores. A matriz $J_{AP}(x_o)$ pode ser obtida através de uma matriz de permutação P_{AP} ortogonal [TINÓS (2003)]. Assim, se:

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} q_a \\ q_p \end{bmatrix} = P_{AP} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix},$$

tem-se que $J_{AP}(x_o) = [J_a(x_o) \ J_p(x_o)] = J(x_o)P_{AP}$.

A equação dinâmica de um sistema cooperativo com manipuladores subatuados

pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_o^T(x_o) \\ J_a^T(x_o) \\ J_p^T(x_o) \end{bmatrix} h, \quad (8.11) \end{aligned}$$

sendo

$$M_{AP}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} M_{aa}(\tilde{q}) & M_{ap}(\tilde{q}) \\ M_{pa}(\tilde{q}) & M_{pp}(\tilde{q}) \end{bmatrix} = P_{AP} \begin{bmatrix} M_1(q_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_k(q_k) \end{bmatrix} P_{AP}^T,$$

$$C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \begin{bmatrix} C_{aa}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) & C_{ap}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \\ C_{pa}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) & C_{pp}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} = P_{AP} \begin{bmatrix} C_1(q_1, \dot{q}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_k(q_k, \dot{q}_k) \end{bmatrix} P_{AP}^T$$

e

$$G_{AP} = \begin{bmatrix} G_a(\tilde{q}) \\ G_p(\tilde{q}) \end{bmatrix} = P_{AP} \begin{bmatrix} G_1(q_1) \\ \vdots \\ G_k(q_k) \end{bmatrix}.$$

Considerando a projeção das forças aplicadas nos efetuadores nos subespaços de esmagamento e movimento:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau_a + J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T \\ J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix} h_{oE}. \quad (8.12) \end{aligned}$$

Define-se uma entrada de controle auxiliar:

$$\tau_v = \begin{bmatrix} A^T h_{oM} \\ \tau_a + J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM} \end{bmatrix},$$

e a Jacobiana $\tilde{A}(x_o) = [A \ J_{oq}^{-1}(x_o) J_a(x_o) \ J_{oq}^{-1}(x_o) J_p(x_o)]$. A dinâmica do sistema cooperativo fica:

$$\begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \ddot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} = \tau_v + \tilde{A}^T(x_o) h_{oE}. \quad (8.13)$$

Particiona-se a entrada de controle auxiliar em três vetores, $\tau_{v1} = A^T(x_o) h_{oM}$, $\tau_{v2} = \tau_a + J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM}$ e $\tau_{v3} = J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) h_{oM}$. Assim, o torque aplicado nas juntas ativas pode ser calculado por:

$$\tau_a = \tau_{v2} - J_a^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \begin{bmatrix} A^T \\ J_p^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tau_{v1} \\ \tau_{v3} \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Considerando as restrições cinemáticas (8.10) e pré-multiplicando (8.13) por $\tilde{B}^T(x_o)$, a equação dinâmica do robô manipulador cooperativo subatuado é dada por:

$$\tilde{M}(x_o) \ddot{x}_o + \tilde{C}(x_o, \dot{x}_o) \dot{x}_o + \tilde{G}(x_o) = \tilde{\tau}_v, \quad (8.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x_o) &= \tilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \tilde{B}(x_o), \\ \tilde{C}(x_o, \dot{x}_o) &= \tilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} M_o(x_o) & 0 \\ 0 & M_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix} \dot{\tilde{B}}(x_o) + \\ &\quad + \tilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} C_o(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ 0 & C_{AP}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \end{bmatrix} \tilde{B}(x_o), \\ \tilde{G}(x_o) &= \tilde{B}^T(x_o) \begin{bmatrix} G_o(x_o) \\ G_{AP}(\tilde{q}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\tau}_v &= \tilde{B}^T(x_o) \tau_v. \end{aligned}$$

A partir das equações dinâmicas de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados descritas em (8.9) e (8.15), respectivamente, pretende-se encontrar controladores robustos que garantam estabilidade ao sistema na presença de distúrbios externos e incertezas paramétricas. Sendo o controle de movimento estável, o controle das forças de esmagamento pode ser realizado conforme descrito em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)].

8.3 Controle das forças de esmagamento

Para o controle das forças de esmagamento, [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)] propõem o pré-processamento das forças de esmagamento através de um filtro linear estritamente próprio, que garante a convergência das forças de esmagamento para valores desejados. Uma solução particularmente simples é a utilização de um controle integral para as forças de esmagamento. Assim, para manipuladores totalmente atuados, o torque aplicado acrescido do controle das forças de esmagamento é dado por:

$$\tau = \tau_{v2} - J^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o)(A^T)^+\tau_{v1} + \tau_E,$$

sendo

$$\tau_E = D^T(x_o)\bar{h}_{oE}, \quad (8.16)$$

com

$$\bar{h}_{oE} = \left[h_{oE}^d + K_i \int (h_{oE}^d - h_{oE}) dt \right],$$

$$D(x_o) = \begin{bmatrix} J_{o1}^{-1}(x_o, \Omega_1(x_o))J_1(x_o, \Omega_1(x_o)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_{ok}^{-1}(x_o, \Omega_k(x_o))J_k(x_o, \Omega_k(x_o)) \end{bmatrix},$$

h_{oE}^d as forças de esmagamento desejadas e K_i é uma matriz diagonal e positiva.

A dimensão de $\bar{h}_{oE}$ é nk e, sendo a dimensão de X_E igual a $n(k-1)$, é possível escrever que

$$\bar{h}_{oE} = \hat{A}^T \lambda_E.$$

A matriz de posto pleno $\hat{A}^T$ projeta o espaço nulo de A^T , ou seja, $Im(\hat{A}^T) = X_E$. Assim, o vetor $n(k-1)$ -dimensional λ_E torna-se as variáveis a serem controladas. Por exemplo, para um sistema cooperativo planar ($n=3$) com dois manipuladores ($k=2$), o vetor λ_E possui três componentes, pois os três componentes das forças de esmagamento produzidos por um robô têm o mesmo valor absoluto que aqueles produzidos pelo outro robô.

Para o sistema com juntas passivas, (8.16) pode ser particionada como:

$$\begin{bmatrix} \tau_{Ea} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_a^T(x_o) \\ D_p^T(x_o) \end{bmatrix} \hat{A}^T \lambda_E, \quad (8.17)$$

sendo $[D_a(x_o) \ D_p(x_o)] = D(x_o)P_{AP}$. Note que n_p restrições são impostas nos componentes do vetor λ_E . Como os robôs manipuladores considerados aqui não são redundantes, nem todos os componentes do vetor λ_E podem ser independentemente controlados. O número de componentes do vetor λ_E que podem ser controlados é dado por [TINÓS (2003)]:

$$n_e = \begin{cases} n(k-1) - n_p = n_a - n & \text{se } n_a > n \\ 0 & \text{se } n_a \leq n \end{cases}$$

Particiona-se o vetor λ_E através de uma matriz de permutação P_E como

$$P_E \lambda_E = \begin{bmatrix} \lambda_{Ec} \\ \lambda_{En} \end{bmatrix}, \quad (8.18)$$

sendo $\lambda_{Ec} \in \mathbb{R}^{n_e}$ o vetor dos componentes independentemente controlados e $\lambda_{En} \in \mathbb{R}^{n_p}$ o vetor dos componentes não controlados.

Utiliza-se novamente o controlador proposto em [WEN E KREUTZ-DELGADO (1992)] para controle das forças de esmagamento λ_{Ec} , ou seja:

$$\lambda_{Ec} = \left[\lambda_{Ec}^d + K_{i_E} \int (\lambda_{Ec}^d - \lambda_{Ec}) dt \right], \quad (8.19)$$

sendo λ_{Ec}^d os valores desejados para λ_{Ec} e K_{i_E} é uma matriz diagonal e positiva. O

valor de λ_{En} é calculado através das restrições impostas em (8.17) como função do vetor λ_{Ec} .

Portanto, o torque aplicado nas juntas ativas acrescido do controle das forças de esmagamento é dado por:

$$\tau_a = \tau_{v2} - J_a^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o) \left[\begin{array}{c} A^T \\ J_p^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o) \end{array} \right]^+ \left[\begin{array}{c} \tau_{v1} \\ \tau_{v3} \end{array} \right] + \tau_{Ea},$$

sendo

$$\tau_{Ea} = D_a^T(x_o)\hat{A}^T\lambda_E,$$

com λ_E calculado por (8.18) e (8.19).

Capítulo 9

Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear para manipuladores cooperativos

Neste capítulo, as equações em espaço de estados do erro de acompanhamento de trajetória do objeto para robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados são apresentadas, sendo os distúrbios derivados de incertezas paramétricas e distúrbios externos no torque. Os controles $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV e via teoria dos jogos, apresentados na Parte I, ainda não foram aplicados na literatura para o controle de manipuladores cooperativos. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho constituem uma contribuição original.

9.1 Modelo quase-LPV para robôs manipuladores cooperativos

As representações quase-LPV das dinâmicas não lineares de manipuladores cooperativos, apresentadas nesta seção, são utilizadas no projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear, como descrito na Seção 2.5.

As equações dinâmicas de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados ou subatuados podem ser descritas por:

$$\widehat{M}(x_o)\ddot{x}_o + \widehat{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \widehat{G}(x_o) = \widehat{\tau}_v, \quad (9.1)$$

sendo $\widehat{M}(x_o) = \overline{M}(x_o)$, $\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) = \overline{C}(x_o, \dot{x}_o)$, $\widehat{G}(x_o) = \overline{G}(x_o)$ e $\widehat{\tau}_v = \overline{\tau}_v$ se os robôs são totalmente atuados, (8.9); ou $\widehat{M}(x_o) = \widetilde{M}(x_o)$, $\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) = \widetilde{C}(x_o, \dot{x}_o)$, $\widehat{G}(x_o) = \widetilde{G}(x_o)$ e $\widehat{\tau}_v = \widetilde{\tau}_v$ se os robôs são subatuados, (8.15).

Incertezas paramétricas podem ser introduzidas dividindo as matrizes $\widehat{M}(x_o)$ e $\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o)$, e o vetor $\widehat{G}(x_o)$ em uma parte nominal e uma perturbada:

$$\begin{aligned}\widehat{M}(x_o) &= \widehat{M}_0(x_o) + \Delta\widehat{M}(x_o) \\ \widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) &= \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) + \Delta\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) \\ \widehat{G}(x_o) &= \widehat{G}_0(x_o) + \Delta\widehat{G}(x_o),\end{aligned}$$

sendo $\widehat{M}_0(x_o)$, $\widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o)$ e $\widehat{G}_0(x_o)$ os valores nominais, e $\Delta\widehat{M}(x_o)$, $\Delta\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o)$ e $\Delta\widehat{G}(x_o)$ as incertezas paramétricas. Um distúrbio externo de energia finita, τ_d , pode ser também introduzido. Após estas considerações (9.1) fica:

$$\widehat{M}(x_o)\ddot{x}_o + \widehat{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \widehat{G}(x_o) + \widehat{\tau}_d = \widehat{\tau}_v, \quad (9.2)$$

com

$$\widehat{\tau}_d = (\Delta\widehat{M}(x_o)\ddot{x}_o + \Delta\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o + \Delta\widehat{G}(x_o) - \tau_d).$$

Define-se os estados do sistema como sendo o erros de acompanhamento da posição e da velocidade do objeto:

$$\widetilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_o - \dot{x}_o^d \\ x_o - x_o^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\widetilde{x}}_o \\ \widetilde{x}_o \end{bmatrix}, \quad (9.3)$$

sendo x_o^d e $\dot{x}_o^d \in \mathbb{R}^n$ a trajetória de referência desejada e sua correspondente velocidade, respectivamente. Assume-se que as variáveis x_o^d , $\dot{x}_o^d$ e $\ddot{x}_o^d$ (aceleração desejada) satisfazem os limites físicos e cinemáticos do sistema cooperativo.

Uma representação em espaços de estados da dinâmica de manipuladores cooperativos é encontrada utilizando (9.2) e (9.3):

$$\dot{\widetilde{x}} = A(x_o, \dot{x}_o)\widetilde{x} + Bu + Bw, \quad (9.4)$$

com

$$\begin{aligned} A(x_o, \dot{x}_o) &= \begin{bmatrix} -\widehat{M}_0^{-1}(x_o)\widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w &= \widehat{M}_0^{-1}(x_o)\widehat{\tau}_d, \\ u &= \widehat{M}_0^{-1}(x_o)(\widehat{\tau}_v - \widehat{M}_0(x_o)\ddot{x}_o^d - \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o - \widehat{G}_0(x_o)). \end{aligned}$$

Pela equação acima, a variável $\widehat{\tau}_v$ pode ser dada por:

$$\widehat{\tau}_v = \widehat{M}_0(x_o)(\ddot{x}_o^d + u) + \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o)\dot{x}_o^d + \widehat{G}_0(x_o). \quad (9.5)$$

Embora a matriz $\widehat{M}_0(x_o)$ dependa explicitamente do vetor x_o , pode-se considerá-la como função do erro de acompanhamento de posição, $\tilde{x}_o$, e do tempo. Tal afirmação pode ser visualizada pela seguinte observação:

$$\widehat{M}_0(x_o) = \widehat{M}_0(\tilde{x}_o + x_o^d(t)) = \widehat{M}_0(\tilde{x}_o, t).$$

O mesmo pode ser dito para $\widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o)$. Portanto, (9.4) pode ser considerada uma representação quase-LPV para o robô manipulador, ou seja, com $A(\tilde{x}, t)$.

9.2 Equação em espaço de estados de robôs manipuladores cooperativos para o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

Nesta seção são apresentadas as equações em espaço de estados de robôs manipuladores cooperativos totalmente atuados e subatuados utilizadas no projeto do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos descrito na Seção 4.1.1.

Considerando a definição dos estados do sistema (9.3), utiliza-se a seguinte trans-

formação de estados:

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_o \\ \tilde{x}_o \end{bmatrix},$$

sendo $T_1 = [T_{11} \ T_{12}]$ com $T_{11}, T_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes constantes a serem determinadas.

Selecionando a entrada de controle como:

$$u = \begin{bmatrix} \widehat{M}_0(x_o) & \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} = \widehat{M}_0(x_o) T_1 \dot{\tilde{x}} + \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) T_1 \tilde{x}, \quad (9.6)$$

a representação no espaço de estados fica:

$$\dot{\tilde{x}} = A_T(\tilde{x}, t) \tilde{x} + B_T(\tilde{x}, t) u + B_T(\tilde{x}, t) w, \quad (9.7)$$

com

$$\begin{aligned} A_T(\tilde{x}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -\widehat{M}_0^{-1}(x_o) \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0, \\ B_T(\tilde{x}, t) &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{M}_0^{-1}(x_o) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ w &= \widehat{M}_0(x_o) T_{11} \widehat{M}_0^{-1}(x_o) \hat{\tau}_d. \end{aligned}$$

A relação entre a variável $\hat{\tau}_v$ e a entrada de controle é dada por:

$$\hat{\tau}_v = \widehat{M}_0(x_o) \ddot{x}_o^c + \widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) \dot{x}_o + \widehat{G}_0(x_o), \quad (9.8)$$

com

$$\ddot{x}_o^c = \ddot{x}_o^d - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{x}}_o - T_{11}^{-1} \widehat{M}_0^{-1}(x_o) \left(\widehat{C}_0(x_o, \dot{x}_o) B^T T_0 \tilde{x} - u \right). \quad (9.9)$$

De forma resumida, para manipuladores cooperativos totalmente atuados, o torque aplicado nas juntas é dado por:

$$\tau = \tau_{v2} - J^T(x_o) J_{oq}^{-T}(x_o) (A^T)^+ \tau_{v1} + D^T(x_o) \left[h_{oE}^d + K_i \int (h_{oE}^d - h_{oE}) dt \right],$$

sendo τ_{v1} e τ_{v2} partições do vetor $\tau_v = (B^T(x_o))^+ \hat{\tau}_v$, com $B^T(x_o)$ definido em (8.1),

e $\hat{\tau}_v$ definido em (9.5) e (9.8) para os controles via representação quase-LPV e via teoria dos jogos, respectivamente.

Para manipuladores cooperativos subatuados, o torque aplicado nas juntas ativas é dado por:

$$\tau_a = \tau_{v2} - J_a^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o) \begin{bmatrix} A^T \\ J_p^T(x_o)J_{oq}^{-T}(x_o) \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \tau_{v1} \\ \tau_{v3} \end{bmatrix} + D_a^T(x_o)\hat{A}^T\lambda_E,$$

sendo τ_{v1} , τ_{v2} e τ_{v3} partições do vetor $\tau_v = (\tilde{B}^T(x_o))^+\hat{\tau}_v$, com $\tilde{B}^T(x_o)$ definido em (8.10), e $\hat{\tau}_v$ definido em (9.5) e (9.8) para os controles via representação quase-LPV e via teoria dos jogos, respectivamente. λ_E é calculado por (8.18) e (8.19).

Capítulo 10

Resultados Experimentais

Neste capítulo, resultados experimentais da aplicação dos controles $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV e $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos em um robô cooperativo totalmente atuado e subatuado são apresentados, [SIQUEIRA E TERRA (2004)], sendo um dos poucos resultados práticos de controle robusto para este tipo de sistema robótico. O robô cooperativo utilizado é composto por dois manipuladores planares subatuados UArm II rigidamente conectados a um objeto, Figura 10.1.

Figura 10.1: Sistema cooperativo formado por dois UArm II.

Considera-se como robô 1, o manipulador posicionado à esquerda na Figura 10.1. A posição da base do robô 1 no plano X-Y é $[x_1 \ y_1]^T = [0 \ 0]^T \text{ m}$; enquanto que a

posição da base do robô 2 é $[x_2 \ y_2]^T = [0 \ 0.506]^T \text{ m}$. Os parâmetros cinemáticos e dinâmicos dos manipuladores são os mesmos mostrados na Tabela A.1, Seção A.1. Os parâmetros do objeto são mostrados na Tabela 10.1. Como os manipuladores UArm II não possuem sensores de força em seus efetuadores, as forças de contato entre estes e o objeto são calculadas utilizando o modelo dinâmico dos manipuladores, as restrições de aceleração e os torques aplicados nas juntas. Um ambiente de controle foi desenvolvido em [TINÓS (2003)] para este sistema cooperativo (Apêndice A).

Tabela 10.1: Parâmetros do objeto.

massa	$m_o = 0.025 \text{ kg}$
comprimento	$l_o = 0.092 \text{ m}$
distância entre efetuadores e centro de massa do objeto	$a_o = 0.046 \text{ m}$
momento de inércia	$I_o = 0.000023 \text{ kgm}^2$

10.1 Trajetória desejada e índices de desempenho

A posição inicial do objeto é $x_o = [0.2m \ 0.35m \ 0^\circ]^T$. O centro de massa do objeto deve deslocar-se em linha reta no plano X-Y da posição inicial até a posição final desejada, $x_o^d(t_f) = [0.25m \ 0.40m \ 0^\circ]^T$, sendo $t_f = 5.0s$ a duração desejada do movimento. A trajetória desejada ao longo do tempo, x_o^d , é definida como um polinômio de quinto grau. As velocidades e acelerações desejadas são obtidas derivando-se a posição desejada.

Distúrbios de torque foram introduzidos nas juntas dos manipuladores para verificar a robustez dos controladores:

$$\tau_{d_1} = \begin{bmatrix} 0.01e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(4\pi t) \\ -0.01e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(5\pi t) \\ -0.01e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(6\pi t) \end{bmatrix}$$

e

$$\tau_{d_2} = \begin{bmatrix} 0.02e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(4\pi t) \\ 0.02e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(5\pi t) \\ 0.01e^{-\frac{(t-2.5)^2}{8}} \sin(6\pi t) \end{bmatrix}.$$

Estes distúrbios consistem de funções normais com oscilações senoidais, Figura 10.2. Os valores desejados das forças de esmagamento são $h_{oE}^d = 0$ e $\lambda_{Ec}^d = 0$. Os ganhos do controladores integrais das forças de esmagamento são dados por $K_i = 0.9$ e $K_{i_E} = 0.9$.

Figura 10.2: Distúrbios externos.

Além dos índices de desempenho $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$, definidos na Seção 5.1, utiliza-se o somatório das áreas das forças de esmagamento, $E[h_{oE}]$, dado por:

$$E[h_{oE}] = \sum_{i=0}^{nk} \left(\int_{t_0}^{t_r} |h_{oE_i}(t)| dt \right),$$

sendo t_r o tempo gasto para o objeto alcançar a posição desejada e $h_{oE_i}(t)$ o componente i da força de esmagamento. Como os valores desejados das forças de esmagamento são nulos, quanto menor o valor de $E[h_{oE}]$, melhor será o controlador com relação ao controle da força de esmagamento.

10.2 Configuração totalmente atuada

Nesta seção, resultados experimentais obtidos considerando os robôs manipuladores UArm II totalmente atuados são apresentados.

10.2.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV

Para aplicar o algoritmo descrito na Seção 2.5, o sistema de controle do robô manipulador deve ser representado por (2.17). Escolhe-se como parâmetros os estados representando os erros de posição do objeto, ou seja, $m = 3$ (coordenadas X e Y, e orientação):

$$\rho(\tilde{x}) = \tilde{x}_o.$$

Uma escolha de $\rho(\tilde{x})$ que também considere os erros de velocidade do objeto, $\dot{\tilde{x}}_o$, ou seja, $\rho(\tilde{x})$ contendo 6 elementos, faz com que número de desigualdades matriciais a serem resolvidas cresça absurdamente (veja Seção 2.8).

Consideram-se como saídas do sistema, z_1 e z_2 , os erros de posição e velocidade representados pelo estado e a variável de controle u , respectivamente. Portanto o sistema pode ser descrito por (2.17) com:

$$\begin{aligned} A(\rho(x)) &= A(\rho(\tilde{x})) \\ B_1(\rho(x)) &= B \\ B_2(\rho(x)) &= B \\ C_1(\rho(x)) &= I_6 \\ C_2(\rho(x)) &= 0 \end{aligned}$$

sendo as matrizes $A(\rho(\tilde{x}))$ e B obtidas de (3.4) com $\widehat{M}(x_o) = \overline{M}(x_o)$ e $\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) = \overline{C}(x_o, \dot{x}_o)$.

Os possíveis valores para os parâmetros estão contidos no conjunto compacto, P , definido por $\rho \in [-0.1, 0.1]m \times [-0.05, 0.05]m \times [-9, 9]^\circ$. A taxa de variação dos parâmetros é limitada por $|\dot{\rho}| \leq [0.06m/s \ 0.06m/s \ 6^\circ/s]$. As funções utilizadas como base para $X(\rho)$ foram escolhidas como:

$$\begin{aligned} f_1(\rho(\tilde{x})) &= 1, \\ f_2(\rho(\tilde{x})) &= \tilde{x}_{o_X}, \\ f_3(\rho(\tilde{x})) &= \tilde{x}_{o_Y}, \\ f_4(\rho(\tilde{x})) &= \cos(\tilde{x}_{o_\phi}), \end{aligned}$$

sendo $\tilde{x}_o = [\tilde{x}_{o_X} \ \tilde{x}_{o_Y} \ \tilde{x}_{o_\phi}]$, $\tilde{x}_{o_X}$ e $\tilde{x}_{o_Y}$ os erros nas coordenadas X e Y do centro de massa do objeto, respectivamente, e $\tilde{x}_{o_\phi}$ o erro de orientação do objeto. O espaço dos parâmetros foi dividido em 3 pontos ($L = 3$). Cada um dos 27 sistemas lineares, L^m , gerados pela combinação dos parâmetros ρ fornece 9 DMLs, $1 + 2^m$. Ou seja, 243 DMLs devem ser resolvidas simultaneamente para as variáveis X_i (veja Seção 2.8). O valor de atenuação mínimo encontrado foi $\gamma = 1.25$.

Figura 10.3: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.

Os resultados experimentais são mostrados nas Figuras 10.3 a 10.9. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV com controle de esmagamento apresentou bom desempenho mesmo na presença de distúrbios nos torques dos robôs manipuladores. Na Figura 10.9 é realizada uma comparação entre as forças de esmagamento para dois casos: 1) o controle de esmagamento é considerado, 2) o controle de esmagamento não é considerado. Pode-se verificar que ao utilizar o controle de esmagamento os níveis das forças de esmagamento são menores que no caso 2, aproximando-se do valor desejado $h_{oE}^d = 0$.

Figura 10.4: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.

Figura 10.5: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.

Figura 10.6: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.7: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.8: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.9: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.

10.2.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

As matrizes de ponderação utilizadas na determinação do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos foram:

$$Q_1 = I_3, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = I_3,$$

sendo I_k uma matriz identidade de ordem k . O nível de atenuação utilizado foi $\gamma = 4.0$.

Os resultados experimentais são mostrados nas Figuras 10.10 a 10.16. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos com controle de esmagamento também apresentou bom desempenho.

Figura 10.10: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.

Na Tabela 10.2 são mostrados os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$, $E[\tau]$ e $E[h_{oE}]$, considerando os resultados obtidos com os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares.

Note que, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos apresentou um erro de acompanhamento de trajetória menor, refletido no cálculo de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$, mas o controle da força de esmagamento foi melhor realizado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, índice $E[h_{oE}]$. O menor consumo de energia, representado

Tabela 10.2: Índices de desempenho - Configuração totalmente atuada.

Controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)	$E[h_{oE}]$ (Ns)
Via representação quase-LPV	0.01815	0.8318	0.2193
Via teoria dos jogos	0.01158	1.1200	0.3875

pelo índice $E[\tau]$, também foi alcançado por este controlador.

10.3 Configuração subatuada

Nesta seção, considera-se que a junta 1 do manipulador 2 é passiva. Neste caso, tem-se que $n_e = n_a - m = 2$, ou seja, somente dois componentes da força de esmagamento podem ser controlados independentemente, Seção 8.3. Define-se que o componente da força de esmagamento referente ao momento aplicado ao objeto não será controlado.

10.3.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV

Os parâmetros utilizados são novamente os estados representando os erros de posição e orientação do objeto:

$$\rho(\tilde{x}) = \tilde{x}_o.$$

O sistema pode ser descrito por (2.17) com:

$$\begin{aligned} A(\rho(x)) &= A(\rho(\tilde{x})) \\ B_1(\rho(x)) &= B \\ B_2(\rho(x)) &= B \\ C_1(\rho(x)) &= I_6 \\ C_2(\rho(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Figura 10.11: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.

Figura 10.12: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.

Figura 10.13: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.14: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.15: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.16: Configuração totalmente atuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.

sendo as matrizes $A(\rho(\tilde{x}))$ e B obtidas de (3.4) com $\widehat{M}(x_o) = \widetilde{M}(x_o)$ e $\widehat{C}(x_o, \dot{x}_o) = \widetilde{C}(x_o, \dot{x}_o)$.

Os possíveis valores para os parâmetros, a taxa de variação dos parâmetros e as funções utilizadas como base para $X(\rho)$ são os mesmos utilizados no caso totalmente atuado.

O espaço dos parâmetros foi dividido em 3 pontos. O valor de atenuação mínimo encontrado foi $\gamma = 1.25$.

Figura 10.17: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.

Os resultados experimentais são mostrados nas Figuras 10.17 a 10.23. Note que o torque aplicado na junta 1 do robô 2 é zero, caracterizando uma junta passiva. Na Figura 10.23 são apresentadas as forças de esmagamento com controle de esmagamento (caso 1) e sem controle de esmagamento (caso 2). Pode-se observar que somente os dois componentes das forças de esmagamento referentes às forças lineares são controlados no caso 1. O momento de esmagamento não está sendo controlado nos dois casos.

Figura 10.18: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.

Figura 10.19: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.

Figura 10.20: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.21: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.22: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.23: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.

10.3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos

As matrizes de ponderação utilizadas na determinação do controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos foram:

$$Q_1 = I_3, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad Q_{12} = 0 \quad \text{e} \quad R = I_3,$$

sendo I_k uma matriz identidade de ordem k . O nível de atenuação utilizado foi $\gamma = 4.0$.

Os resultados experimentais são mostrados nas Figuras 10.24 a 10.30. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos com controle de esmagamento apresentou bom desempenho.

Figura 10.24: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Trajetória linear do centro de massa no plano X-Y.

Na Tabela 10.3 são mostrados os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$, $E[\tau]$ e $E[h_{oE}]$, considerando os resultados obtidos com os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares. Note que, neste caso, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos apresentou um erro de acompanhamento de trajetória menor e um melhor controle da força de esmagamento. O melhor consumo de energia é alcançado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV. Para o caso em que todas as forças de esmagamento não são controladas (caso 2), os valores de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ e $E[\tau]$ são próximos aos valores da Tabela

10.3. Entretanto, os valores de $E[h_{oE}]$, dados por 1.6319 Ns e 0.9250 Ns, para os controladores via representação quase-LPV e via teoria dos jogos, respectivamente, são em média três vezes maiores que os valores de $E[h_{oE}]$ para o caso em que as forças de esmagamento são controladas.

O mesmo experimento também foi realizado utilizando-se o controlador híbrido de posição e força para manipuladores cooperativos subatuados desenvolvido em [TINÓS (2003)]. Os valores dos índices de desempenho obtidos são dados por: $\mathcal{L}_2[\tilde{x}] = 0.0128$, $E[\tau] = 1.7781$ e $E[h_{oE}] = 0.5741$. Note que os valores de $E[\tau]$ e $E[h_{oE}]$ são aproximadamente 70% e 40%, respectivamnte, maiores que os valores dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares, embora o valor de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ seja melhor que o obtido com o controlador via representação quase-LPV.

Tabela 10.3: Índices de desempenho - Configuração subatuada.

Controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear	$\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$	$E[\tau]$ (Nms)	$E[h_{oE}]$ (Ns)
Via representação quase-LPV	0.0154	0.9976	0.4477
Via teoria dos jogos	0.0103	1.0609	0.3973

Figura 10.25: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posição do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e orientação do objeto.

Figura 10.26: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidade do centro de massa do objeto, coordenadas X e Y, e velocidade angular do objeto.

Figura 10.27: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Posições angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.28: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Velocidades angulares das juntas dos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.29: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos: Torques aplicados nos manipuladores 1 e 2.

Figura 10.30: Configuração subatuada, controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, comparação entre as forças de esmagamento: Forças de esmagamento e momento de esmagamento.

Capítulo 11

Conclusão

Neste trabalho, o problema de acompanhamento de trajetória de manipuladores subatuados sujeitos a incertezas paramétricas e distúrbios externos é resolvido utilizando técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ não lineares. As técnicas utilizadas foram: controle $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV de sistemas não lineares e controle $\mathcal{H}_\infty$ via teoria dos jogos diferenciais, sendo desenvolvidas a representação quase-LPV de manipuladores subatuados e as equações em espaço de estados para a aplicação do controle via teoria dos jogos. A implementação dos controladores foi realizada nos manipuladores UArm II, considerando-os totalmente atuados e subatuados. Os resultados experimentais deste trabalho comprovam a eficácia dos controladores projetados para atenuar os efeitos de incertezas paramétricas e distúrbios externos em manipuladores, sendo estes um dos poucos resultados práticos para as técnicas descritas.

Analisando os valores de γ para a configuração totalmente atuada, pode-se supor que o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV com realimentação do estado é o mais robusto (entre os controladores aqui estudados) para o problema de acompanhamento de referência de manipuladores, pois apresenta menor valor de nível de atenuação, $\gamma = 1.2$. Entretanto, os resultados experimentais obtidos mostram que a melhor robustez contra distúrbios externos é encontrada utilizando os controladores baseados na segunda técnica proposta neste trabalho, em especial, o controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear com redes neurais, com $\gamma = 3.0$. Note que as equações em espaço de estados e os funcionais utilizados no projeto dos controladores

são diferentes, o que torna impraticável uma comparação entre os controladores considerando apenas os valores de γ .

Para todos os controladores, houve um aumento dos valores dos torques após a introdução dos distúrbios, visando atenuar os efeitos destes. Esta é uma das características do controle $\mathcal{H}_\infty$ comprovadas com os resultados experimentais. Os menores consumos de energia são obtidos pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ via representação quase-LPV por realimentação da saída e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Para a configuração APA, nota-se que o melhor erro de acompanhamento de trajetória e o menor consumo de energia é alcançado pelo controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. O controlador adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ com redes neurais apresentou erro de acompanhamento e consumo de energia maiores, entretanto, deve-se considerar que a estratégia de controle é diferente neste caso (na primeira fase, controla-se a junta 2, e na segunda fase, as juntas 1 e 3). Para a estratégia de controle utilizada pelos demais controladores (na primeira fase, controlam-se as juntas 2 e 3, e na segunda fase, a junta 1), no controle da junta 3 na primeira fase também é considerado o acoplamento dinâmico desta com a junta ativa 1, facilitando o posicionamento. Além disto, a rede neural apresenta atraso na estimativa do termo $\bar{F}(x_{e_u})$, e como a duração da trajetória desejada para a junta 2 é pequena, $t_f = 1.0$ s, este atraso é refletido no posicionamento da junta 2, Figura 5.35. Para a configuração AAA, como a duração da trajetória desejada é maior, $t_f = 5.0$ s, este atraso da rede neural não provoca alteração no desempenho do controlador, , Figura 5.17.

Para o controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV, foi realizado um estudo da influência das funções base no valor do nível de atenuação γ . Os menores valores de γ são encontrados quando se utiliza funções base lineares com os parâmetros utilizados, veja Tabelas 5.4 e 5.5.

Nos gráficos de posição dos controles $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ não linear, e adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ não linear, Figuras 5.24, 5.29 e 5.32, respectivamente, verifica-se que a terceira junta sofre uma oscilação nos instantes finais de seu posicionamento, o que não ocorreu com o controle via representação quase-LPV. Tal comportamento para aqueles controladores pode ser justificado pela utilização de uma estratégia de controle que se assemelha às técnicas que utilizam linearização

por realimentação do estado, com uma entrada de controle linear, enquanto que no controle quase-LPV, a entrada de controle é não linear.

As diferenças observadas entre os gráficos com resultados simulados e experimentais para todos os controladores, especialmente as diferenças nos níveis dos torques aplicados (no caso experimental os níveis são maiores que no caso simulado), demonstram que incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas estão presentes no modelo dinâmico utilizado neste trabalho. Entretanto, verificou-se pelos resultados experimentais que os controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares atenuaram os efeitos destes distúrbios internos.

Para a configuração subatuada PAP, os melhores resultados são obtidos com este controlador, confirmando os valores de γ encontrados para esta configuração.

Também neste trabalho é desenvolvido um sistema tolerante a falhas para o manipulador subatuado UArm II que garante a estabilidade do sistema durante a reconfiguração de controle sem que o manipulador pare completamente. O sistema tolerante é baseado em controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ aplicados em um modelo Markoviano que considera todas as possibilidades de falhas e as alterações de pontos de operação do manipulador UArm II. Os resultados experimentais obtidos da implementação dos controladores Markovianos demonstram a eficácia dos controladores em manter a estabilidade do sistema após a introdução da falha, com o manipulador em movimento no período de reconfiguração pós falha.

Os controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação da saída apresentaram os menores erros de acompanhamento de trajetória e os menores consumos de energia, para as duas seqüências de falhas consideradas. Entre os controladores por realimentação do estado, os controles $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ mostraram-se mais robustos. Para a seqüência de falhas AAA-APA, esta robustez também pode ser observada pela cadeia de Markov, Figuras 6.10 e 6.12. O estado referente à posição mais próxima da posição final desejada (estado 24) é alcançado mais rapidamente com estes controladores do que com o controlador $\mathcal{H}_2$ via realimentação do estado, Figura 6.8.

Os valores da energia total consumida pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares via representação quase-LPV e via teoria dos jogos, quando se considerou a utilização

de freios durante a fase de reconfiguração, foram aproximadamente 20% maiores ao valor máximo obtido pelos controladores Markovianos para a sequência de falhas AAA-APA, veja Tabela 6.5.

As técnicas de controle $\mathcal{H}_\infty$ não lineares descritas neste trabalho também foram aplicadas em um robô manipulador cooperativo suabtuado formado por dois manipuladores UArm II. Foram desenvolvidas, utilizando a técnica de redução de ordem proposta em [MCCLAMROCH E WANG (1988)] e a decomposição das forças aplicadas descrita em [TINÓS (2003)], as equações em espaço de estados de manipuladores subatuados necessárias para o projeto dos controladores.

Após a implementação dos controladores, verificou-se que o melhor desempenho em termos de acompanhamento de trajetória foi alcançado pelo controlador $\mathcal{H}_\infty$ não linear via teoria dos jogos, embora este apresente maior consumo de energia. Analisando os valores de $E[h_{oE}]$ com e sem o controle das forças de esmagamento, observou-se que a atuação do controle utilizado é significativa na minimização destas forças, o valor de $E[h_{oE}]$ sem o controle das forças é em média 3 vezes o valor de $E[h_{oE}]$ com o controle.

Quando se aplicou o controle híbrido de posição e força desenvolvido em [TINÓS (2003)] para manipuladores subatuados, embora o valor de $\mathcal{L}_2[\tilde{x}]$ seja melhor que o obtido com o controlador via representação quase-LPV, os valores de $E[\tau]$ e $E[h_{oE}]$ são aproximadamente 70% e 40%, respectivamente, maiores que os valores dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares, Tabela 10.3.

Referências Bibliográficas

APKARIAN, P. (1997). On the Discretization of LMI-synthesized Linear Parameter-varying Controllers. *Automatica*, v.33, n.4, p.655–661, Apr.

APKARIAN, P.; ADAMS, R. J. (1998). Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.6, n.1, p.21–32, Jan.

APKARIAN, P.; BIANNIC, J. M. (1995). Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Control of Missile via Linear Matrix Inequalities. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v.18, n.3, p.532–538, May-June.

APKARIAN, P.; GAHINET, P. (1995). A Convex Characterization of Gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.5, p.853–864, May.

APKARIAN, P.; GAHINET, P.; BECKER, G. (1995). Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, v.31, n.9, p.1251–1261, Sept.

ARAI, H. (1996). Controlability of a 3-DOF manipulator with a passive joint under a nonholonomic constraint. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1996, Minneapolis, Minnesota, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.

ARAI, H.; TACHI, S. (1991). Position Control of a Manipulator with Passive Joints Using Dynamic Coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v.7, n.4, p.528–534, Aug.

- ARAI, H.; TANIE, K.; SHIROMA, N. (1997). Feedback Control of a 3-DOF Planar Underactuated Manipulator. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1997, Albuquerque, New México, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.
- ARAI, H.; TANIE, K.; SHIROMA, N. (1998). Time-Scaling Control of an Underactuated Manipulator. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1998, Leuven, Belgium. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.
- ARAI, H.; TANIE, K.; TACHI, S. (1993). Dynamic Control of a Manipulator with Passive Joints in Operation Space. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v.9, n.1, p.85–93, Feb.
- BALL, J. A.; HELTON, J. W.; WALKER, M. L. (1991). $\mathcal{H}_\infty$ Control for Nonlinear Systems with Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.38, n.4, p.546–559, Apr.
- BARBEIRO, T. L. S. (2001). *Controle de robôs manipuladores subatuados via síntese μ* . 83p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2001.
- BASAR, T.; BERNHARD, P. (1990). *$\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Problems*. Berlin: Birkhauser.
- BASAR, T.; OLSDER, J. (1982). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. New York: Academic Press.
- BECKER, G. (1995). Parameter-dependent control of an under-actuated mechanical system. In: *Conference on Decision and Control*, 34. 1995, New Orleans, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.
- BECKER, G.; PACKARD, A. (1994). Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *System & Control Letters*, v.23, n.3, p.205–215, Sept.

BERGERMAN, M. (1996). *Dynamics and control of underactuated manipulators*. 129p. PhD Thesis - Carnegie Mellon University, Pittsburgh. 1996.

BERGERMAN, M.; TERRA, M. H.; TINÓS, R.; SIQUEIRA, A. A. G.; XU, Y.; SUN, W. L. (2000). Fault tolerant control of mechanical manipulators: a hybrid systems approach. In: *International IFAC Symposium on Robot Control*, 6. 2000, Viena, Áustria. *Proceedings...* Viena: IFAC. 1 CD-ROM.

BERGERMAN, M.; XU, Y.; LIU, Y. H. (1997). Nonlinear feedback control of cooperative underactuated manipulators. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 3. 1997, Vitória, ES, Brasil. *Anais...* Vitória: UFES. 1 CD-ROM.

BERGHUIS, H.; ROEBBERS, H.; NIJMEIJER, H. (1995). Experimental Comparison of Parameter Estimation Methods in Adaptive Robot Control. *Automatica*, v.31, n.9, p.1275–1285, Sept.

BUOSI, C.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2003). Output Feedback Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control of Underactuated Manipulators. In: *Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, 2. 2003, São José dos Campos, Brasil. *Anais...* São José dos Campos: SBMAC. 1 CD-ROM.

BUOSI, C.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). Implementação de controlador ganho escalonado para manipulador robótico. In: *Congresso Brasileiro de Automação*, 15. 2004, Gramado, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

CHANG, Y. C.; CHEN, B. S. (1997). A Nonlinear Adaptive $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Control Design in Robotic Systems via Neural Networks. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.5, n.1, p.13–29, Jan.

CHEN, B. S.; CHANG, Y. C. (1997). Nonlinear mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for robust tracking design of robotic systems. *International Journal of Control*, v.67, n.6, p.837–857, Aug.

CHEN, B. S.; CHANG, Y. C.; LEE, T. C. (1997). Adaptive Control in Robotic Systems with $\mathcal{H}_\infty$ Tracking Performance. *Automatica*, v.33, n.2, p.227–234, Feb.

- CHEN, B. S.; LEE, T. S.; FENG, J. H. (1994). A nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance. *International Journal of Control*, v.59, n.2, p.439–461.
- CLOUTIER, J. R.; D'SOUZA, C. N.; MARCEK, C. P. (1996). Nonlinear regulation and nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control via the state-dependent Riccati equation technique. In: *International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, 1. 1996, Daytona Beach, Florida, USA. *Proceedings...* Daytona Beach: Embry-Riddle Aeronautical University Press.
- COSTA, O. L. V.; DO VAL, J. B. R. (1996). Full Information $\mathcal{H}_\infty$ -Control for Discrete-Time Infinite Markov Jump Parameter Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.202, n.2, p.578–603, Sept.
- COSTA, O. L. V.; MARQUES, R. P. (1998). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -Control of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.43, n.1, p.95–100, Jan.
- COSTA, O. L. V.; MARQUES, R. P. (2000). Robust $\mathcal{H}_2$ -Control for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *International Journal of Control*, v.73, n.1, p.11–21, Jan.
- CRAIG, J. J. (1986). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- DE FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C.; DO VAL, J. B. R.; COSTA, O. L. V. (2000). Output Feedback Control of Markov Jump Linear Systems in Continuous-Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.45, n.5, p.944–949, May.
- LUCA, A. D.; MATTONE, R.; ORIOLO, G. (1997). Stabilization of Underactuated Robots: Theory and Experiments for a Planar 2R Manipulator. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1997, Albuquerque, New México, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.
- DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. (1992). *Feedback control theory*. New York: Maxwell Macmillan.

- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. A. (1989). State-Space Solutions to Standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.34, n.8, p.831–847, Aug.
- DUFFY, J. (1990). The fallacy of modern hybrid control theory that is based on “orthogonal complements” of twist and wrench spaces. *Journal of Robotics Systems*, v.7, n.2, p.139–144, Apr.
- FARFAN, D. V. (2000). *Controladores Markovianos Aplicados a um Robô Manipulador Subatuado*. 98p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2000.
- FRANCIS, B. A. (1987). *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Theory*. New York: Springer.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. (1995). *LMI Control Toolbox*. The MathWorks Inc.
- HAYKIN, S. (1999). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. 2.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- HELTON, J. W.; ZHAN, W. (1994). An inequality governing nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control. *System & Control Letters*, v.22, n.3, p.157–165, Mar.
- HOEL, P.; PORT, S.; STONE, C. (1987). *Introduction to Stochastic Processes*. Illinois : Waveland Press.
- HONG, K. S. (2002). An Open-Loop Control for Underactuated Manipulators Using Oscillatory Inputs: Steering Capability of an Unactuated Joint. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.10, n.3, p.469–480, May.
- HUANG, Y.; JADBABAIE, A. (1998). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control: An Enhanced Quasi-LPV Approach. In: *IEEE International Conference on Decision and Control*, 37. 1998, Tampa, Florida, USA. Workshop in $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech.
- HUANG, Y.; LU, W. M. (1996). Nonlinear optimal control: Alternatives to Hamilton-Jacobi equation. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 35. 1996, Kobe, Japan. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

ISIDORI, A. (1994). $\mathcal{H}_\infty$ control via measurement feedback for affine nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.4, n.4, p.553–574, Jul.-Aug.

ISIDORI, A. (1994). A necessary condition for nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ -control via measurement feedback. *System & Control Letters*, v.23, n.3, p.169–177, Sept.

ISIDORI, A.; ASTOLFI, A. (1992). Disturbance Attenuation and $\mathcal{H}_\infty$ -Control Via Measurement Feedback in Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.37, n.9, p.1283–1293, Sept.

ISIDORI, A.; KANG, W. (1995). $\mathcal{H}_\infty$ Control via Measurement Feedback for General Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.3, p.466–472, Mar.

JADBABAIE, A.; YU, J.; HAUSER, J. (1998). Stabilizing Receding Horizon Control of Nonlinear Systems: A Control Lyapunov Function Approach. In: *IEEE International Conference on Decision and Control*, 37. 1998, Tampa, Florida, USA. Workshop in $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech.

JAMES, M. R.; BARAS, J. S. (1995). Robust $\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Control for General Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.6, p.1007–1017, June.

JARITZ, A.; SPONG, M. W. (1996). An Experimental Comparison of Robust Control Algorithms on a Direct Drive Manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.4, n.6, p.627–640, Nov.

JOHANSSON, R. (1990). Quadratic Optimization of Motion Coordination and Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.35, n.11, p.1197–1208, Nov.

LEWIS, F. L.; ABDALLAH, C. T.; DAWSON, D. M. (1993). *Control of robot manipulators*. New York: Macmillan.

LIAN, K. Y.; CHIU, C. S.; LIU, P. (2002). Semi-Decentralized Adaptive Fuzzy Control for Cooperative Multirobot Systems with $\mathcal{H}_\infty$ Motion/Internal Force Tracking

Performance. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, v.32, n.3, p.269–280, June.

LIMEBEER, D. J. N.; ANDERSON, B. D.; KHARGONEKAR, P. P.; GREEN, M. (1992). A game theoretic approach to $\mathcal{H}_\infty$ control for time-varying systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, v.30, n.2, p.262–283, Mar.

LIU, Y. H.; XU, Y. (1997). Cooperation of multiple manipulators with passive joints. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1997, Albuquerque, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.

LIU, Y. H.; XU, Y.; BERGERMAN, M. (1999). Cooperation Control of Multiple Manipulators with Passive Joints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v.15, n.2, p.258–267, Apr.

LU, W. M. (1995). A State-Space Approach to Parameterization of Stabilizing Controllers for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.9, p.1576–1588, Sept.

LU, W. M. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear time-varying systems with finite time horizon. *International Journal of Control*, v.64, n.2, p.241–262, May.

LU, W. M.; DOYLE, J. C. (1993). $\mathcal{H}_\infty$ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization. In: *Caltech CDS Technical Memo CIT-CDS-93-020*. 1993.

LU, W. M.; DOYLE, J. C. (1993). $\mathcal{H}_\infty$ Control of Nonlinear Systems via Output Feedback: A Class of Controllers. In: *Caltech CDS Technical Memo CIT-CDS-93-008*. 1993.

LU, W. M.; DOYLE, J. C. (1994). $\mathcal{H}_\infty$ Control of Nonlinear Systems via Output Feedback: Controller Parametrization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.39, n.12, p.2517–2521, Dec.

LU, W. M.; DOYLE, J. C. (1995). $\mathcal{H}_\infty$ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.9, p.1668–1675, Sept.

- LYNCH, K. M.; SHIROMA, N.; ARAI, H.; TANIE, K. (1998). Motion Planning for a 3-DOF Robot with a Passive Joint. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1998, Leuven, Belgium. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.
- MACIEL, B. C. O. (2001). *Controle sub-ótimo de manipuladores subatuados*. 91p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2001.
- MACIEL, B. C. O.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2002). Otimização do controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear de manipuladores subatuados via redundância de atuação. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 14. 2002, Natal, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.
- MARECZEK, J.; BUSS, M.; SCHMIDT, G. (1998). Robust Global Stabilization of the Underactuated 2-DOF Manipulator R2D1. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1998, Leuven, Belgium. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.
- MARQUES, R. (1997). *Algoritmos de controle para sistemas sujeitos a saltos Markovianos*. 96p. Tese (Doutorado), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1997.
- MCCLAMROCH, N. H.; WANG, D. (1988). Feedback Stabilization and Tracking of Constrained Robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.33, n.5, p.419–426, May.
- NAKASHIMA, P. H. (2001). *Controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ aplicados a manipuladores subatuados*. 96p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2001.
- NESTEROV, Y. E.; NEMIROVSKI, A. S. (1994). *Interior point polynomial methods in convex programming: Theory and Applications*. Philadelphia: SIAM. (SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 13).
- ORIOLO, G.; NAKAMURA, Y. (1991). Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators. In: *IEEE*

Conference on Decision and Control, 30. 1991, Brighton, England. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. p.2398–2403.

ORLOV, Y.; ACHO, L. (2001). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ -Control of Time-Varying Systems: A Unified Distribution-Based Formalism for Continuous and Sampled-Data Measurement Feedback Design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.46, n.4, p.638–643, Apr.

PACKARD, A.; DOYLE, J. C. (1993). The complex structure singular value. *Automatica*, v.29, n.1, p.71–109, Jan.

POSTLETHWAITE, I.; BARTOSZEWICZ, A. (1998). Application of non-linear $\mathcal{H}_\infty$ control to the Tetrabot robot manipulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers - Part I - Journal of Systems and Control Engineering*, v.212, n.16, p.459–465.

PRIMBS, J. A.; NEVISTIC, V.; DOYLE, J. C. (1998). On Receding Horizon Extensions and Control Lyapunov Functions. In: *IEEE International Conference on Decision and Control*, 37. 1998, Tampa, Florida, USA. Workshop in $\mathcal{H}_\infty$ nonlinear control by J. C. Doyle, Caltech.

REYES, F.; KELLY, R. (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, v.11, p.267–282.

SABER, R. O. (1999). Fixed point controllers and stabilization of the cart-pole system and the rotating pendulum. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 38. 1999, Phoenix, Arizona, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

SABER, R. O. (2000). Cascade normal forms for underactuated mechanical systems. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 39. 2000, Sidney, Austrália. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

SABER, R. O.; MEGRETSKI, A. (1998). Control design for a class of underactuated nonlinear systems. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 38. 1998, Tampa, Flórida, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

SAGE, H. G.; MATHELIN, M. F. D.; OSTERTAG, E. (1999). Robust control of robot manipulators: a survey. *International Journal of Control*, v.72, n.16, p.1498–1522, Nov.

SHAKED, U.; SOUZA, C. E. D. (1995). Continuous-Time Tracking Problem in an $\mathcal{H}_\infty$ Setting: A Game Theory Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.5, p.841–852, May.

SIQUEIRA, A. A. G.; BERGERMAN, M.; TERRA, M. H. (1999). Underactuated manipulator control system development environment. In: *International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future, CARS&FOF99*, 15. 1999, Águas de Lindóia, Brasil. *Proceedings...* Águas de Lindóia: CTI/UFSM.

SIQUEIRA, A. A. G.; BUOSI, C.; TERRA, M. H. (2003). Output Feedback Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control of Underactuated Manipulators. In: *IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, 11. 2003, Rhodes, Grécia. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; PETRONILHO, A.; TERRA, M. H. (2003). Adaptive nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ techniques applied to a robot manipulator. In: *IEEE Conference on Control Applications*. 2003, Istambul, Turquia. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2001). Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear de robôs manipuladores via representação quase-LPV. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 5. 2001, Canela, Brasil. *Anais...* Porto Alegre: SBA. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2001). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ Control for Underactuated Manipulators. In: *International Workshop on Underwater Robotics for Sea Exploitation and Environmental Monitoring*, 1. 2001, Rio de Janeiro, Brasil. *Proceedings...* Rio de Janeiro: IARP. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2001). Robôs manipuladores subatuados: Controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear via representação quase-LPV. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 5. 2001, Canela, Brasil. *Anais...* Porto Alegre: SBA. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2002). Control of underactuated manipulators using nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ techniques. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 41. 2002, Las Vegas, Nevada, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM. Artigo finalista do CDC 2002 Best Student Paper Award.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2002). Estudo comparativo de controladores $\mathcal{H}_\infty$ não linear para manipuladores. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 14. 2002, Natal, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2002). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control via quasi-LPV representation applied in a underactuated manipulator. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2002, Lausanne, Switzerland. *Proceedings...* Lausanne: EPFL. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2003). Nonlinear $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controls applied to manipulator robots. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 6. 2003, Bauru, Brasil. *Anais...* Bauru: SBA. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). Controladores $\mathcal{H}_\infty$ não lineares aplicados em robôs manipuladores cooperativos. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 15. 2004, Gramado, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). A Fault Tolerant Robot Manipulator Based on $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ and Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Markovian Controls. In: *IEEE Conference on Control Applications*. 2004, Taipei, Taiwan. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM. Artigo finalista do CCA 2004 Best Student Paper Award.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). A Fault Tolerant Robot Manipulator using Output Feedback $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Markovian Controls. In: *Congresso Latino-americano de Controle*, 11. 2004, Havana, Cuba. *Anais...* Havana: IFAC. 1 CD-ROM.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). Nonlinear and Markovian $\mathcal{H}_\infty$ Controls of Underactuated Manipulators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.12, n.6, p.811–826, Nov.

SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2004). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control for under-actuated manipulators with robustness tests. *Revista Controle e Automação*, v.15, n.3, p.339–350.

SOARES, M. R.; TERRA, M. H.; BERGERMAN, M.; TINÓS, R. (1999). A simulation environment for fault detection and isolation and control of underactuated manipulators. In: *International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future, CARS&FOF99*, 15. 1999, Águas de Lindóia, Brasil. *Proceedings...* Águas de Lindóia: CTI/UFMS. v. 2, p. 13–17.

SU, W.; SOUZA, C. E. D.; XIE, L. (1999). $\mathcal{H}_\infty$ Control for Asymptotically Stable Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.44, n.5, p.989–993, May.

SUZUKI, T.; KOIMURA, M.; NAKAMURA, Y. (1996). Chaos and Nonlinear Control of a Nonholonomic Free-joint Manipulator. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1996, Minneapolis, Minnesota, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/RAS. 1 CD-ROM.

TERRA, M. H.; BARBEIRO, T. L. S.; SIQUEIRA, A. A. G.; BERGERMAN, M. (2000). Ambiente de Simulação para Detecção de Falhas em um Manipulador Subatuado via Raio de Estabilidade. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 13. 2000, Florianópolis, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

TERRA, M. H.; BERGERMAN, M.; TINÓS, R.; SIQUEIRA, A. A. G. (2001). Controle tolerante a falhas de robôs manipuladores. *Revista Controle e Automação*, v.12, n.2, p.73–92. Apresentado como minicurso ao XIII Congresso Brasileiro de Automática, Florianópolis, 2000.

TERRA, M. H.; MACIEL, B. C. O.; NAKASHIMA, P. H. R.; BERGERMAN, M. (2000). Controles $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de um Robô Manipulador Subatuado via Linearização por Realimentação de Estados. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 13. 2000, Florianópolis, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

TERRA, M. H.; MACIEL, B. C. O.; NAKASHIMA, P. H. R.; BERGERMAN, M. (2000). Underactuated Manipulator Robot Control by State Feedback Linearization

via $\mathcal{H}_\infty$. In: *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 3. 2000, Prague, Czech Republic. *Proceedings...* Prague: IFAC. 1 CD-ROM.

TERRA, M. H.; SIQUEIRA, A. A. G.; BERGERMAN, M. (1999). Underactuated manipulator robot control via linear matrix inequalities. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 38. 1999, Phoenix, Arizona, USA. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/CSS. 1 CD-ROM.

TERRA, M. H.; TINÓ S, R. (2001). Fault Detection and Isolation in Robotic Manipulators via Neural Networks - A Comparison Among Three Architectures for Residual Analysis. *Journal of Robotic Systems*, v.18, n.7, p.357–374, Jul.

TINÓ S, R. (2003). *Tolerância a falhas em robôs manipuladores cooperativos*. 212p. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2003.

TOMEI, P. (1994). Tracking Control of Flexible Joint Robots with Uncertain Parameters and Disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.39, n.5, p.1067–1072, May.

TOMEI, P. (1995). Nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ disturbance attenuation for robot with flexible joints. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.5, n.4, p.365–373, Jul.

SCHAFT, A. J. V. D. (1991). On a state space approach to nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control. *System & Control Letters*, v.16, n.1, p.1–8, Jan.

SCHAFT, A. J. V. D. (1992). $\mathcal{L}_2$ -gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.37, n.6, p.770–784, June.

WEN, T.; KREUTZ-DELGADO, K. (1992). Motion and Force Control for Multiple Robotic Manipulators. *Automatica*, v.28, n.4, p.729–743, Jul.

WHITCOMB, L. L.; RIZZI, A. A.; KODISTSCHEK, D. E. (1993). Comparative Experiments with a New Adaptive Controller for Robot Arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v.9, n.1, p.59–70, Feb.

WU, F. (1995). *Control of linear parameter-varying systems*. 150p. PhD Thesis - Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley. 1995.

WU, F.; GRIGORIADIS, K. M.; PACKARD, A. (2000). Anti-windup controller design using linear parameter-varying control methods. *International Journal of Control*, v.73, n.12, p.1104–1114, Aug.

WU, F.; YANG, X. H.; PACKARD, A.; BECKER, G. (1996). Induced $\mathcal{L}_2$ -Norm Control for LPV Systems With Bounded Parameter Variation Rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.6, n.9-10, p.983–998, Nov.-Dec.

YASIN, M. E.; SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H. (2002). Controle adaptativo $\mathcal{H}_\infty$ aplicado a um robô manipulador. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 14. 2002, Natal, Brasil. *Anais...* São Paulo: SBA. 1 CD-ROM.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. (1998). *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

Apêndice A

UArm II e Ambientes de controle

Neste apêndice, uma descrição completa do robô manipulador UArm II, construído com características especiais de subatuação, é apresentada. O acionamento é realizado diretamente a partir de um ambiente de controle desenvolvido em linguagem MatLab[®].

A.1 UArm II

O robô manipulador subatuado UArm II (Underactuated Arm II), projetado e construído por H. Ben Brown, Jr. da Universidade Carnegie Mellon de Pittsburgh, PA, USA (Figura A.1), é um manipulador planar horizontal de base fixa com três elos que possui uma característica especial em suas juntas. Cada junta contém um atuador e um freio, sendo que pode-se configurá-las como juntas ativas ou passivas, habilitando ou não o motor de corrente contínua (CC) de cada junta. Utilizando-se desta propriedade, todas as possíveis configurações, de acordo com a localização das juntas ativas (A) e passivas (P), são aceitas: AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP e PPA. Por exemplo, a configuração AAP representa que as juntas 1 e 2 são ativas e a junta 3 é passiva. Na Figura A.2 é mostrado o sistema de coordenadas das juntas do robô manipulador UArm II. Estes ângulos assumem valores positivos no sentido anti-horário.

As matrizes $M(q)$ e $C(q, \dot{q})$ da equação (3.1) são encontradas pela teoria de

Figura A.1: Underactuated Arm II.

Figura A.2: Esquema ilustrativo do robô manipulador.

Lagrange para um manipulador planar (veja Apêndice B). Como o manipulador UArm II é horizontal, o termo $G(q)$ é nulo. O termo $F(\dot{q})$ é determinado de acordo com o tipo de atrito de fricção atuando no robô. Neste trabalho, um termo de fricção dependente da velocidade é utilizado:

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_1 \dot{q}_1 \\ f_2 \dot{q}_2 \\ f_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

sendo os valores f_1 , f_2 e f_3 escolhidos após testes empíricos. Os parâmetros nomi-

nais cinemáticos e dinâmicos do manipulador utilizados para calcular as matrizes nominais $M_0(q)$, $C_0(q, \dot{q})$, $F_0(\dot{q})$ e $G_0(q)$ são mostrados na Tabela A.1.

Tabela A.1: Parâmetros do robô.

i	$m_i(\text{kg})$	$I_i(\text{kgm}^2)$	$l_i(\text{m})$	$lc_i(\text{m})$	$f_i(\text{kgm}^2/\text{s})$
1	0.850	0.0153	0.203	0.096	0.25
2	0.850	0.0100	0.203	0.096	0.15
3	0.625	0.0100	0.203	0.077	0.10

Os parâmetros massa, centro de massa e momento de inércia não são precisos, pois foram calculados a partir das medidas dos componentes (rotor, estator, sistema de freio) dos elos fornecidas pelos fabricantes. Observa-se que o robô foi adquirido com suas partes montadas, sendo impossível realizar medidas dos elos separadamente.

O manipulador é disposto sobre uma mesa de mármore, sendo seu movimento proporcionado por um colchão de ar gerado a partir da liberação de ar comprimido na parte inferior das juntas. Os freios são constituídos por diafragmas cujo acionamento pelo ar comprimido provoca o travamento das juntas.

Dispositivos de leitura de posição ópticos (*encoders*) com decodificação em quadratura são utilizados para medir a posição real das juntas. As velocidades angulares são obtidas por diferenciação numérica das posições e posteriormente filtradas, sendo esta uma medida indireta e imprecisa. A realimentação do estado (erro de posição e de velocidade) pode não ser satisfatória devido a esta imprecisão da velocidade. Para eliminar esta deficiência, utiliza-se, na literatura, a realimentação da saída, sendo a saída somente erro de posição. O tempo de amostragem é de 0.015s.

A tensão de alimentação é fornecida por uma fonte de 48 V/20 A e 24 V/1 A. Por motivo de precaução, um botão de emergência (*Kill Switch*) corta a alimentação da fonte quando acionado. Os demais componentes do sistema estão dispostos na placa de controle do manipulador: amplificadores de corrente, sistema de controle da pressão do ar, válvulas solenóides dos ferios. Na figura A.3, são mostrados o robô manipulador, a placa de controle, fonte de tensão e computador.

A interface entre o computador e a placa de controle do manipulador é realizada

Figura A.3: UArm II, fonte de tensão, placa de controle e computador.

utilizando-se uma placa de entrada-saída Servo To Go[®], capaz de controlar até 8 motores simultaneamente, ou seja 8 juntas, usada para outros fins além de manipuladores, como, controle de câmeras, controle de instrumentos médicos e ferramentas mecânicas. Suas características são as seguintes:

- entradas para sinais de *encoders* (somando 8 canais);
- saídas analógicas (8 canais , 13 bits de resolução, + 10 V a -10 V de amplitude);
- entradas e saídas digitais (32 bits, configurado em várias combinações de entrada e saída);
- entradas analógicas (somando 8 canais , 13 bits , configurado para +/- 10 V ou +/- 5 V de amplitude);
- intervalo de tempo (capacidade de interrupção do computador);
- detector da base de endereço com interrupção em software (usado para determinar a base de endereço automaticamente);
- 5 *jumpers* - estruturas onde são selecionadas características desejadas à placa, como base de endereço, amplitude de saída analógica, etc.

O *driver* utilizado, *virtual device driver* (VxD), é compatível com o sistema operacional utilizado (Windows 95) e acessado por *dlls* (*dynamically linked libraries*)

geradas a partir da compilação, no espaço de trabalho do MatLab[®], de programas em C++ contendo funções de tipo *mex*. Foram geradas 4 funções de controle, mostradas na Tabela A.2.

Tabela A.2: Funções *dlls* utilizadas.

Funções <i>dll</i>	Descrição
SET-DAC-ALL-STG	envia tensões aos 3 motores
GET-POSITION	lê os ângulos das juntas
SET-ENCODER-ONE-STG	referencia o <i>encoder</i> de um eixo
SET-BRAKE-MOTOR	aciona os freios e habilita os motores

Especificações do sistema:

1. Braço

- Comprimento do elo: 20.3 cm
- Comprimento total: 76.5 cm
- Medidas da junta: 76 mm de diâmetro e 86 mm de altura
- Massa da junta: 670 g
- Massa do efetuador: 220 g
- Massa do elo: 30 g (excluindo fios, conectores)

2. Motores das juntas

- Modelo: Kollmorgen RBE - brushless CC
- Voltagem nominal: 48 V CC
- Resistência de giro: 2.4 Ohm
- Torque constante: 0.14 Nm/Amp
- Torque de pico: 2.8 Nm
- Massa do motor: 344 g
- Inércia do rotor: 0.0000148 kgm²

3. Amplificadores de corrente

- Modelo: Elmo SBA - 10/100H-4
- Corrente de pico: 20 A
- Corrente contínua: 10 A
- Tensão: 20-90 V CC

4. Freios

- Tipo: diafragma acionado por ar
- Pressão: 100 psi (700 kPa) máx.
- Torque: 2.8 Nm

5. Encoders óticos

- Modelo: Hewlett Packard HEDS - 9040-T00
- Disco: modelo HEDS - 6140-T08
- Linhas: 2000/rev
- Contagem após decodificação em quadratura: 8000/rev

6. Flutuadores de ar

- Diâmetro dos orifícios: 0.36 mm
- Altura da camada de ar: 0.08 mm aproximadamente
- Pressão do ar: 100 psi (700 kPa) máx.

7. Sistema de controle da pressão do ar

- Válvulas solenóides (bobinas): modelo Clippard Evo-3M, 24 V CC, 0.67 W
- Válvulas reguladoras de pressão

8. Sistema computacional

- Computador: Pentium com entrada disponível para placa Servo To Go
- Placa: modelo Servo To Go S8, 8 eixos

A.2 Ambiente de controle do UArm II

O ambiente de controle do manipulador subatuado UArm II foi desenvolvido de tal forma que todas as alterações de configuração e o acionamento do robô possam ser feitas amigavelmente [SIQUEIRA et al. (1999); SOARES et al. (1999)]. O UMCE (Underactuated Manipulator Control Environment) foi desenvolvido na linguagem MatLab[®] e possui duas características que se destacam: o acionamento do robô manipulador UArm II é feito diretamente na interface gráfica (Figura A.4) ao toque de um botão e o movimento do robô é reproduzido em tempo real nesta interface gráfica.

Figura A.4: Interface gráfica do UMCE.

O acesso ao ambiente de controle é feito no espaço de trabalho do MatLab[®]. Conforme pode-se observar na Figura A.4, a interface gráfica é dividida em duas áreas denominadas: *msg-frame*, contendo botões de comando e *prompts* para entrada de dados; e *movie-axis*, na qual o movimento real do robô é representado.

A área *msg-frame* é subdividida nas seguintes sub-áreas:

1. *USER COMMANDS*: os botões desta área (Figura A.5) realizam as seguintes tarefas:
 - *Start Simulation*: Inicia a simulação. O botão se torna invisível durante o processamento da simulação e volta a se tornar visível com o término da

Figura A.5: Comandos de acionamento.

simulação ou quando é pressionado o botão STOP. Se algo errado ocorre durante a simulação (uma inversão de matriz mal sucedida, por exemplo), este botão não fica no seu estado visível. Quando isto ocorre é necessário que o usuário pressione o botão STOP para que ele retorne ao seu estado inicial.

- *Start UArmII*: Inicia o manipulador real e apresenta as mesmas características do botão anterior.
- *STOP*: Para a simulação ou o movimento real em qualquer instante e retorna os botões *Start Simulation* e *Start UArmII* para seus estados visíveis.
- *Restart*: Reinicia a interface gráfica desligando e carregando novamente todo programa. Para ser utilizado quando alguma alteração é feita em um dos botões, mensagens, eixos, etc.
- *Close*: Fecha a interface gráfica e limpa todas as variáveis do workspace do MatLab[®].
- *Set DAC=0*: Faz com que todas as saídas analógicas dos amplificadores fiquem com 0 V. Esta opção é utilizada como medida de segurança nos casos em que o botão de emergência é acionado, pois resíduos de tensão nas saídas podem provocar um movimento inesperado do manipulador.
- *Reference*: Adquire as posições atuais das juntas com a finalidade de gerar referências para os *encoders* das juntas.
- *Brake On*: Aciona os freios de todas as juntas. Este comando é utilizado após o manipulador ser posicionado na posição específica para se gerar a referência.

- *Brake Off*: Libera todos os freios do robô UArm II. Quando as juntas alcançam o seu *set-point* os freios são acionados.
2. *SIMULATION PARAMETERS*: Esta área mostra os parâmetros que podem ser definidos para a simulação e controle em tempo real. Os seguintes dados são mostrados e podem ser alterados, Figura A.6:

Figura A.6: Parâmetros do experimento.

- *Configuration*: Define a configuração para o robô manipulador conforme a posição das juntas ativas e passivas. Ex.: 3PAP representa um manipulador de 3 juntas, com a primeira e a terceira juntas passivas e a segunda junta ativa.
- *Controller*: Define o controlador a ser utilizado.
- *Initial angles*: Define os ângulos iniciais do manipulador. Para a configuração padrão de ângulos iniciais o usuário deve escolher a opção *Default*. Para escolher ângulos iniciais aleatórios a opção *Random* deve ser selecionada. Caso o usuário queira entrar com os ângulos iniciais o seguinte procedimento deve ser realizado: no campo de entrada de dados digite os ângulos iniciais em graus como um vetor (Ex.: [30 30 45]), clique na opção *Initial angles* e depois escolha a opção *User defined*.
- *Set-point*: Define a posição final desejada para as juntas. Pode ser alterado utilizando o mesmo procedimento descrito acima.
- *Fault*: Define a junta na qual a falha ocorrerá. Pode-se escolher: *none*, *joint 1*, *joint 2* ou *joint 3*. O tempo inicial e final da falha também podem ser definidos. É necessário definir o tempo final pois se a falha não for detectada, o robô manipulador UArm II será controlado após o período em que ocorrer a falha, evitando que o sistema fique instável.

Um comentário adicional pode ser feito a respeito do procedimento de entrada para os valores iniciais e finais dos ângulos das juntas. Um clique com o botão esquerdo do mouse no espaço dos eixos cartesianos (*movie-axis*) define a posição inicial e um segundo clique com o botão direito do mouse define a posição final desejada.

3. *DYNAMIC PARAMETERS*: Esta área mostra os parâmetros que definem o manipulador, Figura A.7. Os parâmetros padrões são os mostrados na Tabela A.1. Esses dados podem ser alterados utilizando o mesmo procedimento descrito para a posição inicial.

Figura A.7: Parâmetros dinâmicos.

- *Dynamic uncertainty*: Define o grau de incerteza nos parâmetros dinâmicos e cinemáticos. Quando este valor é igual a 1 o modelo é assumido como sendo perfeitamente conhecido. Quando apresenta um valor diferente todos os parâmetros dinâmicos e cinemáticos são multiplicados por este valor e estes valores estimados são utilizados pelo controlador. Note que o modelo dinâmico ainda é calculado utilizando os parâmetros dinâmicos e cinemáticos nominais. Esta opção é utilizada para testar a robustez das leis de controle em relação à incertezas paramétricas.

Figura A.8: Alteração de parâmetros e gráficos.

4. *CHANGE PARAMETERS*: Fornece um *prompt* para a entrada numérica de dados, Figura A.8. A mensagem “Make sure to use correct dimensions” aparecerá no *prompt*. Quando um dado inválido é fornecido, a mensagem “Invalid data! Default values set” aparecerá.
5. *GRAPHICS*: Este menu *pull-down* (Figura A.8) apresenta os controladores disponíveis. Quando uma opção é selecionada uma nova janela chamada “Graphics” é aberta contendo os gráficos de posição, velocidade e torque das juntas para o controlador selecionado, Figura A.9, resultantes da simulação e também adquiridos durante o movimento experimental.

Figura A.9: Janela de gráficos.

Os seguintes dados também são exibidos e não podem ser alterados:

- *Simulation time*: Mostra o progresso do tempo de simulação. Esta mesma informação é exibida no workspace do MatLab[©] ao término da simulação.
- *Real time*: Exibe o progresso do tempo real de simulação ou execução de uma trajetória para o robô UArm II.
- *Fault time*: Mostra os tempos inicial e final de ocorrência da falha.

A.3 Ambiente de controle do manipulador cooperativo

O ambiente de controle do manipulador cooperativo formado por dois manipuladores UArm II, descrito no Capítulo 10, foi desenvolvido por Renato Tinós durante seu doutorado [TINÓS (2003)]. Através da janela principal do ambiente de controle, Figura A.10 é possível alterar as configurações dos manipuladores, o controle utilizado, as posições inicial e final e os parâmetros do objeto. Pode-se também visualizar os gráficos do objeto que mostram as suas posições, velocidades, forças aplicadas e forças de esmagamento, Figura A.11, e dos manipuladores que mostram as suas posições angulares, velocidades angulares e torques aplicados, Figura A.12.

Figura A.10: Interface gráfica do ambiente de controle.

Figura A.11: Janela de gráficos do objeto.

Figura A.12: Janela de gráficos dos manipuladores.

Apêndice B

Matrizes dinâmicas e matrizes de regressão

- Considere um manipulador planar com 3 elos com juntas de revolução esquematizado na Figura A.2. As matrizes $M(q)$ e $C(q, \dot{q})$ para este tipo de manipulador são dadas por [CRAIG (1986)]:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos(q_2)) \\ &\quad + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c_3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2) + 2l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c_3} \cos(q_3)), \\ M_{12}(q) &= I_2 + I_3 + m_2 (l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2} \cos(q_2)) \\ &\quad + m_3 (l_2^2 + l_{c_3}^2 + l_1 l_2 \cos(q_2) + l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + 2l_2 l_{c_3} \cos(q_3)), \\ M_{13}(q) &= I_3 + m_3 (l_{c_3}^2 + l_1 l_{c_3} \cos(q_2 + q_3) + l_2 l_{c_3} \cos(q_3)), \\ M_{21}(q) &= M_{12}(q), \end{aligned}$$

$$M_{22}(q) = I_2 + I_3 + m_2 l_{c_2}^2 + m_3(l_2^2 + l_{c_3}^2 + 2l_2 l_{c_3} \cos(q_3)),$$

$$M_{23}(q) = I_3 + m_3(l_{c_3}^2 + l_2 l_{c_3} \cos(q_3)),$$

$$M_{31}(q) = M_{13}(q),$$

$$M_{32}(q) = M_{23}(q),$$

$$M_{33}(q) = I_3 + m_3 l_{c_3}^2,$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix},$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -[(m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3))\dot{q}_2 \\ + (m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3))\dot{q}_3],$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -[(m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ + (m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3))\dot{q}_3],$$

$$C_{13}(q, \dot{q}) = -[(m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)],$$

$$C_{2,1}(q, \dot{q}) = (m_2 l_1 l_{c_2} \sin(q_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3))\dot{q}_1 \\ - m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)\dot{q}_3,$$

$$C_{2,2}(q, \dot{q}) = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)\dot{q}_3,$$

$$C_{2,3}(q, \dot{q}) = -m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3),$$

$$C_{3,1}(q, \dot{q}) = (m_3 l_1 l_{c_3} \sin(q_2 + q_3) + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3))\dot{q}_1 + m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)\dot{q}_3,$$

$$C_{3,2}(q, \dot{q}) = m_3 l_2 l_{c_3} \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2),$$

$$C_{3,3}(q, \dot{q}) = 0,$$

sendo m_i , l_i , l_{c_i} , I_i , q_i e $\dot{q}_i$, respectivamente, a massa, o comprimento, o centro de massa, o momento de inércia, a posição angular e a velocidade angular do i -ésimo elo.

- A matriz de regressão $Y(\cdot)$, configuração AAA, é dada por:

$$Y(\cdot) = \begin{bmatrix} Y_{11}(\cdot) & Y_{12}(\cdot) & Y_{13}(\cdot) & Y_{14}(\cdot) & Y_{15}(\cdot) & Y_{16}(\cdot) & Y_{17}(\cdot) & Y_{18}(\cdot) \\ Y_{21}(\cdot) & Y_{22}(\cdot) & Y_{23}(\cdot) & Y_{24}(\cdot) & Y_{25}(\cdot) & Y_{26}(\cdot) & Y_{27}(\cdot) & Y_{28}(\cdot) \\ Y_{31}(\cdot) & Y_{32}(\cdot) & Y_{33}(\cdot) & Y_{34}(\cdot) & Y_{35}(\cdot) & Y_{36}(\cdot) & Y_{37}(\cdot) & Y_{38}(\cdot) \\ & & & & & Y_{19}(\cdot) & Y_{110}(\cdot) & Y_{111}(\cdot) \\ & & & & & Y_{29}(\cdot) & Y_{210}(\cdot) & Y_{211}(\cdot) \\ & & & & & Y_{39}(\cdot) & Y_{310}(\cdot) & Y_{311}(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$Y_{11}(\cdot) = 2y_{11} + y_{12}, \quad Y_{12}(\cdot) = y_{11},$$

$$Y_{13}(\cdot) = 2 \cos(q_2)y_{11} + \cos(q_2)y_{12} - \sin(q_2)\dot{q}_2y_{21} - \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22},$$

$$Y_{14}(\cdot) = (2 + 2 \cos(q_2))y_{11} + (1 + \cos(q_2))y_{12} - \sin(q_2)\dot{q}_2y_{21} \\ - \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22},$$

$$Y_{15}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{16}(\cdot) = (2 \cos(q_2 + q_3) + 2 \cos(q_3))y_{11} + (\cos(q_2 + q_3) + 2 \cos(q_3))y_{12} \\ + (\cos(q_2 + q_3) + \cos(q_3))y_{13} - \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_2y_{21} \\ - (\sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3))\dot{q}_3y_{21} - \sin(q_2 + q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22} \\ - (\sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3))\dot{q}_3y_{22} - (\sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ + \dot{q}_3)y_{23},$$

$$Y_{17}(\cdot) = 2y_{11} + y_{12}, \quad Y_{18}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{19}(\cdot) = \dot{q}_1, \quad Y_{110}(\cdot) = 0, \quad Y_{111}(\cdot) = 0,$$

$$Y_{21}(\cdot) = 2y_{11} + y_{12}, \quad Y_{22}(\cdot) = 0, \quad Y_{23}(\cdot) = \cos(q_2)y_{11} + \sin(q_2)\dot{q}_1y_{21},$$

$$Y_{24}(\cdot) = (1 + \cos(q_2))y_{11} + y_{12} + \sin(q_2)\dot{q}_1y_{21},$$

$$Y_{25}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{26}(\cdot) = (\cos(q_2 + q_3) + 2 \cos(q_3))y_{11} + 2 \cos(q_3)y_{12} + \cos(q_3)y_{13} \\ + \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1y_{21} - \sin(q_3)\dot{q}_3y_{21} - \sin(q_3)\dot{q}_3y_{22} - \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ + \dot{q}_3)y_{22},$$

$$Y_{27}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad Y_{28}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{29}(\cdot) = 0, \quad Y_{210}(\cdot) = \dot{q}_2, \quad Y_{211}(\cdot) = 0,$$

$$Y_{31}(\cdot) = 0, \quad Y_{32}(\cdot) = 0, \quad Y_{33}(\cdot) = 0, \quad Y_{34}(\cdot) = 0,$$

$$Y_{35}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{36}(\cdot) = \cos(q_2 + q_3)y_{11} + \cos(q_3)y_{11} + \cos(q_3)y_{12} + \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1y_{21} \\ + \sin(q_3)\dot{q}_1y_{21} - \sin(q_3)\dot{q}_2y_{21} + \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22},$$

$$Y_{37}(\cdot) = 0, \quad Y_{38}(\cdot) = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$

$$Y_{39}(\cdot) = 0, \quad Y_{310}(\cdot) = 0, \quad Y_{311}(\cdot) = \dot{q}_3,$$

sendo $y_{11} = (\ddot{q}_1^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_1)$, $y_{12} = (\ddot{q}_2^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_2)$, $y_{13} = (\ddot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_3)$,
 $y_{21} = (\dot{q}_1^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_1)$, $y_{22} = (\dot{q}_2^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_2)$, e $y_{23} = (\dot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_3)$.

- A matriz de regressão $\overline{Y}(\cdot)$, configuração APA, primeira fase, é dada por:

$$\overline{Y}(\cdot) = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{11}(\cdot) & \overline{Y}_{12}(\cdot) & \overline{Y}_{13}(\cdot) & \overline{Y}_{14}(\cdot) & \overline{Y}_{15}(\cdot) & \overline{Y}_{16}(\cdot) & \overline{Y}_{17}(\cdot) & \overline{Y}_{18}(\cdot) \\ \overline{Y}_{21}(\cdot) & \overline{Y}_{22}(\cdot) & \overline{Y}_{23}(\cdot) & \overline{Y}_{24}(\cdot) & \overline{Y}_{25}(\cdot) & \overline{Y}_{26}(\cdot) & \overline{Y}_{27}(\cdot) & \overline{Y}_{28}(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$\overline{Y}_{11}(\cdot) = y_{11}, \quad \overline{Y}_{12}(\cdot) = y_{11}, \quad \overline{Y}_{13}(\cdot) = y_{11} + y_{12},$$

$$\overline{Y}_{14}(\cdot) = 2\cos(q_3)y_{11} + \cos(q_3)y_{12} - \sin(q_3)\dot{q}_3y_{21} - \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)y_{22},$$

$$\overline{Y}_{15}(\cdot) = y_{11}, \quad \overline{Y}_{16}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad \overline{Y}_{17}(\cdot) = 1, \quad \overline{Y}_{18}(\cdot) = 0,$$

$$\overline{Y}_{21}(\cdot) = 0, \quad \overline{Y}_{22}(\cdot) = 0, \quad \overline{Y}_{23}(\cdot) = y_{11} + y_{12},$$

$$\overline{Y}_{24}(\cdot) = \cos(q_3)y_{11} - \sin(q_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22},$$

$$\overline{Y}_{25}(\cdot) = 0, \quad \overline{Y}_{26}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad \overline{Y}_{27}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad \overline{Y}_{28}(\cdot) = 1,$$

sendo $y_{11} = (\ddot{q}_2^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_2)$, $y_{12} = (\ddot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_3)$, $y_{21} = (\dot{q}_2^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_2)$, e
 $y_{22} = (\dot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\tilde{q}_3)$.

- A matriz de regressão $Y(\cdot)$, configuração APA, segunda fase, é dada por:

$$Y(\cdot) = \begin{bmatrix} Y_{11}(\cdot) & Y_{12}(\cdot) & Y_{13}(\cdot) & Y_{14}(\cdot) & Y_{15}(\cdot) & Y_{16}(\cdot) & Y_{17}(\cdot) & Y_{18}(\cdot) \\ \bar{Y}_{21}(\cdot) & Y_{22}(\cdot) & Y_{23}(\cdot) & Y_{24}(\cdot) & Y_{25}(\cdot) & Y_{26}(\cdot) & Y_{27}(\cdot) & Y_{28}(\cdot) \\ & & & & & & Y_{19}(\cdot) & Y_{110}(\cdot) \\ & & & & & & Y_{29}(\cdot) & Y_{210}(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$Y_{11}(\cdot) = 2y_{11}, \quad Y_{12}(\cdot) = y_{11},$$

$$Y_{13}(\cdot) = 2 \cos(q_2)y_{11} - \sin(q_2)\dot{q}_2y_{21} - \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)y_{22},$$

$$Y_{14}(\cdot) = (2 + 2 \cos(q_2))y_{11} - \sin(q_2)\dot{q}_2y_{21},$$

$$Y_{15}(\cdot) = y_{11} + y_{12},$$

$$\begin{aligned} Y_{16}(\cdot) &= (2 \cos(q_2 + q_3) + 2 \cos(q_3))y_{11} + (\cos(q_2 + q_3) + \cos(q_3))y_{12} \\ &\quad - \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_2y_{21} - (\sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3))\dot{q}_3y_{21} - (\sin(q_2 + q_3) \\ &\quad + \sin(q_3))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)y_{22}, \end{aligned}$$

$$Y_{17}(\cdot) = 2y_{11}, \quad Y_{18}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad Y_{19}(\cdot) = \dot{q}_1, \quad Y_{110} = 0,$$

$$Y_{21}(\cdot) = 0, \quad Y_{22}(\cdot) = 0, \quad Y_{23}(\cdot) = 0, \quad Y_{24}(\cdot) = 0, \quad Y_{25}(\cdot) = y_{11} + y_{12},$$

$$\begin{aligned} Y_{26}(\cdot) &= (\cos(q_2 + q_3) + \cos(q_3))y_{11} + (\sin(q_2 + q_3) + \sin(q_3))\dot{q}_1y_{21} \\ &\quad + \sin(q_3)\dot{q}_2y_{21}, \end{aligned}$$

$$Y_{27}(\cdot) = 0, \quad Y_{28}(\cdot) = y_{11} + y_{12}, \quad Y_{29}(\cdot) = 0, \quad Y_{210} = \dot{q}_2,$$

sendo $y_{11} = (\ddot{q}_1^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_1)$, $y_{12} = (\ddot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\dot{\ddot{q}}_3)$, $y_{21} = (\dot{q}_1^d - T_{11}^{-1}T_{12}\ddot{q}_1)$, e $y_{22} = (\dot{q}_3^d - T_{11}^{-1}T_{12}\ddot{q}_3)$.

Apêndice C

Matrizes soluções X e Y dos controladores quase-LPV, e matrizes P e Λ dos controladores Markovianos

C.1 Matrizes soluções X e Y dos controladores quase-LPV

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração AAA:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0.2169 & -0.2049 & -0.0480 & 0.2326 & 0.2339 & 0.1349 \\ -0.2049 & 0.1895 & 0.1271 & -0.0486 & -0.0829 & -0.0592 \\ -0.0480 & 0.1271 & 0.2207 & -0.0888 & -0.1098 & -0.0844 \\ 0.2326 & -0.0486 & -0.0888 & 1.1127 & 1.0727 & 0.6374 \\ 0.2339 & -0.0829 & -0.1098 & 1.0727 & 1.0493 & 0.6288 \\ 0.1349 & -0.0592 & -0.0844 & 0.6374 & 0.6288 & 0.3864 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.1381 & 0.1657 & -0.0006 & -0.1706 & -0.1743 & -0.0952 \\ 0.1657 & -0.1461 & -0.0817 & 0.0276 & 0.0598 & 0.0392 \\ -0.0006 & -0.0817 & 0.1393 & 0.0574 & 0.0666 & 0.0273 \\ -0.1706 & 0.0276 & 0.0574 & -0.4068 & -0.4014 & -0.2446 \\ -0.1743 & 0.0598 & 0.0666 & -0.4014 & -0.3994 & -0.2437 \\ -0.0952 & 0.0392 & 0.0273 & -0.2446 & -0.2437 & -0.1474 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.2368 & -0.0186 & -0.0762 & -0.1864 & -0.1665 & -0.0906 \\ -0.0186 & 0.1546 & 0.0679 & -0.0231 & -0.0312 & -0.0200 \\ -0.0762 & 0.0679 & 0.1111 & 0.0665 & 0.0563 & 0.0381 \\ -0.1864 & -0.0231 & 0.0665 & -0.3963 & -0.3872 & -0.2368 \\ -0.1665 & -0.0312 & 0.0563 & -0.3872 & -0.3771 & -0.2303 \\ -0.0906 & -0.0200 & 0.0381 & -0.2368 & -0.2303 & -0.1412 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X e Y_i do controlador quase-LPV via realimentação da saída, configuração AAA:

$$X = \begin{bmatrix} 137.5074 & -262.4303 & 61.8169 & -9.7516 & 10.1404 & 1.6459 \\ -262.4303 & 610.7223 & -347.6516 & 9.6486 & -24.0074 & 5.2057 \\ 61.8169 & -347.6516 & 867.4693 & 4.4542 & 3.1906 & -34.1244 \\ -9.7516 & 9.6486 & 4.4542 & 3.0016 & -0.6899 & -0.4769 \\ 10.1404 & -24.0074 & 3.1906 & -0.6899 & 3.7675 & -0.1261 \\ 1.6459 & 5.2057 & -34.1244 & -0.4769 & -0.1261 & 5.5547 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0.2267 & 0.1118 & 0.0252 & -0.2431 & -0.1061 & -0.0099 \\ 0.1118 & 0.0545 & 0.0136 & -0.1229 & -0.0455 & -0.0067 \\ 0.0252 & 0.0136 & 0.0043 & -0.0276 & -0.0100 & -0.0040 \\ -0.2431 & -0.1229 & -0.0276 & 0.6703 & 0.2716 & 0.0442 \\ -0.1061 & -0.0455 & -0.0100 & 0.2716 & 0.1735 & 0.0080 \\ -0.0099 & -0.0067 & -0.0040 & 0.0442 & 0.0080 & 0.1049 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} -0.0021 & -0.0002 & 0.0020 & 0.0173 & -0.0246 & -0.0107 \\ -0.0002 & 0.0028 & 0.0012 & 0.0107 & -0.0198 & -0.0061 \\ 0.0020 & 0.0012 & 0.0003 & 0.0007 & -0.0067 & -0.0008 \\ 0.0173 & 0.0107 & 0.0007 & -0.0348 & -0.0018 & 0.0041 \\ -0.0246 & -0.0198 & -0.0067 & -0.0018 & 0.0885 & 0.0307 \\ -0.0107 & -0.0061 & -0.0008 & 0.0041 & 0.0307 & -0.0146 \end{bmatrix}$$

e

$$Y_3 = \begin{bmatrix} -0.0030 & 0.0009 & 0.0007 & 0.0081 & -0.0056 & -0.0157 \\ 0.0009 & 0.0022 & 0.0005 & 0.0021 & -0.0060 & -0.0089 \\ 0.0007 & 0.0005 & 0.0000 & -0.0004 & -0.0012 & -0.0023 \\ 0.0081 & 0.0021 & -0.0004 & -0.0182 & 0.0051 & 0.0165 \\ -0.0056 & -0.0060 & -0.0012 & 0.0051 & 0.0097 & 0.0208 \\ -0.0157 & -0.0089 & -0.0023 & 0.0165 & 0.0208 & 0.0197 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração APA, primeira fase:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.0893 & -0.0369 & -0.0660 & 0.0725 \\ -0.0369 & 0.1359 & 0.0288 & -0.1667 \\ -0.0660 & 0.0288 & 0.1693 & -0.0160 \\ 0.0725 & -0.1667 & -0.0160 & 0.4121 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.0447 & -0.0112 & -0.0036 & 0.0320 \\ -0.0112 & 0.0110 & -0.0085 & -0.0401 \\ -0.0036 & -0.0085 & 0.0035 & 0.0121 \\ 0.0320 & -0.0401 & 0.0121 & 0.0412 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0.0094 & 0.0214 & -0.0152 & -0.0174 \\ 0.0214 & 0.0128 & 0.0158 & 0.0438 \\ -0.0152 & 0.0158 & -0.0087 & -0.0402 \\ -0.0174 & 0.0438 & -0.0402 & -0.0588 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração APA, segunda fase:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.2306 & 0.0115 & -0.1994 & -0.0008 \\ 0.0115 & 0.2177 & -0.0194 & -0.1812 \\ -0.1994 & -0.0194 & 0.3850 & 0.0059 \\ -0.0008 & -0.1812 & 0.0059 & 0.3452 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -0.0121 & -0.0393 & 0.0151 & 0.0386 \\ -0.0393 & 0.0023 & 0.0386 & -0.0025 \\ 0.0151 & 0.0386 & -0.0206 & 0.0084 \\ 0.0386 & -0.0025 & 0.0084 & 0.0050 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0.0174 & 0.0241 & 0.0158 & 0.0051 \\ 0.0241 & 0.0144 & -0.0431 & -0.0055 \\ 0.0158 & -0.0431 & -0.0176 & 0.0183 \\ 0.0051 & -0.0055 & 0.0183 & 0.0037 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração PAP, primeira fase:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.2822 & -0.2535 \\ -0.2535 & 0.3425 \end{bmatrix}.$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.0083 & -0.0040 \\ -0.0040 & 0.0021 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.0150 & -0.0088 \\ -0.0088 & 0.0063 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração PAP, segunda fase:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.1200 & -0.1484 \\ -0.1484 & 0.2803 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.0244 & -0.0069 \\ -0.0069 & 0.0008 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.0606 & -0.0339 \\ -0.0339 & 0.0146 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes soluções X_i do controlador quase-LPV via realimentação do estado, configuração PAP, terceira fase:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.2452 & -0.2402 \\ -0.2402 & 0.7122 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0003 \\ -0.0003 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

e

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.0006 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0004 \end{bmatrix}.$$

C.2 Matrizes P e Λ dos controles Markovianos

- Matriz P para a sequência de falhas AAA-APA:

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} P_{AAA} & P_f & P_0 \\ \hline P_0 & P_{AP A_u} & P_s \\ \hline P_0 & P_s & P_{AP A_l} \end{array} \right],$$

$$P_{APA_u} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 \end{bmatrix},$$

$$P_{APA_l} = P_{APA_u} \quad \text{e} \quad P_s = 2P_f.$$

- Matriz P para a sequência de falhas AAA-PAA-PAP:

$$P = \begin{bmatrix} P_{AAA} & P_f & P_0 & P_f & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_{PAA_u} & P_s & P_f & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_s & P_{PAA_l} & P_0 & P_f & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_{PAP_{u1}} & P_s & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_s & P_{PAP_{u2}} & P_s \\ P_0 & P_0 & P_0 & P_s & P_s & P_{PAP_l} \end{bmatrix},$$

sendo

$$P_{AAA} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 \end{bmatrix},$$

$$P_{PAA_u} = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.21 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.21 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.21 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.21 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.21 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.21 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.21 \end{bmatrix},$$

$$P_{PAP_{u1}} = \begin{bmatrix} 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.24 \end{bmatrix},$$

$$P_{PAP_{u2}} = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.18 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.18 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.18 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.18 \end{bmatrix},$$

$$P_{PAA_l} = P_{PAA_u} \quad \text{e} \quad P_{PAP_l} = P_{PAP_{u2}}.$$

- Matriz Λ para a sequência de falhas AAA-APA:

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c} \Lambda_{AAA} & \Lambda_f & \Lambda_0 \\ \hline \Lambda_0 & \Lambda_{APA_u} & \Lambda_s \\ \hline \Lambda_0 & \Lambda_s & \Lambda_{APA_l} \end{array} \right],$$

sendo

$$\Lambda_{AAA} = \begin{bmatrix} -0.73 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & -0.73 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & -0.73 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & -0.73 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & -0.73 & 0.09 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & -0.73 & 0.09 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & -0.73 & 0.09 \\ 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & 0.09 & -0.73 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{APA_u} = \begin{bmatrix} -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{APA_l} = \Lambda_{APA_u}, \quad \Lambda_f = P_f, \quad \Lambda_s = P_s \quad \text{e} \quad \Lambda_0 = P_0.$$

- Matriz Λ para a sequência de falhas AAA-PAA-PAP:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{AAA} & \Lambda_f & \Lambda_0 & \Lambda_f & \Lambda_0 & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda_{PAA_u} & \Lambda_s & \Lambda_f & \Lambda_0 & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda_s & \Lambda_{PAA_l} & \Lambda_0 & \Lambda_f & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_{PAP_{u1}} & \Lambda_s & \Lambda_0 \\ \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_s & \Lambda_{PAP_{u2}} & \Lambda_s \\ \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_0 & \Lambda_s & \Lambda_s & \Lambda_{PAP_l} \end{bmatrix},$$

sendo

$$\Lambda_{AAA} = \begin{bmatrix} -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{PAA_u} = \begin{bmatrix} -0.79 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & -0.79 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & -0.79 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & -0.79 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & -0.79 & 0.07 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & -0.79 & 0.07 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & -0.79 & 0.07 \\ 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & 0.07 & -0.79 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{PAP_{u1}} = \begin{bmatrix} -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & -0.76 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{PAP_{u2}} = \begin{bmatrix} -0.82 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & -0.82 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & -0.82 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & -0.82 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & -0.82 & 0.06 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & -0.82 & 0.06 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & -0.82 & 0.06 \\ 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & 0.06 & -0.82 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{PAA_l} = \Lambda_{PAA_u} \quad \text{e} \quad \Lambda_{PAP_l} = \Lambda_{PAP_{u2}}.$$