Campus de São Carlos

**CONTROLADORES MARKOVIANOS APLICADOS A UM ROBÔ MANIPULADOR
SUBATUADO**

Autor: Daniel Vidal Farfan

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 06.10.00

Ass.: Danilo

CONTROLADORES MARKOVIANOS APLICADOS A UM ROBÔ MANIPULADOR SUBATUADO

DANIEL VIDAL FARFAN

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

DEDALUS - Acervo - EESC

31100016741

São Carlos
2000

Class.	TESE - EESC
Out.	2039
Tombo	T0227/00

st 1110144

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

F222c Farfan, Daniel Vidal
Controladores Markovianos aplicados a um robô
manipulador subatuado / Daniel Vidal Farfan. -- São
Carlos, 2000.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2000.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra.

1. Controle Markoviano. 2. Falhas em robôs
manipuladores. 3. Robôs manipuladores subatuados.
I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Licenciado **DANIEL VIDAL FARFAN**

Dissertação defendida e aprovada em 25-09-2000
pela Comissão Julgadora:

Prof. Doutor **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **RICARDO PAULINO MARQUES**
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)

Doutor **MARCEL BERGERMAN**
(CTI - Centro Tecnológico para Informática)

Profa. Associada **VILMA ALVES DE OLIVEIRA**
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais:

Pastor Alcides Vidal Gabancho
e
Carmen Jesus Farfan de Vidal.

Esta é uma conquista deles.

Sou grato:

- Ao prof. Dr. Marco Henrique Terra por ter crido que juntos poderíamos realizar este trabalho. Ele estava certo !
- Aos colegas de laboratório porque foram excelente companhia durante esta jornada.
- Aos meus professores de graduação porque me ensinaram muito sobre a ciência e também sobre a vida. Sou especialmente gratos aos professores René Moreno e Roberto Lagos.
- A CAPES por ter fornecido o meu sustento durante estes dois anos de pesquisa.
- A minha família, que sempre me amou e compreendeu a minha ausência.
- A Patricia Simões que me auxiliou de inúmeras formas neste trabalho.
- Ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo de Nazaré. A Sua Palavra diz¹: *“Entrega o teu caminho ao Senhor, confia nêle, e o mais êle fará”*. Durante estes dois anos Ele me acompanhou mais de perto do que qualquer outra pessoa, e fez realmente muito por este trabalho.

¹Salmo 37:5

Sumário

1	Introdução	1
2	Dinâmica Passiva	3
2.1	Modelo Dinâmico	4
	Estratégia A	6
	Estratégia P	7
	Estratégia AP	7
	Resumo	8
2.2	Linearização do Sistema	8
2.3	Controle	9
3	O Robô UArmII	11
3.1	Modelo Dinâmico e Controle	13
3.1.1	Configuração AAA	13
3.1.2	Configuração AAP	14
3.1.3	Configuração APA	15
3.1.4	Configuração PAA	16
3.1.5	Configuração APP	18
3.1.6	Configuração PAP	19
3.1.7	Configuração PPA	20
4	Sistemas Markovianos	22
4.1	Introdução	22
4.2	O Robô UArmII como um Sistema Markoviano	24
5	Controle H_∞	27
5.1	Formulação do Problema	27
5.2	Estabilidade para Sistemas Markovianos	29
5.3	Cálculo do Controlador	31
6	Controle H_2	33
6.1	Formulação do Problema	33
6.2	Cálculo do Controlador	34

7	Controle H_2/H_∞	35
7.1	Formulação do Problema	36
7.2	Cálculo do Controlador	37
8	Resultados	39
8.1	Controle CTq	40
8.2	Controle H_∞	43
8.2.1	Controle sem Falhas	43
8.2.2	Controle com Falhas	45
8.3	Controle H_2	49
8.3.1	Controle sem Falhas	49
8.3.2	Controle com Falhas	52
8.4	Controle H_2/H_∞	56
8.4.1	Controle sem Falhas	56
8.4.2	Controle com Falhas	58
9	Conclusões	62
A	Modelo Dinâmico do UArmII	64
B	O Toolbox DTMJLS	67
C	Ambiente Gráfico	70
D	Cálculo da Trajetória	72
E	Descrição do Sistema	74
	Matrizes A	74
	Matrizes B	77
	Matrizes C	79
	Matrizes D	83
	Matrizes W	85
F	Ganhos	86
	Ganhos para o controle H_∞	86
	Ganhos para o controle H_2	88
	Ganhos para o controle H_2/H_∞	91
	Referências Bibliográficas	94

Lista de Figuras

3.1	Ambiente de Trabalho	12
3.2	O Robô UArmII	12
4.1	Conjunto de Configurações	23
8.1	CTq matriz P_1	41
8.2	CTq matriz P_2	42
8.3	H_∞ set-point 20,20,20	43
8.4	H_∞ set-point 30,30,30	44
8.5	H_∞ set-point 15,30,45	44
8.6	H_∞ set-point 20,20,20 - falha 2	45
8.7	H_∞ set-point 30,30,30 - falha 2	46
8.8	H_∞ set-point 15,30,45 - falha 2	46
8.9	H_∞ set-point 20,20,20 - falha 3	47
8.10	H_∞ set-point 20,20,20 - falha 4	48
8.11	H_∞ set-point 20,20,20 - falha 7	48
8.12	H_2 set-point 20,20,20	50
8.13	H_2 set-point 30,30,30	50
8.14	H_2 set-point 15,30,45	51
8.15	H_2 set-point 20,20,20 - falha 2	52
8.16	H_2 set-point 30,30,30 - falha 2	53
8.17	H_2 set-point 15,30,45 - falha 2	53
8.18	H_2 set-point 20,20,20 - falha 3	54
8.19	H_2 set-point 20,20,20 - falha 4	55
8.20	H_2 set-point 20,20,20 - falha 7	55
8.21	H_2/H_∞ set-point 20,20,20	56
8.22	H_2/H_∞ set-point 30,30,30	57
8.23	H_2/H_∞ set-point 15,30,45	57
8.24	H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 2	58
8.25	H_2/H_∞ set-point 30,30,30 - falha 2	59
8.26	H_2/H_∞ set-point 15,30,45 - falha 2	59
8.27	H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 3	60
8.28	H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 4	61

LISTA DE FIGURAS

vi

8.29 H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 7	61
A.1 Diagrama do UArmII	64
C.1 Ambiente Gráfico de Simulação e Controle	71

Lista de Tabelas

2.1	Estratégias de Controle	8
4.1	Pontos de Linearização	24
A.1	Parâmetros do UArmII	66
B.1	Rotinas do Toolbox DTMJLS	69
C.1	<i>User Commands</i>	71

Lista de Símbolos

- N é o número de configurações do sistema Markoviano;
- $\mathcal{S} = \{1, \dots, N\}$ é o espaço das configurações do sistema Markoviano;
- $i \in \mathcal{S}$ é a configuração atual do sistema;
- n é o número total de juntas do manipulador;
- n_a é o número de juntas ativas;
- n_p é o número de juntas passivas;
- $\mathbb{R}^n$ denota o espaço n-dimensional real;
- $\mathbb{C}^n$ denota o espaço n-dimensional complexo;
- $\mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço linear limitado normado de todas as matrizes reais $n \times m$;
- $\mathbb{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ denota o espaço linear limitado normado de todas as matrizes complexas $n \times m$;
- $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;
- $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n) \equiv \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$;
- $\mathbb{G}^{m,n}$ denota o espaço linear formado por todas as N -uplas de matrizes V , com $V = (V_1, \dots, V_N)$, e $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$;

- $\mathbb{H}^{m,n}$ denota o espaço linear formado por todas as N -uplas de matrizes V , com $V = (V_1, \dots, V_N)$, e $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$;
- $\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{H}^{n,n}$;
- $\mathbb{G}^n \equiv \mathbb{G}^{n,n}$.

Resumo

FARFAN D. V. (2000) Farfan, Daniel Vidal *Controladores Markovianos aplicados a um robô manipulador subatuado*. São Carlos, 2000. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho trata do controle Markoviano aplicado a um robô manipulador visando obter um sistema tolerante a falhas. Os controladores H_2 , H_∞ , e H_2/H_∞ Markovianos são calculados e aplicados ao robô em diversas situações de operação. Os controladores obtidos mantiveram a estabilidade do sistema tanto em situações de operação normal, quanto em situações de falhas sucessivas.

Palavras-Chave: Controle Markoviano; Falhas em robôs manipuladores; Robôs manipuladores subatuados.

Abstract

FARFAN D. V. (2000) Farfan, Daniel Vidal Markovian Controllers applied to an Underactuated Robot Manipulator. São Carlos, 2000. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work deals with Markovian control applied to a robot manipulator, in an effort to obtain a fault tolerant system. The H_2 , H_∞ , and H_2/H_∞ controllers were calculated and applied to the robot in different operation situations. The obtained controllers guaranteed the stability of the system in both situations: normal operation, and successive faults operation.

Key-Words: *Markovian control; Faults in robotics manipulators; Underactuated robot manipulator.*

Capítulo 1

Introdução

Falhas em robôs manipuladores têm sido um tema importante de pesquisa nos últimos anos. Detectar e isolar uma falha em um robô manipulador pode ser importante para evitar alterações bruscas no desempenho podendo colocar em risco a segurança das pessoas, ou para desenvolver ações que permitam que o manipulador alcance de alguma maneira os objetivos estabelecidos inicialmente.

Uma questão importante que se coloca neste estágio em que se encontram as pesquisas sobre detecção de falhas e controle de robôs subatuados é: como controlar um robô manipulador se uma sequência de falhas ocorrerem de forma intensa fazendo com que o robô manipulador assuma diversas configurações de subatuação no transcorrer de sua trajetória de trabalho? Sabe-se que projetar um controlador estável para cada configuração do sistema subatuado não é suficiente para garantir que quando ocorrerem várias mudanças de configurações o sistema todo continue estável JI & CHIZECK (1990b). Outras questões que se levantam quando ocorrem mudanças de configuração são: como obter um conjunto de ganhos que estabilizem o sistema e também minimizem um custo quadrático? Como minimizar a norma entre a saída e o distúrbio do sistema? É possível obter um conjunto de

ganhos que responda a essas questões?

Neste trabalho procuramos responder a essas questões utilizando resultados existentes na literatura e aplicando-os a um robô manipulador de três juntas, o robô UArmII. Vamos apresentar de forma resumida a metodologia desta pesquisa.

Se a sequência de falhas puder ser modelada por uma cadeia de Markov, podemos utilizar a teoria existente para sistemas sujeitos a saltos Markovianos. O controle H_2 Markoviano tem por objetivo manter a estabilidade e minimizar um custo quadrático, enquanto o controle H_∞ Markoviano procura minimizar a norma entre a o distúrbio e a saída do sistema, de forma que com essas três ferramentas: Controle H_2 , Controle H_∞ , e sistemas Markovianos iremos tentar responder as questões levantadas.

O robô UArmII foi escolhido para este estudo por possuir a característica de poder mudar subitamente a sua estrutura, transformando algumas juntas ativas em passivas e vice-versa.

Dentro da literatura existem diversos trabalhos que abordam o controle de sistemas Markovianos ABOU-KANDIL et al. (1995); BLAIR & SWORDER (1975); BLOM & BAR-SHALOM (1988); BOUKAS & YANG (1995); CHIZECK et al. (1986); COSTA (1995); COSTA (1996); COSTA & FRAGOSO (1993); COSTA & FRAGOSO (1995); COSTA & DO VAL (1996); FENG et al. (1992); FRAGOSO et al. (1995); JI & CHIZECK (1988); JI & CHIZECK (1990); JI & CHIZECK (1989); JI & CHIZECK (1990b); JI et al. (1991); LOPARO et al. (1991); MARITON (1990); MARQUES (1997); MOROZAN (1983); PAN & BASAR (1994); RAMI & EL GHAOU (1994); RAMI & EL GHAOU (1996); SWORDER & ROGERS (1983).

Capítulo 2

Dinâmica Passiva

Neste capítulo apresentamos uma revisão dos resultados existentes na literatura sobre o controle de robôs manipuladores subatuados.

Um manipulador é dito subatuado quando possui ao menos uma junta passiva. Aqui estamos considerando um robô manipulador subatuado com n juntas, sendo que n_a juntas são ativas, e n_p juntas são passivas. Junta passiva é aquela que não possui atuadores, somente possui um freio que quando acionado mantém a posição da junta fixa. Tanto as juntas ativas como as passivas possuem sensores de posição, e por não possuírem atuadores as juntas passivas só podem ser controladas indiretamente por meio de torques aplicados nas juntas ativas.

É interessante estudar o controle de sistemas subatuados por diversas razões, e dentre elas vamos destacar duas:

Economia: Um robô subatuado possui menos atuadores que um equivalente totalmente atuado. Se os dois robôs forem capazes de executar as mesmas tarefas, o robô subatuado é mais leve e barato por possuir menos atuadores.

Tolerância a falhas: Quando um robô totalmente atuado tiver um atua-

dor danificado, o controle poderá ser realizado como se o robô fosse um sistema subatuado.

Neste trabalho estudamos a dinâmica passiva porque estamos interessados em desenvolver um sistema tolerante a falhas.

2.1 Modelo Dinâmico

A dinâmica do manipulador é representada pela equação (2.1), q é um vetor $n \times 1$ contendo os ângulos, e τ um vetor $n \times 1$ contendo os torques das juntas

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_a(q, \dot{q}) \quad (2.1)$$

sendo, M a matriz $n \times n$ simétrica, definida positiva, matriz de inércia; C a matriz $n \times n$ referente a força de Coriolis, e aos termos centrífugos; G o vetor $n \times 1$ referente aos torques gravitacionais; e F_a o vetor $n \times 1$ referente aos torques originados pelo atrito. A equação (2.1), assim como as propriedades de suas componentes são apresentadas e discutidas nas referências BERGERMAN (1996); LEWIS et al. (1993); CRAIG (1989).

Por conveniência, define-se, tal como em BERGERMAN (1996), $b(q, \dot{q}) \equiv C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F_a(q, \dot{q})$ e reescreve-se a equação (2.1) como segue

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}). \quad (2.2)$$

Para fazer distinção entre as juntas ativas e as juntas passivas, particione-se a equação (2.2) como segue

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ap} \\ M_{pa} & M_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_p \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo que os subíndices a e p denotam as quantidades relativas às juntas

ativas e passivas, respectivamente.

As juntas passivas podem estar em dois estados: travadas, quando o freio está acionado, e destravadas, caso contrário. A variável n_u indica o número de juntas destravadas no instante de tempo considerado. Para fazer distinção entre as juntas travadas e destravadas, particiona-se a equação (2.3) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_u \\ \tau_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} & M_{al} \\ M_{ua} & M_{uu} & M_{ul} \\ M_{la} & M_{lu} & M_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \\ b_l \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

sendo que os subíndices a , u e l denotam as quantidades relativas às juntas ativas, destravadas e travadas, respectivamente.

Como as juntas passivas destravadas não recebem nenhum torque externo (fornecido por um atuador), tem-se que $\tau_u = 0$. Por outro lado, as juntas travadas não têm velocidade angular, implicando em $\ddot{q}_l = 0$, pois o ângulo da junta q_i é medido em relação ao eixo da junta anterior q_{i-1} . O freio é o responsável pela aplicação de τ_l , e do ponto de vista de controle a terceira linha da equação (2.4) não é relevante, e será removida daqui em diante. Reescrevendo a equação (2.4) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} \\ M_{ua} & M_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e da segunda linha da equação (2.5) obtém-se a equação que fornece a dinâmica imposta pelas juntas passivas

$$M_{ua}\ddot{q}_a + M_{uu}\ddot{q}_u + b_u = 0. \quad (2.6)$$

Arai e Tachi demonstraram, ARAI & TACHI (1991), que em qualquer ins-

tante de tempo, o número máximo de juntas que podem ser controladas simultaneamente é n_a , e isso implica em $n_u \leq n_a$. Para facilitar o controle é conveniente reescrever a equação (2.5) de forma a podermos identificar facilmente quais juntas estão sendo controladas no momento. Define-se o vetor q_c com dimensão $n_a \times 1$ que contém a posição das juntas que estão sendo controladas. O restante das juntas, excluídas as juntas travadas, são agrupadas no vetor q_r . Dessa forma a dinâmica do manipulador passa a ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ac} & M_{ar} \\ M_{uc} & M_{ur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_c \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e a equação (2.6) se torna

$$M_{uc}\ddot{q}_c + M_{ur}\ddot{q}_r + b_u = 0. \quad (2.8)$$

Agora vamos fazer uma descrição das equações dinâmicas do manipulador em termos das juntas que estão sendo controladas em um dado instante. Consideremos a equação (2.7), existem três maneiras possíveis de compor o vetor q_c , cada uma conduzindo a uma estratégia de controle diferente.

Estratégia A

Nesta estratégia, q_c contém apenas juntas ativas e opta-se por manter todas as juntas passivas travadas em suas posições, podendo-se então controlar o manipulador como se ele fosse totalmente atuado.

Neste caso tem-se $\ddot{q}_c = \ddot{q}_a$, e a dimensão de q_r e q_u é zero. A equação dinâmica (2.7) se reduz a

$$\tau_a = M_{aa}\ddot{q}_a + b_a. \quad (2.9)$$

Durante esta estratégia a restrição (2.6) desaparece porque a dimensão de q_u é zero.

Estratégia P

Nesta estratégia, q_c contém apenas juntas passivas e opta-se por manter as demais juntas passivas travadas em suas posições enquanto controla-se q_c . Desta forma garante-se que as juntas passivas que não estão sendo controladas não irão se movimentar introduzindo distúrbios na dinâmica das juntas que estão sendo controladas.

Neste caso $\ddot{q}_c = \ddot{q}_u$, $\ddot{q}_r = \ddot{q}_a$, e a equação dinâmica (2.7) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{au} & M_{aa} \\ M_{uu} & M_{ua} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Durante esta estratégia, a restrição (2.6) fornece a dinâmica imposta pelas juntas passivas.

Fatorando $\ddot{q}_a$ na segunda linha da equação (2.10) e substituindo na primeira linha, obtém-se uma relação de malha aberta entre τ_a e $\ddot{q}_u$:

$$\tau_a = (M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu})\ddot{q}_u + (-M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a). \quad (2.11)$$

Estratégia AP

Nesta estratégia, q_c contém juntas ativas e passivas, e nesta estratégia também opta-se por manter as demais juntas passivas, se existirem, travadas em suas posições

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ac} & M_{ar} \\ M_{uc} & M_{ur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_c \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Tabela 2.1: Estratégias de Controle

Estratégia	$\bar{M}_{ac}$	$\bar{b}_a$
A	M_{aa}	b_a
P	$M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu}$	$-M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a$
AP	$M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc}$	$-M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a$

Neste caso o vetor q_c irá conter todos os elementos de q_u e alguns elementos de q_a , enquanto q_r irá conter o restante dos elementos de q_a que não estão em q_c . Uma relação de malha aberta similar a (2.11) pode ser obtida neste caso:

$$\tau_a = (M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc})\ddot{q}_c + (-M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a). \quad (2.13)$$

Quando utiliza-se esta estratégia, a restrição (2.6) tem a forma da equação (2.8).

Resumo

As três estratégias apresentadas conduzem a relações de malha aberta entre τ_a e $\ddot{q}_c$ da forma

$$\tau_a = \bar{M}_{ac}\ddot{q}_c + \bar{b}_a, \quad (2.14)$$

sendo que as variáveis $\bar{M}_{ac}$ e $\bar{b}_a$ variam de acordo com a estratégia de controle utilizada. A tabela 2.1 sumariza esses resultados.

2.2 Linearização do Sistema

A equação (2.14) em qualquer das três estratégias representa um sistema não linear, e nesta seção estamos interessados em obter uma representação linear na forma de espaço de estados para essa dinâmica.

Para fazer isso utilizamos a linearização em pontos de operação, ARAI & TACHI (1991), que consiste em escolher um ponto de equilíbrio q_0 com

velocidade $\dot{q}_0$ e linearizar o sistema em torno desse ponto. Define-se x como sendo o vetor que contém o erro de posição e o de velocidade,

$$x = \begin{bmatrix} q^d - q \\ \dot{q}^d - \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

sendo k o tempo discreto, z a saída e τ o torque de controle, temos:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + B\tau(k) \\ z(k) &= Cx(k) + D\tau(k). \end{cases} \quad (2.16)$$

As matrizes A e B são calculadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\bar{M}_{ac}^{-1} \frac{\partial \bar{b}_a}{\partial q} & -\bar{M}_{ac}^{-1} \frac{\partial \bar{b}_a}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{M}_{ac}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e as matrizes $\bar{M}$ e $\bar{b}$ são calculadas no ponto de operação $q_0, \dot{q}_0$.

As matrizes C e D são escolhidas como sendo

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

2.3 Controle

Utilizando as matrizes A, B, C e D calculamos um controlador K , e a entrada de controle é

$$\tau = Kx. \quad (2.19)$$

Definição do problema de controle:

Dado um manipulador subatuado, com posições inicial, final e desejada denotadas por $q(t_0)$, $q(T)$ e q^d respectivamente, mover todas as juntas de forma que num instante $T > 0$, $q(T) = q^d$.

Este problema de controle foi primeiramente proposto por Arai e Tachi ARAI & TACHI (1991). Arai e Tachi demonstraram que a solução consiste em mover as juntas em duas fases distintas. Primeiro as juntas passivas são controladas para a sua posição desejada por meio do acoplamento dinâmico existente com as juntas ativas. Quando cada junta passiva encontra a posição desejada, ela é travada. Depois que todas as juntas passivas foram travadas em suas posições desejadas, a segunda fase se inicia, onde as juntas ativas são controladas até a posição desejada. Como nesta segunda fase as juntas passivas estão travadas, as juntas ativas podem ser controladas como se o robô fosse totalmente atuado.

Capítulo 3

O Robô UArmII

A figura 3.1 mostra o robô utilizado, UArmII (Under Actuated Robot Manipulator II), e o ambiente de trabalho. O robô possui três juntas, numeradas de 1 a 3 e um efetuador conforme pode ser visto na figura 3.2. A junta 1 é a base do robô e está fixada em uma mesa horizontal de mármore. Cada uma das três juntas possui um motor DC, um encoder, e um freio pneumático. As juntas 2 e 3, e também o efetuador, têm um sistema pneumático que gera um colchão de ar sobre o qual eles se apóiam. Esse colchão de ar visa eliminar o atrito entre essas partes metálicas e a mesa de mármore. Por cada junta possuir um freio, este robô pode ser configurado para atuar como um robô subatuado. Por exemplo, podemos configurar o robô UArmII para atuar como PAA, onde a junta 1 é passiva e as juntas 2 e 3 são ativas. O robô UArmII pode ser configurado para trabalhar em sete configurações: AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP, e PPA.

Para controlar o robô UArmII foi desenvolvido um ambiente gráfico dentro do Matlab, descrito no apêndice C, onde é possível simular o comportamento do robô e efetivamente controlar o robô.

Figura 3.1: Ambiente de Trabalho

Figura 3.2: O Robô UArmII

3.1 Modelo Dinâmico e Controle

Nesta seção iremos aplicar os resultados obtidos no capítulo 2 ao robô UArmII. Reescrevendo a equação (2.2)

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}).$$

No caso do robô UArmII temos $n = 3$ e a equação (2.2) se torna

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

M_{ij} são calculados por meio de expressões complexas que dependem da posição atual das juntas q . Para calcular b_i utilizam-se também expressões complexas que dependem das posições das juntas q e das velocidades $\dot{q}$. As expressões para calcular M_{ij} e b_i estão listadas no apêndice A.

Existem 7 configurações nas quais o robô UArmII pode estar: AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP, PPA. Vamos levantar as equações que descrevem a dinâmica de cada configuração.

Todas as equações são deduzidas a partir da equação (3.1) que representa o modelo real do robô.

3.1.1 Configuração AAA

Nesta configuração temos:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad q_p = [0]. \quad (3.2)$$

1ª - fase: Estratégia A

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

3.1.2 Configuração AAP

Nesta configuração temos:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad q_p = [q_3]. \quad (3.4)$$

1ª - fase: Estratégia AP

$$q_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_2] \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} & M_{12} \\ M_{12} & M_{23} & M_{22} \\ M_{13} & M_{33} & M_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{12} & M_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} [M_{23}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{13} & M_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} [M_{23}]^{-1} b_3 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) \quad (3.7)$$

ou

$$q_c = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_1] \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} & M_{13} & M_{11} \\ M_{22} & M_{23} & M_{12} \\ M_{23} & M_{33} & M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \end{bmatrix} [M_{13}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \end{bmatrix} [M_{13}]^{-1} b_3 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.10)$$

2ª - fase: Estratégia A

A junta 3 está travada na posição desejada.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

3.1.3 Configuração APA

Nesta configuração temos:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad q_p = [q_2]. \quad (3.12)$$

1ª - fase: Estratégia AP

$$q_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_3] \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{13} & M_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{13} \\ M_{33} \end{bmatrix} [M_{23}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} M_{13} \\ M_{33} \end{bmatrix} [M_{23}]^{-1} b_2 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.15)$$

ou

$$q_c = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_1] \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{13} & M_{12} & M_{11} \\ M_{33} & M_{23} & M_{13} \\ M_{23} & M_{22} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{13} & M_{12} \\ M_{33} & M_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{13} \end{bmatrix} [M_{12}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{23} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{13} \end{bmatrix} [M_{12}]^{-1} b_2 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \right). \quad (3.18)$$

2ª - fase: Estratégia A

A junta 2 está travada na posição desejada.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{13} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

3.1.4 Configuração PAA

Nesta configuração temos:

$$q_a = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad q_p = [q_1]. \quad (3.20)$$

1ª - fase: Estratégia AP

$$q_c = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_3] \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{12} & M_{23} \\ M_{23} & M_{13} & M_{33} \\ M_{12} & M_{11} & M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{22} & M_{12} \\ M_{23} & M_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{23} \\ M_{33} \end{bmatrix} [M_{13}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{12} & M_{11} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} M_{23} \\ M_{33} \end{bmatrix} [M_{13}]^{-1} b_1 + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.23)$$

ou

$$q_c = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad q_r = [q_2] \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{23} & M_{12} & M_{22} \\ M_{33} & M_{13} & M_{23} \\ M_{13} & M_{11} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} M_{23} & M_{12} \\ M_{33} & M_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{22} \\ M_{23} \end{bmatrix} [M_{12}]^{-1} \begin{bmatrix} M_{13} & M_{11} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} +$$

$$\left(- \begin{bmatrix} M_{22} \\ M_{23} \end{bmatrix} [M_{12}]^{-1} b_1 + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right). \quad (3.26)$$

2ª - fase: Estratégia A

A junta 1 está travada na posição desejada.

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

3.1.5 Configuração APP

Nesta configuração temos:

$$q_a = [q_1], \quad q_p = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

1ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_3] \quad q_r = [q_1] \quad (3.29)$$

q_2 está travada

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{13} & M_{11} \\ M_{33} & M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\tau_1 = (M_{13} - M_{11}M_{13}^{-1}M_{33}) \ddot{q}_3 + (-M_{11}M_{13}^{-1}b_3 + b_1). \quad (3.31)$$

2ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_2] \quad q_r = [q_1] \quad (3.32)$$

q_3 está travada na posição desejada

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} & M_{11} \\ M_{22} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\tau_1 = (M_{12} - M_{11}M_{12}^{-1}M_{22})\ddot{q}_2 + (-M_{11}M_{12}^{-1}b_2 + b_1). \quad (3.34)$$

3º - fase: Estratégia A

$$q_c = [q_1], \quad q_r = [0] \quad (3.35)$$

q_2 e q_3 estão travadas na posição desejada

$$\tau_1 = M_{11}\ddot{q}_1 + b_1. \quad (3.36)$$

3.1.6 Configuração PAP

Nesta configuração temos:

$$q_a = [q_2], \quad q_p = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

1ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_3] \quad q_r = [q_2] \quad (3.38)$$

q_1 está travada

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{23} & M_{22} \\ M_{33} & M_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\tau_2 = (M_{23} - M_{22}M_{23}^{-1}M_{33})\ddot{q}_3 + (-M_{22}M_{23}^{-1}b_3 + b_2). \quad (3.40)$$

2ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_1] \quad q_r = [q_2] \quad (3.41)$$

q_3 está travada na posição desejada

$$\begin{bmatrix} \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} & M_{22} \\ M_{11} & M_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\tau_2 = (M_{12} - M_{22}M_{12}^{-1}M_{11})\ddot{q}_1 + (-M_{22}M_{12}^{-1}b_1 + b_2). \quad (3.43)$$

3º - fase: Estratégia A

$$q_c = [q_2] \quad q_r = [0] \quad (3.44)$$

q_1 e q_3 estão travadas na posição desejada

$$\tau_2 = M_{22}\ddot{q}_2 + b_2. \quad (3.45)$$

3.1.7 Configuração PPA

Nesta configuração temos:

$$q_a = [q_3], \quad q_p = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

1ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_2] \quad q_r = [q_3] \quad (3.47)$$

q_1 está travada

$$\begin{bmatrix} \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{23} & M_{33} \\ M_{22} & M_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\tau_3 = (M_{23} - M_{33}M_{23}^{-1}M_{22})\ddot{q}_2 + (-M_{33}M_{23}^{-1}b_2 + b_3). \quad (3.49)$$

2ª - fase: Estratégia P

$$q_c = [q_1] \quad q_r = [q_3] \quad (3.50)$$

q_2 está travada na posição desejada

$$\begin{bmatrix} \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{13} & M_{33} \\ M_{11} & M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\tau_3 = (M_{13} - M_{33}M_{13}^{-1}M_{11})\ddot{q}_1 + (-M_{33}M_{13}^{-1}b_1 + b_3). \quad (3.52)$$

3ª - fase: Estratégia A

$$q_c = [q_3] \quad q_r = [0] \quad (3.53)$$

q_1 e q_2 estão travadas na posição desejada

$$\tau_3 = M_{33}\ddot{q}_3 + b_3. \quad (3.54)$$

Capítulo 4

Sistemas Markovianos

Neste capítulo apresentamos os sistemas Markovianos e mostramos como o Robô UArmII pode ser modelado como um sistema Markoviano.

4.1 Introdução

Sistemas Markovianos são uma classe particular de sistemas que variam no tempo de uma maneira aleatória. Existem sistemas contínuos e discretos, e neste trabalho utilizamos os sistemas discretos.

Vamos exemplificar a característica principal dos sistemas Markovianos discretos. Admitamos que no instante de tempo k um sistema desconhecido se encontra na configuração i , e desejamos saber qual é a probabilidade de no instante $k+1$ o sistema estar na configuração j . Para se fazer essa estimativa seria necessário conhecer todo o histórico do sistema, desde o tempo 0 até o tempo k , e com esses dados calcular a probabilidade desejada. Agora, se fizermos a hipótese de que o sistema desconhecido é um sistema Markoviano o trabalho para calcular a probabilidade fica bastante simplificado, pois a principal característica dos sistemas Markovianos é que a probabilidade do sistema estar na configuração j no instante seguinte depende apenas da con-

Figura 4.1: Conjunto de Configurações

figuração em que o sistema se encontra no instante atual, e isso independe do instante de tempo considerado. Sempre que o sistema estiver na configuração i , a probabilidade dele estar na configuração j no instante seguinte é p_{ij} .

Admitamos que o sistema considerado contém ao todo N configurações agrupadas em um conjunto $\mathcal{S}$. Se $N = 3$ o sistema pode ser representado esquematicamente pela figura 4.1, e podemos agrupar todas as probabilidades p_{ij} para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ em uma matriz P denominada matriz de probabilidades

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

e observe que a soma de cada uma das linhas de P deve ser igual a 1.

O registro dos estados pelos quais o sistema passou origina o que se denomina cadeia de Markov, e é representada pela letra Θ . Um exemplo de cadeia de Markov para o sistema representado na figura 4.1 poderia ser

$$\Theta = [1, 1, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, \dots] \quad (4.2)$$

Essas configurações das quais falamos abstratamente, podem representar qualquer coisa, e neste trabalho representam o modelo do robô UArmII, conforme será abordado na próxima seção. Para saber mais sobre os sistemas Markovianos, a referência HOEL et al. (1987) fornece um excelente material introdutório.

4.2 O Robô UArmII como um Sistema Markoviano

Nesta seção modelamos o robô UArmII como um sistema Markoviano. A dinâmica do manipulador, dada pela equação (2.14), representa um modelo não linear e para podermos utilizar um controle linear discreto linearizamos o modelo em cinco pontos de operação para cada uma das três configurações AAA, AAP1 (AAP 1ª fase) e AAP2 (AAP 2ª fase), utilizando a técnica descrita na seção 2.2, obtendo assim 15 configurações que serão utilizadas para construir o modelo Markoviano.

A tabela 4.1 sumariza esses dados. Por exemplo, o ponto de linearização $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 12$; $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ está associado às configurações 2, 7 e 12. A configuração 2 está ligada à configuração AAA, a configuração 7 à configuração AAP1 e a configuração 12 à configuração AAP2.

Tabela 4.1: Pontos de Linearização

Configurações			Pontos de Operação					
AAA	AAP1	AAP2	θ_1	θ_2	θ_3	$\dot{\theta}_1$	$\dot{\theta}_2$	$\dot{\theta}_3$
1	6	11	6	6	6	0	0	0
2	7	12	12	12	12	0	0	0
3	8	13	18	18	18	0	0	0
4	9	14	24	24	24	0	0	0
5	10	15	30	30	30	0	0	0

A matriz P , matriz de probabilidades adotada para relacionar as configurações, é formada pelas matrizes P_{AA} , P_f , P_0 e P_{AP} , sendo que os subíndices AA , f , 0 e AP representam os conjuntos de probabilidade do sistema estar na configuração puramente ativa, de ocorrer falha, de após ocorrer uma falha ele retornar para a operação normal, puramente ativa (portanto esta matriz é nula) e, de já estar na configuração com falha, respectivamente, conforme é mostrado abaixo

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} P_{AA} & P_f & P_0 \\ \hline P_0 & P_{AP} & 2P_f \\ \hline P_0 & 2P_f & P_{AP} \end{array} \right] \quad (4.3)$$

$$P_{AA} = \begin{bmatrix} 0.89 & 0.10 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.79 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.79 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.79 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0.89 \end{bmatrix} \quad P_f = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{AP} = \begin{bmatrix} 0.78 & 0.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.78 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.78 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.78 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0.78 \end{bmatrix}$$

A dimensão da matriz P é 15×15 e agrupa todas as probabilidades envolvendo as 15 configurações.

Podemos também analisar a equação (4.3) de um outro ponto de vista, interpretando-a como se fosse uma matriz 3×3 . Neste caso teríamos

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c} 0.99 & 0.01 & 0 \\ \hline 0 & 0.98 & 0.02 \\ \hline 0 & 0.02 & 0.98 \end{array} \right]$$

e esta nova P poderia ser interpretada como contendo as probabilidades de transição entre as configurações AAA, AAP1 e AAP2, independente dos pontos de linearização. Neste caso, o elemento P_{12} contém a probabilidade do sistema estando na configuração AAA ir para a configuração AAP1, e o elemento P_{23} contém a probabilidade do sistema estando na configuração AAP1 ir para a configuração AAP2. Esta matriz P auxiliar serve apenas para nos dar um melhor entendimento da dinâmica existente entre as diferentes configurações.

Capítulo 5

Controle H_∞

Neste capítulo apresentamos a formulação do problema de Controle H_∞ para o caso Markoviano. Após isso apresentamos o conceito de estabilidade para sistemas Markovianos e as equações utilizadas no cálculo do controlador H_∞ que estabiliza o sistema Markoviano. A teoria aqui apresentada somente se aplica a sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos Markovianos.

5.1 Formulação do Problema

Estaremos trabalhando com o sistema (5.1) que representa um sistema linear a tempo discreto sujeito a saltos Markovianos

$$\Sigma = \begin{cases} x(k+1) &= A_{\Theta(k)}x(k) + B_{\Theta(k)}u(k) + W_{\Theta(k)}w(k) \\ z(k) &= C_{\Theta(k)}x(k) + D_{\Theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0 \\ \Theta(0) &= \Theta_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

com $A_{\Theta(k)} = (A_1, \dots, A_N) \in \mathbb{H}^n$, $B_{\Theta(k)} = (B_1, \dots, B_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$, $W_{\Theta(k)} = (W_1, \dots, W_N) \in \mathbb{H}^{r,n}$, $w = (w(0), w(1), \dots) \in l_2^r$, $C_{\Theta(k)} = (C_1, \dots, C_N) \in \mathbb{H}^{n,s}$, e $D_{\Theta(k)} = (D_1, \dots, D_N) \in \mathbb{H}^{m,s}$ com $D_i^* D_i > 0$ para $\forall i$. $\Theta(k)$ repre-

senta uma cadeia de Markov assumindo valores no conjunto $\{1, \dots, N\}$.

Denota-se por l_2^r o espaço de Hilbert formado pela sequência de variáveis aleatórias de segunda ordem $w = (w(0), w(1), \dots)$ com $w(k) \in \mathbb{R}^r$ tais que

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|w(k)\|_2^2 < \infty,$$

onde

$$\|w(k)\|_2^2 = E(\|w(k)\|^2).$$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade COSTA & DO VAL (1996), assume-se que $D_i^* D_i = I$ e que $C_i^* D_i = 0$. Θ_0 é um vetor usado para escolher a configuração inicial, cujos elementos são p_j , $j = 1, \dots, N$. Por exemplo, $\Theta_0(3) = p_3$ é a probabilidade do sistema estar na configuração 3 no instante inicial. Vemos que $\sum_{j=1}^N p_j = 1$. É bastante comum escolhermos deterministicamente a configuração inicial desejada, fazendo $p_i = 1$ e $p_j = 0$ para $j \neq i$.

Define-se $\mathcal{Z}(\Theta_0, w) = (z(0), z(1), \dots)$ como sendo o conjunto de todas as saídas do sistema (5.1), e define-se a seguinte norma

$$\|\mathcal{Z}(\Theta_0, \cdot)\| = \sup_{w \in l_2^r} \frac{\|\mathcal{Z}(\Theta_0, w)\|_2}{\|w\|_2}. \quad (5.2)$$

De acordo com o valor da cadeia de Markov $\Theta(k)$ no instante k , o sistema (5.1) é descrito por um conjunto diferente de matrizes. Por exemplo, se $\Theta(k) = 5$, no tempo k , o sistema é descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_5 x(k) + B_5 u(k) + W_5 w(k) \\ z(k) &= C_5 x(k) + D_5 u(k). \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2 Estabilidade para Sistemas Markovianos

Consideremos o sistema (5.1) com $u(k) = F_{\Theta(k)}x(k)$, ou seja, o sistema em malha fechada. Denotemos esse sistema por Σ_F . Para $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N) \in \mathbb{H}^n$, com $\Gamma_j = A_j + B_j F_j$ para $j = 1, \dots, N$, e a matriz de probabilidades de transição $P = [p_{ij}] \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $p_{ij} \geq 0$ para $i, j = 1, \dots, N$, definem-se os operadores

$$\mathcal{E}(\cdot) = (\mathcal{E}_1(\cdot), \dots, \mathcal{E}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}(\cdot) = (\mathcal{L}_1(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \quad (5.5)$$

$$\mathcal{T}(\cdot) = (\mathcal{T}_1(\cdot), \dots, \mathcal{T}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \quad (5.6)$$

tais que, para $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^n$ e $i = 1, \dots, N$

$$\mathcal{E}_i(V) = \sum_{j=1}^N p_{ij} V_j \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_i(V) = \Gamma_i^* \mathcal{E}_i(V) \Gamma_i \quad (5.8)$$

$$\mathcal{T}_j(V) = \sum_{i=1}^N p_{ij} \Gamma_i V_i \Gamma_i^* \quad (5.9)$$

para $j = 1, \dots, N$.

A seguir define-se o conceito de estabilidade utilizado neste trabalho COSTA & FRAGOSO (1993).

O sistema dado por (5.1) é dito estável na média quadrática se $\|x(k)\|_2^2 = E(\|x(k)\|^2) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para quaisquer condição inicial x_0 e distribuição inicial para Θ_0 .

Pode-se mostrar que a estabilidade de cada modelo (isto é, o máximo autovvalor de Γ_i em módulo para $i = 1, \dots, N$ ser menor que 1) não é uma condição necessária nem suficiente para a estabilidade na média quadrática JI & CHIZECK (1990b). Diz-se que $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ estabiliza (A, B)

no sentido da média quadrática se, ao fazer $u(k) = F_{\Theta(k)}x(k)$ no sistema (5.1), $\|x(k)\|_2^2 = E(\|x(k)\|^2) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ para quaisquer x_0 e Θ_0 .

Se existirem $V_1, Z \in \mathbb{G}^{n+}$, $V_2 \in \mathbb{G}^{m,n}$, $V_3 \in \mathbb{G}^{m+}$ tais que

$$\sum_{i=1}^N p_{ij}(A_i V_{i1} A_i^* + B_i V_{i2}^* A_i^* + A_i V_{i2} B_i^* + B_i V_{i3} B_i^*) - V_{j1} < 0, \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} V_{j1} & V_{j2} \\ V_{j2}^* & V_{j3} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.11)$$

$$V_{j1} > 0 \quad (5.12)$$

para $j = 1, \dots, N$. Caso exista solução para o problema de programação convexa dado pelas equações (5.10), (5.11) e (5.12), o sistema será estabilizável, caso contrário o sistema será não-estabilizável.

De forma semelhante, se existirem $V_1, Z \in \mathbb{G}^{n+}$, $V_2 \in \mathbb{G}^{s,n}$, $V_3 \in \mathbb{G}^{s+}$ tais que

$$A_i^* Z_i A_i + C_i^* V_{i2}^* A_i + A_i^* V_{i2} C_i + C_i^* V_{i3} C_i - V_{i1} < 0, \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & V_{i2} \\ V_{i2}^* & V_{i3} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.14)$$

$$Z_i \geq \mathcal{E}_i(V_1) \quad (5.15)$$

$$V_{i1} > 0 \quad (5.16)$$

$$Z_i > 0 \quad (5.17)$$

para $i = 1, \dots, N$. Caso exista solução, o sistema será detectável. Caso contrário, será não-detectável.

5.3 Cálculo do Controlador

Consideremos novamente o sistema (5.1). Desejamos obter um conjunto de ganhos $F_{\Theta(k)}$ tais que quando fizermos $u(k) = F_{\Theta(k)}x(k)$ (sistema em malha fechada), o sistema Markoviano seja estável na média quadrática.

Assume-se que o estado do sistema em todas as suas componentes é conhecido, bem como o valor da cadeia de Markov $\Theta(k)$ no instante de tempo k .

Seja $Q_i = C_i^* C_i$, $i = 1, \dots, N$, e suponha-se que (C, A) seja detectável na média quadrática e seja $\nu > 0$ fixado. Então existe $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ que estabiliza (A, B) na média quadrática e tal que $\|\mathcal{Z}_F(\Theta_0, \cdot)\| < \nu$ para todo Θ_0 se e somente se existir $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\text{i)} \quad I - \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad X_i = & Q_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i - A_i^* \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} W_i \end{bmatrix} \\ & \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} W_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) \begin{bmatrix} B_i & \frac{1}{\nu} W_i \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ & \begin{bmatrix} B_i^* \\ \frac{1}{\nu} W_i^* \end{bmatrix} \mathcal{E}_i(X) A_i = Q_i + F_i^* F_i - G_i^* G_i + \\ & \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} W_i \right)^* \mathcal{E}_i(X) \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} W_i \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

para $i = 1, \dots, N$, sendo que

$$\begin{aligned} F_i = & - \left(I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + \frac{1}{\nu^2} B_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i \left(I - \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \right. \\ & \left. W_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i \right)^{-1} B_i^* \left(I - \frac{1}{\nu^2} \mathcal{E}_i(X) W_i \left(I - \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} W_i^* \right) \\ & \mathcal{E}_i(X) A_i = - \left(I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i \right)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) \left(A_i + \frac{1}{\nu} W_i^* G_i \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
G_i = & \left(I - \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i + \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \\
& \left(\frac{1}{\nu^2} W_i^* (I - \mathcal{E}_i(X) B_i (I + B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i)^{-1} B_i^*) \mathcal{E}_i(X) A_i \right) = \\
& \left(I - \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) W_i \right)^{-1} \frac{1}{\nu^2} W_i^* \mathcal{E}_i(X) (A_i + B_i F_i). \tag{5.21}
\end{aligned}$$

iii) $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$, onde $\mathcal{L}(\cdot) = (\mathcal{L}_1(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N(\cdot))$ é definido como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i(\cdot) = & \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} W_i G_i \right)^* \mathcal{E}_i(\cdot) \left(A_i + B_i F_i + \frac{1}{\nu} W_i G_i \right) \tag{5.22} \\
& \text{para } i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

As equações (5.18) a (5.22) fornecem condições necessárias e suficientes COSTA & DO VAL (1996) para a existência de solução para o problema de controle H_∞ .

A condição de que (C, A) seja detectável na média quadrática, juntamente com a estabilizabilidade de (A, B) , é usada apenas para garantir a existência de uma solução estabilizante no sentido da média quadrática para as equações algébricas de Riccati acopladas dadas por

$$X_i = Q_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i - A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i (B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + I)^{-1} B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i \tag{5.23}$$

para $i = 1, \dots, N$. Esse conjunto de equações é utilizado como ponto de partida para a obtenção dos controladores de forma iterativa.

Capítulo 6

Controle H_2

Neste capítulo apresentamos a formulação do problema de Controle H_2 para o caso Markoviano, e apresentamos as equações para o cálculo de um controlador que estabiliza o sistema no sentido da média quadrática. Esse conceito de estabilidade é o mesmo apresentado na seção 5.2. Relembramos que a teoria aqui apresentada somente se aplica a sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos Markovianos.

6.1 Formulação do Problema

Nesta técnica de controle busca-se minimizar o seguinte funcional:

$$J(x, \Theta, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} E \left\{ \begin{bmatrix} x^*(k) & u^*(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\Theta(k)} & L_{\Theta(k)} \\ L_{\Theta(k)}^* & R_{\Theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \right\} \quad (6.1)$$

sujeito a

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_{\Theta(k)}x(k) + B_{\Theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0 \\ \Theta(0) &= \Theta_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

com $A_{\Theta(k)} = (A_1, \dots, A_N) \in \mathbb{H}^n$, $B_{\Theta(k)} = (B_1, \dots, B_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$, $L_{\Theta(k)} = (L_1, \dots, L_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$, $Q_{\Theta(k)} = (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbb{H}^{n*}$, e $R_{\Theta(k)} = (R_1, \dots, R_N) \in \mathbb{H}^{m*}$. $\Theta(k)$ representa uma cadeia de Markov assumindo valores no conjunto $\{1, \dots, N\}$. Com relação a Q e R , apenas assume-se que elas sejam hermitianas.

6.2 Cálculo do Controlador

Consideremos o sistema (6.2). Pode-se mostrar COSTA & MARQUES (2000) que a lei de controle que minimiza o funcional (6.1) é obtida a partir das Equações Algébricas de Riccati Acopladas (EARA) abaixo, para $i \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} -X_i + A_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + Q_i - \left(A_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + L_i \right) \\ \left(B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i \right)^{-1} \left(B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^* \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

$X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{H}^{n*}$ será denominada uma solução hermitiana das EARA se $B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i$ for invertível e X satisfizer às equações (6.3).

Para

$$F_i = - \left(B_i^* \mathcal{E}_i(X) B_i + R_i \right)^{-1} \left(B_i^* \mathcal{E}_i(X) A_i + L_i^* \right), \quad (6.4)$$

a lei de controle que minimiza o funcional (6.1) é dada por

$$u(k) = F_{\Theta(k)} x(k). \quad (6.5)$$

Capítulo 7

Controle H_2/H_∞

Neste capítulo se considera o problema de controle misto H_2/H_∞ para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos Markovianos. O problema aqui consiste em se obter um controlador estabilizante no sentido da média quadrática tal que um limite superior para a norma H_2 do sistema seja minimizado, porém garantindo-se que a norma H_∞ do sistema seja menor que um valor pré-especificado ν .

Nesta abordagem pode-se assumir que a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov P não é exatamente conhecida. Tal condição é substituída pela hipótese mais fraca de que ela apenas pertença a um conjunto convexo apropriado. Neste caso, o controlador estabilizante é definido como aquele que estabiliza o sistema Markoviano para todas as matrizes de probabilidades de transição dentro do conjunto. Este conceito de matriz de probabilidades de transição não conhecida foi inicialmente introduzido em RAMI & EL GHAOUI (1994) para sistemas lineares a tempo contínuo sujeitos a saltos Markovianos.

7.1 Formulação do Problema

Consideremos o seguinte sistema linear discreto sujeito a saltos Markovianos:

$$\Sigma = \begin{cases} x(k+1) &= A_{\Theta(k)}x(k) + B_{\Theta(k)}u(k) + Ww(k) \\ z(k) &= C_{\Theta(k)}x(k) + D_{\Theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0 \\ \Theta(0) &= \Theta_0. \end{cases} \quad (7.1)$$

O sistema acima difere do sistema (5.1) pelo fato de agora $W \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$ ser uma matriz constante para todas as configurações. Serão feitas as seguintes hipóteses:

$$D_i^* D_i > 0 \quad (7.2)$$

$$C_i^* D_i = 0. \quad (7.3)$$

Quando fecha-se a malha do sistema, fazendo-se $u(k) = F_{\Theta(k)}x(k)$ no sistema (7.1), com $F = (F_1, \dots, F_N)$, obtém-se o sistema em malha fechada Σ_F .

O problema de controle H_2/H_∞ que se deseja resolver é o seguinte: Dado $\nu > 0$, encontrar F que estabilize robustamente (A, B) e que minimize ζ sujeito a $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \nu$.

Utiliza-se o seguinte resultado para resolver o problema na próxima seção: Suponha que (C, A) seja detectável na média quadrática e que $\nu > 0$ seja um número real fixado. Se existirem $X = (X_1, \dots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ tais que,

$$\begin{aligned} & -X_i + (A_i + B_i F_i)^* \mathcal{E}_i(X) (A_i + B_i F_i) + \\ & (C_i + D_i F_i)^* (C_i + D_i F_i) + \frac{1}{\nu^2} X_i W W^* X_i \leq 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

para $i \in \mathcal{S}$, então $F = (F_1, \dots, F_N)$ estabiliza (A, B) na média quadrática COSTA & MARQUES (1998), e

$$\|\Sigma_F\|_\infty^2 \leq \nu^2(1 - \delta) \leq \nu^2 \quad (7.5)$$

$$\|\Sigma_F\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^N \text{tr}\{W^* X_i W\} \quad (7.6)$$

sendo que,

$$\delta \in \left(0, \frac{1}{\nu^2} \sum_{i=1}^N \text{tr}\{W^* X_i W\}\right). \quad (7.7)$$

7.2 Cálculo do Controlador

Utiliza-se a seguinte aproximação para resolver o problema de controle misto: Para $\nu > 0$ fixado, encontrar $X = (X_1, \dots, X_N) \geq 0$ e $F = (F_1, \dots, F_N)$ tais que

$$\text{tr} \left\{ \sum_{i=1}^N W^* X_i W \right\} \quad (7.8)$$

seja minimizado e esteja sujeito a restrição (7.4).

Aqui se assumirá que a matriz P não é exatamente conhecida, mas que pertence a um conjunto convexo $\mathbb{P}$ definido como

$$\mathbb{P} = \left\{ P; P = \sum_{t=1}^q \alpha_t P^t, \text{ com } \alpha_t \geq 0, \sum_{t=1}^q \alpha_t = 1 \right\}, \quad (7.9)$$

sendo $P^t = [p_{ij}^t]$, $t = 1, \dots, q$, matrizes de probabilidades de transição conhecidas. Na sequência se mostrará que uma aproximação para esse problema pode ser obtida através de um problema de otimização convexo sujeito a DML's.

Seja, $\Gamma_i^t = [\sqrt{p_{i1}^t} I \cdots \sqrt{p_{iN}^t} I] \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^{Nn}, \mathbb{C}^n)$ para $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, q$. Define-se o seguinte problema de otimização:

Seja $\mu = \nu^2$, obtenha $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{G}^n, Q = (Q_1, \dots, Q_N) \in \mathbb{G}^n$,

$L = (L_1, \dots, L_N) \in \mathbb{G}^n$, e $Y = (Y_1, \dots, Y_N) \in \mathbb{G}^{n,m}$ tais que

$$\xi = \min \operatorname{tr} \left\{ \sum_{i=1}^N W^* X_i W \right\}, \quad (7.10)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_i A_i^* + Y_i^* B_i^* & Q_i C_i^* & Y_i^* D_i^* & W \\ A_i Q_i + B_i Y_i & L_i & 0 & 0 & 0 \\ C_i Q_i & 0 & I_n & 0 & 0 \\ D_i Y_i & 0 & 0 & I_n & 0 \\ W^* & 0 & 0 & 0 & \mu I_r \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.11)$$

$$\begin{bmatrix} L_i & L_i \Gamma_i^t \\ \Gamma_i^{t*} L_i & \operatorname{diag}\{Q\} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.13)$$

$$X_i = X_i^* > 0 \quad (7.14)$$

$$Q_i = Q_i^* > 0 \quad (7.15)$$

$$L_i = L_i^* > 0 \quad (7.16)$$

sendo $\operatorname{diag}\{Q\} \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{Nn})$ a matriz formada por $Q_1, \dots, Q_N$ na diagonal e zero nas posições restantes.

Admite-se que o problema acima tenha uma solução X, Q, L e Y , e $F = (F_1, \dots, F_N)$ seja dado por $F_i = Y_i Q_i^{-1}$, e $\xi = \sum_{i=1}^N \operatorname{tr}\{W^* X_i W\}$. Então F estabiliza robustamente (A, B) e $\|\Sigma_F\|_2 \leq \zeta$ e $\|\Sigma_F\|_\infty \leq \nu$ para todo $P \in \mathbb{P}$ COSTA & MARQUES (1998). Os controladores obtidos desta forma podem ser soluções conservadoras para o problema de controle misto H_2/H_∞ .

Capítulo 8

Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos da simulação do sistema com o uso dos controladores Markovianos apresentados. Na seção 8.1 apresentamos uma simulação realizada utilizando uma técnica convencional de controle, na seção 8.2 apresentamos os resultados da simulação com os controladores H_∞ descritos no capítulo 5, na seção 8.3 apresentamos os resultados da simulação com os controladores H_2 descritos no capítulo 6, e finalizamos o capítulo com a seção 8.4, que mostra os resultados obtidos da simulação realizada com os controladores H_2/H_∞ descritos no capítulo 7.

Os testes realizados estão divididos em três etapas: na primeira verificamos o desempenho do sistema quando não ocorrem falhas, na segunda verificamos a influência do set-point quando ocorrem falhas, e na terceira verificamos o comportamento do sistema quando diferentes tipos de falhas ocorrem. Em todos os testes mantemos a matriz P constante (4.3), e variamos a semente do gerador de números aleatórios *seed*, obtendo assim diferentes cadeias de Markov. Para cada *seed* temos uma única cadeia de Markov, de forma que pudemos comparar as diferentes técnicas utilizando a mesma cadeia de Markov. Todos os resultados foram obtidos com o simulador descrito no apêndice C.

As matrizes A, B, C, D e W , que descrevem o sistema Markoviano, utilizadas para realizar o cálculo dos controladores, estão listadas no apêndice E, e os ganhos obtidos estão listados no apêndice F.

8.1 Controle CTq

Incluímos esta seção para mostrar que a técnica convencional de controle não pode ser estendida para o caso Markoviano sem se fazer primeiro as correções mencionadas neste trabalho.

Utilizamos a técnica conhecida como torque calculado (CTq) para projetar controladores para as configurações AAA e AAP. Chamaremos de 1 a configuração AAA. A configuração AAP possui duas etapas de controle: chamaremos de configuração 2 a etapa onde a junta passiva está sendo controlada

$$q_c = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

e chamaremos de configuração 3 a etapa onde as juntas ativas 1 e 2 estão sendo controladas e a terceira junta está travada. Fazendo dessa maneira obtemos um total de três estados, e usaremos duas matrizes de probabilidade para mostrar o comportamento desta técnica de controle quando aplicada a um sistema Markoviano.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.99 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

Figura 8.1: CTq matriz P_1

Para ambas as matrizes, utilizamos o set-point

$$q^d = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

A figura 8.1 mostra o comportamento do sistema quando é usada a matriz P_1 , pode-se ver que o set-point foi alcançado. Isso ocorre porque a matriz de probabilidades P_1 gera uma cadeia de Markov que permanece um tempo elevado em cada configuração, permitindo assim ao sistema recuperar-se do salto Markoviano. É possível dividir a realização em etapas e analisá-las:

0 a 0.42s: O sistema permanece na configuração 1; as três juntas se movem em direção ao set-point.

0.44s a 5.50s: O sistema permanece na configuração 2; as juntas 2 e 3 se movem em direção ao set-point, e a junta 1 se desvia da sua trajetória para posicionar a junta 3.

Figura 8.2: CTq matriz P_2

5.52s a 7.78s: O sistema permanece na configuração 3; a junta 3 fica travada em sua posição e as juntas 1 e 2 se movem em direção ao set-point.

7.80s a 15.84s: O sistema permanece na configuração 2; a junta 3 é destravada e se move em direção ao set-point juntamente com a junta 2. A junta 1 se desvia de seu set-point, ultrapassando-o.

15.86s a 20.44s: O sistema permanece na configuração 3; a junta 3 é travada em sua posição final e as juntas 1 e 2 são controladas até os respectivos set-points, finalizando o controle.

A figura 8.2 mostra o comportamento do sistema quando é usada a matriz P_2 ; este caso evidencia a deficiência do controle convencional: quando as mudanças de configuração são acentuadas, o controlador se torna instável. Esse resultado já é conhecido JI & CHIZECK (1990b).

8.2 Controle H_∞

Nesta seção apresentamos os resultados da simulação com o controle H_∞ , calculado conforme mostrado no capítulo 5.

8.2.1 Controle sem Falhas

Nesta primeira etapa utilizamos $seed = 209520$. A cadeia de Markov gerada por essa semente faz o sistema operar por longo tempo sem a ocorrência de falhas, e então variamos o set-point para verificar se o controlador estabiliza o sistema quando não ocorrem falhas.

As figuras 8.3, 8.4, e 8.5 apresentam os resultados para o caso H_∞ sem falhas.

Figura 8.3: H_∞ set-point 20,20,20

Nas figuras 8.3 e 8.4, onde o set-point é o mesmo para as três juntas, vemos que a terceira junta atingiu o set-point antes das demais. Na figura 8.5, a junta dois se desviou da referência, se movendo em sentido contrário até o tempo 5s, depois disso retornando ao sentido correto e alcançando o set-point juntamente com as demais.

Figura 8.4: H_∞ set-point 30,30,30 Figura 8.5: H_∞ set-point 15,30,45

8.2.2 Controle com Falhas

Nesta segunda etapa, utilizamos $seed = 212038$. A cadeia de Markov gerada por essa semente origina o comportamento que chamaremos falha 2. Os testes aqui apresentados verificam a influência do set-point quando ocorre a falha 2.

As figuras 8.6, 8.7, e 8.8 apresentam os resultados para o caso H_∞ sujeito à falha 2.

Figura 8.6: H_∞ set-point 20,20,20 - falha 2

Nas figuras 8.6 e 8.7 podemos ver que o set-point foi alcançado. A figura 8.8 nos mostra um comportamento interessante, cada vez que o sistema assume alguma das configurações 6 a 10, a terceira junta passa a seguir a trajetória desejada, mas devido ao sistema permanecer pouco tempo nessas configurações, a terceira junta não conseguiu atingir o set-point, mas se dêssemos mais tempo para o sistema, ela também alcançaria o set-point.

Figura 8.7: H_∞ set-point 30,30,30 - falha 2

Figura 8.8: H_∞ set-point 15,30,45 - falha 2

Agora, na terceira etapa, vamos manter o set-point e variar a cadeia de Markov, produzindo as falhas 3, 4 e 7, para as sementes 212674, 208487 e 209219, respectivamente.

Figura 8.9: H_∞ set-point 20,20,20 - falha 3

Em todas as situações, figuras 8.9, 8.10, e 8.11 podemos observar que o set-point foi alcançado, mostrando que o sistema é estável mesmo ao variarmos a cadeia de Markov.

Figura 8.10: H_{∞} set-point 20,20,20 - falha 4

Figura 8.11: H_{∞} set-point 20,20,20 - falha 7

8.3 Controle H_2

Nesta seção apresentamos os resultados da simulação com o controle H_2 , calculado conforme mostrado no capítulo 6.

Nesta técnica de controle, é necessário especificar as matrizes Q , L , e R do funcional (6.1), e usaremos as seguintes matrizes para todas as configurações

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

8.3.1 Controle sem Falhas

Nesta primeira etapa, utilizamos $seed = 209520$. A cadeia de Markov gerada por essa semente faz o sistema operar por longo tempo sem a ocorrência de falhas, e então variamos o set-point para verificar se o controlador estabiliza o sistema quando não ocorrem falhas.

As figuras 8.12, 8.13, e 8.14 apresentam os resultados para o caso H_2 sem falhas.

Figura 8.12: H_2 set-point 20,20,20 Figura 8.13: H_2 set-point 30,30,30

Figura 8.14: H_2 set-point 15,30,45

Nas figuras 8.12 e 8.13 onde o set-point é o mesmo para as três juntas, vemos que as três juntas atingem o set-point ao mesmo tempo, mostrando um desempenho excelente.

Na figura 8.14 a junta dois não apresentou o mesmo comportamento do caso H_∞ , mostrando um melhor desempenho.

8.3.2 Controle com Falhas

Nesta segunda etapa, utilizamos $seed = 212038$. A cadeia de Markov gerada por essa semente origina o comportamento que chamaremos falha 2. Os testes aqui apresentados verificam a influência do set-point quando ocorre a falha 2.

As figuras 8.15, 8.16, e 8.17 apresentam os resultados para o caso H_2 sujeito à falha 2.

Figura 8.15: H_2 set-point 20,20,20 - falha 2

Nas figuras 8.15, 8.16 e 8.17, podemos ver que o set-point foi alcançado, demonstrando a eficiência do controlador.

Figura 8.16: H_2 set-point 30,30,30 - falha 2

Figura 8.17: H_2 set-point 15,30,45 - falha 2

Agora, na terceira etapa, vamos manter o set-point e variar a cadeia de Markov, produzindo as falhas 3, 4 e 7, para as sementes 212674, 208487 e 209219, respectivamente.

Figura 8.18: H_2 set-point 20,20,20 - falha 3

As figuras 8.18, 8.19, e 8.20 mostram que o sistema é estável mesmo ao variarmos a cadeia de Markov.

Figura 8.19: H_2 set-point 20,20,20 - falha 4 Figura 8.20: H_2 set-point 20,20,20 - falha 7

8.4 Controle H_2/H_∞

Nesta seção apresentamos os resultados da simulação com o controle H_2/H_∞ , calculado conforme mostrado no capítulo 7. As matrizes que descrevem o sistema (7.1) estão listadas no apêndice E, mas como neste caso W é uma matriz constante para todas as configurações, escolhemos $W = W_1$.

8.4.1 Controle sem Falhas

Nesta primeira etapa utilizamos $seed = 209520$. A cadeia de Markov gerada por essa semente faz o sistema operar por longo tempo sem a ocorrência de falhas, então variamos o set-point para verificar se o controlador estabiliza o sistema quando não ocorrem falhas.

As figuras 8.21, 8.22, e 8.23 apresentam os resultados para o caso H_2/H_∞ sem falhas.

Figura 8.21: H_2/H_∞ set-point 20,20,20

Nas figuras 8.21 e 8.22 onde o set-point é o mesmo para as três juntas, vemos que a terceira junta atingiu o set-point antes das demais.

Figura 8.22: H_2/H_∞ set-point 30,30,30 Figura 8.23: H_2/H_∞ set-point 15,30,45

Na figura 8.23, a junta dois se desviou da referência se movendo em sentido contrário até o tempo 5s, depois disso retornando ao sentido correto e alcançando o set-point juntamente com as demais.

8.4.2 Controle com Falhas

Nesta segunda etapa, utilizamos $seed = 212038$. A cadeia de Markov gerada por essa semente origina o comportamento que chamaremos falha 2. Os testes aqui apresentados verificam a influência do set-point quando ocorre a falha 2.

As figuras 8.24, 8.25, e 8.26 apresentam os resultados para o caso H_2/H_∞ sujeito à falha 2.

Figura 8.24: H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 2

Nas figuras 8.24, 8.25 e 8.26 podemos ver que o set-point foi alcançado.

Figura 8.25: H_2/H_∞ set-point 30,30,30 - falha 2

Figura 8.26: H_2/H_∞ set-point 15,30,45 - falha 2

Agora, na terceira etapa, vamos manter o set-point e variar a cadeia de Markov, produzindo as falhas 3, 4 e 7, para as sementes 212674, 208487 e 209219, respectivamente.

Figura 8.27: H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 3

Em todas as situações, figuras 8.27, 8.28, e 8.29, podemos observar que o set-point foi alcançado, mostrando que o sistema é estável mesmo ao variarmos a cadeia de Markov.

Figura 8.28: H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 4

Figura 8.29: H_2/H_∞ set-point 20,20,20 - falha 7

Capítulo 9

Conclusões

Neste trabalho fizemos um estudo aplicando o controle Markoviano a um robô manipulador, buscando desenvolver um sistema tolerante a falhas.

O primeiro passo foi modelar o robô de forma a obtermos um sistema Markoviano. Para fazer isso estudamos a dinâmica passiva no capítulo 2, a linearização em pontos de operação na seção 2.2, e os sistemas Markovianos no capítulo 4. O sistema obtido foi descrito na seção 4.2.

Depois de obtido o sistema Markoviano, passamos ao cálculo e teste de diversas técnicas de controle: H_∞ , H_2 , e H_2/H_∞ . O controlador H_2 foi o que apresentou o melhor desempenho para todos os testes realizados, tanto na operação normal sem falhas como na ocorrência de falhas sucessivas. Os controladores H_∞ e H_2/H_∞ apresentam um desempenho semelhante, mas em algumas situações o controlador H_2/H_∞ alcança o set-point mais rapidamente.

O controle H_2 minimiza o custo quadrático (6.1)

$$J(x, \Theta, u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} E \left\{ \begin{bmatrix} x^*(k) & u^*(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\Theta(k)} & L_{\Theta(k)} \\ L_{\Theta(k)}^* & R_{\Theta(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \right\}$$

e quando utilizamos as matrizes (8.2) obtivemos um controlador que minimiza o erro de posição, velocidade, e o torque aplicado pelo controlador:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} E \left\{ \sum_{i=1}^3 \left((q_i^d - q_i)^2 + (\dot{q}_i^d - \dot{q}_i)^2 + \tau_i^2 \right) \right\}.$$

Para todos os casos, figuras 8.12 a 8.20, o controlador manteve a estabilidade do sistema.

O controle H_{∞} minimiza a norma (5.2):

$$\|Z(\Theta_0, \cdot)\| = \sup_{w \in l_2^r} \frac{\|Z(\Theta_0, w)\|_2}{\|w\|_2},$$

garantindo que a interferência do distúrbio na saída é minimizada. Este controlador mantém a estabilidade do sistema, conforme pôde ser observado nas figuras 8.3 a 8.11.

O controle H_2/H_{∞} concilia os objetivos dos controles H_2 e H_{∞} , e mantém a estabilidade do sistema, conforme pôde ser observado nas figuras 8.21 a 8.29.

Modelo Dinâmico do UArmII

O subíndice i indica valores associados à junta $i \in \{1, 2, 3\}$. l_i é o comprimento do link, l_{ci} é a posição do centro de massa, θ_i é o ângulo da junta, m_i é massa do link, e I_i é o momento de inércia em relação ao centro de massa. Um parâmetro adicional é a gravidade g , que neste caso é zero.

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + \\
&\quad m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) \\
M_{12} &= I_2 + I_3 + m_2 (l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + \\
&\quad m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) \\
M_{13} &= I_3 + m_3 (l_{c3}^2 + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) \\
M_{22} &= I_2 + I_3 + m_2 (l_{c2}^2) + m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) \\
M_{23} &= I_3 + m_3 (l_{c3}^2 + l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) \\
M_{33} &= I_3 + m_3 (l_{c3}^2) \\
M_{21} &= M_{12} \\
M_{31} &= M_{13} \\
M_{32} &= M_{23} \\
b_1 &= (-m_2 l_1 l_{c2} \sin(\theta_2) + m_3 (-l_1 l_2 \sin(\theta_2) - l_1 l_{c3} \sin(\theta_2 + \theta_3))) \\
&\quad (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3 (-l_1 l_{c3} \sin(\theta_2 + \theta_3) - l_2 l_{c3} \sin(\theta_3)) \\
&\quad (\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) + m_1 g l_{c1} \cos(\theta_1) + \\
&\quad m_2 g (l_1 \cos(\theta_1) + l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_3 g (l_1 \cos(\theta_1) + \\
&\quad l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \\
b_2 &= (m_2 l_1 l_{c2} \sin(\theta_2) + m_3 (l_1 l_2 \sin(\theta_2) + l_1 l_{c3} \sin(\theta_2 + \theta_3))) \dot{\theta}_1^2 - \\
&\quad m_3 l_2 l_{c3} \sin(\theta_3) (\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) + \\
&\quad m_2 g (l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_3 g (l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \\
b_3 &= m_3 (l_1 l_{c3} \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3} \sin(\theta_3)) \dot{\theta}_1^2 + \\
&\quad m_3 l_2 l_{c3} \sin(\theta_3) (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3 g (l_{c3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3))
\end{aligned}$$

Tabela A.1: Parâmetros do UArmII

kg	kg · m ²	m	m
$m_1 = 0.730$	$I_1 = 0.0075$	$l_{c1} = 0.096$	$l_1 = 0.203$
$m_2 = 0.730$	$I_2 = 0.0075$	$l_{c2} = 0.096$	$l_2 = 0.203$
$m_3 = 0.625$	$I_3 = 0.0060$	$l_{c3} = 0.077$	$l_3 = 0.203$

Apêndice B

O Toolbox DTMJLS

Este toolbox foi escrito por Ricardo P. Marques como parte integrante da tese de doutoramento “Algoritmos de Controle para Sistemas Sujeitos a Saltos Markovianos” MARQUES (1997) apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

O toolbox DTMJLS (Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems) contém uma série de rotinas para síntese e análise de controladores para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos Markovianos, e foi criado para ser utilizado em conjunto com o programa Matlab 4.x, ou superior, e com o toolbox LMI Control Toolbox 1.0, ou superior.

Este toolbox faz uso de vetores de matrizes, denominadas N-uplas. Para obter esses vetores de matrizes utilizamos as funções `stack` e `unstack`. Por exemplo, para se criar uma N-upla contendo duas matrizes A_1 e A_2 basta digitar a seguinte sequência de comandos:

```
A1 = [1 2; 3 4];  
A2 = [5 6; 7 8];  
Avec = stack(A1,A2);
```

por convenção as variáveis vetoriais têm sufixo `vec`. Os comandos `stack` e

unstack trabalham também com matrizes de dimensões diferentes.

Para descompactar a variável *Avec* utilizamos a função *unstack*, e podemos fazer isso de duas maneiras diferentes:

```
A1 = unstack(Avec,1);  
A2 = unstack(Avec,2);      ou      [A1,A2] = unstack(Avec);
```

as funções deste toolbox recebem como entrada variáveis vetoriais e após os cálculos retornam variáveis vetoriais, e por isso é usual utilizar o comando *stack* antes de utilizar as rotinas deste toolbox e após os cálculos utilizamos o comando *unstack* para extrair os resultados.

A tabela B.1 lista todas as rotinas que fazem parte do toolbox DTMJLS. Neste trabalho utilizamos o Matlab 5.2 e tivemos que fazer algumas modificações nas rotinas originais, e a seguir descrevemos as mudanças.

mkvchain.m; l2sim.m; mcl2sim.m A instrução *s == []* é obsoleta nesta versão do Matlab e foi substituída por *isempty(s)*.

mkvlqr.m A instrução *v == []* foi substituída por *isempty(v)*, e a instrução *options == []* foi substituída por *isempty(options)*.

hinfopt.m O toolbox robust control contém uma função chamada *hinfopt* e por isso mudamos o nome da função *hinfopt.m* para *hinfoptM.m* no toolbox DTMJLS. Consequentemente alteramos também a função *solvhinf.m*.

hinfsopt.m A instrução *opt2 == []* foi substituída por *isempty(opt2)*.

Tabela B.1: Rotinas do Toolbox DTMJLS

	Projeto e Análise de Controladores
hinfoptM	Projeto H_∞ Ótimo (abordagem convexa, problema aproximado)
hinfopt	Projeto H_∞ sub-ótimo (algoritmo recursivo)
mixopt	Projeto misto H_2/H_∞ (abordagem convexa, problema aproximado)
mkvlqr	Regulador linear-quadrático
solvhinf	Projeto H_∞ Ótimo (algoritmo misto, cond. inicial dada por hinfopt)
solvhin2	Projeto H_∞ Ótimo (algoritmo misto, condição inicial fornecida)
specrad	$r_\sigma(\mathcal{L})$ Raio espectral do operador
	Simulação de Sistemas
l2sim	Simulação de sistemas sujeitos a perturbações l_2
lqrsim	Simulação de sistemas com regulador LQ
mcl2sim	Simulações de Montecarlo com l2sim
mclqrsim	Simulações de Montecarlo com lqrsim
	Utilidades
cloopvec	Fecha a malha de sistemas
eop	Operador valor esperado
maxcare	Solução máxima para as equações algébricas de Riccati acopladas
mkvchain	Realização de cadeias de Markov
stack	Compactação de N-uplas
unstack	Descompactação de N-uplas

Apêndice C

Ambiente Gráfico de Simulação e Controle

Neste apêndice descrevemos o ambiente gráfico de simulação e controle utilizado neste trabalho. Inicialmente foi desenvolvido o ambiente *Underactuated Manipulator Control Environment*, SIQUEIRA et al. (1999); SOARES et al. (1999), que fazia a simulação e o controle do UArmII para uma determinada configuração: AAA, AAP, ...

Neste trabalho estendemos as suas funcionalidades para suportar também o controle Markoviano. A figura C.1 mostra a tela principal do ambiente já modificado, e a tabela C.1 descreve a função dos botões do menu *User Commands*.

Figura C.1: Ambiente Gráfico de Simulação e Controle

Tabela C.1: *User Commands*

Botão	Descrição
Start Simulation	Inicia a simulação
Start UArmII	Inicia o controle do UArmII
Stop	Finaliza o movimento
Initial Position	Posiciona o UArmII na posição inicial
Restart	Reinicia o ambiente gráfico
Close	Fecha o ambiente gráfico
Set DAC = 0	Zera as tensões enviadas ao UArmII
Reference	Referencia o sistema de coordenadas do UArmII
Brake On	Aciona todos os freios do UArmII
Brake Off	Libera todos os freios do UArmII

Apêndice D

Cálculo da Trajetória

Neste apêndice apresentamos a maneira como geramos a trajetória que o robô deve acompanhar. Aqui calculamos os parâmetros para uma junta, e este processo deve ser repetido para cada uma das três juntas.

Utilizaremos um polinômio de quinto grau para calcular a trajetória:

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5. \quad (\text{D.1})$$

Desejamos obter $a_0, a_1, \dots, a_5$ de forma que no instante inicial t_i tenhamos:

$$\theta(t_i) = a_0 + a_1t_i + a_2t_i^2 + a_3t_i^3 + a_4t_i^4 + a_5t_i^5 \quad (\text{D.2})$$

$$\dot{\theta}(t_i) = a_1 + 2a_2t_i + 3a_3t_i^2 + 4a_4t_i^3 + 5a_5t_i^4 \quad (\text{D.3})$$

$$\ddot{\theta}(t_i) = 2a_2 + 6a_3t_i + 12a_4t_i^2 + 20a_5t_i^3, \quad (\text{D.4})$$

e no instante final t_f tenhamos:

$$\theta(t_f) = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 \quad (\text{D.5})$$

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 \quad (\text{D.6})$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3. \quad (\text{D.7})$$

As equações (D.2) a (D.7) formam o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 & t_i^4 & t_i^5 \\ 0 & 1 & 2t_i & 3t_i^2 & 4t_i^3 & 5t_i^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_i & 12t_i^2 & 20t_i^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t_i) \\ \dot{\theta}(t_i) \\ \ddot{\theta}(t_i) \\ \theta(t_f) \\ \dot{\theta}(t_f) \\ \ddot{\theta}(t_f) \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

e dados $t_i, t_f, \theta(t_i), \dot{\theta}(t_i), \ddot{\theta}(t_i), \theta(t_f), \dot{\theta}(t_f), \ddot{\theta}(t_f)$, calculamos os coeficientes do polinômio (D.1) fazendo a seguinte operação:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \text{inv} \left(\begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 & t_i^4 & t_i^5 \\ 0 & 1 & 2t_i & 3t_i^2 & 4t_i^3 & 5t_i^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_i & 12t_i^2 & 20t_i^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \theta(t_i) \\ \dot{\theta}(t_i) \\ \ddot{\theta}(t_i) \\ \theta(t_f) \\ \dot{\theta}(t_f) \\ \ddot{\theta}(t_f) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

Apêndice E

Descrição do Sistema

Matrizes A

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_8 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_{10} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad A_{14} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0.020 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Matrizes B

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.32764602 & -0.65463875 & 0.33173896 \\ -0.65463875 & 1.6384720 & -1.3241645 \\ 0.33173896 & -1.3241645 & 2.6896067 \\ 32.764602 & -65.463875 & 33.173896 \\ -65.463875 & 163.84720 & -132.41645 \\ 33.173896 & -132.41645 & 268.96067 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.31456726 & -0.62652379 & 0.32984128 \\ -0.62652379 & 1.5749141 & -1.3060319 \\ 0.32984128 & -1.3060319 & 2.6643471 \\ 31.456726 & -62.652379 & 32.984128 \\ -62.652379 & 157.49141 & -130.60319 \\ 32.984128 & -130.60319 & 266.43471 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.29596309 & -0.58592956 & 0.32654046 \\ -0.58592956 & 1.4816468 & -1.2760499 \\ 0.32654046 & -1.2760499 & 2.6228964 \\ 29.596309 & -58.592956 & 32.654046 \\ -58.592956 & 148.16468 & -127.60499 \\ 32.654046 & -127.60499 & 262.28964 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.27501929 & -0.53911296 & 0.32170737 \\ -0.53911296 & 1.3715060 & -1.2347102 \\ 0.32170737 & -1.2347102 & 2.5662031 \\ 27.501929 & -53.911296 & 32.170737 \\ -53.911296 & 137.15060 & -123.47102 \\ 32.170737 & -123.47102 & 256.62031 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0.25427748 & -0.49108059 & 0.31525381 \\ -0.49108059 & 1.2550851 & -1.1828447 \\ 0.31525381 & -1.1828447 & 2.4955500 \\ 25.427748 & -49.108059 & 31.525381 \\ -49.108059 & 125.50851 & -118.28447 \\ 31.525381 & -118.28447 & 249.55500 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.65463875 & 1.6384720 & 0 \\ 0.33173896 & -1.3241645 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -65.463875 & 163.84720 & 0 \\ 33.173896 & -132.41645 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.62652379 & 1.5749141 & 0 \\ 0.32984128 & -1.3060319 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -62.652379 & 157.49141 & 0 \\ 32.984128 & -130.60319 & 0 \end{bmatrix} \quad B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.58592956 & 1.4816468 & 0 \\ 0.32654046 & -1.2760499 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -58.592956 & 148.16468 & 0 \\ 32.654046 & -127.60499 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.53911296 & 1.3715060 & 0 \\ 0.32170737 & -1.2347102 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -53.911296 & 137.15060 & 0 \\ 32.170737 & -123.47102 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.49108059 & 1.2550851 & 0 \\ 0.31525381 & -1.1828447 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -49.108059 & 125.50851 & 0 \\ 31.525381 & -118.28447 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0.28672898 & -0.49131489 & 0 \\ -0.49131489 & 0.98655082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28.672898 & -49.131489 & 0 \\ -49.131489 & 98.655082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0.27373351 & -0.46483944 & 0 \\ -0.46483944 & 0.93471252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 27.373351 & -46.483944 & 0 \\ -46.483944 & 93.471252 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 0.25531006 & -0.42706628 & 0 \\ -0.42706628 & 0.86084329 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 25.531006 & -42.706628 & 0 \\ -42.706628 & 86.084329 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{14} = \begin{bmatrix} 0.23468903 & -0.38432576 & 0 \\ -0.38432576 & 0.77743401 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 23.468903 & -38.432576 & 0 \\ -38.432576 & 77.743401 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{15} = \begin{bmatrix} 0.21445260 & -0.34165609 & 0 \\ -0.34165609 & 0.69443850 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 21.445260 & -34.165609 & 0 \\ -34.165609 & 69.443850 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes C

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_8 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_9 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{10} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{14} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{15} = \begin{bmatrix} 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 & 0 \\ 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0.00020 & 0 \\ 0 & 0 & 0.020 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes D

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.003276460 & -0.006546388 & 0.003317390 \\ -0.006546388 & 0.01638472 & -0.01324165 \\ 0.003317390 & -0.01324165 & 0.02689607 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.003145673 & -0.006265238 & 0.003298413 \\ -0.006265238 & 0.01574914 & -0.01306032 \\ 0.003298413 & -0.01306032 & 0.02664347 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0.002959631 & -0.005859296 & 0.003265405 \\ -0.005859296 & 0.01481647 & -0.01276050 \\ 0.003265405 & -0.01276050 & 0.02622896 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_4 = \begin{bmatrix} 0.002750193 & -0.005391130 & 0.003217074 \\ -0.005391130 & 0.01371506 & -0.01234710 \\ 0.003217074 & -0.01234710 & 0.02566203 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0.002542775 & -0.004910806 & 0.003152538 \\ -0.004910806 & 0.01255085 & -0.01182845 \\ 0.003152538 & -0.01182845 & 0.02495550 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.006546388 & 0.01638472 & 0 \\ 0.003317390 & -0.01324165 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.006265238 & 0.01574914 & 0 \\ 0.003298413 & -0.01306032 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.005859296 & 0.01481647 & 0 \\ 0.003265405 & -0.01276050 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.005391130 & 0.01371506 & 0 \\ 0.003217074 & -0.01234710 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.004910806 & 0.01255085 & 0 \\ 0.003152538 & -0.01182845 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0.002867290 & -0.004913149 & 0 \\ -0.004913149 & 0.009865508 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0.002737335 & -0.004648394 & 0 \\ -0.004648394 & 0.009347125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_{13} = \begin{bmatrix} 0.002553101 & -0.004270663 & 0 \\ -0.004270663 & 0.008608433 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad D_{14} = \begin{bmatrix} 0.002346890 & -0.003843258 & 0 \\ -0.003843258 & 0.007774340 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D_{15} = \begin{bmatrix} 0.002144526 & -0.003416561 & 0 \\ -0.003416561 & 0.006944385 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Matrizes W

As matrizes W são idênticas as matrizes B , portanto

$$W_i = B_i$$

Apêndice F

Ganhos

Ganhos para o controle H_∞

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.021963293 & -0.0029580948 & 0.00051652153 & -0.013071309 & -0.0050516725 & -0.00089482655 \\ 0.0021342861 & -0.016010113 & -0.0018424467 & -0.0036778828 & -0.0048557816 & -0.0014820809 \\ 0.00033453633 & -0.0017024048 & -0.016001340 & -0.00082456387 & -0.0015143762 & -0.0023994665 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.022049596 & -0.0029198972 & 0.00052038695 & -0.013081194 & -0.0050235112 & -0.00086814040 \\ 0.0021640676 & -0.016124690 & -0.0017701750 & -0.0036421347 & -0.0049035911 & -0.0014915982 \\ 0.00028601625 & -0.0017881713 & -0.016019191 & -0.00083160079 & -0.0015545922 & -0.0024232255 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.022165436 & -0.0028366301 & 0.00052880659 & -0.013072585 & -0.0049611167 & -0.00081743265 \\ 0.0021737938 & -0.016327844 & -0.0016691950 & -0.0036060385 & -0.0049992981 & -0.0015139035 \\ 0.00027224615 & -0.0018897884 & -0.016034437 & -0.00078759979 & -0.0015987171 & -0.0024619916 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.022327989 & -0.0027670932 & 0.00055109583 & -0.013086706 & -0.0048986562 & -0.00075607223 \\ 0.0021511178 & -0.016585859 & -0.0015281804 & -0.0035890541 & -0.0051334026 & -0.0015399698 \\ 0.00024574213 & -0.0020177320 & -0.016058704 & -0.00073004407 & -0.0016496351 & -0.0025086546 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.022641171 & -0.0029064864 & 0.00057583441 & -0.013257213 & -0.0049445579 & -0.00072518386 \\ 0.0022129479 & -0.016687600 & -0.0012558654 & -0.0035083564 & -0.0051951821 & -0.0015261896 \\ -0.00020764885 & -0.0023647749 & -0.016122344 & -0.00097177937 & -0.0018350594 & -0.0025745901 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.0047164577 & 0.014631315 & 0.015639005 & 0.0025381864 & 0.0056027976 & 0.0058175567 \\ -0.0015447937 & -0.0061784738 & 0.017317361 & -0.00079685396 & -0.00054588947 & 0.0035706266 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0.0047005791 & 0.014710773 & 0.014922154 & 0.0025231170 & 0.0056475116 & 0.0057042225 \\ -0.0014617091 & -0.0060178987 & 0.017734667 & -0.00075015584 & -0.00046242154 & 0.0036809737 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 0.0047158264 & 0.015000814 & 0.014178151 & 0.0025163109 & 0.0058453799 & 0.0056833389 \\ -0.0013807658 & -0.0059470068 & 0.018132890 & -0.00070109778 & -0.00039246798 & 0.0037708152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} 0.0046964413 & 0.015248322 & 0.013093185 & 0.0024902351 & 0.0060174151 & 0.0055754888 \\ -0.0012689465 & -0.0058353296 & 0.018622733 & -0.00063466915 & -0.00030362190 & 0.0038824793 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} 0.0044737605 & 0.014807048 & 0.011028167 & 0.0023642818 & 0.0057950862 & 0.0050457023 \\ -0.0010156043 & -0.0052446590 & 0.019605824 & -0.00049729485 & -0.000033194022 & 0.0041899948 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0.023128687 & -0.0034860925 & -0.0011170013 & -0.012967207 & -0.0047395058 & -0.00030976291 \\ 0.0049607633 & -0.015583168 & -0.0021331736 & -0.0021917745 & -0.0047529757 & -0.00054045169 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0.023297001 & -0.0034703381 & -0.0011147932 & -0.013040940 & -0.0047406996 & -0.00030948369 \\ 0.0049660234 & -0.015717860 & -0.0022002654 & -0.0021853767 & -0.0048183590 & -0.00056978590 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0.023517962 & -0.0033805438 & -0.0011004859 & -0.013099924 & -0.0046981642 & -0.00030780389 \\ 0.0049532764 & -0.015972918 & -0.0023445815 & -0.0021742655 & -0.0049518999 & -0.00063365164 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0.023816479 & -0.0033008723 & -0.0010841861 & -0.013202164 & -0.0046605902 & -0.00030365528 \\ 0.0048899596 & -0.016291151 & -0.0025184602 & -0.0021827245 & -0.0051287442 & -0.00071473887 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{15} = \begin{bmatrix} -0.024280137 & -0.0034459053 & -0.0011102958 & -0.013477353 & -0.0047476354 & -0.00030770922 \\ 0.0047069260 & -0.016475449 & -0.0026158533 & -0.0022464194 & -0.0052590541 & -0.00076748894 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ganhos para o controle H_2

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.20497172 & -0.10109994 & -0.025181474 & -0.24665562 & -0.12250987 & -0.029941475 \\ -0.10174047 & -0.059389415 & -0.017129547 & -0.12249573 & -0.071891499 & -0.020318880 \\ -0.024779979 & -0.016754567 & -0.0087769255 & -0.029856689 & -0.020268681 & -0.010369912 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.20276763 & -0.099859924 & -0.024521943 & -0.24394976 & -0.12098301 & -0.029152268 \\ -0.10048921 & -0.059206670 & -0.017018513 & -0.12096546 & -0.071653132 & -0.020181667 \\ -0.024128898 & -0.016645592 & -0.0087888586 & -0.029067544 & -0.020131444 & -0.010381854 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.19913762 & -0.097817152 & -0.023446701 & -0.23949468 & -0.11846832 & -0.027865788 \\ -0.098428519 & -0.058898841 & -0.016832262 & -0.11844567 & -0.071252499 & -0.019951858 \\ -0.023067582 & -0.016462790 & -0.0088075590 & -0.027781419 & -0.019901656 & -0.010400508 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.19414407 & -0.095006122 & -0.021990474 & -0.23337444 & -0.11501180 & -0.026124829 \\ -0.095593792 & -0.058460875 & -0.016568961 & -0.11498313 & -0.070685722 & -0.019628242 \\ -0.021630740 & -0.016204516 & -0.0088313186 & -0.026041461 & -0.019578206 & -0.010424204 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.18786727 & -0.091471452 & -0.020199256 & -0.22570917 & -0.11067890 & -0.023988037 \\ -0.092030282 & -0.057884814 & -0.016225862 & -0.11064416 & -0.069949282 & -0.019209899 \\ -0.019864785 & -0.015868600 & -0.0088578724 & -0.023906775 & -0.019160336 & -0.010450966 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.000023363162 & 0.037114658 & 0.045920194 & 0.000026190807 & 0.044561230 & 0.055132216 \\ 0.0000058483026 & 0.0092904961 & 0.018359539 & 0.0000065561229 & 0.011155939 & 0.022040335 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0.000024348245 & 0.039596184 & 0.047743211 & 0.000027269985 & 0.047542848 & 0.057323844 \\ 0.0000061439557 & 0.0099914295 & 0.019007325 & 0.0000068812184 & 0.011998221 & 0.022818904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 0.000025905423 & 0.043780229 & 0.050827759 & 0.000028992933 & 0.052571781 & 0.061033658 \\ 0.0000066230885 & 0.011192875 & 0.020118268 & 0.0000074124541 & 0.013442441 & 0.024154602 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} 0.000027888358 & 0.049753525 & 0.055257122 & 0.000031167172 & 0.059754038 & 0.066363343 \\ 0.0000072590011 & 0.012950049 & 0.021744599 & 0.0000081124338 & 0.015555478 & 0.026110670 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} 0.000030091139 & 0.057671062 & 0.061180179 & 0.000033487548 & 0.069275437 & 0.073491333 \\ 0.0000080109373 & 0.015352783 & 0.023971684 & 0.0000089151427 & 0.018445151 & 0.028789558 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0.20585451 & -0.10234182 & -0.0000042445458 & -0.24889867 & -0.12376803 & -0.0000046844562 \\ -0.10221832 & -0.060027150 & -0.0000024890655 & -0.12364866 & -0.072537497 & -0.0000027470227 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0.20358030 & -0.10105931 & -0.0000046576236 & -0.24611069 & -0.12219969 & -0.0000051600510 \\ -0.10093228 & -0.059822860 & -0.0000027567445 & -0.12207670 & -0.072278129 & -0.0000030541208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0.19984368 & -0.098950641 & -0.0000053765440 & -0.24152377 & -0.11961808 & -0.0000059694900 \\ -0.098818741 & -0.059481589 & -0.0000032315023 & -0.11948978 & -0.071843529 & -0.0000035878772 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0.19471255 & -0.096052929 & -0.0000064687954 & -0.23523139 & -0.11607356 & -0.0000072148298 \\ -0.095915624 & -0.058999504 & -0.0000039727607 & -0.11593930 & -0.071231958 & -0.0000044309041 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{15} = \begin{bmatrix} -0.18827141 & -0.092412752 & -0.0000080483940 & -0.22736505 & -0.11163690 & -0.0000090818305 \\ -0.092269902 & -0.058369451 & -0.0000050844451 & -0.11149716 & -0.070442514 & -0.0000057373712 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ganhos para o controle H_2/H_∞

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.025648508 & -0.0031057649 & 0.0020990575 & -0.015502320 & -0.0049072939 & -0.00047711720 \\ 0.0029960065 & -0.017304228 & -0.0062182716 & -0.0029201825 & -0.0068078016 & -0.0022514830 \\ 0.0041943976 & -0.0058219348 & -0.014634274 & 0.00025842937 & -0.0021257916 & -0.0042605266 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.025781099 & -0.0030114957 & 0.0021176902 & -0.015509242 & -0.0048734288 & -0.00046571372 \\ 0.0031098473 & -0.017561694 & -0.0061687319 & -0.0028859360 & -0.0068756529 & -0.0022344735 \\ 0.0041069248 & -0.0058297699 & -0.014641893 & 0.00022869880 & -0.0021272531 & -0.0042621121 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.025933232 & -0.0028898981 & 0.0021255559 & -0.015486118 & -0.0048192383 & -0.00045071748 \\ 0.0032106435 & -0.017906580 & -0.0060486795 & -0.0028540312 & -0.0069678049 & -0.0021951663 \\ 0.0039274523 & -0.0058013225 & -0.014635065 & 0.00017608194 & -0.0021157569 & -0.0042608417 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.026106163 & -0.0028158447 & 0.0021050271 & -0.015474279 & -0.0047852928 & -0.00044451074 \\ 0.0032342418 & -0.018271135 & -0.0058213384 & -0.0028585286 & -0.0070685311 & -0.0021258433 \\ 0.0036219696 & -0.0057131010 & -0.014621343 & 0.000078640878 & -0.0020899237 & -0.0042580121 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.026393375 & -0.0029096936 & 0.0020456426 & -0.015592216 & -0.0048464076 & -0.00046491267 \\ 0.0031355439 & -0.018593092 & -0.0054732842 & -0.0029357562 & -0.0071726215 & -0.0020251311 \\ 0.0031364817 & -0.0055859468 & -0.014619487 & -0.00011939569 & -0.0020736204 & -0.0042633734 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 0.0048517475 & 0.015642133 & 0.017517733 & 0.0027363820 & 0.0064769302 & 0.0061782817 \\ -0.0013803723 & -0.0055120538 & 0.017693987 & -0.00079253387 & -0.0015280364 & 0.0045256266 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 0.0048660024 & 0.015862930 & 0.016484306 & 0.0027378303 & 0.0065274134 & 0.0060176247 \\ -0.0014831638 & -0.0060660114 & 0.018551901 & -0.00085056392 & -0.0015553688 & 0.0045812128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} 0.0048962625 & 0.016179583 & 0.015529469 & 0.0027370889 & 0.0067430637 & 0.0059501557 \\ -0.0014683534 & -0.0061408293 & 0.019267304 & -0.00083182244 & -0.0015432104 & 0.0047505759 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_9 = \begin{bmatrix} 0.0048984751 & 0.016460659 & 0.014294850 & 0.0027230000 & 0.0069500424 & 0.0058009343 \\ -0.0014130115 & -0.0061271991 & 0.020130277 & -0.00079324519 & -0.0015032455 & 0.0049972861 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{10} = \begin{bmatrix} 0.0047228041 & 0.016042399 & 0.012466019 & 0.0026195601 & 0.0068448319 & 0.0052761945 \\ -0.0012597214 & -0.0055888875 & 0.020612291 & -0.00070128665 & -0.0014415236 & 0.0053308360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -0.026320924 & -0.0035425000 & -0.00037879147 & -0.014955543 & -0.0044011798 & -0.00017253719 \\ 0.0074574287 & -0.017690955 & -0.0015591680 & -0.00086263964 & -0.0066498024 & -0.00045993082 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -0.026802197 & -0.0031303555 & -0.00035664029 & -0.015027738 & -0.0043833501 & -0.00016093502 \\ 0.0082380192 & -0.018496191 & -0.0016589449 & -0.00073847408 & -0.0066767951 & -0.00050802103 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{13} = \begin{bmatrix} -0.027168543 & -0.0028924458 & -0.00034342080 & -0.015101717 & -0.0043172747 & -0.00015597428 \\ 0.0085777922 & -0.019002899 & -0.0018264766 & -0.00064778542 & -0.0068144729 & -0.00058379598 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{14} = \begin{bmatrix} -0.027562868 & -0.0027652446 & -0.00033433436 & -0.015223237 & -0.0042904390 & -0.00015105033 \\ 0.0086329168 & -0.019435744 & -0.0020173758 & -0.00065347446 & -0.0069707101 & -0.00067555791 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{15} = \begin{bmatrix} -0.028109595 & -0.0030281786 & -0.00034456673 & -0.015602759 & -0.0043556275 & -0.00015717607 \\ 0.0083400122 & -0.019509520 & -0.0021369811 & -0.00069117028 & -0.0072113586 & -0.00072769306 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Referências Bibliográficas

- ABOU-KANDIL et al. (1995). Abou-Kandil, H., Freiling, G., e Jank, G. On the Solution of Discrete-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control Problems. *Automatica*, 31(5):765–768, 1995.
- ARAI & TACHI (1991). Arai, H. e Tachi, S. Position Control of a Manipulator with Passive Joints Using Dynamic Coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(4):528–534, 1991.
- BERGERMAN (1996). Bergerman, M. *Dynamics and control of underactuated manipulators*. Tese de Doutorado, Carnegie Mellon University, 1996.
- BLAIR & SWORDER (1975). Blair, W. P. e Swarder, D. D. Feedback Control of a Class of Linear Discrete Systems with Jump Parameters and Quadratic Cost Criteria. *International Journal of Control*, 21:833–844, 1975.
- BLOM & BAR-SHALOM (1988). Blom, H. A. P. e Bar-Shalom, Y. The Interacting Multiple Model Algorithm for Systems with Markovian Switching Coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8):780–783, 1988.
- BOUKAS & YANG (1995). Boukas, E. K. e Yang, H. Stability of Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters. *Mathematics of Control Signal and Systems*, 8:390–402, 1995.

- CHIZECK et al. (1986). Chizeck, H. J., Willsky, A. S., e Castano, D. Discrete-Time Markovian Jump Linear Quadratic Optimal Control. *International Journal of Control*, 43:213–231, 1986.
- COSTA (1995). Costa, O. L. V. Discrete-Time Coupled Riccati Equations for Systems with Markov Switching Parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 194:197–216, 1995.
- COSTA (1996). Costa, O. L. V. Mean-Square Stabilizing Solutions for Discrete-Time Coupled Algebraic Riccati Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4):593–598, 1996.
- COSTA & DO VAL (1996). Costa, O. L. V. e do Val, J. B. R. Full Information H_∞ -Control for Discrete-Time Infinite Markov Jump Parameter Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202:578–603, 1996.
- COSTA & FRAGOSO (1993). Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. Stability Results for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 179:154–178, 1993.
- COSTA & FRAGOSO (1995). Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. Discrete-Time LQ-Optimal Control Problems for Infinite Markov Jump Parameter Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(12):2076–2088, 1995.
- COSTA & MARQUES (1998). Costa, O. L. V. e Marques, R. P. Mixed H_2/H_∞ -Control of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1):95–100, 1998.
- COSTA & MARQUES (2000). Costa, O. L. V. e Marques, R. P. Robust H_2 -Control for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems. *International Journal of Control*, 73(1):11–21, 2000.

- CRAIG (1989). Craig, J. *Introduction to robotics mechanics and control*. Addison–Wesley, 2nd edition, 1989.
- FENG et al. (1992). Feng, X., Loparo, K. A., Ji, Y., e Chizeck, H. J. Stochastic Stability Properties of Jump Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1):38–53, 1992.
- FRAGOSO et al. (1995). Fragoso, M. D., do Val, J. B. R., e Pinto Jr., D. L. Jump Linear H_∞ -Control: The Discrete-Time Case. *Control Theory and Advanced Technology*, 10(4):1459–1474, 1995.
- HOEL et al. (1987). Hoel, P., Port, S., e Stone, C. *Introduction to Stochastic Processes*. Waveland Press Inc, 1987.
- JI & CHIZECK (1988). Ji, Y. e Chizeck, H. J. Controllability, Observability and Discrete-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control. *International Journal of Control*, 48:481–498, 1988.
- JI & CHIZECK (1989). Ji, Y. e Chizeck, H. J. Optimal Quadratic Control of Jump Linear Systems with Separately Controlled Transition Probabilities. *International Journal of Control*, 49(2):481–491, 1989.
- JI & CHIZECK (1990). Ji, Y. e Chizeck, H. J. Controllability, Stabilizability, and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(7):777–788, 1990.
- JI & CHIZECK (1990b). Ji, Y. e Chizeck, H. J. Jump Linear Quadratic Gaussian Control: Steady State–Solution and Testable Conditions. *Control Theory and Advanced Technology*, 6(3):289–319, 1990.
- JI et al. (1991). Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X., e Loparo, K. A. Stability and Control of Discrete-Time Jump Linear Systems. *Control Theory and Advanced Technology*, 7:247–270, 1991.

- LEWIS et al. (1993). Lewis, F., Abdallah, C., e Dawson, D. *Control of robot manipulators*. Macmillan, 1993.
- LOPARO et al. (1991). Loparo, K. A., Buchner, M. R., e Vasudeva, K. S. Leak Detection in an Experimental Heat Exchanger Process: A Multiple Model Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(2):167-177, 1991.
- MARITON (1990). Mariton, M. *Jump linear systems in automatic control*. Marcel Dekker, 1990.
- MARQUES (1997). Marques, R. *Algoritmos de controle para sistemas sujeitos a saltos Markovianos*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.
- MOROZAN (1983). Morozan, T. Stabilization of Some Stochastic Discrete-Time Control Systems. *Stochastic Analysis and Applications*, 1:89-116, 1983.
- PAN & BASAR (1994). Pan, Z. e Basar, T. Zero-Sum Differential Games with Random Structures and Applications in H_∞ -Control of Jump Linear Systems. In *6th International Symposium on Dynamic Games and Applications*, Quebec, 1994.
- RAMI & EL GHAOU (1994). Rami, M. A. e El Ghaoui, L. Robust Stabilization of Jump Linear Systems Using Linear Matrix Inequalities. In *IFAC Symposium on Robust Control Design*, pages 148-151, Rio de Janeiro, 1994.
- RAMI & EL GHAOU (1996). Rami, M. A. e El Ghaoui, L. LMI Optimization for Nonstandard Riccati Equations Arising in Stochastic Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11):1666-1671, 1996.
- SIQUEIRA et al. (1999). Siqueira, A. A. G., Bergerman, M., e Terra, M. H. Underactuated Manipulator Control System Development Environment.

In *15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS & FOF'99*, volume 2, Brazil, 1999.

SOARES et al. (1999). Soares, M. R., Terra, M. H., Bergerman, M., e Tinós, R. A Simulation Environment for Fault Detection and Isolation and Control of Underactuated Manipulators. In *15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS & FOF'99*, volume 2, Brazil, 1999.

SWORDER & ROGERS (1983). Sworder, D. D. e Rogers, R. O. An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28(10):971-978, 1983.