

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 14 / 09 / 01

Ass.: Guilherme

APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE MODULAÇÃO  
CAÓTICA COMO ALTERNATIVA PARA  
SISTEMAS DE TELECOMUNICAÇÕES EM  
*SPREAD SPECTRUM*

José Carlos Pizolato Junior

Dissertação de mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luiz Gonçalves Neto

DEDALUS - Acervo - EESC



31100036724


São Carlos  
2001




**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **JOSÉ CARLOS PIZOLATO JUNIOR**


Dissertação defendida e julgada em 08-08-2001 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **LUIZ GONÇALVES NETO (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)


Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA**  
(Escola Politécnica/USP)

Aprovado (A)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Tit. **HILDEBRANDO MUNHOZ RODRIGUES**  
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doutor **MURILO ARAUJO ROMERO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

  
\_\_\_\_\_  
p/ **JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedico este trabalho,

Aos meus familiares:

Jozélia, José Carlos e Raquel.

Presença constante em minha vida !

## **AGRADECIMENTOS**

À FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO - FAPESP, pelo apoio financeiro.

Ao professor Doutor Luiz Gonçalves Neto, pela orientação.

Aos professores Doutor Murilo Araújo Romero, Doutor Hildebrando Munhoz Rodrigues e Doutor José Carlos Sartori, pelas dicas e sugestões.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	vii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	viii
RESUMO.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 SISTEMAS CAÓTICOS.....	5
2.1 Introdução.....	5
2.2 Circuito caótico da partícula em caixa.....	7
2.3 Comportamento do circuito caótico da partícula em caixa.....	8
2.3.1 Resultados obtidos a partir de simulações.....	8
2.3.2 Resultados experimentais.....	11
2.4 Aplicação de sistemas caóticos para transmissão de informação.....	13
3 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS.....	14
3.1 Sincronização Pecora-Carroll.....	14
3.2 Sincronização por realimentação de erro.....	17
3.3 Aplicação das técnicas de sincronismo.....	18
3.3.1 Aplicação da técnica Pecora-Carroll.....	18
3.3.2 Aplicação da técnica de sincronismo por realimentação de erro.....	22
3.4 Análise da implementação Pecora-Carroll.....	24
3.4.1 Resultados de simulações.....	24

3.4.2 Resultados experimentais.....	28
3.5 Análise da implementação com realimentação de erro.....	36
3.5.1 Resultados de simulações.....	36
3.5.2 Resultados experimentais.....	41
3.5.2.1 Resultados experimentais sem linha de transmissão.....	42
3.5.2.2 Resultados experimentais utilizando-se o modelo "T" para uma linha de transmissão de 1000 metros.....	48
3.5.2.3 Resultados experimentais utilizando-se o modelo "T" para uma linha de transmissão de 5000 metros.....	53
4 APLICAÇÃO DE SISTEMA CAÓTICOS EM TELECOMUNICAÇÕES.....	56
4.1 Introdução.....	56
4.2 Técnicas de detecção coerentes.....	57
4.2.1 Um esquema cifrador de informação.....	57
4.2.2 Esquema de modulação variando-se parâmetros do transmissor caótico.....	58
4.2.3 <i>Chaos Shift Keying</i> - CSK [14].....	59
4.3 Técnicas de detecção não-coerentes.....	60
4.3.1 <i>Chaos Shift Keying</i> não-coerente [14].....	60
4.3.2 <i>Chaotic On-Off Keying</i> - COOK.....	60
4.3.3 <i>Differential Chaos Shift Keying</i> - DCSK.....	61
4.3.4 <i>Frequency Modulation - Differential Chaos Shift Keying</i> - FM-DCSK.....	62
4.3.5 <i>Chaotic Frequency Modulation</i> - CFM [28].....	63
5 APLICAÇÃO DO CIRCUITO CAÓTICO DA PARTÍCULA EM CAIXA PARA REALIZAÇÃO DE COMUNICAÇÃO SEGURA.....	65
5.1 Implementação de um cifrador de sinal de informação de frequência variável no tempo.....	65
5.1.2 Resultados experimentais.....	67
5.2 Implementação de um cifrador binário.....	69
5.2.1 Sistema em malha aberta sem linha de transmissão.....	73

5.2.2 Sistema em malha fechada sem linha de transmissão.....	75
5.2.3 Sistema e malha fechada com um modelo "T" para linha de transmissão de 100 metros.....	77
6 IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA ANÁLOGO AO <i>SPREAD SPECTRUM</i> UTILIZANDO O CAOS.....	78
6.1 Introdução.....	78
6.2 Implementação da técnica <i>spread spectrum</i> utilizando o circuito caótico da partícula em caixa.....	79
6.3 Avaliação do desempenho do sistema.....	82
6.3.1 Desempenho do sistema sem linha de transmissão.....	82
6.3.2 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros.....	84
6.3.3 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 1000 metros.....	84
6.3.4 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 5000 metros.....	85
CONCLUSÕES.....	87
BIBLIOGRAFIA.....	89
APÊNDICE I	
1-Expoentes de Lyapunov	
2-Expoentes Condicionais de Lyapunov	
APÊNDICE II	
Método de solução de equação diferencial ordinária não-homogênea de segunda ordem	

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: Múltiplo acesso.....	2
FIGURA 2.1: Dinâmica do mapa logístico em função do parâmetro “A”.....	6
FIGURA 2.2: Circuito de uma partícula em caixa.....	7
FIGURA 2.3: Curva experimental da característica dos dois diodos de silício (1N4148) em anti-paralelo em série com a resistência $R_L$ .....	8
FIGURA 2.4: Espaços de fase da simulação numérica da eq.(2.5) para distintos valores de A: (a) A=0,8 V; (b) A=2,6 V; (c) A=2,97 V; (d) A=3,18 V; (e) A=3,2 V; (f) A=3,3 V.....	10
FIGURA 2.5: Espaços de fase experimentais do circuito da figura 2.2 para distintos valores de A: (a) A=0,8 V; (b) A=2,6 V; (c) A=2,7 V; (d) A=2,9 V; (e) A=2,92 V; (f) A=2,93 V.....	12
FIGURA 3.1: Diagrama em blocos do sistema descrito por $\dot{x} = f(x)$ .....	15
FIGURA 3.2: Decomposição Pecora-Carroll do sistema da figura 3.1, descrito pelas equações $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ e $\dot{x}_2 = f_2(x_2, g(t))$ .....	15
FIGURA 3.3: Cópia do subsistema 2.....	15
FIGURA 3.4: Estimação de $x_1$ e $g(t)$ utilizando-se a técnica de sincronização Pecora-Carroll (mestre-escravo) em cascata.....	17
FIGURA 3.5: Sincronização por realimentação do sinal de erro.....	18
FIGURA 3.6: Circuito mestre.....	19
FIGURA 3.7: Circuito do subsistema 1.....	19
FIGURA 3.8: Circuito do subsistema 2.....	20



---

FIGURA 3.9: Circuito que gera $V_x$ .....	21
FIGURA 3.10: Circuito que gera $V_y$ .....	21
FIGURA 3.11: Circuito que gera $V_z$ .....	21
FIGURA 3.12: Estimação do sinal oscilante.....	21
FIGURA 3.13: Sistema escravo da estimação por realimentação de erro.....	23
FIGURA 3.14: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	24
FIGURA 3.15: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	25
FIGURA 3.16: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	25
FIGURA 3.17: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	26
FIGURA 3.18: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	27
FIGURA 3.19: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	27
FIGURA 3.20: Ruído adicionado ao sinal transmitido $V_1$ .....	28
FIGURA 3.21: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	29
FIGURA 3.22: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	30
FIGURA 3.23: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	30
FIGURA 3.24: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	31

---

FIGURA 3.25: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	32
FIGURA 3.26: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	32
FIGURA 3.27: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	33
FIGURA 3.28: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	34
FIGURA 3.29: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	34
FIGURA 3.30: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	37
FIGURA 3.31: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	37
FIGURA 3.32: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	38
FIGURA 3.33: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	39
FIGURA 3.34: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	39
FIGURA 3.35: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	40
FIGURA 3.36: Ruído adicionado ao sinal transmitido $V_1$ .....	40
FIGURA 3.37: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	42

---

FIGURA 3.38: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	43
FIGURA 3.39: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	43
FIGURA 3.40: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	44
FIGURA 3.41: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	45
FIGURA 3.42: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	45
FIGURA 3.43: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	46
FIGURA 3.44: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	47
FIGURA 3.45: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	47
FIGURA 3.46: Modelo "T" de uma linha de transmissão.....	48
FIGURA 3.47: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	49
FIGURA 3.48: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	50
FIGURA 3.49: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	50
FIGURA 3.50: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).....	51

---

FIGURA 3.51: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	52
FIGURA 3.52: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	52
FIGURA 3.53: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	54
FIGURA 3.54: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).....	54
FIGURA 3.55: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).....	55
FIGURA 4.1: Sistema cifrador de informação caótico.....	57
FIGURA 4.2: Sistema de comunicação caótico.....	58
FIGURA 4.3: Receptor CSK de correlação coerente.....	59
FIGURA 4.4: Receptor CSK de correlação não-coerente.....	60
FIGURA 4.5: Transmissor COOK.....	61
FIGURA 4.6: Transmissor DCSK.....	62
FIGURA 4.7: Receptor DCSK.....	62
FIGURA 4.8: Transmissor FM - DCSK.....	63
FIGURA 4.9: Esquema de sincronização ( Frequency Modulation - FM ) padrão.....	63
FIGURA 4.10: Esquema de sincronização CFM.....	64
FIGURA 5.1: Sistema de cifragem de informação.....	66
FIGURA 5.2: Informação de entrada ( $V_1$ ) e sinal recuperado no receptor ( $\hat{V}_1$ ).....	67
FIGURA 5.3: Informação codificada pelo transmissor ( $V_1$ ) e sinal recuperado no receptor ( $\hat{V}_1$ ).....	68
FIGURA 5.4: Sistema cifrador de informação binária.....	69
FIGURA 5.5: Formas de onda do sinal BFSK e informação.....	71

---

FIGURA 5.6: Espectro de potência do sinal BFSK.....	71
FIGURA 5.7: Informação de entrada e informação codificada (sinal caótico).....	72
FIGURA 5.8: Espectro de potência do sinal caótico (informação codificada).....	73
FIGURA 5.9: Fluxo binário original e recuperado.....	74
FIGURA 5.10: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para o sistema em malha aberta sem linha de transmissão.....	75
FIGURA 5.11: Fluxo binário original e recuperado.....	76
FIGURA 5.12: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para o sistema em malha fechada sem linha de transmissão.....	76
FIGURA 5.13: Diagrama de olho da forma de onda recuperada com modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros para o sistema em malha fechada.....	77
FIGURA 6.1: Modulador e demodulador FH.....	79
FIGURA 6.2: Transmissor do sistema <i>spread spectrum</i> utilizando caos.....	80
FIGURA 6.3: Receptor do sistema <i>spread spectrum</i> alternativo.....	81
FIGURA 6.4: Sinal caótico.....	81
FIGURA 6.5: Espectro de potência do sinal transmitido.....	82
FIGURA 6.6: Fluxo binário original e recuperado.....	83
FIGURA 6.7: Diagrama de olho da forma de onda recuperada sem linha de transmissão.....	83
FIGURA 6.8: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros.....	84
FIGURA 6.9: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para uma linha de transmissão de 1000 metros.....	85
FIGURA 6.10: Fluxo binário original e recuperado.....	86
FIGURA 6.11: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para um modelo "T" de linha de transmissão de 5000 metros.....	86

---

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BFSK	Binary Frequency Shift Keying
CDMA	Code Division Multiple Access
CFM	Chaotic Frequency Modulation
CLEs	Conditional Lyapunov Exponents
COOK	Chaotic On-Off-Keying
CSK	Chaos Shift Keying
DC	Direct Current
DCSK	Differential Chaos Shift Keying
eq.	Equação
FH	Frequency Hopping
FM	Modulação em Frequência
FM – DCSK	Frequency Modulation - Differential Chaos Shift Keying
FSK	Frequency Shift Keying
GPS	Global Position Service
PCS	Personal Communication System
PLL	Phase Lock Loop
VCO	Voltage Control Oscillator
WLA	Wireless Local Area Network

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	-parâmetro de bifurcação do mapa logístico
$\hat{b}_k$	-fluxo de bits recuperado
$C$	-capacitância
$C_1$	-capacitor
$C_2$	-capacitor
$C_x$	-capacitor
$D_1$	-diodo
$D_2$	-diodo
$e(t)$	-erro de estimação
$f$	-frequência do sinal oscilante
$f(x)$	-vetor que envolve as variáveis de estado do sistema
$g(t)$	-saída do subsistema 1
$\hat{g}(t)$	-estimação do sinal $g(t)$
$\hat{g}_1(t)$	-estimação do sinal $g_1(t)$
$\hat{g}_2(t)$	-estimação do sinal $g_2(t)$
$h(x)$	-saída do subsistema 1
$I_d$	-corrente no diodo
$I_o$	-corrente de saturação reversa do diodo
$k$	-parâmetro de normalização
$\hat{m}(t)$	-sinal de informação estimado
$n(t)$	-ruído
$r(t)$	-sinal $g(t)$ mais ruído

---

$r_i(t)$	-sinal recebido mais ruído
$R$	-resistor
$R_1$	-resistor
$R_2$	-resistor
$R_3$	-resistor
$R_4$	-resistor
$R_5$	-resistor
$R_e$	-resistor de entrada do circuito caótico
$R_f$	-resistor
$R_{re}$	-resistor de realimentação
$R_L$	-resistor em série com diodos em antiparalelo
$s(t)$	-sinal caótico adicionado à informação
$s_i(t)$	-sinal enviado pelo transmissor
$\hat{s}_i$	-sinal enviado estimado
$\hat{s}_i$	-sinal estimado
$t$	-tempo
$T$	-tempo final de duração do símbolo
$T_S$	-tempo de sincronização
$u(t)$	-sinal caótico
$u_r$	-sinal caótico estimado pelo receptor
$U$	-sinal de entrada o circuito caótico do receptor
$V_d$	-tensão no conjunto diodos em antiparalelo e resistência
$V_i$	-sinal oscilante do circuito caótico
$V_o$	-tensão de limiar do diodo
$V_1$	-tensão proporcional à velocidade de um sistema mecânico
$V_2$	-tensão proporcional à posição num sistema mecânico
$V_x$	-tensão
$V_y$	-tensão



---

$V_z$	-tensão
$\hat{V}_i$	-sinal oscilante estimado no sistema escravo ( sinal que contém a informação de frequência )
$\dot{V}_1$	-derivada em relação ao tempo de $V_1$
$\dot{V}_2$	-derivada em relação ao tempo de $V_2$
$\hat{V}_1$	-sinal $V_1$ estimado ( sinal enviado estimado no sistema escravo )
$\hat{V}_2$	-sinal $V_2$ estimado no sistema escravo
$\dot{\hat{V}}_1$	-derivada em relação ao tempo de $\hat{V}_1$
$\dot{\hat{V}}_2$	-derivada em relação ao tempo de $\hat{V}_2$
$W$	-frequência angular do sinal oscilante
$x$	-vetor variável de estado do sistema
$x_1(t)$	-variável de estado do sistema
$x_2(t)$	-variável de estado do sistema
$\hat{x}_1(t)$	-estimação da variável de estado do sistema
$\hat{x}_2(t)$	-estimação da variável de estado do sistema
$X_n$	-valor da variável $X$ no instante $t_n$
$X_{n+1}$	-valor da variável $X$ no instante $t_{n+1}$
$X_R$	-sinal caótico gerado no receptor
$X_T$	-sinal caótico proveniente do transmissor
$Y$	-admitância ( notação fasorial )
$z_{i1}$	-sinal observado
$z_{i2}$	-sinal observado
$Z$	-impedância ( notação fasorial )
$z_1$	-sinal proveniente do correlator

$\Delta T$	-intervalo de tempo discreto em série
$\tau$	-tempo normalizado

## RESUMO

Atualmente tem aumentando o interesse na aplicação de sistemas caóticos no âmbito das telecomunicações. Esses sistemas apresentam certas peculiaridades, como geração de sinais com amplo espectro de frequências e baixa correlação cruzada, o que os tornam altamente robustos para aplicação em esquemas de modulação caótica. Dentre tais esquemas, há aqueles em que a detecção é realizada utilizando alguma técnica de sincronismo. Neste trabalho, um circuito caótico é apresentado e sua performance é analisada. As técnicas de sincronismo Pecora-Carroll e sincronização por realimentação de erro são aplicadas ao circuito caótico apresentado. Utilizando este circuito caótico, são sugeridas as seguintes aplicações: um cifrador caótico e um sistema análogo ao *spread spectrum*. Os dois sistemas são implementados eletronicamente. Além disso, a avaliação da performance de cada sistema é realizada com o auxílio da técnica do diagrama de olho.

Palavras-chave: *spread spectrum*; caos; sincronismo; modulação; cifragem.

## ABSTRACT

Nowadays it is increasing the interest in the application of the chaotic systems in the ambit of the telecommunications. These systems introduce some peculiarities, such as generation of wideband signals with low crosscorrelation, those characteristics make the systems strongly robust to application on chaotic modulation schemes. Among such schemes, there are ones where the detection is realized using techniques of synchronization. In this work, a chaotic circuit is introduced and its performance is evaluated. The Pecora-Carroll synchronization and error-feedback synchronization are applied on the chaotic circuit introduced. Using this chaotic circuit, the following applications are suggested: a chaotic cipher and a spread spectrum system. The two systems are implemented electronically. Besides, the performance of each system is evaluated using the eye pattern technique.

Keywords: *spread spectrum*; chaos; synchronism; modulation; ciphering.

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

As técnicas de modulação *spread spectrum* surgiram a partir de aplicações militares durante a II Guerra Mundial. O objetivo dessas técnicas é transmitir informações com segurança e confiabilidade no âmbito militar. Tais técnicas estão sendo utilizadas comercialmente em : redes locais sem fio ( *Wireless Local Area Network – WLAN* ), telefones sem fio, sistema de posicionamento global ( *Global Position Service – GPS* ), sistemas de comunicações pessoais ( *Personal Communication System – PCS* ) e telefonia celular digital ( *Code Division Multiple Access – CDMA* ) [1].

Um sistema *spread spectrum* é aquele em que o sinal transmitido está espalhado sobre uma extensa faixa de frequências, muito maior que a mínima largura da faixa requerida para transmitir a informação [1]. O espalhamento é realizado modulando-se novamente um sinal já modulado [2]. A primeira modulação aplica uma técnica de modulação digital convencional enquanto a segunda modulação realiza o espalhamento do sinal modulado digitalmente.

Os sistemas *spread spectrum* oferecem as seguintes vantagens [1-2]:

- Resistência à interferência intencional e não-intencional. A primeira visa corromper a transmissão da informação enquanto que a segunda, surge da interação de sinais presentes na mesma faixa de frequências;
- Capacidade de eliminar ou diminuir o desvanecimento por multicaminho. Sistemas de comunicações móveis são susceptíveis aos efeitos de desvanecimento por

multicaminho oriundos da interação, no receptor, entre sinais que viajam ao longo de diferentes caminhos de propagação;

- Privacidade na comunicação devido à utilização de uma seqüência pseudo-aleatória para espalhar o espectro de freqüência do sinal de informação a ser transmitido. Para haver correta detecção do sinal enviado é necessário conhecer a seqüência pseudo-aleatória que espalhou a informação no domínio da freqüência;

- Permite o compartilhamento da mesma faixa de freqüências com outros usuários como mostrado na figura 1.1. Este compartilhamento está presente nas técnicas de acesso multi-usuário como por exemplo CDMA. Em CDMA, cada usuário é servido por um código pseudo-aleatório individual e distinto. Esses códigos são quase descorrelacionados entre si.

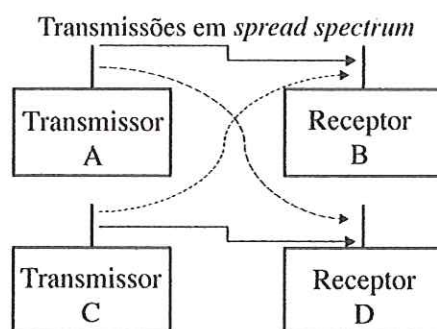


FIGURA 1.1: Múltiplo acesso.

Por outro lado, os sistemas *spread spectrum* apresentam algumas desvantagens tais como [3]:

- O código utilizado para o desespalhamento no receptor deve estar sincronizado perfeitamente com o código aplicado para espalhamento no transmissor. O erro de sincronismo sempre aparece sob condições desfavoráveis de propagação resultando em elevada degradação de performance;

- Espalhamento e desespalhamento requerem circuitos adicionais;

- Devido aos circuitos extras, o preço e o consumo de potência da maioria dos sistemas *spread spectrum* não podem ser reduzidos abaixo de um certo limite.

Nos últimos anos, o interesse na aplicação de sistemas caóticos em telecomunicações vem crescendo vertiginosamente. Os tópicos que têm sido explorados incluem a codificação caótica para segurança [4], códigos de espalhamento caóticos para sistemas *spread spectrum* de acesso multi-usuário [5-7], sistemas de comunicação de acesso múltiplo por divisão de código digital caótico [8-11] e modulação caótica para transmissão de informação analógica [12, 13] e informação digital [14, 15]. Uma das aplicações de sistemas caóticos em telecomunicações sugere uma proposta alternativa para suplantiar os problemas encontrados em sistemas *spread spectrum*.

Há vantagens ao empregar os sinais caóticos em sistemas *spread spectrum*. Esses sinais possuem amplo espectro de frequências e podem ser gerados por circuitos eletrônicos simples. Como a saída do modulador caótico é um sinal espalhado no domínio da frequência, os processos de espalhamento e desespalhamento podem ser omitidos.

No esquema de modulação digital convencional, os símbolos transmitidos são mapeados para um conjunto finito de segmentos periódicos. Em contrapartida, no esquema de modulação caótica, os símbolos são mapeados para segmentos aperiódicos. Como a correlação cruzada entre os segmentos caóticos é muito menor em relação aos segmentos periódicos, a técnica de modulação caótica tem uma inerente insensibilidade à propagação multicaminho. Dessa forma, vários esquemas de modulação caótica como o *Chaos Shift Keying* ( CSK ), o *Chaotic On-Off-Keying* ( COOK ) e o *Differential Chaos Shift Keying* ( DCSK ), têm sido propostos e suas características vêm sendo avaliadas em larga escala [14].

Dois tipos de detecção são utilizados nos processos de demodulação caótica [3]:

- Detecção coerente: forma de detecção onde cópias exatas de todas as funções-base são conhecidas no receptor;
- Detecção não-coerente: forma de detecção onde não há a necessidade de recuperação das funções-base no receptor. Algum parâmetro do sinal enviado é estimado no receptor e é utilizado para recuperação da informação.

Na detecção coerente, é necessário manter o sincronismo de fase na recepção para recuperar o sinal de informação. Entretanto, na detecção não-coerente, o

sincronismo de fase não é necessário. Diversas técnicas de sincronismo têm sido estudadas para sistemas que utilizam a detecção coerente [16] e podem ser aplicadas aos circuitos caóticos [17-19].

Neste trabalho um circuito caótico que simula o comportamento de uma partícula em caixa [18] é analisado e aperfeiçoado. As técnicas de sincronização Pecora-Carroll [14] e sincronização por realimentação de erro [14] são aplicadas a este circuito caótico. Esta análise permite verificar a utilização do circuito caótico em esquemas que utilizam detecção coerente [3, 14, 19]. A partir da técnica de sincronização por realimentação de erro [14], um novo esquema de cifragem utilizando o circuito caótico biestável é sugerido e implementado eletronicamente. O mesmo circuito é empregado, também, no desenvolvimento e implementação de um esquema análogo ao sistema em *spread spectrum*. Os dois sistemas implementados são analisados e avaliados através da técnica do diagrama de olho [20].



## Capítulo 2

### SISTEMAS CAÓTICOS

Neste capítulo será apresentada uma breve discussão a respeito das propriedades e características de sistemas caóticos. O circuito caótico que simula o comportamento de uma partícula em caixa é apresentado e analisado.

#### 2.1 Introdução

Os estudiosos em dinâmica não-linear usam a palavra “caos” como um termo técnico para se referirem à irregularidade e ao comportamento imprevisível de sistemas determinísticos não-lineares [21-23]. Contrário ao que Isaac Newton acreditava, as equações determinísticas da mecânica clássica não implicavam um universo regular e ordenado. Apesar dos físicos modernos saberem que sistemas dinâmicos, com grande número de graus de liberdade, como a atmosfera, por exemplo, podem exibir um comportamento aleatório; surpreendentemente, os sistemas determinísticos com apenas um ou dois graus de liberdade também podem ser caóticos.

Um sistema dinâmico não-linear cuja evolução do seu comportamento é altamente sensível às condições iniciais denomina-se sistema caótico. A aleatoriedade presente nos sistemas caóticos é gerada em virtude da não-linearidade presente no sistema. O mais simples exemplo de um sistema determinístico com dinâmica não-linear é o mapa logístico [21]. Este sistema é descrito pela eq.(2.1) abaixo:

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n) \quad (2.1)$$

A eq.(2.1) determina o valor futuro de uma variável  $X_{n+1}$  a partir da variável  $X_n$  (  $n$  inteiro e positivo ) em intervalos discretos de tempo  $\Delta T$ . À medida em que o parâmetro "A" é incrementado, a evolução da sequência  $X_n$ , gerada por esta simples equação algébrica, exibe uma extraordinária transição da ordem para o caos. O termo "A" é chamado parâmetro de bifurcação. Para valores de  $A > 3.57$  o diagrama de bifurcações mostra que o comportamento da sequência  $X_n$ , ao longo do tempo, é aperiódico (caótico) e varia continuamente em intervalos de  $X$ . A evolução de  $X_n$  neste intervalo é aleatória, mesmo sendo o mapa logístico totalmente determinístico. A figura 2.1 mostra o diagrama de bifurcações do mapa logístico em função do parâmetro "A".

O conhecimento da dinâmica dos sistemas caóticos pode ser de grande utilidade em diversos segmentos da engenharia, dentre eles pode-se destacar:

- Simulações que objetivam previsões;
- Modelagens de sistemas não-lineares;
- Codificação de sinais para transmissão de informações.

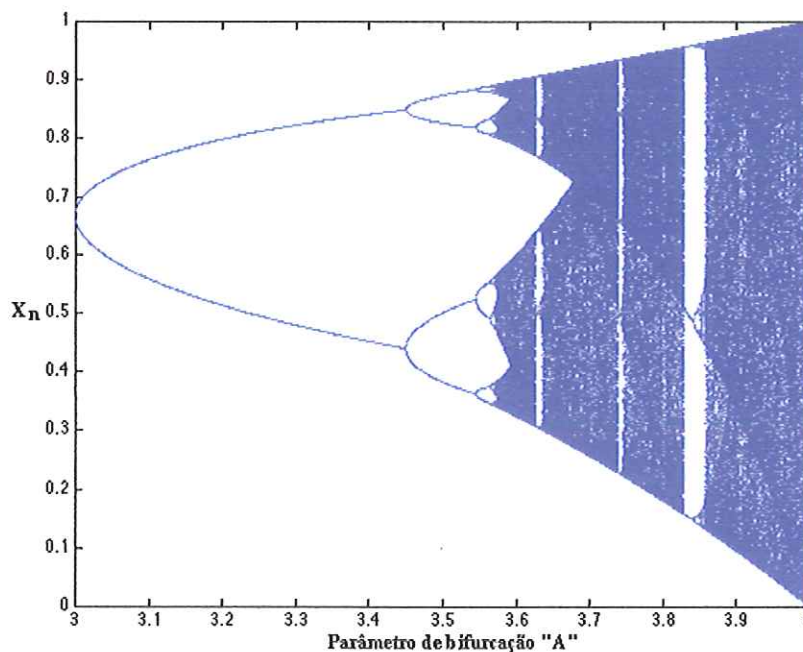


FIGURA 2.1: Dinâmica do mapa logístico em função do parâmetro "A".

## 2.2 Circuito caótico da partícula em caixa

O circuito da figura 4.1 simula eletronicamente o movimento de uma partícula dentro de uma caixa [18, 24, 25]. Esse circuito pode apresentar um comportamento caótico dependendo da escolha de seus parâmetros físicos. O comportamento do circuito é obtido pela eq.(2.2) :

$$C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + \frac{R_2 C_2}{R_1} \frac{dV_2}{dt} + f(V_2) = -\frac{V_1}{R_e} \quad (2.2)$$

em que  $V_1 = A \sin(\omega t)$  e  $f(V_2)$  corresponde à função não-linear mostrada na figura 2.3. Tal função não-linear é representada pelos dois diodos ( $D_1$  e  $D_2$  em anti-paralelo) em série com a resistência  $R_L$ .

Uma resistência ( $R_L = 510 \Omega$ ) foi colocada em série com os diodos em anti-paralelo conforme mostrado na figura 2.2. Isto foi necessário para minimizar o efeito da diferença existente entre parâmetros de dois diodos do mesmo tipo. Desta forma, foi possível aproximar os resultados experimentais aos simulados.

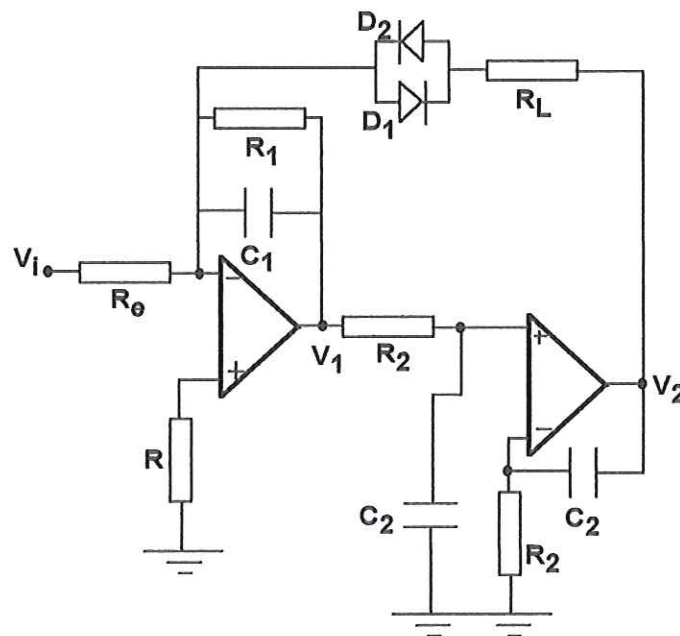


FIGURA 2.2: Circuito de uma partícula em caixa.

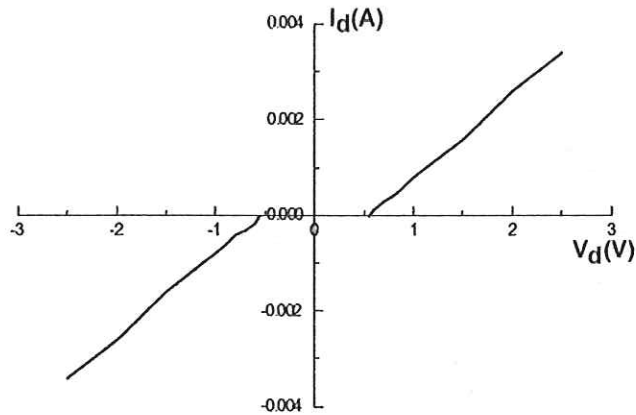


FIGURA 2.3: Curva experimental da característica dos dois diodos de silício (1N4148) em anti-paralelo em série com a resistência  $R_L$ .

## 2.3 Comportamento do circuito caótico da partícula em caixa

### 2.3.1 Resultados obtidos a partir de simulações

A normalização da eq.(2.2) foi realizada com o objetivo de visualizar os parâmetros independentes do sistema. Isso permitiu minimizar o número de parâmetros necessários para observar a dinâmica do sistema.

A eq.(2.2) foi normalizada conforme referência [18]. Considerando  $t = k\tau$  tem-se:

$$\frac{C_1 R_2 C_2}{k^2} \frac{d^2 V_2}{d\tau^2} + \frac{R_2 C_2}{R_1 k} \frac{dV_2}{d\tau} + f(V_2) = -\frac{A}{R_e} \sin(wk\tau) \quad (2.3)$$

em que  $f(V_2)$  é a função descrita pela figura 2.3.

Igualando os dois primeiros coeficientes da eq.(2.3) encontra-se:

$$k = R_1 C_1 \quad (2.4)$$

Logo a eq.(2.2) normalizada fica da seguinte forma:

$$\frac{d^2 V_2}{d\tau^2} + \frac{dV_2}{d\tau} + f(V_2) \frac{C_1 R_1^2}{R_2 C_2} = -\frac{C_1 R_1^2}{C_2 R_2} \frac{V_i}{R_e} \quad (2.5)$$

A eq.(2.5) foi simulada numericamente utilizando-se o método predictor-corrector descrito no apêndice II.

---

Os seguintes parâmetros foram utilizados nas simulações numéricas:  $R_1=47k\Omega$ ,  $R_2=R_c=10k\Omega$ ,  $C_1=C_2=12nF$ ,  $R_L=510\Omega$  e frequência do sinal oscilante da entrada  $f=1943Hz$ . Variando-se a amplitude do sinal oscilante da entrada  $V_i$ , alguns espaços de fase  $\frac{dV_2}{d\tau}$  versus  $V_2$  foram gerados e mostrados na figura 2.4. A figura 2.4(a-f) mostra a quebra de simetria do espaço de fase seguida de bifurcações com dobramento de período até um comportamento caótico. Na figura 2.4(b) é possível observar essa quebra de simetria. Aumentando ainda mais a amplitude "A" obtém-se uma bifurcação com dobramento de período na figura 2.4(c). Após sucessivas bifurcações chega-se a uma situação de caos como pode ser observado na figura 2.4(f).

Portanto, a amplitude do sinal  $V_i$  corresponde ao parâmetro de bifurcação e através dele é possível controlar a dinâmica do sistema.

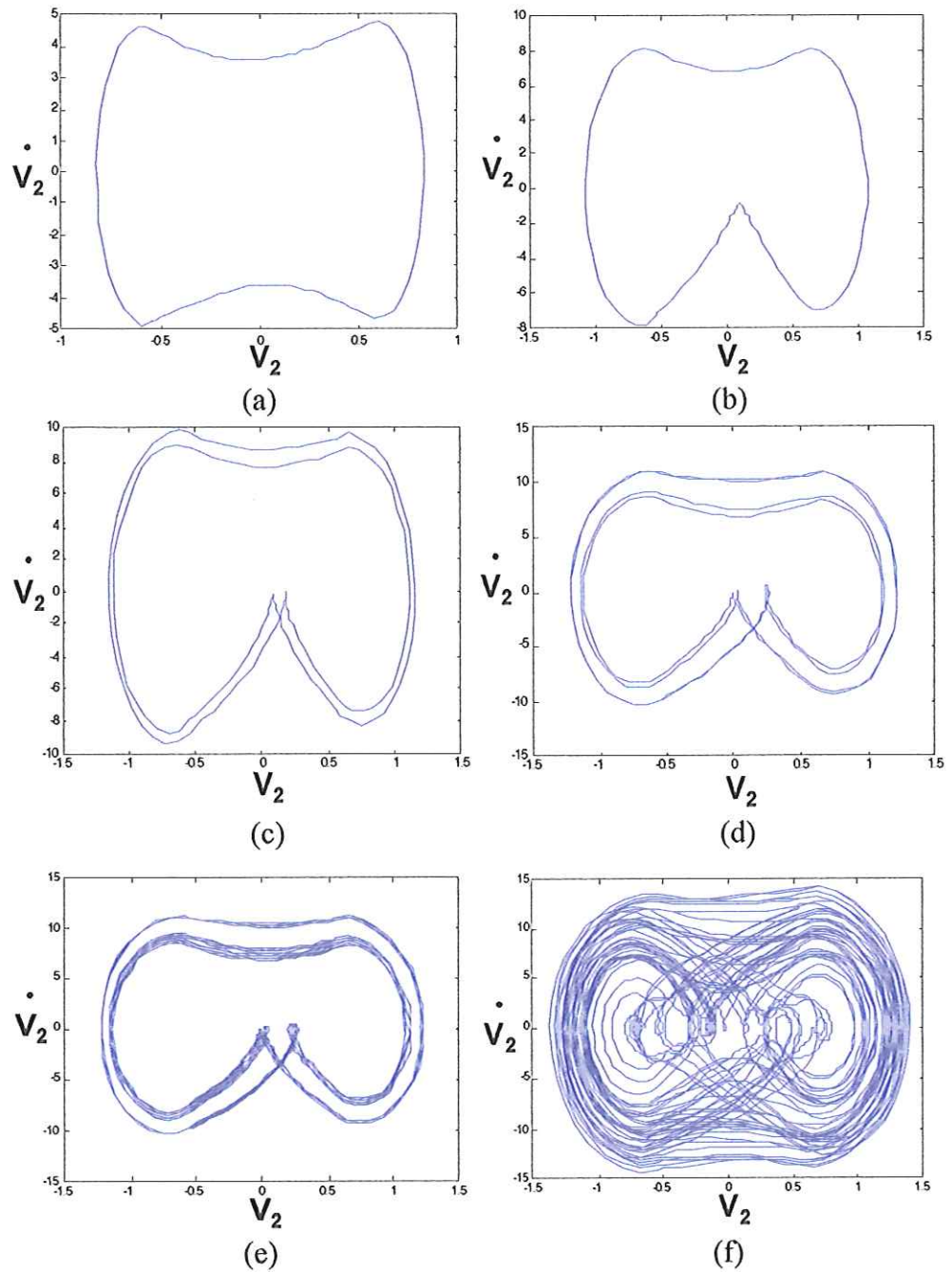


FIGURA 2.4: Espaços de fase da simulação numérica da eq.(2.5) para distintos valores de  $A$ : (a)  $A=0,8$  V; (b)  $A=2,6$  V; (c)  $A=2,97$  V; (d)  $A=3,18$  V; (e)  $A=3,2$  V; (f)  $A=3,3$  V.

### 2.3.2 Resultados experimentais

O circuito da figura 2.2 foi implementado eletronicamente com os mesmos parâmetros utilizados nas simulações numéricas:  $R_1=47k\Omega$ ,  $R_2=R_e=10k\Omega$ ,  $C_1=C_2=12nF$  e  $R_L=510\Omega$ . Vários espaços de fase, que são mostrados na figura 2.5(a-f), foram obtidos na tela do osciloscópio varrendo a amplitude A entre 0,8 V e 2,93 V.

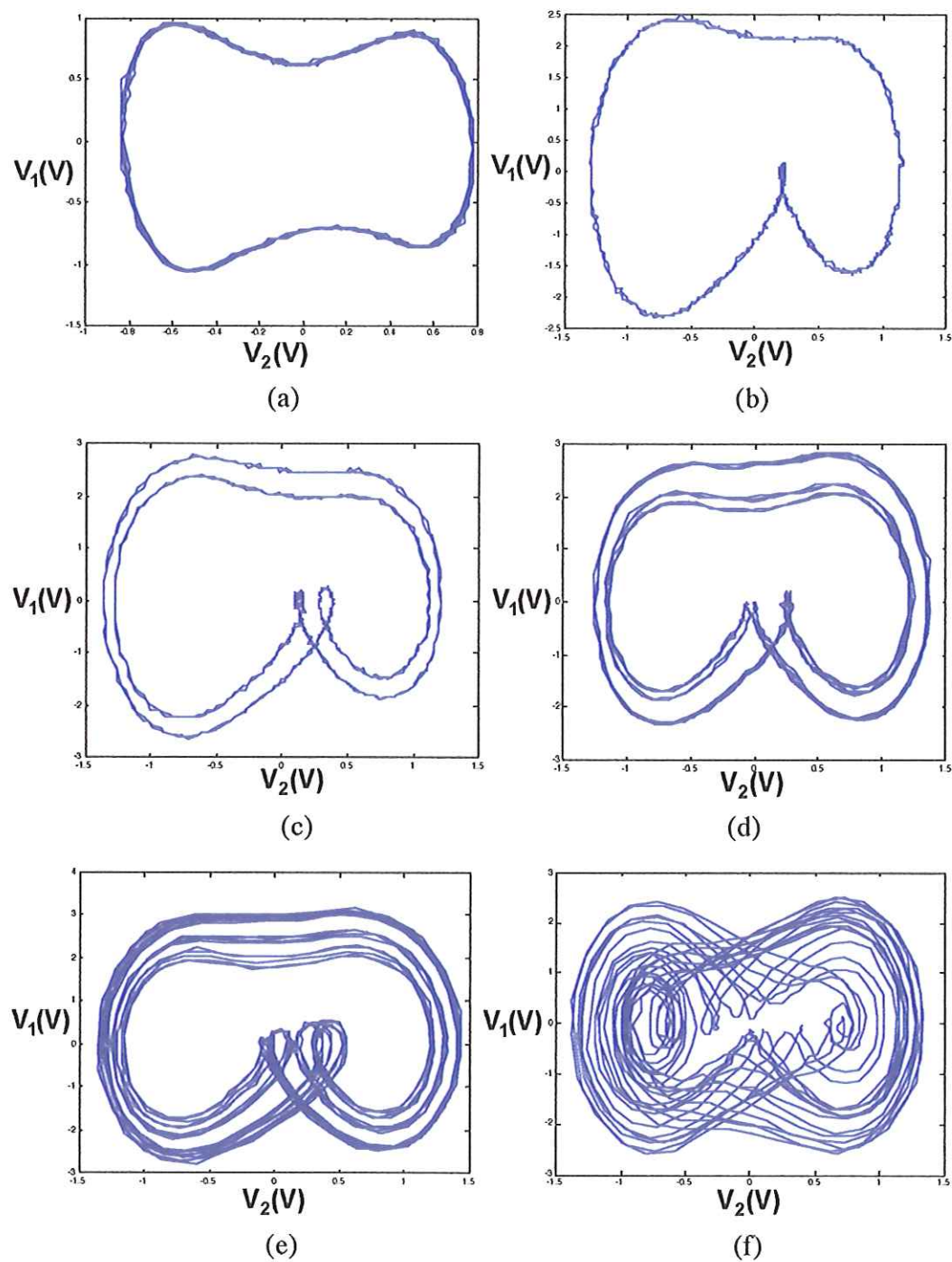


FIGURA 2.5: Espaços de fase experimentais do circuito da figura 2.2 para distintos valores de  $A$ : (a)  $A = 0,8$  V; (b)  $A = 2,6$  V; (c)  $A = 2,7$  V; (d)  $A = 2,9$  V; (e)  $A = 2,92$  V; (f)  $A = 2,93$  V.



Qualitativamente conclui-se que foram atingidos, em simulação numérica, os mesmos resultados do circuito da figura 2.2. O valor experimental da amplitude de  $V_i$  diferiu no máximo 10% do valor utilizado nas simulações. A diferença observada entre os parâmetros de bifurcação experimentais e aqueles utilizados em simulações foi de 10%.

#### **2.4 Aplicação de sistemas caóticos para transmissão de informação**

Sinais caóticos são sinais que possuem o espectro espalhado e podem ser gerados por circuitos simples, em diversas faixas de frequências e com um baixo consumo de potência [18, 24, 26]. A informação a ser transmitida é diretamente mapeada em seqüências pseudo-aleatórias amostradas a partir de uma forma de onda caótica [3, 14]. Diferentes técnicas de modulação baseadas na modulação caótica estão sendo propostas para sistemas de comunicação. Algumas vantagens dessas técnicas de modulação são:

- Menor complexidade para os processos de modulação e demodulação;
- Maior eficiência quanto ao problema de desvanecimento por multicaminho;
- Cifragem de mensagens.

A recuperação do sinal caótico transmitido pode ser feita ou por meio de detecção coerente-fase, onde todas as possíveis funções amostras são conhecidas e utilizadas como sinais de referência em um correlator; ou por detecção não-coerente, onde uma ou mais características das funções amostras são estimadas. Receptores coerentes baseados em sincronização podem apresentar algumas vantagens sobre receptores não-coerentes em termos da performance ao ruído, eficiência em largura de banda e taxa de dados [3].

A demodulação caótica também pode ser implementada utilizando-se esquemas de sincronização idêntica [14], também chamados de sincronização mestre-escravo. As abordagens clássicas para a sincronização mestre-escravo de sistemas unidirecionais acoplados são: sincronização Pecora-Carroll e sincronização por realimentação de erro. Considerando a linguagem da teoria de controle, a sincronização Pecora-Carroll corresponde à estimação em malha aberta e a sincronização por realimentação de erro corresponde à estimação em malha fechada [14].

## Capítulo 3

### SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

Neste capítulo serão apresentadas técnicas de sincronismo que podem ser aplicadas em sistemas caóticos. Essas técnicas de sincronismo serão aplicadas ao circuito caótico da partícula em caixa.

#### 3.1 Sincronização Pecora-Carroll

No esquema de sincronização mestre–escravo proposto por Pecora e Carroll [16], um sistema dinâmico caótico

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

com saída escalar  $g(t) = h(x)$ , como mostrado na figura 3.1, é decomposto em dois subsistemas com estados  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, g(t)) \quad (3.3)$$

onde  $x = (x_1, x_2)$  e  $g(t) = h(x_1(t), x_2(t))$  é o sinal de saída, conforme ilustração da figura 3.2.

É possível realizar a decomposição do sistema da figura 3.1 de tal forma que o subsistema 2, representado pela eq.(3.3), tenha expoentes condicionais de Lyapunov ( *Conditional Lyapunov Exponents* - CLEs ) negativos [14, 16] ( vide apêndice I ). Segundo Pecora e Carroll [16], se o subsistema 2 for composto por elementos passivos, os CLEs desse subsistema serão negativos, o que caracteriza a estabilidade deste subsistema quando esse é governado por  $g(t)$  [16]. Isto significa que o estado de duas ou

mais “cópias” do subsistema 2 irão se sincronizar, identicamente, quando governados pela mesma entrada  $g(t)$ . Essa é a base do esquema de sincronização mestre-escravo proposto por Pecora e Carroll.

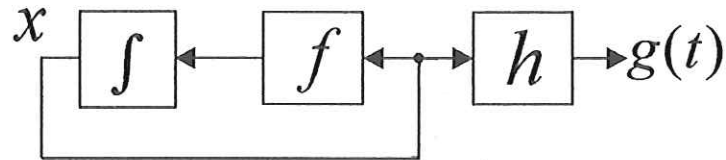


FIGURA 3.1: Diagrama em blocos do sistema descrito por  $\dot{x} = f(x)$ .

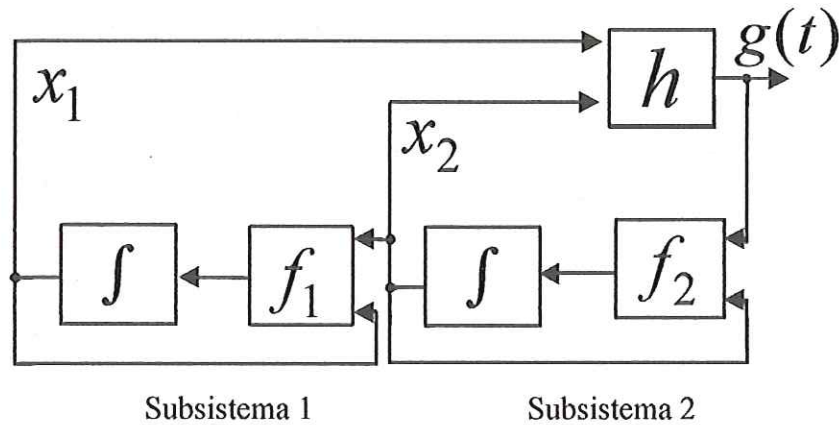


FIGURA 3.2: Decomposição Pecora-Carroll do sistema da figura 3.1, descrito pelas equações  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$  e  $\dot{x}_2 = f_2(x_2, g(t))$ .

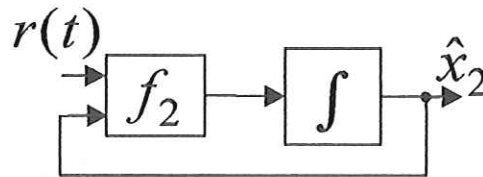


FIGURA 3.3: Cópia do subsistema 2.

Considerando a cópia do subsistema 2, mostrado na figura 3.3, temos:

$$\dot{\hat{x}}_2 = f_2(\hat{x}_2, r(t)) \quad (3.4)$$

Se os CLEs deste subsistema forem negativos,  $\hat{x}_2(0)$  se encontrar suficientemente próximo de  $x_2(0)$  e, ainda, se  $r(t) = g(t)$ , o estado  $\hat{x}_2$  do sistema escravo convergirá assintoticamente para  $x_2$ , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \hat{x}_2(t) - x_2(t) \right| = 0 \quad (3.5)$$

Em uma implementação real, o sistema mestre descrito pela eq.(3.1) produzirá uma função caótica  $g(t)$  que será transmitida diretamente através do canal e recebida de forma ruidosa e distorcida como  $r(t)$ . O objetivo da sincronização é estimar  $g(t)$  dado que  $r(t) \neq g(t)$ . Dessa maneira, o sistema escravo deverá assumir a função de estimador de estados. Os valores para  $x$ , deverão também ser estimados e podem ser obtidos utilizando-se a técnica de sincronização mestre-escravo em cascata, onde um segundo subsistema escravo é adicionado e dirigido pelo primeiro como mostrado na figura 3.4. Nesse sistema temos:

$$\dot{\hat{x}}_2 = f_2(\hat{x}_2, r(t)) \quad (3.6)$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad (3.7)$$

Se o subsistema descrito pela eq.(3.6) for passivo,  $\hat{x}_2(0)$  se encontrar suficientemente próximo de  $x_2(0)$  e, ainda, se  $r(t) = g(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$  deverá convergir assintoticamente para  $x_2(t)$ . Se o subsistema descrito pela eq.(3.7) também for passivo,  $\hat{x}_1(t)$  convergirá assintoticamente para  $x_1(t)$ , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \hat{x}_1(t) - x_1(t) \right| = 0 \quad (3.8)$$

e a saída  $\hat{g}(t) = h(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))$  convergirá assintoticamente para  $g(t)$ . Dessa maneira,  $g(t)$  poderá, em princípio, ser recuperado a partir do sinal recebido  $r(t)$ .

A sincronização mestre-escravo pelo método Pecora-Carroll é fundamentalmente uma técnica de estimação de estado em malha aberta. Estimadores em malha aberta são sensíveis ao ruído e à desigualdade dos parâmetros. A performance do receptor em uma configuração mestre-escravo pode ser melhorada significativamente pela adição de uma realimentação no estimador de estado. Essa técnica é conhecida como sincronização por realimentação de erro.

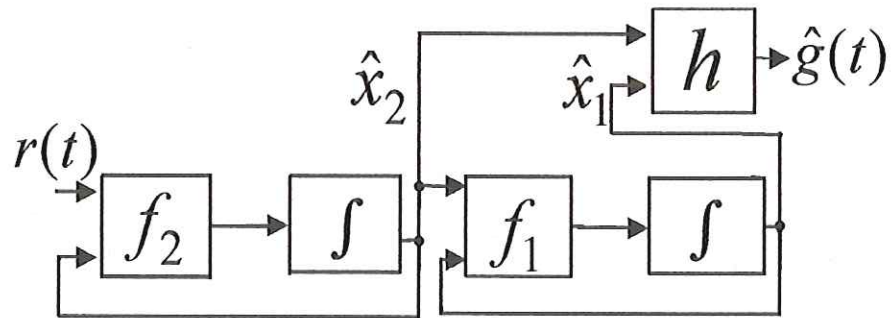


FIGURA 3.4: Estimação de  $x_1$  e  $g(t)$  utilizando-se a técnica de sincronização Pecora-Carroll (mestre-escravo) em cascata.

### 3.2 Sincronização por realimentação de erro

Neste tipo de sincronização, o objetivo do sistema escravo é estimar  $g(t)$  dada uma observação ruidosa do sinal,  $r(t)$ . A sincronização por realimentação de erro é uma técnica que utiliza a diferença instantânea entre a estimação de  $g(t)$ , dada por  $\hat{g}(t)$  e o sinal recebido  $r(t)$ , para produzir um sinal de erro  $e(t)$  que modifica o estado do receptor para minimizar o erro [14, 16]. Uma vez que  $g(t)$  é gerado pelo sistema mostrado na figura 3.2, o sistema sincronizável por realimentação de erro tem a estrutura dada pela figura 3.5. Considerando esse sistema, temos que:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + e(e(t)) \quad (3.9)$$

sendo 
$$e(t) = r(t) - \hat{g}(t) \quad (3.10)$$

e 
$$\hat{g}(t) = h(\hat{x}) \quad (3.11)$$

A escolha apropriada de  $h(\cdot)$  e  $e(\cdot)$ , resulta em

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\hat{x}(t) - x(t)| = 0 \quad (3.12)$$

Se  $\hat{x}$  converge para  $x$ ,  $\hat{g}(t)$  irá convergir para  $g(t)$ .

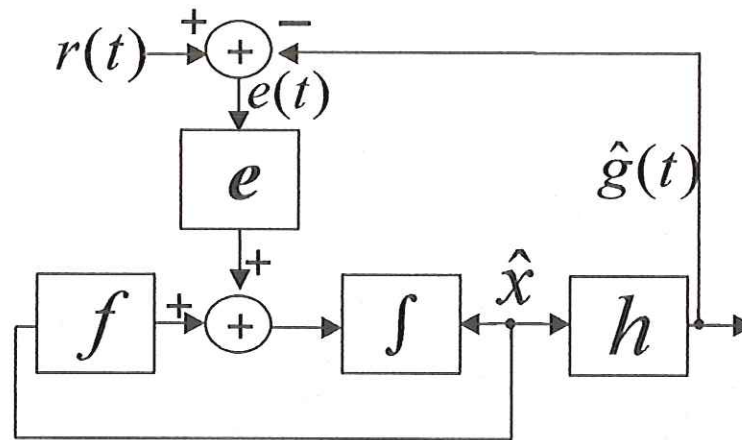


FIGURA 3.5: Sincronização por realimentação do sinal de erro.

### 3.3 Aplicação das técnicas de sincronismo

#### 3.3.1 Aplicação da técnica Pecora-Carroll

Como foi visto anteriormente, a técnica de sincronização Pecora-Carroll é um método de estimação de estados em malha aberta. Para utilizarmos essa técnica a equação dinâmica caótica, eq. 2.2, deve ser decomposta em um sistema de variáveis de estado da seguinte forma:

$$\dot{V}_1 = -\frac{V_1}{R_1 C_1} - \frac{f(V_2)}{C_1} - \frac{V_1}{C_1 R_o} \quad (3.13)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{V_1}{R_2 C_2} \quad (3.14)$$

onde  $V_1$  é a entrada do sistema e  $f(V_2)$  é a função descrita pela figura 2.3.

As eqs.(3.13-14) são representadas por elementos passivos e, portanto, possuem coeficientes condicionais de Lyapunov (CLEs) negativos [14]. Desta forma, é possível aplicar as técnicas descritas na seção 3.2.

O sistema mestre foi implementado eletronicamente a partir da eq.(2.2). O circuito que representa o sistema mestre é mostrado na figura 3.6.

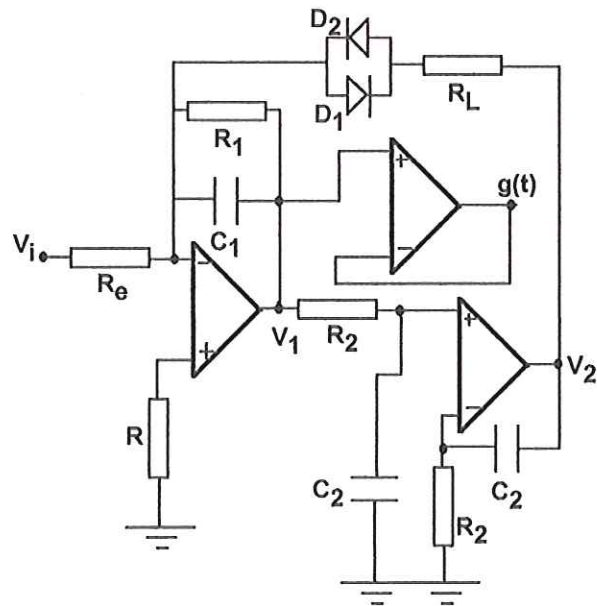


FIGURA 3.6: Circuito mestre.

O sistema escravo foi implementado considerando a eq.(3.13) como subsistema 1 e a eq.(3.14) como subsistema 2.

A implementação física do subsistema 1 encontra-se na figura 3.7.

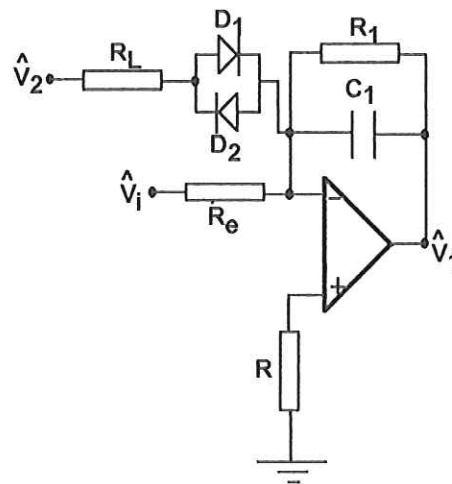


FIGURA 3.7: Circuito do subsistema 1.

A implementação física do subsistema 2 encontra-se na figura 3.8.

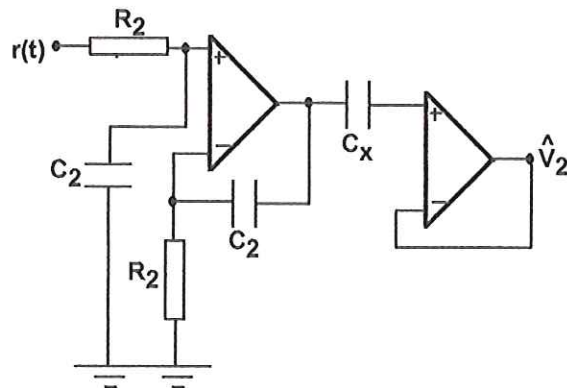
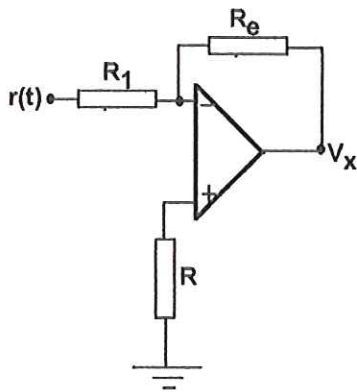
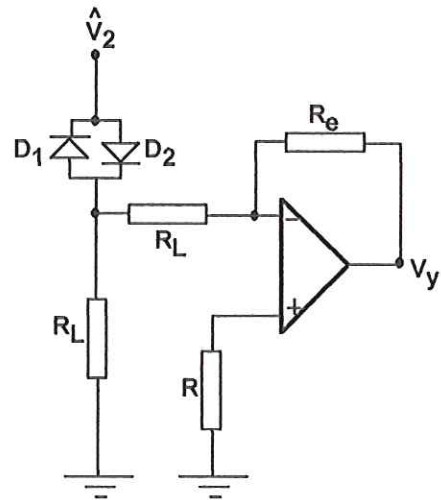


FIGURA 3.8: Circuito do subsistema 2.

O sinal escolhido para ser enviado é  $V_1$ , que foi selecionado por apresentar maior aleatoriedade. O circuito mestre será conectado ao circuito escravo através de uma linha de transmissão. Esse sinal sofre distorção introduzida pelo canal de transmissão e é contaminado por ruído tornando-se  $r(t)$ . Quando  $r(t)$  é recebido pelo sistema escravo (subsistema 2) o sinal  $V_2$  é estimado obtendo-se  $\hat{V}_2$ . O capacitor  $C_x$  ( figura 3.8 ) é necessário para eliminar a componente DC presente no sinal proveniente do integrador não-inversor. Em seguida  $\hat{V}_2$  é utilizado para estimar  $V_i$  obtendo-se  $\hat{V}_i$ . Os sistemas utilizados para estimar  $V_i$  são apresentados nas figuras 3.9-12. Primeiramente,  $r(t)$  é aplicado ao circuito da figura 3.9 sofrendo amplificação, obtendo-se  $V_X$ . O sinal  $\hat{V}_2$  é aplicado ao circuito da figura 3.10 obtendo-se  $V_Y$ . O sinal  $r(t)$  também é aplicado ao circuito da figura 3.11 obtendo-se  $V_Z$ . Em seguida, os sinais  $V_X$ ,  $V_Y$  e  $V_Z$  são empregados no circuito da figura 3.12 para obtenção de  $\hat{V}_i$ . Aplicando os sinais  $\hat{V}_i$  e  $\hat{V}_2$  ao circuito da figura 3.7 (subsistema 1), obtém-se  $\hat{V}_1$ .



FIGURA 3.9: Circuito que gera  $V_X$ .FIGURA 3.10: Circuito que gera  $V_Y$ .

Os modelos matemáticos dos circuitos das figuras 3.9 e 3.10 são:

$$V_X = -\frac{R_e}{R_1} r(t) \quad (3.15)$$

$$V_Y = -R_e I_L \quad (3.16)$$

onde  $I_L$  é a corrente que passa pelos diodos em antiparalelo quando  $\hat{V}_2$  é aplicado como mostrado no circuito da figura 3.10.

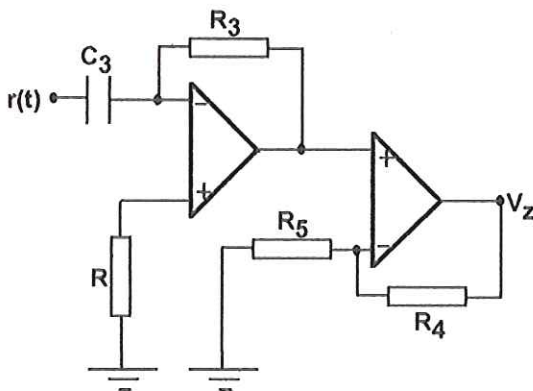
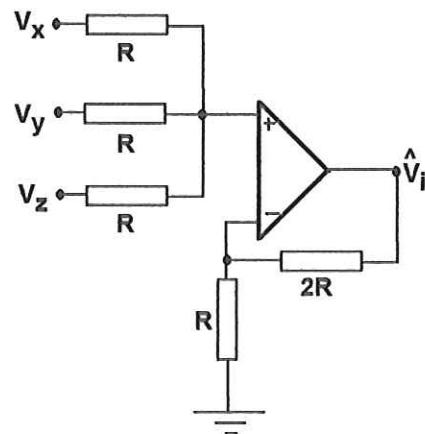
FIGURA 3.11: Circuito que gera  $V_Z$ .

FIGURA 3.12: Estimação do sinal oscilante.

Os modelos matemáticos dos circuitos das figuras 3.11 e 3.12 são:

$$V_Z = -R_e C_1 \dot{r}(t) \quad (3.17)$$

$$R_e C_1 = C_3 R_3 \frac{R_4 + R_5}{R_5} \quad (3.18)$$

$$\hat{V}_i = V_x + V_y + V_z \quad (3.19)$$

### 3.3.2 Aplicação da técnica de sincronismo por realimentação de erro

Esta técnica é conhecida por estimação em malha fechada. O sistema mestre continua sendo representado pelo circuito da figura 3.6. O sistema escravo pode ser escrito na forma de variáveis de estado como:

$$\dot{\hat{V}}_1 = -\frac{\hat{V}_1}{C_1 R_e} - \frac{f(\hat{V}_2)}{C_1} - \frac{\hat{V}_1}{R_1 C_1} - \frac{\hat{V}_1}{C_1 R_{re}} + \frac{r(t)}{R_{re} C_1} \quad (3.20)$$

$$\dot{\hat{V}}_2 = \frac{\hat{V}_1}{R_2 C_2} \quad (3.21)$$

Em que  $V_i$  é a entrada do sistema e  $f(\hat{V}_2)$  é a função descrita pela figura 2.3.

As eqs.(3.20) e (3.21) são representadas por elementos passivos e portanto, possuem coeficientes condicionais de Lyapunov (CLEs) negativos [14]. Assim sendo, é possível aplicar a técnica descrita na seção 3.3. O sinal oscilante  $V_i$  foi estimado conforme descrito anteriormente na seção 3.3.1. O sistema escravo é mostrado na figura 3.13. O sinal  $r(t)$  corresponde ao sinal enviado pelo sistema mestre contaminado por ruído durante o percurso transmissor-receptor. O sinal que contém a informação de frequência corresponde a  $V_1(t)$ , cuja recuperação é realizada a partir de uma realimentação de erro dada por  $e(t) = \hat{V}_1(t) - r(t)$ . O sinal realimentado surge da diferença entre o sinal estimado  $\hat{V}_1(t)$  e o sinal ruidoso  $r(t)$ .

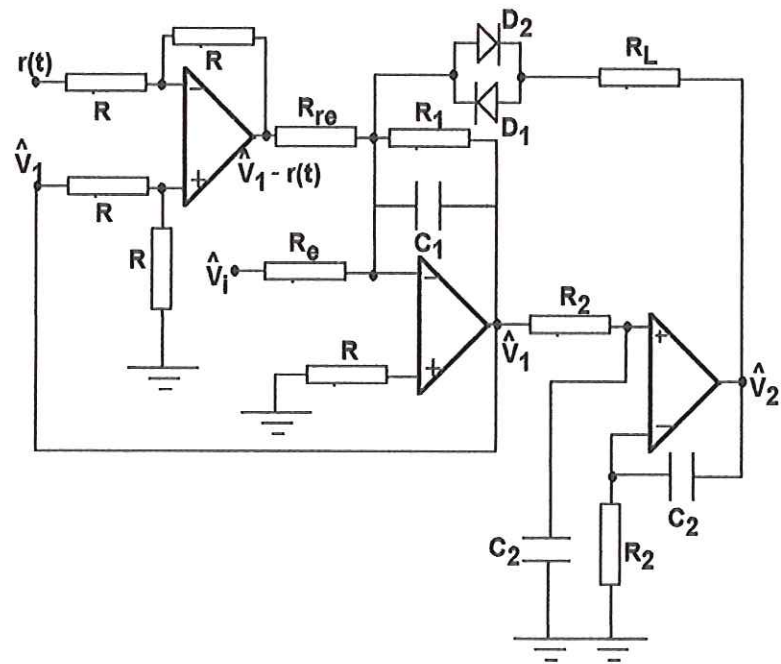


FIGURA 3.13: Sistema escravo da estimação por realimentação de erro.

### 3.4 Análise da implementação Pecora-Carroll

#### 3.4.1 Resultados de simulações

Para realização das simulações foi implementado um programa em Fortran que aplica o método previsor-corretor com discretização trapezoidal (vide apêndice II) para solução da equação diferencial ordinária eq.(2.2) [18]. Segundo a técnica Pecora-Carroll o sinal  $V_1$  é enviado diretamente ao receptor sem linha de transmissão e a partir dele,  $V_2$  é estimado obtendo-se  $\hat{V}_2$ . A partir de  $\hat{V}_2$  estima-se  $V_1$  obtendo-se  $\hat{V}_1$ . O sinal  $\hat{V}_1$  é obtido através da técnica descrita na seção 3.3.1. As simulações foram realizadas tendo como parâmetros:

- Amplitude do sinal oscilante da entrada ( $V_i=5,43V$ );
- Frequência do sinal oscilante da entrada ( $f=1943Hz$ );
- Valores dos componentes do sistema:  $R_1=47k\Omega$ ,  $R_2=R_e=10k\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$  e  $C_1=C_2=12nF$ .

A primeira simulação foi feita sem inserir ruído ao sinal transmitido  $V_1$ .

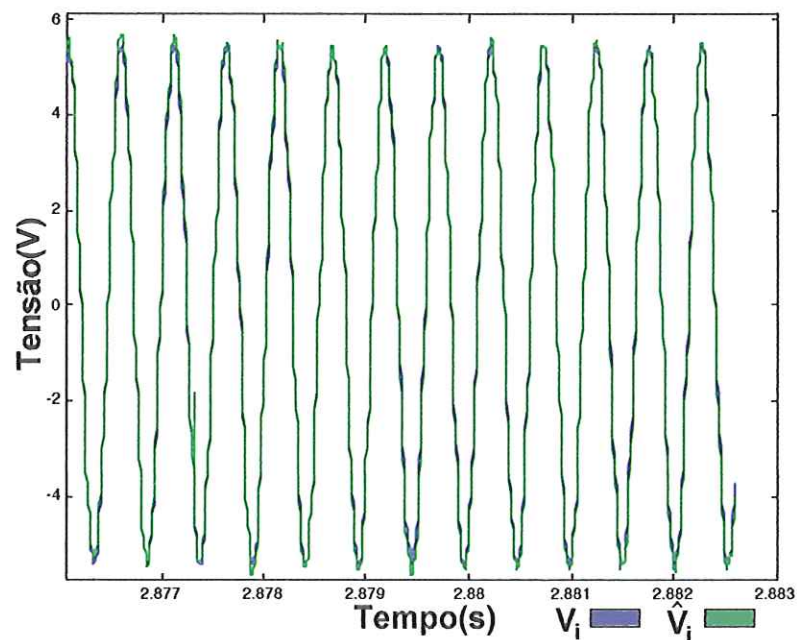


FIGURA 3.14: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

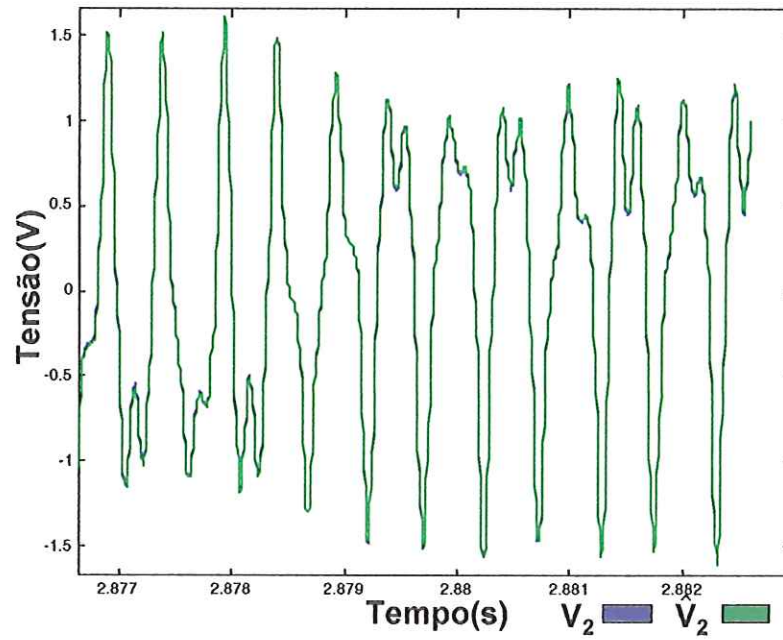


FIGURA 3.15: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

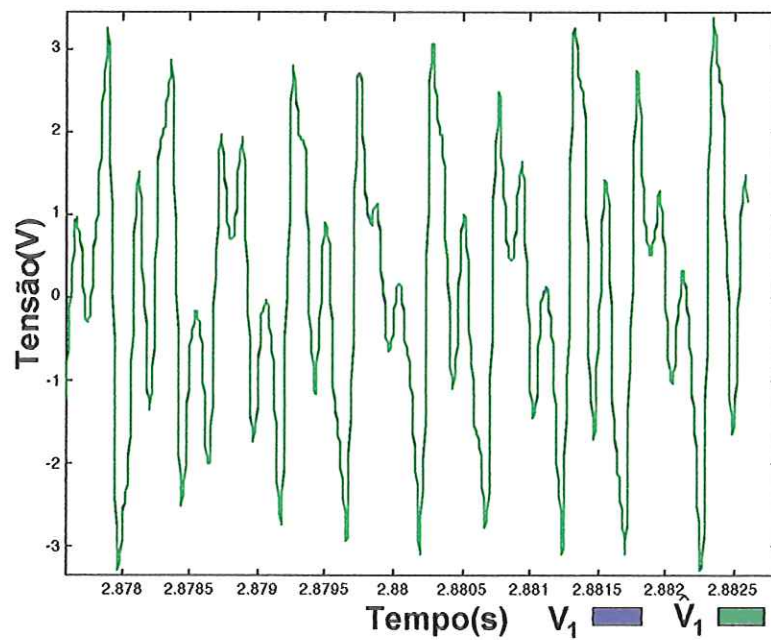


FIGURA 3.16: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

Observando a figura 3.14 é possível notar a perfeita recuperação do sinal  $V_i$ . Os sinais  $V_2$  e  $V_1$  também foram perfeitamente recuperados como mostrado nas figuras 3.15 e 3.16, respectivamente. Neste processo de estimação de  $V_i$  a informação de frequência foi preservada. Nessa perspectiva, quando não há ruído adicionado ao sinal transmitido  $V_i$  a recuperação dos sinais é praticamente perfeita.

A próxima simulação foi realizada com a adição de um ruído com amplitude de  $5 \times 10^{-3}V$ , de acordo com a figura 3.20. Tal ruído foi gerado a partir da equação do mapa logístico eq.(2.1) operando numa região caótica. Neste caso, o sinal aleatório gerado pela eq.(2.1) está bem próximo ao ruído branco e, portanto, foi utilizado para simular um canal ruidoso.

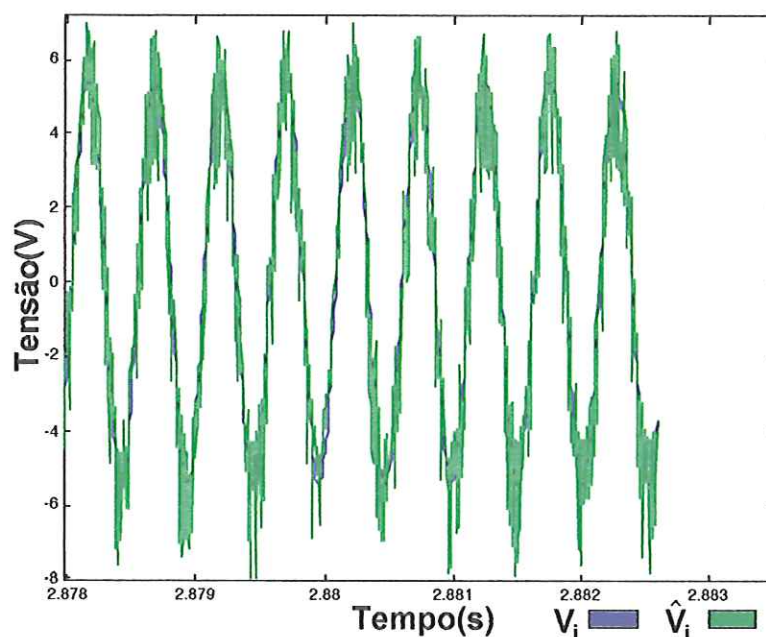


FIGURA 3.17: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

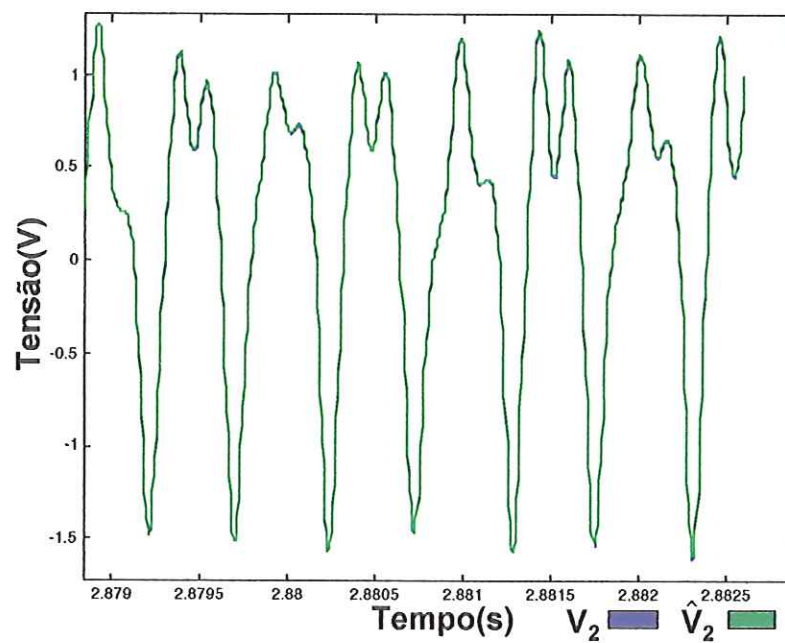


FIGURA 3.18: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

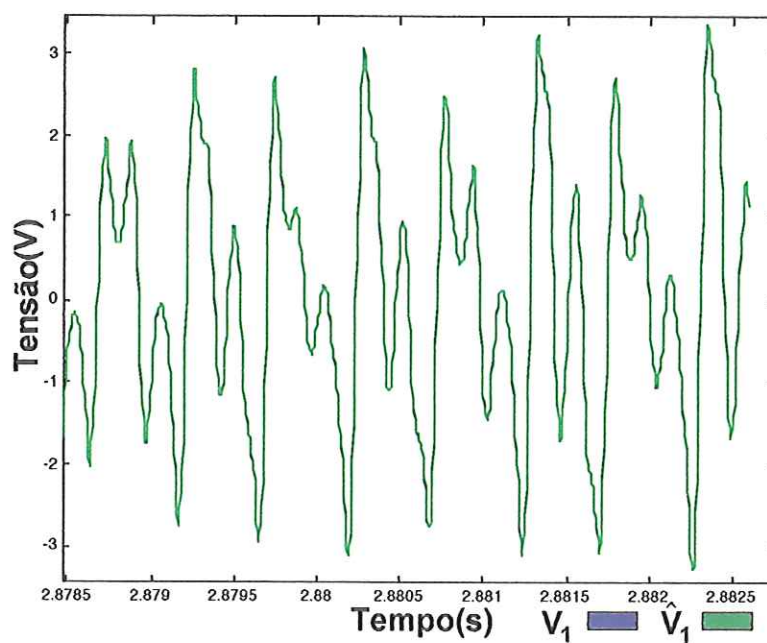


FIGURA 3.19: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

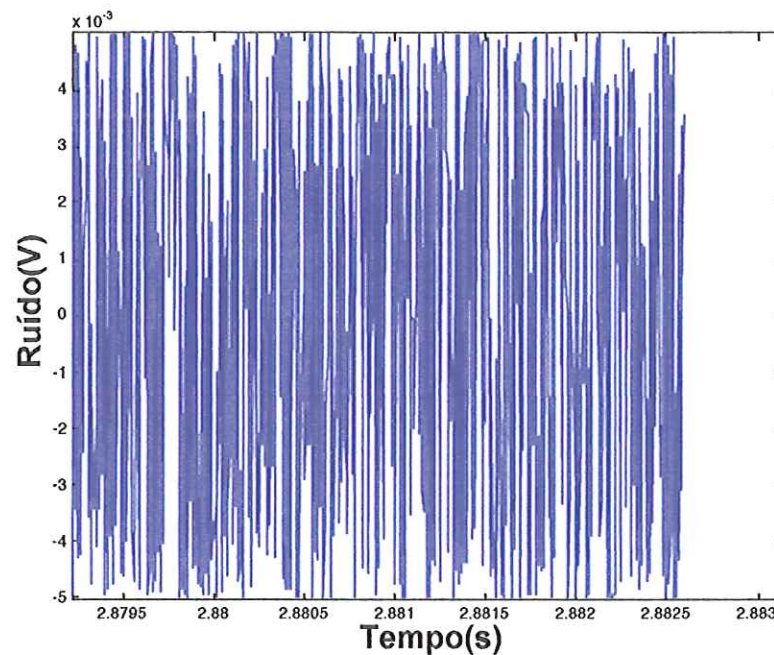


FIGURA 3.20: Ruído adicionado ao sinal transmitido  $V_1$ .

Quando é adicionado um ruído da ordem de  $5 \times 10^{-3} \text{V}$ , ilustrado pela figura 3.20, ao sinal enviado  $V_1$  da figura 3.19, conclui-se que:

- O sinal  $\hat{V}_i$  apresenta-se ruidoso mas preserva a informação de frequência do sinal  $V_i$ ;
- Os sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  não apresentam problemas de sincronismo com os respectivos sinais  $V_1$  e  $V_2$ .

### 3.4.2 Resultados experimentais

Para realização dos testes experimentais foram implementados os seguintes circuitos:

- Sistema mestre, conforme figura 3.6 com os mesmos valores de componentes usados nas simulações da seção anterior ( $R_1=47\text{k}\Omega$ ,  $R_2=R_e=10\text{k}\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$  e  $C_1=C_2=12\text{nF}$ );
- Sistema escravo, presente nas figuras 3.7-12 com os seguintes valores de componentes ( $R_1=47\text{k}\Omega$ ,  $R_2=R_e=10\text{k}\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$ ,  $R=1\text{k}\Omega$  e  $C_x=C_1=C_2=12\text{nF}$ ). Os valores de  $C_3$  e  $R_3$  foram ajustados para que o derivador respondesse até a frequência



de 100kHz. Portanto, para  $C_3=1\text{nF}$ ,  $R_3=1591,55\text{Hz}$  e  $R_5=1\text{k}\Omega$  tem-se  $R_4=74398,2\Omega$  segundo a eq.(3.18).

Inicialmente um sinal oscilante  $V_i$  com amplitude 3,4V e frequência 1647Hz, vide figura 3.21 abaixo, foi utilizado como mensagem a ser transmitida.

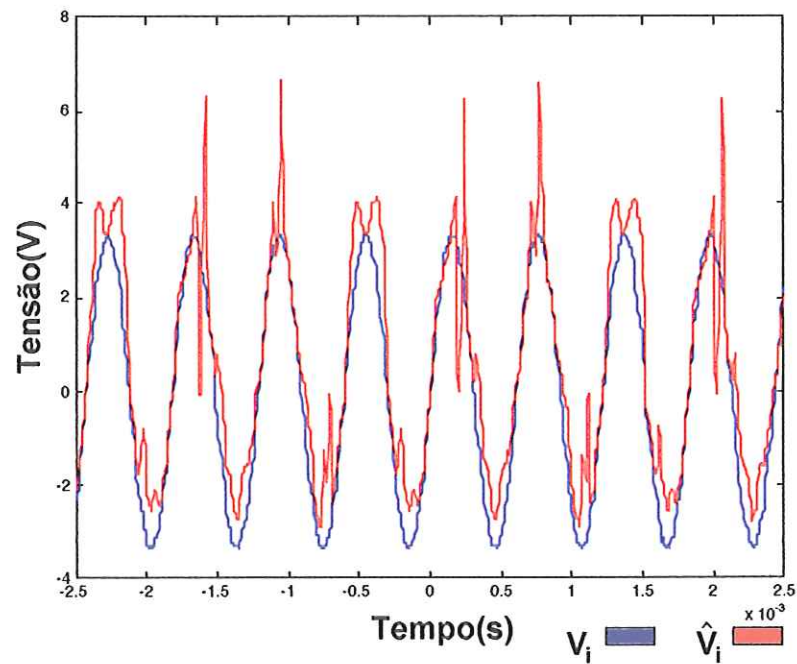


FIGURA 3.21: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

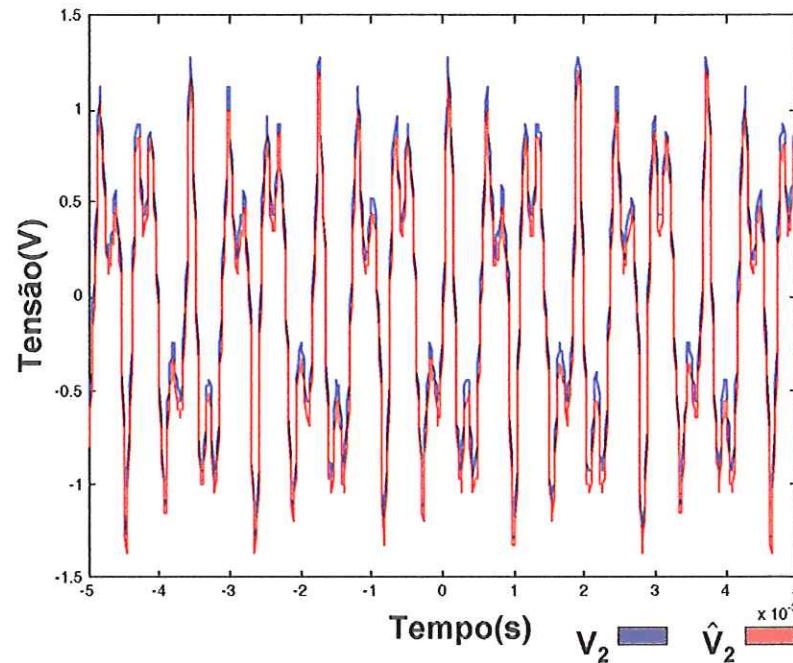


FIGURA 3.22: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

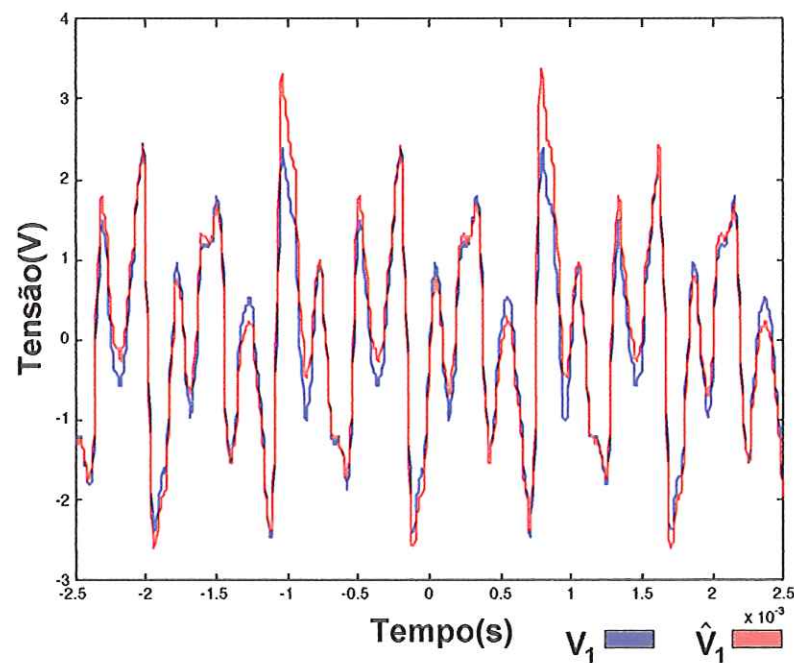


FIGURA 3.23: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

Observando a figura 3.21, nota-se que o sinal  $V_i$  é recuperado com algumas distorções, entretanto, a informação de frequência de  $V_i$  é preservada em  $\hat{V}_i$ . Embora com algumas distorções, os sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  seguem respectivamente os sinais  $V_1$  e  $V_2$  como podem ser observados nas figuras 3.22 e 3.23.

Um outro sinal  $V_i$  com amplitude 4,35V e frequência 1846Hz, visualizado na figura 3.24, foi utilizado como mensagem a ser transmitida..

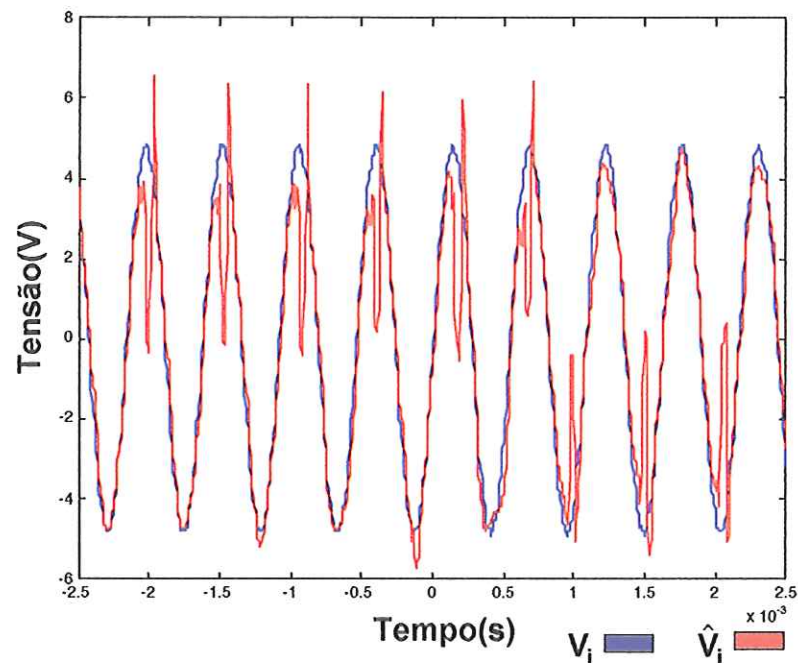


FIGURA 3.24: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

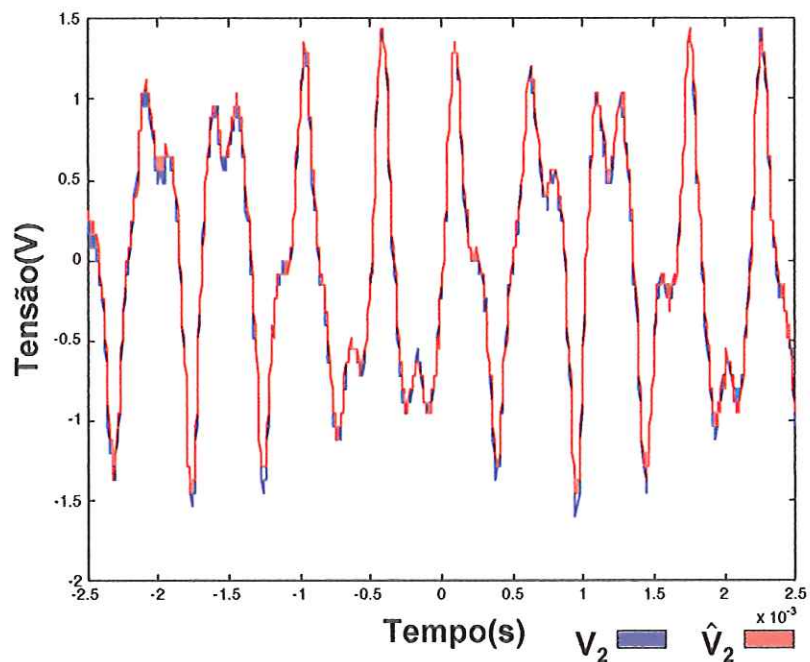


FIGURA 3.25: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

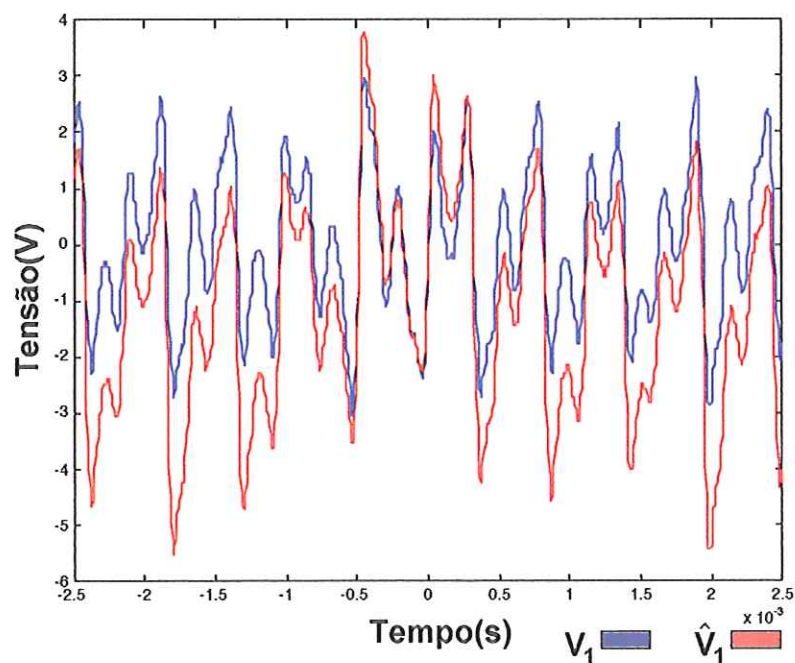


FIGURA 3.26: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

O sinal  $\hat{V}_1$  da figura 3.24 apresenta algumas distorções. O sinal  $\hat{V}_2$  está em sincronismo com  $V_2$  como pode ser observado na figura 3.25. O sinal  $\hat{V}_1$  não está seguindo perfeitamente o sinal  $V_1$  como pode ser observado na figura 3.26. A informação de frequência do sinal  $V_i$  continua sendo preservada em  $\hat{V}_i$  como mostrado na figura 3.24.

Um novo sinal  $V_i$  com amplitude 5,0V e frequência 2494Hz de acordo com a figura 3.27, foi utilizado como mensagem a ser transmitida..

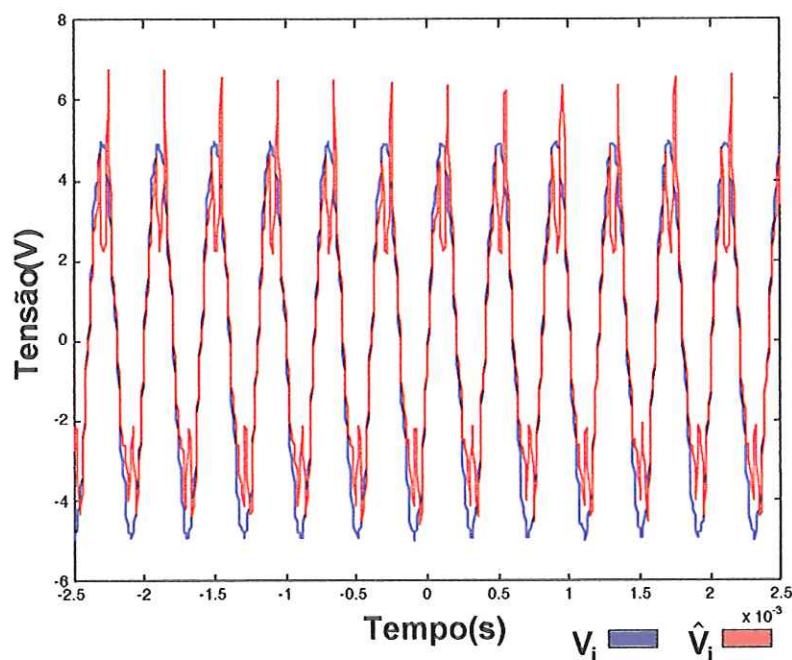


FIGURA 3.27: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

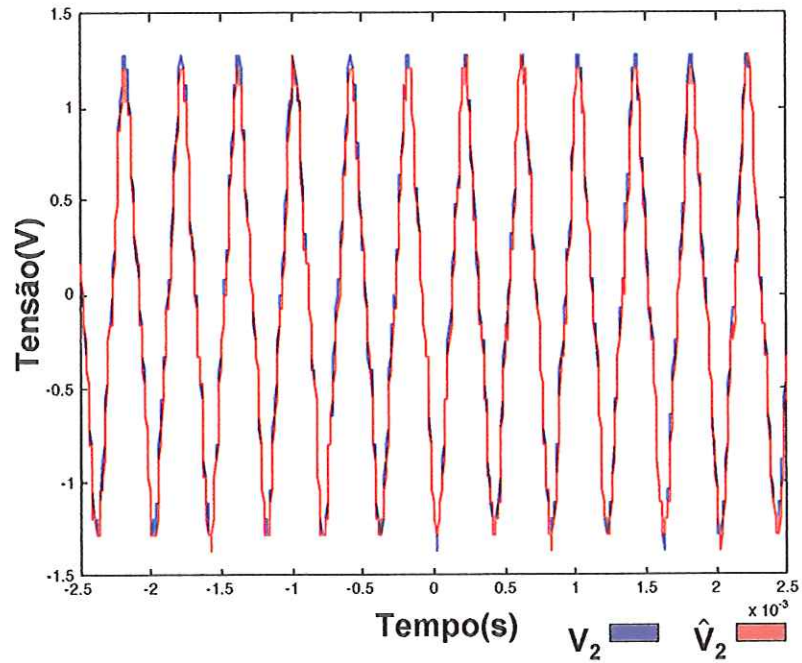


FIGURA 3.28: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

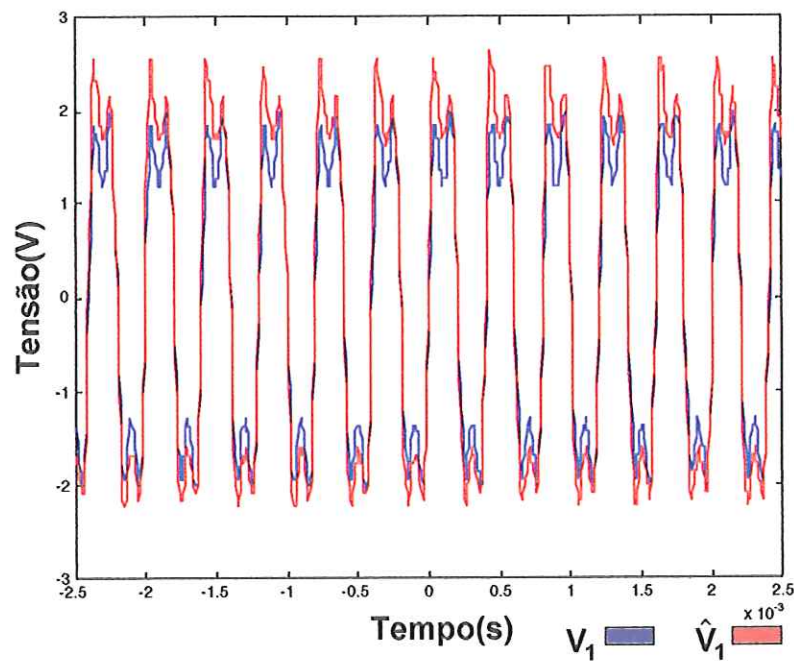


FIGURA 3.29: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

A recuperação do sinal  $V_i$  ilustrado na figura 3.27 continua apresentando algumas distorções, mas a informação de frequência continua sendo preservada. Tanto o sinal  $\hat{V}_1$  quanto o sinal  $\hat{V}_2$  estão praticamente seguindo os respectivos sinais  $V_1$  e  $V_2$  como podem ser observados nas figuras 3.28 e 3.29.

Visualizando os resultados mostrados nas figuras 3.21-29, percebe-se que:

- O sinal  $\hat{V}_i$  sempre apresenta algumas distorções. Isto deve-se ao atraso de fase existente entre  $\hat{V}_2$  e  $r(t)$  utilizados no processo de estimação de  $V_i$ . O sinal  $V_i$  está sendo estimado em malha aberta;
- O sinal  $V_2$  sempre é recuperado sem problemas;
- O sinal  $\hat{V}_1$  sempre apresenta alguma discordância em relação a  $V_1$ . Tal fato deve-se à estimação de  $V_1$  que depende, também, do sinal  $\hat{V}_i$  que já apresenta distorções. Além disso, o sinal  $V_1$  está sendo estimado em malha aberta.

Tendo em vista os fatos observados acima, é possível notar que o método de sincronização Pecora-Carroll permite uma estimação em malha aberta de  $V_1$  com distorções. Isso seria um problema caso fosse implementar sistemas de telecomunicações. Um ruído na linha de transmissão poderia impedir a recuperação de  $V_1$  e, portanto, inviabilizar o processo de detecção de informação. Uma solução para melhorar o processo de recuperação de  $V_1$  seria aplicar a técnica de estimação por realimentação de erro [14].

### 3.5 Análise da implementação com realimentação de erro

#### 3.5.1 Resultados de simulações

Para a realização das simulações foi implementado um programa em Fortran que aplica o método previsor-corretor com discretização trapezoidal para solucionar a equação diferencial ordinária eq.(2.2) [18], vide apêndice II. Segundo a técnica Pecora-Carroll, o sinal  $V_1$  é enviado diretamente ao receptor sem linha de transmissão e a partir dele,  $V_2$  é estimado obtendo-se  $\hat{V}_2$ . A partir de  $\hat{V}_2$  estima-se  $V_1$  obtendo-se  $\hat{V}_1$ . O sinal  $\hat{V}_1$  é obtido pela técnica descrita na seção 3.3.1. As simulações foram realizadas tendo como parâmetros:

- Amplitude do sinal oscilante da entrada ( $V_i=5,43V$ );
- Frequência do sinal oscilante da entrada ( $f=1943Hz$ );
- Valores dos componentes do sistema:  $R_1=47k\Omega$ ,  $R_2=R_c=10k\Omega$ ,  $R_L=510 \Omega$  e  $C_1=C_2=12nF$ .

Inicialmente, foi realizada uma simulação sem adição de ruído ao sinal enviado  $V_1$ .



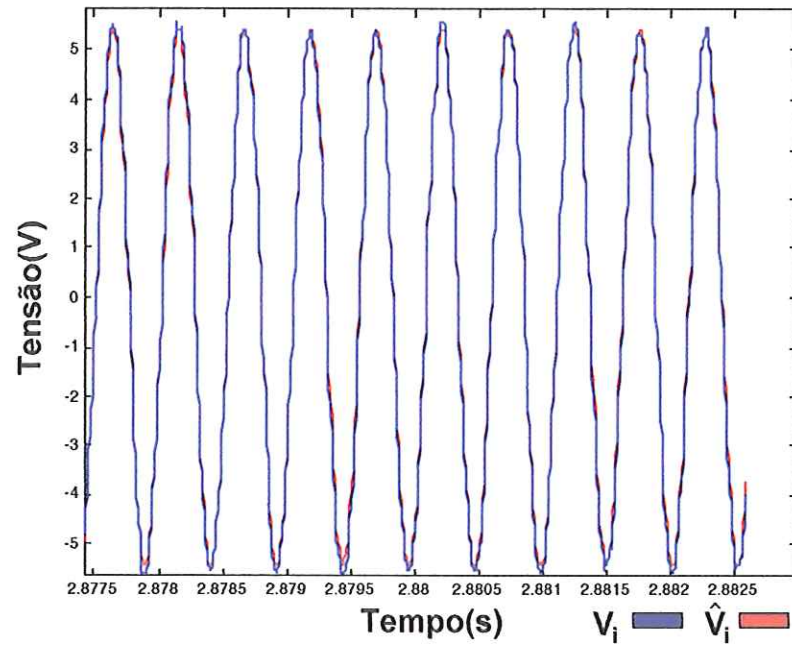


FIGURA 3.30: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

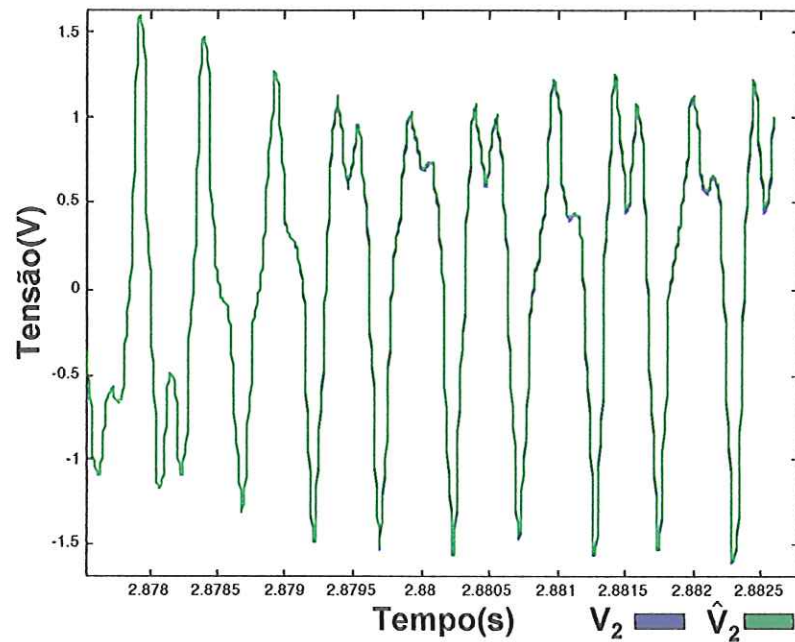


FIGURA 3.31: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

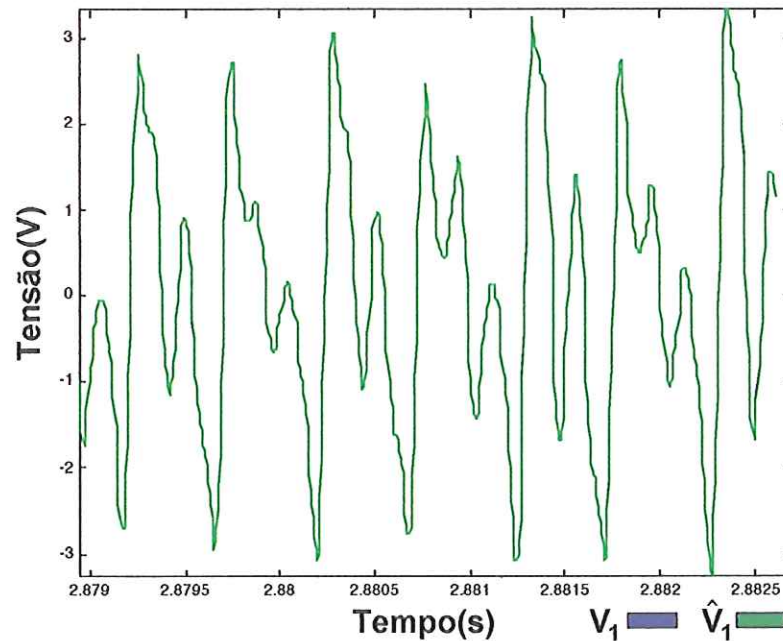


FIGURA 3.32: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

Observando a figura 3.30 é possível notar que quando não há ruído adicionado ao sinal transmitido  $V_1$  a recuperação do sinal  $V_1$  é praticamente perfeita; a informação de frequência do sinal  $V_1$  é preservada em  $\hat{V}_1$ ; os sinais  $\hat{V}_2$  e  $\hat{V}_1$  seguem os respectivos sinais  $V_2$  e  $V_1$  como podem ser observados nas figuras 3.31 e 3.32.

A segunda simulação foi realizada acrescentando um ruído branco aditivo, uniformemente distribuído, de amplitude  $5 \times 10^{-3} V$ , como mostrado na figura 3.36, ao sinal transmitido  $V_1$  da figura 3.35. O sinal ruidoso foi gerado a partir da equação do mapa logístico, eq.(2.1), operando numa situação caótica. Nesse caso, a equação do mapa logístico simula um ruído branco presente no canal de transmissão.

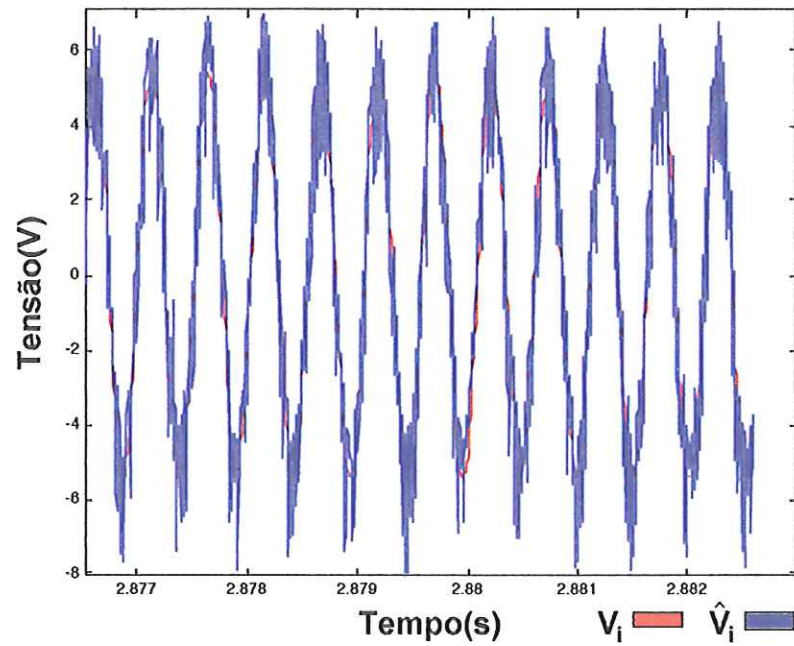


FIGURA 3.33: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

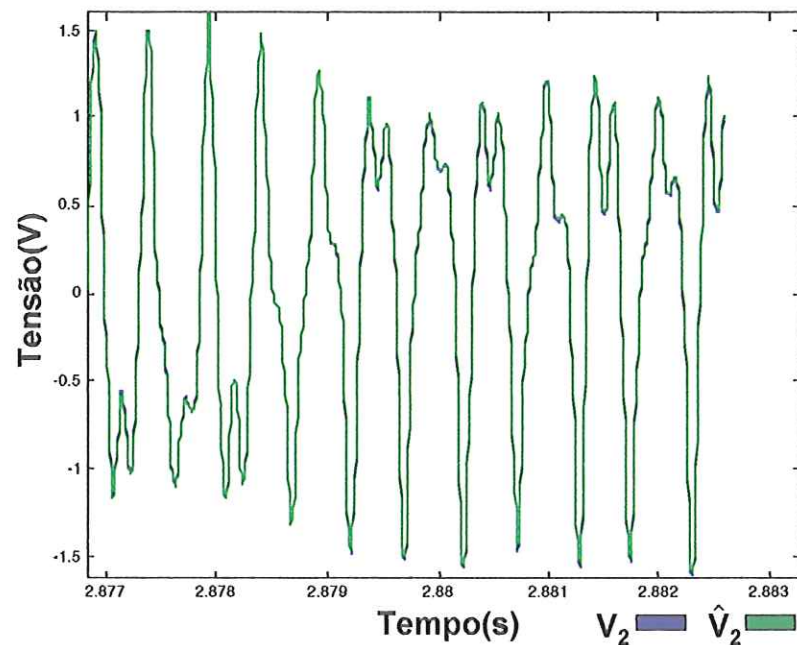


FIGURA 3.34: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

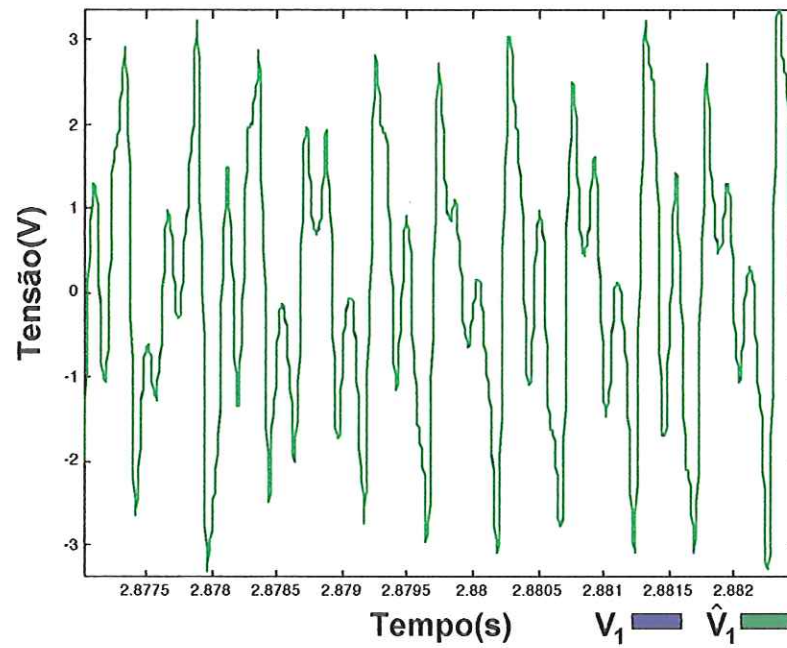


FIGURA 3.35: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

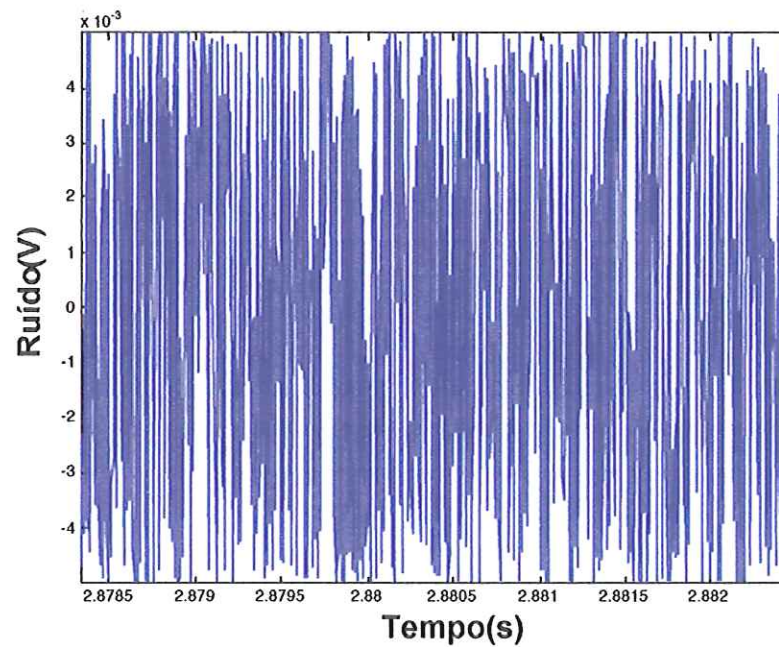


FIGURA 3.36: Ruído adicionado ao sinal transmitido  $V_1$ .



A adição de ruído da ordem de  $5 \times 10^{-3} \text{V}$  observado na figura 3.36 ao sinal transmitido  $V_1$  da figura 3.35, permite a recuperação do sinal  $V_1$  com uma certa distorção que pode ser identificado na figura 3.33. Entretanto, a informação de frequência do sinal  $V_1$  é preservada em  $\hat{V}_1$ . Já os sinais  $\hat{V}_2$  e  $\hat{V}_1$  sincronizam com os respectivos sinais  $V_2$  e  $V_1$  como mostrados nas figuras 3.34 e 3.35.

Portanto, mesmo que o sinal enviado  $V_1$  seja deteriorado por uma certa intensidade de ruído branco aditivo, o parâmetro frequência do sinal de informação  $V_1$  e o sinal  $V_1$  são recuperados.

### 3.5.2 Resultados experimentais

Para a realização de testes experimentais foram implementados os seguintes circuitos:

- Sistema mestre, referente à figura 3.6 com os seguintes valores de componentes ( $R_1=47\text{k}\Omega$ ,  $R_2=R_e=10\text{k}\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$  e  $C_1=C_2=12\text{nF}$ );
- Sistema escravo, presente na figura 3.13 com os seguintes valores de componentes ( $R_1=47\text{k}\Omega$ ,  $R_2=R_e=10\text{k}\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$ ,  $R=1000\Omega$ ,  $R_{re}=100\Omega$  e  $C_1=C_2=12\text{nF}$ );
- O sinal  $\hat{V}_i$  é obtido utilizando-se os circuitos das figuras 3.8-12 com os mesmos valores de componentes já citados para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_L$ ,  $R_e$ ,  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_x=C_1$ . Os valores de  $C_3$  e  $R_3$  foram ajustados para que o derivador funcione até a frequência de 100kHz. Portanto, para  $C_3=1\text{nF}$ ,  $R_3=4591,55\Omega$  e  $R_5=1\text{k}\Omega$  obtém-se  $R_4=74398,2\Omega$  segundo a eq.(3.18).

### 3.5.2.1 Resultados experimentais sem linha de transmissão

O sistema mestre da figura 3.6, foi diretamente conectado ao sistema escravo da figura 3.13. Inicialmente um sinal oscilante  $V_i$  da figura 3.37 com amplitude 2,8V e frequência 2230Hz foi utilizado como mensagem a ser transmitida.

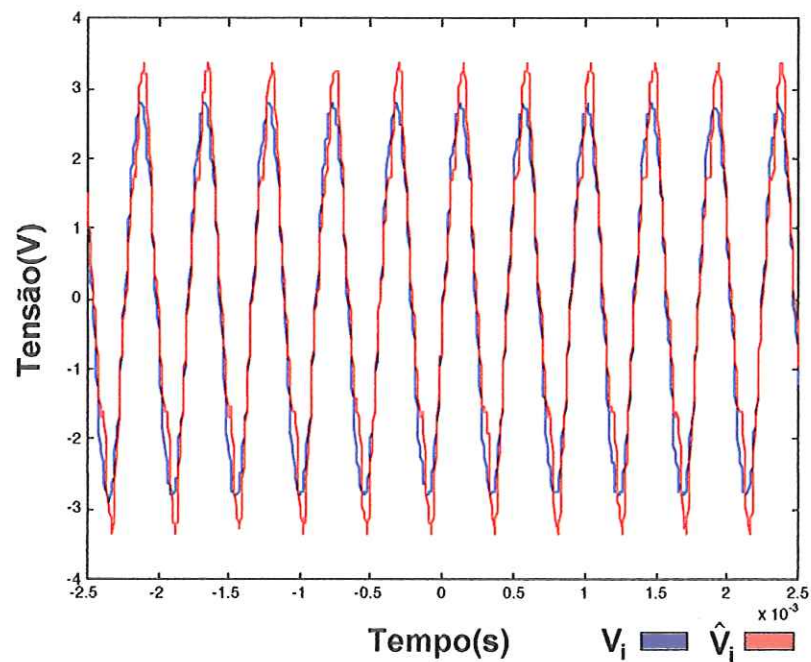


FIGURA 3.37: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

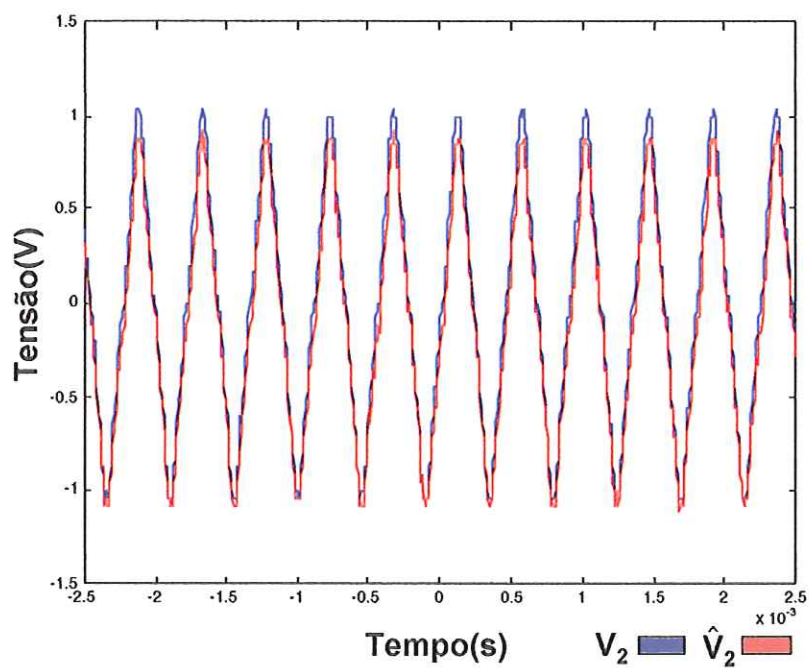


FIGURA 3.38: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

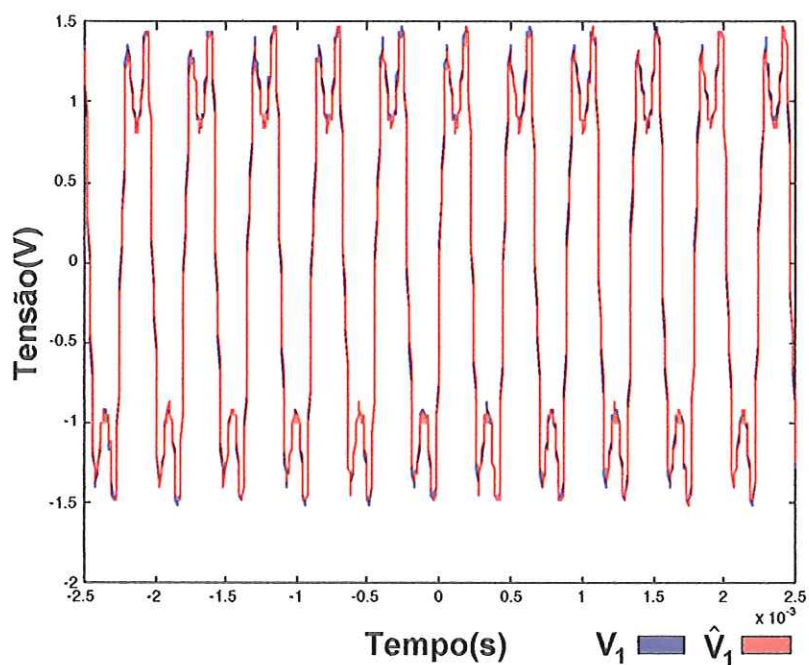


FIGURA 3.39: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

O sinal  $\hat{V}_i$  da figura 3.37 contém algumas distorções. Entretanto, a informação de frequência de  $V_i$  é preservada em  $\hat{V}_i$ . Os sinais  $\hat{V}_2$  e  $\hat{V}_1$  das figuras 3.38-39 seguem respectivamente os sinais  $V_1$  e  $V_2$ .

Outro sinal  $V_i$  com amplitude 4,5V e frequência 1412Hz ilustrado na figura 3.40, foi utilizado como mensagem a ser transmitida..

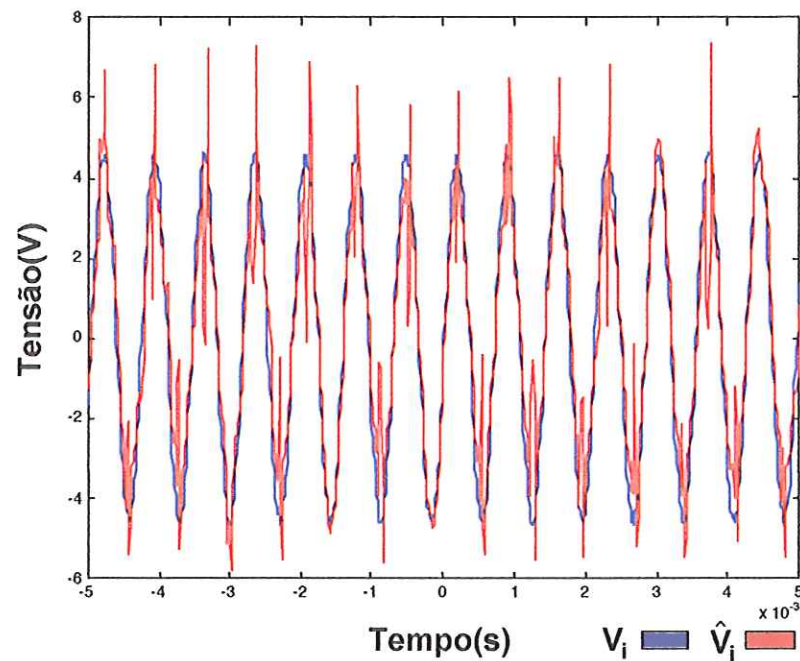


FIGURA 3.40: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).



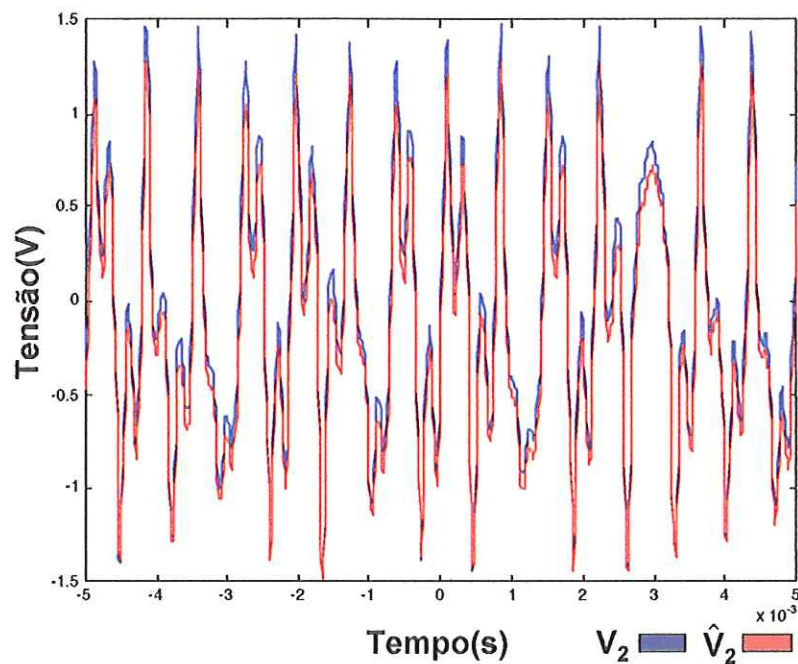


FIGURA 3.41: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

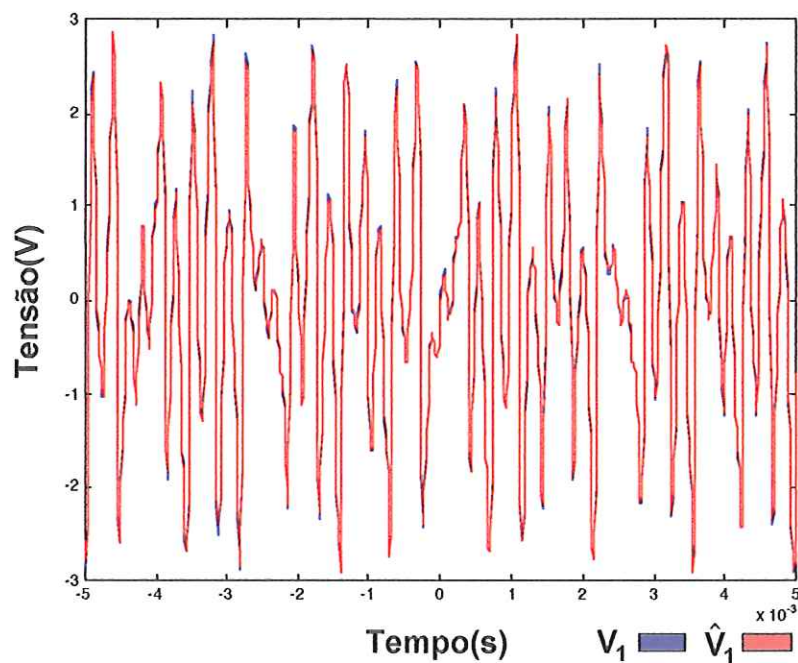


FIGURA 3.42: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

Observando a figura 3.40 é possível notar que o processo de recuperação do sinal  $\hat{V}_i$  apresentou uma distorção maior comparado à figura 3.37. Isto deve-se ao fato de que o sinal transmitido  $V_i$  da figura 3.39 é periódico enquanto que o mesmo sinal da figura 3.42 é aperiódico. Entretanto, a informação frequência de  $V_i$  foi preservada como mostrado na figura 3.40.

Um novo sinal  $V_i$  com amplitude 2,4V e frequência 1574Hz, conforme mostrado na figura 3.43, foi utilizado como informação a ser transmitida.

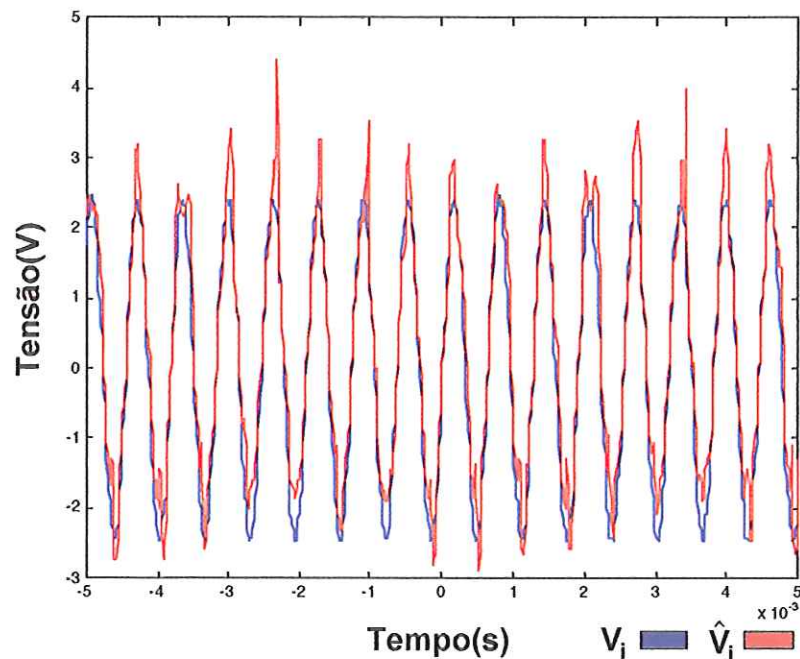


FIGURA 3.43: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

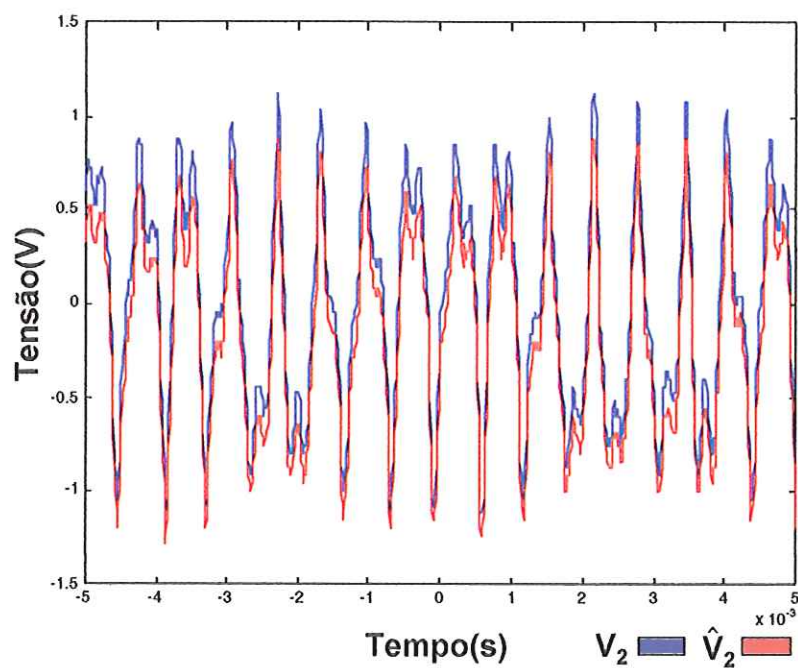


FIGURA 3.44: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

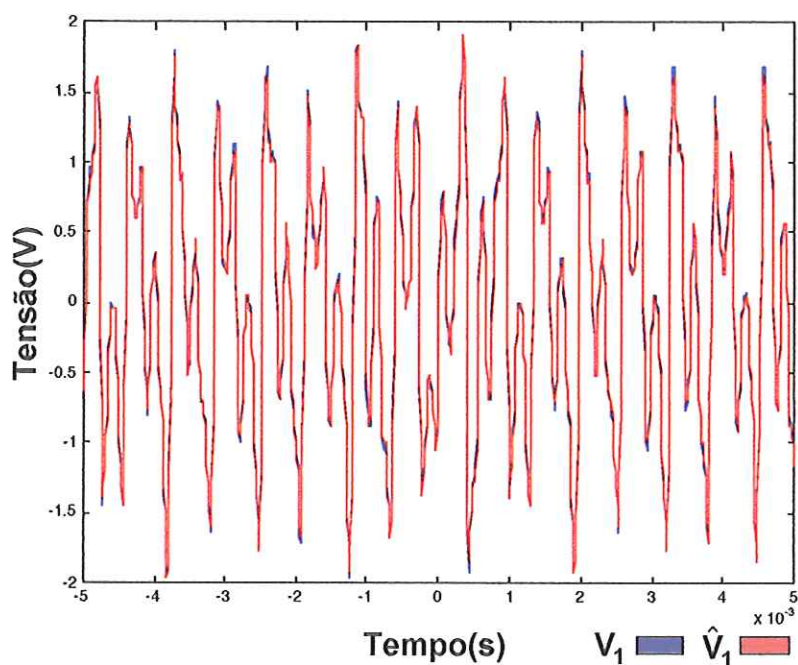


FIGURA 3.45: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

Visualizando os resultados experimentais das figuras 3.37-45, pode-se observar os seguintes fatos:

- O sinal  $\hat{V}_i$  sempre apresenta algumas pequenas distorções, como consequência do atraso de fase existente entre  $\hat{V}_2$  e  $r(t)$  utilizados no processo de estimação em malha aberta de  $V_i$ . Entretanto, a informação da frequência de  $V_i$  sempre é preservada;
- Os sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  estão sincronizando com os respectivos sinais  $V_1$  e  $V_2$ ;
- O grau de distorção de  $\hat{V}_i$  depende da periodicidade da forma de onda enviada.

### 3.5.2.2 Resultados experimentais utilizando-se o modelo "T" para uma linha de transmissão de 1000 metros

Uma linha de transmissão foi simulada utilizando-se o modelo "T" mostrado na figura 3.46, com os seguintes parâmetros distribuídos:  $R=6,5 \Omega/1000\text{m}$ ,  $L=0,200 \mu\text{H/m}$  e  $C=79,4 \text{ pF/m}$ . Dessa forma, a impedância e a admitância de uma linha de transmissão de 1000 metros são respectivamente:  $\dot{Z}/2=3,25 + j \cdot W \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \Omega$  e  $\dot{Y} = -j \cdot W \cdot 49,4 \cdot 10^{-9} \text{ mho}$ .

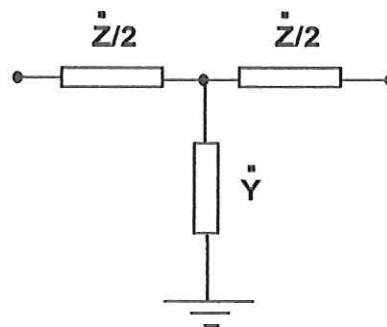


FIGURA 3.46: Modelo "T" de uma linha de transmissão.

Dados experimentais foram medidos para um sinal senoidal com amplitude de 3,15V e frequência de 1434Hz como sinal oscilante no circuito mestre. Os sinais  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_i$  são observados no sistema mestre e os sinais  $\hat{V}_1$ ,  $\hat{V}_2$  e  $\hat{V}_i$  são obtidos do receptor.

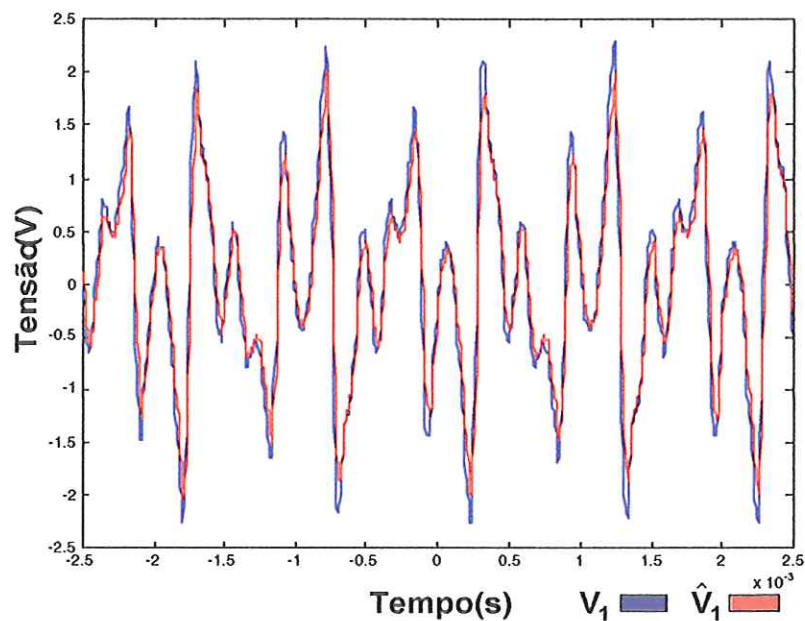


FIGURA 3.47: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

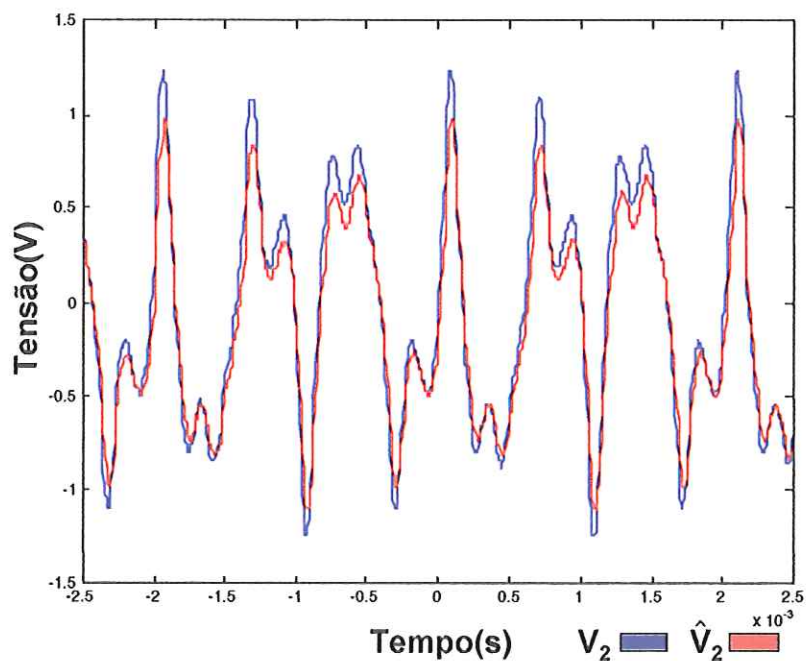


FIGURA 3.48: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

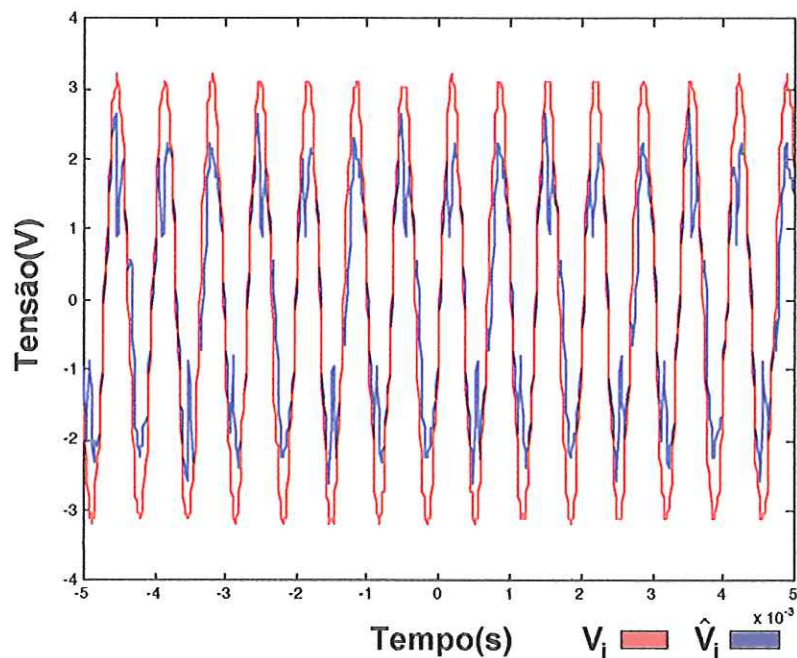


FIGURA 3.49: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

Analisando a figura 3.47 é possível notar que  $\hat{V}_1$  apresenta baixas distorções em relação a  $V_1$ .

Novos dados experimentais foram coletados para outro sinal oscilante com valores de amplitude 3,1V e frequência 1694 Hz.

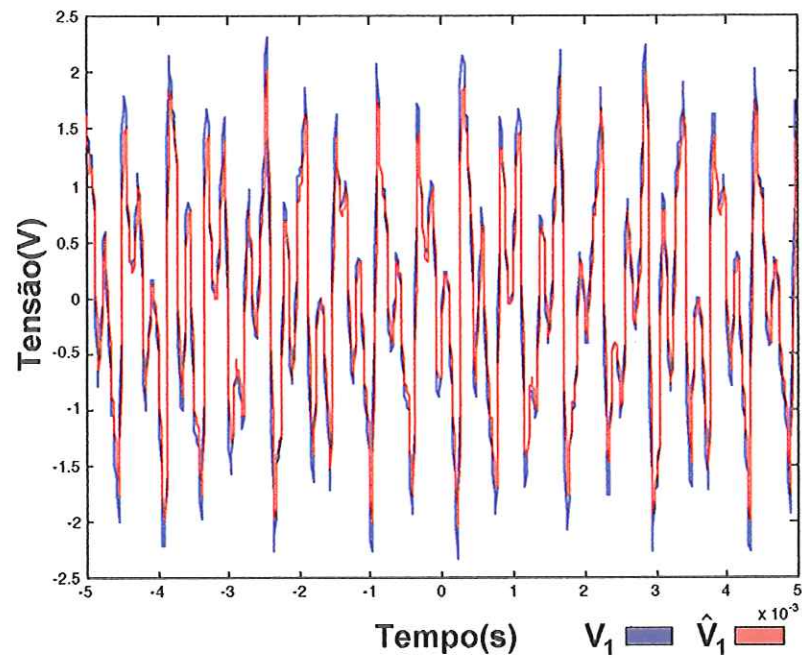


FIGURA 3.50: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

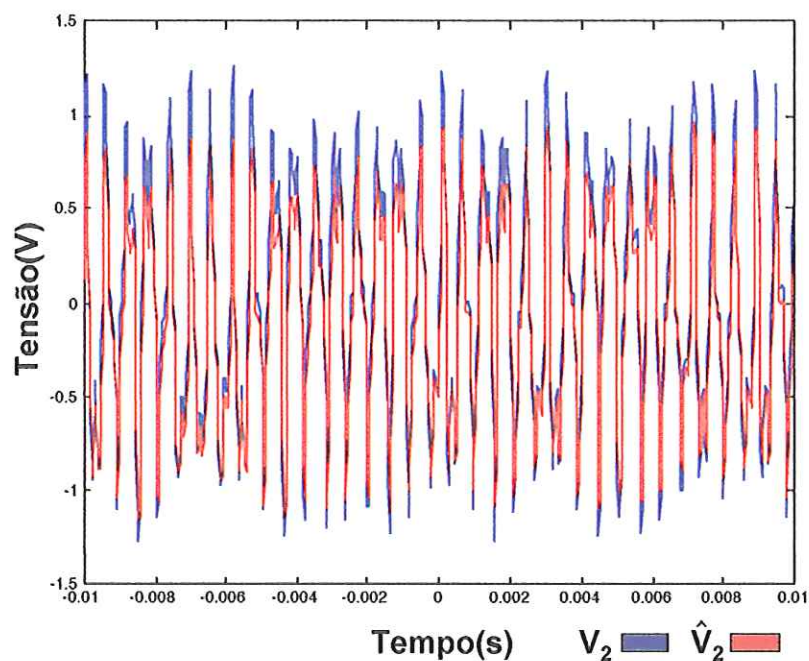


FIGURA 3.51: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

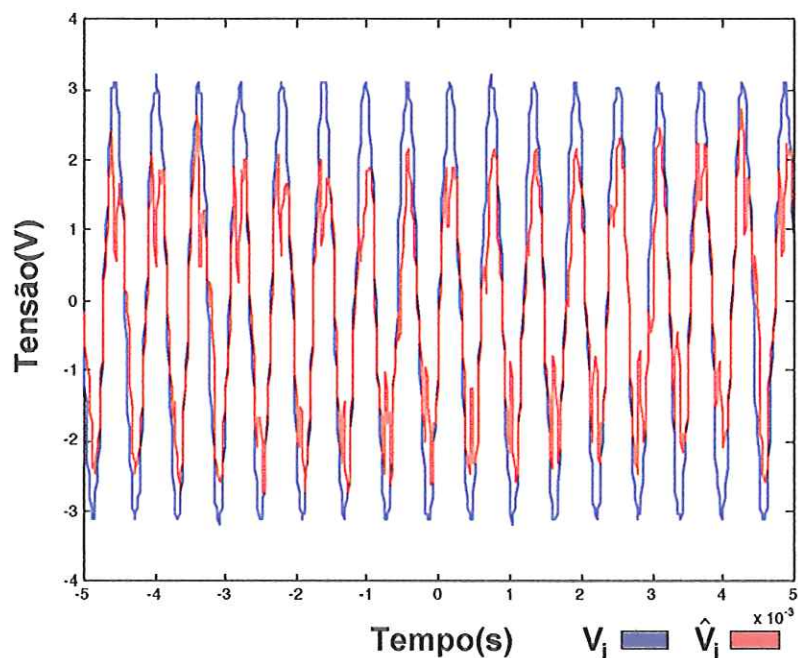


FIGURA 3.52: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).



Observando a figura 3.50 nota-se que  $\hat{V}_1$  continua sendo recuperado com pouca distorção.

Os resultados experimentais mostrados nas figuras 3.47-52 permitem algumas observações como:

- Embora o sinal  $\hat{V}_i$  apresente distorções, a informação de frequência de  $V_i$  sempre é conservada. As distorções presentes em  $\hat{V}_i$  devem-se ao fato de que o processo de estimação de  $V_i$  foi realizado em malha aberta;
- Os sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  sempre sincronizam com os respectivos sinais  $V_1$  e  $V_2$ ;
- Para um modelo de linha de transmissão de 1000 metros a estimação de  $V_1$  é bem sucedida.

### 3.5.2.3 Resultados experimentais utilizando-se o modelo "T" de uma linha de transmissão de 5000 metros

O modelo "T" de uma linha de transmissão de 5000 metros, como mostrado na figura 3.46, foi implementado com os seguintes parâmetros:  $R=6,5 \Omega/1000m$ ,  $L=0,200 \mu H/m$  e  $C=79,4 pF/m$ . Desta forma, a impedância e a admitância são obtidas por:

$$\dot{Z}/2 = 16,25 + j \cdot W \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ e } \dot{Y} = -j \cdot W \cdot 397 \cdot 10^{-9} \text{ mho.}$$

Um sinal oscilante com amplitude de 4V e frequência de 1384Hz foi utilizado na primeira coleta de dados experimentais.

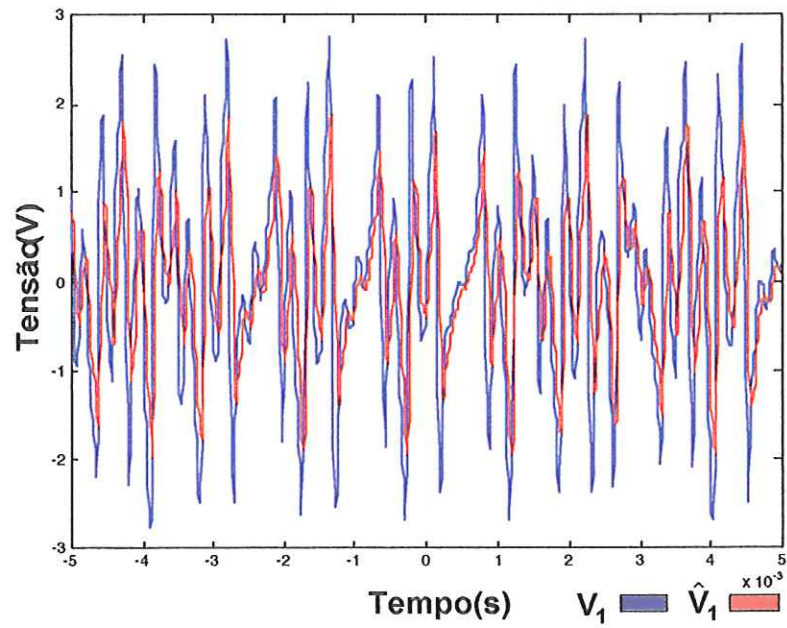


FIGURA 3.53: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_1$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_1$ ).

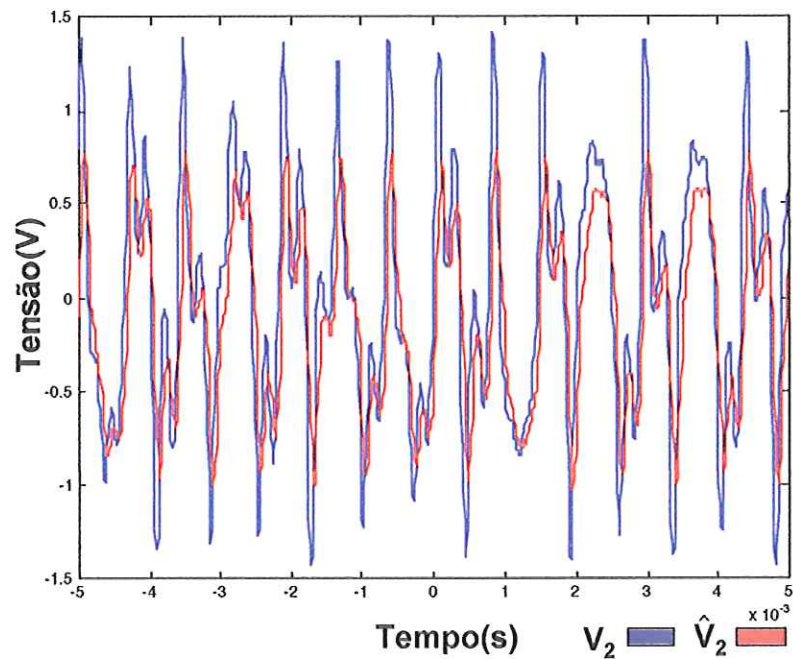


FIGURA 3.54: Comparação entre o sinal no sistema mestre ( $V_2$ ) e o sinal estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_2$ ).

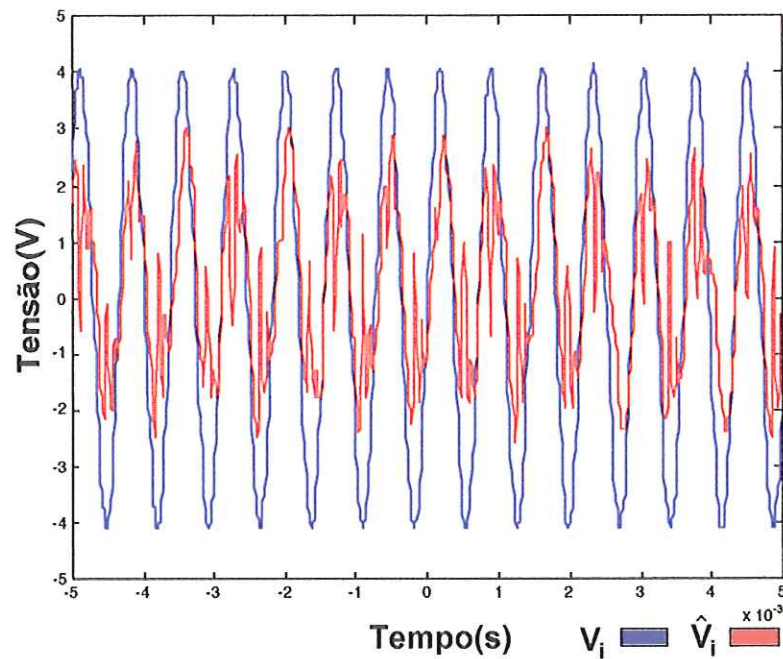


FIGURA 3.55: Comparação entre o sinal de informação no sistema mestre ( $V_i$ ) e o sinal de informação estimado no sistema escravo ( $\hat{V}_i$ ).

Uma análise dos resultados experimentais (figuras 3.53–3.55) permite a constatação dos seguintes fatos:

- Mesmo com o aumento do comprimento da linha de transmissão, embora  $\hat{V}_i$  apresente distorções, a informação da frequência do sinal  $V_i$  sempre é recuperada;
- As distorções presentes em  $\hat{V}_i$  ocorrem devido ao processo de estimação em malha aberta de  $V_i$ ;
- Embora com algumas distorções, os sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  sempre sincronizam com os respectivos sinais  $V_1$  e  $V_2$ .

## Capítulo 4

### APLICAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS EM TELECOMUNICAÇÕES

#### 4.1 Introdução

Os sistemas caóticos podem ser empregados na cifragem de informação e na modulação de sinais. Num esquema de cifragem, o carácter pseudo-aleatório dos sinais caóticos é explorado durante a transmissão de dados. Porém, na técnica de modulação de sinais, o sinal caótico é utilizado como a "portadora" do sistema de transmissão. Vários esquemas de modulação utilizando sistemas caóticos têm sido propostos. Alguns esquemas de modulação e cifragem propostos na literatura são apresentados neste capítulo.

As técnicas de detecção são classificadas como [14]:

- Coerente: há a necessidade de sincronismo de fase entre transmissor e receptor para realizar correta detecção. Cópias exatas de todas as funções-base são conhecidas no receptor;
- Não-coerente: não há sincronismo de fase entre transmissor e receptor para realizar a correta detecção. Logo, não há a necessidade de recuperação das funções-base no receptor.

## 4.2 Técnicas de detecção coerente

### 4.2.1 Um esquema cifrador de informação

Neste esquema proposto por Oppenheim [19, 27], mostrado na figura 4.1, a idéia básica é enviar ao receptor o resultado da soma entre o sinal caótico gerado  $u(t)$  e o sinal de informação  $m(t)$ . Quando o sistema caótico do receptor sincronizar com o sistema caótico do transmissor o sinal  $u(t)$  é recuperado no receptor, sendo denominado de  $u_r(t)$ . Desta forma, a informação recuperada será:

$$\hat{m}(t) = s(t) - u_r(t) \quad (4.1)$$

Onde  $s(t)$  é o sinal presente na entrada do receptor e  $u_r(t)$  é o sinal estimado no receptor. Este esquema necessita de sincronismo entre transmissor e receptor.

O processo de cifragem da informação apresentado na figura 4.1 fundamenta-se no fato de que a densidade espectral de potência da informação  $m(t)$  é menor que a densidade espectral de potência do sinal caótico  $u(t)$ . Dessa maneira, a informação torna-se cifrada por estar imersa no sinal caótico.

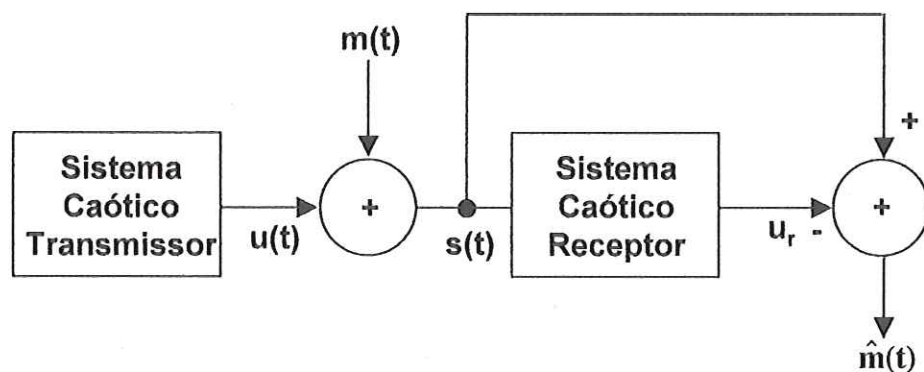


FIGURA 4.1: Sistema cifrador de informação caótico.

#### 4.2.2 Esquema de modulação variando-se parâmetros do transmissor caótico

Neste esquema também proposto por Oppenheim [19], apresentado na figura 4.2, um parâmetro do transmissor é modulado conforme o comportamento da informação. Um sinal caótico  $u(t)$  é enviado pelo transmissor e recebe ruído, designado por  $n(t)$ , proveniente do meio de transmissão. Logo o sinal na entrada do receptor será  $s(t)$ .

Nesse caso:

$$s(t) = u(t) + n(t) \quad (4.2)$$

Os sistemas caóticos do transmissor e receptor tendem a atingir o sincronismo. Esse sincronismo ocorrerá quando houver casamento de parâmetros entre os sistemas. Por exemplo, *bit* "1" significaria parâmetros casados e *bit* "0" significaria parâmetros descasados entre transmissor e receptor. O erro de sincronismo entre o sinal caótico enviado e o regenerado no receptor depende da modulação. Portanto, realizando a detecção deste erro de sincronismo é possível encontrar a informação  $\hat{m}(t)$ .

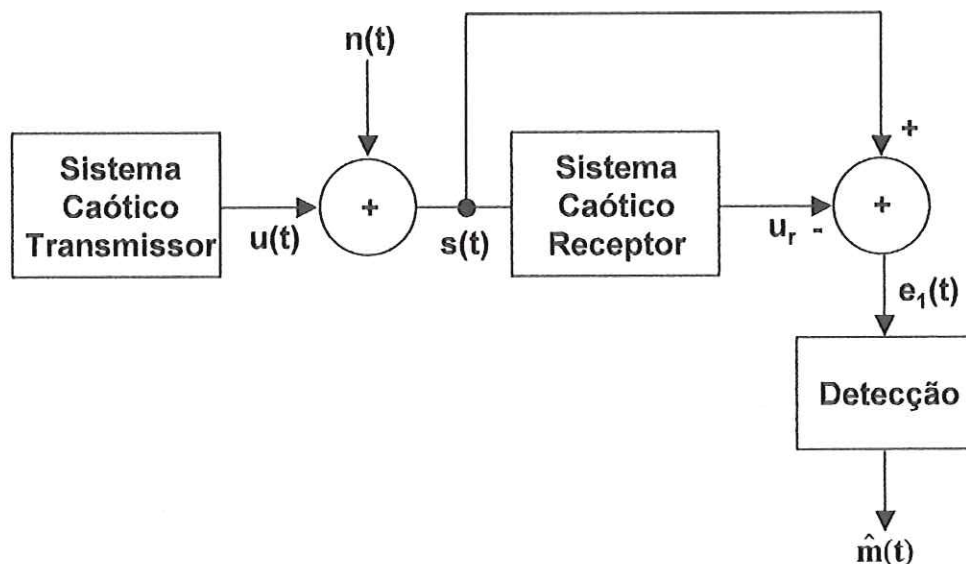


FIGURA 4.2: Sistema de comunicação caótico.

### 4.2.3 Chaos Shift Keying - CSK [14]

Neste esquema de modulação o sistema caótico do transmissor é habilitado a enviar diferentes padrões de forma de onda caótica. Por exemplo, para enviar *bit* "1" um padrão de forma de onda caótica é enviado. Todavia, para enviar *bit* "0" outro padrão de forma de onda caótica é enviado. Logo, para haver correta detecção é necessário haver sincronismo entre os circuitos caóticos do transmissor e receptor cujos parâmetros devem estar casados. Em seguida é realizado um processo de correlação, seleção do sinal de maior intensidade e posterior decodificação para extração do símbolo transmitido. O esquema CSK encontra-se na figura 4.3.

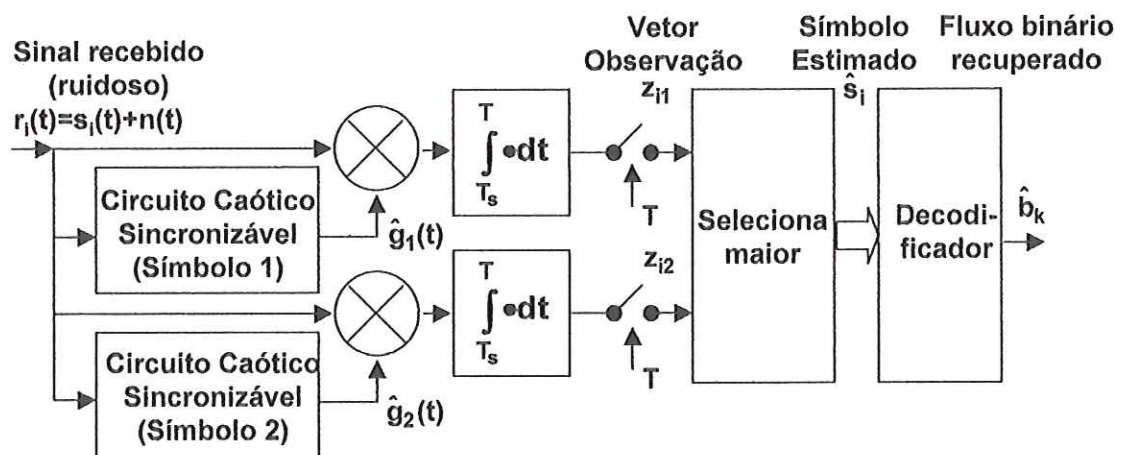


FIGURA 4.3: Receptor CSK de correlação coerente.

Todas as técnicas discutidas na seção 4.2 necessitam de sincronismo para realizarem o processo de detecção. Esse aspecto representa uma desvantagem quando o meio de transmissão apresenta condições precárias de propagação. Nesse caso, a sincronização dificilmente é alcançada sendo mais satisfatório o emprego de uma técnica de detecção não-coerente.

### 4.3 Técnicas de detecção não-coerentes

#### 4.3.1 *Chaos Shift Keying* não-coerente [14]

Neste esquema, o processo de detecção é fundamentado na estimação de parâmetros contidos nos trechos de sinais caóticos transmitidos. O parâmetro estimado no esquema indicado na figura 4.4 corresponde à energia contida num trecho de sinal caótico. Um circuito de decisão é utilizado para verificar o nível de energia do sinal comparado a um limiar e em seguida um decodificador recupera o sinal binário enviado.

Entretanto, nesta técnica de detecção o nível de limiar do circuito de decisão depende da relação sinal/ruído. Uma maneira de minimizar tal problema é empregar outra técnica de detecção conhecida como *Chaotic On-Off Keying* - COOK [14, 28].

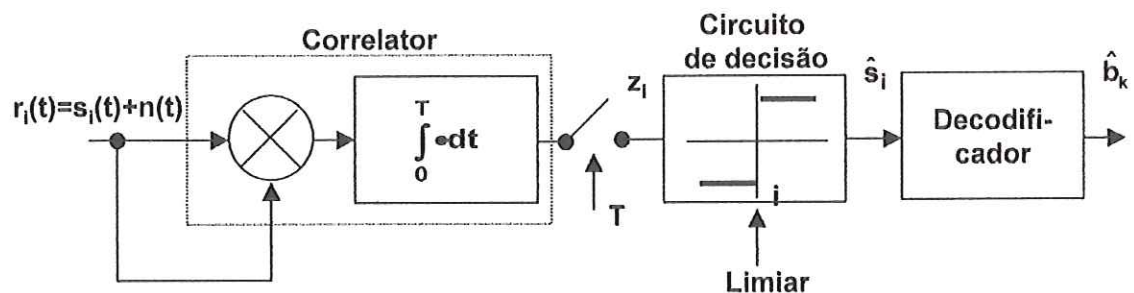


FIGURA 4.4: Receptor CSK de correlação não-coerente.

#### 4.3.2 *Chaotic On-Off Keying* - COOK

Neste esquema, o processo de demodulação estima o parâmetro energia contido no sinal caótico enviado. Observando o esquema contido na figura 4.4, a modulação do sinal caótico é realizada da seguinte forma:

- *Bit "1"* equivale a habilitar o envio de sinal caótico;
- *Bit "0"* equivale a desabilitar o envio de sinal caótico.

O esquema de detecção é idêntico ao do CSK não-coerente presente na figura 4.4. Embora nesse esquema haja um distanciamento maior entre os níveis de energia de



decisão, o nível de limiar ainda depende da relação sinal/ruído. Para contornar tal problema foi proposta uma nova técnica de detecção denominada *Differential Chaos Shift Keying* - DCSK [14, 28].

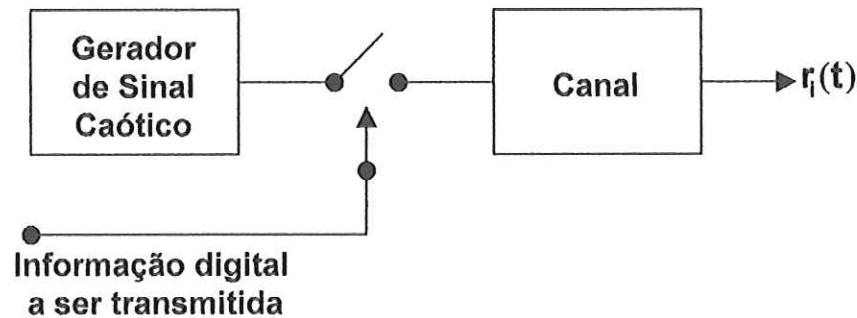


FIGURA 4.5: Transmissor COOK.

#### 4.3.3 *Differential Chaos Shift Keying* - DCSK

Este esquema de modulação está contido na figura 4.6 [14, 28], onde, o sinal caótico é modulado pela informação digital. O transmissor envia duas amostras sucessivas de uma portadora caótica. A primeira amostra corresponde ao sinal referência enquanto a segunda corresponde à informação. Observando o esquema da figura 4.6 a modulação do sinal caótico é realizada da seguinte forma:

- *Bit* "1" equivale a enviar duas amostras sucessivas de um mesmo trecho de sinal caótico;
- *Bit* "0" equivale a enviar uma amostra de um trecho de sinal caótico seguida de uma cópia invertida do mesmo trecho de sinal caótico.

A detecção é realizada conforme figura 4.7, onde é realizada a correlação entre as duas amostras de sinais caóticos: amostra referência e amostra que carrega a informação. Nesse esquema de detecção o valor de limiar do circuito de decisão é mantido constante. Entretanto, a energia do *bit* não permanece constante e a taxa de dados é dividida por dois. Para suplantar o problema de variação da energia do *bit* foi proposto o esquema *Frequency Modulation - Differential Chaos Shift Keying* [29].

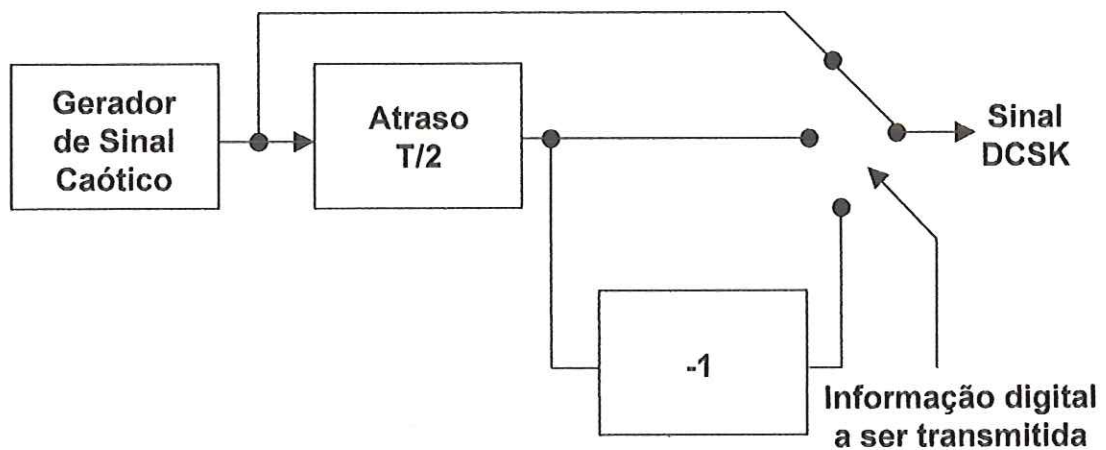


FIGURA 4.6: Transmissor DCSK.

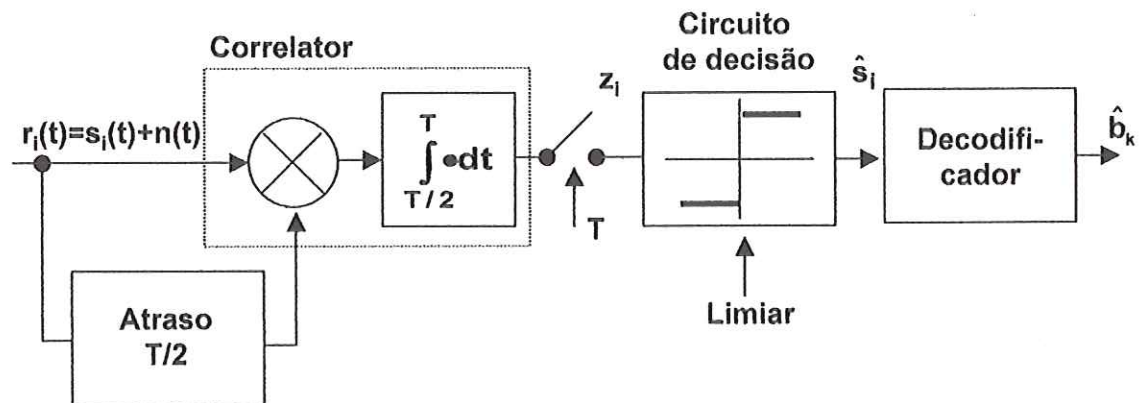


FIGURA 4.7: Receptor DCSK.

#### 4.3.4 Frequency Modulation-Differential Chaos Shift Keying - FM-DCSK

Com o objetivo de manter a energia do bit constante, o esquema DCSK foi aprimorado para o esquema FM-DCSK presente na figura 4.8. Nesse esquema o processo de modulação DCSK é aplicado a um sinal modulado em frequência. No receptor o sinal deve sofrer um processo de demodulação em frequência antes de sofrer uma detecção DCSK como na figura 4.7.

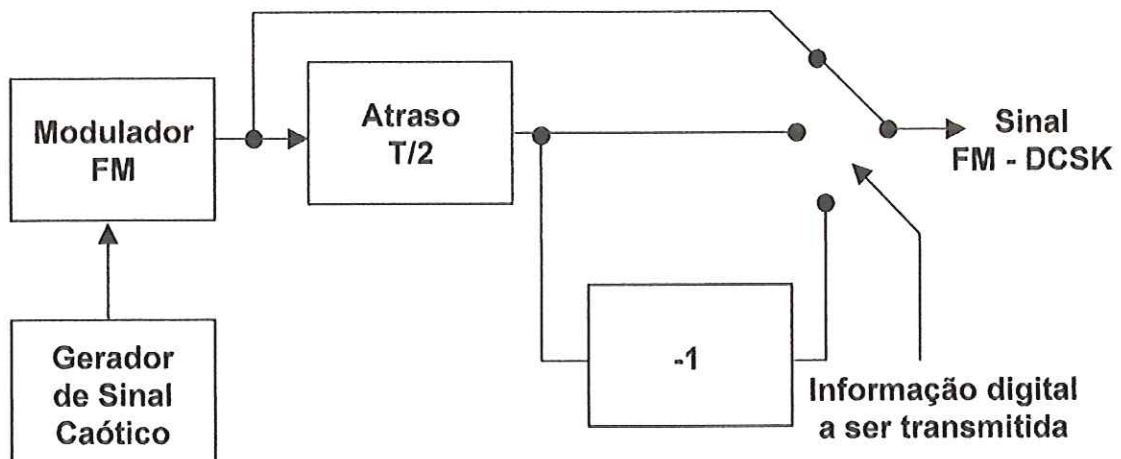
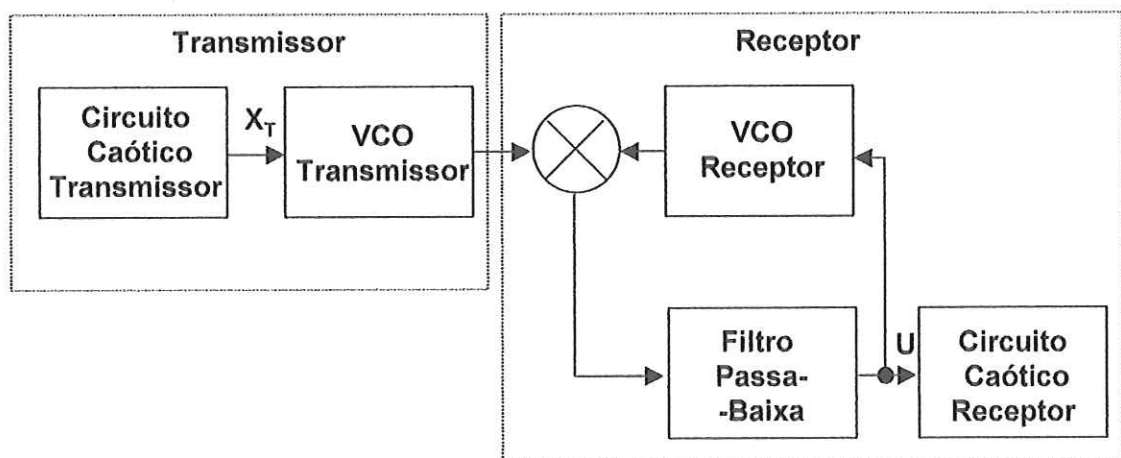


FIGURA 4.8: Transmissor FM-DCSK.

#### 4.3.5 Chaotic Frequency Modulation - CFM [30]

No esquema de modulação em frequência caótica mostrado na figura 4.9, um sinal caótico  $X_T$  é utilizado para modular o Oscilador Controlado por Tensão ( VCO ) gerando um sinal *spread spectrum*. O sinal *spread spectrum* é então transmitido ao receptor, onde um sistema denominado *Phase Lock Loop* - PLL é utilizado para recuperar o sinal  $X_T$ . Quando o VCO do transmissor sincronizar com o VCO do receptor o PLL estará seguindo a frequência do sinal transmitido e, portanto, o sinal  $X_T$  é recuperado.

FIGURA 4.9: Esquema de sincronização ( *Frequency Modulation* - FM ) padrão.

Entretanto, o esquema da figura 4.9 não é robusto a todo e qualquer sinal interferente de frequência próxima o suficiente da frequência da portadora do sinal transmitido. Logo, para melhorar a robustez do sistema, o circuito caótico do receptor foi colocado na malha de realimentação do PLL. Esse sistema está presente na figura 4.10. Quando  $X_T \approx X_R$  o PLL trava na frequência do sinal transmitido.

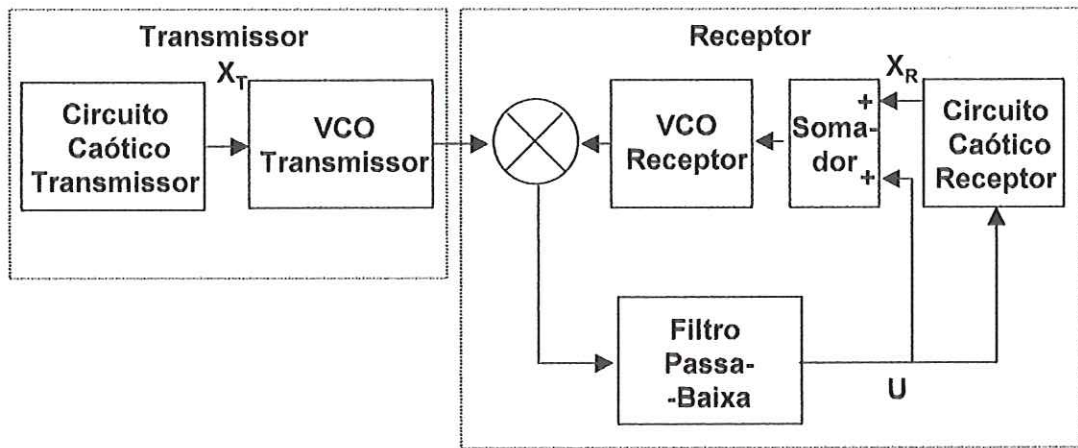


FIGURA 4.10: Esquema de sincronização CFM.

## Capítulo 5

### APLICAÇÃO DO CIRCUITO CAÓTICO DA PARTÍCULA EM CAIXA PARA REALIZAÇÃO DE COMUNICAÇÃO SEGURA

Os estudos descritos no capítulo 3 relatam que a estimação do parâmetro frequência do sinal oscilante é realizada satisfatoriamente. Neste capítulo serão propostos esquemas de cifragem de informação que empregam a estimação do parâmetro frequência da informação.

#### 5.1 Implementação de um cifrador de sinal de informação de frequência variável no tempo

A técnica aqui empregada não requer sincronismo entre transmissor e receptor. Ela utiliza o circuito caótico da figura 2.2. Esse circuito pode ser aplicado para realizar a cifragem de um sinal com frequência variável no tempo [31-33]. O esquema do cifrador é mostrado na figura 5.1 e é composto por:

- Transmissor: formado por um bloco codificador caótico que cifra a informação de entrada;
- Receptor: formado por um bloco decodificador que recupera a informação de entrada.

O bloco codificador é alimentado por um sinal cuja frequência é variável no tempo, esse bloco é formado pelo circuito caótico da figura 3.6. Nesse circuito,  $V_i$  corresponde ao sinal de frequência variável e amplitude constante no tempo e  $g(t)$

corresponde ao sinal de saída do bloco que é um sinal caótico. Os parâmetros do circuito caótico do bloco codificador foram ajustados para que o sinal de saída  $g(t)$  fosse caótico.

O bloco denominado decodificador é composto pelos circuitos presentes nas figuras 3.8-12, onde o sinal  $r(t)$  é proveniente do canal de transmissão. Primeiramente, esse sinal é aplicado aos circuitos das figuras 3.8, 3.9 e 3.11. O sinal  $\hat{V}_2$  da figura 3.8 é utilizado no circuito da figura 3.10. As saídas dos circuitos das figuras 3.9-11 são utilizadas no circuito da figura 3.12, para se obter uma estimação do sinal de frequência variável. Os parâmetros dos circuitos do codificador e decodificador devem estar casados para haver a recuperação da informação de entrada. É possível notar que a informação de entrada é recuperada via estimação em malha aberta. Portanto, esse processo de recuperação é mais sensível ao ruído e ao descasamento de parâmetros entre transmissor e receptor.

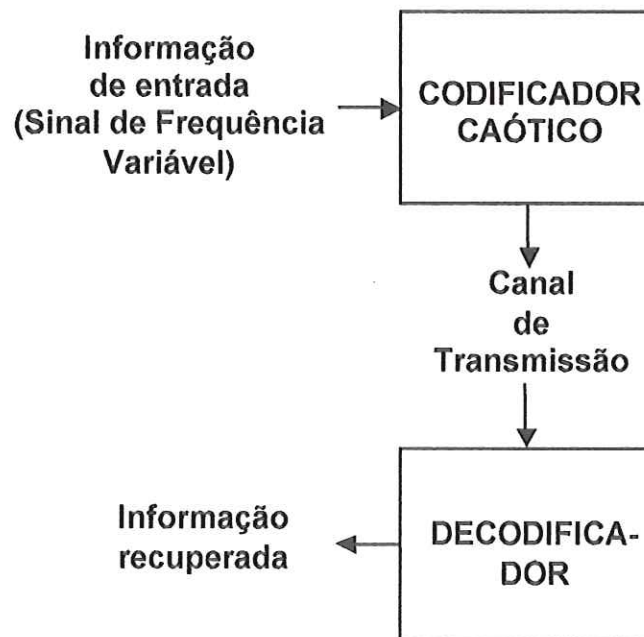


Figura 5.1: Sistema de cifragem de informação.

### 5.1.2 Resultados experimentais

Os testes foram realizados sem linha de transmissão, ou seja, o transmissor foi conectado diretamente ao receptor. Os valores dos componentes utilizados na implementação dos circuitos foram:  $R_1=47\text{k}\Omega$ ,  $R_2=R_c=10\text{k}\Omega$ ,  $R_L=510\Omega$ ,  $R=1000\Omega$  e  $C_x=C_1=C_2=12\text{nF}$ ). Os valores de  $C_3$  e  $R_3$  foram ajustados para que o derivador funcionasse até a frequência de  $100\text{kHz}$ . Portanto, para  $C_3=1\text{nF}$ ,  $R_3=1591,55\Omega$  e  $R_5=1\text{k}\Omega$  tem-se  $R_4=74398,2\Omega$  segundo a eq.(3.18).

Um sinal de frequência variável foi gerado inserindo-se um sinal modulante num Oscilador Controlado por Tensão (VCO), em seguida, o sinal caótico foi enviado ao receptor onde a informação de entrada foi recuperada pelo bloco decodificador. Alguns dados experimentais foram obtidos inserindo no bloco codificador o sinal  $V_i$  da figura 5.2 como informação de entrada.

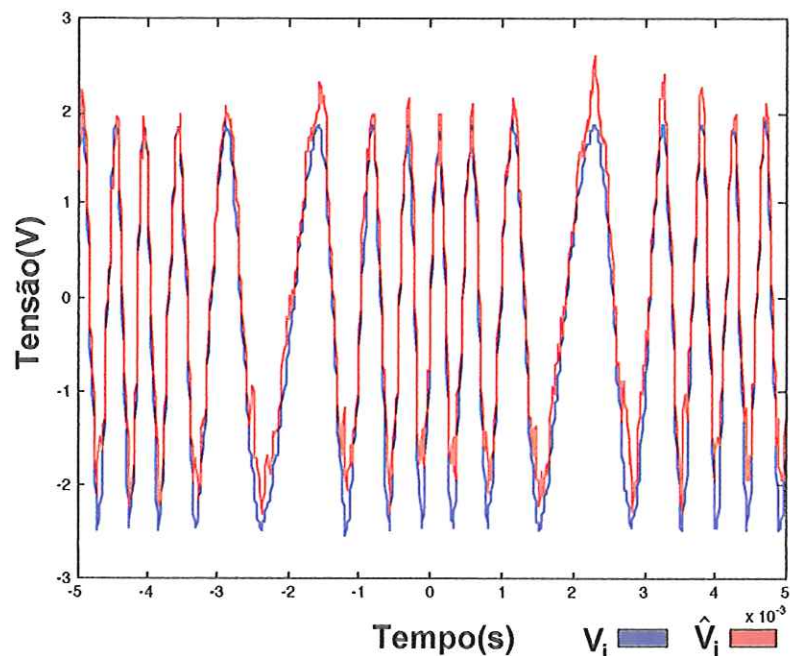


FIGURA 5.2: Informação de entrada ( $V_i$ ) e informação recuperada ( $\hat{V}_i$ ).

A informação de entrada codificada  $V_1$  é mostrada na figura 5.4.

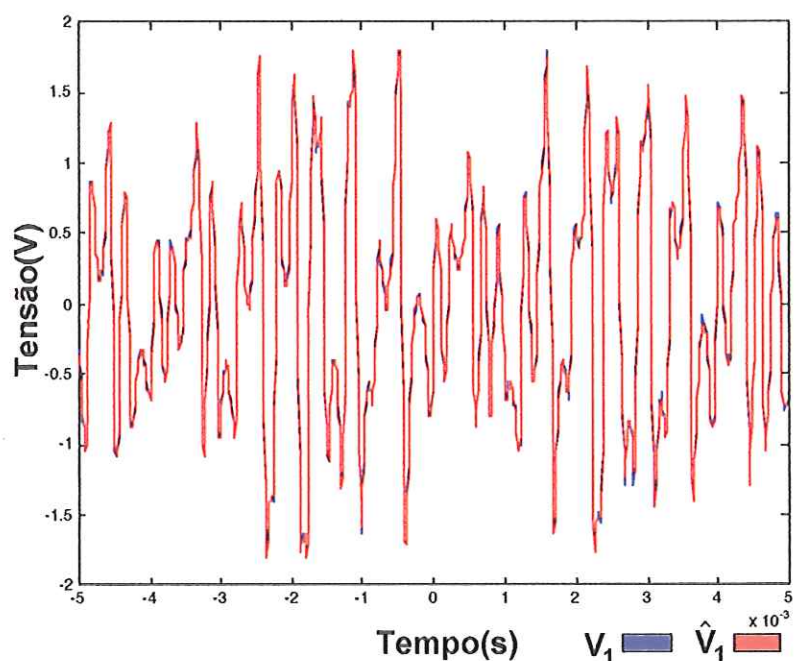


FIGURA 5.3: Informação codificada pelo transmissor ( $V_1$ ) e sinal recuperado no receptor ( $\hat{V}_1$ ).

Analisando os gráficos da figuras 5.2 é possível constatar que o processo de estimação do sinal de entrada  $V_i$  permite a recuperação do parâmetro frequência que contém a informação original. O ruído presente no sinal de frequência variável recuperado  $\hat{V}_i$  é devido ao processo de estimação que foi realizado em malha aberta. Estimações em malha aberta são sensíveis ao ruído e à desigualdade de parâmetros entre transmissor e receptor. Analisando as figura 5.2 e 5.3, é possível notar que, qualitativamente, o sinal caótico ( $V_1$ ) disponível no canal de transmissão possui baixa correlação com a informação original ( $V_i$ ). Portanto, o esquema cifrador proposto na figura 5.1 pode permitir comunicação sigilosa entre transmissores e receptores que possuam parâmetros de sistema casados.



## 5.2 Implementação de um cifrador binário

Um novo esquema de cifragem de informação binária que emprega a estimação do parâmetro de bifurcação, neste caso frequência do sinal oscilante  $V_i$  do circuito da figura 3.6, é mostrado na figura 5.4 [34].

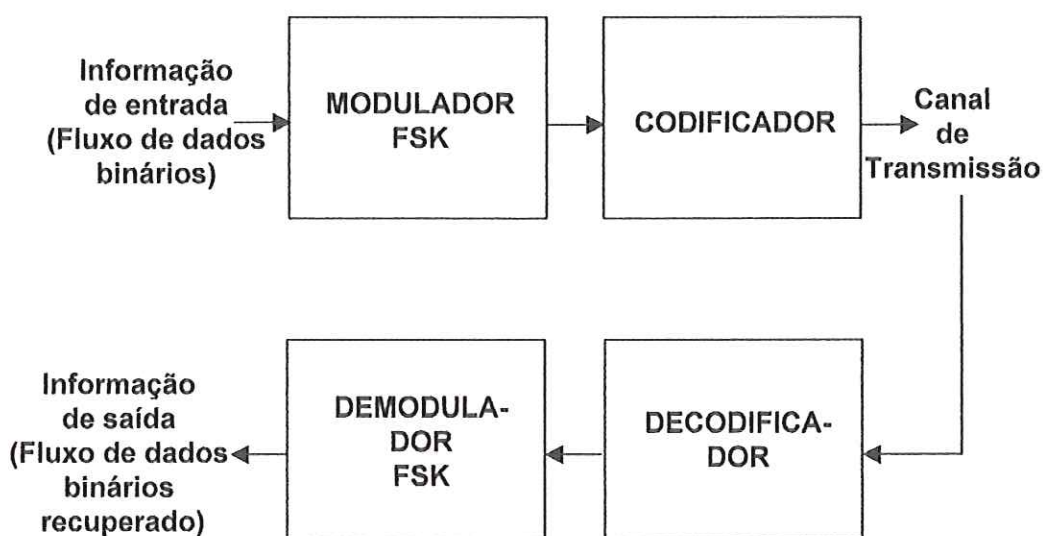


Figura 5.4: Sistema cifrador de informação binária.

Observando o esquema acima, um fluxo de dados binários é inserido no modulador *Frequency Shift Keying* - FSK resultando em um sinal *Binary Frequency Shift Keying* - BFSK de acordo com a figura 5.5. O sinal BFSK oscila em duas frequências distintas: 2200 Hz e 10000 Hz. O espectro de potência desse sinal é mostrado na figura 5.6. Esse sinal entra no bloco codificador que é representado pelo circuito caótico da figura 3.6. O sinal BFSK corresponde ao sinal  $V_i$  da figura 3.6, cujo circuito tem os seguintes valores de componentes:  $R_1=330\text{ k}\Omega$ ,  $R_2=R=33\text{ k}\Omega$ ,  $R_L=510\ \Omega$ ,  $R_e=10\text{ k}\Omega$ ,  $C_1=120\text{ pF}$ ,  $C_2=10\text{ nF}$ ,  $D_1$  e  $D_2$  ( são diodos 1N4148 ) e os amplificadores operacionais são do tipo 741.

A saída do bloco codificador, representada por  $V_1$  na figura 3.6, é um sinal caótico que possui amplo espectro de frequências ilustrado pelo gráfico do espectro de potência presente na figura 5.8. O sinal  $V_1$ , sinal caótico da figura 5.7, é então enviado ao receptor através de um canal de transmissão ruidoso. Esse sinal ruidoso denominado por  $r(t)$  pode ser decodificado por duas técnicas:

- Técnica de estimação em malha aberta: nessa técnica o bloco decodificador é composto pelos circuitos das figuras 3.8-12, originando o sinal  $\hat{V}_1$ . Nesse caso o processo de recuperação de  $V_1$  é um método de estimação em malha aberta. Entretanto, métodos de estimação em malha aberta são mais sensíveis ao ruído e desigualdade de parâmetros entre transmissor e receptor. Uma maneira de tornar o processo de estimação mais robusto aos problemas citados é aplicar a técnica de estimação por realimentação de erro [14];

- Técnica de estimação por realimentação de erro: nessa técnica de estimação em malha fechada, o sinal  $\hat{V}_1$  obtido por malha aberta, é inserido no circuito da figura 3.13 para obter  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$ . Dessa forma,  $V_1$  é novamente estimado utilizando  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  nos circuitos das figuras 3.8-12. Nesse caso, a recuperação de  $V_1$  é realizada a partir dos sinais  $\hat{V}_1$  e  $\hat{V}_2$  provenientes de um sistema em malha fechada. Os componentes dos circuitos das figuras 3.8-13 são:  $R_1=330 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2=R=33 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L=510 \text{ }\Omega$ ,  $R_e=10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1=120 \text{ pF}$ ,  $C_2=10 \text{ nF}$ ,  $C_x=10 \text{ nF}$ ,  $D_1$  e  $D_2$  ( são diodos 1N4148 ) e os amplificadores operacionais são do tipo 741. Os componentes  $C_3$  e  $R_3$  foram ajustados permitindo que o derivador da figura 5.6 funcionasse até 100 kHz. Os valores de  $R_4$  e  $R_5$  foram ajustados para que a relação dada pela eq.(3.18) fosse respeitada. A resistência de realimentação do circuito da figura 3.13 possui o seguinte valor:  $R_{re}=100 \text{ }\Omega$ .

O sinal  $\hat{V}_1$ , obtido através de um dos métodos anteriores, é inserido num demodulador FSK para recuperação do fluxo de dados binários.

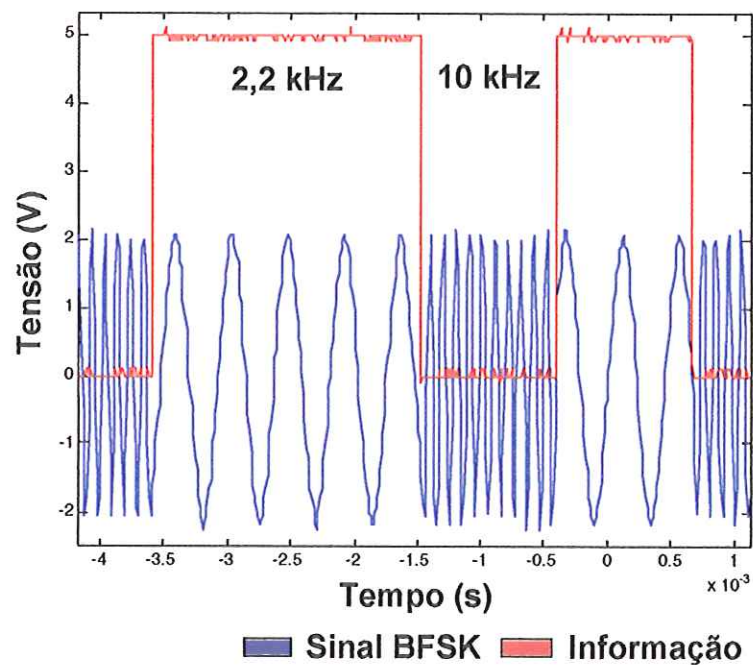


FIGURA 5.5: Formas de onda do sinal BFSK e informação.

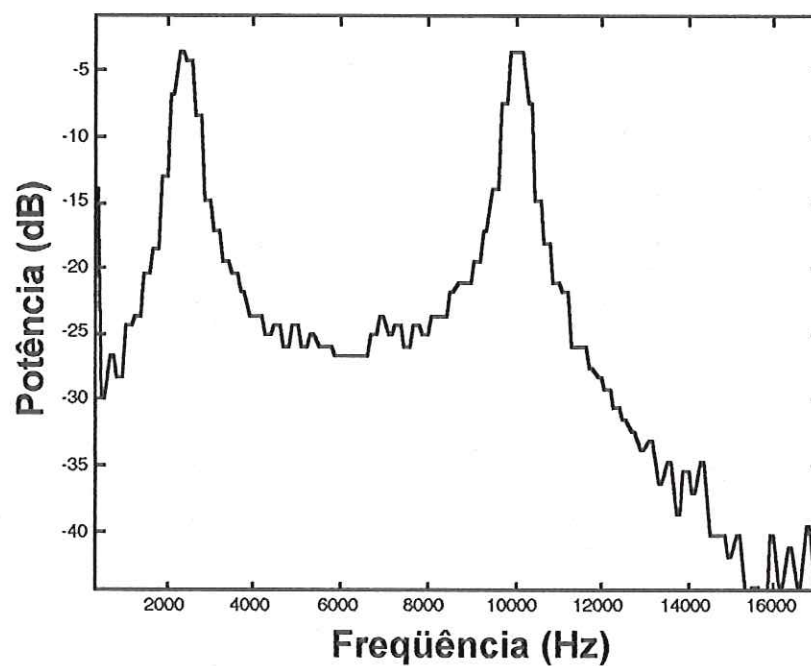


FIGURA 5.6: Espectro de potência do sinal BFSK.

Um sistema cifrador deve disponibilizar um sinal codificado no canal de transmissão. Esse sinal codificado deve ocultar a informação a ser transmitida. Nesse caso, um outro receptor, estranho ao processo de comunicação, não conseguirá detectar a informação que está sendo transmitida. Somente o receptor que possuir os parâmetros de sistema sintonizados com os parâmetros do transmissor conseguirá detectar a informação que está sendo transmitida. A figura 5.7 contém a forma de onda disponível no canal de transmissão, que é obtida de um circuito caótico e, portanto, possui natureza aleatória. Observando a figura 5.7, é possível notar que a informação encontra-se cifrada, ou seja, ela foi codificada por um circuito caótico. Também é interessante notar que espectro de potência do sinal caótico, mostrado na figura 5.8, apresenta uma extensa faixa de frequências. Esta característica do espectro de potência dificulta a um segundo receptor detectar a informação contida no sinal de espectro espalhado.

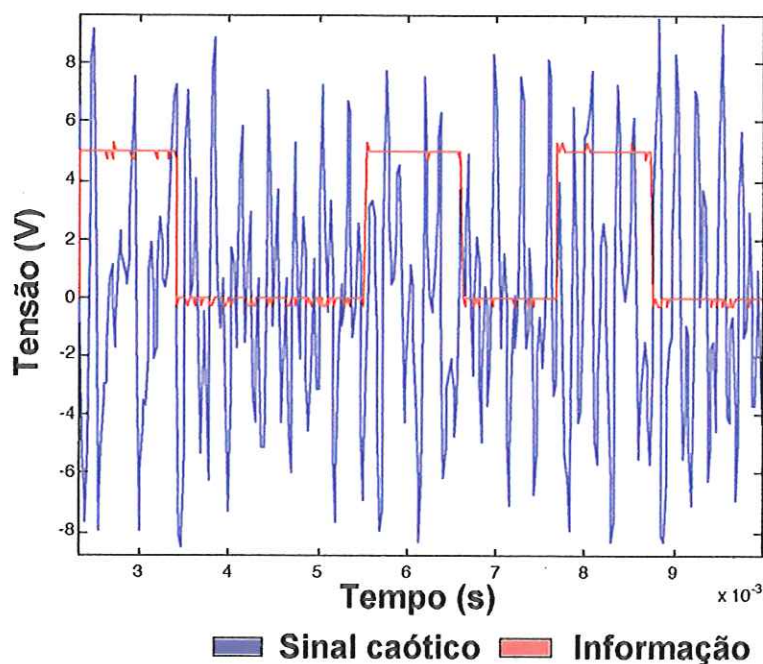


FIGURA 5.7: Informação de entrada e informação codificada (sinal caótico).

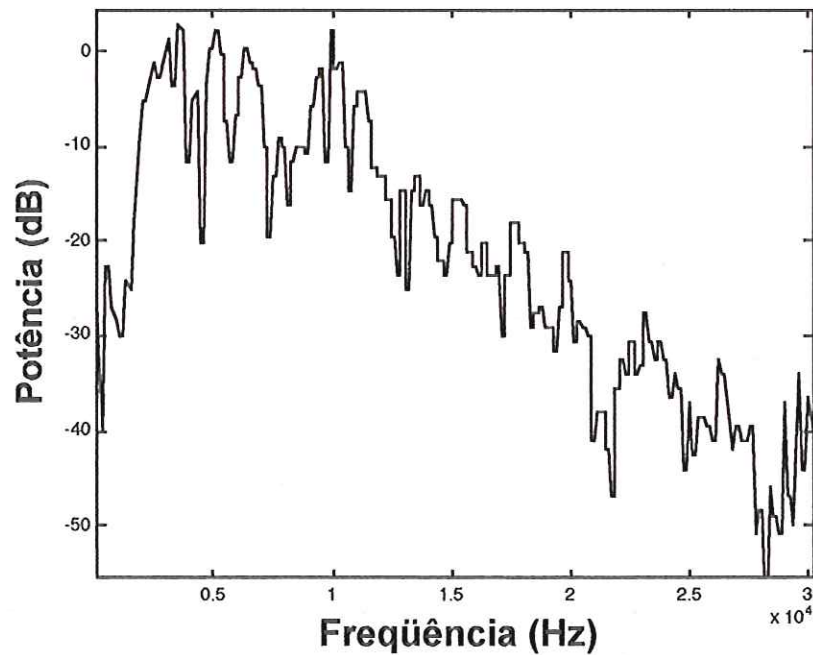


FIGURA 5.8: Espectro de potência do sinal caótico (informação codificada).

### 5.2.1 Sistema em malha aberta sem linha de transmissão

Objetivando avaliar o desempenho do sistema cifrador, foram realizadas medições experimentais das formas de onda da entrada (sinal original) e saída (sinal recuperado). Além disso, também foi obtido o diagrama de olho [20] para analisar a performance do sistema quanto aos efeitos de distorção na forma de onda recuperada.

O modelo de linha de transmissão tipo "T" mostrado na figura 3.46 foi utilizado para simular os efeitos do canal de transmissão. Os parâmetros concentrados do modelo foram obtidos a partir dos parâmetros distribuídos de um cabo coaxial.

O esquema da figura 5.4 foi implementado em malha aberta conectando o transmissor diretamente ao receptor. Um fluxo binário de dados foi utilizado como informação de entrada. Para geração de um fluxo de dados binários foi utilizado um gerador pseudo-aleatório construído a partir de registradores de deslocamento [2]. O comprimento da sequência binária foi de 32767 *bits* e a taxa de *bits* era de 925,9 bps.

A figura 5.9 permite uma comparação entre o fluxo binário original, ou seja, a informação de entrada e o fluxo binário recuperado. Observando-se a figura 5.9 é possível notar que o fluxo binário recuperado apresenta algumas distorções em relação ao fluxo binário original.

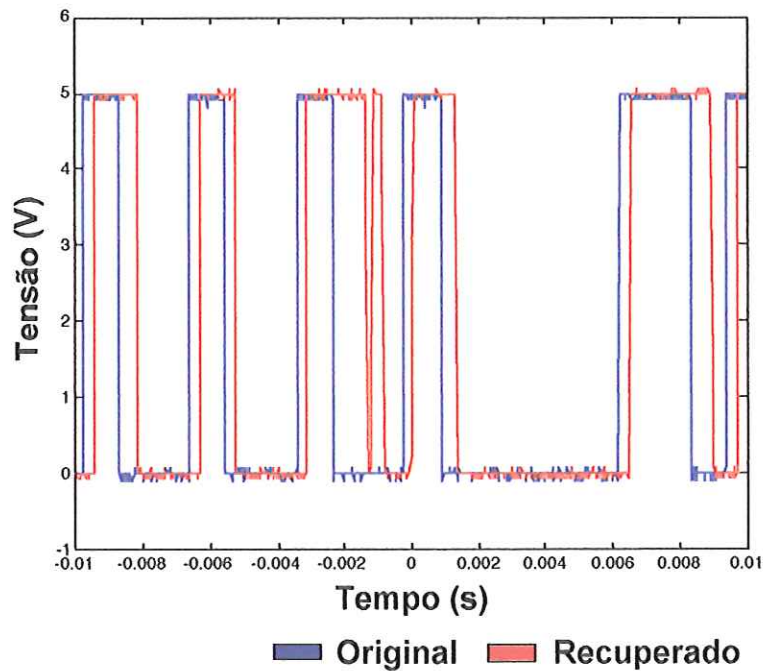


FIGURA 5.9: Fluxo binário original e recuperado.

Para verificar o grau de comprometimento do processo de recuperação no sistema em malha aberta, foi reproduzido o diagrama de olho [20] que está presente na figura 5.10. Esse diagrama permite analisar o grau de distorção da forma de onda recuperada. Nesse diagrama, todos os *bits* são registrados sem variação temporal, permitindo uma análise da distorção da forma de onda. Observando o diagrama de olho é possível notar que a forma de onda da informação recuperada apresenta elevada distorção. O diagrama de olho apresenta baixa definição e elevada distorção devido aos erros de "decisão" durante o processo de detecção.

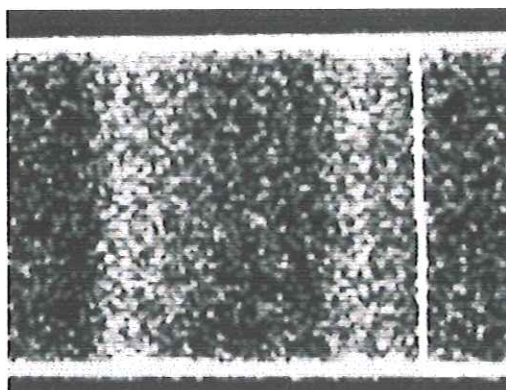


FIGURA 5.10: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para o sistema em malha aberta sem linha de transmissão.

### 5.2.2 Sistema em malha fechada sem linha de transmissão

Tendo em vista que o sistema em malha aberta apresentou elevada distorção no processo de detecção, um sistema em malha fechada foi implementado. Novamente, a sequência de dados binários aplicada no caso em malha aberta foi utilizada como forma de onda de entrada.

O transmissor foi conectado diretamente ao receptor. O processo de recuperação da informação de entrada ( fluxo de dados binários original ) apresentou melhoria na performance de detecção. Essa conclusão pode ser observada na figura 5.11.

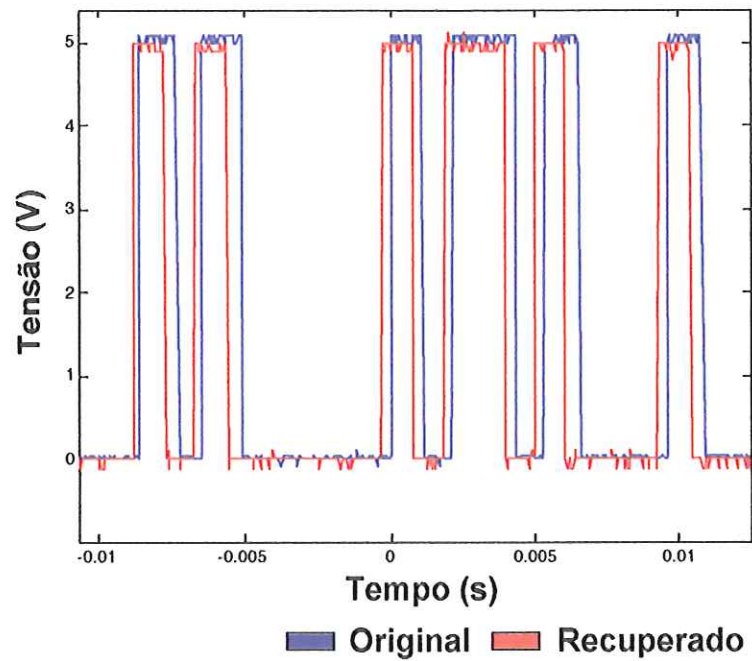


FIGURA 5.11: Fluxo binário original e recuperado.

O diagrama de olho mostrado na figura 5.12 permite verificar o grau de distorção no processo de recuperação da forma de onda de saída. É possível notar que o diagrama de olho encontra-se aberto, ou seja, baixa distorção de amplitude e de instantes de "decisão" durante processo de detecção.

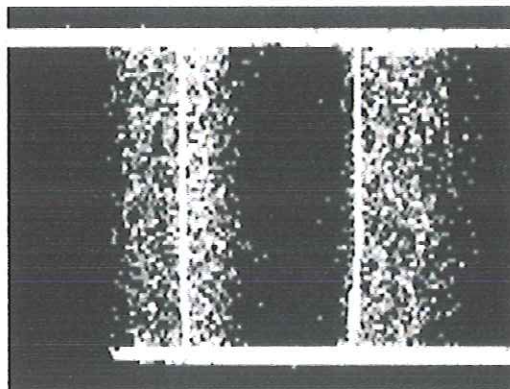


FIGURA 5.12: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para o sistema em malha fechada sem linha de transmissão.



### 5.2.3 Sistema em malha fechada com um modelo "T" para linha de transmissão de 100 metros

Um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros foi utilizado para interligar o transmissor ao receptor. O mesmo fluxo de dados binários do ítem 5.2.1 foi inserido na entrada do transmissor. A forma de onda recuperada foi analisada através do diagrama de olho. É possível notar na figura 5.13 que o processo de recuperação de informação apresenta distorções na forma de onda. A inclusão de uma linha de transmissão entre transmissor e receptor tornou o diagrama de olho da figura 5.13 mais fechado em relação ao da figura 5.12. Como a espessura das paredes verticais aumentou, ocorreu um incremento na distorção de cruzamentos por zero. Isso indica uma diminuição na qualidade de recuperação da informação. Quanto maior a linha de transmissão, maior será a distorção introduzida no sinal codificado que trafega pela linha e, portanto, maior será a distorção na forma de onda recuperada.

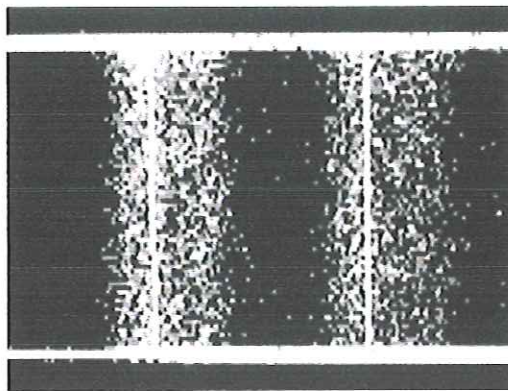


FIGURA 5.13: Diagrama de olho da forma de onda recuperada com modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros para o sistema em malha fechada.

## Capítulo 6

### IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA ANÁLOGO AO *SPREAD SPECTRUM* UTILIZANDO O CAOS

No capítulo 5 um novo esquema cifrador de informação binária foi sugerido, implementado e avaliado. Neste capítulo, o circuito da partícula em caixa da figura 2.2 é utilizado para implementar a técnica *spread spectrum*.

#### 6.1 Introdução

Em um sinal *spread spectrum*, a largura de banda do sinal transmitido é muito maior que a informação. Este espalhamento da informação é determinado por alguma função que independe da mensagem. Um exemplo de um sistema *spread spectrum* convencional é mostrado na figura 6.1. Tal esquema é conhecido como *Frequency Hopping* - FH [2] e realiza o processo de espalhamento da informação utilizando uma seqüência pseudo-aleatória. Um sintetizador de freqüências controlado por um gerador de seqüência pseudo-aleatória gera uma portadora que oscila aleatoriamente. Para recuperar o dado, um sintetizador de freqüências controlado por um gerador de seqüência pseudo-aleatória, identicamente sincronizado com o do transmissor, deve ser utilizado no receptor. Para um observador, a portadora parece ocupar a largura de banda total sobre um seqüência periódica pseudo-aleatória, embora ela ocupe somente uma freqüência em cada instante de tempo.

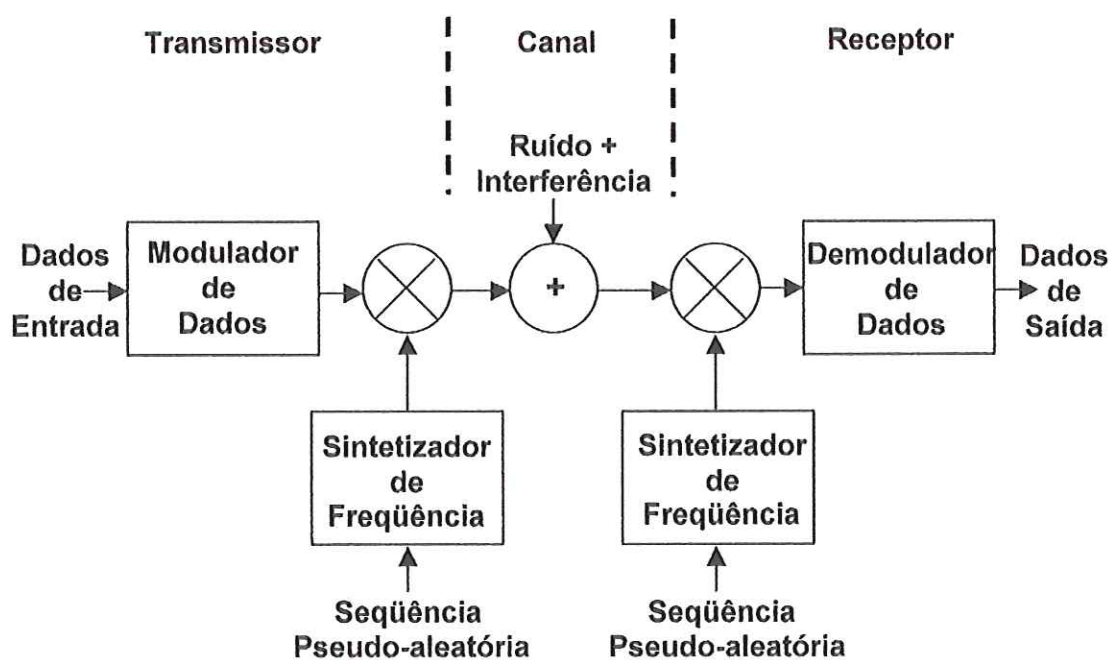


FIGURA 6.1: Modulador e demodulador FH.

No sistema alternativo ao *spread spectrum* FH proposto neste capítulo, a função de espalhamento da informação é realizada pelo circuito caótico analisado no capítulo 2. O circuito gera uma seqüência pseudo-aleatória que será utilizada para produzir uma portadora cuja freqüência varia aleatoriamente.

## 6.2 Implementação da técnica *spread spectrum* utilizando o circuito caótico da partícula em caixa

Um sistema alternativo ao *spread spectrum* convencional encontra-se nas figuras 6.2-3 [34]. No esquema do transmissor mostrado na figura 6.2, o circuito caótico tem a função fundamental de gerar a aleatoriedade existente na freqüência da portadora. O circuito caótico gera o sinal mostrado na figura 6.4 Esse sinal quando é aplicado na entrada de um Oscilador Controlado por Tensão (VCO), produz uma portadora senoidal cuja freqüência varia aleatoriamente. O modulador FSK transforma o sinal de entrada, que é representado por um fluxo de dados binários, num sinal senoidal com duas freqüências de oscilação que pode ser observado nas figuras 5.5 e 5.6. Dessa maneira, o

sinal proveniente do modulador Frequency Shift Keying - FSK, que possui espectro de potência conforme figura 5.6, modula uma portadora de frequência variável originária do VCO transmissor. O resultado dessa modulação corresponde a um sinal *spread spectrum* que é enviado ao receptor e cuja frequência varia ao longo do tempo. O espectro de potência do sinal espalhado no domínio da frequência pode ser observado na figura 6.5, e é possível notar a presença de componentes frequenciais na faixa de 20 kHz a 60 kHz.

O esquema do receptor é exposto na figura 6.3. Para haver correta detecção da informação é necessário que o sinal proveniente do transmissor, pelo canal de transmissão, seja multiplicado pelo sinal portador recuperado. A recuperação do sinal portador é realizada pelo circuito (*Phase Lock Loop* - PLL) que permite o sincronismo entre os VCOs do transmissor e receptor. Quando o circuito PLL estiver na condição de fase casada, o VCO do receptor oscilará na mesma frequência do VCO do transmissor. O resultado da multiplicação entre sinal portador recuperado e sinal proveniente do transmissor gera um sinal FSK recuperado que oscila em duas frequências. Em seguida, o sinal FSK estimado é demodulado ocorrendo desta forma a recuperação do fluxo de dados binário inicial.

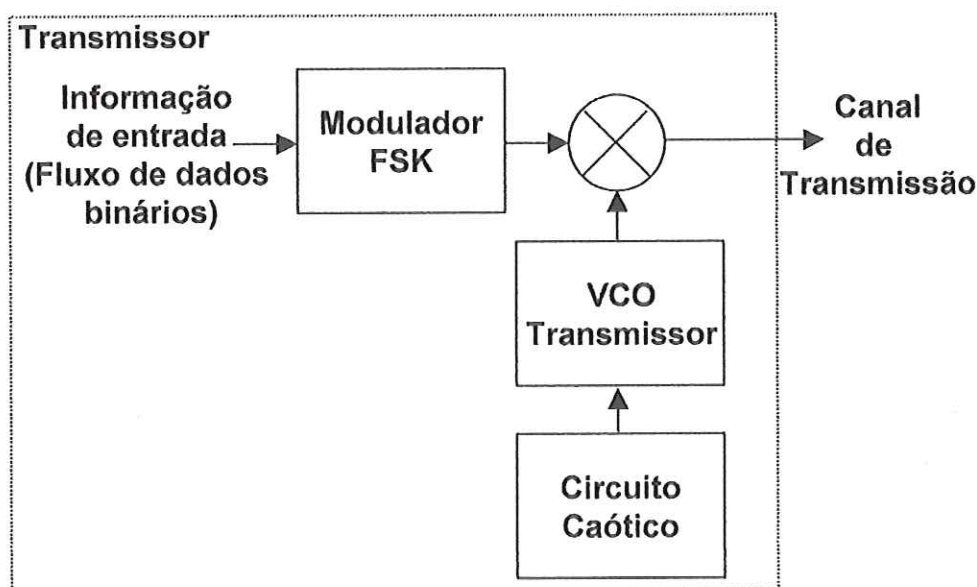


FIGURA 6.2: Transmissor do sistema *spread spectrum* utilizando caos.



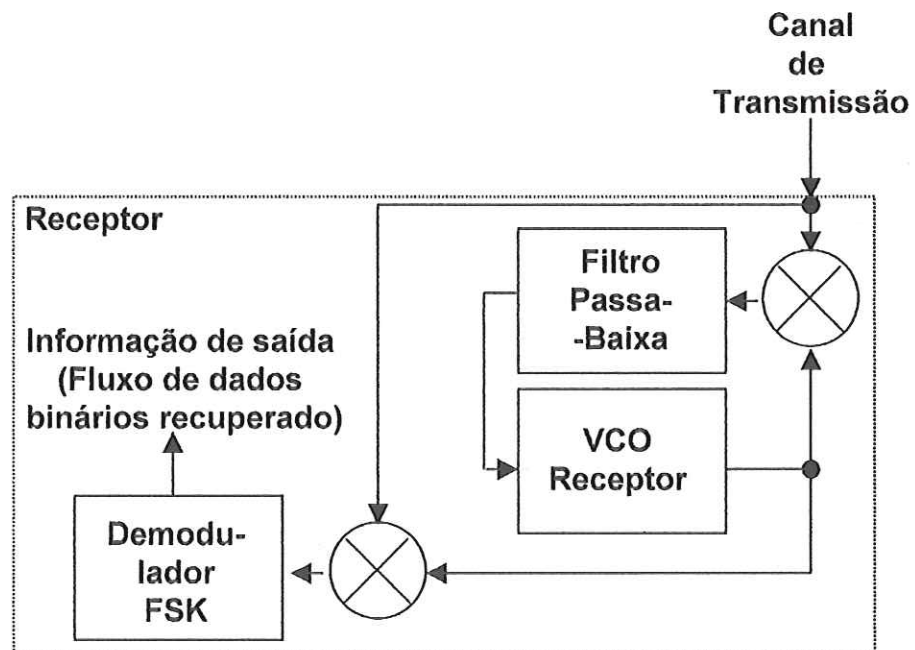
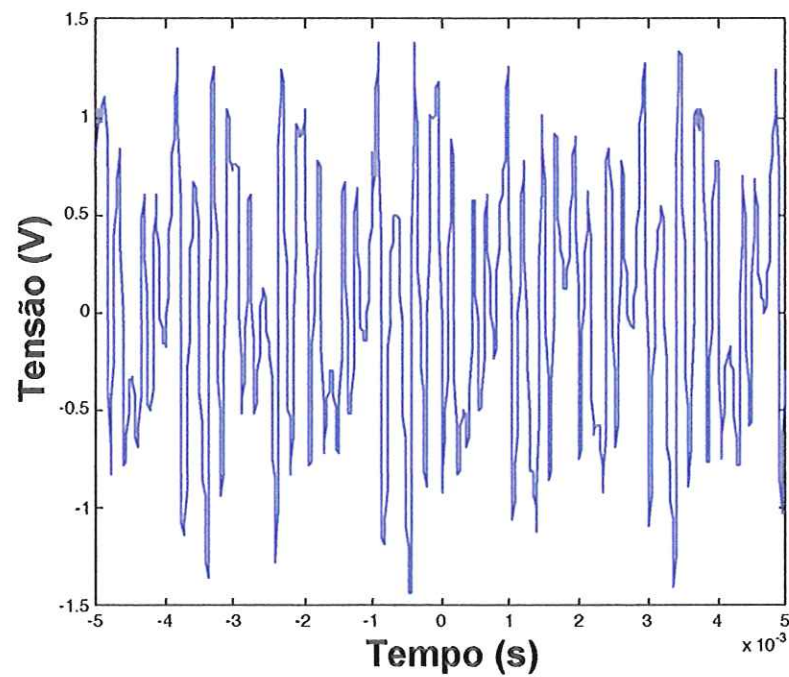
FIGURA 6.3: Receptor do sistema *spread spectrum* alternativo.

FIGURA 6.4: Sinal caótico.

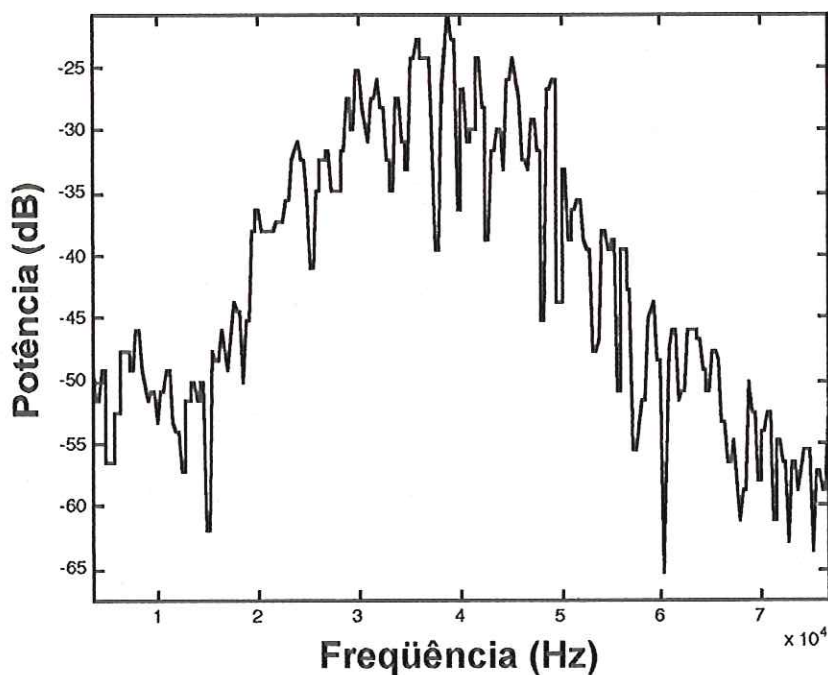


FIGURA 6.5: Espectro de potência do sinal transmitido.

### 6.3 Avaliação do desempenho do sistema

O desempenho do sistema é avaliado através da comparação entre as formas de onda do fluxo binário de entrada ( informação original ) e o fluxo binário de saída ( informação recuperada ). Além disso, o diagrama de olho é utilizado para verificar os efeitos de distorção na forma de onda recuperada.

#### 6.3.1 Desempenho do sistema sem linha de transmissão

Inicialmente o sistema transmissor foi conectado diretamente ao receptor. O mesmo fluxo de dados binários utilizado na seção 5.2.1 foi empregado como informação original. Observando a figura 6.6 nota-se que a informação de entrada está sendo plenamente recuperada. O diagrama de olho da forma de onda recuperada, apresentado na figura 6.7, permite a verificação da distorção no processo de detecção. Examinando o diagrama de olho da figura 6.7, é possível notar os seguintes fatos:

- Baixa distorção de amplitude;
- Baixa sensibilidade a erros de temporização, uma vez que a inclinação das paredes do modelo é pequena;
- Como a espessura das paredes do diagrama é fina tem-se baixa distorção de fase (*Timing Jitter*) [20].

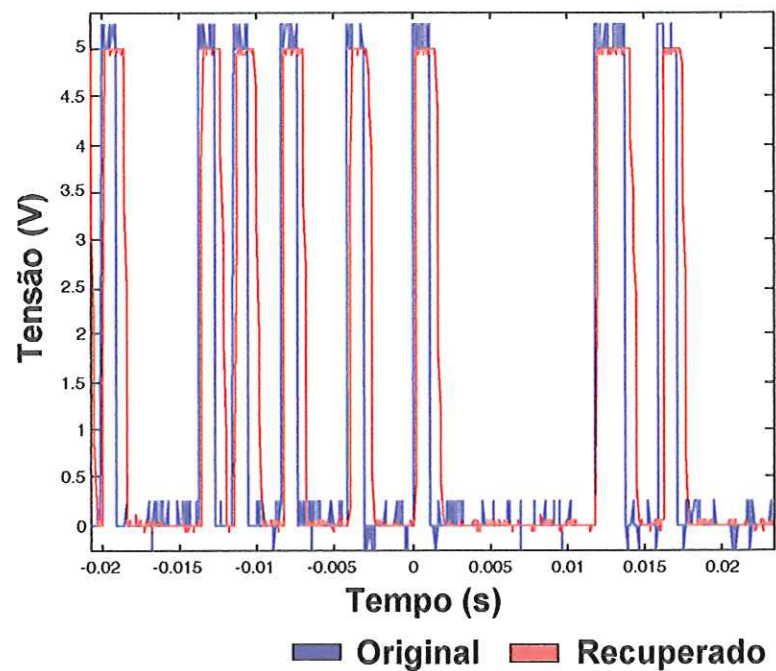


FIGURA 6.6: Fluxo binário original e recuperado.

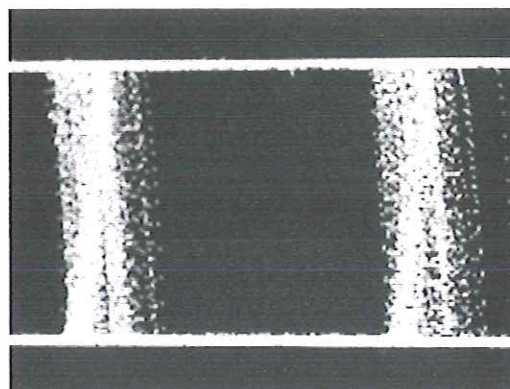


FIGURA 6.7: Diagrama de olho da forma de onda recuperada sem linha de transmissão.

### 6.3.2 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros

Os mesmos testes realizados na seção 6.3.1 foram aplicados para o caso de um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros. O diagrama de olho da forma de onda recuperada, indicado na figura 6.8, demonstra um aumento no nível de distorção ocorrido durante o processo de detecção. Ao observar o diagrama de olho da figura 6.8 algumas alterações em relação ao diagrama da figura 6.7 podem ser visualizadas:

- Aumento na espessura das paredes do modelo implicando aumento de distorção de fase ( *Timing Jitter* ) [20];
- Aumento na inclinação das paredes do modelo indicando um aumento da sensibilidade a erros de temporização.

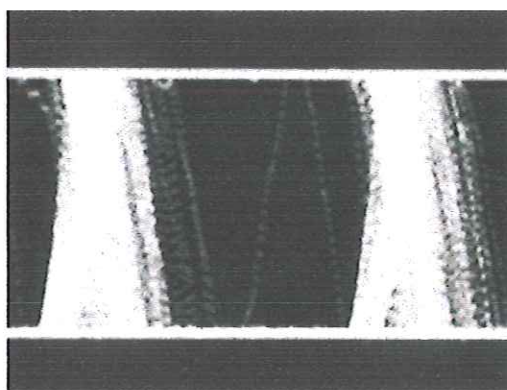


FIGURA 6.8: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para um modelo "T" de linha de transmissão de 100 metros.

### 6.3.3 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 1000 metros

Uma linha de transmissão de 1000 metros foi colocada entre o transmissor e o receptor. Estudando o diagrama de olho da forma de onda recuperada, mostrado na figura 6.9, é possível perceber um aumento de distorção no processo de detecção. Em



relação ao diagrama de olho para linha de transmissão de 100 metros, o diagrama da figura 6.9 apresenta as seguintes alterações:

- Aumento na distorção de amplitude;
- Aumento na espessura e inclinação das paredes do modelo.

Os fatos anteriormente observados comprovam aumento das distorções no processo de recuperação.

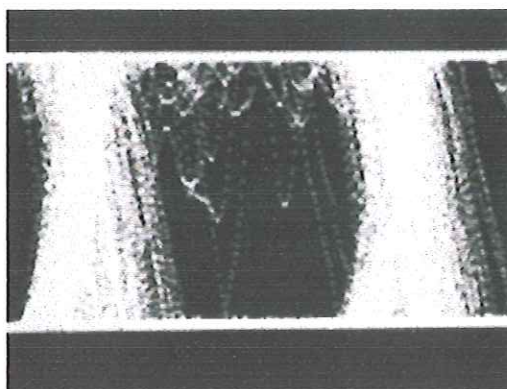


FIGURA 6.9: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para uma linha de transmissão de 1000 metros.

#### **6.3.4 Desempenho do sistema para um modelo "T" de linha de transmissão de 5000 metros**

Um modelo "T" de linha de transmissão de 5000 metros foi utilizado para conectar o transmissor ao receptor. As formas de onda da informação original e informação recuperada são apontadas na figura 6.10. Analisando a figura 6.10 é possível perceber distorções na forma de onda da informação recuperada. O diagrama de olho da informação recuperada é ilustrado na figura 6.11. Examinando esse diagrama percebe-se um aumento de distorção na forma de onda recuperada. Tal fato demonstra o comprometimento da qualidade de detecção da informação à medida que é aumentado o comprimento da linha de transmissão.

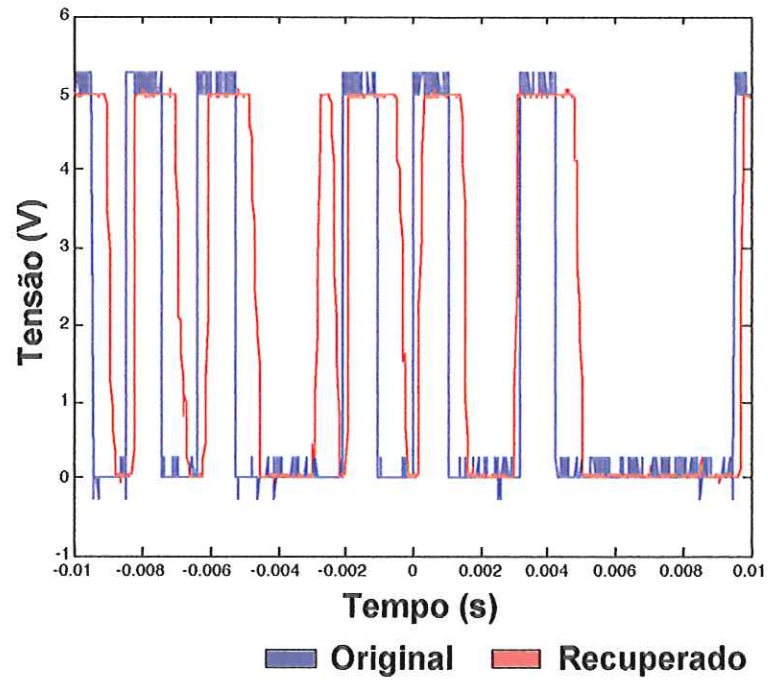


FIGURA 6.10: Fluxo binário original e recuperado.

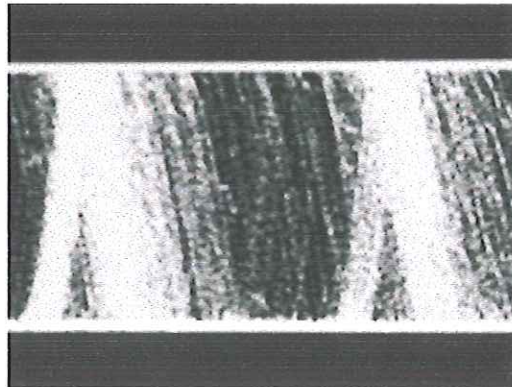


FIGURA 6.11: Diagrama de olho da forma de onda recuperada para um modelo "T" de linha de transmissão de 5000 metros.

## CONCLUSÕES

O circuito eletrônico observado na figura 2.2 apresenta um rico comportamento dinâmico. A partir dos estudos realizados nos capítulos 2 e 3, através do controle da amplitude e da frequência do sinal oscilante  $V_i$  do circuito da figura 2.2 é possível varrer a dinâmica do sistema desde uma situação periódica, passando por bifurcações até atingir uma situação caótica.

O circuito caótico explorado neste trabalho foi utilizado em um esquema de detecção onde a frequência do sinal oscilante foi estimada. A estimação do sinal oscilante é realizada com relativa facilidade de acordo com os dados discutidos no capítulo 3.

A capacidade de estimação do sinal oscilante  $V_i$ , utilizando o circuito caótico da figura 2.2 foi aplicada na cifragem de um sinal de informação de frequência variável reportando-se à seção 5.1.

Utilizando as técnicas de estimação em malha aberta e em malha fechada foi possível implementar um cifrador de informação binária, de acordo com a seção 5.2. Através da técnica do diagrama de olho foi possível notar a superioridade da estimação em malha fechada em relação à estimação em malha aberta.

O circuito caótico da figura 2.2 também pode ser aplicado na implementação de um esquema análogo ao *spread spectrum* convencional como foi analisado no capítulo 6. Nesse caso, o circuito caótico é utilizado para gerar a aleatoriedade existente nas portadoras dos sistemas em *spread spectrum*.

A técnica de modulação caótica que explora a não-linearidade de sistemas dinâmicos pode ser empregada em novos sistemas de telecomunicações. A aplicação do caos em sistemas de telecomunicações pode suplantar algumas limitações encontradas

nas tecnologias convencionais de acesso múltiplo, codificação de informação e comunicações sem fio. Portanto, novos estudos sobre a aplicação de sistemas não-lineares em telecomunicações são bem vindos.

---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Dixon, R. C. (1994). *Spread spectrum systems-with commercial applications*. 3.ed. New York, John Wiley & Sons.
- [2] Taub, H.; Schilling, D. L. (1986). *Principles of communication systems*. 2.ed. New York, McGraw-Hill.
- [3] Kolumbán, G.; Kennedy M. P.; Chua L. O. The role of synchronization in digital communications using chaos-part I: chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Transactions on circuits and systems-I: fundamental theory and applications*, 44(10):927-936, Outubro, 1997.
- [4] Frey, D. R. Chaotic digital encoding: an approach to secure communication. *IEEE Transactions on circuits and systems-II: analog and digital signal processing*, 40(10):660-666, Outubro, 1993.
- [5] Mazzini, G.; Setti, G.; Rovatti, R. Chaotic complex spreading sequences for asynchronous DS-CDMA-part I: system modeling and results. *IEEE Transactions on circuits and systems I*, 44(10):937-947, Outubro, 1997.
- [6] Rovatti, R.; Setti, G.; Manzini G. Chaotic complex spreading sequences for asynchronous DS-CDMA - Part II: some theoretical performance bounds. *IEEE Transactions on circuits and systems I*, 45(4):496-506, 1998.
- [7] Carroll, T. L. Spread-spectrum sequences from unstable periodic orbits. *IEEE Transactions on circuits and systems I*, 47(4):443-447, Abril, 2000.
- [8] Yang, T.; Chua, L. O. Chaotic digital code-division multiple access (CDMA) communication systems. *International journal chaos applied sci. eng.*, 7(12):2789-2805, 1997.

- 
- [9] Yang, T.; Chua, L. O. Applications of chaotic digital code-division multiple access (CDMA) to cable communication systems. *International journal of bifurcation and chaos*, 8(8):1657-1669, 1998.
- [10] Kaus, J.; Nossek, J. A.; Yang, T.; Chua, L. O. Evaluation of a continuous valued chaotic spreader used in a chaotic digital code-division multiple access ((CD)<sup>2</sup>MA) system. *International journal of bifurcation and chaos*, 10(8):1933-1950, 2000.
- [11] Yang, T.; Chua, L. O. Error performance of chaotic digital code-division multiple access (CDMA) system. *International journal of bifurcation and chaos*, 8(10):2047-2059, 1998.
- [12] Carroll, T.; Pecora, L. Synchronizing nonautonomous chaotic circuits. *IEEE Transactions on circuits and systems II: analog and digital signal processing*, 40(10): 646-650, Outubro, 1993.
- [13] Cuomo, K. M.; Oppenheim, A. V.; Strogatz, S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on circuits and systems I*, 40(10): 626-633, Outubro, 1993.
- [14] Kolumbán, G.; Kennedy M. P.; Chua L. O. The role of synchronization in digital communications using chaos-part II: chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Transactions on circuits and systems I: fundamental theory and applications*, 45(11):1129-1140, Novembro, 1998.
- [15] Kis, G.; Jakó, Z.; Kenedy, M. P.; Kolumbán, G. Chaotic communications without synchronization. *Proc. Sixth IEE conf. Telecommunications Edinburgh*, 49-53, Março 29 - Abril 1, 1998.
- [16] Pecora, L. M.; Carroll, T. L. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, 44(4):2374-2383, 1991.
- [17] Chua, L. O.; Yang, T.; Zhong, Q.; Wu, C. W. Synchronization of Chua's circuits with time-varying channels and parameters. *IEEE Transactions on circuits and systems. I*, 43:862-868, 1996.
- [18] Gonçalves, L.N. (1990). *Modelos eletrônicos do atrito seco, sistemas biestáveis e colisões elásticas e inelásticas*. 142p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Física

---

e Química de São Carlos – Departamento de Física e Ciência dos Materiais, Universidade de São Paulo.

- [19] Cuomo, K. M.; Oppenheim, A. V.; Strogatz, S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. On Circuits And Systems-II: Analog And Digital Processing*, 40(10):626-633, Out., 1993.
- [20] Keiser, G. (1991). *Optical fiber communications*. 2.ed. New York, McGraw-Hill.
- [21] Kadanoff, L. P. Roads to chaos. *Physics Today*, pp.46, Dezembro, 1983.
- [22] Cherailov, A. A.; Sagdeev, R. Z.; Zaslavsky, G. Chaos:how regular can it be?. *Physics Today*, Dezembro, 1985.
- [23] Gleik, J. (1990). *Caos: a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro, Editora Campus.
- [24] Stefani, M.A.; Pizolato, J.C.J.; Neto, L.G. (2000). A laser triangulation range finder based on a chaotic modulation and detection system. In: AEROSENSE SYMPOSIUM, 9., Orlando, EUA, (2000). *Anais*. Orlando, SPIE.
- [25] Stefani, M.A.; Pizolato, J.C.J.; Neto, L.G. (1999). Chaotic modulation and detection system for a laser position sensor. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON LASER METROLOGY FOR PRECISION MEASUREMENTS AND INSPECTION ON INDUSTRY, Florianópolis, (1999). *Anais*. Florianópolis, IMEKO., p.2.37-3.42.
- [26] Zimmerman, R. L.; Celaschi, S.; Neto, L.G. The eletronic bouncing ball. *American Journal Of Physics*, 60(4):370-375, Abril, 1992.
- [27] Cuomo, K.M.; Oppenheim A.V.; Strogatz, S. H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Transactions on circuits and systems II: analog and digital signal processing*, 40(10):626-633, Outubro, 1993.
- [28] Kis, G.; Jákó, Z.; Kennedy, M. P.; Kolumbán, G. *Chaotic communications without synchronization*. Technical University of Budapest, Hungary, University College Dublin, Ireland.

- 
- [29] Kolumbán, G.; Kis, G.; Jákó, Z.; Kennedy, M. P. FM-DCSK: a robust modulation scheme for chaotic communication. *IEICE Trans. Fundamentals*, E81-A(9):1798-1802, Setembro, 1998.
- [30] Volkovskii, A. R.; Tsimring, L. S. Synchronization and communication using chaotic frequency modulation. *International Journal of Circuit Theory and Applications*. 27:569-576, 1999.
- [31] Pizolato, J.C.J.; Neto, L.G. (2000). Aplicação da técnica de modulação caótica como alternativa para sistemas de telecomunicações em banda larga. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 23., São Lourenço, Minas Gerais, 2000. *Resumos*. São Lourenço, SBF., p.88.
- [32] Pizolato, J.C.J.; Romero, M.A.; Neto, L.G. (2000). Application of the chaotic modulation technique as alternative in spread spectrum telecommunication systems. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR DYNAMICS, CHAOS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS TO ENGINEERING, 3., Campos do Jordão, São Paulo, 2000. *Resumos*. Campos do Jordão, SBMAC.
- [33] Pizolato, J.C.J.; Romero, M.A.; Gonçalves, L.G. (2000). Aplicação da técnica de modulação caótica como alternativa para sistemas de telecomunicações em banda larga. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE MICROONDAS E OPTOELETRÔNICA, 9., João Pessoa, Paraíba, 2000. *Anais*. João Pessoa, SBMO., p.506-510.
- [34] Pizolato, J.C.J.; Neto, L.G. (2001). Caos aplicado no desenvolvimento de sistemas análogos ao spread spectrum. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA, 24., São Lourenço, Minas Gerais, 2001. *Resumos*. São Lourenço, SBF., p.121.
- [35] Tsonis, A. A. (1992). *Chaos from theory to applications*. 1.ed. New York, Plenum Press.
- [36] Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling W.T.; Brian P.F. (1994). *Numerical recipes in fortran*. 4.ed. New York, Cambridge University Press.



## APÊNDICE I

### 1-Expoentes de Lyapunov [35]

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para determinar o comportamento dinâmico de um sistema e estão relacionados à taxa média de convergência ou divergência de trajetórias no espaço de fase.

Considere um conjunto de condições iniciais confinadas numa esfera  $n$ -dimensional. Ao monitorar a evolução, durante longo tempo, dessa esfera calculamos a taxa de crescimento médio  $\lambda_i$  de algum eixo principal  $P_i$ . Portanto, é possível definir essa taxa de crescimento como segue:

$$\lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} \ln [P_i(t)/P_i(0)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln [P_i(T)/P_i(0)] \quad (1.1)$$

Onde  $P_i(0)$  é o raio do eixo principal  $P_i$  em  $t=0$  e  $P_i(T)$  é seu raio depois de um tempo  $T$ . O conjunto dos  $\lambda_i$ 's está relacionado ao espectro de expoentes de Lyapunov.

Quando no mínimo um expoente de Lyapunov é positivo, então o sistema é caótico, e a esfera inicial evoluirá para alguma estrutura elipsóide complexa refletindo a divergência exponencial das condições iniciais. Quando nenhum expoente de Lyapunov existe, então, nenhuma divergência exponencial existe. Podemos dizer que os expoentes medem a taxa em que o sistema destrói a informação.

Um atrator é um conjunto limite que abrange trajetórias do espaço de fase. Expoentes positivos fornecem uma idéia de quão rápida a informação contida, num conjunto de condições iniciais, inicialmente próximas uma da outra, é perdida devido à

expansão do atrator caótico. Expoentes negativos fornecem uma idéia sobre a taxa média em que informação é perdida devido à contração do atrator caótico.

## 2-Expoentes Condicionais de Lyapunov [16]

Suponha um sistema composto dividido em:

$$\dot{v} = f(v, u) \quad (2.1)$$

$$\dot{u} = g(v, u) \quad (2.2)$$

$$\dot{w} = h(v, w) \quad (2.3)$$

Onde as eqs.(2.1) e (2.2) formam o subsistema *drive* e eq.(2.3) corresponde ao subsistema *response*.

A estabilidade do subsistema *response* pode ser analisada via determinação dos expoentes de Lyapunov da eq.(2.3) para uma trajetória particular *drive*  $(v, u)(t)$ . Esses expoentes dependem de  $v(t)$  e são apenas uma medida da estabilidade do subsistema dado pela eq.(2.3) e são chamados de expoentes condicionais de Lyapunov.

## APÊNDICE II

### Método de solução de equação diferencial ordinária não-homogênea de segunda ordem

A grande maioria das equações diferenciais encontradas na prática não podem ser solucionadas analiticamente, ou possuem outros inconvenientes que tornam este trabalho extremamente complexo. O recurso que dispomos é o emprego de métodos numéricos que possibilitam obter soluções bem precisas.

Para solucionar as equações que aparecem neste trabalho iremos utilizar o método do Trapézio [36], cujo algoritmo será descrito a seguir.

Dada uma equação diferencial não-homogênea de segunda ordem que possua coordenadas  $x$  e  $y$  do plano de fase onde  $\frac{dx}{dt} = y$ , temos que este sistema pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \quad (1.2)$$

Podemos aproximar a integral de uma função  $\frac{dy}{dt} = f(t)$  em um intervalo de tempo  $\Delta = t_{n+1} - t_n$  pela área de um trapézio, vide figura 1.

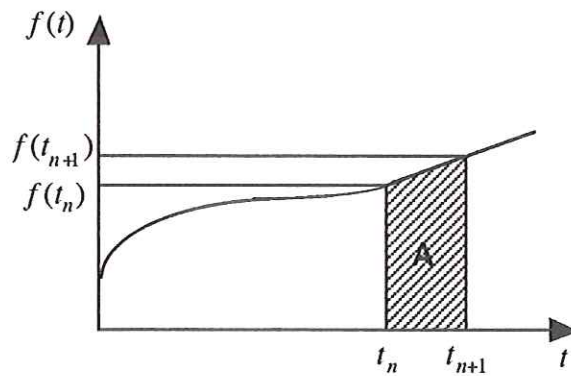


Figura 1: Método de integração trapezoidal.

Dessa maneira temos que:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \approx A \quad (1.3)$$

$$A = (t_{n+1} - t_n) \frac{(f(t_{n+1}) + f(t_n))}{2} \quad (1.4)$$

Mas como  $(t_{n+1} - t_n) = \Delta$  e  $\int f(t) dt = F(t) + c$ , temos, ainda:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt = F(t_{n+1}) - F(t_n) \approx \frac{\Delta}{2} (f(t_{n+1}) + f(t_n)) \quad (1.5)$$

Quanto menor for nosso intervalo de integração  $\Delta$ , maior será a precisão de nosso resultado.

Podemos utilizar esse algoritmo para determinar a função  $x_{t_{n+1}}$  e  $y_{t_{n+1}}$  do sistema dado pela eq.(1.3) demonstrado a seguir:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dx}{dt} dt = x_{t_{n+1}} - x_{t_n} \approx \frac{\Delta}{2} (y_{t_{n+1}} + y_{t_n}) \quad (1.6)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt} dt = y_{t_{n+1}} - y_{t_n} \approx \frac{\Delta}{2} (f(x_{t_{n+1}}, y_{t_{n+1}}, t_{n+1}) + f(x_{t_n}, y_{t_n}, t_n)) \quad (1.7)$$

Reorganizando os fatores temos:

$$x_{t_{n+1}} \cong x_{t_n} + \frac{\Delta}{2}(y_{t_{n+1}} + y_{t_n}) \quad (1.8)$$

$$y_{t_{n+1}} \cong y_{t_n} + \frac{\Delta}{2}(f(x_{t_{n+1}}, y_{t_{n+1}}, t_{n+1}) + f(x_{t_n}, y_{t_n}, t_n)) \quad (1.9)$$

Quando o sistema é linear ou linear por partes ( tomando certos cuidados ), podemos desacoplar as equações e agrupar todos os termos que possuem  $x_{t_{n+1}}$  e  $y_{t_{n+1}}$  no lado esquerdo das eqs.(1.8) e (1.9). Dessa maneira é fácil determinarmos a solução do sistema, pois sempre temos conhecimento dos valores de  $x_{t_n}$  e  $y_{t_n}$ .

Para sistemas não-lineares, não podemos agrupar os termos que possuem variáveis  $x_{t_{n+1}}$  e  $y_{t_{n+1}}$  no lado esquerdo das eqs.(1.8) e (1.9), tornando impossível o cálculo destes valores. Para contornar estes problemas, usamos o artifício de prever os valores dessas variáveis, como é mostrado a seguir:

$$x_{t_{n+1}}^o \cong x_{t_n} + \Delta \frac{dx(t_n)}{dt} = x_{t_n} + \Delta y_{t_n} \quad (1.10)$$

$$y_{t_{n+1}}^o \cong y_{t_n} + \Delta \frac{dy(t_n)}{dt} = y_{t_n} + \Delta f(x_{t_n}, y_{t_n}, t_n) \quad (1.11)$$

Dessa maneira temos:

$$x_{t_{n+1}} \cong x_{t_n} + \frac{\Delta}{2}(y_{t_{n+1}}^o + y_{t_n}) \quad (1.12)$$

$$y_{t_{n+1}} \cong y_{t_n} + \frac{\Delta}{2}(f(x_{t_{n+1}}^o, y_{t_{n+1}}^o, t_{n+1}) + f(x_{t_n}, y_{t_n}, t_n)) \quad (1.13)$$

Novamente, quanto menor for o valor de  $\Delta$ , maior será a precisão de nosso método.