USP

Campus de São Carlos

FUNÇÕES DE LYAPUNOV ESTENDIDAS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA

Autor: Flávio Henrique J. Ribeiro da Silva

Orientador: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Funções de Lyapunov Estendidas para Análise de Estabilidade Transitória em Sistemas Elétricos de Potência

Flávio Henrique J. Ribeiro da Silva

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Newton G. Bretas

EESC - USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

São Carlos

2004

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço 20 / 12 / 04
Ass.:

DEDALUS - Acervo - EESC
31100050087

Class. TESE EESC
Cutt. 5532
Tombo T307/04
Sysno 1415004

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S586f

Silva, Flávio Henrique J. Ribeiro da
Funções de Lyapunov estendidas para análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência / Flávio Henrique J. Ribeiro da Silva. -- São Carlos, 2004.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2004.
Área: Engenharia Elétrica.
Orientador: Prof. Dr. Newton G. Bretas.

1. Estabilidade transitória. 2. Método de Lyapunov. 3. Funções de Lyapunov. 4. Condutâncias de transferência. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **FLÁVIO HENRIQUE JUSTINIANO RIBEIRO DA SILVA**

Tese defendida e julgada em 19-10-2004 perante a Comissão Julgadora:

APROVADO

Prof. Titular **NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **VANDER MENENGOY DA COSTA**
(Universidade Federal de Juiz de Fora/UFJF)

APROVADO

Prof. Dr. **BASÍLIO ERNESTO DE ALMEIDA MILANI**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Prof. Dr. **ANTÔNIO PADILHA FELTRIN**
(UNESP/Ilha Solteira)

APROVADO

Prof. Dr. **RODRIGO ANDRADE RAMOS**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Prof. Associado **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

À minha esposa Lea e aos meus filhos

Mateus e Marina pelo carinho.

Agradecimentos

Ao meu anjo da guarda Achaiah, por sempre estar do meu lado.

Ao meu orientador, Prof. Newton G. Bretas.

Ao Prof. Luis Fernando, pelas sugestões no decorrer do trabalho.

Aos meus pais, José e Ivone.

Aos meus avós, Fernando e Maria Nonata, pela educação que tive.

Aos meus tios Antônio, Nande, Cida e Fafá pelo significativo incentivo aos meus estudos.

À família Mello (Agnaldo, Noeme, Cláudia, Rodrigo, Fabiano e Erick), pelos bons momentos em São Carlos.

Aos meus amigos do LACO (Laboratório de Análise Computacional em Sistemas de Potência) pelas discussões sobre sistemas de potência e pelo grande companheirismo.

À todos os meus amigos, cultivados ao longo dos anos, que participaram diretamente e (ou) indiretamente para a realização deste trabalho.

À Universidade de São Paulo, pela estrutura.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo concedida.

Resumo

SILVA, F. H. J. R. (2004). Funções de Lyapunov estendidas para análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

O método de Lyapunov, também conhecido como método direto, é eficiente para análise de estabilidade transitória em sistemas de potência. Tal método possibilita a análise de estabilidade sem requerer o conhecimento das soluções das equações diferenciais que modelam o problema. A maior desvantagem da utilização dos métodos diretos, é sem dúvida encontrar uma função ($\mathcal{V}$) que satisfaça as condições do Teorema de Lyapunov, ou seja, $\mathcal{V} > 0$ e $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$. Durante muitos anos a inclusão das condutâncias de transferência na modelagem do sistema de potência, com a rede reduzida aos nós dos geradores, foi um assunto que despertou interesse em vários pesquisadores. Em 1989, Chiang provou a não existência de uma Função de Lyapunov para sistemas de potência quando as condutâncias de transferência são consideradas. Essas condutâncias de transferência são responsáveis por gerar regiões no espaço de estados onde tem-se $\dot{\mathcal{V}} > 0$, não satisfazendo as condições do Teorema de Lyapunov. Recentemente, Rodrigues, Alberto e Bretas (2000) apresentaram a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, onde é permitido que a Função de Lyapunov possua, em algumas regiões limitadas do espaço de estados, a derivada positiva. Neste caso, estas funções passam a ser denominadas Funções de Lyapunov Estendidas (FLE). Neste trabalho, são utilizadas a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle e as Funções de Lyapunov Estendidas para a análise de estabilidade transitória, considerando o efeito das condutâncias de transferência na modelagem do problema. Para

isto, são propostas Funções de Lyapunov Estendidas para modelos de sistemas de potência que não apresentam uma Função de Lyapunov no sentido usual. Essas FLE's são propostas tanto para sistemas de 1-máquina versus barramento infinito quanto para sistemas multimáquinas. Para a obtenção de boas estimativas do tempo de abertura, nos estudos de estabilidade transitória, é proposto um algoritmo iterativo. Este algoritmo fornece uma boa estimativa local da área de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse.

Palavras-Chave: Estabilidade transitória, Método de Lyapunov, Funções de Lyapunov, Condutâncias de transferência.

Abstract

SILVA, F. H. J. R. (2004). Extended Lyapunov function for analysis and control of electrical power systems transient stability. PHD Thesis - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

The method of Lyapunov, one of the direct method, is efficient for transient stability analysis of power systems. The direct methods are well-suited for stability analysis of power systems, since they do not require the solution of the set of differential equations of the system model. The great difficulty of the direct methods is to find an auxiliary function ($\mathcal{V}$) which satisfies the conditions of Lyapunov's Theorem ($\mathcal{V} > 0$ and $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$). For many years the inclusion of the transfer conductances in the power system model, with the reduced network, is a issue of interest for several researchers. In 1989, Chiang studied the existence of energy functions for power systems with losses and he proved the non existence of a Lyapunov Function for power systems when the transfer conductance is taken into account. The transfer conductances are responsible for generating regions in the state space where the derivative of $\mathcal{V}$ is positive. Therefore, the function $\mathcal{V}$ is nor a Lyapunov Function, because its derivative is not semi negative definite. Recently, an Extension of the LaSalle's Invariance Principle has been proposed by Rodrigues, Alberto and Bretas (2000). This extension relaxes some of the requirements on the auxiliary function which is commonly called Lyapunov Function. In this extension, the derivative of the auxiliary function can be positive in some bounded regions of the state space and, for distinction purposes, it is called, as Extended Lyapunov Function. In this work, the Extension of the LaSalle's Invariance Principle and the Extended Lyapunov Function are used for

the transient stability analysis of power systems with the model taking transfer conductances in consideration. For at purpose in this research, Extended Lyapunov Functions for power system models which do not have Lyapunov Functions in the usual sense are proposed. Extended Lyapunov Functions are proposed for a single-machine-infinite-bus-system and multimachine systems. For obtaining good estimates of the critical clearing time in transient stability analysis, an iterative algorithm is proposed. This algorithm supplies a good local estimate of the attraction area for the post fault stable equilibrium point.

Key words: Transient stability, Lyapunov methods, Lyapunov functions, Transfer conductances.

Lista de Figuras

2.1 Representação do sistema multimáquinas 10

3.1 Representação geométrica das variedades do ponto de equilíbrio hiperbólico x_e. 23

3.2 Representação do Teorema 3.5. 24

3.3 Representação geométrica para um caso onde a condição de transversalidade não é satisfeita. 25

3.4 Representação geométrica para um caso onde a condição de transversalidade é satisfeita. 26

3.5 Curvas de nível da função de Lyapunov 27

3.6 Representação geométrica para o Teorema 3.10 29

3.7 Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância . 30

3.8 Região de atração para o Exemplo 3.15 32

4.1 Região de atração 45

4.2 Ilustração da bacia energética. 46

4.3 PEBS para o sistema 3 máquinas, extraído da referência Athay (1979). 48

4.4 Representação geométrica da estimativa da área de atração utilizando o *peic*. 50

4.5 Representação geométrica do método BCU 51

4.6 Falha na determinação do 'exit point'. 52

4.7 Ilustração do 'Shadowing Method'. 54

4.8 Sistema 2-máquinas × barramento infinito, extraído da referência Athay (1979). 55
4.9 Situação de sincronismo entre os geradores para $t_{AB} = 0.204s$. . . 55
4.10 Perda de sincronismo entre os geradores para $t_{AB} = 0.205s$. 56
4.11 Monitoramento da função energia, considerando $t_{AB} = 0.199s$ . . 56
4.12 Monitoramento da função energia, considerando $t_{AB} = 0.205s$ . . 57
4.13 Monitoramento da derivada da função energia, considerando $t_{AB} = 0.199s$ 57
4.14 Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$. 58
4.15 Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$. 58
4.16 Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$. 59

5.1 Sistema uma máquina versus barramento infinito. 62
5.2 Curvas de nível de $\mathcal{W}$. 65
5.3 Curvas de nível de $\mathcal{W}$. 68
5.4 Curvas de nível de $\mathcal{V}$, E'_q constante e igual a 1.3. 70
5.5 Curvas de nível de $\mathcal{V}$, ω constante e igual a -0.8. 71
5.6 Curvas de nível de $\mathcal{W}$, E'_q constante e igual a 1.3. 73
5.7 Curvas de nível de $\mathcal{W}$, ω constante e igual a -0.8. 74
5.8 Ilustração do caso (ii) do método PEBS Estendido 77
5.9 Ilustração do caso (iii) do método PEBS Estendido 77
5.10 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$. 82
5.11 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$. 82
5.12 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$. 83
5.13 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$. 89
5.14 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$. 90
5.15 Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$. 90
5.16 Ilustração do Passo (A) do algoritmo. 93
5.17 Ilustração do Passo (B) do algoritmo. 94

5.18 Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 1, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.213s$ 98

5.19 Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 1, retirada da linha $1-2$ e o tempo de abertura de $0.179s$ 99

5.20 Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 2, retirada da linha $1-2$ e o tempo de abertura de $0.192s$ 99

5.21 Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 2, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.203s$ 100

5.22 Topologia da rede elétrica do sistema teste IEEE-39. 101

5.23 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 4, retirada da linha $4-5$ e o tempo de abertura de $0.156s$ 104

5.24 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 26, retirada da linha $26-28$ e o tempo de abertura de $0.092s$ . . 104

5.25 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 17, retirada da linha $17-18$ e o tempo de abertura de $0.114s$ . . 105

5.26 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 6, retirada da linha $6-11$ e o tempo de abertura de $0.136s$ 105

5.27 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 8, retirada da linha $8-7$ e o tempo de abertura de $0.148s$ 106

5.28 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 14, retirada da linha $14-15$ e o tempo de abertura de $0.134s$ . . 106

5.29 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 7, retirada da linha $7-6$ e o tempo de abertura de $0.154s$ 107

5.30 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 3, retirada da linha $3-18$ e o tempo de abertura de $0.140s$ 107

5.31 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 21, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.148s$ . . . 108

5.32 Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 17, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.116s$ . . . 108

A.1 Determinação das relações dinâmicas e estáticas entre os sistemas (A.1) e (A.2). 115

Lista de Tabelas

3.1 Tipos de pontos de equilíbrio 22

5.1 Estimativa dos Parâmetros de Perturbação para o sistema teste 2-máquinas × barramento infinito 83

5.2 Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste 2-máquinas × barramento infinito 84

5.3 Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste 91

5.4 Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste 98

5.5 Ponto de equilíbrio pré falta do sistema IEEE-39. 102

5.6 Parâmetros de perturbação β para a Função de Lyapunov Estendida. 102

5.7 Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste IEEE-39 103

B.1 Dados de linha do Sistema Teste IEEE-39 121

B.2 Dados de barras do Sistema Teste IEEE-39 123

Lista de Abreviaturas e Siglas

BCU - Boundary Controlling Unstable equilibrium point.

COA - Center of Angle as reference.

EP - Energia potencial.

FL - Função de Lyapunov.

FLE - Função de Lyapunov Estendida.

f.e.m. - Força eletro motriz.

PEBS - Potential Energy Boundary Surface.

PEE - Ponto de equilíbrio estável.

Lista de Símbolos

δ - Ângulo do rotor dos geradores síncronos.

Δf - Variação de freqüência elétrica.

θ - Ângulo do rotor dos geradores síncronos na referência de centro de ângulo.

$\omega(t)$ - Velocidade angular do rotor do gerador síncrono.

ω_o - Velocidade angular síncrona do sistema.

ϕ_{ij} - Ângulo da admitância Y_{ij}.

B_{ij} - Susceptância, parte imaginária da admitância Y_{ij}.

T - Coeficiente de amortecimento das máquinas síncronas.

E - Fasor de tensão da fonte de tensão do gerador.

f - Freqüência angular do rotor.

f_o - Freqüência síncrona.

G_{ij} - Condutância, parte real da admitância Y_{ij}.

M - Coeficiente de inércia das máquinas síncronas.

n - Número de geradores.

P_c - Potência ativa consumida pela carga.

P_l - Fluxo de potência ativa.

P_L - Potência ativa da carga na barra.

P_m - Potência mecânica de entrada do gerador.

P_G - Potência elétrica de saída do gerador.

Q_c - Potência reativa consumida pela carga.

Q_l - Fluxo de potência reativa.

Q_L - Potência reativa da carga na barra.

t_{CA} - Tempo crítico de abertura.

t_{AB} - Tempo de abertura.

$\mathcal{V}$ - Função de Lyapunov ou energia total.

$\mathcal{V}_{CA}$ - Energia do sistema no tempo de abertura.

$\mathcal{V}_p$ - Energia potencial do sistema.

x_{CA} - Ponto em que a trajetória do sistema em falta abandona a área de atração.

x_I - Ponto de equilíbrio instável.

x_s - Ponto de equilíbrio estável.

x'_d - Reatância transitória de eixo direto.

x'_q - Reatância transitória de eixo em quadratura.

y_i - Admitância da reatância transitória

Y_{BUS} - Matriz de admitância nodal da rede.

$\tilde{Y}_{BUS}$ - Matriz admitância nodal com as admitâncias das cargas inseridas.

$\hat{Y}_{BUS}$ - Matriz admitância nodal com as admitâncias das reatâncias transitórias inseridas.

Y_{RED} - Matriz $\tilde{Y}_{BUS}$ do sistema reduzida às 'n' barras geradoras do sistema.

Y_L - Matriz admitância de cargas.

$\mathcal{W}$ - Função de Lyapunov Estendida ou energia total do sistema.

Conteúdo

Agradecimentos iii

Resumo v

Abstract vii

Lista de Abreviaturas e Siglas xv

Lista de Símbolos xvii

1 Introdução 1

1.1 Estabilidade em Sistemas de Potência 1

1.2 Objetivos e Organização do Trabalho 5

2 Modelo Matemático de Sistemas de Potência 7

2.1 Máquinas Síncronas 7

2.1.1 Modelo de 1-eixo 7

2.1.2 Modelo Clássico 8

2.2 Cargas 9

2.3 Rede Elétrica 9

2.4 Modelo Clássico para Análise de Estabilidade Transitória 13

2.4.1 Formulação uma Máquina como Referência 13

2.4.2 Formulação Centro de Ângulo como Referência 15

3 Método de Lyapunov para Análise de Sistemas Não Lineares 19

3.1 Introdução aos Sistemas Autônomos 19

3.1.1 Pontos de Equilíbrio 21
3.1.2 Variedades Estável e Instável 23
3.1.3 Condição de Transversalidade 24
3.1.4 Campos de Morse-Smale 25
3.2 Análise de Estabilidade 26
3.2.1 Princípio de Invariância de LaSalle 28
3.2.2 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle 29
3.3 Caracterização da Área de Atração 31
3.3.1 Caracterização do ponto de equilíbrio contido em $\partial\mathcal{A}(x_s)$. 33
3.3.2 A Fronteira da Região de Estabilidade 33
3.3.3 Condição Suficiente para a Suposição $\mathcal{P}$–III. 34

4 Aplicação do Método de Lyapunov na Análise de Estabilidade Transitória 37

4.1 Introdução 37
4.2 Funções de Lyapunov para Sistemas de Potência 39
4.3 Estimativa da Área de Atração 43
4.3.1 Método da Superfície Limite de Energia Potencial 47
4.4 Determinação do Ponto de Equilíbrio Instável de Controle 49
4.4.1 Método BCU 51
4.5 Falhas nos Métodos PEBS E BCU 52
4.6 Novos Métodos para o Cálculo do PEBS e do Ponto de Equilíbrio Instável de Controle 53
4.7 Resultados obtidos para o sistema 2-máquinas × barramento infinito 54

5 As Funções de Lyapunov Estendidas para Análise de Estabilidade Transitória 61

5.1 Funções de Lyapunov Estendidas para sistemas UMBI 61
5.1.1 Modelo Clássico para a Máquina Síncrona 62
5.1.2 Modelo Clássico para Máquina Síncrona e inclusão do Efeito de Amortecimento dos Geradores 65

5.1.3 Modelo de 1-eixo para a Máquina Síncrona 67
5.2 Funções de Lyapunov Estendidas para Sistemas Multimáquinas . 74
5.2.1 Método PEBS Estendido 75
5.2.2 Perturbação Suave na Função Energia Aproximada 77
5.2.3 FLE que inclui o efeito de amortecimento e perdas 86
5.3 Proposta para Estimativa da Energia Crítica em Sistemas Multimáquinas 91
5.3.1 Resultados para o Sistema de 2-máquinas × barramento infinito 97
5.3.2 Resultados para o Sistema Teste $IEEE - 39$ 100

6 Conclusões **109**
6.1 Perspectivas de Trabalho Futuro 111

A Sistema Dinâmico Reduzido **113**

B Dados do Sistema Teste IEEE-39 **121**

C Trabalhos Publicados Durante o Doutoramento **125**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Estabilidade em Sistemas de Potência

Na sociedade moderna deseja-se que as concessionárias garantam a confiabilidade e o fornecimento ininterrupto de energia elétrica. Nos últimos anos, o crescente aumento do carregamento dos sistemas elétricos impulsionou a interligação entre os mesmos e propiciou a transmissão de potência através de linhas longas de alta capacidade. Desta forma, o equacionamento dos sistemas elétricos de potência tornou-se mais complexo e o estudo sobre análise e controle da instabilidade de ângulo tornou-se de suma importância, principalmente na área de operação e planejamento de sistemas elétricos de potência.

Durante a operação dos sistemas elétricos podem ocorrer perturbações de grande e pequeno porte, que são responsáveis por acarretar oscilações nos eixos dos geradores síncronos. Quando o sistema está sujeito a uma perturbação, o seu funcionamento normal fica evidentemente prejudicado, acarretando problemas para a sociedade, podendo até implicar no desligamento de uma parte ou de todo o sistema interligado. Desta forma evidencia-se a importância do estudo de estabilidade do sistema elétrico.

As perturbações são classificadas da seguinte forma:

- Grandes perturbações.
- Pequenas perturbações.

As grandes perturbações estão em geral associadas a contigências anormais, tais como curto-circuitos e perdas de linha de transmissão. As pequenas perturbações por sua vez estão relacionadas com perturbações corriqueiras que ocorrem a todo instante durante a operação do sistema, tais como a entrada e saída de cargas no sistema.

Os estudos de estabilidade procuram determinar, entre outras coisas, se o sistema retorna a um ponto de operação adequado após uma perturbação, ou ainda qual a máxima perturbação que o sistema suportaria. Os estudos de estabilidade de ângulo podem ser divididos em:

1. Estabilidade transitória: estuda o comportamento do sistema quando sujeito a grandes perturbações. Desta maneira todas as não linearidades do sistema são levadas em consideração. Neste tipo de estudo os engenheiros estão interessados em garantir o sincronismo entre as máquinas do sistema, durante poucos segundos após a ocorrência da perturbação. Devido ao curto tempo de análise, os equipamentos do sistema que possuem uma dinâmica lenta podem ser omitidos.

2. Estabilidade a pequenas perturbações: estuda o comportamento do sistema quando sujeito a pequenas perturbações, ocorridas durante a operação normal do sistema, estabelecendo limites de operação para o mesmo. Como as perturbações são pequenas, o modelo que representa o sistema pode ser linearizado em torno do ponto de operação. O tempo de estudo é da ordem de minutos, logo deve ser levada em consideração a atuação de equipamentos de dinâmica mais lenta, tais como os reguladores.

Este trabalho tem por objetivo o estudo da análise de estabilidade transitória. Nesses estudos determina-se quão rápida deve ser a atuação do sistema de proteção, chamado tempo de abertura, de modo que o sistema permaneça em sincronismo após a eliminação da falta. O máximo tempo de abertura para o qual o sistema ainda permanece em sincronismo é denominado tempo crítico de abertura (Pai, 1981; Padiyar, 1996; Fouad e Vittal, 1992).

Classicamente as análises de estabilidade transitória são realizadas através de uma série de simulações do sistema de potência nas mais variadas situações. As contigências mais graves são selecionadas e integra-se numericamente, no domínio do tempo, as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema de potência para cada uma das contigências. Desta forma percebe-se que esta análise é adequada somente para estudos 'off-line', pois requer um grande esforço computacional.

Grandes esforços por parte de pesquisadores têm sido feitos para que a análise da estabilidade transitória torne-se adequada à aplicações em tempo real. Os métodos diretos são adequados à aplicação em tempo real, pois fornecem informações a respeito da estabilidade, diretamente, sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais, Pai (1981) e Bretas e Alberto (2000b).

Os métodos diretos utilizam as idéias de Lyapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle, para a estimar a área de atração dos sistemas de potência. Isto é, a partir do estado inicial pré-falta, da topologia pós-falta do sistema e de apenas uma simulação dinâmica é possível a determinação do tempo crítico de abertura, Willems e Willems (1970), Willems (1971) e Chiang et al. (1987).

A dificuldade crucial dos métodos diretos consiste em encontrar uma função auxiliar $\mathcal{V}$, denominada Função de Lyapunov (FL) que satisfaça as condições estabelecidas pelo Teorema de Lyapunov, ou seja, tal função deve ser definida positiva e sua derivada ao longo da trajetória do sistema deve ser pelo menos semi-definida negativa, Vidyasagar (1993) e Khalil (1996).

Em 1958, Aylett introduziu pela primeira vez a Função de Lyapunov do tipo energia para análise de estabilidade transitória. Esta função energia é obtida multiplicando cada equação de aceleração relativa pela velocidade angular. Efetua-se a soma das equações resultantes e obtém-se a função energia através de um processo de integração. Nos dias de hoje, existe uma função energia que é amplamente utilizada por vários pesquisadores que investigam este tipo de problema. Para encontrá-la foram feitas uma série de exigências e simplificações na modelagem do problema as quais muitas vezes não são realistas. Primeiramente, as

máquinas são modeladas como f.e.m.'s constantes em série com uma reatância denominada reatância de eixo direto. As cargas são consideradas como do tipo impedância constante, sendo desta maneira possível a redução da rede elétrica aos nós das forças eletromotrizes correspondente aos geradores.

As funções energia obtidas por este processo de integração ainda tem um problema, no que diz respeito a inserção ou não das condutâncias de transferência na matriz admitância nodal da rede reduzida. Essas condutâncias representam as perdas nas linhas de transmissão do sistema e geram uma integral dependente do caminho na função energia. Com isso, é preciso encontrar uma aproximação para o caminho de integração, ou simplesmente desconsiderar as condutâncias de transferência (Willems e Willems, 1970; Athay et al., 1979). Vários pesquisadores contornam este problema através de uma aproximação do caminho de integração por uma reta (Athay et al., 1979). A função resultante via esta aproximação não é uma Função de Lyapunov, pois essas condutâncias são responsáveis por gerar regiões de derivada positiva no espaço de estados, sendo denominada neste trabalho de Função do tipo energia aproximada. Geralmente as condutâncias de transferência não são pequenas, portanto o seu efeito não pode ser desprezado sem que erros consideráveis sejam introduzidos na análise.

Consideráveis estudos tem-se concentrado na determinação de uma função energia para o modelo de sistemas de potência com perdas. Pesquisadores como Narasimhamurthi (1984), Kwatny et al. (1985) e Chiang (1989) estudaram a existência de Funções de Lyapunov para o modelo de sistemas de potência que inclua o efeito das condutâncias de transferência. Narasimhamurthi (1984) mostrou que a função energia de um sistema com perdas não pode ser estendida através de perturbações suaves para sistemas com perdas. Kwatny et al. (1985) mostrou a existência de Funções de Lyapunov local para sistemas com perdas. Entretanto, não há nenhuma garantia que estas funções possam ser utilizadas na estimativa da área de atração. Chiang (1989) estudou a existência de funções de Lyapunov do tipo energia para sistemas com perdas e mostrou que não existe uma Função de Lyapunov geral para sistemas de potência com perdas. Em verdade,

Chiang provou a existência de uma Função de Lyapunov específica para sistemas com perdas, porém esta função deve ser alterada toda vez que houver uma modificação na configuração ou nos parâmetros do sistema. Além disso, os resultados obtidos por Chiang foram existenciais e nenhuma função foi proposta. Encontrar uma Função de Lyapunov considerando as condutâncias de transferência é um problema em aberto na literatura e será tratado neste trabalho.

1.2 Objetivos e Organização do Trabalho

Recentemente, Rodrigues, Alberto e Bretas (2000) apresentaram a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, onde é permitido que a função de Lyapunov possua, em algumas regiões limitadas do espaço de estados, a derivada positiva. Neste caso, estas funções passam a ser denominadas Funções de Lyapunov Estendidas (FLE). A principal vantagem desta teoria é o fato de que encontrar uma FLE é em geral uma tarefa mais simples do que encontrar uma FL no sentido usual. Desta maneira, problemas que não podiam ser analisados pelo Princípio de Invariância, agora poderiam ser tratados com esta nova teoria.

O objetivo do trabalho é apresentar Funções de Lyapunov Estendidas para modelos de sistemas de potência que não apresentam uma Função de Lyapunov no sentido usual. Essas FLE's são propostas tanto para sistemas de 1-máquina versus barramento infinito quanto para sistemas multimáquinas. Para a obtenção de boas estimativas do tempo de abertura, nos estudos de estabilidade transitória, é proposto um algoritmo iterativo. Este algoritmo fornece uma estimativa local da área de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse.

Este trabalho está composto por 6 capítulos e organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta os modelos matemáticos de sistemas de potência multimáquinas, considerando todas as não linearidades inerentes ao sistema, que são comumente utilizados em estudos de estabilidade transitória. A análise de estabilidade de sistemas não lineares é apresentada no Capítulo 3. Neste Capítulo, são tratados os Teoremas de Lyapunov, o Princípio de Invariância de LaSalle, a Extensão do Princípio de Invariância e a caracterização da fronteira da região de

estabilidade. A aplicação do método de Lyapunov e a Função de Lyapunov para análise de estabilidade transitória são apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 5 são apresentadas as Funções de Lyapunov Estendidas propostas para análise de estabilidade transitória. O Capítulo 6 traz as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelo Matemático de Sistemas de Potência

Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos dos componentes dos sistemas de potência utilizados neste trabalho.

2.1 Máquinas Síncronas

Neste trabalho utilizam-se os modelos clássico e de 1-eixo para a máquina síncrona. A diferença entre os modelos está basicamente na ordem da equação diferencial que representa o modelo. Maiores detalhes sobre a modelagem das máquinas síncronas podem ser encontrados em (Padiyar, 1996; Ramos et al., 2000).

2.1.1 Modelo de 1-eixo

Neste modelo, a máquina síncrona é representada por um sistema de 3ª ordem, cujas variáveis de estado são: o desvio angular (δ), a velocidade angular (ω) e a componente de eixo em quadratura da tensão interna da máquina (E'_q). A modelagem da máquina síncrona é representada pelo conjunto de equações diferenciais

a seguir

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{M}\left(P_m - P_e - T\omega\right) \\ \dot{E}'_q = \dfrac{1}{\tau'_{do}}\left(E_{fd} - E'_q - (x_d - x'_d)i_d\right) \end{cases} \tag{2.1}$$

Onde P_m é a potência mecânica de entrada, T é o coeficiente de amortecimento, M é o momento de inércia, E_{fd} é a tensão de excitação da máquina, x_d é a reatância de eixo direto e x'_d é a reatância transitória de eixo direto. A potência elétrica entregue pela máquina é dada por

$$P_e = v_d i_d + v_q i_q \tag{2.2}$$

onde

$$v_d = x'_q i_q, \tag{2.3}$$

$$v_q = E'_q - x'_d i_d, \tag{2.4}$$

x'_q é a reatância transitória de eixo em quadratura, v_d e v_q são respectivamente as componentes de eixo direto e de quadratura da tensão terminal, i_d e i_q são respectivamente as componentes de eixo direto e de quadratura da corrente

2.1.2 Modelo Clássico

Este modelo é composto por um conjunto de equações diferenciais de 2ª ordem, cuja as variáveis de estado são o desvio angular (δ) e a velocidade angular (ω) da máquina. Nesta modelagem, a tensão de eixo direto (E'_q) é considerada constante, o que a difere do modelo de 1-eixo, apresentado anteriormente. O sistema de equações (2.5) representa a dinâmica da máquina síncrona.

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{1}{M}\left(P_m - P_e - T\omega\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 Cargas

Neste trabalho, as cargas são representadas como impedâncias constantes calculadas na condição pré-falta, ou seja

$$y_L = \frac{P_L - jQ_L}{|V|^2}. \tag{2.6}$$

Onde P_L e Q_L são respectivamente potências ativa e reativa específicas da carga, V é a tensão no barramento onde a carga está instalada. Quando as cargas são modeladas como impedâncias constantes é possível reduzir a rede aos nós das f.e.m.'s dos geradores com o objetivo de facilitar o equacionamento. Maiores detalhes sobre modelagem de cargas, podem ser encontrados em (Pai, 1981; Padiyar, 1996).

2.3 Rede Elétrica

Considere a rede de transmissão do sistema elétrico constituída por $n+m$ barras, onde os n primeiros barramentos estão conectados aos geradores e os m barramentos restantes são barras exclusivamente de carga. A representação do sistema é dada pela Figura 2.1.

A matriz admitância nodal para o sistema de transmissão é dada por

$$Y_{Bus} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

onde as submatrizes possuem as seguintes dimensões: $Y_1 : (n \times n)$, $Y_2 : (n \times m)$, $Y_3 : (m \times n)$ e $Y_4 : (m \times m)$.

Acrescentando à rede de transmissão as reatâncias transitórias e os n nós fictícios internos aos geradores, teremos uma nova representação da rede elétrica que será composta por $2n + m$ nós,

$$\tilde{Y}_{Bus} = \begin{bmatrix} Y & -Y & 0 \\ -Y & Y_1 + Y & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

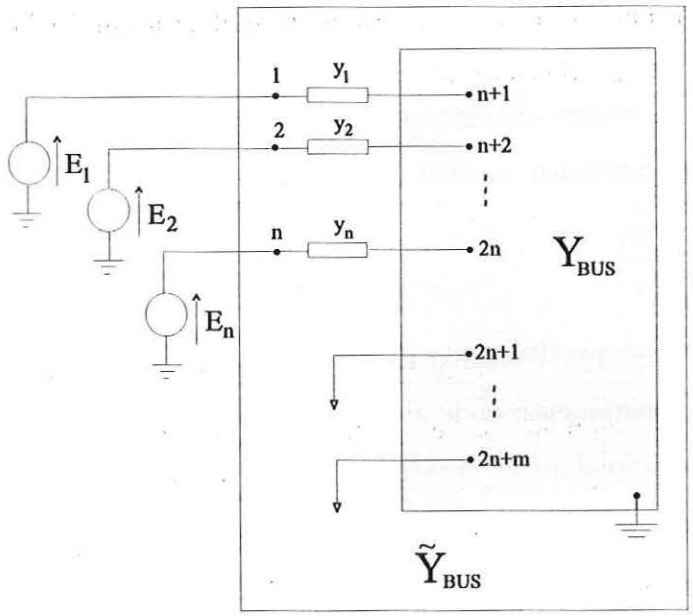

Figura 2.1: Representação do sistema multimáquinas

a submatriz Y é uma matriz diagonal, de ordem $(n \times n)$, cujos elementos da diagonal são compostos pelas admitâncias transitórias de cada gerador.

Sendo cargas modeladas como impedâncias constantes é possível reduzir a rede aos nós das f.e.m.'s dos geradores. Com esta redução encontra-se uma expressão analítica para P_{ei} em termos de δ_i's e o sistema pode ser descrito apenas por um conjunto de equações diferenciais.

Com o intuito de obter tais equações, insere-se o efeito das cargas na rede elétrica. Para isto define-se a matriz admitância de cargas como sendo

$$Y_{Li} = \begin{bmatrix} Y_{Lg} & 0 \\ 0 & Y_{Ll} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

onde a submatriz diagonal Y_{Lg}, de ordem $(n \times n)$, é composta pelas admitâncias das cargas conectadas aos barramentos terminais dos geradores e Y_{Ll} é uma matriz diagonal de ordem $(m \times m)$ composta pelas admitâncias de cargas conectadas aos demais barramentos que não possuem geradores conectados.

Com as admitâncias de carga inseridas na matriz admitância, tem-se a nova representação para a rede elétrica

$$\hat{Y}_{BUS} = \begin{bmatrix} Y & -Y & 0 \\ -Y & Y_1 + Y + Y_{Lg} & Y_2 \\ 0 & Y_3 & Y_4 + Y_{Ll} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

No estudo de estabilidade transitória tem-se interesse primariamente na variação dos ângulos das máquinas como função do tempo e não nas variações das tensões nos barramentos, portanto, pode-se reduzir $\hat{Y}_{BUS}$ aos n primeiros nós da rede, que correspondem aos nós fictícios internos aos geradores e obter-se uma expressão analítica para P_{gi}. Para isto particiona-se $\hat{Y}_{BUS}$ da seguinte maneira:

$$\hat{Y}_{BUS} = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

onde as submatrizes possuem as seguintes dimensões: $Y_A : (n \times n)$, $Y_B : (n \times n+m)$, $Y_C : (n + m \times n)$ e $Y_D : (n + m \times n + m)$.

Como as cargas foram inseridas como impedâncias constantes na matriz admitância, a injeção de corrente em todas as barras é igual a zero, exceto naquelas barras fictícias que estão conectadas as f.e.m.'s dos geradores, com isso tem-se que

$$\begin{bmatrix} I_g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_g \\ E \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

De acordo com (2.12) tem-se as seguintes relações

$$I_g = Y_A E_g + Y_B E \tag{2.13}$$

$$0 = Y_C E_g + Y_D E \tag{2.14}$$

De (2.14) pode-se isolar E:

$$E = -Y_D^{-1} Y_C E_g \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.13) obtém-se [1]

$$I_g = \left(Y_A - Y_B Y_D^{-1} Y_C\right) E_g = Y_{RED} E_g \tag{2.16}$$

A expressão para potência elétrica real injetada no nó 'i' pelo respectivo gerador é:

$$P_{ei} = Re\left[E_i I_i^*\right], \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Substituindo as seguintes expressões $E_i = |E_i| \angle \delta_i$ e os elementos da matriz reduzida $Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} = |Y_{ij}| \angle \phi_{ij}$ em (2.17), tem-se que:

$$P_{ei} = Re\left[E_i \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^* E_j^*\right], \; i = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

Desenvolvendo esta expressão obtém-se

$$\begin{aligned} P_{ei} &= |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1;\neq i}^{n} |E_i|\,|E_j|\,|Y_{ij}| \cos\left(\phi_{ij} - (\delta_i - \delta_j)\right) \\ & i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.19}$$

A função cosseno pode ser decomposta segundo a identidade trigonométrica $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Logo,

$$\begin{aligned} P_{ei} &= |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1;\neq i}^{n} |E_i|\,|E_j|\,|Y_{ij}| \left[\cos\phi_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + \right. \\ & \left. + \sin\phi_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)\right], \; i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Define-se

$$|E_i|\,|E_j|\,|Y_{ij}| \cos\phi_{ij} = |E_i|\,|E_j|\,G_{ij} = D_{ij} \tag{2.21}$$

$$|E_i|\,|E_j|\,|Y_{ij}| \sin\phi_{ij} = |E_i|\,|E_j|\,B_{ij} = C_{ij}. \tag{2.22}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_{ei} &= |E_i|^2 G_{ii} + \sum_{j=1;\neq i}^{n} \left(C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)\right) \\ & i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.23}$$

[1] Do ponto de vista computacional, o cálculo da matriz inversa Y_D^{-1} pode se tornar inviável em termos de tempo de processamento, portanto para evitar este problema a eliminação de Gauss é bastante eficiente para a determinação da matriz reduzida Y_{RED} a partir da matriz $\hat{Y}_{BUS}$.

2.4 Modelo Clássico para Análise de Estabilidade Transitória

A análise de estabilidade transitória em sistemas de potência é uma análise de sincronismo entre as máquinas e não de estabilidade do sistema. O sistema é dito transitoriamente estável se todas as máquinas aceleram (ou desaceleram) conjuntamente após a eliminação do defeito e dito transitoriamente instável se pelo menos uma máquina acelera mais do que as outras. Este comportamento indesejável acarreta algumas dificuldades e inconsistências nas análises de estabilidade transitória. (Alberto e Bretas, 1999).

Os sistemas de potência, para estudos de estabilidade transitória de um modo geral, não possuem um ponto de equilíbrio estável após a eliminação do defeito. Com a não existência de um ponto de equilíbrio na formulação original, há dificuldades de estudar-se o comportamento do sistema a não ser que se formule matematicamente o sistema em termos de sincronismo entre as máquinas. Com estas novas formulações o problema original, de análise de sincronismo, torna-se equivalente ao estudo de estabilidade de um novo conjunto de equações.

2.4.1 Formulação uma Máquina como Referência

Nesta formulação, a modelagem do sistema é realizada utilizando-se uma máquina como referência. Desta forma, considere o sistema de n máquinas descrito pelo conjunto de equações diferenciais, considerando a n-ésima máquina como referência:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{P_{m1}-P_{e1}}{M_1} \\ \vdots \\ \dot{\omega}_n = \frac{P_{mn}-P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_1 = \omega_1 \\ \vdots \\ \dot{\delta}_n = \omega_n \end{cases} \tag{2.24}$$

Para isto, basta subtrair de todas as equações de (2.24) a equação da n-ésima máquina tomada como referência, obtendo um novo conjunto de equações que representará o sistema.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{1n} = \omega_1 - \omega_n = \frac{P_{m1}-P_{e1}}{M_1} - \frac{P_{mn}-P_{en}}{M_n} \\ \quad \vdots \\ \dot{\omega}_{(n-1)n} = \omega_{(n-1)} - \omega_n = \frac{P_{m(n-1)}-P_{e(n-1)}}{M_{(n-1)}} - \frac{P_{mn}-P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_{1n} = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_n = \omega_1 - \omega_n \\ \quad \vdots \\ \dot{\delta}_{(n-1)n} = \dot{\delta}_{(n-1)} - \dot{\delta}_n = \omega_{(n-1)} - \omega_n \\ \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_n = \frac{P_{mn}-P_{en}}{M_n} \\ \dot{\delta}_n = \omega_n \end{cases}$$

Este novo conjunto de equações representado por (2.25) é composto por $2(n-1)$ equações mais as equações da máquina utilizada como referência. Para se estudar o sincronismo, observe que as primeiras $2(n-1)$ equações diferenciais compõem um subsistema que é desacoplado das equações da máquina de referência. Este subsistema, considerando o efeito do amortecimento (T_i), é conhecido como a formulação uma máquina como referência, e dado por

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i\dot{\omega}_i = P_{li} - T_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.26}$$

onde

$$\begin{aligned} P_{li} &= P_i - \sum_{j=1,\neq i}^{n} (C_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j)) \quad \text{e} \\ P_i &= P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

O estudo de estabilidade desse novo subsistema é equivalente a estudar o sincronismo das máquinas do sistema original, dado por (2.24), no sentido de que

no equilíbrio deste subsistema, todas as máquinas possuem a mesma velocidade e a mesma aceleração. Matematicamente tem-se:

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n \tag{2.28}$$

que é correspondente a

$$\frac{P_{m1} - P_{e1}}{M_1} = \frac{P_{m2} - P_{e2}}{M_2} = \cdots = \frac{P_{mn} - P_{en}}{M_n} \tag{2.29}$$

2.4.2 Formulação Centro de Ângulo como Referência

A formulação utilizando o centro de ângulo como referência, transforma o sistema original de análise de sincronismo entre as máquinas num problema de estabilidade de um novo conjunto de equações diferenciais, que é por sua vez, equivalente ao estudo do sincronismo no sistema original. Esta formulação é amplamente conhecida na literatura como COA (do inglês - 'Center of Angle').

A idéia do centro de ângulo se assemelha à idéia do centro de massa na mecânica. Define-se o COA de um sistema como sendo um ângulo formado pela média aritmética dos ângulos de todos os geradores, ponderada pelas constantes de inércia das máquinas.

$$\delta_o = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i \tag{2.30}$$

sendo

$$M_T = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Derivando-se (2.30) em relação ao tempo, encontra-se a velocidade do COA:

$$\omega_o = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^{n} M_i \omega_i \tag{2.31}$$

Os ângulos dos rotores das máquinas referidos ao COA são definidos por:

$$\theta_i = \delta_i - \delta_o, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n. \tag{2.32}$$

Derivando (2.32) em relação ao tempo, tem-se a velocidade relativa ao COA:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \dot{\delta}_i - \dot{\delta}_o = \omega_i - \omega_o \\ \dot{\theta}_i &= \tilde{\omega}_i \end{aligned} \tag{2.33}$$

Note que todos os θ_i's e $\tilde{\omega}_i$'s não são linearmente independentes. Da definição de θ_i tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\theta_i = 0 \ e \ \sum_{i=1}^{n} M_i\dot{\theta}_i = 0,$$

portanto, para a resolução do problema é necessário somente a utilização de $2(n-1)$ equações diferenciais.

A partir das variáveis ângulo e velocidade referidos ao COA, pode-se obter o modelo clássico referidos ao centro de ângulo, desprezando o efeito do amortecimento. Esta modelagem é obtida derivando (2.31) em relação ao tempo, fornecendo a seguinte relação:

$$M_T\dot{\omega}_o = \sum_{i=1}^{n} M_i\dot{\omega}_i$$

substituindo a expressão para $\dot{\omega}$ dada por (2.26), na equação anterior tem-se

$$M_T\dot{\omega}_o = \sum_{i=1}^{n} (P_{mi} - P_{gi} - T_i\omega_i) = P_{COA} - \sum_{i=1}^{n} T_i\omega_i \tag{2.34}$$

P_{COA} é o desbalanço de potência total existente no sistema, já que é o total de potência mecânica injetada na máquina menos o total de potência elétrica injetada no sistema elétrico. A expressão para esse desbalanço de potência é obtida substituindo (2.24) em (2.34), desta forma tem-se que

$$P_{COA} = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}\right) - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} D_{ij}\cos\left(\delta_i - \delta_j\right) \tag{2.35}$$

A partir da expressão acima pode-se perceber que os termos em seno foram eliminados, pois representam a parcela de potência ativa transmitida de um gerador ao outro e não é absorvida pelas cargas.

O sistema de equações que representa o sistema nesse novo conjunto de variáveis, é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i = \dot{\omega}_i - \dot{\omega}_o, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.36}$$

Substituindo (2.31) e (2.34), na equação anterior tem-se

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \tilde{\omega}_i \\ \dot{\tilde{\omega}}_i = -\left(T_i - \frac{M_i}{M_T}\sum_{i=1}^{n} T_i\right)\tilde{\omega} - \left(T_i - \frac{M_i}{M_T}T_T\right)\dot{\delta}_o + \frac{P_{mi}-P_{ei}}{M_i} - \frac{1}{M_T}P_{COA} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.37}$$

onde $T_T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

Capítulo 3

Método de Lyapunov para Análise de Sistemas Não Lineares

Este capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos sobre a estimativa da área de atração no problema de estabilidade transitória em sistemas de potência.

3.1 Introdução aos Sistemas Autônomos

Nesta seção, será apresentada a caracterização da região de estabilidade de sistemas não lineares autônomos[1] da forma

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.1}$$

É importante salientar que todas as demonstrações, necessárias para um estudo mais detalhado deste assunto, podem ser encontradas em (Chiang, Hirsch e Wu, 1988; Chiang et al., 1987; Zaborsky et al., 1988).

Pode-se citar como exemplo prático de sistemas da forma (3.1), o modelo clássico de um sistema de potência multimáquinas (Pai, 1981; Ribbens-Pavella e Murthy, 1994). Conforme apresentado no Capítulo 2, o modelo clássico de um sistema composto por n máquinas, considerando a n-ésima máquina como barra-

[1]Sistemas que não dependem explicitamente da variável tempo.

mento infinito [1], é representado pelo conjunto de equações diferenciais abaixo

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i\dot{\omega}_i = P_{li} - T_i\omega_i \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

onde

$$P_{li} = P_i - \sum_{j=1,\neq i}^{n} \left(C_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j)\right) \quad \text{e}$$
$$P_i = P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}.$$

O sistema de equações (3.2) pode ser escrito na forma $\dot{x} = f(x)$. Onde $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \in \mathbb{R}^N$, $N = 2(n-1)$ e

$$x_i = \begin{bmatrix} \delta_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

são os estados do sistema. O campo vetorial $f = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}]^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma aplicação de classe C^1 (ou continuamente diferenciável), onde

$$f_i = \begin{bmatrix} \omega_i \\ \dfrac{1}{M_i}\left(P_{li} - T_i\omega_i\right) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

A exigência $f \in C^1$ é suficiente para garantir a existência e a unicidade local das soluções de sistemas da forma (3.1). A solução de (3.1) em um intervalo $[0, t]$, para uma condição inicial x_o é dada por:

$$x(t) = x_o + \int_0^t f\left(x(\tau)\right) d\tau, \ \forall\, \tau \in [0, t] \tag{3.5}$$

A curva de soluções de (3.1), partindo do ponto x_o em $t = 0$ é denominada *trajetória* do sistema e dada por $\Phi(x_o, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. A projeção de $\Phi(x_o, \cdot)$ no espaço de estados ($\mathbb{R}^N$) é denominada *órbita* do sistema. O conjunto formado por todas as órbitas é denominado *diagrama de fase* do sistema (3.1) (Guckenheimer e Holmes, 1990; Khalil, 1996; Vidyasagar, 1993) .

[1] O barramento infinito corresponde a um sistema equivalente de grande porte, onde a velocidade angular e a tensão permanecem constantes independentemente da potência que o sistema gera ou absorve ou das perturbações aplicadas.

3.1.1 Pontos de Equilíbrio

O vetor de estados x_e é denominado *ponto de equilíbrio (PE)* de (3.1) se e somente se

$$f(x_e) = 0.$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio é dado por: $E := \{x_e \in \mathbb{R}^N : f(x_e) = 0\}$. O vetor de estados x é um *ponto regular* se e somente se $f(x) \neq 0$, ou seja , x não é ponto de equilíbrio de (3.1).

A matriz Jacobiana do campo vetorial do sistema (3.1), calculada no ponto x_o, é dada por

$$J_f(x_o) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_o} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{bmatrix}\right|_{x=x_o} \tag{3.6}$$

Portanto, a matriz Jacobiana para o modelo de sistemas de potência (3.2) é da seguinte forma

$$J_f = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -M^{-1}K & -M^{-1}T \end{array}\right] \tag{3.7}$$

onde I é matriz identidade $(N/2 \times N/2)$, M e T são matrizes diagonais $(N/2 \times N/2)$ definidas positivas, cujos elementos são respectivamente os momentos de inércia e os coeficientes de amortecimento. A matriz $K = \left.\frac{\partial P_{li}(\delta)}{\partial \delta}\right|_{\delta=\delta_o}$ é de dimensão $(N/2 \times N/2)$, cujo os elementos são dados por:

$$\frac{\partial P_{Li}}{\partial \delta_j} = \begin{cases} \sum_{j=1,\neq i}^{n} C_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j), & i = j \\ -C_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j), & i \neq j \end{cases} \tag{3.8}$$

Definição 3.1 *O ponto de equilíbrio x_e é denominado hiperbólico se a matriz Jacobiana do campo vetorial calculada no próprio ponto de equilíbrio, $J_f(x_e)$, não possuir autovalores com parte real nula.*

Suposição 3.2 *Considere o modelo clássico do sistema de potência (3.2). A submatriz Jacobiana K $(N/2 \times N/2)$ é não singular nos pontos de equilíbrio.*

Tabela 3.1: Tipos de pontos de equilíbrio

Tipo 0	$n_p = 0$ e $n_n = n$	nó estável	PE estável
Tipo n_a	$n_p = n_a$ e $n_n = 0$	nó instável	PE instável
Tipo 1	$n_p = 1$ e $n_n = n_a - 1$	ponto de sela	
$\vdots$	$\vdots$		
Tipo $n_a - 1$	$n_p = n_a - 1$ e $n_n = 1$		

A suposição anterior é importante para que possa ser feita a seguinte proposição sobre os pontos de equilíbrio do sistema (3.2)

Proposição 3.3 *Os pontos de equilíbrio de um sistema de potência, representado pelo modelo clássico (3.2), são hiperbólicos.*

Tipos de Pontos de Equilíbrio

Considere x_e um ponto de equilíbrio hiperbólico. O tipo do ponto de equilíbrio é caracterizado pelo número de autovalores com parte real positiva (n_p) da matriz Jacobiana $J_f(x_e)$. A Tabela 3.1 apresenta os tipos de pontos de equilíbrio. Onde n_n é o número de autovalores com parte real negativa e n_a é o total de autovalores, ou seja $n_a = n_p + n_n$. Na tabela observa-se que o ponto de equilíbrio hiperbólico x_e será estável se todos os autovalores da matriz $J_f(x_e)$ possuem parte real negativa, caso contrário será um ponto de equilíbrio instável. Se todos os autovalores de $J_f(x_e)$ possuem parte real positiva, o ponto de equilíbrio x_e é denominado nó instável.

No ponto de equilíbrio hiperbólico x_e, o subspaço tangente [2] (T_{x_e}) pode ser decomposto no somatório dos subspaços estável e instável:

$$T_{x_e} = E^s + E^u \implies \mathbb{R}^N = E^s + E^u \tag{3.9}$$

onde E^s é o subspaço estável gerado pelos autovetores (v) associados aos autovalores com parte real negativa e E^u é o subspaço instável gerado pelos autovetores

[2]No problema de sistemas de potência tem-se $T_{x_e} = \mathbb{R}^N$.

(ν) associados aos autovalores com parte real positiva. Desta forma tem-se:

$$E^s := ger\{v_1, v_2, \cdots, v_{n_n}\}$$
$$E^u := ger\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n_p}\}$$

Observação 3.4 *Os subspaços E^s e E^u são conjuntos invariantes* [3] *do sistema linearizado de (3.1).*

3.1.2 Variedades Estável e Instável

Sendo x_e ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.1), suas variedades estável $W^s(x_e)$ e instável $W^u(x_e)$ são definidas da seguinte forma

$$W^s(x_e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x,t) \to x_e, \ para \ t \to \infty\} \tag{3.10}$$
$$W^u(x_e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x,t) \to x_e, \ para \ t \to -\infty\} \tag{3.11}$$

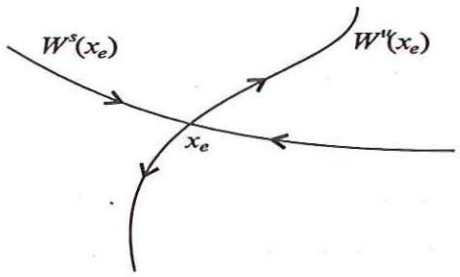

Figura 3.1: Representação geométrica das variedades do ponto de equilíbrio hiperbólico x_e.

Teorema 3.5 *Considere x_e um ponto de equilíbrio hiperbólico. Portanto, em x_e existem variedades locais W^s ($dim\, W^s = n_n$) tangente ao subspaço E^s e W^u ($dim\, W^u = n_p$) tangente ao subspaço E^u.* ■

A Figura 3.2 ilustra geometricamente o Teorema enunciado anteriormente.

Observação 3.6 *As variedades estável e instável são conjuntos invariantes de (3.1).*

[3] O conjunto $Z \in \mathbb{R}^N$ é denominado conjunto invariante de (3.1) se toda trajetória de (3.1) partindo de Z permanecer em Z para todo t.

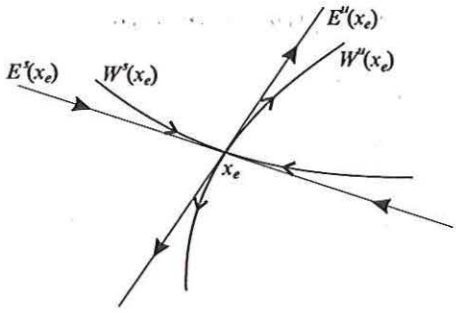

Figura 3.2: Representação do Teorema 3.5.

3.1.3 Condição de Transversalidade

A condição de transversalidade é uma característica importante de certos sistemas dinâmicos. Suponha que o sistema (3.1) satisfaça a condição de transversalidade, então o comportamento qualitativo do sistema não se altera para perturbações suficientemente pequenas no campo vetorial. Desta forma pode-se perceber que a condição de transversalidade é uma propriedade dos sistemas estruturalmente estáveis (Guckenheimer e Holmes, 1990).

Definição 3.7 *Considere duas variedades A e B pertencentes ao $\mathbb{R}^N$. A intersecção entre A e B satisfaz a condição de transversalidade se uma das condições abaixo for satisfeita.*

- *em cada ponto $x \in (A \cap B)$, os espaços tangente de A e de B geram o espaço tangente de $\mathbb{R}^N$ em x:*

$$T_x(A) + T_x(B) = \mathbb{R}^N \ \textit{para} \ x \in (A \cap B)$$

- *não há interseção entre A e B.*

Para identificar se as variedades A e B se interceptam transversalmente, pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\dim(T_x(A) + T_x(B)) = \dim T_x(A) + \dim T_x(B) - \dim(T_x(A) \cap T_x(B)), \quad (3.12)$$

para o cálculo da dimensão da intersecção entre dois espaços vetorias .

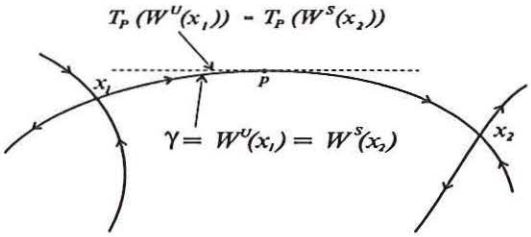

Figura 3.3: Representação geométrica para um caso onde a condição de transversalidade não é satisfeita.

As Figuras 3.3 e 3.4 ajudarão a compreender o conceito de transversalidade. Considere um sistema pertencente ao $\mathbb{R}^2$ e observe a Figura 3.3. Neste caso a condição de transversalidade não é satisfeita. Veja que a interseção entre a variedade instável de x_1 ($\dim(W^u(x_1)) = 1$) e a variedade estável de x_2 ($\dim(W^s(x_2)) = 1$) coincidem com a órbita γ. A intersecção das variedades $W^u(x_1)$ e $W^s(x_2)$, no ponto $p \in \gamma$, possui espaços tangentes $T_p(W^u(x_1))$ e $T_p(W^s(x_2))$ de dimensão 1. Observe que $\dim(T_p(W^u(x_1)) + T_p(W^s(x_2))) = 1$, portanto $T_p(W^u(x_1)) + T_p(W^s(x_2)) = \mathbb{R}$.

Considere agora um sistema pertencente ao $\mathbb{R}^3$ e observe a Figura 3.4. Neste caso a condição de transversalidade é satisfeita. Veja que a interseção entre a variedade instável de p_1 ($\dim(W^u(p_1)) = 2$) e a variedade estável de p_2 ($\dim(W^s(p_2)) = 2$) coincidem com a órbita γ. A intersecção das variedades $W^u(p_1)$ e $W^s(p_2)$, em um ponto $p \in \gamma$, possui espaços tangentes $T_p(W^u(p_1))$ e $T_p(W^s(p_2))$ de dimensão 2. Observe que $\dim(T_p(W^u(p_1)) + T_p(W^s(p_2))) = 3$, portanto $T_p(W^u(p_1)) + T_p(W^s(p_2)) = \mathbb{R}^3$.

3.1.4 Campos de Morse-Smale

Na teoria de sistemas dinâmicos existe uma classe de campos vetoriais denominada campos de Morse-Smale, os quais constituem um conjunto aberto e não-vazio dentro do conjunto de todos os campos vetoriais e seus elementos são estruturalmente estáveis.

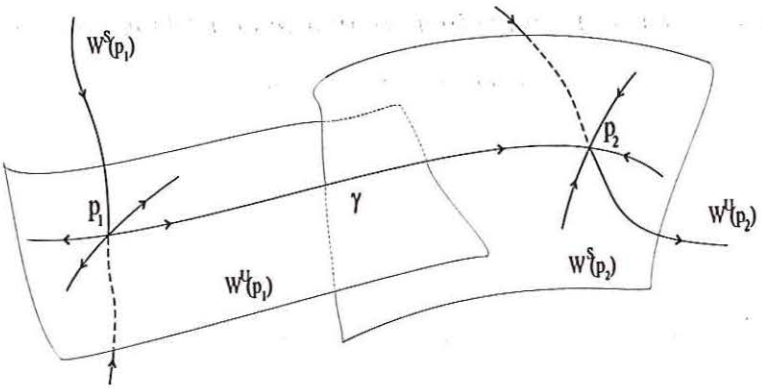

Figura 3.4: Representação geométrica para um caso onde a condição de transversalidade é satisfeita.

Definição 3.8 *O campo vetorial f é um campo de Morse-Smale se:*

1. *Há um número finito de pontos de equilíbrio e todos hiperbólicos.*

2. *A interseção das variedades $W^s(x_i)$ e $W^u(x_j)$ satisfazem a condição de transversalidade para todos os pontos de equilíbrio x_i, x_j.*

3. *Os conjuntos $\alpha - limite$ e $\omega - limite$ [2] são elementos críticos.*

As propriedades 1 e 2 são genéricas de sistemas dinâmicos, ou seja, quase todos os sistemas dinâmicos as possuem e garantem a estabilidade estrutural dos sistemas Morse-Smale.

3.2 Análise de Estabilidade

O método de Lyapunov para análise de estabilidade transitória é capaz de analisar o tipo e a estimativa da área de atração de ponto de equilíbrio em estudo. Este método é eficiente pois não requer a integração numérica das equações que descrevem a dinâmica do sistema.

[2]Tomando $x(t)$ como solução de (3.1). Um ponto p é denominado ponto limite positivo de $x(t)$ se existe uma sequência t_n, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, tal que $x(t_n) \to p$ quando $n \to \infty$. O conjunto de todos os pontos limites positivos de $x(t)$ é denominado conjunto limite positivo de $x(t)$ ou ω-limite de $x(t)$. O caso contrário é denomindado conjunto α-limite.

Teorema 3.9 *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio de (3.1) e uma função $\mathcal{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável na vizinhança D de $x = 0$, tal que*

$$\mathcal{V}(0) = 0 \text{ e } \mathcal{V}(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \tag{3.13}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \text{ em } D \tag{3.14}$$

então, $x = 0$ é estável, por outro lado se tivermos

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\}$$

o ponto $x = 0$ é assintoticamente estável. ■

A função contínua e diferenciável $\mathcal{V}(x)$ satisfazendo (3.13) e (3.14) é conhecida como função de Lyapunov. A superfície $\mathcal{V}(x) = c$, para $c > 0$, é chamada de curva de nível da Função de Lyapunov.

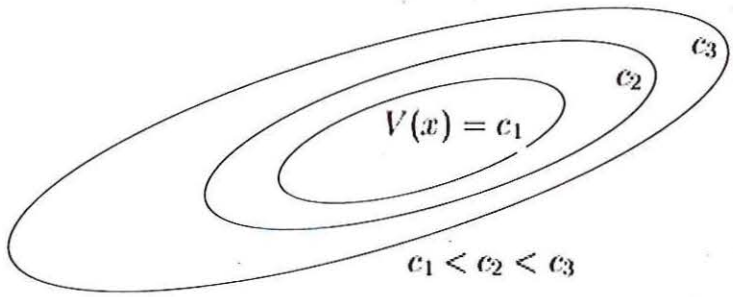

Figura 3.5: Curvas de nível da função de Lyapunov

A condição $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$ estabelece que quando a trajetória cruzar a superfície de Lyapunov $\mathcal{V}(x) = c$, ela irá se mover para dentro do conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathcal{V}(x) \leq c\}$ e não sairá. Quando $\dot{\mathcal{V}} < 0$, a trajetória se movimentará de uma superfície de Lyapunov para uma outra com menor c. Como o valor de c é decrescente isso implicará que a trajetória irá se aproximar da origem para $t \rightarrow \infty$. Caso tenhamos $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$, não temos certeza de que a trajetória se aproximará da origem, mas podemos concluir que a origem é estável. A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em (Guckenheimer e Holmes, 1990; Vidyasagar, 1993; Khalil, 1996).

3.2.1 Princípio de Invariância de LaSalle

Para determinados sistemas, a Função de Lyapunov pode falhar na análise de estabilidade assintótica de acordo com o Teorema 3.9. O maior problema está em encontrar uma função que possua derivada definida negativa ao longo das trajetórias do sistema. Para solucionar esse caso tem-se que estabelecer que nenhuma trajetória poderá permanecer para sempre em pontos onde $\dot{\mathcal{V}} = 0$, exceto na origem, portanto a origem é assintoticamente estável. LaSalle estudou e enunciou um teorema tratando deste problema.

Teorema 3.10 (Princípio de Invariância de LaSalle) *Sejam $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1. Seja L uma constante real tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ e defina $E := \{x \in \Omega_L : \dot{\mathcal{V}}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Então, toda solução de (3.1) iniciando em Ω_L converge para B quando $t \to \infty$.*■

A prova do Teorema 3.10 pode ser encontrada em (Khalil, 1996). É interessante interpretar geometricamente este teorema. Para isto será utilizada a Figura 3.6 na qual apresenta-se um caso simples da aplicação do Teorema de LaSalle em dimensão 2. Como exigido pelo Teorema 3.10, Ω_L é um conjunto limitado. Suponha que o maior conjunto invariante contido em E seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável x_s. Sabe-se que dentro de Ω_L, a derivada de $\mathcal{V}$ é menor ou igual a zero. Desenvolvendo $\dot{\mathcal{V}}$ pela regra da cadeia obtém-se:

$$\dot{\mathcal{V}} = < grad(\mathcal{V}), \dot{x} > = < grad(\mathcal{V}), f > \leq 0$$

A desigualdade anterior mostra que o produto escalar do vetor gradiente $\mathcal{V}$ com o vetor f deve ser menor ou igual a zero. Isto significa que o ângulo entre estes vetores deve ser obtuso, ou seja, maior ou igual a 90°, como mostra a Figura 3.6. Esta relação entre estes vetores existe para todos os pontos da curva de nível Ω_l da função $\mathcal{V}$, logo, todas as soluções entram dentro da região delimitada pela curva de nível Ω_l. Isto vale para todas as curvas de níveis internas à Ω_L, logo toda solução iniciando em Ω_L deverá convergir para o ponto de equilíbrio x_s.

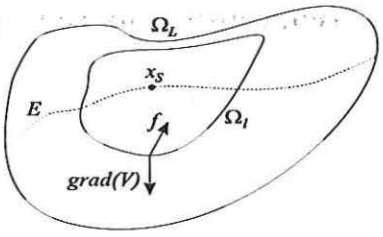

Figura 3.6: Representação geométrica para o Teorema 3.10

3.2.2 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

A análise de estabilidade assintótica através do Teorema 3.10, exige que se tenha uma função $\mathcal{V}$ definida positiva, tal que ao longo de suas trajetórias $\dot{\mathcal{V}} \leq 0$. O grande empecilho é encontrar uma função candidata a função de Lyapunov que satisfaça a segunda condição. A extensão do princípio de invariância proposta por Rodrigues, Alberto e Bretas (2000) requer condições menos restritivas onde permite-se que $\dot{\mathcal{V}}$ seja positiva em algumas regiões, facilitando a obtenção da Função de Lyapunov.

Teorema 3.11 (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle) : *Sejam $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1. Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{W}(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L : \dot{\mathcal{W}}(x) > 0\}$, e admita que $\sup_{x \in C} \mathcal{W}(x) = l < L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : \mathcal{W}(x) \leq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L : \dot{\mathcal{W}}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (3.1) contido em E. Então, toda solução de (3.1) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B quando $t \to \infty$. Além disto, se $x_0 \in \bar{\Omega}_l$, então $\Phi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l, \forall t \geq 0$ e $\Phi(t, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante de (3.1) contido em $\bar{\Omega}_l$.* ■

A demonstração do Teorema 3.11 pode ser encontrada em (Rodrigues et al., 1999; Rodrigues et al., 2000; Alberto, 2000). Para o melhor entendimento da extensão do princípio de invariância vamos utlilizar a interpretação geométrica ilustrada pela Figura 3.7.

Conforme a hipótese do Teorema 3.11 o conjunto Ω_L é limitado. A derivada de $\mathcal{W}$ longo das soluções dentro do conjunto Ω_L é não positiva, exceto dentro do

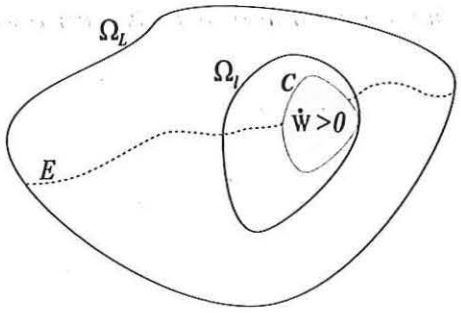

Figura 3.7: Interpretação geométrica da extensão do princípio de invariância

conjunto C onde ela é positiva. Por hipótese o conjunto C nunca atinge a fronteira de Ω_L, uma vez que $l < L$. O Teorema 3.11 garante que todas as soluções de (3.1) iniciando dentro de Ω_L convergem para o maior conjunto invariante contido em E. Se em particular, o maior conjunto invariante contido em E estiver contido em $\bar{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\bar{\Omega}_l$, as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de $\bar{\Omega}_l$, duas coisas podem acontecer, ou as soluções tendem para o conjunto $x \in \bar{\Omega}_l : \dot{\mathcal{W}}(x) = 0$, ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto C indefinidamente.

Observação 3.12 *A função $\mathcal{W}$ que satisfaz as exigências do Teorema 3.11 é denominada Função de Lyapunov Estendida (FLE).*

Observação 3.13 *O $\sup_{x \in C} \mathcal{W}(x)$ é atingido em ∂C (fronteira do conjunto C). Se em particular $\bar{C}$ for um conjunto convexo e $\mathcal{W}$ uma função convexa, então a técnica de multiplicadores de Lagrange será muito útil para o cálculo deste supremo.*

Observação 3.14 *O Teorema 3.10 é um caso particular do Teorema 3.11. Mais precisamente, o Teorema 3.10 pode ser obtido a partir do Teorema 3.11, fazendo o conjunto C igual ao conjunto vazio.*

Exemplo 3.15 *Considere o sistema abaixo*

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - f(x_1, x_2)x_2$$

A função abaixo é uma função candidata a FLE para o sistema

$$\mathcal{W}(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

e sua derivada ao longo das trajetórias é dada por

$$\dot{\mathcal{W}}(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)x_2^2$$

Considerando $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, *o conjunto* C *é limitado e é dado por:*

$$C := \{(x_1, x_2) \in \Omega_L : (x_1^2 + x_2^2 - 1) < 0; x_2 \neq 0\}$$

O conjunto C *é um disco aberto de raio unitário com o centro na origem excluindo o segmento no qual* $x_2 = 0$. *Calculando-se* l *obtém-se:*

$$l = \sup_{x \in C} \mathcal{W}(x_1, x_2) = \sup_{x \in C} \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Então,

$$\bar{\Omega}_l = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} \leq \frac{1}{2}$$

De acordo com a Extensão do Princípio de Invariância, todas as soluções com condição inicial no $\mathbb{R}^2$ *convergem para o maior conjunto invariante contido em* E, *o qual é composto pelo disco fechado de raio unitário centrado na origem em união com o eixo* $x_2 = 0$.

3.3 Caracterização da Área de Atração

Para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s, existe um conjunto no espaço de estados tal que toda órbita iniciando neste conjunto converge para x_s quando $t \to \infty$. Este conjunto é denominado de região de estabilidade ou área de atração de x_s e é dada por $\mathcal{A}(x_s)$. Matematicamente tem-se

$$\mathcal{A}(x_s) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \lim_{t \to \infty} \Phi(x, t) = x_s \right\} \tag{3.15}$$

A fronteira e o fecho da região de estabilidade $\mathcal{A}(x_s)$ são dadas respectivamente por $\partial\mathcal{A}(x_s)$ e $\overline{\mathcal{A}}(x_s)$. Baseado nas propriedades da variedade estável de x_s, tem-se:

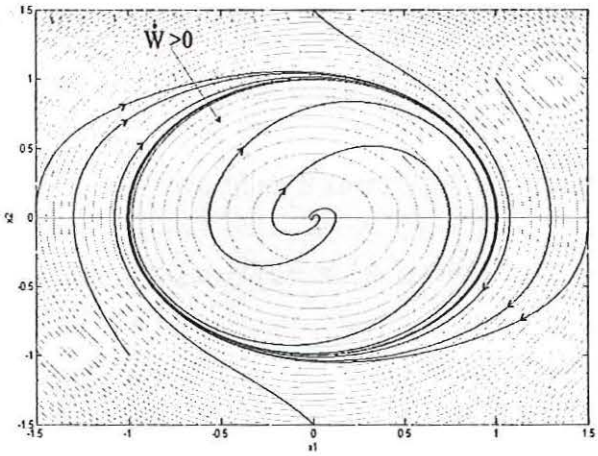

Figura 3.8: Região de atração para o Exemplo 3.15

Proposição 3.16 *$\mathcal{A}(x_s)$ é um conjunto aberto e invariante de (3.1).*

Proposição 3.17 *$\partial\mathcal{A}(x_s)$ é um conjunto invariante de (3.1).*

Para o estudo da região de estabilidade ou área de atração de (3.1) é necessário que sejam feitas as seguintes suposições sobre o campo vetorial:

$\mathcal{P}$–I - Existe um ponto de equilíbrio estável x_s, para o qual deseja-se determinar a área de atração $\mathcal{A}(x_s)$.

$\mathcal{P}$–II - O campo vetorial é um campo de Morse-Smale.

$\mathcal{P}$–III - Toda trajetória sobre $\partial\mathcal{A}$ se aproxima de um ponto de equilíbrio quando $t \to \infty$.

A suposição $\mathcal{P}$–II pode ser considerada como uma propriedade genérica de certos sistemas dinâmicos. Será assumido que o campo vetorial do modelo clássico de sistemas de potência (3.1) satisfaz à suposição $\mathcal{P}$–II.

A suposição $\mathcal{P}$–III implica que toda trajetória do sistema (3.1) ou converge para um ponto de equilíbrio ou tende para o infinito. Esta suposição é suficiente para garantir que o sistema (3.1) não apresente ciclos limite, soluções periódicas ou movimentos caóticos. Desta forma, são estabelecidos os seguintes Teoremas:

Teorema 3.18 *O modelo clássico de sistemas de potência, dado por (3.2), não apresenta trajetórias fechadas e nem soluções periódicas.* ■

Teorema 3.19 *Considere o modelo clássico de sistemas de potência (3.2). Portanto, toda trajetória contida na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s)$ converge para um ponto de equilíbrio.* ■

A suposição $\mathcal{P}$–III será estudada com maiores detalhes na Seção 3.3.3.

3.3.1 Caracterização do ponto de equilíbrio contido em $\partial\mathcal{A}(x_s)$

No Teorema 3.19 foi estabelecido que toda trajetória contida na fronteira da área de atração converge para um ponto de equilíbrio. A seguir serão enunciados Teoremas que asseguram a existência e a estrutura desses pontos de equilíbrio contidos na fronteira da área de atração.

Teorema 3.20 *Considere $\mathcal{A}$ a região de estabilidade do ponto de equilíbrio estável x_s e o ponto de equilíbrio hiperbólico $\hat{x}$. Assuma que o campo vetorial f satisfaça as propriedades $\mathcal{P}$–I, $\mathcal{P}$–II e $\mathcal{P}$–III. Então:*

1) $\hat{x} \in \partial\mathcal{A}$ se e somente se $W^u(\hat{x}) \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

2) $\hat{x} \in \partial\mathcal{A}$ se e somente se $W^s(\hat{x}) \subseteq \partial\mathcal{A}$. ■

Teorema 3.21 *Considere que o sistema (3.1) possua dois ou mais pontos de equilíbrio estáveis e satisfaz as propriedades $\mathcal{P}$–I, $\mathcal{P}$–II e $\mathcal{P}$–III. A fronteira da região de estabilidade contém pelo menos um ponto de equilíbrio do tipo -1. Se a região de estabilidade for limitada, a fronteira da região de estabilidade deverá conter além do ponto de equilíbrio do tipo -1 um nó instável.* ■

3.3.2 A Fronteira da Região de Estabilidade

O Teorema a seguir, apresenta a caracterização topológica da fronteira da área de atração de sistemas da forma (3.1).

Teorema 3.22 (Caracterização da Fronteira da Região de Estabilidade) *Considere que o sistema (3.1) satisfaça as propriedades $\mathcal{P}$-I, $\mathcal{P}$-II e $\mathcal{P}$-III e que x_i denote os pontos de equilíbrio instáveis contidos na fronteira da região de estabilidade $\partial\mathcal{A}(x_s)$. Desta forma, tem-se:*

$$\partial\mathcal{A}(x_s) = \bigcup_{x \in E \bigcap \partial\mathcal{A}} W^s(x_i).$$

■

A fronteira da área de atração de sistemas da forma (3.1) é composta pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio instáveis contidos na fronteira da área de atração.

3.3.3 Condição Suficiente para a Suposição $\mathcal{P}$–III.

A caracterização da fronteira da área de atração, apresentada na Seção anterior é válida somente para sistemas que satisfaçam as suposições $\mathcal{P}$–I, $\mathcal{P}$–II e $\mathcal{P}$–III. Sendo $\mathcal{P}$–I e $\mathcal{P}$–II propriedades genéricas de sistemas dinâmicos, a suposição $\mathcal{P}$–III torna-se de suma importância para a aplicação do Teorema 3.22. O Teorema abaixo estabelece uma condição suficiente para que sistemas da forma (3.1) satisfaçam a suposição $\mathcal{P}$–III.

Teorema 3.23 *Considere que o sistema (3.1) possua uma função definida positiva $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, tal que:*

1) $\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$ *para todo* $x \notin E$.

2) *se* $x \notin E$, *então o conjunto* $\{t \in \mathbb{R} : \dot{\mathcal{V}}(\Phi_t(x)) = 0\}$ *tem medida zero em* $\mathbb{R}$.

Então a propriedade $\mathcal{P}$-III é verdadeira. ■

Observe que pelo Teorema anterior, o sistema deve admitir uma função $\mathcal{V}$, denominada função de Lyapunov, definida positiva e que sua derivada seja pelo menos semi definida negativa. De acordo com o Teorema anterior, tem-se a seguinte Proposição em relação ao sistema de potência.

Proposição 3.24 *Existe uma função energia $\mathcal{V}(\omega, \delta)$ para o modelo de sistemas de potência (3.2), tal que a suposição $\mathcal{P}$-III seja satisfeita.*

A suposição $\mathcal{P}$–III está diretamente relacionada à existência de uma Função de Lyapunov para o modelo clássico de sistemas de potência. No próximo capítulo, será apresentada a função energia comumente utilizada nos estudos de estabilidade transitória, para sistemas de potência dado por (3.2).

Capítulo 4

Aplicação do Método de Lyapunov na Análise de Estabilidade Transitória

O modelo matemático de um sistema de potência multimáquinas, conforme descrito no Capítulo 2, é composto por um conjunto de equações diferenciais não lineares. Por muitos anos a análise de estabilidade transitória foi realizada pelo método passo a passo, que consiste na integração no domínio do tempo das equações diferenciais que representam o sistema. Este método tornou-se inadequado para estudos em tempo real, uma vez que inúmeras soluções numéricas das equações diferenciais devem ser efetuadas para a determinação do tempo crítico de abertura.

Os métodos diretos são adequados à aplicações em tempo real, pois permitem estudar com boa precisão a estabilidade da *primeira oscilação* das máquinas do sistema de potência, sem que haja a necessidade do conhecimento da solução numérica das equações diferenciais.

4.1 Introdução

O problema de estabilidade transitória consiste em estudar o comportamento da rede elétrica após um grande distúrbio, denominado falta, considerando-se três

estágios: pré-falta, em falta e pós-falta. A representação matemática para a análise deste problema, pode ser dada por um sistema dinâmico, composto por três equações diferenciais que representam cada estágio do sistema,

$$\dot{x}(t) = f_I(x(t)), \quad -\infty < t < t_F \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(t) = f_F(x(t)), \quad t_F \leq t < t_{AB} \tag{4.2}$$

$$\dot{x}(t) = f_{PF}(x(t)), \quad t_{AB} \leq t < \infty \tag{4.3}$$

onde $x(t)$ é um vetor das variáveis de estado do sistema. A dinâmica do sistema em condição pré-falta é regida por (4.1), onde nesta situação o sistema elétrico está operando no ponto de equilíbrio estável, x_I. No instante de tempo t_F, ocorre uma grande perturbação e o sistema entra em condição de falta. Portanto há uma mudança estrutural na rede elétrica e desta forma a equação (4.2) passa a reger o comportamento dinâmico do sistema e esta situação permanece até o instante de tempo t_{AB}. Este tempo de abertura é o instante no qual o sistema de proteção atua, eliminando o defeito. Após o instante de tempo t_{AB} o sistema se encontra em situação pós-falta e a dinâmica do sistema passa a ser regida por (4.3).

No fim do período em falta o estado do sistema é dado por:

$$x_{CA} = \Phi_F(x_I, t_{AB} - t_F) \tag{4.4}$$

onde $\Phi_F(x,t)$ é a solução do sistema em falta com condição inicial x calculada no fluxo de potência.

Admitindo que o sistema no estado pós-falta tenha o ponto de equilíbrio estável x_s, o problema fundamental no estudo de estabilidade transitória pode ser resumido na seguinte pergunta:

" Partindo de um estado inicial pós-falta x_p, o sistema convergirá para o ponto de equilíbrio estável x_s ?"

A representação matemática desta pergunta, é dada por:

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(x(t_{AB}), t) = x_s \, ? \tag{4.5}$$

onde $\Phi(x,t)$ é a solução do sistema em situação pós-falta com condição inicial x, ou seja, $\Phi(x,0) = x$.

Como se pode observar, o estudo de estabilidade transitória em sistemas de potência, consiste em verificar se o ponto x_{CA} está contido ou não na área de atração do ponto de equilíbrio pós-falta. A grande dificuldade da aplicação dos métodos diretos é sem dúvida encontrar uma boa função de Lyapunov, que seja capaz de representar a rede elétrica e que proporcione uma boa estimativa da área de atração.

Atualmente tem-se tido grandes avanços no desenvolvimento dos métodos diretos conhecidos na literatura como métodos da função energia transitória, cuja principal vantagem é de apresentar uma margem de energia transitória capaz de fornecer informações sobre a área de atração.

4.2 Funções de Lyapunov para Sistemas de Potência

Esta seção tem como objetivo apresentar a função energia comumente utilizada para análise de estabilidade transitória em sistemas de potência. O modelo matemático para sistemas de potência multimáquinas tendo a n-ésima máquina como barramento infinito, como pode ser observado na Seção 2.4, é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i \\ M_i\dot{\omega}_i = P_{mi} - P_{ei} - T_i\omega_i \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{4.6}$$

onde o termo da potência elétrica é expresso por:

$$P_{ei} = -|E_i|^2 G_{ii} - \sum_{j=1;\neq i}^{n} \left(C_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j)\right)$$

Aylett (1958) propôs inicialmente a utilização das idéias físicas para a obtenção da função energia. Atualmente diversos autores utilizam esta idéia em diferentes formas para obtenção da função de Lyapunov.

Esta função energia é obtida multiplicando a i-ésima equação de (4.6) por ω_i, sem considerar o efeito do amortecimento ($T_i = 0$). Este procedimento na mecânica, seria equivalente multiplicar a força aplicada pela velocidade para

obter-se potência. Efetuando a soma das equações resultantes, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(M_i\frac{d\omega_i}{dt}-\left(P_{mi}-|E_i|^2G_{ii}\right)+\sum_{j=1;\neq i}^{n}\left(C_{ij}\sin\left(\delta_i-\delta_j\right)+D_{ij}\cos\left(\delta_i-\delta_j\right)\right)\right)\omega_i=0 \tag{4.7}$$

Observando-se que $\omega_i=\frac{d\delta_i}{dt}$, pode-se reescrever a equação (4.7) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}M_i\omega_i\frac{d\omega_i}{dt} &- \sum_{i=1}^{n-1}\left(P_{mi}-|E_i|^2G_{ii}\right)\frac{d\delta_i}{dt}+\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;\neq i}^{n}\left(C_{ij}\sin(\delta_i-\delta_j)+D_{ij}\cos(\delta_i-\delta_j)\right)\frac{d\delta_i}{dt}=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sabendo-se que $C_{ij}=C_{ji}$ e $D_{ij}=D_{ji}$, obtém-se as seguintes igualdades:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;\neq i}^{n}C_{ij}\sin\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d\delta_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}C_{ij}\sin\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d(\delta_i-\delta_j)}{dt} \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;\neq i}^{n}D_{ij}\cos\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d\delta_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}D_{ij}\cos\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d(\delta_i+\delta_j)}{dt} \tag{4.10}$$

Integrando a equação (4.8) desde o tempo $t=0$ até o instante de tempo t, levando-se em consideração (4.9) e (4.10), obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\delta,\omega) &= \int_0^t\sum_{i=1}^{n}M_i\omega_i\frac{d\omega_i}{dt}dt-\int_0^t\left(P_{mi}-|E_i|^2G_{ii}\right)\frac{d\delta_i}{dt}dt+\\ &+\int_0^t\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}C_{ij}\sin\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d(\delta_i-\delta_j)}{dt}dt+\\ &+\int_0^t\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}D_{ij}\cos\left(\delta_i-\delta_j\right)\frac{d(\delta_i+\delta_j)}{dt}dt\end{aligned} \tag{4.11}$$

A variável tempo de (4.11) pode ser eliminada, admitindo-se que no tempo $t=0$ o sistema esteja no ponto de equilíbrio estável $(\delta^s,0)$ e que no tempo t

esteja no ponto (δ, ω), com isto obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\delta,\omega) &= \int_0^{\omega}\sum_{i=1}^{n-1} M_i\omega_i d\omega_i - \int_{\delta^s}^{\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii}\right)d\delta_i + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\int_{\delta_i^s-\delta_j^s}^{\delta_i-\delta_j} C_{ij}\sin(\delta_i-\delta_j)d(\delta_i-\delta_j) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\int_{\delta_i^s+\delta_j^s}^{\delta_i+\delta_j} D_{ij}\cos(\delta_i-\delta_j)d(\delta_i+\delta_j) \end{aligned} \tag{4.12}$$

Resolvendo as integrais de (4.12), obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\delta,\omega) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}M_i\omega_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(P_{mi} - |E_i|^2 G_{ii})(\delta_i - \delta_i^s) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} C_{ij}\left(\cos(\delta_i-\delta_j) - \cos(\delta_i^s-\delta_j^s)\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\int_{\delta_i^s+\delta_j^s}^{\delta_i+\delta_j} D_{ij}\cos(\delta_i-\delta_j)d(\delta_i+\delta_j) \end{aligned} \tag{4.13}$$

A função $\mathcal{V}$ pode ser decomposta em duas parcelas, da seguinte forma:

$$\mathcal{V}(\delta,\omega) = \mathcal{V}_c(\omega) + \mathcal{V}_p(\delta) \tag{4.14}$$

onde

$$\mathcal{V}_c(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}M_i\omega_i^2 \tag{4.15}$$

é a energia cinética,

$$\mathcal{V}_p(\delta) = -\sum_{i=1}^{n-1}P_i(\delta_i-\delta_i^s) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(C_{ij}\left(\cos(\delta_i-\delta_j) - \cos(\delta_i^s-\delta_j^s)\right) - I_{ij}\right) \tag{4.16}$$

é a energia potencial. O último termo, I_{ij}, referente aos termos de condutância de transferência é dada por:

$$I_{ij} = \int_{\delta_i^s+\delta_j^s}^{\delta_i+\delta_j} D_{ij}\cos(\delta_i-\delta_j)d(\delta_i+\delta_j) \tag{4.17}$$

O termo I_{ij} consiste de uma integral dependente do caminho e não pode ser resolvida a não ser que a trajetória do sistema seja conhecida. Com o objetivo

de solucionar este problema, o caminho de integração é aproximado por uma reta (Athay et al., 1979; Bretas e Alberto, 2000b). Desta forma, obtém-se

$$I_{ij} \approx \frac{\delta_i + \delta_j - \delta_i^s - \delta_j^s}{\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s} D_{ij}(\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^s - \delta_j^s)). \tag{4.18}$$

Substituindo (4.18) em (4.16), tem-se a função energia potencial aproximada, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p^{apr}(\delta) &= -\sum_{i=1}^{n-1} P_i(\delta_i - \delta_i^s) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \Big(C_{ij}\left(\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(\delta_i^s - \delta_j^s)\right) - \\ &- \frac{\delta_i + \delta_j - \delta_i^s - \delta_j^s}{\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s} D_{ij}(\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^s - \delta_j^s))\Big) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Portanto, a função aproximada do tipo energia é expressa por:

$$\mathcal{V}^{apr}(\delta, \omega) = \mathcal{V}_c(\omega) + \mathcal{V}_p^{apr}(\delta) \tag{4.20}$$

Considerando a aproximação anterior, tem-se a seguinte expressão para a derivada da função V^{apr} :

$$\dot{\mathcal{V}}^{apr} = -\sum_{i=1}^{n-1} T_i \omega_i^2 - \varphi \tag{4.21}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi = &\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} D_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j)(\omega_i + \omega_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1;\neq i}^{n-1} D_{ij}\Bigg[\frac{\delta_i + \delta_j - \delta_i^s - \delta_j^s}{\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s}\cos(\delta_i - \delta_j) \\ &+ \frac{2(\delta_j - \delta_j^s)}{(\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s)^2}\left(\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^s - \delta_j^s)\right)\Bigg]\omega_i \end{aligned} \tag{4.22}$$

Note que a derivada da função energia aproximada, dada por (4.21), é composta por um termo quadrático semi definido negativo e por φ. O termo φ não tem sinal definido. Observe que a função $\mathcal{V}^{apr}$ irá satisfazer as condições do *Princípio de Invariância de LaSalle*, se e somente se $D_{ij} = 0$. Os termos de condutância de transferência geram, no espaço de estados, regiões ilimitadas de derivada positiva. A função energia dada por (4.20) não é uma FL porque $\dot{\mathcal{V}}^{apr}$

não é semi definido negativo e nem uma FLE porque o conjunto C, do Teorema 3.11, não é limitado (Silva et al., 2003b; Silva, Alberto e Bretas, 2004). Portanto, não há teoria matemática que justifique a utilização da função $\mathcal{V}^{apr}$ para estudos de estabilidade em sistemas de potência. Na Seção 4.7 será apresentado um exemplo que ilustra o caso.

Consideráveis estudos tem-se concentrado na determinação de uma função energia, para sistemas de potência com perdas. Pai e Murthy (1973) propuseram uma função energia local para sistemas com duas máquinas, conectadas por uma linha de transmissão com perdas. Diante de tal resultado acreditava-se que tal função energia poderia ser estendida para sistemas multimáquinas. Em seguida Henner (1974) mostrou que esta função energia, somente poderia ser aplicada em sistemas com duas máquinas. Pesquisadores como Narasimhamurthi (1984), Kwatny et al. (1985) e Chiang (1989) estudaram a existência de Funções de Lyapunov para o modelo de sistemas de potência com perdas. Narasimhamurthi (1984) mostrou que a função energia de um sistema com perdas não pode ser estendida através de perturbações suaves para sistemas com perdas. Kwatny et al. (1985) mostrou a existência de Funções de Lyapunov local para sistemas com perdas. Entretanto, não há nenhuma garantia que estas funções possam ser utilizadas na estimativa da área de atração. Chiang (1989) estudou a existência de funções de Lyapunov do tipo energia para sistemas com perdas e mostrou que não existe uma Função de Lyapunov geral para sistemas de potência com perdas. Em verdade, Chiang provou a existência de uma Função de Lyapunov específica para sistemas com perdas, porém esta função deve ser alterada toda vez que há uma modificação na configuração ou nos parâmetros do sistema. Além disso, os resultados obtidos por Chiang foram existênciais e nenhuma função foi proposta ou mesmo forma de obtê-las.

4.3 Estimativa da Área de Atração

Em sistemas não lineares, a estabilidade global nem sempre ocorre. Geralmente apenas um conjunto de condições iniciais, contido no espaço $\mathbb{R}^n$, possui trajetórias

que convergem para o ponto de equilíbrio x_s. Em sistemas de potência isto acontece e a determinação deste conjunto de condições iniciais é o principal objetivo das análises. Conforme apresentado na Seção 3.3, este conjunto é denominado de área de atração ou região de estabilidade sendo definido por:

$$\mathcal{A}(x_s) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x,t) \rightarrow x_s, \text{ quando } t \rightarrow \infty\} \tag{4.23}$$

A determinação da área de atração para o problema de estabilidade transitória pode ser resolvido segundo o esquema a seguir:

1. Constrói-se a função de Lyapunov $\mathcal{V}(x(t))$, para o sistema pós-falta, e estima-se a área de atração por $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x) < \mathcal{V}_{CA}\}$ onde $\mathcal{V}_{CA}$ é energia crítica de abertura.

2. Simula-se o sistema em falta no domínio do tempo, até que sua órbita abandone a área de atração do sistema pós-falta.

3. O tempo em que a órbita do sistema em falta abandona a área de atração do pós-falta ($\mathcal{V}(x(t)) = \mathcal{V}_{CA}$) é o tempo crítico de abertura, t_{CA}.

Pode-se perceber que se o defeito for eliminado antes do tempo crítico de abertura, t_{CA}, a condição inicial para o estágio pós-falta estará contida na área de atração, portanto o sistema permanecerá estável.

A Figura 4.1 ilustra o problema, onde temos que x_s é o ponto de equilíbrio estável do pós-falta, x_O é o ponto de operação do pré-falta. Ocorre um defeito no sistema tornando-o instável, de tal forma que este começa a se afastar indefinidamente do ponto de operação devido à aceleração das máquinas. A órbita tracejada ilustra a trajetória do sistema em falta. x_{CA} é o ponto no qual a trajetória do sistema em falta abandona a área de atração. Caso o defeito seja eliminado antes do tempo crítico de abertura, a condição inicial do pós-falta pertencerá a área de atração, desta forma a órbita correspondente a esta condição inicial convergirá para o ponto de equilíbrio estável x_s. As órbitas que se iniciam fora da região de atração poderão tender ao infinito ou convergir para outros pontos de equilíbrio, que para sistemas de potência representam pontos de

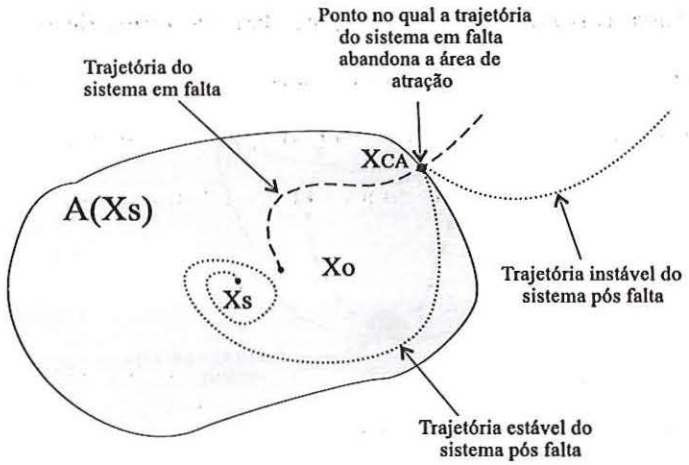

Figura 4.1: Região de atração

equilíbrio inviáveis do ponto de vista de operação do sistema (Ribbens-Pavella e Murthy, 1994; Alberto, 1997; Bretas e Alberto, 2000b; Silva, 2001).

De acordo com Athay et al. (1979), o problema de estabilidade em sistemas multimáquinas, pode ser visualizado como uma bola rolando sobre uma superfície em um espaço multidimensional, também conhecida por bacia energética ou bacia de energia potencial, onde as coordenadas são os ângulos do rotor e o ponto de operação estável do sistema pós falta é o ponto de mínimo desta superfície. A falta é equivalente à aplicar na bola uma força no instante de tempo t_F, com a intenção de retirá-la da bacia energética. Caso esta força seja eliminada antes que ultrapasse a fronteira da bacia energética, a bola ficará somente sob o efeito da força gravitacional. Supondo que a trajetória da bola fosse a mesma após a eliminação da força, desejar-se-ía que esta atingisse o ponto onde se tem $\mathcal{V}_{CA}$ com velocidade nula, afim de que retornasse para dentro da bacia. Logo a força deve ser eliminada antes que a energia ultrapasse $\mathcal{V}_{CA}$. A Figura 4.2 ilustra essa idéia.

Os pontos de equilíbrio instáveis não pertencem à área de atração do ponto de equilíbrio em estudo. No entanto qualquer vizinhança destes pontos de equilíbrio possui pontos que pertencem à área de atração, portanto, estes devem pertencer à fronteira da área de atração. Os pontos de equilíbrio instáveis pertencentes à fronteira da área de atração serão os responsáveis pela estimativa da região de atração, conforme apresentado no capítulo anterior. Em se tratando de siste-

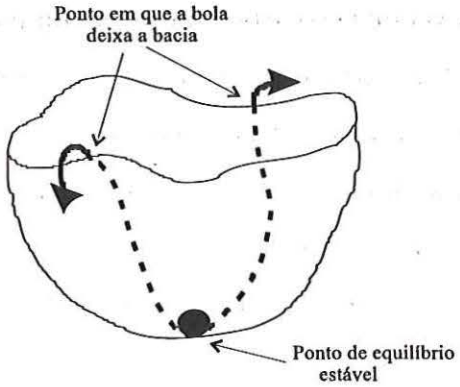

Figura 4.2: Ilustração da bacia energética.

mas de potência o processo de se estimar todos os pontos de equilíbrio instáveis torna-se inviável do ponto de vista de implementação, devido à dimensão e a complexidade do sistema.

O histórico dos métodos propostos de estimativa da área de atração podem ser encontrados em (Pai, 1981; Ribbens-Pavella e Murthy, 1994) e de uma forma mais ampla e atual em Bretas e Alberto (2000b).

A primeira tentativa de se estimar a área de atração, foi desenvolvida em 1966 por El-Abiad e Nagappan, onde se propôs o cálculo de todos os pontos de equilíbrio instáveis ao redor do ponto de equilíbrio estável em estudo. A energia crítica foi definida como sendo a energia de menor valor, calculada para todos os pontos de equilíbrio instáveis. O ponto de equilíbrio instável de menor energia é conhecido na literatura como: 'closest equilibrium point'. Com isto obtém-se uma estimativa da área de atração que está garantidamente contida dentro da área de atração verdadeira. A grande desvantagem desse método é que a estimativa da área de atração gerada pode ser bastante conservadora, pois não leva em consideração a informação da trajetória do sistema durante a falta. Além disso, o cálculo de todos os pontos de equilíbrio de um sistema de potência de grande porte é algo bastante complexo e exige um tempo de processamento elevado, inviabilizando a utilização prática do método.

O método denominado critério de aceleração foi o primeiro a levar em consideração a informação do sistema durante o defeito, cujo objetivo é utilizar o

ponto de equilíbrio instável que estivesse na direção ou nas proximidades da trajetória do sistema em falta. Esse método consiste em estimar somente uma região da área de atração e não a área de atração por completo. O ponto de equilíbrio utilizado para limitar a área de atração é conhecido como 'ponto de equilíbrio de controle'. Os métodos que utilizam este conceito não utilizam a idéia de estimativa pelo ponto de equilíbrio de menor energia, justamente para não obter estimativas conservadoras.

4.3.1 Método da Superfície Limite de Energia Potencial

O método da superfície limite de energia potencial, tradicionalmente conhecido na literatura por PEBS (do inglês - 'Potential Energy Boundary Surface') foi proposto por Kakimoto et al. (1978) e surgiu com o intuito de eliminar a necessidade de se calcular os pontos de equilíbrio instáveis.

A superfície gerada pela função energia potencial fornece curvas de contorno fechadas e equipotenciais, $\mathcal{V}_p(x) = constante$, em uma pequena região nas proximidades do ponto de equilíbrio estável, onde se tem um ponto de mínimo da superfície de energia potencial. Os pontos de sela que limitam a área de atração do sistema, são dados pelos pontos de equilíbrio instáveis que fornecem os pontos de máximo local da superfície de energia potencial. As curvas de contorno que passam por estes pontos não são curvas fechadas. A curva que une todos os pontos de equilíbrio instáveis é conhecida como fronteira limite da energia potencial (PEBS).

No espaço multi-dimensional de ângulos dos geradores referenciados ao COA, a energia potencial ($\mathcal{V}_P$) é usualmente vista como uma bacia de $\mathcal{V}_P$. A Figura 4.3 ilustra a bacia de energia potencial para um sistema de três geradores. O ponto de equilíbrio estável do sistema (PEE) está localizado no fundo da bacia de energia potencial. Os pontos de equilíbrio instáveis (x^1, x^2, x^3) estão localizados sobre a borda da bacia.

Integra-se numericamente a equação diferencial do sistema em falta até que a projeção da trajetória do sistema em falta no eixo do ângulo δ cruze o PEBS.

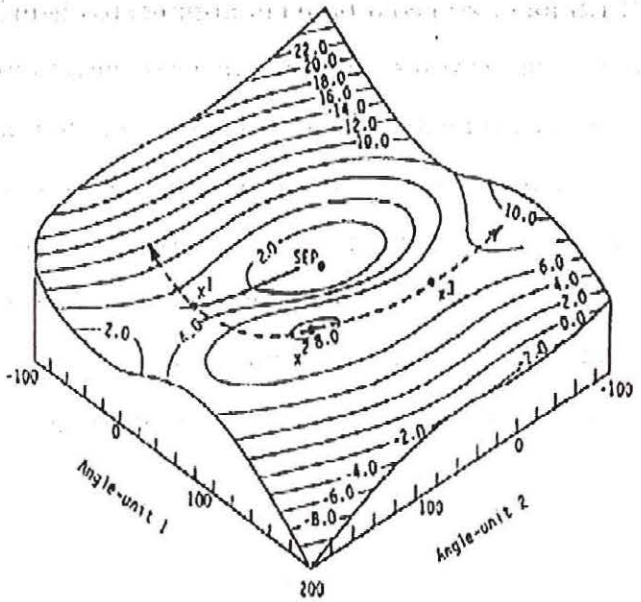

Figura 4.3: PEBS para o sistema 3 máquinas, extraído da referência Athay (1979).

O ponto no qual esta trajetória cruzar a superfície limite de energia potencial é conhecido como 'exit point'. As trajetórias de faltas que provocam a aceleração da máquina, irão abandonar a bacia de atração através do ponto de equilíbrio instável, localizado à direita do ponto de equilíbrio estável em estudo. As faltas que provocam desaceleração da máquina, irão conduzir as trajetórias para o ponto de equilíbrio instável, localizado à esquerda do ponto de equilíbrio estável em estudo.

Algoritmo

1. Verifica-se o ponto no qual a trajetória do sistema em falta cruza o PEBS (ponto no qual a energia potencial atinge um máximo em cima da trajetória da falta), seja δ^* esse ponto.

2. O valor da energia potencial em δ^* será a energia crítica $\mathcal{V}_{CA} = \mathcal{V}(\delta^*)$. Se no tempo de abertura t_{AB}, $\mathcal{V}(t_{AB}) < \mathcal{V}_{CA}$, o sistema será estável.

δ^* é denominado 'exit point' e o valor da energia deste ponto é utilizada como a energia crítica para o efeito de estimativa da área de atração.

O algoritmo PEBS foi criado com base em argumentos heurísticos e por este motivo gera resultados muitas vezes não conservadores, entretanto na maioria das vezes fornece uma estimativa muito boa do verdadeiro tempo crítico de abertura. Para sistemas de potência mal condicionados e sistemas com problemas de modos de instabilidade inter-área, o PEBS poderá não estar próximo ao ponto de equilíbrio instável de controle e portanto a energia crítica $\mathcal{V}_{CA}$ não terá uma boa precisão para o cálculo do tempo crítico de abertura.

Matematicamente, o PEBS é a fronteira da área de atração do sistema gradiente reduzido:

$$\dot{\delta} = -\frac{\partial \mathcal{V}_p(\delta)}{\partial \delta} \tag{4.24}$$

associado ao modelo original:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = -\dfrac{\partial \mathcal{V}_p(\delta)}{\partial \delta} - T\omega \end{cases} \tag{4.25}$$

onde $\mathcal{V}^p$ é dado por (4.16), considerando $I_{ij} = 0$. Para o melhor entendimento deste método é necessário estudar as relações existentes entre o sistema gradiente reduzido associado (4.24) e o sistema original (4.25) (Chiang, Wu e Varaiya, 1988; Bretas e Alberto, 2000b). O Apêndice A apresenta as relações existentes entre os sistemas reduzido e original quando são consideradas condutâncias de transferência suficientemente pequenas ($I_{ij} \neq 0$).

4.4 Determinação do Ponto de Equilíbrio Instável de Controle

O cálculo de todos os pontos de equilíbrio instáveis (*pei*) ao redor do ponto de equilíbrio estável é uma tarefa muito complexa e exige elevado esforço computacional.

Os métodos baseados no conceito de ponto de equilíbrio instável de controle somente levam em consideração o ponto de equilíbrio instável que está na direção

ou nas proximidades da trajetória do sistema em falta, denominado ponto de equilíbrio instável de controle (*peic*).

Definição 4.1 *O ponto de equilíbrio instável de controle é o ponto de sela cuja variedade estável é atingida pela trajetória do sistema em falta.*

A Figura 4.4 ilustra geometricamente a estimativa da área de atração utilizando o conceito de ponto de equilíbrio instável de controle.

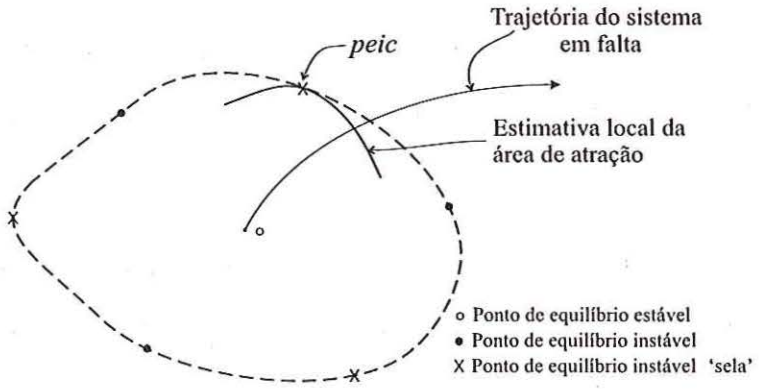

Figura 4.4: Representação geométrica da estimativa da área de atração utilizando o *peic*.

Todos os métodos que se utilizam desta idéia funcionam de acordo com o algoritmo a seguir:

1. Determina-se o ponto de equilíbrio instável de controle x_{CO} correspondente à trajetória do sistema em falta $x_f(t)$.

2. Determina-se o valor da energia crítica como sendo o valor da função energia calculada no ponto de equilíbrio instável de controle: $\mathcal{V}_{CR} = \mathcal{V}(x_{CO})$.

3. Calcula-se a função energia do sistema pós-falta no instante de abertura: $\mathcal{V}_{ab} = \mathcal{V}(x_f(t_{AB}))$.

4. se $\mathcal{V}_{ab} < \mathcal{V}_{CR}$ o sistema é estável, caso contrário o sistema é instável.

Os métodos diretos baseados no ponto de equilíbrio instável de controle são considerados os metódos mais eficientes para a determinação da estimativa da área de atração na análise de estabilidade transitória em sistemas de potência.

4.4.1 Método BCU

O método BCU (do inglês - 'Boundary Controlling Unstable equilibrium point') foi proposto por Chiang et al. (1994). Para encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle, utiliza-se da relação existente entre a fronteira de estabilidade do sistema original e a fronteira de estabilidade do sistema reduzido. O método BCU consiste basicamente de três passos:

1. Da trajetória do sistema em falta $x_f(t)$, detecta-se o ponto de saída ('exit point') δ^*, que é o ponto em que a projeção da trajetória $\delta(t)$ cruza a fronteira de estabilidade do sistema reduzido (PEBS).

2. Utiliza-se o ponto δ^* como condição inicial e resolve-se numericamente as equações diferenciais do sistema reduzido para encontrar o mínimo local de $\sum_{i=1}^{n} \|f_i(\delta)\|$; seja δ_O^* este ponto.

3. Utiliza-se o ponto δ_O^* como condição inicial para encontrar o zero da função $f(\delta)$, ou seja, encontrar o ponto de equilíbrio instável de controle do sistema reduzido, δ_{CO}^*.

A Figura 4.5 ilustra a representação geométrica do algoritmo.

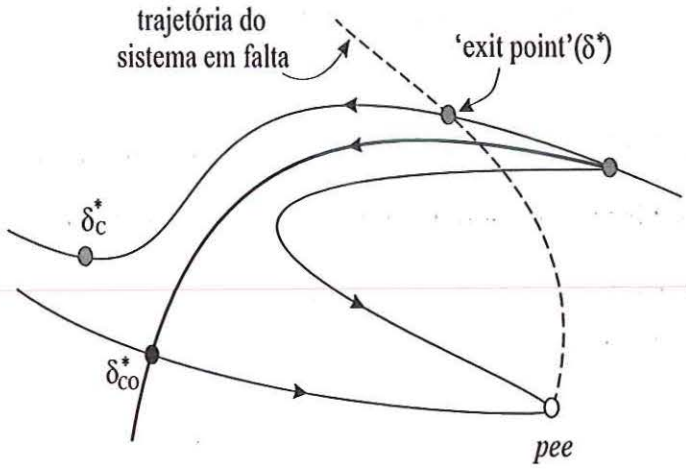

Figura 4.5: Representação geométrica do método BCU

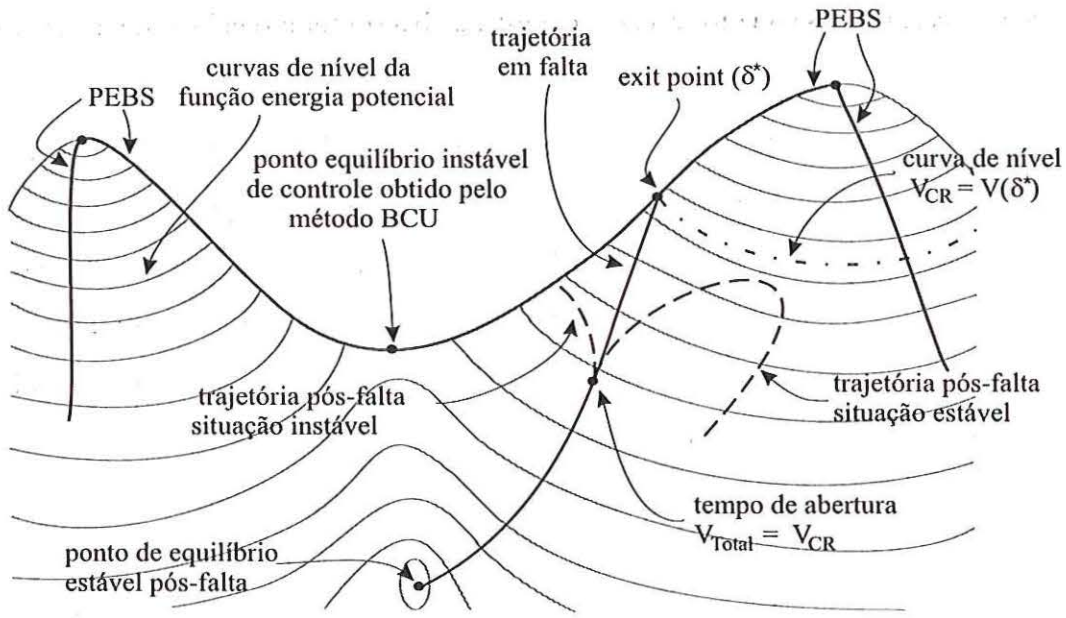

Figura 4.6: Falha na determinação do 'exit point'.

4.5 Falhas nos Métodos PEBS E BCU

No primeiro passo do algoritmo do método BCU assume-se que o máximo de energia potencial, ao longo da trajetória em falta, ocorre na vizinhança do PEBS, e esta suposição nem sempre é verdadeira. Este problema está relacionado ao cálculo do 'exit point' δ^* pelo método PEBS.

Através da Figura 4.6, pode-se perceber que na determinação do exit point podem ocorrer duas situações:

- Caso estável: O máximo de energia potencial é inferior ao valor da energia crítica do sistema.

- Caso instável: O máximo de energia potencial é superior ao valor da energia crítica do sistema.

Outro problema está relacionado ao segundo passo do algoritmo do BCU. O 'exit point' obtido pela integração numérica do sistema em falta nem sempre está contido sobre o PEBS. Portanto em alguns casos a trajetória do sistema reduzido poderá não ter ponto de mínimo nas proximidades do ponto de equilíbrio instável

de controle. Com isso a convergência e a estimativa do tempo crítico de abertura pelo método BCU ficam comprometidas.

Llamas et al. (1995) mostraram exemplos no qual o método BCU prediz estabilidade mas torna-se instável logo após a primeira oscilação. Este fato foi atribuido a não satisfação da condição de transversalidade, requerida na teoria do método BCU. Recentemente, Paganini et al. (1999) mostraram que a condição de transversalidade não é satisfeita genericamente e portanto a validade do método BCU não pode ser justificada teoricamente.

4.6 Novos Métodos para o Cálculo do PEBS e do Ponto de Equilíbrio Instável de Controle

Scruggs e Milli (2001) propuseram o Método do Gradiente Dinâmico como uma técnica mais segura para determinação de PEBS. Este método permite avaliar se um dado estado δ no espaço de ângulos está contido dentro ou fora do PEBS. O teste é realizado ao longo da trajetória do sistema gradiente associado, partindo de um δ_O verifica-se a convergência para o ponto de equilíbrio estável pós-falta. Pode-se dizer que uma pequena parte da trajetória do sistema gradiente é aproximada por uma linha e calcula-se a distância ao ponto de equilíbrio pós-falta. Caso a distância decresça, o estado δ está contido dentro do PEBS, caso contrário está contido do lado de fora do PEBS.

Treinen et al. (1996) propuseram o 'Shadowing Method', baseado no ponto de equilíbrio instável de controle . O método utiliza o fluxo do sistema gradiente e as superfícies equipotenciais próximas ao *peic*. O 'exit point' é reestimado através de intervalos fixos ao longo da trajetória do sistema gradiente associado. Utiliza-se o primeiro 'exit point' como condição inicial e estima-se outro 'exit point' através da integração numérica do sistema gradiente, assim sucessivamente até se aproximar do ponto de equilíbrio instável de controle. A Figura 4.7 ilustra o método.

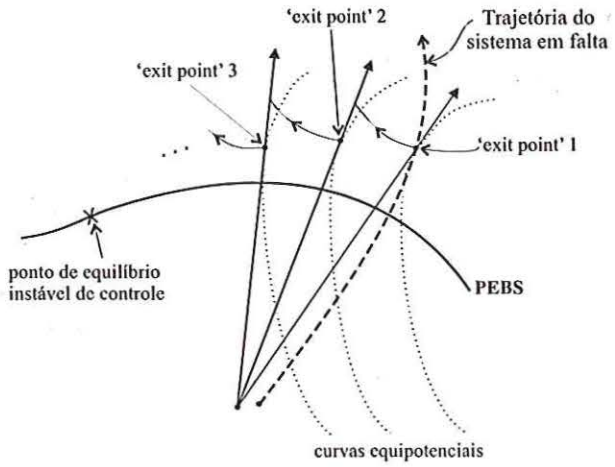

Figura 4.7: Ilustração do 'Shadowing Method'.

Uma descrição detalhada sobre estes novos métodos pode ser encontrada em (Nazareno, 2003).

4.7 Resultados obtidos para o sistema 2-máquinas × barramento infinito

Considere o sistema 2-máquinas × barramento infinito, apresentado na Figura 4.8. A máquina 3 é o barramento infinito e o coeficiente de amortecimento $T = 0.05$ é uniforme. Considere o sistema operando no ponto de equilíbrio $\delta_1 = 0.4677\,rad$ e $\delta_2 = 0.4622\,rad$. Suponha que no instante de tempo $t_o = 0s$ ocorra um curto circuito trifásico sólido na barra 2 e que a configuração do sistema pós-falta e pré-falta sejam iguais.

Utilizando o método de integração numérica foi obtido para esta falta um TCA pertencente ao intervalo $(0.204, 0.205)s$. A Figura 4.9 ilustra o comportamento das velocidades angulares e dos ângulos dos rotores dos geradores do sistema, para um tempo de abertura de $0.204s$. Nesta situação pode-se observar que os geradores do sistema permanecem oscilando em conjunto, isto é, o sistema permanece em sincronismo. Para um tempo de abertura de $0.205s$, tem-se uma situação instável em que o gerador 2 perde o sincronismo com gerador 1. A Figura

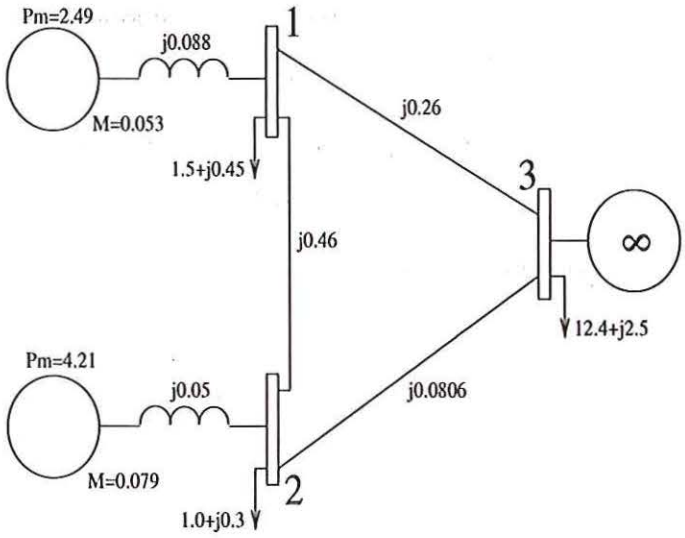

Figura 4.8: Sistema 2-máquinas × barramento infinito, extraído da referência Athay (1979).

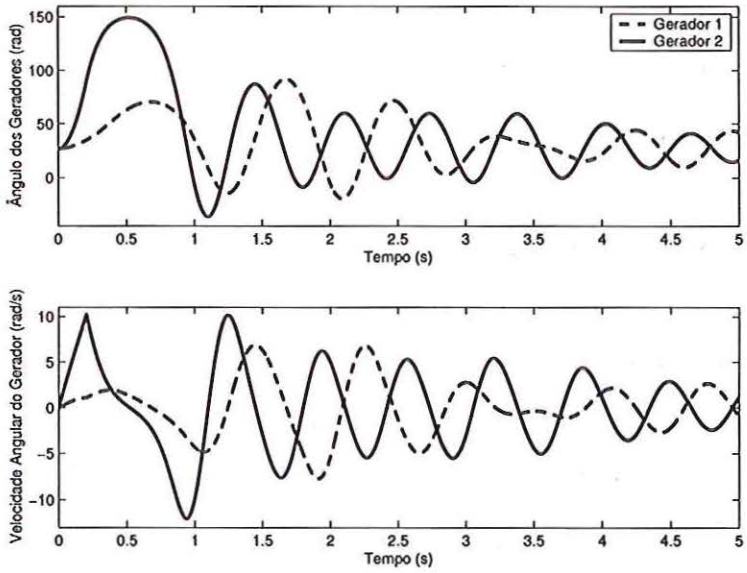

Figura 4.9: Situação de sincronismo entre os geradores para $t_{AB} = 0.204s$.

4.10 ilustra o caso.

Utilizando a função energia $\mathcal{V}^{apr}$, dada por (4.20), para a obtenção da estimativa do tempo de abertura pelos métodos PEBS e BCU, obtém-se respectivamente $0.199s$ e $0.200s$. Essas estimativas obtidas são consideradas boas quando compa-

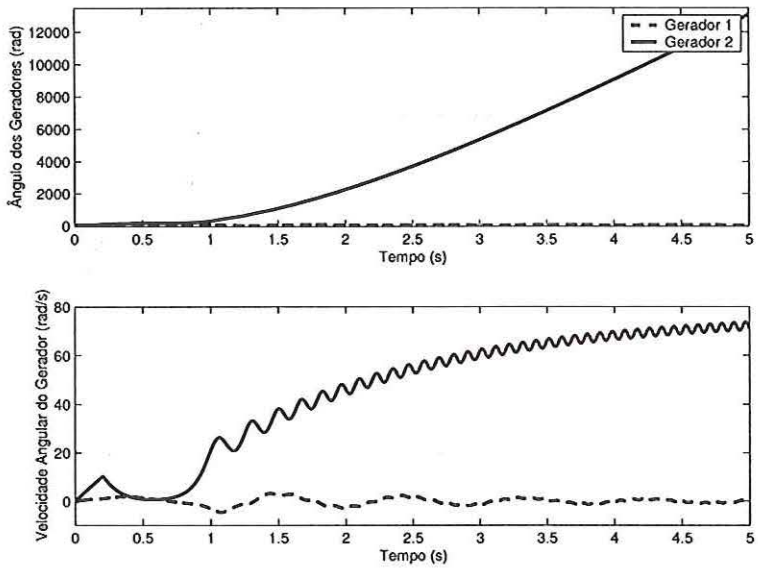

Figura 4.10: Perda de sincronismo entre os geradores para $t_{AB} = 0.205s$.

radas com o TCA real do sistema, obtido por integração numérica. As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam o monitoramento da função energia respectivamente para as situações estável e instável. Na Figura 4.13 pode-se observar que a derivada da função energia $\mathcal{V}^{apr}$ torna-se positiva em um pequeno intervalo de tempo, contrariando o Teorema de Lyapunov.

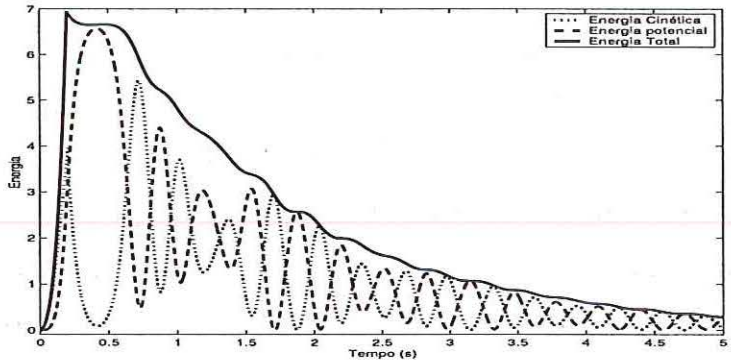

Figura 4.11: Monitoramento da função energia, considerando $t_{AB} = 0.199s$

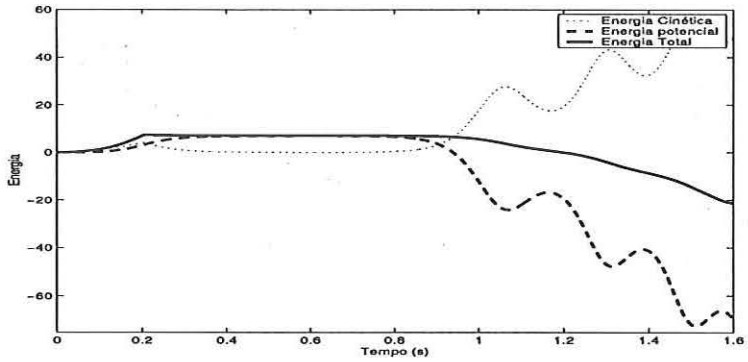

Figura 4.12: Monitoramento da função energia, considerando $t_{AB} = 0.205s$

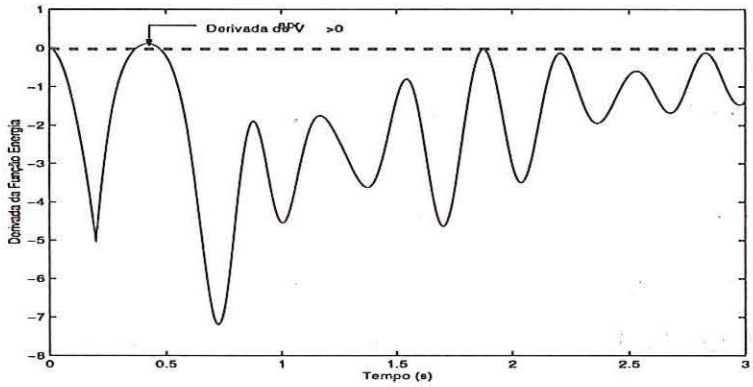

Figura 4.13: Monitoramento da derivada da função energia, considerando $t_{AB} = 0.199s$

Nos diagramas de fase apresentados nas Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 podem ser observadas as regiões ilimitadas de derivada positiva. Esses diagramas foram traçados considerando diferentes intersecções de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com os planos ω_1 e ω_2. Na Figura 4.14 tem-se o diagrama de fase considerando a intersecção com o plano $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$. A região onde a derivada de $\mathcal{V}^{apr}$ é positiva é composta por dois conjuntos ilimitados. A Figura 4.15 e a Figura 4.16 apresentam respectivamente a interseção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com os planos ($\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$) e ($\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$). Observe mais uma vez que as regiões onde $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ são formadas por conjuntos ilimitados.

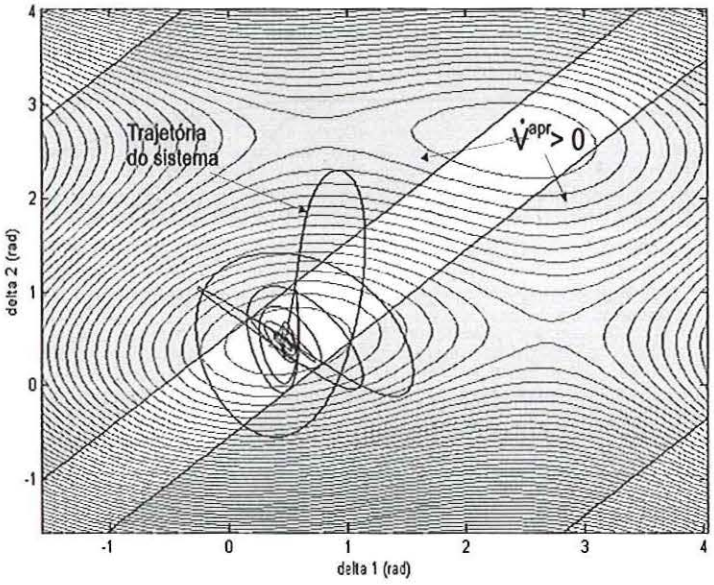

Figura 4.14: Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$.

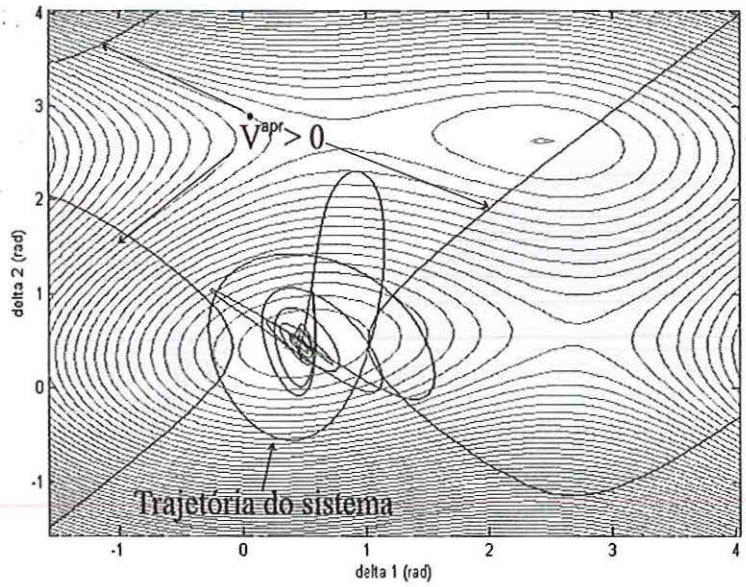

Figura 4.15: Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$.

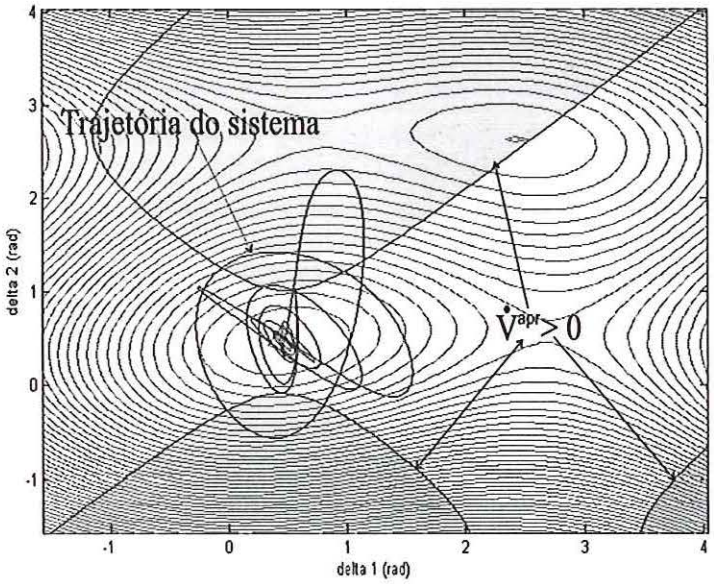

Figura 4.16: Intersecção de $\dot{\mathcal{V}}^{apr} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$.

Portanto, as condições requeridas pelo Princípio de Invariância de LaSalle e pela Extensão do Princípio de Invariância não são satisfeitas. Desta forma, não podem ser utilizadas como base matemática adequada para a análise de estabilidade. Estes TCA's, se comparados com o tempo de abertura obtido pelo método de integração numérica, podem ser considerados como boas estimativas, porém sem fundamento teórico.

Capítulo 5

As Funções de Lyapunov Estendidas para Análise de Estabilidade Transitória

Nesta seção, serão apresentados exemplos da utilização da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, para estimativa da área de atração de sistemas de potência. Inicialmente são apresentadas as Funções de Lyapunov Estendidas para o caso de sistemas da forma 1-máquina $\times$ barramento infinito (UMBI) e logo em seguida para o caso multimáquinas.

5.1 Funções de Lyapunov Estendidas para sistemas UMBI

Nesta seção, Funções de Lyapunov Estendidas são propostas para o sistema UMBI, considerando as perdas na transmissão e as resistências de armadura das máquinas síncronas. Tanto o modelo clássico como de um eixo para o gerador foram considerados (Alberto et al., 2002a; Alberto et al., 2002b).

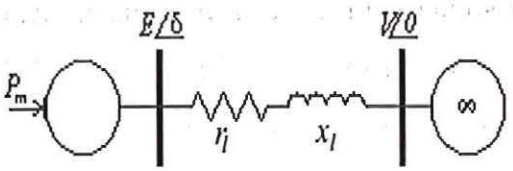

Figura 5.1: Sistema uma máquina versus barramento infinito.

5.1.1 Modelo Clássico para a Máquina Síncrona

Seja o sistema UMBI da Figura 5.1. A máquina síncrona está conectada ao barramento infinito através de uma linha de transmissão com perdas.

Modelando o gerador como uma força eletromotriz constante atrás da reatância transitória, pode-se descrever este sistema pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \omega \\ M\dot{\omega} = P - C\sin\delta - D\cos\delta - T\omega \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $P = P_m - \frac{R}{R^2+X_d'^2}E^2$, $C = \frac{X_d'}{R^2+X_d'^2}EV$ e $D = \frac{R}{R^2+X_d'^2}EV$. Os parâmetros $R = r_a + r_l$ e $X_d' = x_d' + x_l$ são respectivamente a resistência e a reatância equivalentes do sistema. Sendo r_a a resistência de armadura da máquina, x_d' a reatância transitória de eixo direto da máquina, r_l e x_l são respectivamente a resistência e a reatância da linha de transmissão.

Incorporando as perdas na linha, este sistema possui a seguinte Função de Lyapunov no sentido usual:

$$\mathcal{V}(\delta,\omega) := M\frac{\omega^2}{2} - P\delta - Ccos\delta - Dsin\delta + \alpha \tag{5.2}$$

onde α é uma constante arbitrária. É fácil mostrar que a derivada de $\mathcal{V}$ ao longo das órbitas é dada por

$$\dot{\mathcal{V}} = -T\omega^2 \leq 0 \tag{5.3}$$

a qual é uma função semi-definida negativa. Portanto, a função $\mathcal{V}$ satisfaz as exigências do Princípio de Invariância usual e pode ser utilizada para estudar

a estabilidade deste sistema com as técnicas usuais. Apesar disto, uma nova função energia será proposta a seguir e a Extensão do Princípio de Invariância será utilizada para estudar a estabilidade do sistema. O objetivo é ilustrar uma aplicação da Extensão do Princípio de Invariância e preparar as idéias para em seguida resolver um problema que não apresenta uma função de Lyapunov no sentido usual.

Para isto, considere a seguinte função:

$$\mathcal{W}(\delta,\omega) = M\frac{\omega^2}{2} - P\delta - C\cos\delta - \beta\omega\left(P - C\sin\delta - D\cos\delta\right) + \alpha \tag{5.4}$$

onde β é um parâmetro a ser determinado e α é uma constante arbitrária. Nosso objetivo principal é mostrar que essa função satisfaz às condições do Teorema 3.11. Calculando a derivada de $\mathcal{W}$ ao longo das órbitas, obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{W}} = & -\left(T - \beta\left(C\cos\delta - D\sin\delta\right)\right)\omega^2 + \frac{\beta T}{M}\left(P - C\sin\delta - D\cos\delta\right)\omega \\ & -\frac{\beta}{M}\left(P - C\sin\delta - D\cos\delta\right)^2 - D\cos(\delta)\omega\end{aligned} \tag{5.5}$$

que é equivalente a:

$$\dot{\mathcal{W}} = -\begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix} - D\cos(\delta)\omega \tag{5.6}$$

onde

$$P_l(\delta) = P - C\sin\delta - D\cos\delta$$

e

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\beta}{M} & -\frac{\beta T}{2M} \\ \hline -\frac{\beta}{2M} & T - \beta\left(C\cos\delta - D\sin\delta\right) \end{array}\right] \tag{5.7}$$

Note que $\dot{\mathcal{W}}$ é composta por um termo quadrático adicionado ao termo $-D\cos(\delta)\omega$. O parâmetro β deve ser escolhido de forma a matriz quadrática (5.7) seja definida positiva. Aplicando o Critério de Sylvester pode-se facilmente demonstrar que isto é certamente garantido se

$$\beta < \frac{T}{C + D + \frac{T^2}{4M}}$$

Desta forma, apenas o termo $(-D\cos(\delta)\omega)$ será responsável por gerar regiões nas quais a derivada de $\mathcal{W}$ é positiva. Uma vez escolhido o parâmetro β, deve-se encontrar a constante real L para que sejam satisfeitas as condições do Teorema 3.11. Essas condições são:

- O conjunto Ω_L deve ser limitado;
- $l = sup_{x \in C}\mathcal{W}(x) < L$.

Seja o Exemplo a seguir onde todos os passos anteriores são realizados.

Exemplo 5.1 *Seja o sistema UMBI da Figura 5.1 com* $P_m = 1.0$, $H = 6.0$, $T = 0.08$, $E = 1.33$, $V = 1.0$, $r_a = 0.002$, $x'_d = 0.2$, $r_l = 0.04$ *e* $x_l = 0.5$. *As curvas de nível de* W *estão apresentadas na Figura 5.2 para* $\alpha = 2.0841$ *e* $\beta = 0.0078$. *A constante* α *foi escolhida de forma que a função energia no ponto de equilíbrio estável pós-falta seja igual a zero. Observe que as regiões onde a derivada de* $\mathcal{W}$ *é positiva são pequenos conjuntos limitados. Um deles está próximo ao ponto de equilíbrio instável. O outro está próximo ao ponto de equilíbrio estável e este corresponde ao conjunto* C *do Teorema 3.11. O máximo valor de* W *em* C *define o conjunto* $\bar{\Omega}_l$, *o qual é uma estimativa do atrator. Neste exemplo* $l = 0.0903$. *Para estimar a região de estabilidade ou área de atração deste atrator, procura-se pelo maior número* L *tal que as condições do Teorema 3.11 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que* $\bar{\Omega}_L$ *não intercepte a região, próxima ao ponto de equilíbrio instável, onde a derivada é positiva. Neste exemplo obteve-se* $L = 1.4621$. *A Figura 5.2 ilustra as estimativas do atrator e da região de estabilidade.*

O tempo crítico de abertura (TCA) obtido por simulação para um curto sólido trifásico na barra do gerador pertence ao intervalo $(0.355, 0.356s)$. *A estimativa do TCA obtida com a Função de Lyapunov Estendida pertence ao intervalo* $(0.312, 0.313s)$. *Como esperado, esta estimativa é um pouco conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. Entretanto este tempo não é muito mais conservador do que o obtido com a Função de Lyapunov convencional* $\mathcal{V}$ *o qual pertence ao intervalo*

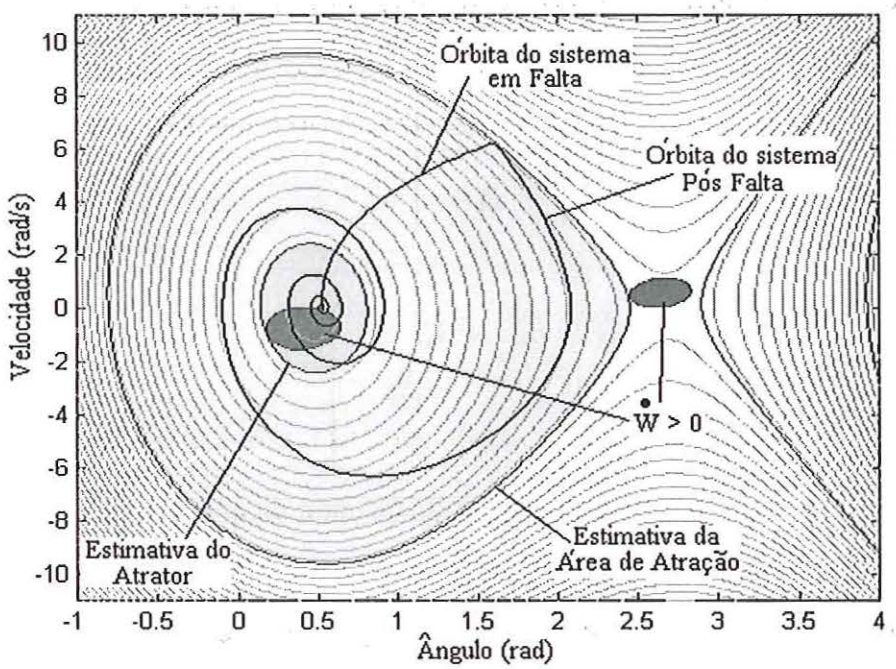

Figura 5.2: Curvas de nível de $\mathcal{W}$.

$(0.329, 0.330s)$. *A Figura 5.2 mostra as trajetórias do sistema em falta e pós-falta para um tempo de abertura de* $0.312s$.

5.1.2 Modelo Clássico para Máquina Síncrona e inclusão do Efeito de Amortecimento dos Geradores

Uma outra FLE a ser proposta neste trabalho é obtida através de uma função candidata em uma forma mais geral. A estabilidade assintótica da origem pode ser estudada considerando a seguinte função candidata

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \quad &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega \\ (\delta - \delta^s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ (\delta - \delta^s) \end{bmatrix} \\ &-P(\delta - \delta^s) - C(\cos\delta - \cos\delta^s) + D(\sin\delta - \sin\delta^s). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Observe que a função proposta é independente da escolha do parametro β. Isto é uma vantagem quando comparada com outras funções de Lyapunov Estendidas.

A derivada de $\mathcal{W}$ ao longo das trajetórias é dada por

$$\dot{\mathcal{W}} = -\begin{bmatrix} \omega \\ (\delta - \delta^s) \\ P_l \end{bmatrix}^T \Theta \begin{bmatrix} \omega \\ (\delta - \delta^s) \\ P_l \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{T\lambda_1}{M} - \lambda_2 & -\frac{\lambda_3}{2} + \frac{T\lambda_2}{2M} & -\frac{\lambda_1}{2M} + \frac{1}{2} \\ -\frac{\lambda_3}{2} + \frac{T\lambda_2}{2M} & 0 & -\frac{\lambda_2}{2M} \\ -\frac{\lambda_1}{2M} + \frac{1}{2} & -\frac{\lambda_2}{2M} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

As constantes λ_1, λ_2 e λ_3 devem ser escolhidas afim de que se tenha $\mathcal{W} > 0$ e que $\dot{\mathcal{W}}$ satisfaça as exigências do Teorema 3.10 e (ou) do Teorema 3.11.

Observe que para obter uma Função de Lyapunov usual basta fazer $\lambda_1 = M$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ em (5.8). Desta forma, ter-se-ia:

$$\mathcal{V} = \tfrac{1}{2}M\omega^2 - P(\delta - \delta^s) - C(\cos\delta - \cos\delta^s) + D(\sin\delta - \sin\delta^s) \tag{5.11}$$

e $\dot{\mathcal{V}} = -T\omega^2$, a qual é uma função semi-definida negativa. Portanto, a função $\mathcal{V}$ satisfaz as exigências do Princípio de Invariância usual e pode ser utilizada para estudar a estabilidade deste sistema com as técnicas usuais.

Apesar disto, uma nova função energia será proposta a seguir e a Extensão do Princípio de Invariância será utilizada para estudar a estabilidade do sistema. O objetivo é ilustrar uma aplicação da Extensão do Princípio de Invariância e preparar as idéias para em seguida resolver um problema que não apresenta uma FL no sentido usual.

Considere uma função candidata a FLE com as seguintes constantes: $\lambda_1 = M$ e $\lambda_2 = MT$ e $\lambda_3 = MT^2$. Desta forma, tem-se

$$\mathcal{W} = \mathcal{V} + MT\omega(\delta - \delta^s) + \frac{MT^2}{2}(\delta - \delta^s)^2 \tag{5.12}$$

onde $\mathcal{V}$ é dado por (5.11). A derivada de $\mathcal{W}$ ao longo das trajetórias é dada por

$$\dot{\mathcal{W}} = -(1 - M)T\omega^2 - (1 - M)T^2\omega(\delta - \delta^s) + TP_l(\delta - \delta^s) \tag{5.13}$$

Observe que em (5.13) os termos em $\omega(\delta - \delta^s)$ e $Pl(\delta - \delta^s)$ serão responsáveis por gerar regiões nas quais a derivada de $\mathcal{W}$ é positiva. Deseja-se mostrar que

$\mathcal{W}$ é uma FLE, isto é, encontrar a constante real L para que sejam satisfeitas as condições do Teorema 3.11. Essas condições são:

i) O conjunto Ω_L deve ser limitado;

ii) $l = sup_{x \in C} \mathcal{W}(x) < L$.

No Exemplo a seguir estas condições são verificadas numericamente.

Exemplo 5.2 *Seja o sistema* 1-*Máquina* $\times$ *Barramento Infinito com* $P_m = 1.0$, $H = 6.0$, $T = 0.08$, $E = 1.33$, $V = 1.0$, $r_a = 0.002$, $x'_d = 0.2$, $r_l = 0.05$ *e* $x_l = 0.5$. *Considere que ocorra um curto circuito trifásico sólido na barra do gerador. As curvas de nível de* $\mathcal{W}$ *estão apresentadas na Figura 5.3. Observe que as regiões onde a derivada de* $\mathcal{W}$ *é positiva são conjuntos limitados. Um deles está a direita do ponto de equilíbrio instável. O outro está próximo ao ponto de equilíbrio estável e este corresponde ao conjunto* C *do Teorema 3.11. O máximo valor de* $\mathcal{W}$ *em* $\bar{C}$ *define o conjunto* $\bar{\Omega}_l$, *o qual é uma estimativa do atrator. Neste exemplo* $l = 5.0 \times 10^{-6}$. *Para estimar a área de atração deste atrator, procura-se pelo maior número* L *tal que as condições do Teorema 3.11 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que* $\bar{\Omega}_L$ *não intercepte a região, próxima ao ponto de equilíbrio instável, onde a derivada é positiva. Neste exemplo obteve-se* $L = 1.5704$. *A Figura 5.3 ilustra as estimativas do atrator e da área de atração.*

O TCA obtido por simulação para o curto circuito pertence ao intervalo $(0.360, 0.361s)$. *A estimativa do TCA obtida com a FLE pertence ao intervalo* $(0.317, 0.318s)$. *Como esperado, esta estimativa é um pouco conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. Entretanto este tempo não é muito mais conservador do que o obtido com a FL convencional* $\mathcal{V}$ *o qual pertence ao intervalo* $(0.335, 0.336s)$. *A Figura 5.3 mostra a trajetória do sistema para um tempo de abertura de* $0.317s$.

5.1.3 Modelo de 1-eixo para a Máquina Síncrona

Considere novamente o sistema UMBI da Figura 5.1. Utilizando o modelo de 1-eixo para o gerador, o sistema é descrito matematicamente pelas seguintes

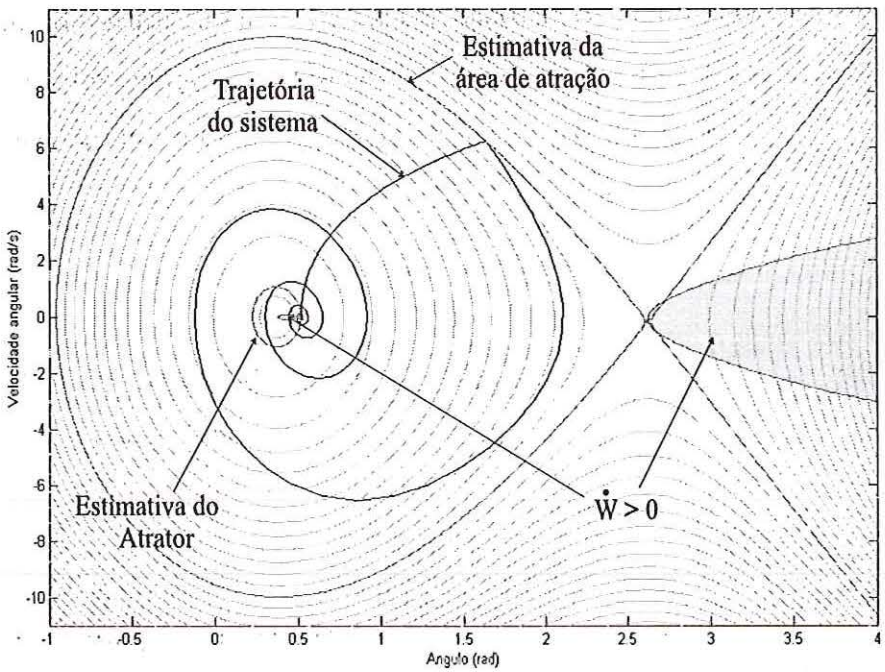

Figura 5.3: Curvas de nível de $\mathcal{W}$.

equações diferenciais:

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta} &= \omega \\
\frac{H}{\pi f_o}\dot{\omega} &= P_l(\delta, E'_q) - T\omega \\
\frac{\tau'_{do}}{X_d - X'_d}\dot{E}'_q &= \frac{1}{X_d - X'_d}E_{fd} + \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q}|V|\cos\delta - \frac{R^2 + X_d X'_q}{(R^2 + X'_d X'_q)(X_d - X'_d)}E'_q \\
&\quad + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q}|V|\sin\delta
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
P_l(\delta, E'_q) = \quad & P_m + \frac{(R^2 - X'_d X'_q)(X'_d - X'_q)}{2(R^2 + X'_d X'_q)^2}|V|^2 \sin 2\delta - \frac{R(R^2 + X'^2_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2}E'^2_q + \\
& + \frac{R X'_q (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2}|V|^2 \sin^2\delta - \left(\frac{2R^2(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q}\right)E'_q|V|\sin\delta + \\
& + \left(\frac{2R X'_q (X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q}\right)E'_q|V|\cos\delta + \frac{R X'_q (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2}|V|^2\cos^2\delta
\end{aligned}
$$

E'_q é o módulo da força eletromotriz de eixo em quadratura, E_{fd} é o módulo da tensão aplicada ao enrolamento de campo da máquina, $R = r_a + r_l$ é a resistência equivalente do sistema, $X'_d = x'_d + x_l$, $X_d = x_d + x_l$, $X'_q = x'_q + x_l$ e $X_q = x_q + x_l$ são as reatâncias equivalentes do sistema, sendo r_a a resistência de armadura da máquina, x'_d e x'_q as reatâncias transitória de eixo direto e quadratura da

máquina, x_d e x_q as reatâncias síncronas de eixo direto e quadratura da máquina e r_l e x_l são respectivamente a resistência e a reatância da linha de transmissão.

Obter uma Função de Lyapunov para este sistema não é uma tarefa trivial. Para isto considere a seguinte mudança de variável

$$\varepsilon'_q = ln\left(E'_q\right).$$

A nova variável está bem definida, já que E'_q representa uma força eletromotriz e tem-se $E'_q \neq 0$. Desprezando as perdas na linha de transmissão e a resistência de armadura, este sistema possui uma Função de Lyapunov no sentido usual que é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \tfrac{H}{\pi f_o}\omega^2 - P_m\delta - \tfrac{1}{2}|V|^2\tfrac{(X'_d-X'_q)}{2X'_dX'_q}\cos 2\delta - \tfrac{e^{\varepsilon'_q}|V|}{X'_d}\cos\delta + \tfrac{1}{2}\tfrac{X_d}{X'_d(X_d-X'_d)}e^{2\varepsilon'_q} - \\ &- \tfrac{1}{X_d-X'_d}E_{fd}e^{\varepsilon'_q} + \alpha\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde α é uma constante arbitrária. É fácil mostrar que a derivada de $\mathcal{V}$ ao longo das órbitas é dada por:

$$\dot{\mathcal{V}} = -\frac{\tau'_{do}}{X_d - X'_d}\left(\dot{e^{\varepsilon'_q}}\right)^2 - T\omega^2 \leq 0 \tag{5.16}$$

a qual é uma função semi-definida negativa. Portanto, a função $\mathcal{V}$ satisfaz todas as exigências do Princípio de Invariância usual e pode ser utilizada para estudar a estabilidade deste sistema com as técnicas usuais.

Exemplo 5.3 *Seja o sistema* 1-*Máquina* $\times$ *Barramento Infinito com* $P_m = 1.0$, $H = 6$, $T = 0.08$, $\tau'_{do} = 5$, $E_{fd} = 1.92$, $V = 1$, $r_a = 0$, $x'_d = 0.2$, $x'_q = 0.4$, $x_d = 0.9$, $x_q = 0.8$, $r_l = 0$ *e* $x_l = 0.5$. *As curvas de nível de* $\mathcal{V}$ *são apresentadas considerando* $\alpha = 3.2625$. *Novamente a constante* α *foi escolhida de forma que a energia do ponto de equilíbrio estável pós-falta seja zero. Na Figura 5.4,* E'_q *é constante e igual a* 1.3. *Na Figura 5.5,* ω *é constante e igual a* -0.8. *Para estimar a área de atração, procura-se pelo maior número* L *tal que o conjunto* Ω_L *seja limitado. Neste exemplo obteve-se* $L = 0.4081$. *As regiões hachuradas nas Figuras 5.4 e 5.5 mostram a interseção da estimativa da área de atração com o plano de corte. O TCA obtido por simulação para um curto sólido trifásico*

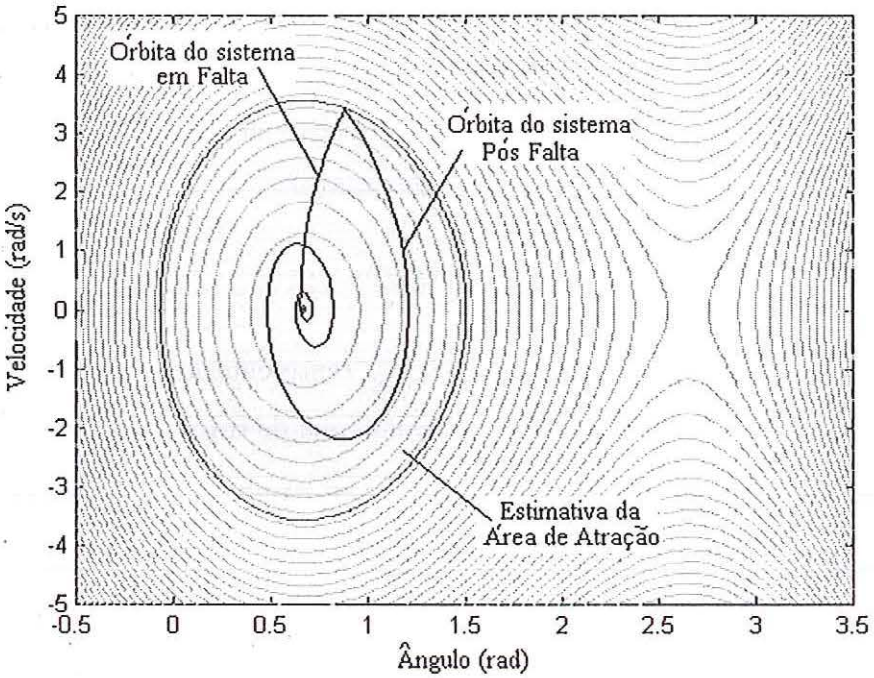

Figura 5.4: Curvas de nível de $\mathcal{V}$, E'_q constante e igual a 1.3.

na barra do gerador pertence ao intervalo $(0.281, 0.282s)$. *Utilizando esta função energia, o TCA obtido pertence ao intervalo* $(0.127; 0.128s)$. *Como esperado, esta estimativa é muito conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. As Figuras 5.4 e 5.5 mostram as trajetórias do sistema em falta e pós falta para um tempo de abertura de* $0.127s$.

Quando a resistência de armadura e as perdas na linha são consideradas, este sistema não possui uma Função de Lyapunov no sentido usual. Apesar disto, uma nova função energia será proposta a seguir e a Extensão do Princípio de Invariância será utilizada para estudar a estabilidade do sistema. Para isto, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \; & \frac{H}{\pi f_o}\omega^2 - P_m\delta - \frac{1}{X_d - X'_d}E_{fd}e^{\varepsilon'_q} - \frac{X'_q}{R^2+X'_dX'_q}e^{\varepsilon'_q}|V|\cos\delta - \frac{R}{R^2+X'_dX'_q}e^{\varepsilon'_q}|V|\sin\delta - \\ & \frac{RX'_q(X'_d-X'_q)}{2(R^2+X'_dX'_q)}|V|^2\left(\delta + \frac{\sin 2\delta}{2}\right) + \frac{RX'_d(X'_d-X'_q)}{2(R^2+X'_dX'_q)}|V|^2\left(\delta - \frac{\sin 2\delta}{2}\right) + \\ & \frac{(R^2-X'_dX'_q)(X'_d-X'_q)}{4(R^2+X'_dX'_q)^2}|V|^2\cos 2\delta + \frac{R^2+X_dX'_q}{(R^2+X'_dX'_q)(X_d-X'_d)}e^{2\varepsilon'_q} - \beta\omega P_l(\delta, E'_q) + \alpha\end{aligned} \tag{5.17}$$

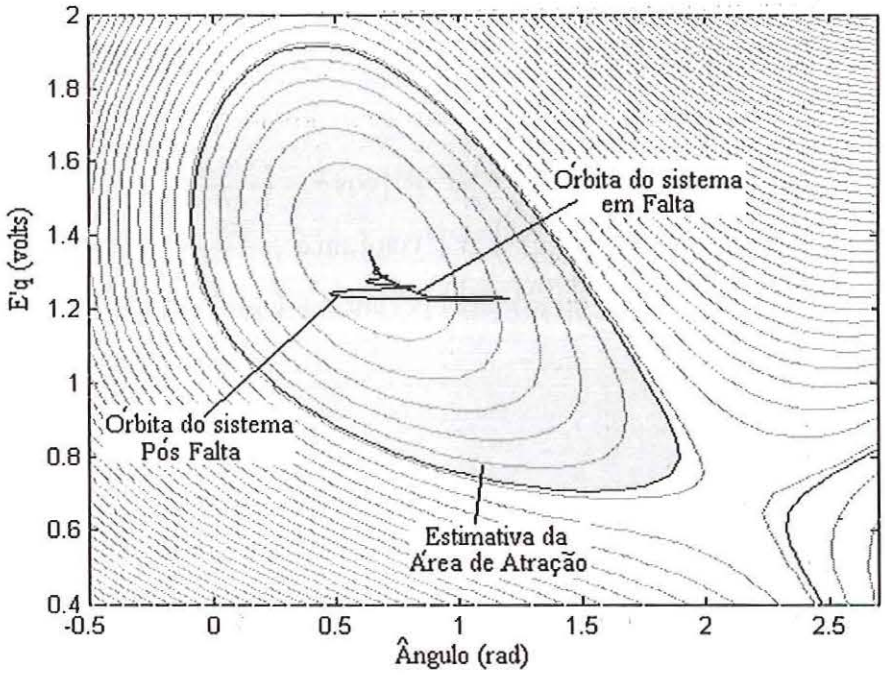

Figura 5.5: Curvas de nível de $\mathcal{V}$, ω constante e igual a -0.8.

onde β é um parâmetro a ser determinado e α uma constante arbitrária. O objetivo é mostrar que esta função satisfaz as condições do Teorema 3.11. Calculando a derivada de $\mathcal{W}$ ao longo das órbitas do sistema obtém-se:

$$-\dot{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} \dot{\widehat{e^{\varepsilon'_q}}} \\ P_l(\delta, E'_q) \\ \omega \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} \dot{\widehat{e^{\varepsilon'_q}}} \\ P_l(\delta, E'_q) \\ \omega \end{bmatrix} + \\ + \frac{2R^2(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{\varepsilon'_q} |V| \omega \sin\delta - \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{\varepsilon'_q} |V| \omega \cos\delta + \frac{R(R^2 + X'^2_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{2\varepsilon'_q} \omega \tag{5.18}$$

onde

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & 0 & A_{13} \\ \hline 0 & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{array}\right]$$

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\tau'_{do}}{X_d - X'_d} \\
A_{22} &= \frac{1}{2\frac{H}{\pi f_o}}\beta \\
A_{33} &= \beta\Bigg[-\left(\frac{X'_q}{R^2+X'_dX'_q} + \frac{2RX'_q(X'_q-X'_d)}{R^2+X'_dX'_q}\right)e^{\varepsilon'_q}|V|\cos\delta - \left(\frac{2R^2X'_q(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2} + \frac{R}{R^2+X'_dX'_q}\right)e^{\varepsilon'_q}|V|\sin\delta \\
&\quad - \left(\frac{2RX'_q(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2} + \frac{2RX'_d(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V|^2\cos\delta\sin\delta + \frac{(R^2-X'_dX'_q)(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}|V|^2\cos 2\delta\Bigg] + T \\
A_{13} &= \frac{\beta}{2}\Bigg[\left(-\frac{X'_q}{R^2+X'_dX'_q} - \frac{2R^2(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V|\sin\delta + \left(\frac{R}{R^2+X'_dX'_q} - \frac{2RX'_q(X'_q-X'_d)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V|\cos\delta \\
&\quad - \frac{2R(R^2+X'^2_d)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}(e^{\varepsilon'_q})^2\Bigg] \\
A_{23} &= -\frac{1}{4\frac{H}{\pi f_o}}\beta d
\end{aligned}
$$

Similarmente ao Exemplo 5.2, a derivada de $\mathcal{W}$ é composta por um termo quadrático adicionado a três outros termos. O parâmetro β deve ser escolhido de forma a tornar a parte quadrática definida positiva. Aplicando a fórmula da variação das constantes em (5.14), pode-se mostrar que E'_q mantém-se limitado ao longo das órbitas, segundo a estimativa:

$$
E'_q < E'_{qest} = |E'_q(0)| + |\frac{E_{fd}}{\tau'_{do}}| + |\frac{(x_d - x'_d)x'_q}{\tau'_{do}(r_a^2 + x'_dx'_q)}V| + |\frac{(x_d - x'_d)r}{\tau'_{do}(r_a^2 + x'_dx'_q)}V|
$$

Com esta estimativa e aplicando-se o Critério de Sylvester encontra-se a seguinte restrição para β

$$
-\frac{E_2^2}{8\frac{H}{\pi f_o}}\beta^2 + \frac{\tau'_{do}}{(X_d - X'_d)}\left(\left(\frac{E_1}{\frac{2H}{\pi f_o}} - \frac{T^2}{16\left(\frac{H}{\pi f_o}\right)^2}\right)\beta + \frac{T}{\frac{2H}{\pi f_o}}\right) > 0 \tag{5.19}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
E_1 &= -\left(\frac{X'_q}{R^2+X'_dX'_q} + \frac{2RX'_q(X'_q-X'_d)}{R^2+X'_dX'_q}\right)E'_{qest}|V| - \left(\frac{2R^2X'_q(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2} + \frac{R}{R^2+X'_dX'_q}\right)E'_{qest}|V| \\
&\quad - \left(\frac{2RX'_q(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2} + \frac{2RX'_d(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V|^2 + \frac{(R^2-X'_dX'_q)(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}|V|^2 \\
E_2 &= -\frac{2R(R^2+X'^2_d)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}(e^{\varepsilon'_q})^2 - \left(\frac{X'_q}{R^2+X'_dX'_q} + \frac{2R^2(X'_d-X'_q)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V| + \left(\frac{R}{R^2+X'_dX'_q} - \frac{2RX'_q(X'_q-X'_d)}{(R^2+X'_dX'_q)^2}\right)|V|
\end{aligned}
$$

A constante β deve ser escolhida positiva e satisfazendo a restrição (5.19) para que a matriz A seja definida positiva.

Exemplo 5.4 *Seja o sistema* 1-*Máquina* $\times$ *Barramento Infinito com* $P_m = 1.0$, $H = 6$, $T = 0.08$, $\tau'_{do} = 5$, $E_{fd} = 1.92$, $V = 1$, $r_a = 0.002$, $x'_d = 0.2$, $x'_q = 0.4$,

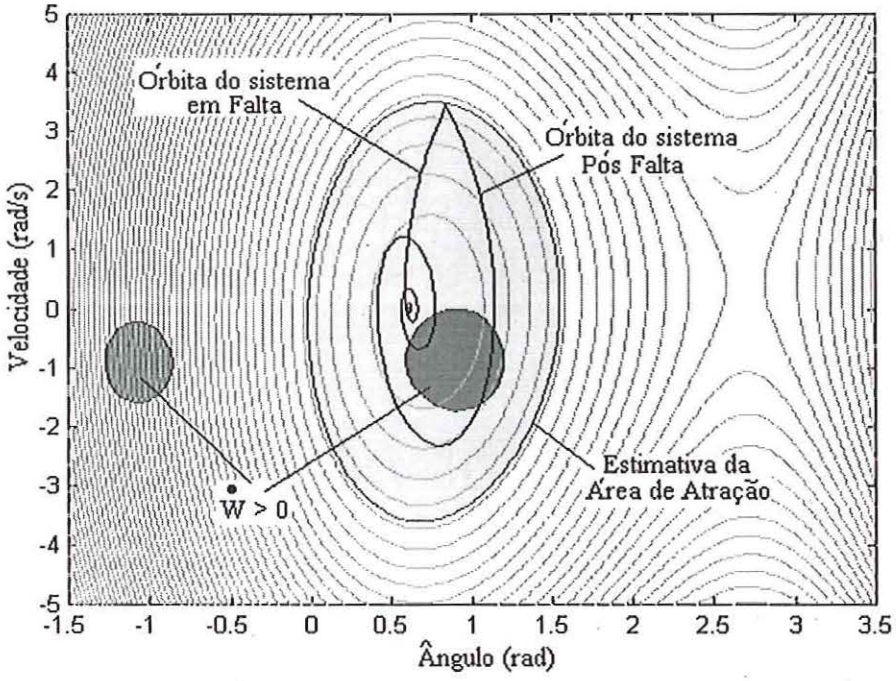

Figura 5.6: Curvas de nível de $\mathcal{W}$, E'_q constante e igual a 1.3.

$x_d = 0.9$, $x_q = 0.8$, $r_l = 0.04$ *e* $x_l = 0.5$. *As curvas de nível de* W *são apresentadas considerando* $\alpha = 3.3072$ *e* $\beta = 0.0117$. *Na Figura 5.6,* E'_q *é constante e igual a* 1.3. *Na Figura 5.7,* ω *é constante e igual a* -0.8. *As regiões onde a derivada de* $\mathcal{W}$ *é positiva são pequenos conjuntos limitados, apresentados nas Figuras 5.6 e 5.7. Para estimar a região de estabilidade ou área de atração deste atrator, procura-se pelo maior número* L *tal que as condições do Teorema 3.11 sejam satisfeitas. Neste exemplo obteve-se* $L = 0.3996$. *As regiões hachuradas nas Figuras 5.6 e 5.7 mostram a interseção da estimativa da área de atração com o plano de corte.*

O TCA obtido por simulação para um curto sólido trifásico na barra do gerador pertence ao intervalo $(0.333, 0.334s)$. *Utilizando esta função energia, obtém-se a seguinte estimativa* $(0.143, 0.144s)$. *Como esperado, esta estimativa é bastante conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. As Figuras 5.6 e 5.7 mostram as trajetórias do sistema em falta e pós falta para um tempo de abertura de* $0.143s$.

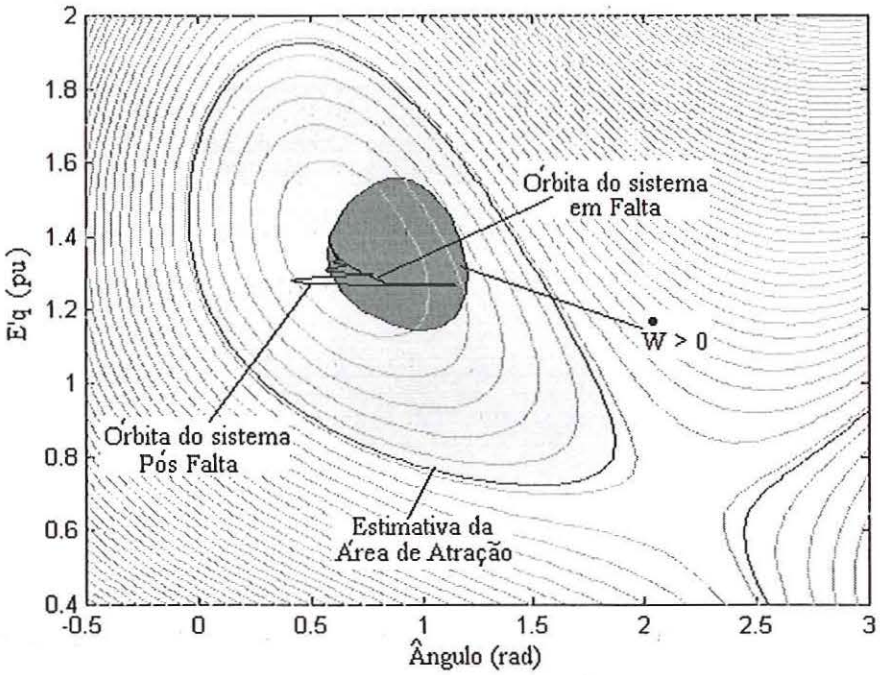

Figura 5.7: Curvas de nível de $\mathcal{W}$, ω constante e igual a -0.8.

5.2 Funções de Lyapunov Estendidas para Sistemas Multimáquinas

As FLE's tem sido utilizadas na análise de estabilidade de sistemas de potência desde o início da década. Em 2000, Bretas e Alberto propuseram pela primeira vez a utilização da FLE, para a obtenção de estimativas do TCA, considerando o efeito das condutâncias de transferência em sistemas multimáquinas. Silva, Alberto, LondonJr. e Bretas (2004) mostraram que uma FLE, para sistemas de potência com condutâncias de transferência, pode ser obtida a partir de uma perturbação suave na função do tipo energia aproximada proposta por Athay et al. (1979). Este trabalho tem como objetivo apresentar as FLE's para análise de estabilidade transitória em sistemas multimáquinas.

As estimativas do TCA, utilizando as Funções de Lyapunov Estendidas, são obtidas através de um algoritmo similar ao método PEBS (Athay et al., 1979). Este novo algoritmo será apresentado na próxima seção.

5.2.1 Método PEBS Estendido

Para a obtenção de estimativas do TCA com o auxílio do Teorema 3.11, é proposto um algoritmo similar ao do método PEBS (Athay et al., 1979), denominado neste caso de PEBS Estendido. Este novo algoritmo tem como objetivo fornecer uma estimativa local da região de estabilidade do ponto de equilíbrio de interesse.

Para a estimativa da área de atração utilizando a Extensão do Princípio de Invariância (Teorema 3.11) deve-se determinar o conjunto fechado Ω_L e assegurar que:

i) $\bar{\Omega}_l$, conjunto que contém o ponto de equilíbrio estável pós falta, está contido em Ω_L, ou seja $L > l$.

ii) a intersecção do conjunto Ω_L com conjuntos em que a derivada da Função de Lyapunov Estendida é positiva, deve ser vazio (excluindo o conjunto C).

Em sistemas de potência multimáquinas, encontrar o conjunto fechado Ω_L é uma tarefa complicada. Para garantir que este conjunto seja fechado, deve-se calcular todos os pontos de equilíbrio instáveis ao redor do ponto de equilíbrio estável de interesse, o que é computacionalmente inviável (Pai, 1981; Ribbens-Pavella e Murthy, 1994). Portanto, com objetivo de contornar este problema, faz-se uma estimativa local da área de atração para análise de estabilidade de primeira oscilação das máquinas síncronas. Esta estimativa local leva em consideração a trajetória do sistema em falta.

Antes de apresentar o algoritmo, considere a Função de Lyapunov Estendida $\mathcal{W}$ como somatório das funções energia cinética e energia potencial, ou seja, ($\mathcal{W} = \mathcal{W}_c + \mathcal{W}_p$). O algoritmo proposto, PEBS Estendido, é apresentado na próxima página.

Algoritmo PEBS Estendido

- Partindo do ponto de equilíbrio estável pré falta δ_o simule o sistema em falta. A energia crítica $\mathcal{W}_{cr}$ é definida de acordo com o que ocorrer primeiro:

  (i) A trajetória do sistema não entra em nenhuma região de derivada positiva ($\dot{\mathcal{W}} > 0$) e a função $\mathcal{W}_p$ atinge o seu valor máximo, então $\mathcal{W}_{cr} = \max(\mathcal{W}_p)$.

  (ii) A trajetória do sistema entra e sai da região de derivada positiva ($\dot{\mathcal{W}} > 0$) e logo após a função $\mathcal{W}_p$ atinge o seu valor máximo, então $\mathcal{W}_{cr} = \max(\mathcal{W}_p)$.

  (iii) No instante de tempo (t_c) a trajetória do sistema entra em uma região de derivada positiva ($\dot{\mathcal{W}} > 0$) e não sai antes que a função $\mathcal{W}_p$ atinja o seu valor máximo, então $\mathcal{W}_{cr} = \mathcal{W}_p(t_c)$.

Durante a trajetória do sistema em falta, o ponto em que ocorre $\mathcal{W}_{cr}$ é denominado 'exit point'. As Figuras 5.8 e 5.9 ilustram respectivamente os casos (ii) e (iii) do método PEBS Estendido. Este algoritmo tem como objetivo garantir que a intersecção entre a fronteira da área de atração com regiões de derivada positiva é vazio (Silva et al., 2003a; Silva, Alberto e Bretas, 2004; Silva, Alberto, LondonJr. e Bretas, 2004). Nas próximas seções, este novo algoritmo será utilizado para a obtenção de estimativas do TCA.

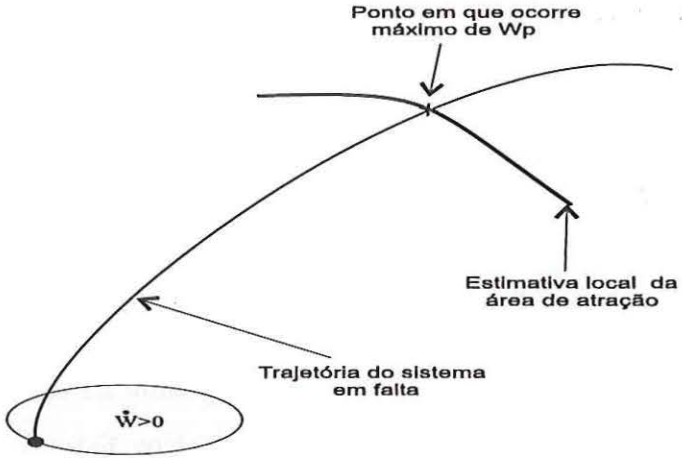

Figura 5.8: Ilustração do caso (ii) do método PEBS Estendido

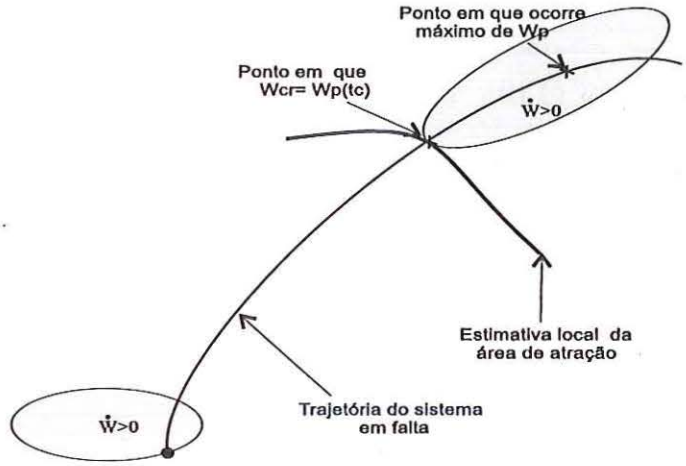

Figura 5.9: Ilustração do caso (iii) do método PEBS Estendido

5.2.2 Perturbação Suave na Função Energia Aproximada

Nesta seção mostra-se que uma função de Lyapunov Estendida pode ser obtida através de uma perturbação suave na função energia proposta por Athay et al. (1979). Essa perturbação suave em $\mathcal{V}^{apr}$ tem como objetivo tornar limitadas as regiões onde $\dot{\mathcal{V}^{apr}} \geq 0$. Para isto, considere a seguinte função

$$\mathcal{W}(\delta, \omega) = \mathcal{V}^{apr}(\delta, \omega) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \omega_i Pl_i \tag{5.20}$$

onde $\mathcal{V}^{apr}$ é dado por (4.20). O parâmetro $\beta_i > 0$ deve ser ajustado de tal forma que a função $\mathcal{W}$ satisfaça os requisitos da *Extensão do Princípio de Invariância.*

Observe que

$$\lim_{\beta \to 0} \mathcal{W}(\delta, \omega) = \mathcal{V}^{apr}(\delta, \omega),$$

e que nos pontos de equilíbrio (δ, ω),

$$\mathcal{W}(\delta, \omega) = \mathcal{V}^{apr}(\delta, \omega).$$

Esta função $\mathcal{W}$ é uma melhoria na *Função de Lyapunov Estendida* apresentada em (Bretas e Alberto, 2000a). A Função de Lyapunov Estendida $\mathcal{W}$ pode ser dividida nas funções $\mathcal{V}_c(\omega)$, dada por (4.15), e

$$\mathcal{W}_p(\delta, \omega) = \mathcal{V}_p^{apr}(\delta) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \omega_i Pl_i,$$

onde $\mathcal{V}_p^{apr}(\delta)$ é dado por (4.19), tal que

$$\mathcal{W}(\delta, \omega) = \mathcal{V}_c(\omega) + \mathcal{W}_p(\delta, \omega).$$

O principal objetivo é mostrar que a função (5.20) satisfaz os requisitos da *Extensão do Princípio de Invariância.* Calculando a derivada desta função ao longo da trajetória do sistema, obtém-se

$$-\dot{W} = \left[\frac{\underline{\omega}}{\underline{P_l}(\delta)} \right]^T X \left[\frac{\underline{\omega}}{\underline{P_l}(\delta)} \right] + \psi \tag{5.21}$$

onde

$$X = \left[\begin{array}{c|c} Q & S \\ \hline S & R \end{array} \right], \tag{5.22}$$

$\underline{\omega} = [\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]^T$, $\underline{P_l}(\delta) = [P_{l1}(\delta), \ldots, P_{ln-1}(\delta)]^T$ e a função φ dada por (4.22). Q é uma submatriz simétrica, $(n-1) \times (n-1)$ cujo os elementos são

$$\mathrm{Q}_{ii} = T_i - \beta_i \left(f_i + \sum_{j=1, \neq i}^{n-1} f_{ij} \right)$$
$$\mathrm{Q}_{ij} = \frac{\beta_i}{2} f_{ij} + \frac{\beta_j}{2} f_{ji}, \ \forall\, i > j$$

onde

$$f_i = C_{in}\cos(\delta_i) - D_{in}\sin(\delta_i) \tag{5.23}$$

$$f_{ij} = C_{ij}\cos(\delta_i - \delta_j) + D_{ij}\sin(\delta_i - \delta_j) \tag{5.24}$$

Os elementos das submatrizes diagonais R e S são dados por

$$\mathrm{R}_{ii} = -\frac{T_i}{2M_i}\beta_i$$
$$\mathrm{S}_{ii} = \frac{1}{M_i}\beta_i$$

Os parâmetros β_i, $i = 1, ..., n-1$ devem ser escolhidos com a finalidade de tornar o termo quadrático definido positivo, isto é $X > 0$. A desigualdade $X > 0$ pode ser interpretada como uma LMI (do inglês - 'Linear Matrix Inequalities'), onde os β_i's são as variáveis e as expressões (5.23) e (5.24) são consideradas incertezas. Estas incertezas são limitadas e podem variar de um valor mínimo até ao valor máximo. Este problema pode ser resolvido utilizando o seguinte algoritmo:

1. Determine o valor mínimo e o valor máximo das expressões (5.23) e (5.24).

2. Determine todas as matrizes possíveis X_j, $j = 1, ..., N$, obtidas pelas combinções desses valores mínimos e máximos nos elementos da submatriz Q.

3. Construa o conjunto politópico Ψ, no espaço de estados das matrizes $2(n-1) \times 2(n-1)$, formado pela combinação convexa das matrizes X_j. Este politopo será formado por N vértices. Note que $X \in \Psi$ para todo $t > 0$.

4. Resolva $\Psi = Co\{X_1, X_2, ..., X_N\} > 0$ por uma técnica de LMI (Boyd et al., 1994)

Em sistemas de potência compostos por n máquinas existirão $\frac{n(n-1)}{2}$ incertezas e o politopo será formado por $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ vértices. Note que o número de vértices crescerá exponencialmente à medida que aumentarem o número de máquinas do sistema.

Com o objetivo de aplicar a Função de Lyapunov Estendida em sistemas de grande porte, será utilizado um único parâmetro β para todas as máquinas do sistema, isto é $\beta = \beta_1 = \ldots = \beta_{n-1}$. Desta forma, calculando a derivada de $\mathcal{W}$ ao longo das órbitas do sistema, tem-se

$$-\dot{W} = \begin{bmatrix} P_{l1}(\delta) \\ \omega_1 \\ \vdots \\ P_{ln-1}(\delta) \\ \omega_{n-1} \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} P_{l1}(\delta) \\ \omega_1 \\ \vdots \\ P_{ln-1}(\delta) \\ \omega_{n-1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{bmatrix}^T B_{ij} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \end{bmatrix} + \varphi \tag{5.25}$$

onde φ é dado por (4.22) e A é uma matriz bloco diagonal. Cada bloco de A é dado por

$$A_{ii} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\beta}{M_i} & -\frac{\beta T_i}{2M_i} \\ \hline -\frac{\beta T_i}{2M_i} & \begin{array}{l} \frac{T_i}{n-1} + \beta(-C_{in}cos(\delta_i - \delta_n) + D_{in}sin(\delta_i - \delta_n) - \\ \sum_{j\neq i}^{n-1} C_{ij}cos(\delta_i - \delta_j) + \sum_{j\neq i}^{n-1} D_{ij}sin(\delta_i - \delta_j)) \end{array} \end{array} \right]$$

e

$$B_{ij} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{T_i}{n-1} & \beta C_{ij}cos(\delta_i - \delta_j) \\ \hline \beta C_{ij}cos(\delta_i - \delta_j) & \frac{T_j}{n-1} \end{array} \right]$$

O parâmetro β deve ser escolhido de tal forma que os termos quadráticos sejam definidos positivo. Aplicando o critério de Sylvester, isto será garantido se

$$\beta^2 < \frac{T_i T_j}{(n-1)^2 C_{ij}^2}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n-1$$

e

$$0 < \beta < \frac{T_i}{(n-1)\left(\frac{T_i^2}{4M} + \sum_{j\neq i}^{n} C_{ij} + \sum_{j\neq i}^{n} D_{ij}\right)}, \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

A escolha do parâmetro β influencia diretamente nas regiões onde $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$, tornando-as limitadas. Além disto,

$$\lim_{\beta \to 0} \dot{\mathcal{W}}(\delta, \omega) = \dot{\mathcal{V}}(\delta, \omega).$$

O Exemplo 5.5 ilustra a aplicação do Teorema 3.11 como suporte matemático para a utilização da função de Lyapunov Estendida para análise de estabilidade de sistemas de potência.

Exemplo 5.5 *Considere novamente o sistema e a contigência, apresentado na Seção 4.7. Neste exemplo serão utilizados diferentes parâmetros de perturbação e são consideradas 3 incertezas na formulação da LMI. Desta forma, o politopo* Ψ *é composto por 8 vértices. Utilizando um solver de LMI encontra-se* $\beta_1 = 6.3654 \cdot 10^{-3}$ *e* $\beta_2 = 4.4532 \cdot 10^{-3}$. *Nos diagramas de fase apresentados nas Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 podem ser observadas as regiões de derivada positiva. Esses diagramas foram traçados considerando diferentes intersecções de* $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ *com os planos* ω_1 *e* ω_2. *Na Figura 5.10 pode-se observar o diagrama de fase considerando a intersecção com o plano* $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$. *Observe que a região onde e* $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ *é composta por dois pequenos conjuntos limitados e estão localizados nas proximidades dos pontos de equilíbrio instáveis. A Figura 5.11 e a Figura 5.12 apresentam respectivamente a interseção de* $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ *com os planos* ($\omega_1 = -0.2rad/s$ *e* $\omega_2 = 0.2rad/s$) *e* ($\omega_1 = 0.2rad/s$ *e* $\omega_2 = -0.2rad/s$). *Observe que as regiões onde* $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ *são formadas por pequenos conjuntos limitados, localizados próximos aos pontos de equilíbrio instáveis.*

Com o objetivo de estimar a área de atração, deve-se escolher o maior número L *tal que as condições do Teorema 3.11 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que* $\bar{\Omega}_L$ *seja limitado e que não intercepte nenhuma região de derivada positiva. Neste Exemplo* $L = 7.0256$ *é encontrado numericamente. A estimativa do TCA foi obtida utilizando o algoritimo PEBS Estendido, apresentado na Seção 5.2.1. O TCA obtido através da função* $\mathcal{W}$ *é igual a* $0.197s$. *Esta estimativa está bem próxima da estimativa obtida com a função* $\mathcal{V}^{apr}$, *na Seção 4.7. A vantagem da estimativa obtida por* $\mathcal{W}$ *é sem dúvida a sua fundamentação matemática.*

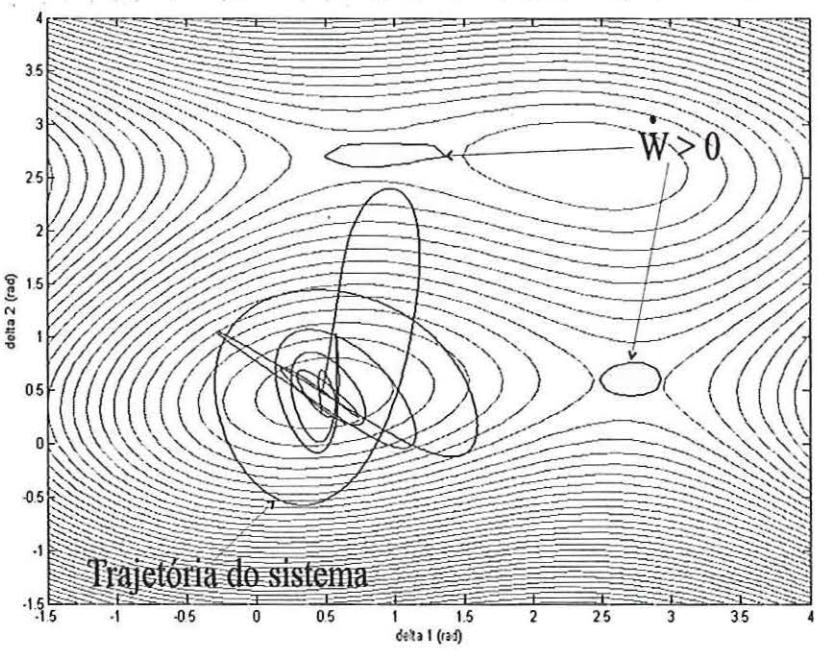

Figura 5.10: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = \omega_2 = 0.2rad/s$.

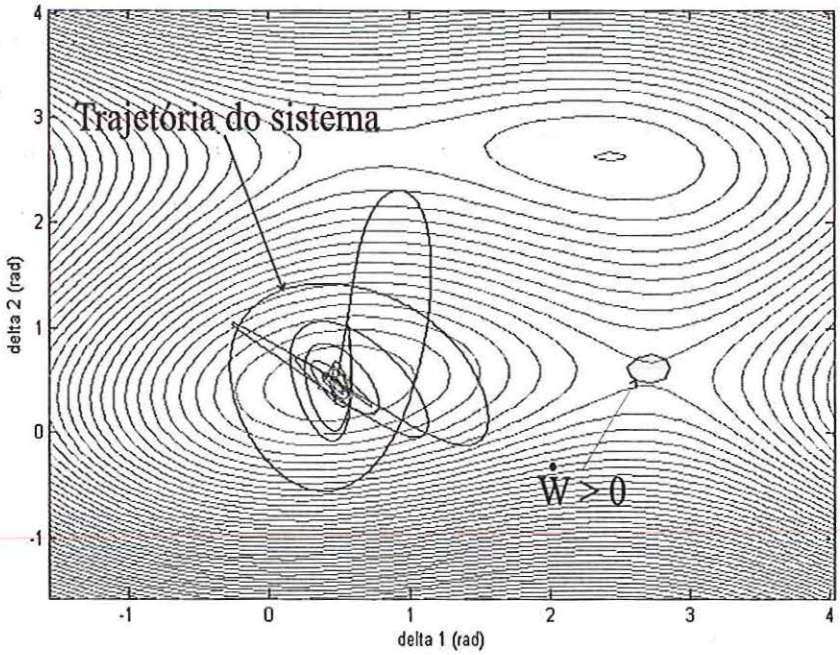

Figura 5.11: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$.

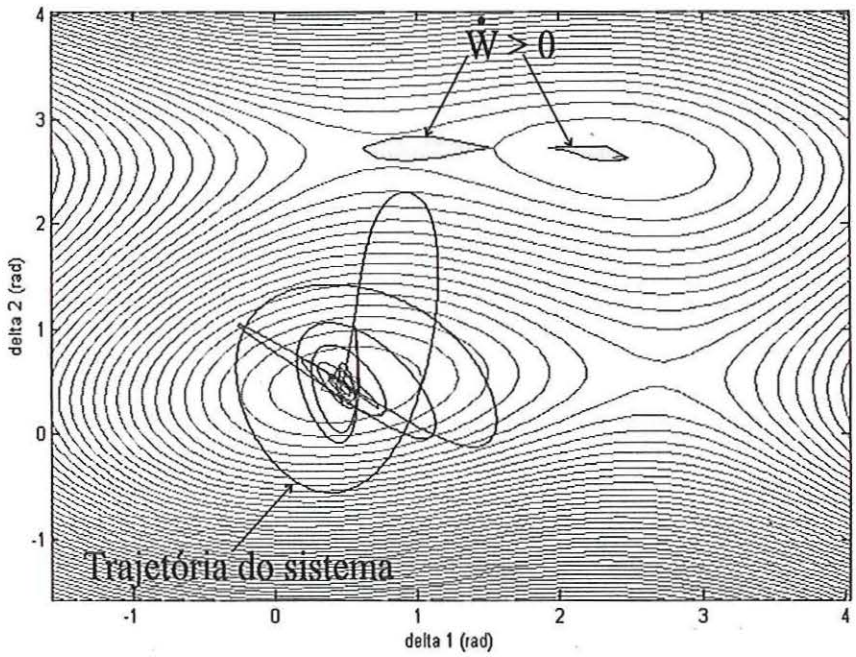

Figura 5.12: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$.

A Tabela 5.1 apresenta as estimativas dos parâmetros de perturbação, considerando parâmetros iguais e diferentes, para diferentes contigências no sistema 2-máquinas × barramento infinito. A Tabela 5.2 apresenta os TCA obtidos com a função energia aproximada $\mathcal{V}^{apr}$ e pela Função de Lyapunov Estendida proposta.

Tabela 5.1: Estimativa dos Parâmetros de Perturbação para o sistema teste 2-máquinas × barramento infinito

barra	Linha retirada	Parâmetros iguais β	Parâmetros diferentes β_1	β_2
1	-	2.7419E-03	6.3653E-03	4.4531E-03
1	1 - 2	3.0253E-03	6.7560E-03	4.2674E-03
2	1 - 2	3.0253E-03	6.7560E-03	4.2674E-03

Tabela 5.2: Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste 2-máquinas × barramento infinito

Falta na Barra	Linha Retirada	Integração Numérica	Função $\mathcal{V}^{apr}$	Função $\mathcal{W}$	
				β's iguais	β's diferentes
1	-	(0.213,0.214)	0.203	0.202	0.201
1	1 - 2	(0.178,0.179)	0.168	0.167	0.167
2	1 - 2	(0.194,0.195)	0.190	0.189	0.188

Considerações Práticas

Na Seção 4.7 foi mostrado que a função tipo energia aproximada $\mathcal{V}^{apr}$ não é uma função de Lyapunov no senso usual e nem uma função de Lyapunov Estendida. Também foi apresentado na Seção 5.2.2 que uma perturbação suave em $\mathcal{V}^{apr}$ resulta em função $\mathcal{W}$ que é uma função de Lyapunov Estendida.

Na Tabela 5.2, pode ser observado que os TCA's obtidos com as funções $\mathcal{V}^{apr}$ e $\mathcal{W}$ estão bem próximos. Este fato se deve ao parâmetro β que foi capaz de alterar as regiões de derivada positiva, tornando-as limitada, sem que as curvas de nível da função original $\mathcal{V}^{apr}$ fossem alteradas. Esta observação explica o bom TCA obtido com a função $\mathcal{V}^{apr}$.

Com o objetivo de tornar mais clara esta explicação, admita que o método PEBS esteja sendo utilizado para obtenção da estimativa do TCA e que $x_f(t)$ seja a trajetória do sistema em falta. Considere que o 'exit point' $x^* = x_f(t_{ex})$ seja o primeiro máximo de energia potencial ao longo da trajetória do sistema em falta e que isto ocorra no instante de tempo t_{ex}. Então , no instante t_{ex} tem-se: $\frac{d\mathcal{V}_p^{apr}}{dt}(x_f(t_{ex})) = 0$ e $\frac{d^2\mathcal{V}_p^{apr}}{dt^2}(x_f(t_{ex})) < 0$. Também sabe-se que $\mathcal{W}_p = \mathcal{V}_p^{apr} + \beta g$ e $\frac{d\mathcal{W}_p}{dt} = \frac{d\mathcal{V}_p^{apr}}{dt} + \beta\frac{dg}{dt}$. Defina $G(t,\beta) := \frac{d\mathcal{W}_p}{dt}(t,\beta)$ e considere que o PEBS seja utilizado para a obtenção do novo x^{*new}, utilizando a função $\mathcal{W}$. No novo 'exit point' tem-se: $G(t_{ex}^{new},\beta) = 0$. Fica claro que $G(t_{ex},0) = 0$ e $\frac{\partial G}{\partial t}|_{(t_{ex},0)} < 0$. Portanto, utilizando o Teorema da função Implícita, tem-se:

$$t_{ex}^{new} = t_{ex} + \mathcal{O}(\beta) \tag{5.26}$$

Isto significa que o primeiro máximo de energia potencial $\mathcal{W}_p$ é encontrado no instante de tempo t_{ex}^{new}, que está próximo de t_{ex}. Da continuidade de $x_f(t)$, tem-se:

$$x^{*new} = x^* + \mathcal{O}(\beta) \tag{5.27}$$

Em outras palavras, o novo 'exit point' obtido com a função $\mathcal{W}$ se encontra na vizinhança do 'exit point' obtido com a função $\mathcal{V}^{apr}$.

A energia crítica associada a função $\mathcal{V}^{apr}$ é definida como $\mathcal{V}_{cr} := \mathcal{V}_p^{apr}(x^*)$, da mesma forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{cr} &:= \mathcal{W}_p(x^{*new}) \\ \mathcal{W}_{cr} &:= \mathcal{W}_p(x^* + \mathcal{O}(\beta)) = \mathcal{V}_{cr} + \mathcal{O}(\beta) \end{aligned}$$

Isto significa que a energia crítica obtida por $\mathcal{W}$ está contida na vizinhança da energia crítica obtida por $\mathcal{V}^{apr}$.

Além disso, é possível provar que o TCA obtido pela função $\mathcal{W}$ está contido na vizinhança do TCA obtido pela função $\mathcal{V}^{apr}$. Para isto, suponha que t_c seja o TCA estimado com a função $\mathcal{V}^{apr}$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{apr}(x_f(t_c)) &= \mathcal{V}_{cr} \\ \mathcal{W}(x_f(t_c), 0) = \mathcal{V}^{apr}(x_f(t_c)) &= \mathcal{V}_{cr} \end{aligned}$$

Suponha agora que o TCA seja obtido pela função $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x_f(t_c^{new}), \beta) = \mathcal{W}_{cr} &= \mathcal{V}_{cr} + \mathcal{O}(\beta) \\ \mathcal{W}(x_f(t_c^{new}), \beta) - \mathcal{V}_{cr} + \mathcal{O}(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Teorema da Função Implícita, tem-se

$$t_c^{new} = t_c + \mathcal{O}(\beta) \tag{5.28}$$

Os resultados apresentados anteriormente justificam o bom TCA obtido pela função $\mathcal{V}^{apr}$. Embora $\mathcal{V}^{apr}$ não seja uma Função de Lyapunov e nem uma função de Lyapunov Estendida, o TCA obtido com $\mathcal{V}^{apr}$ está contido na vizinhança do TCA obtido com a função $\mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ é uma função de Lyapunov Estendida, o

TCA obtido está matematicamente fundamentado e isto justifica a boa estimativa do TCA obtido por $\mathcal{V}^{apr}$.

Nos resultados apresentados anteriormente, foi implicitamente assumido que a trajetória do sistema em falta não intercepta regiões onde a derivada é positiva. Contudo, a possibilidade de interceptar tal região é real. Estas regiões, de derivada positiva, são pequenos conjuntos limitados que estão localizados nas proximidades do ponto de equilíbrio instável. A equação (5.25) mostra que $\dot{\mathcal{W}}$ possui um termo quadrático em ω_i e P_{li}. Nos pontos de equilíbrio estes termos crescem quadraticamente e tornam-se maiores que os termos não quadráticos. Portanto, as regiões de derivada positivas estão localizadas na vizinhança dos pontos de equilíbrio. Se a trajetória do sistema em falta interceptar uma região de derivada positiva antes do primeiro máximo de energia potencial, a estimativa do TCA obtido pela função $\mathcal{W}$ será um pouco menor se comparado com o TCA obtido com o auxílio de $\mathcal{V}^{apr}$. O tamanho das regiões de derivada positiva é proporcional aos valores das condutâncias de transferência do sistema. Portanto, os TCA obtidos com o auxílio das funções $\mathcal{V}^{apr}$ e $\mathcal{W}$ estarão cada vez mais próximos quanto menor forem os valores das condutâncias de transferência.

5.2.3 FLE que inclui o efeito de amortecimento e perdas

Uma outra FLE a ser proposta neste trabalho é obtida através de uma função candidata na forma geral. A estabilidade assintótica da origem pode ser estudada considerando a seguinte função candidata

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^T \begin{bmatrix} \lambda_{1i} & \lambda_{2i} \\ \lambda_{2i} & \lambda_{3i} \end{bmatrix} x_i + \int_0^{\delta} P_l(s)ds \,. \tag{5.29}$$

Entretanto, para provar estabilidade assintótica, deve-se fazer suposições sobre $P_l(\delta) = [P_{l1}(\delta), P_{l2}(\delta), \ldots, P_{ln-1}(\delta)]^T$ e escolher um valor apropriado para as constantes λ_{1i}, λ_{2i} e λ_{3i}. Estas constantes devem ser escolhidas afim de que $\mathcal{F}$ e $\dot{\mathcal{F}}$ se adequem às exigências do Teorema 3.10 e (ou) do Teorema 3.11. A seguir serão apresentadas as FLE's obtidas utilizando a função candidata. O sistema multimáquinas, modelado por (3.2), apresenta uma função energia geral dada por

(5.29).

Entretanto durante o cálculo do termo $\int_{\delta}^{\delta^s} P_l(s)ds$, surge o problema de considerar ou não o efeito das condutâncias de transferência (D_{ij}'s). As condutâncias de transferência são as responsáveis por gerar uma integral dependente do caminho no processo de integração, conforme apresentado na Seção 4.2.

A função energia proposta por Athay et al. (1979) pode ser obtida a partir da função energia geral, para isto basta escolher $\lambda_{1i} = M_i$ e $\lambda_{2i} = \lambda_{3i} = 0$ e substituir (4.19) em (5.29). Desta forma, tem-se a seguinte função energia aproximada

$$\mathcal{V}^{apr} = \mathcal{V}_c(\omega) + \mathcal{V}_p^{apr}(\delta) \tag{5.30}$$

onde $V_c(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} M_i \omega_i^2$ é a energia cinética. A derivada de $\mathcal{V}^{apr}$ ao longo das trajetórias do sistema é dada por

$$\dot{\mathcal{V}}^{apr} = -\sum_{i=1}^{n-1} T_i \omega_i^2 - \psi \tag{5.31}$$

onde

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)(\omega_i + \omega_j) + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1;\neq i}^{n-1} \omega_i D_{ij} \left[\frac{\delta_i + \delta_j - \delta_i^s - \delta_j^s}{\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s} \cos(\delta_i - \delta_j) \right. \\ & \left. + \frac{2(\delta_j - \delta_j^s)}{(\delta_i - \delta_j - \delta_i^s + \delta_j^s)^2} \left(\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^s - \delta_j^s) \right) \right] \end{aligned} \tag{5.32}$$

que é equivalente a função energia apresentada na Seção 4.2. A função energia dada por (5.30) não é uma FL porque $\dot{\mathcal{V}}^{apr}$ não é semi definido negativo e nem uma FLE porque o conjunto C, do Teorema 3.11, não é limitado (Silva et al., 2003b). Portanto, não há teoria matemática que justifique a utilização da função $\mathcal{V}^{apr}$ para estudos de estabilidade em sistemas de potência.

Diante desta dificuldade será proposta uma FLE que seja capaz de incluir o efeito das condutâncias de transferência na modelagem do sistema. Utilizando o mesmo procedimento da seção anterior, faz-se $\lambda_{1i} = M_i$ e $\lambda_{2i} = M_i T_i$ e $\lambda_{3i} = M_i T_i^2$. Desta forma, tem-se

$$\mathcal{W}(\delta, \omega) = \mathcal{V}^{apr} + g(\delta, \omega) \tag{5.33}$$

onde

$$g(\delta,\omega)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(M_iT_i\omega_i(\delta_i-\delta_i^s)+\frac{M_iT_i^2}{2}(\delta_i-\delta_i^s)^2\right) \tag{5.34}$$

A função $\mathcal{W}$ pode ser decomposta nas funções $\mathcal{V}_c$ e $\mathcal{W}_p$, ou seja $\mathcal{W}=\mathcal{V}_c+\mathcal{W}_p$, onde $\mathcal{W}_p=\mathcal{V}_p^{apr}+g(\delta,\omega)$. A derivada desta FLE é dada por

$$\dot{\mathcal{W}}=\sum_{i=1}^{n-1}\left((M_i-1)T_i\omega_i^2+(M_i-1)(\delta_i-\delta_i^s)T_i^2\omega_i+T_iPl_i(\delta_i-\delta_i^s)\right)+\psi \tag{5.35}$$

onde ψ é dado por (5.32). A seguir será apresentado um exemplo que ilustra a aplicação da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle em sistemas multimáquinas.

Exemplo 5.6 *Considere o sistema 2-máquinas × barramento infinito apresentado na Figura 4.8. O gerador 3 é o barramento infinito e os coeficientes de amortecimento são dados por $T_1=0.05$ e $T_2=0.03$. Suponha que ocorra um curto circuito trifásico sólido na barra 2 e que a configuração do sistema pós-falta e pré-falta sejam iguais. Utilizando o método de integração numérica foi obtido para esta falta um TCA pertencente ao intervalo $(0.199, 0.200)s$. Nos diagramas de fase apresentados nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15 podem ser observadas as regiões de derivada positiva. Esses diagramas foram traçados considerando diferentes intersecções de $\dot{\mathcal{W}}\geq 0$ com os planos ω_1 e ω_2. Na Figura 5.13 pode-se observar o diagrama de fase considerando a intersecção com o plano $\omega_1=\omega_2=0.2rad/s$. Note que a região onde a derivada de $\mathcal{W}$ é positiva é composta por um conjunto ilimitado localizado na vizinhança do PEBS. A Figura 5.14 e a Figura 5.15 apresentam respectivamente a interseção de $\dot{\mathcal{W}}\geq 0$ com os planos ($\omega_1=-0.2rad/s$ e $\omega_2=0.2rad/s$) e ($\omega_1=0.2rad/s$ e $\omega_2=-0.2rad/s$). Observe que as regiões onde $\dot{\mathcal{W}}\geq 0$ são formadas por conjuntos ilimitados, localizados na vizinhança do PEBS.*

Com o objetivo de estimar a área de atração, deve-se escolher o maior número L tal que as condições do Teorema 3.11 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que $\bar{\Omega}_L$ seja limitado e que não intercepte nenhuma região de derivada

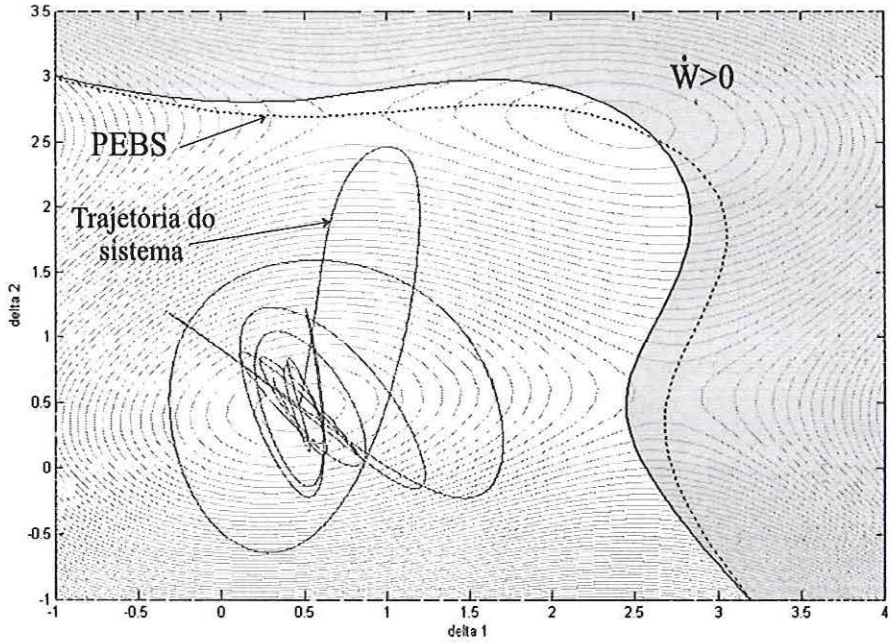

Figura 5.13: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$.

positiva. Neste Exemplo $L = 7.0632$ *é encontrado numericamente. A estimativa do TCA foi obtida utilizando o algoritimo do PEBS Estendido, apresentado na Seção 5.2.1. O TCA obtido através da função* $\mathcal{W}$ *é igual a* $0.197s$. *A trajetória do sistema para este TCA está ilustrada na Figura 5.13. Esta estimativa é bem próxima da estimativa obtida com a função* $\mathcal{V}^{apr}$ *que é igual a* $0.196s$. *O TCA obtido por* $\mathcal{V}^{apr}$ *se comparado com o TCA obtido pelo método de integração numérica pode ser considerado como uma boa estimativa, porém sem fundamento matemático. A vantagem da estimativa obtida por* $\mathcal{W}$ *é sem dúvida a sua fundamentação matemática. A Tabela 5.3 apresenta os TCA obtidos com a função energia aproximada e pela FLE proposta.*

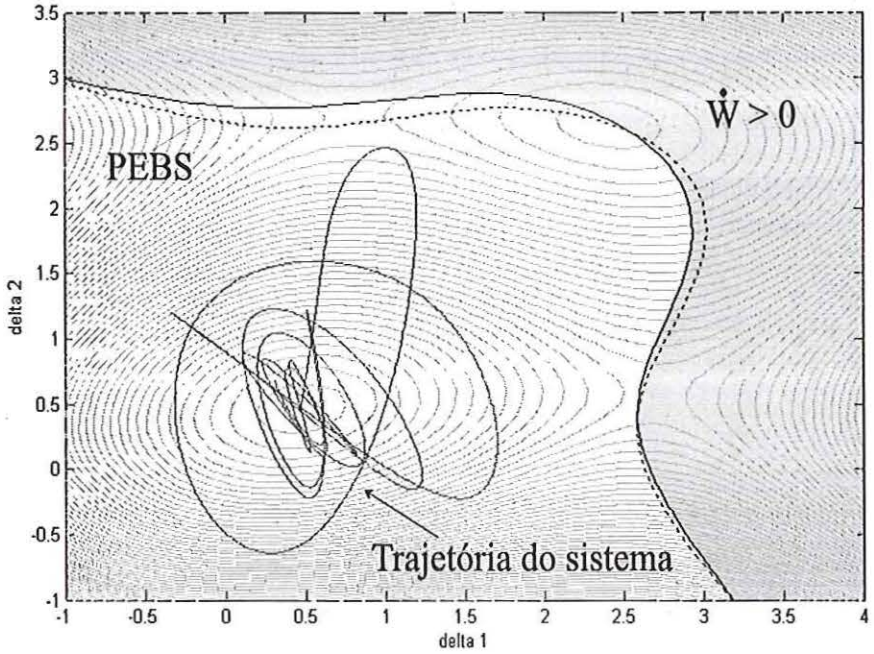

Figura 5.14: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = -0.2rad/s$ e $\omega_2 = 0.2rad/s$.

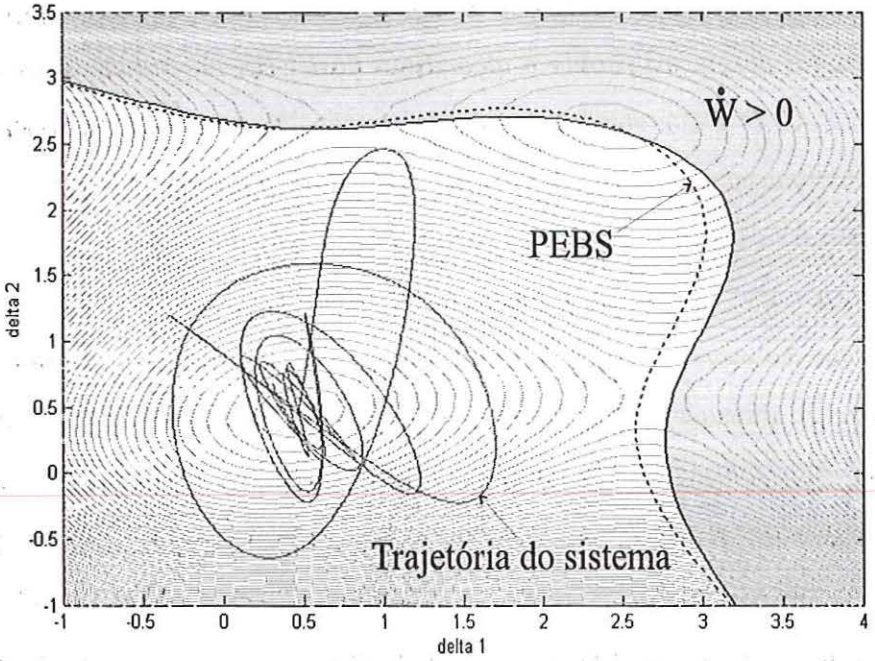

Figura 5.15: Intersecção de $\dot{\mathcal{W}} \geq 0$ com o plano $\omega_1 = 0.2rad/s$ e $\omega_2 = -0.2rad/s$.

Tabela 5.3: Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste

Falta na Barra	Linha Retirada	Integração Numérica	Função V^{apr}	Função $\mathcal{W}$
1	-	(0.213,0.214)	0.203	0.205
1	1 - 2	(0.178,0.179)	0.168	0.170
2	1 - 2	(0.194,0.195)	0.187	0.188

5.3 Proposta para Estimativa da Energia Crítica em Sistemas Multimáquinas

A aplicação dos métodos diretos para estimativa da energia crítica e do tempo de abertura em sistemas de potência, pode fornecer estimativas inferiores ou até mesmo superiores quando comparadas com o nível de energia crítica real do sistema. Este fato pode ser comprovado nos exemplos apresentados anteriormente e em (Pai, 1981; Ribbens-Pavella e Evans, 1985; Fouad e Vittal, 1992).

Com o objetivo de melhorar essas estimativas, diversos pesquisadores têm associado o método direto de Lyapunov com simulações no domínio do tempo para a obtenção de estimativas mais próximas do nível de energia crítica real do sistema (Maria et al., 1990; Chung e Fang, 1995; Fang et al., 2000; Chiang et al., 2002).

Com o objetivo de melhorar a estimativa da energia crítica e do tempo de abertura é proposto um algoritmo que combina o método direto PEBS Estendido com simulações do sistema pós-falta no domínio do tempo. A idéia é utilizar o método de simulação no domínio do tempo para corrigir a estimativa da energia crítica, obtida com o método direto PEBS Estendido. O algoritmo proposto utiliza as idéias da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle para a obtenção de uma estimativa local da área de atração. Desta forma, exige-se que durante a simulação do sistema em falta, a derivada da Função de Lyapunov Estendida seja monitorada afim de que a intersecção entre a estimativa local da área de atração com a região de derivada positiva seja vazio. O algoritmo é apresentado a seguir:

Algoritmo iterativo para a determinação da energia crítica

1. Determinar o 'exit-point' e o valor estimado da energia crítica ($\mathcal{W}_{cr}$), utilizando o método PEBS Estendido (proposto na Seção 5.2.1) (Silva, Alberto, LondonJr. e Bretas, 2004).

2. Faça $k = 0$ e determine o ponto p_0, no qual a energia total do sistema em falta é igual a estimativa da energia crítica, ou seja: $\mathcal{W}(p_0) = \mathcal{W}_{cr}$.

3. Verifique se a trajetória do sistema pós falta, partindo do ponto p_0 pertence ou não a área de atração real do sistema.

   (A) <u>pertence</u> Faça $k = k + 1$ e $\mathcal{W}_k^{est} = \mathcal{W}_p\left(p_{k-1} + \alpha\right)$.

   - Se $\dot{\mathcal{W}}\left(p_{k-1} + \alpha\right) \leq 0$.
     .Verifique se a trajetória do sistema pós falta, partindo do ponto p_k pertence ou não a área de atração real do sistema.
     caso SIM: volte ao passo (A)
     caso NÃO: $\mathcal{W}_{cr}^{est} = \mathcal{W}_p(p_{k-1})$ e vá para o passo 4.
   - Se $\dot{\mathcal{W}}\left(p_{k-1} + \alpha\right) > 0$.
     $\mathcal{W}_{cr}^{est} = \mathcal{W}_p(p_{k-1})$ e vá para o passo 4.

   (B) <u>não pertence</u> Faça $k = k + 1$ e $\mathcal{W}_k^{est} = \mathcal{W}_p\left(p_{k-1} - \alpha\right)$.
   .Verifique se a trajetória do sistema pós falta, partindo do ponto p_k pertence ou não a área de atração real do sistema.
   caso SIM: $\mathcal{W}_{cr}^{est} = \mathcal{W}_p(p_k)$ e vá para o passo 4.
   caso NÃO: vá para o passo (B).

4. Simular o sistema em falta até que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{cr}^{est}$, o instante de tempo em que isto ocorrer é a estimativa do tempo crítico de abertura do sistema.

O algoritmo proposto considera a possível existência, no espaço de estados, de regiões de derivada positiva ao longo da trajetória do sistema em falta. Observe que no passo (A) a derivada da Função de Lyapunov Estendida é monitorada, afim de que a trajetória do sistema em falta não intercepte regiões de $\dot{\mathcal{W}} > 0$. Esta

monitoração faz com que essas regiões de derivada positiva fiquem fora da estimativa local da área de atração. No passo (A) do processo iterativo, há acréscimos na estimativa da energia crítica ($\mathcal{W}_p\,(p_{k-1}+\alpha)$) até que $\mathcal{W}_{cr}^{est}$ esteja bem próxima da energia crítica real do sistema. No passo (B) acontecem decréscimos na estimativa da energia crítica ($\mathcal{W}_p\,(p_{k-1}-\alpha)$) até que $\mathcal{W}_{cr}^{est}$ esteja nas proximidades da energia crítica real do sistema. O parâmetro α é a taxa de variação do nível de energia ao longo da trajetória do sistema em falta e pode ser obtido considerando algum método de integração numérica. Como exemplo podem ser citados o método de Euler, que neste caso $\alpha = d_p P_l(p_{k-1})$, ou o método Runge-Kutta que fornece $\alpha = \frac{d_p}{2}\left(P_l(p_{k-1}+d_p P_l(p_{k-1})) + P_l(p_{k-1})\right)$, onde d_p é o passo de integração numérica.

As Figuras 5.16 e 5.17 ilustram respectivamente os passos (A) e (B). Observe que o algoritmo percorre os níveis de energia na trajetória do sistema em falta até obter a estimativa para energia crítica que esteja na vizinhança da energia crítica real. Este algoritmo é eficiente, devido ao fato da estimativa da energia crítica fornecida pelo método PEBS Estendido estar nas proximidades da energia crítica real do sistema.

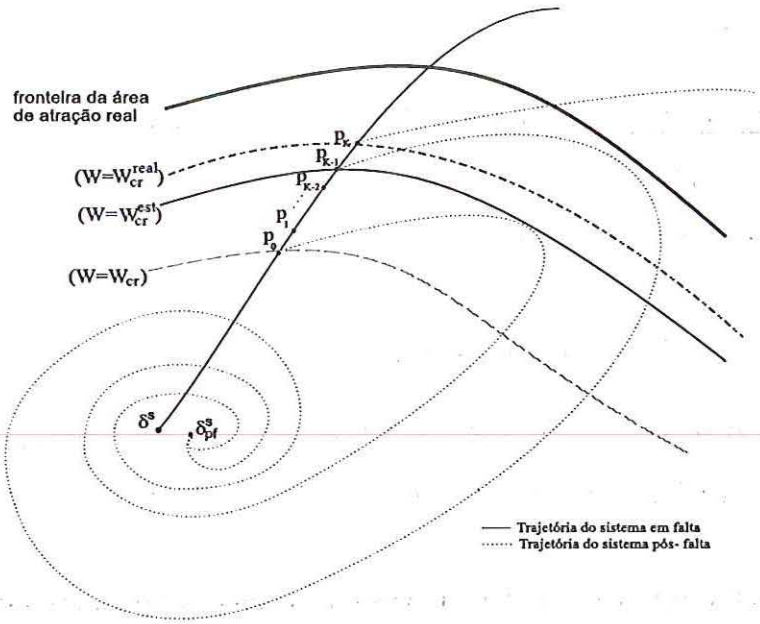

Figura 5.16: Ilustração do Passo (A) do algoritmo.

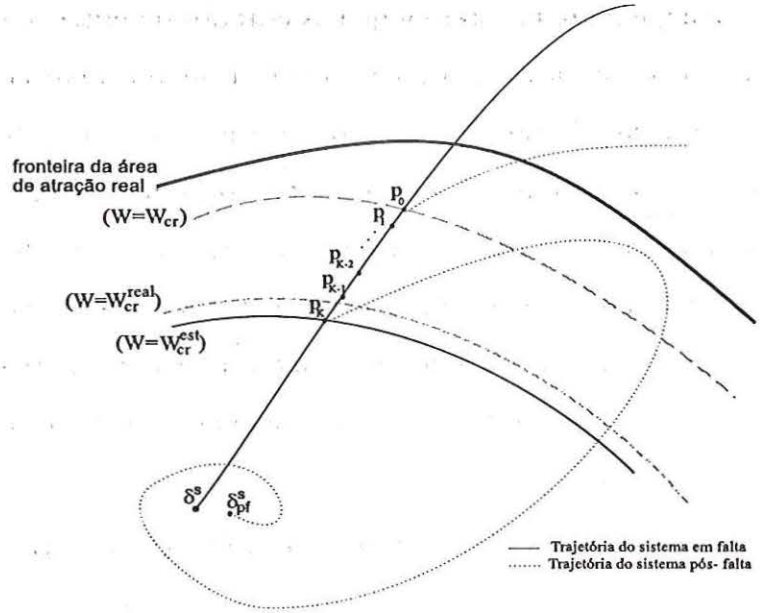

Figura 5.17: Ilustração do Passo (B) do algoritmo.

No algoritmo proposto há um fato que merece atenção: 'Como determinar se a trajetória do sistema pós-falta está contida ou não na verdadeira área de atração do ponto de equilíbrio estável pós-falta ?'.

Para isto, é necessário simular o sistema pós falta durante um pequeno intervalo de tempo (Δt) e utilizar um critério que seja capaz de avaliar se a trajetória é estável ou instável. Este assunto chamou a atenção de diversos pesquisadores e foram apresentados diferentes critérios capazes de avaliar a trajetória do sistema pós-falta (Maria et al., 1990; Dong e Pota, 1991; Chung e Fang, 1995; Fang et al., 2000).

Para determinar a instabilidade da trajetória do sistema pós-falta, Maria et al. (1990) propuseram a monitoração do produto escalar $Pl(\delta)(\delta - \delta^s_{pf})$ a cada passo de integração do sistema. Se este produto escalar mudar o sinal, durante o período de simulação, fica caracterizado que a trajetória do sistema pós-falta abandonou a área de atração real do sistema, indicando instabilidade. Dong e Pota (1991) propuseram o seguinte critério: a cada passo de integração verifica-se o ângulo da máquina crítica, se por acaso este ângulo for maior que π o sistema é dito instável.

Em 1995, Chung e Fang mostraram que os critérios descritos anteriormente apresentam falhas e são capazes de avaliar erroneamente a trajetória do sistema pós falta. Há casos, no critério proposto por Maria et al. (1990), em que a máquina perde o sincronismo mas o sinal do produto escalar $Pl(\delta)(\delta - \delta^s_{pf})$ não se altera. Portanto, pelo critério de Maria et al. a trajetória do sistema pós-falta é considerada estável enquanto que na realidade é instável. No critério proposto por Dong e Pota (1991), podem haver casos em que a máquina atinge o valor de pico π mas o sistema continua estável. Maiores detalhes podem ser encontrados em (Chung e Fang, 1995).

Com a intenção de solucionar os problemas encontrados nos métodos de Maria et al. (1990) e de Dong e Pota (1991), Chung e Fang (1995) propuseram um critério capaz de avaliar se a trajetória pós-falta pertence ou não a área de atração real do sistema. Antes de apresentá-lo, considere que o tempo necessário para análise de estabilidade de primeira oscilação das máquinas esteja compreendido no intervalo de tempo de 0 a $1s$ após o sistema adquirir a configuração pós falta (Ribbens-Pavella e Evans, 1985; Padiyar, 1996). Considere também, d como o passo de integração numérica do sistema e o período de simulação do sistema pós-falta $\Delta t = [0, 1+c]$, onde $c \in [0, 1]$ é uma constante a ser definida pelo usuário. A seguir o critério para avaliação da trajetória pós falta do sistema é apresentado.

Critério para avaliação da trajetória do sistema pós falta

- Durante cada passo de integração numérica do sistema pós-falta, determine o ângulo da máquina crítica

$$\delta_{max} = \max |\delta_i|, \;\; i \in (n-1), \tag{5.36}$$

a aceleração de cada máquina

$$\alpha_i = \frac{P_{li}}{M_i}, \tag{5.37}$$

onde P_{li} é dado por (2.27) e calcule a distância entre a trajetória e o ponto de equilíbrio estável pós-falta

$$\mathcal{D}(j) = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_{pf_i} - \delta_i(j)\right)^2} \tag{5.38}$$

onde $j \in [0, 1+c]$ é o instante de tempo. Se durante a simulação do sistema pós falta:

(i) $\mathcal{D}(j)$ for menor que $\mathcal{D}_{max} = \max\left(\mathcal{D}(1), \ldots, \mathcal{D}(j-1)\right)$ ou $jd > 1 + c$, o sistema é declarado estável. Portanto, a trajetória do sistema pós falta está contida na área de atração real, que é um conjunto invariante do sistema.

(ii) $\mathcal{D}(j)$ for muito maior que $\mathcal{D}(j-1)$ em qualquer instante de tempo j e qualquer um dos items abaixo for satisfeito

1. $\delta_{max} = |\delta_k|$ e $\delta_k > 0$ e $\alpha_k > 0$
2. $\delta_{max} = |\delta_k|$ e $\delta_k < 0$ e $\alpha_k < 0$
3. $\delta_{max} > \pi$

o sistema é dito instável, portanto a trajetória do sistema pós falta não está contida na área de atração real do sistema.

Observe que no caso **(i)**, a monitoração da distância entre a trajetória e o ponto de equilíbrio estável pós falta é capaz de avaliar se a trajetória está ou não se aproximando do ponto de equilíbrio estável de interesse. Portanto tem-se: $\mathcal{D}(j) < \mathcal{D}(j-1) < \mathcal{D}(j-2) < \ldots < \mathcal{D}_{max}$ para uma situação estável. O critério $jd > 1 + c$ é capaz de evitar que a simulação do sistema pós falta seja maior do que o tempo necessário para a análise de primeira oscilação das máquinas. No caso **(ii)**, o fato de ter $\mathcal{D}(j) > \mathcal{D}(j-1) > \mathcal{D}(j-2)$ significa que a trajetória do sistema pós falta está se afastando do ponto de equilíbrio de interesse. Este fato pode caracterizar, ou não, a instabilidade. Para comprová-la, deve-se observar a máquina crítica do sistema. Caso $\delta_k > \pi$ fica caracterizada a instabilidade (Haque, 1996). Caso tem-se, $\delta_{max} = |\delta_k| > 0$ e $\alpha_k > 0$ ou $\delta_{max} = |\delta_k| < 0$ e $\alpha_k < 0$,

significa que a máquina crítica está respectivamente acelerando e desacelerando e que $|\delta_k|$ tende a aumentar cada vez mais, saindo de sincronismo com as outras máquinas, caracterizando instabilidade.

A seguir serão apresentados resultados da aplicação do algoritmo proposto em sistemas multimáquinas.

5.3.1 Resultados para o Sistema de 2-máquinas $\times$ barramento infinito

Considere novamente o sistema de 2-máquinas versus barramento infinito, apresentado na Figura 4.8. Para a aplicação do algoritmo proposto, considere:

(i) o passo de integração numérica do sistema em falta $dp = 0.002s$,

(ii) para a simulação do sistema pós falta $c = 0$ e o passo de integração numérica $d = 0.05s$ e

(iii) a Função de Lyapunov Estendida, $\mathcal{W}$ considerando parâmetros de perturbação iguais, dada por (5.20).

Os resultados obtidos com a aplicação do algoritmo proposto, estão apresentados na Tabela 5.4. Observe que as estimativas dos TCA's obtidas com o algoritmo proposto e com o método de simulação no domínio do tempo são bem próximas (vide Tabela 5.3). Observe que a correção da estimativa da energia crítica e do tempo de abertura pelo método proposto é eficiente e não apresenta problemas de convergência.

As Figuras 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21 ilustram a variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, ao longo da trajetória do sistema, considerando diferentes contingências e as estimativas dos tempos de abertura obtidos com o algoritmo proposto. Analisando a derivada da Função de Lyapunov Estendida nas Figuras 5.18 a 5.21, pode-se observar que a trajetória do sistema entra e sai de uma região de derivada positiva.

Tabela 5.4: Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste

Falta na Barra	Linha Retirada	PEBS Est. $\mathcal{W}_{cr}$	Algoritmo proposto Iterações	$\mathcal{W}_{cr}^{est}$	TCA (s)
1	-	3.166	6	3.578	0.213
1	1 - 2	1.825	7	2.155	0.178
2	1 - 2	6.010	1	6.239	0.192
2	-	6.963	2	7.048	0.203

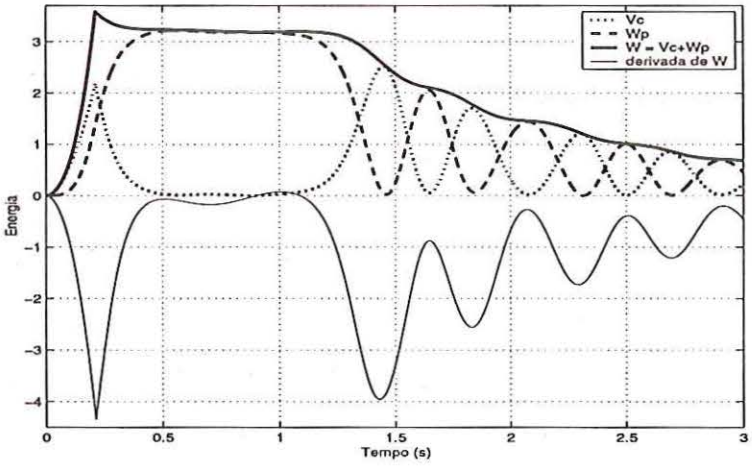

Figura 5.18: Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 1, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.213s$

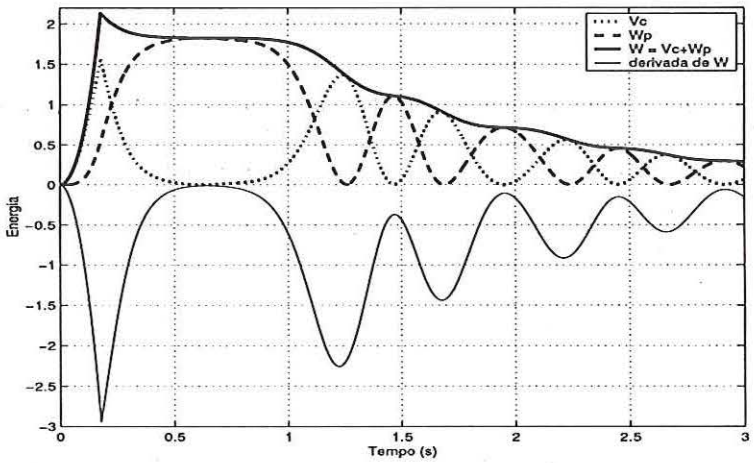

Figura 5.19: Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 1, retirada da linha $1-2$ e o tempo de abertura de $0.179s$

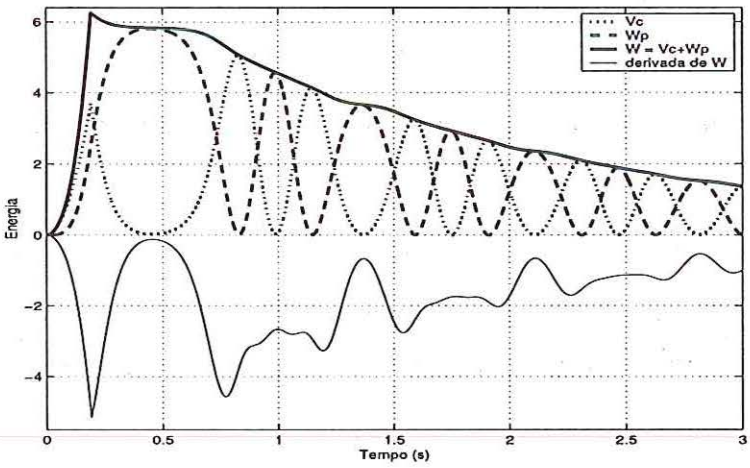

Figura 5.20: Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 2, retirada da linha $1-2$ e o tempo de abertura de $0.192s$

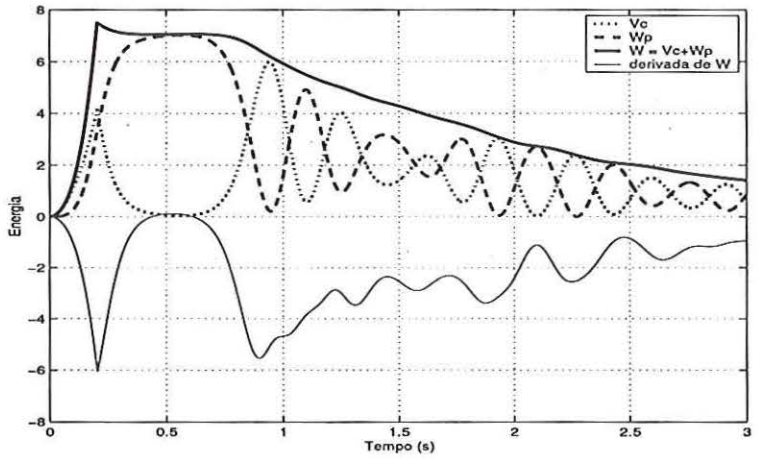

Figura 5.21: Variação da Função de Lyapunov Estendida e de sua derivada, considerando falta na barra 2, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.203s$

5.3.2 Resultados para o Sistema Teste $IEEE - 39$

Considere o sistema teste $IEEE - 39$, ilustrado na Figura 5.22. Este sistema é composto por 39 barramentos de carga e 10 geradores síncronos. O gerador de número 10 é considerado o barramento infinito e o coeficiente de amortecimento $T = 0.05\ MW.s/rad$ é uniforme. Os dados das linhas de transmissão, cargas e geradores podem ser encontrados no Apêndice B. Para a aplicação do algoritmo proposto, considere:

(i) o passo de integração numérica do sistema em falta $dp = 0.004s$,

(ii) para a simulação do sistema pós falta $c = 0.6$ e o passo de integração numérica $d = 0.05s$ e

(iii) a Função de Lyapunov Estendida, $\mathcal{W}$ considerando parâmetros de perturbação iguais, dada por (5.20).

EESC - USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

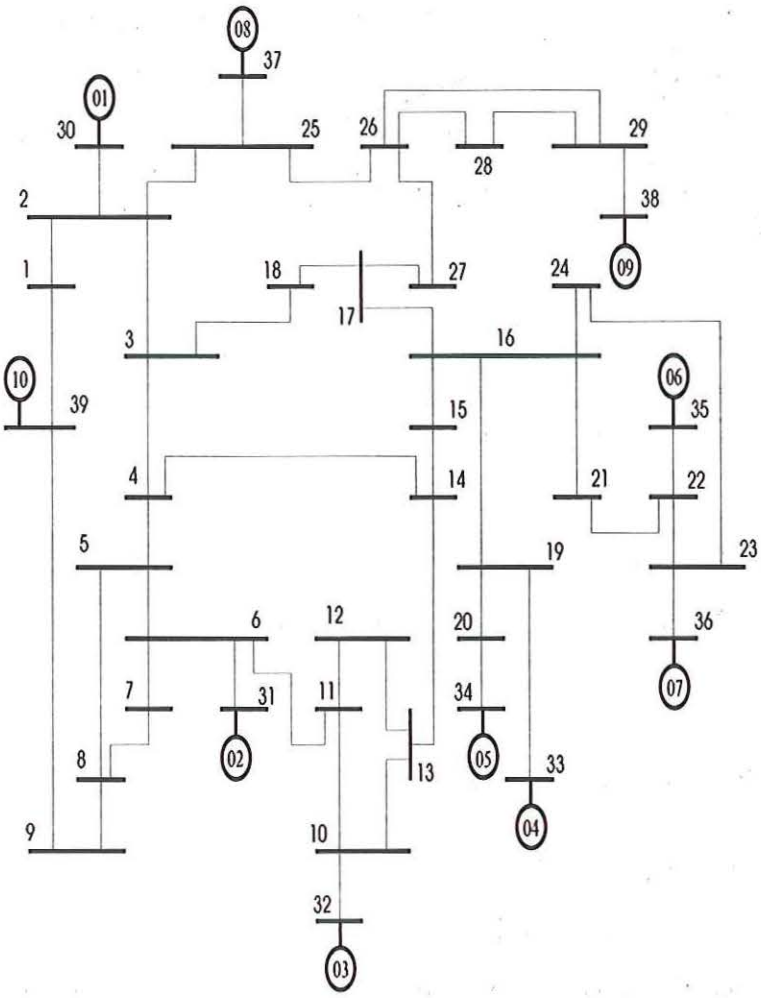

Figura 5.22: Topologia da rede elétrica do sistema teste IEEE-39.

O ponto de equilíbrio pré-falta do sistema está apresentado na Tabela 5.5. A Tabela 5.6 apresenta as estimativas do parâmetro de perturbação da Função de Lyapunov Estendida, considerando diferentes contingências para o sistema teste. Os resultados obtidos com os métodos de simulação no domínio do tempo, PEBS Estendido e pelo algoritmo proposto, estão apresentados na Tabela 5.7. Observe que as estimativas, da energia crítica e do tempo de abertura, fornecidas pelo método PEBS Estendido, são superiores quando comparados com os valores obtidos com o método de integração numérica. Para resolver o problema, o algoritmo proposto foi utilizado para corrigir tais estimativas para valores bem próximos dos valores de energia crítica e dos TCA's verdadeiros do sistema.

Tabela 5.5: Ponto de equilíbrio pré falta do sistema IEEE-39.

Gerador Síncrono	ângulo δ (rad)
10	-0.1867
1	$-3.007 \cdot 10^{-3}$
2	0.3298
3	0.3435
4	0.3143
5	0.5219
6	0.3423
7	0.3543
8	0.3114
9	0.5395

Tabela 5.6: Parâmetros de perturbação β para a Função de Lyapunov Estendida.

Contingência	Falta na Barra	Linha Retirada	Parâmetro β
1	4	4 - 5	$2.487 \cdot 10^{-4}$
2	26	26 - 28	$2.473 \cdot 10^{-4}$
3	17	17 - 18	$2.542 \cdot 10^{-4}$
4	6	6 - 11	$2.461 \cdot 10^{-4}$
5	8	8 - 7	$2.459 \cdot 10^{-4}$
6	14	14 - 15	$2.463 \cdot 10^{-4}$
7	7	7 - 6	$2.460 \cdot 10^{-4}$
8	3	3 - 18	$2.549 \cdot 10^{-4}$
9	21	-	$2.460 \cdot 10^{-4}$
10	17	-	$2.460 \cdot 10^{-4}$

Tabela 5.7: Estimativa dos TCA (seg.) para o sistema teste IEEE-39

Contingência	Integração	PEBS Est.		Algoritmo		
	Numérica (s)	$\mathcal{W}_{cr}$	$t_{AB}(s)$	Iterações	$\mathcal{W}_{cr}^{est}$	TCA (s)
1	(0.156,0.158)	8.793	0.164	2	7.9162	0.156
2	(0.094,0.096)	8.0627	0.139	11	3.4925	0.092
3	(0.114,0.116)	9.1888	0.132	5	6.6486	0.114
4	(0.136,0.138)	7.4727	0.152	4	5.8941	0.136
5	(0.150,0.152)	8.5434	0.184	8	5.5155	0.148
6	(0.136,0.138)	8.8863	0.166	8	6.0288	0.134
7	(0.155,0.157)	8.1317	0.183	7	5.6884	0.154
8	(0.142,0.144)	9.4218	0.156	5	7.6546	0.140
9	(0.148,0.150)	5.6416	0.144	1	5.9698	0.148
10	(0.116,0.118)	9.9215	0.136	5	6.8468	0.116

As dez Figuras (5.23−5.32) que serão apresentadas a seguir, ilustram a dinâmica da Função de Lyapunov Estendida, dada por $\mathcal{W} = \mathcal{V}_c + \mathcal{W}_p$ e de sua derivada $\dot{\mathcal{W}}$ ao longo da trajetória do sistema, considerando as contingências apresentadas na Tabela 5.6 e as respectivas estimativas do tempo de abertura, obtidas pelo algoritmo proposto e apresentadas na Tabela 5.7.

Observando essas Figuras, pode-se notar que a trajetória do sistema passa por regiões onde $\dot{\mathcal{W}} > 0$ e em nenhum momento $\dot{\mathcal{W}}$ torna-se positivamente ilimitada. Essas regiões aparecem no espaço de estados devido à inclusão das condutâncias de transferência na modelagem do sistema de potência. O algoritmo proposto, com o auxílio da Extensão do Princípio de Invariância, permite dar um tratamento adequado a essas regiões, possibilitando bons resultados para o tempo de abertura e para a energia crítica do sistema.

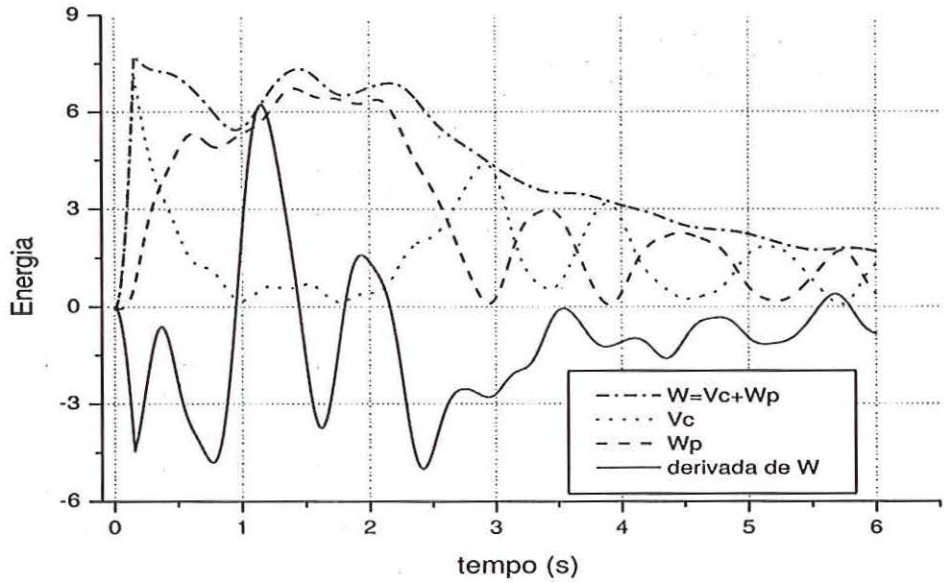

Figura 5.23: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 4, retirada da linha $4-5$ e o tempo de abertura de $0.156s$

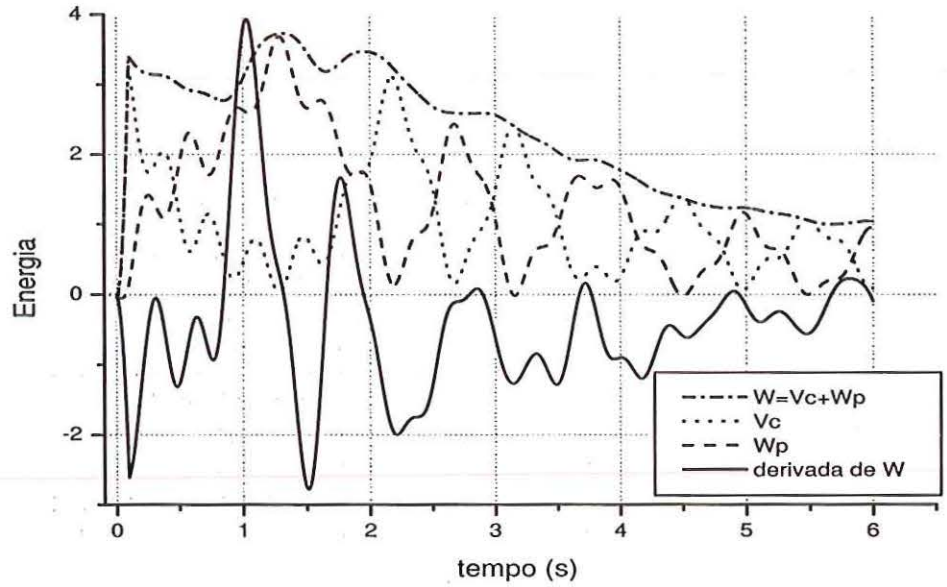

Figura 5.24: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 26, retirada da linha $26-28$ e o tempo de abertura de $0.092s$

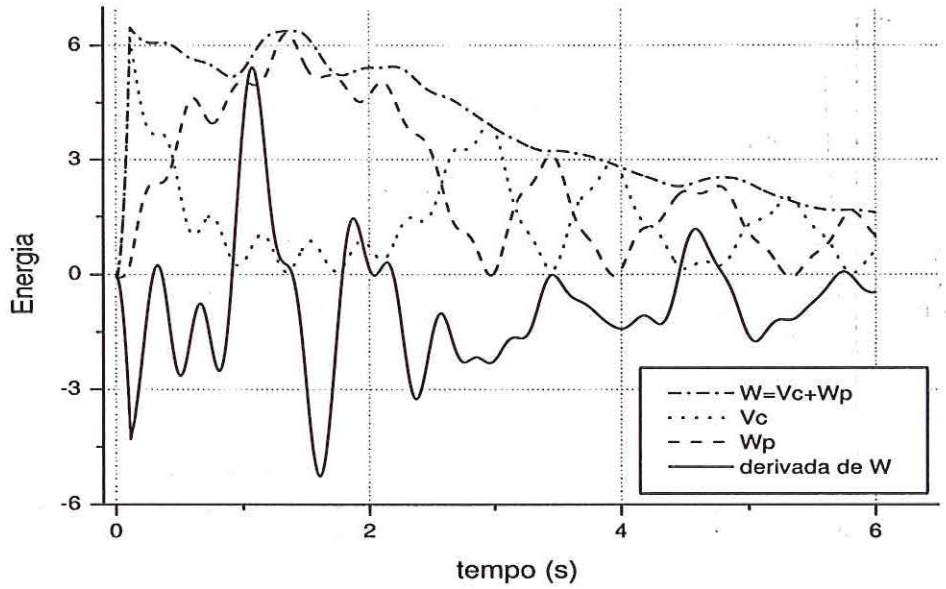

Figura 5.25: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 17, retirada da linha 17 − 18 e o tempo de abertura de $0.114s$

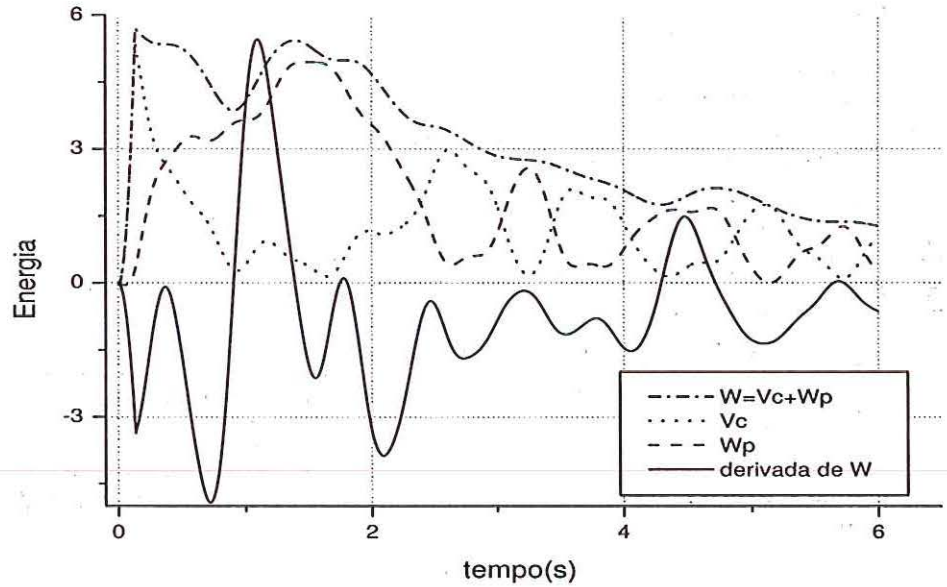

Figura 5.26: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 6, retirada da linha 6 − 11 e o tempo de abertura de $0.136s$

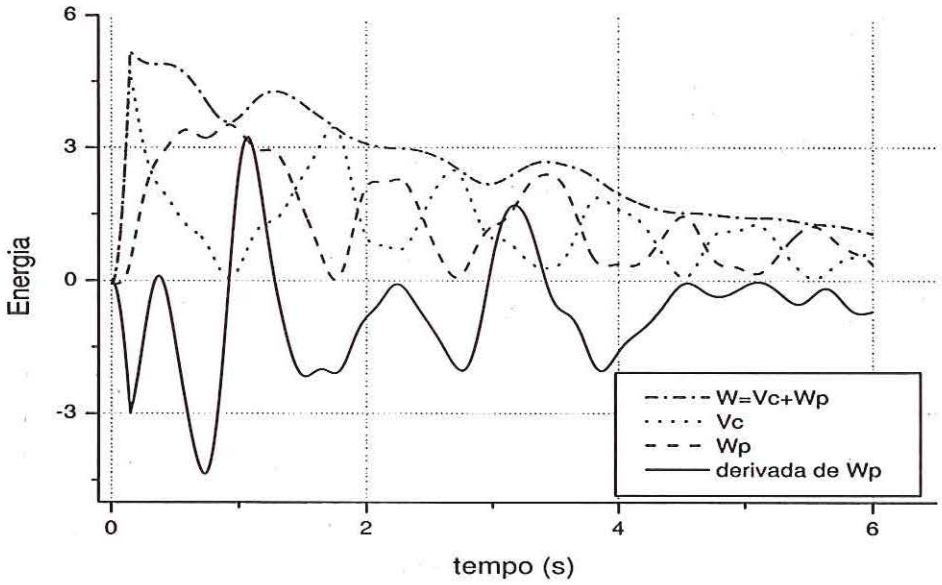

Figura 5.27: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 8, retirada da linha $8-7$ e o tempo de abertura de $0.148s$

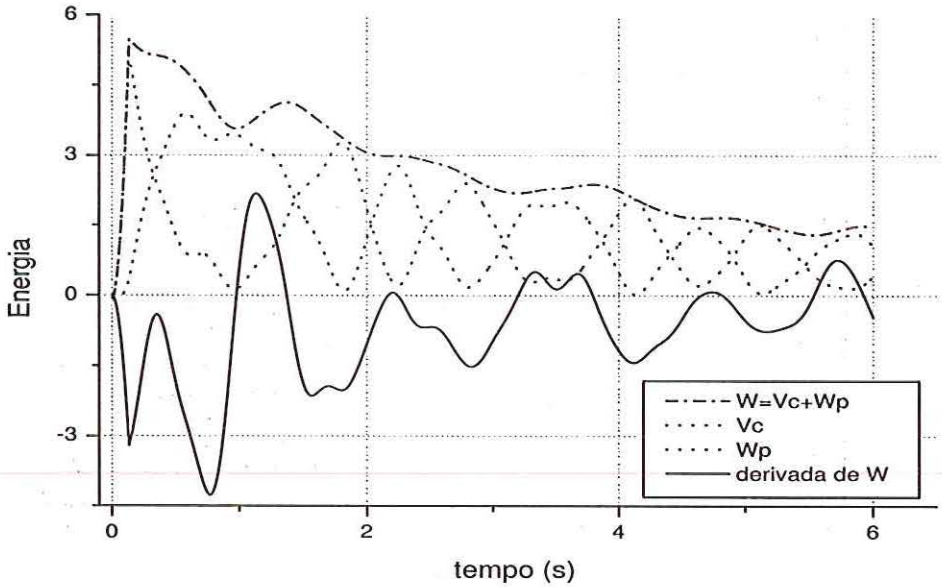

Figura 5.28: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 14, retirada da linha $14-15$ e o tempo de abertura de $0.134s$

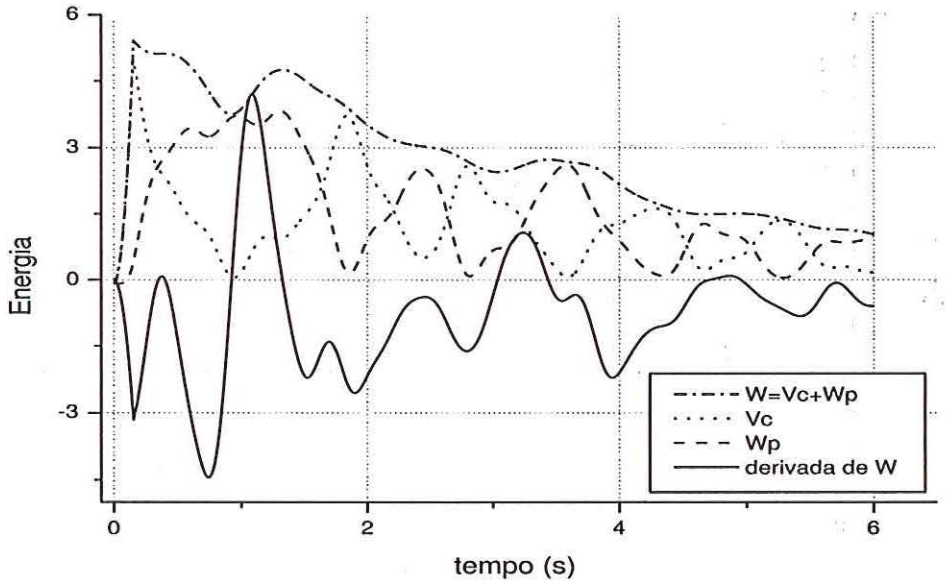

Figura 5.29: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 7, retirada da linha $7-6$ e o tempo de abertura de $0.154s$

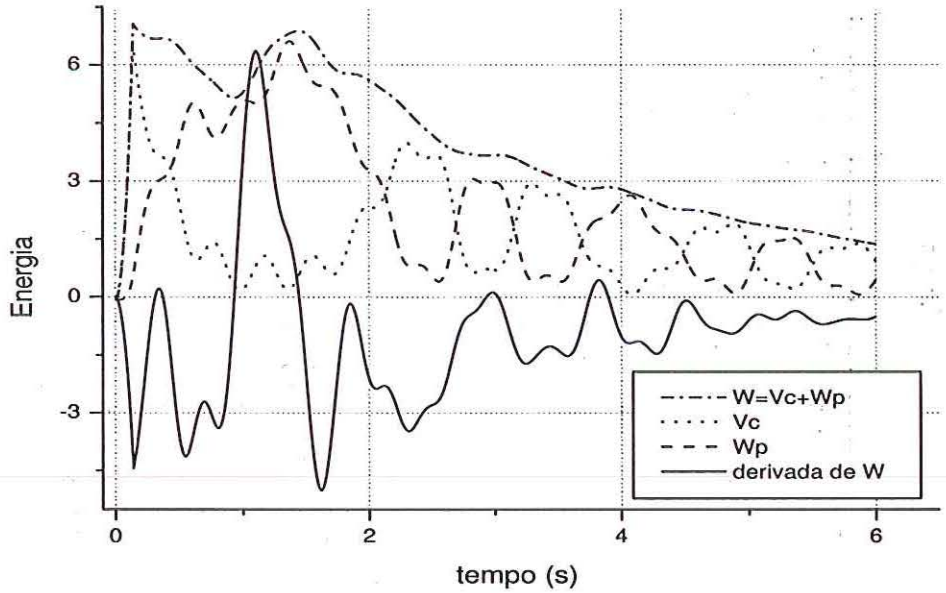

Figura 5.30: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 3, retirada da linha $3-18$ e o tempo de abertura de $0.140s$

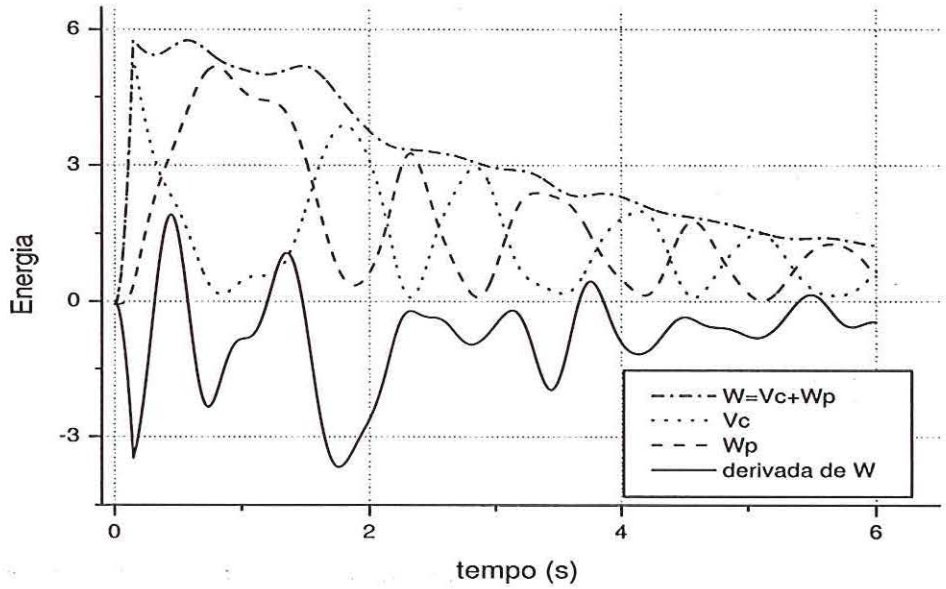

Figura 5.31: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 21, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.148s$

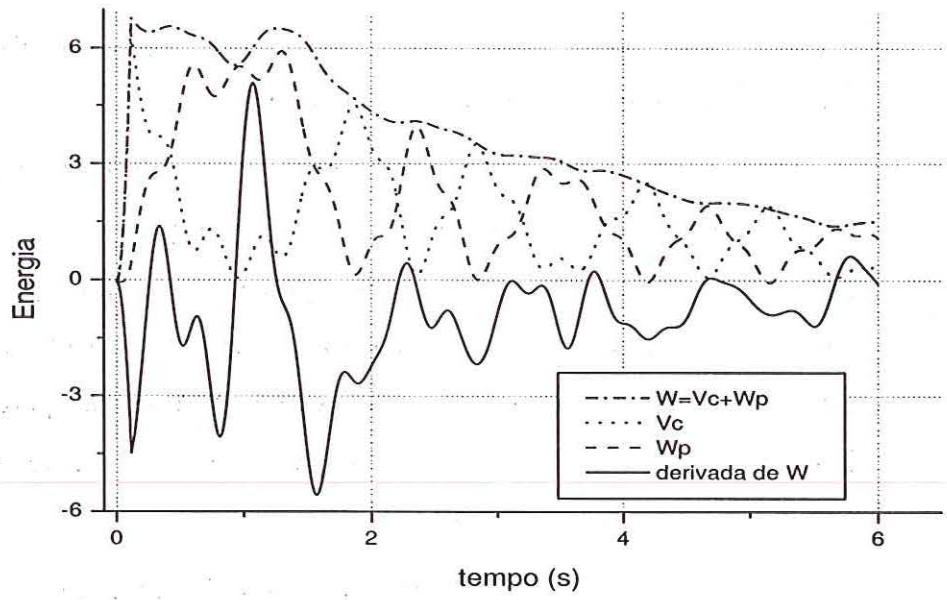

Figura 5.32: Variação da FLE e de sua derivada, considerando falta na barra 17, nenhuma linha retirada e o tempo de abertura de $0.116s$

Capítulo 6

Conclusões

Através do desenvolvimento deste trabalho, pode ser notado que a análise de estabilidade de sistema não lineares pelo método de Lyapunov é eficiente. A desvantagem do método de Lyapunov está na dificuldade de encontrar uma função que satisfaça as condições do Teorema de Lyapunov.

Em sistemas de potência, encontrar uma Função de Lyapunov capaz de incluir o efeito das condutâncias de transferência na modelagem do sistema é uma tarefa complicada. Essas condutâncias são responsáveis por gerar, no espaço de estados, regiões de derivada positiva, contrariando o Teorema de Lyapunov.

A extensão do princípio de invariância de LaSalle, proposta por Rodrigues, Alberto e Bretas (2000), requer condições menos restritivas e permite que a derivada da Função de Lyapunov seja positiva em algumas regiões no espaço de estados. Neste caso, a Função de Lyapunov passa a ser denominada Função de Lyapunov Estendida. Encontrar uma Função de Lyapunov Estendida pode até ser mais fácil do que encontrar uma Função de Lyapunov usual, permitindo que um maior número de problemas possam ser tratados.

Funções de Lyapunov Estendidas, foram propostas, considerando modelos de sistemas de potência que não possuem uma Função de Lyapunov no sentido usual. Mais especificamente, as Funções de Lyapunov Estendidas foram propostas para modelos de sistemas de potência de 1-máquina $\times$ barramento infinito e multimáquinas, considerando o efeito das condutâncias de transferência.

Mostrou-se neste trabalho que a função energia aproximada, proposta por Athay et al. (1979), não é uma Função de Lyapunov e nem uma Função de Lyapunov Estendida. Isto se deve ao fato de que as condutâncias de transferência geram regiões ilimitadas de derivada positiva no espaço de estados. Desta forma, as estimativas obtidas com esta função energia aproximada não possuem fundamento teórico. Mostrou-se também que é possivel obter uma Função de Lyapunov Estendida a partir da função energia aproximada (Athay et al., 1979). Para isto, basta aplicar uma pequena perturbação na função energia proposta em (Athay et al., 1979). A diferença entre as estimativas obtidas por estas funções é da ordem do termo de perturbação β. A grande vantagem do resultado é sem dúvida a fundamentação teórica da Função de Lyapunov Estendida.

A Extensão do Princípio de Invariância foi utilizada como suporte matemático para justificar a utilização das Funções de Lyapunov Estendidas nos estudos de estabilidade transitória. Para a estimativa do tempo de abertura foi proposto um método similar ao método PEBS, denominado PEBS Estendido. O método proposto é capaz de obter uma estimativa local da área de atração do ponto de equilíbrio estável de interesse, levando em consideração as regiões de derivada positiva. A desvantagem do método PEBS Estendido é que este método pode fornecer estimativas tanto superiores quanto inferiores quando comparados aos verdaderios valores de energia crítica e do tempo de abertura do sistema.

Com o intuito de melhorar as estimativas do tempo de abertura obtida pelo método PEBS Estendido, foi proposto um algoritmo iterativo. Este algoritmo, utiliza as simulações no domínio do tempo para corrigir as estimativas obtidas pelo método PEBS Estendido, tornando-as mais próximas dos valores de energia crítica e do tempo de abertura verdadeiros do sistema. O número de iterações a ser realizada, bem como a grau de exatidão da estimativas obtidas, pelo algoritmo proposto, está diretamente relacionado ao valor do passo de integração do sistema em falta. Para comprovar a eficiência do algoritmo foram realizados testes com o sistema de 2 máquinas e de 10 máquinas. Os resultados obtidos confirmam a eficiência do algoritmo proposto.

6.1 Perspectivas de Trabalho Futuro

Os estudos de Funções de Lyapunov para sistemas de potência podem ser divididos em duas categorias, de acordo com o modelo matemático utilizado para análise do problema: (i) considerando a redução da rede aos nós internos dos geradores e (ii) considerando a estrutura da rede preservada.

Preservando a estrutura da rede, pode-se considerar uma melhor modelagem para as cargas. Obter uma Função de Lyapunov considerando as cargas de potência ativa modeladas por termos dependentes da tensão é um assunto em aberto na literatura. Esse modelo para as cargas de potência ativa é responsável pelo surgimento de regiões de derivada positiva, no espaço de estados, impossibilitando a aplicação do Princípio de Invariância de LaSalle. Portanto, um dos próximos objetivos, para futuro tabalho, consiste em encontrar uma Função de Lyapunov Estendida que seja capaz de incluir o efeito de cargas (ativa e reativa) modeladas por termos dependentes da tensão.

Neste trabalho de doutorado, utilizou-se as Funções de Lyapunov Estendidas para análise de estabilidade transitória. Essas Funções foram capazes de estudar a estabilidade e de estimar a área de atração do ponto de equilíbrio de interesse. Outro objetivo para um futuro trabalho é utilizar a Função de Lyapunov Estendida para projetar leis de controle que sejam capazes de estabilizar o sistema no ponto de equilíbrio de interesse. Neste caso essas funções serão denominadas de Funções de Lyapunov Estendidas de Controle. Em sistemas de potência, essas funções poderão ser utilizadas para projeto de controle de excitação da máquina síncrona e de equipamentos FACTS (do inglês 'Flexible AC Transmission Systems'). Este controle tem como objetivo aumentar a margem de estabilidade do sistema e de amortecer as oscilações eletromecânicas dos sistemas de potência.

Apêndice A

Sistema Dinâmico Reduzido

Para compreender os fundamentos teóricos dos métodos PEBS (Chiang, Wu e Varaiya, 1988) e BCU (Chiang et al., 1994; Chiang e Chu, 1995), faz se necessário associar ao sistema dinâmico original um sistema dinâmico de ordem reduzida. Esta associação tem como objetivo simplificar a determinação da fronteira da área de atração do sistema original, tendo em vista que determinar a fronteira da área de atração do sistema de ordem reduzida é uma tarefa mais simples. Portanto, esses sistemas devem satisfazer as seguintes propriedades:

Propriedades estáticas

- A localização dos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico reduzido devem ser a mesma localização dos pontos de equilíbrio do sistema original. Por exemplo, $\hat{x}$ é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico reduzido se e somente se $(\hat{x}, 0)$ for ponto de equilíbrio do sistema original, onde $0 \in \mathbb{R}^N$.

- O sistema dinâmico reduzido e o sistema original possuem os mesmos tipos de pontos de equilibrio. Por exemplo, x_s é um ponto de equilíbrio estável do sistema dinâmico reduzido se e somente se $(x_s, 0)$ for um ponto de equilíbrio estável do sistema original.

Propriedades dinâmicas

- O sistema dinâmico reduzido apresenta uma função energia.

- O ponto de equilíbrio $\hat{x}$ está contido na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s)$, se e somente se o ponto de equilíbrio $(\hat{x}, 0)$ estiver contido na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s, 0)$ do sistema original.

O objetivo desta seção é analisar as propriedades dinâmicas e estáticas entre o sistema original e o sistema reuduzido, quando condutâncias de transferência suficientemente pequenas são consideradas. Para isto considere o seguinte sistema dinâmico reduzido

$$\dot{\delta}_i = -\frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta_i} + g_i(\delta) \tag{A.1}$$

associado ao sistema dinâmico original

$$M_i\ddot{\delta}_i = -D_i\dot{\delta}_i - \frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta_i} + g_i(\delta), \tag{A.2}$$

onde V_p é a função energia potencial do sistema sem perdas, ou seja, $I_{ij} = 0$ em (4.14). $g(\delta) = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} D_{ij}\left(\sin(\delta_i - \delta_j) - \sin(\delta_i^s - \delta_j^s)\right)$ é o termo referente as condutâncias de transferência.

O estudo da relação existente entre a fronteira de estabilidade do sistema original (A.2) e a fronteira de estabilidade (PEBS) do sistema dinâmico reduzido (A.1) é realizado em 5 etapas, conforme pode ser observado na Figura A.1.

As etapas 1 e 5 estudam a robustez dos pontos de equilíbrio, contidos na fronteira da área de atração, frente a uma pequena perturbação (de classe C^1) no campo vetorial. As demais etapas relacionam as propriedades estáticas e dinâmicas dos sistemas auxiliares. As demonstrações dos Teoremas enunciados em cada etapa podem ser encontradas em (Chiang e Chu, 1995).

<u>Etapa 1</u>: Nesta etapa, estuda-se a relação entre o sistema dinâmico original (A.2) e o sistema auxiliar

$$M_i\ddot{\delta}_i = -D_i\dot{\delta}_i - \frac{\partial V_p(\delta)}{\partial \delta_i}. \tag{A.3}$$

Para isto, considere f : M $\rightarrow$ E um campo vetorial de classe C^1, onde M é um conjunto aberto no espaço vetorial E. Considere também v(M) o

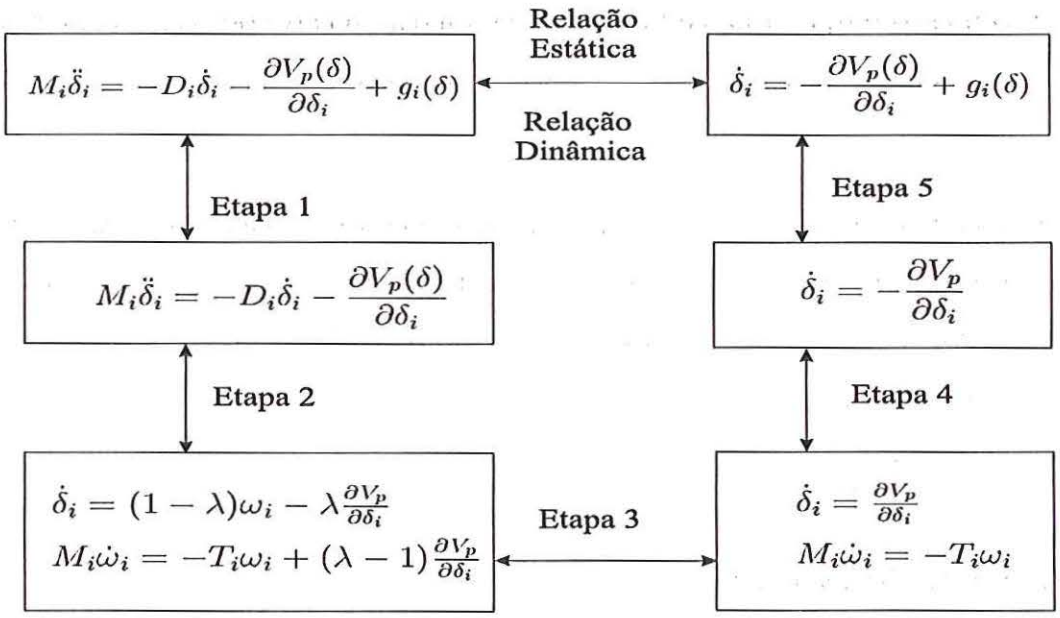

Figura A.1: Determinação das relações dinâmicas e estáticas entre os sistemas (A.1) e (A.2).

conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^1 contidos em M. Se E possui uma norma, então a norma-C^1 do campo vetorial $h \in v(\mathrm{M})$ é o limite superior de $\{|h(x)|, \|Dh(x)\|, x \in \mathrm{M}\}$. Com esta topologia, a vizinhança de $f \in v(\mathrm{M})$ é subconjunto de $v(\mathrm{M})$, que contém um conjunto da forma $\{g \in v(\mathrm{M}), |g - f|_1 < \epsilon\}$, para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer norma em M. g é denominado perturbação ϵ de classe C^1 em f.

Teorema A.1 *Considere x_s o ponto de equilíbrio do campo vetorial f e $x_i, i = 1, \ldots, k$, pontos de equilíbrio hiperbólicos contidos na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s)$. Considere também que a intersecção entre $W^u(x_i)$ e $W^s(x_s)$ satisfaz a condição de transversalidade e que $\partial\mathcal{A}(x_s) = \cup W^s(x_i)$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer campo vetorial g, que seja uma perturbação ϵ de classe C^1 em f, os pontos de equilíbrio $h(x_i)$, $i = 1, ..., k$, também estão contidos na fronteira da área de atração de $h(x_s(g))$ e $\partial\mathcal{A}(x_s(g)) = \cup W^s(x_i(g))$, onde $h(x_s(g))$ é o ponto de equilíbrio estável do campo vetorial g.* ■

Aplicando o Teorema enunciado anteriormente no sistema (A.3), tem-se a proposição abaixo.

Proposição A.2 *Considere o sistema (A.3), onde* $(\delta_s, 0)$ *é o ponto de equilíbrio estável,* $(\delta_i, 0), i = 1, ..., k$, *são os pontos de equilíbrio contidos na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(\delta_s, 0)$. *Considere também que* $W^u(\delta_i, 0)$ *e* $\partial\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ *satisfazem a condição de transversalidade. Se zero é um valor regular de* $\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i}$, *existem* $\hat{\delta} > 0$ *e* $\hat{\epsilon} > 0$ *tal que* $G_{ij} < \hat{\delta}$ *seja satisfeito para todas as condutâncias de transferência do sistema (A.2). Portanto há um único ponto de equilíbrio estável* $(\hat{\delta}_s, 0)$ *do sistema (A.2) com* $|(\hat{\delta}_s, 0) - (\delta_s, 0)| < \epsilon$ *e para cada* $(\hat{\delta}_i, 0)$ *existe um único ponto de equilíbrio hiperbólico* $(\hat{\delta}_i, 0)$ *do sistema (A.2) com* $|(\hat{\delta}_i, 0) - (\delta_i, 0)| < \hat{\epsilon}$ *e são do mesmo tipo. Desta forma,* $(\hat{\delta}_i, 0)$ *está contido em* $\partial\mathcal{A}(\hat{\delta}_s, 0)$ *e não há outro ponto de equilíbrio* $(\hat{\delta}_i, 0), i = 1, ...k$, *contido em* $\partial\mathcal{A}(\hat{\delta}_s, 0)$.

A proposição anterior estabelece uma relação de 'persistência' entre os sistemas (A.2) e (A.3), ou seja, a localização e o tipo dos pontos de equilíbrio de (A.2) e (A.3) são iguais. O sistema (A.2) é uma perturbação ϵ de classe C^1 do sistema (A.3).

<u>**Etapas 2 e 3:**</u> Nesta etapa, estuda-se a relação entre o sistema (A.3) e o sistema auxiliar

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \frac{\partial V_p}{\partial \delta_i} \\ M_i\dot{\omega}_i &= -T_i\omega_i \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para isto, é necessário considerar o sistema parametrizado $d(\lambda)$, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i &= (1-\lambda)\omega_i - \lambda\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i} \\ M_i\dot{\omega}_i &= -T_i\omega_i + (\lambda - 1)\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i} \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde, $0 \leq \lambda \leq 1$. Note que, para $\lambda = 0$ o sistema parametrizado torna-se o sistema (A.3) e para $\lambda = 1$ o sistema parametrizado torna-se o sistema (A.4).

As relações estática e dinâmica entre os pontos de equilíbrio dos sistemas (A.3) e (A.4), são estabelecidas pelos Teoremas a seguir.

Teorema A.3 *(Relação Estática) Se zero é valor regular de* $\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i}$, *então* $(\hat{\delta}, 0)$ *é um ponto de equilíbrio do tipo-k do sistema (A.4), se e somente se* $(\hat{\delta}, 0)$ *for ponto de equilíbrio do tipo-k de (A.5).* ■

Teorema A.4 *(Relação Dinâmica) Considere* x_s *o ponto de equilíbrio estável do sistema (A.3). Se as intersecções entre as variedades estável e instável dos pontos de equilíbrio, contidos na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(x_s)$ *do sistema parametrizado* $d(\lambda)$ *(A.5), satisfizerem a condição de transversalidade para* $\lambda \in [0, 1]$, *então:*

1. *o ponto de equilíbrio* $(\delta_i, 0)$ *está contido na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(x_s)$ *de (A.3), se e somente se* $(\delta_i, 0)$ *estiver contido na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(x_s)$ *de (A.4)*
2. $\partial\mathcal{A}(x_s)|_{d(0)} = \cup W^s_{d(0)}(\delta_i, 0)$
   $\partial\mathcal{A}(x_s)|_{d(1)} = \cup W^s_{d(1)}(\delta_i, 0)$

■

Admitindo que a condição de transversalidade seja satisfeita para o sistema parametrizado $d(\lambda)$, o Teorema anterior assegura que os pontos de equilíbrio, contidos na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s)$ do sistema $d(0)$ são exatamente os mesmos pontos de equilíbrio, contidos na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(x_s)$ do sistema $d(1)$. Além disso, a fronteira da área de atração do sistema $d(0)$ e a fronteira da área de atração do sistema $d(1)$ são iguais e dada pela união das variedades estáveis dos pontos de equilíbrio $(\delta_i, 0), i = 1, ..., k$.

<u>Etapa 4</u>: Nesta etapa estuda-se as relações estáticas e dinâmicas entre (A.4) e o sistema gradiente auxiliar

$$\dot{\delta}_i = -\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i}. \tag{A.6}$$

Observe que no sistema (A.4) as variáveis δ e ω estão desacopladas e que o campo vetorial, da variável δ, do sistema (A.4) é exatamente o mesmo campo vetorial do sistema (A.6). Portanto tem-se:

Teorema A.5 *(Relação Estática) $\hat{\delta}$ é um ponto de equilíbrio do tipo-k do sistema (A.6), se e somente se $(\hat{\delta}, 0)$ for ponto de equilíbrio do tipo-k do sistema (A.4).* ■

Teorema A.6 *(Relação Dinâmica) $\bar{\delta}$ é um ponto de equilíbrio contido na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(\delta_s)$ do sistema (A.6), se e somente se $(\bar{\delta}, 0)$ for ponto de equilíbrio contido na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ do sistema (A.4).* ■

<u>Etapa 5:</u> Nesta etapa estuda-se a relação entre o sistema gradiente auxiliar (A.6) e o sistema dinâmico reduzido(A.1). Observe que o sistema (A.1) pode ser considerado como uma perturbação $\epsilon - C^1$ do sistema (A.6). Desta forma, aplicando o Teorema A.1 no sistema (A.1), tem -se

Proposição A.7 *Considere o sistema (A.6), onde δ_s é o ponto de equilíbrio estável, $\delta_i, i = 1, ..., k$, são os pontos de equilíbrio contidos na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(\delta_s)$. Considere também que $W^u(\delta_i)$ e $\partial\mathcal{A}(\delta_s)$ satisfazem a condição de transversalidade. Se zero é um valor regular de $\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i}$, existem $\hat{\delta} > 0$ e $\hat{\epsilon} > 0$ tal que $G_{ij} < \hat{\delta}$ seja satisfeito para todas as condutâncias de transferência do sistema (A.1). Portanto há um único ponto de equilíbrio estável $\hat{\delta}_s$ do sistema (A.1) com $|\hat{\delta}_s - \delta_s| < \epsilon$ e para cada $\hat{\delta}_i$ existe um único ponto de equilíbrio hiperbólico $\hat{\delta}_i$ do sistema (A.1) com $|\hat{\delta}_i - \delta_i| < \hat{\epsilon}$ e são do mesmo tipo. Além disso, $\hat{\delta}_i$ está contido em $\partial\mathcal{A}(\hat{\delta}_s)$ e não há outro ponto de equilíbrio $\hat{\delta}_i, i = 1, ...k$, contido em $\partial\mathcal{A}(\hat{\delta}_s)$.*

A proposição anterior estabelece uma relação de 'persistência' entre os sistemas (A.1) e (A.6), ou seja, a localização e o tipo dos pontos de equilíbrio de (A.1) e (A.6) são persistentes para pequenas perturbações no campo vetorial.

Após estudar as etapas anteriores, pode-se estabelecer uma relação estática e dînâmica entre o sistema original (A.2) e o sistema de ordem reduzida (A.1).

Teorema A.8 *Considere os sistemas (A.2) e (A.1). Caso zero seja valor regular de* $\frac{\partial V_p}{\partial \delta_i}$, *então existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $G_{ij} < \epsilon$ *seja satisfeito para todas as condutâncias de transferência do sistema (A.2). Desta forma, tem-se*

- $[R1]$ δ *é um ponto de equilíbrio do tipo-k do sistema de ordem reduzida (A.1), se e somente se* $(\delta, 0)$ *for ponto de equilíbrio do tipo-k do sistema original (A.2).*

Caso a intersecção entre as variedades estável e instável dos pontos de equilíbrio, contidos na fronteira da área de atração $\partial\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ *do sistema parametrizado* $d(\lambda)$, *satisfaz a condição de transversalidade para* $\lambda \in [0, 1]$, *tem-se:*

- $[R2]$ *O ponto de equilíbrio* $(\delta_i, 0)$ *esta contido na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ *do sistema (A.2), se e somente se o ponto de equilíbrio* δ_i *estiver contido na fronteira da área de atração* $\partial\mathcal{A}(\delta_s)$ *do sistema (A.1).*

- $[R3]$ $\partial\mathcal{A}(x_s)|_{d(0)} = \cup W^s_{d(0)}(\delta_i, 0)$
  $\partial\mathcal{A}(x_s)|_{d(1)} = \cup W^s_{d(1)}(\delta_i, 0)$

■

O resultado $[R1]$ estabelece uma relação estática entre a área de atração $\partial\mathcal{A}(\delta_s)$ do sistema de ordem reduzida (A.1) e a área de atração $\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ do sistema original (A.2). A relação dinâmica entre $\mathcal{A}(\delta_s)$ e $\mathcal{A}(\delta_s, 0)$ é apresentada pelos resultados $[R2]$ e $[R3]$. Portanto, o Teorema anterior caracteriza os fundamentos matemáticos para aplicação dos métodos PEBS e BCU, quando condutâncias de transferência suficientemente pequenas são consideradas no modelo clássico de sistemas de potência.

Apêndice B

Dados do Sistema Teste IEEE-39

Este sistema teste é composto por 39 barras e 10 geradores. Os dados da linhas de transmissão e das barras são apresentados a seguir.

Tabela B.1: Dados de linha do Sistema Teste IEEE-39

DE	PARA	RES.(pu)	REAT.(pu)	SUSC.(pu)	TAP(pu)
01	02	0.0035	0.0411	0.6987	0.00000
01	39	0.0010	0.0250	0.7500	0.00000
02	03	0.0013	0.0151	0.2572	0.00000
02	25	0.0070	0.0086	0.1460	0.00000
03	04	0.0013	0.0213	0.2214	0.00000
03	18	0.0011	0.0133	0.2138	0.00000
04	05	0.0008	0.0128	0.1342	0.00000
04	14	0.0008	0.0129	0.1382	0.00000
05	06	0.0002	0.0026	0.0434	0.00000
05	08	0.0008	0.0112	0.1476	0.00000
06	07	0.0006	0.0092	0.1130	0.00000
06	11	0.0007	0.0082	0.1389	0.00000
07	08	0.0004	0.0046	0.0780	0.00000
08	09	0.0023	0.0363	0.3804	0.00000
09	39	0.0010	0.0250	1.2000	0.00000
10	11	0.0004	0.0043	0.0729	0.00000

DE	PARA	RES.(pu)	REAT.(pu)	SUSC.(pu)	TAP(pu)
10	13	0.0004	0.0043	0.0729	0.00000
13	14	0.0009	0.0101	0.1723	0.00000
14	15	0.0018	0.0217	0.3660	0.00000
15	16	0.0009	0.0094	0.1710	0.00000
16	17	0.0007	0.0089	0.1342	0.00000
16	19	0.0016	0.0195	0.3040	0.00000
16	21	0.0008	0.0135	0.2548	0.00000
16	24	0.0003	0.0059	0.0680	0.00000
17	18	0.0007	0.0082	0.1319	0.00000
17	27	0.0013	0.0173	0.3216	0.00000
21	22	0.0008	0.0140	0.2565	0.00000
22	23	0.0006	0.0096	0.1846	0.00000
23	24	0.0022	0.0350	0.3610	0.00000
25	26	0.0032	0.0323	0.5130	0.00000
26	27	0.0014	0.0147	0.2396	0.00000
26	28	0.0043	0.0474	0.7802	0.00000
26	29	0.0057	0.0625	1.0290	0.00000
28	29	0.0014	0.0151	0.2490	0.00000
12	11	0.0016	0.0435	0	1.006
12	13	0.0016	0.0435	0	1.006
06	31	0.0000	0.0250	0	1.070
10	32	0.0000	0.0200	0	1.070
19	33	0.0007	0.0142	0	1.070
20	34	0.0009	0.0180	0	1.009
22	35	0.0000	0.0143	0	1.025
23	36	0.0005	0.0272	0	1.000
25	37	0.0006	0.0232	0	1.025
02	30	0.0000	0.0181	0	1.025
29	38	0.0008	0.0156	0	1.025
19	20	0.0007	0.0138	0	1.060

Tabela B.2: Dados de barras do Sistema Teste IEEE-39

BARRA	V(pu)	ANG. (graus)	CARGAS MW	CARGAS MVAr	TIPO	XT(pu)	M
1	1.046	-9.1	0.	0.	C		
2	1.046	-6.4	0.	0.	C		
3	1.024	-9.3	322.	2.4	C		
4	0.998	-10.2	500.	184.	C		
5	1.001	-9.1	0.	0.	C		
6	1.004	-8.4	0.	0.	C		
7	0.993	-10.6	233.8	84.	C		
8	0.992	-11.1	522.	176.	C		
9	1.027	-10.9	0.	0.	C		
10	1.013	-5.9	0.	0.	C		
11	1.009	-6.8	0.	0.	C		
12	0.996	-6.8	7.5	88.	C		
13	1.010	-6.6	0.	0.	C		
14	1.005	-8.3	0.	0.	C		
15	1.003	-8.5	320.	153.	C		
16	1.017	-7.0	329.	32.3	C		
17	1.023	-8.1	0.	0.	C		
18	1.022	-9.0	158.	30.	C		
19	1.044	-1.7	0.	0.	C		
20	0.988	-2.7	628.	103.	C		
21	1.021	-4.6	274.	115.	C		
22	1.043	-0.2	0.	0.	C		
23	1.037	-0.5	274.5	84.6	C		
24	1.015	-6.9	308.6	92.2	C		
25	1.055	-5.1	224.	47.2	C		
26	1.047	-6.3	139.	17.	C		

BARRA	V(pu)	ANG. (graus)	CARGAS MW	CARGAS MVAr	TIPO	XT(pu)	M
27	1.030	-8.3	281.	75.5	C		
28	1.048	-2.7	206.	27.6	C		
29	1.048	0.0	283.5	26.9	C		
30	1.047	-4.0	0.	0.	G	0.031	0.223
31	0.982	0.0	9.2	4.6	G	.0697	0.161
32	0.983	2.1	0.	0.	G	.0531	0.190
33	0.997	3.5	0.	0.	G	.0436	0.205
34	1.012	2.4	0.	0.	G	0.132	0.138
35	1.049	4.8	0.	0.	G	0.050	0.185
36	1.064	7.4	0.	0.	G	0.049	0.140
37	1.028	1.7	0.	0.	G	0.057	0.129
38	1.027	7.1	0.	0.	G	0.057	0.183
39	1.030	-10.7	1104.	250.	S	0.006	$2.650 \cdot 10^{10}$

Apêndice C

Trabalhos Publicados Durante o Doutoramento

Durante o período de doutoramento foram publicados 9 trabalhos. Sendo 8 trabalhos em congressos e 1 trabalho em revista, enumerados a seguir:

1. Alberto, L.F.C., Silva F.H.J.R., Bretas, N. G., "Directs Methods for Transient Stability Analysis in Power Systems: State of Art and Future Perspectives", VIII SEPOPE - Symposium of Specialists in Operational and Expansion Planning - Brasilia, Brasil, Maio de 2002.

2. Alberto, L.F.C., Silva F.H.J.R., Bretas, N. G., "Extended Lyapunov function for detailed power systems", Proceedings 14 th PSCC (Power Systems Computation Conference), Sevilla - Espanha, Junho de 2002.

3. Alberto, L.F.C., Silva F.H.J.R., Bretas, N. G., "Função de Lyapunov Estendida para Modelos Detalhados de Sistemas de Potência", Proceedings do XIV CBA - Congresso Brasileiro de Automática - Natal, Brasil, Setembro de 2002.

4. Silva, F.H.J.R, Alberto, L.F.C., Bretas N.G., "Extended Lyapunov Function for power systems with transmission losses", IEEE Bologna Power Tech Conference -Bologna, Itália, junho de 2003.

5. Silva, F.H.J.R, Alberto, L.F.C., Bretas N.G., "Smooth Perturbation in the Classical Energy Function for Lossy Power System Stability Analysis", IEEE Power System Society General Meeting 2003 - Toronto, Canadá, julho de 2003.

6. Silva F.H.J.R., Alberto, L.F.C., Bretas, N. G., "Uma Nova Função De Lyapunov Estendida Para Análise De Estabilidade Transitória Em Sistemas De Potência Multimáquinas", aceito para apresentação no XV CBA - Congresso Brasileiro de Automática - Gramado, Brasil, Setembro de 2004.

7. Silva F.H.J.R., Guedes R.B.L., Alberto, L.F.C., Bretas, N. G., "Função De Lyapunov Estendida Para Análise De Estabilidade De Ângulo E De Tensão Em Sistemas De Potência Considerando O Efeito De Cargas Dependentes Da Tensão", aceito para apresentação oral no XV CBA - Congresso Brasileiro de Automática - Gramado, Brasil, Setembro de 2004.

8. Silva F.H.J.R., Guedes R.B.L., Alberto, L.F.C., Bretas, N. G., "Função De Lyapunov Estendida Para Sistemas De Potência Preservando a Estrutura da Rede e com Cargas Modeladas por Termos Dependentes da Tensão", aceito para apresentação oral no IEEE/PES Transmission and Distribution 2004 - Latin America, São Paulo, Brasil, Novembro de 2004.

9. Silva, F.H.J.R, Alberto, L.F.C., London Jr. J.B.A., Bretas N.G., "Smooth Perturbation in the Classical Energy Function for Lossy Power System Stability Analysis", aceito para publicação no IEEE Transactions on Circuits and Systems I.

Bibliografia

Alberto, L. F. C. (1997). *Análise de estabilidade transitória: estudos do método BCU; proposta de estimativa de amortecimento para estabilidade absoluta em "OMIBS"*., EESC-USP/Dissertação de mestrado.

Alberto, L. F. C. (2000). *O Princípio de Invariância de LaSalle estendido aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-'swing'*., EESC-USP Tese de Doutorado.

Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (1999). Synchronism versus stability in power systems, *Electrical Power and Energy Systems* **21**: 261–267.

Alberto, L. F. C., Silva, F. H. J. R. e Bretas, N. G. (2002a). Extended lyapunov functions for detailed power system models, *Proc. 14th Power System Computation Conference - Sevilla - Spain* **Session 39, paper 4**.

Alberto, L. F. C., Silva, F. H. J. R. e Bretas, N. G. (2002b). Funções de lyapunov estendida para modelos detalhados de sistemas de potência, *13 Congresso Brasileiro de Automatica - Natal - Brasil* .

Athay, T., Podmore, R. e Virmani, S. (1979). A practical method for the direct analysis of transient stability, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems* **PAS-98, No.2**: 573–584.

Aylett, P. D. (1958). The energy-integral criterion of transient stability limits of power systems, *Proc. IEE* **vol. 105c**: 527–536.

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM studies in applied mathematics, vol. 15.

Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. (2000a). Energy function for power systems with transmission losses: extension of the invariance principle, *Proc. International Conference on Power System Technology* **vol. 1**: 145–150.

Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. (2000b). *Estabilidade transitória em sistemas eletroenergéticos*, EESC/USP.

Chiang, H. D. (1989). Study of the existence of energy functions for power systems with losses, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **36**(11): 1423–1429.

Chiang, H. D. e Chu, C.-C. (1995). Theoretical foundation of the bcu method for direct stability analysis of network-reduction power system models with small transfer conductances, *IEEE Trans on Circuits and Systems* **CAS-42, No. 5**: 252–265.

Chiang, H. D., Hirsch, M. W. e Wu, F. F. (1988). Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE Trans on Automatic Control* **33-1**: 16–27.

Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1987). Foundations of direct methods for power system transient stability analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems* **CAS-34, No. 2**: 160–173.

Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1988). Foundations of the potential energy boundary surface method for power system transient analysis, *IEEE Trans on Circuits and Systems* **CAS-35, No. 6**: 712–728.

Chiang, H. D., Wu, F. F. e Varaiya, P. P. (1994). A bcu method for direct analysis of power system transient stability, *IEEE Trans. on Power Systems* **9-3**: 1194–1208.

Chiang, H., Zheng, Y., Tada, Y., Okamoto, H., Zhou, Y. e Koyanagi, K. (2002). A bcu-guided time-domain method for energy margin calculation of practical power systems, *Proc. 14th Power Systems Computaion Conference - Sevilla - Spain* **paper 6**: session 39.

Chung, T. S. e Fang, D.-Z. (1995). A fast approach to transient stability estimation using an improved potential energy boundary surface, *Electric Power Systems Research* **34**: 47–55.

Dong, Y. e Pota, H. R. (1991). Fast transient stability assessment using large-step numerical integration, *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.* **138**: 377–383.

Fang, D.-Z., Chung, T. . S., Zang, Y. e Song, W. (2000). Transient stability limit conditions analysis using a corrected transient energy function approach, *IEEE Transactions on Power Systems* **15**: 804–810.

Fouad, A. A. e Vittal, V. (1992). *Power System Transient Stability Analysis Using the Transient Energy Function Method*, Prentice Hall, New Jersey.

Guckenheimer, J. e Holmes, P. (1990). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of vector fields*, Series: Applied Mathematical sciences, vol.42 - Springer-Verlag.

Haque, M. H. (1996). Novel method of finding the first swing stability margin of a power system from time domain simulation, *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.* **143**: 413–419.

Henner, V. E. (1974). Comments on "on lyapunov functions for power systems with transfer conductances", *IEEE Trans on Automatic Control* pp. 621–623.

Kakimoto, N., Ohsawa, Y. e Hayashi, M. (1978). Transient stability analysis of electric power systems via lure type lyapunov function, parts i and ii, *Trans of IEE of Japan, vol. 98, No 5/6* .

Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems - 2nd edition*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.

Kwatny, H. G., Bahar, L. Y. e Pasrija, A. K. (1985). Energy-like lyapunov functions for power system stability analysis, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **32**(11): 1140–1149.

Maria, G. A., Tang, C. e Kim, J. (1990). Hybrid transient stability analysis, *IEEE Transactions on Power Systems* **5**(2): 384–391.

Narasimhamurthi, N. (1984). On the existence of energy functions for power systems with transmission losses, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **31**(2): 199–203.

Nazareno, I. S. (2003). *Método dinâmico para deteção do PEBS e 'shadowing method para o cálculo do ponto de equilíbrio instável de controle em estudos de estabilidade transitória'*, EESC-USP Dissertação de mestrado.

Padiyar, K. R. (1996). *Power system dynamics*, John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Pai, M. A. (1981). *Power system stability (Analysis by the direct method of Lyapunov)*, North-Holland publishing company.

Pai, M. A. e Murthy, P. G. (1973). On lyapunov functions for power systems with transfer conductances, *IEEE Trans on Automatic Control* pp. 181–183.

Ramos, R. A., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2000). *Modelagem de máquinas síncronas aplicada ao estudo de estabilidade de sistemas elétricos de potência*, Publicações EESC/USP.

Ribbens-Pavella, M. e Evans, F. J. (1985). Direct method for studying dynamics of large-scale electric power systems - a survey, *Automatica* **21-1**: 1–21.

Ribbens-Pavella, M. e Murthy, P. G. (1994). *Transient Stability of Power Systems - Theory and Practice*, John Willey & Sons.

Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (1999). Uniform invariance principle and synchronization. robustness with respect to parameter variation, *Journal of Differential Equations* **169-1**: 228–254.

Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2000). On the invariance principle: generalizations and applications to synchronization, *IEEE Trans on Circuits and Systems* **47-5**: 730–739.

Scruggs, J. T. e Milli, L. (2001). Dynamic gradient method for pebs detection in power system transient stability assessment, *Electrical Power and Energy Systems* **23**: 155–165.

Silva, F. H. J. R. (2001). *Funções de Lyapunov para análise de estabilidade transitória em sistemas de potência multimáquinas*, EESC-USP Dissertação de mestrado.

Silva, F. H. J. R., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2003a). Extended lyapunov function for power systems with transmission losses, *Proc. IEEE Bologna Power Tech Conference - Italy* .

Silva, F. H. J. R., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2003b). Smooth perturbation on the classical energy funtion for lossy power system stability analysis, *Proc. IEEE Power Engeneering Society, General Meeting - Toronto* .

Silva, F. H. J. R., Alberto, L. F. C. e Bretas, N. G. (2004). Uma nova função de lyapunov estendida para análise de estabilidade tranistória em sistemas de potência multimáquinas, *14 CBA - Congresso Brasileiro de Automática* **aceito para apresentação**.

Silva, F. H. J. R., Alberto, L. F. C., LondonJr., J. B. A. e Bretas, N. G. (2004). Smooth perturbation on the classical energy funtion for lossy power system stability analysis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **aceito para publicação**.

Treinen, R. T., Vittal, V. e Kliemann, W. (1996). An improved technique to determine the controlling unstable equilibrium point in a power system, *IEEE Trans. on Circuits and Systems* **43-4**: 313–323.

Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.

Willems, J. L. (1971). Direct methods for transient stability studies in power system analysis, *IEEE Trans on Automatic Control* **16-4**: 332–341.

Willems, J. L. e Willems, J. C. (1970). The application of lyapunov methods to the computation of transient stability regions for multimachine power systems, *IEEE Trans on Power Apparatus and Systems* **PAS-89, No. 5/6**: 795–801.

Zaborsky, J., Huang, G., Zheng, B. e Leung, T. C. (1988). On the phase portrait of a class of large nonlinear dynamic systems such as the power system, *IEEE Trans on Automatic Control* **33-1**: 4–15.