USP

Campus de São Carlos

CONTROLE DE ROBÔS MANIPULADORES SUBATUADOS VIA SÍNTESE μ

Autor: Tácio Luiz de Souza Barbeiro

Orientador: Prof. Dr Marco Henrique Terra

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Serviço de Pós-Gradução EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 22/06/01

Ass.: Guilherme

Controle de Robôs Manipuladores Subatuados via Síntese-μ

Tácio Luiz de Souza Barbeiro

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

DEDALUS - Acervo - EESC

31100036716

EESC - USP Biblioteca CAMPUS DE S. CARLOS

São Carlos
2001

Class. TESE
Cutt. 0592
Tombo T0175/01

nt 1197361

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

B233c

Barbeiro, Tácio Luiz de Souza
Controle de robôs manipuladores subatuados via síntese-μ / Tácio Luiz de Souza Barbeiro. -- São Carlos, 2001.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.
Área: Engenharia Elétrica.
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra.

1. Robôs manipuladores subatuados. 2. Controle robusto. 3. Síntese-μ. 4. Método do torque computado. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **TÁCIO LUIZ DE SOUZA BARBEIRO**

Dissertação defendida e julgada em 11-06-2001 perante a Comissão Julgadora:

APROVADO

Prof. Doutor **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Doutor **RICARDO PAULINO MARQUES**
(Escola Politécnica/USP)

APROVADO

Prof. Doutor **JOSÉ JAIME DA CRUZ**
(Escola Politécnica/USP)

Profa. Associada **VILMA ALVES DE OLIVEIRA**
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

p/ **JOSÉ CARLOS A. CINTRA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedico este trabalho aos meus pais, Joaquim e Ana Maria, por terem me permitido chegar até aqui e por todo o incentivo.

Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra pelo incentivo, amizade e confiança durante a orientação deste trabalho.

À minha namorada Lourdes por todo apoio e companheirismo durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de laboratório Adriano, Daniel, Paulo, Benedito, Renato, Guilherme, Arthur, Eric, Karla e todos os outros que não foram aqui mencionados, por tudo.

Ao Prof. Marcel Bergerman pela ajuda, críticas e sugestões.

À minha família por todo o incentivo e confiança.

Aos professores e funcionários do Depto. de Engenharia Elétrica que de forma direta ou indireta participaram do desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP pelo suporte financeiro fornecido durante a realização deste trabalho, sem o qual o mesmo não seria possível.

Sumário

Lista de Figuras vi

Lista de Abreviaturas e Siglas ix

Lista de Símbolos x

Resumo xiii

Abstract xiv

1 Introdução 1

2 Robô Manipulador Subatuado 4

2.1 Descrição 4

2.1.1 Controle Sequencial 5

2.2 Modelo Dinâmico 6

2.2.1 Estratégia de Controle A 8

2.2.2 Estratégia de Controle P 8

2.2.3 Estratégia de Controle AP 9

2.2.4 Relação de Malha Aberta 9

3 Linearização e Controle 11

3.1 Linearização por Realimentação 11

3.2 Metodologias de Controle 12

3.2.1 Método do Torque Computado 12

3.2.2 Método de Controle Robusto 14

3.3 Modelo Nominal da Planta 15

4 Síntese μ 16

4.1 Controle Ótimo Realimentado 16

4.2 Problema H_∞ 17

4.3 Valor Singular Estruturado 21

4.3.1 Estrutura Típica 21

4.3.2 Definições de μ 22

4.3.3 Limites 23
4.4 Problema μ 24
4.4.1 Aproximação 24
4.4.2 Procedimento de Síntese 25
4.5 Método de Iterações D-K 26

5 O Robô Manipulador UArmII **28**
5.1 Descrição 28
5.2 Modelo Dinâmico do UArmII 30
5.2.1 Expressões Algébricas do Modelo 30
5.3 Modelo no Espaço de Estados 31
5.3.1 Modelo Nominal para Configuração AAA 31
5.3.2 Modelo Nominal para as Configurações AAP, APA e PAA 32
5.3.3 Modelo Nominal para as Configurações APP, PAP e PPA 33

6 Procedimento de Projeto **34**
6.1 Determinação da Planta Aumentada 34
6.1.1 Estrutura de Perturbação Δ 36
6.2 Resultados de Projeto 37
6.2.1 Exemplo de Projeto: Segunda Etapa de Controle - Configuração PAP . . 38

7 Resultados **43**
7.1 Testes de Posicionamento 43
7.1.1 Configuração AAA 44
7.1.2 Configuração AAP 44
7.1.3 Configuração APA 44
7.1.4 Configuração PAA 45
7.1.5 Configuração PAP 45
7.2 Testes de Robustez 45
7.3 Testes Comparativos - H_∞ e Síntese-μ 46

8 Conclusões **82**

A Ambiente de Simulação **84**

B Especificações do UArmII **87**

C Programas Desenvolvidos **89**
C.1 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para a Configuração AAA do UArmII 89
C.1.1 Arquivo de Definição - Conf. AAA 93
C.2 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para as Configurações AAP, APA e PAA do UArmII 94

C.2.1 Arquivo de Definição - Conf. AAP, APA, PAA 98
C.3 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para a Configuração PAP do UArmII 98
C.3.1 Arquivo de Definição - Conf. PAP 101

D Matrizes de Projeto **103**

E Controladores Projetados **109**

Referências Bibliográficas **117**

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 Representação gráfica de um manipulador subatuado 5

FIGURA 2.2 Diagrama do método de controle sequencial 6

FIGURA 3.1 Diagrama da metodologia de controle 15

FIGURA 4.1 Objetivos de desempenho de malha-fechada 17

FIGURA 4.2 Diagrama de síntese 18

FIGURA 4.3 Descrição LFT do problema de controle 21

FIGURA 4.4 Diagrama de análise 22

FIGURA 4.5 Síntese-μ via escalonamento 27

FIGURA 5.1 Manipulador experimental $UArmII$ 29

FIGURA 5.2 Diagrama do manipulador $UArmII$ 29

FIGURA 6.1 Diagrama de interconecção (planta aumentada) - Malha Aberta 35

FIGURA 6.2 Funções pesos W_p, W_Δ e S, $K_\mu S$ desejados 35

FIGURA 6.3 Representação do problema de controle 37

FIGURA 6.4 Resultados de projeto - 1ª iteração - Conf. PAP 40

FIGURA 6.5 Resultados de projeto - 2ª iteração - Conf. PAP 41

FIGURA 6.6 Ajuste das funções pesos - Conf. PAP 42

FIGURA 7.1 Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. AAA - Simulação 47

FIGURA 7.2 Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental 48

FIGURA 7.3 Posição final $q_d = [10\ 20\ 30]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental 49

FIGURA 7.4 Posição final $q_d = [81\ \ -48.4\ 19.2]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental . . . 50

FIGURA 7.5 Posição final $q_d = [-7.8 \ -86.7 \ 57.8]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental . . 51

FIGURA 7.6 Posição final $q_d = [-9.9 \ 20.8 \ 52.5]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental 52

FIGURA 7.7 Posição final $q_d = [-35.2 \ -55.9 \ -55.2]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental 53

FIGURA 7.8 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. AAP - Simulação 54

FIGURA 7.9 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. AAP - Experimental 55

FIGURA 7.10 Posição final $q_d = [10 \ 20 \ 30]^\circ$ - Conf. AAP - Experimental 56

FIGURA 7.11 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. APA - Simulação 57

FIGURA 7.12 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. APA - Experimental 58

FIGURA 7.13 Posição final $q_d = [10 \ 20 \ 30]^\circ$ - Conf. APA - Experimental 59

FIGURA 7.14 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. PAA - Simulação 60

FIGURA 7.15 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. PAA - Experimental 61

FIGURA 7.16 Posição final $q_d = [10 \ 20 \ 30]^\circ$ - Conf. PAA - Experimental 62

FIGURA 7.17 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. PAP - Simulação 63

FIGURA 7.18 Posição final $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Conf. PAP - Experimental 64

FIGURA 7.19 Posição final $q_d = [10 \ 10 \ 10]^\circ$ - Conf. PAP - Experimental 65

FIGURA 7.20 $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Controlador PD - Massa Adicionada 66

FIGURA 7.21 $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Controlador PD e K_μ - Massa Adicionada 67

FIGURA 7.22 $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Controlador PD - Distúrbio Externo 68

FIGURA 7.23 $q_d = [20 \ 20 \ 20]^\circ$ - Controlador PD e K_μ - Distúrbio Externo 69

FIGURA 7.24 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAA . . 70

FIGURA 7.25 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAA . . . 71

FIGURA 7.26 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAA 72

FIGURA 7.27 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAA 73

FIGURA 7.28 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAP . . 74

FIGURA 7.29 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAP . . . 75

FIGURA 7.30 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAP 76

FIGURA 7.31 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAP 77

FIGURA 7.32 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. PAP . . . 78

FIGURA 7.33 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. PAP . . . 79

FIGURA 7.34 Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. PAP 80

FIGURA 7.35 Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. PAP 81

FIGURA A.1 Ambiente de simulação do UArmII 85

FIGURA A.2 Janela de gráficos 86

Lista de Abreviaturas e Siglas

- GDL - Graus de Liberdade;
- CTq - Torque Calculado;
- UARM - *Underactuated Robot Manipulator*;
- MIMO - *Multi-Input Multi-Output*;
- LFT - *Linear Fractional Transformation*;
- FDI - *Fault Detection and Isolation*;
- LMI - *Linear Matrices Inequalities*;
- VSC - *Variable Structure Control*;
- SSV - *Structured Singular Value* (μ).

Lista de Símbolos

- n é uma dimensão arbitrária;
- $\mathbb{R}^n$ denota o espaço n-dimensional real;
- $\mathbb{C}^n$ denota o espaço n-dimensional complexo;
- $\mathcal{R}$ denota o conjunto dos números reais racionais;
- $\mathcal{L}_\infty$ é um espaço de funções limitadas em $j\mathbb{R}$ incluindo o ∞;
- $\mathcal{H}_\infty$ é um subespaço (fechado) de $\mathcal{L}_\infty$ com funções analíticas e limitadas do semi-plano direito (aberto);
- $\mathcal{RH}_\infty$ é o conjunto de funções reais racionais do subespaço $\mathcal{H}_\infty$;
- I_n é uma matriz identidade $n \times n$;
- $diag(a_1, ..., a_n)$ é uma matriz diagonal $n \times n$, sendo a_i o *i-ésimo* elemento da diagonal;
- $\sigma_i(A)$ é o *i-ésimo* valor singular da matriz A;
- $\overline{\sigma}(A)$ é o maior valor singular da matriz A;
- $\|A\|$ é a norma espectral de A: $\|A\| = \overline{\sigma}(A)$;
- $\|A\|_\infty$ é a norma H_∞ de A;
- m_i é a massa do *i-ésimo* elo;
- I_i é a inércia do *i-ésimo* elo;
- l_i é o comprimento do *i-ésimo* elo;
- l_{ci} é o centro de massa do *i-ésimo* elo;
- M é a matriz de inércia;
- C é a matriz de Coriolis e termos centrífugos;
- G é o vetor de torques gravitacionais;

- F_{atr} é o vetor de torques de fricção;
- n_T é o número total de juntas do manipulador;
- n_a é o número de juntas ativas;
- n_p é o número de juntas passivas;
- n_u é o número de juntas passivas destravadas;
- n_l é o número de juntas passivas travadas;
- n_c é o número de juntas controladas;
- t_0 é o tempo inicial;
- t_f é o tempo final;
- q é o vetor de posições das juntas;
- $\dot{q}$ é o vetor de velocidades angulares das juntas;
- $\ddot{q}$ é o vetor de acelerações angulares das juntas;
- τ é o vetor de torques nas juntas;
- b é o vetor de torques não inerciais;
- q^d é o vetor de posições finais desejadas das juntas;
- q_a é o vetor das juntas ativas;
- q_p é o vetor das juntas passivas;
- q_u é o vetor das juntas passivas destravadas;
- q_l é o vetor das juntas passivas travadas;
- q_c é o vetor das juntas controladas;
- q_r é o vetor das juntas restantes;
- x é o vetor das variáveis de estado;
- e é o erro entre a posição atual é a posição de referência;
- u é o vetor de entradas do sistema nominal;
- y_n é o vetor de saídas do sistema nominal;
- u' é o vetor de entradas de controle;

- y' é o vetor de variáveis controladas;
- w é o vetor composto pelo sinal de referência, distúrbios e ruído dos sensores;
- z é o vetor de variáveis medidas;
- Δ é a matriz de incertezas estruturadas;
- D é uma matriz de escalonamento;
- K_p é a matriz de ganhos proporcionais;
- K_v é a matriz de ganhos derivativos;
- ω é o vetor de freqüências;
- V é o mapeamento de malha fechada;
- P_{nom} é a matriz representativa de um sistema nominal;
- P é a matriz representativa de um sistema aumentado;
- K é o controlador do sistema;
- T é a matriz de transferência do sistema malha fechada;
- S é a função sensibilidade do sistema realimentado;
- $\mathbf{B}$ é uma bola unitária fechada;
- $\mathbf{B}^\circ$ é uma bola unitária aberta;
- $Ric(A)$ é a solução estabilizante de uma equação algébrica de Ricatti;
- $\mathcal{F}_l(M, Q)$ é uma Transformação Fracional Linear inferior;
- $\mathcal{F}_u(M, Q)$ é uma Transformação Fracional Linear superior;

Resumo

BARBEIRO T. L. S. (2000) Barbeiro, Tácio Luiz de Souza *Controle de Robôs Manipuladores Subatuados via Síntese μ*. São Carlos, 2000. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho trata da implementação de uma técnica de controle robusto, Síntese-μ, em um robô manipulador de três graus de liberdade com juntas passivas. A necessidade de um de controle robusto se deve ao fato de que em uma aplicação real o sistema está sujeito a mudanças nos seus parâmetros internos e a distúrbios externos (ruído dos sensores, etc).

Aqui, uma metodologia de controle robusto que combina o método do torque computado e controladores robustos projetados via Síntese-μ é proposta e utilizada com êxito. O equacionamento matemático da dinâmica do sistema é apresentado e a linearização é realizada pela realimentação de estados presente no método. Uma abordagem dos conceitos teóricos presentes na teoria de Síntese-μ é feita e um procedimento de projeto é apresentado. Modelos nominais para diferentes configurações do robô são definidos e controladores robustos são projetados utilizando o método de iterações D-K.

O teste e validação dos controladores projetados são verificados em um ambiente de simulação e também no manipulador experimental *UArmII* (Underactuated Robot Manipulator II), que é um robô manipulador (equipado com 3 juntas, atuadores e freios) projetado para o estudo de dinâmicas passivas.

Palavras–Chave: Robôs Manipuladores Subatuados; Controle Robusto; Síntese-μ; Método do Torque Computado.

Abstract

BARBEIRO T. L. S. (2000) Barbeiro, Tácio Luiz de Souza Underactuated Robot Manipulator Control via μ-Synthesis. *São Carlos, 2000. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*

This work deals with implementation of a robust control technique, μ-Synthesis, in a manipulator robot with three degrees of freedom and passive joints. The necessity of a robust control is due to the fact that in a real application the system is subject to changes in its internal parameters and external disturbances (sensor noise, etc).

Here, a robust control methodology that combines the computed torque method and robust controllers designed via μ-Synthesis is proposal and used with success. The mathematical formulation of the system dynamics is presented and the linearization is accomplished by the state feedback included in the method. An overview of theoretical concepts presents in the μ-Synthesis theory is made and a design procedure is presented. Nominal models for all robot's configurations are defined and robust controllers are designed using the D-K iterations method.

The test and validation of the controllers are realized in a simulation environment and also in the experimental manipulator UArmII (Underactuated Robot Manipulator II), that is a robot manipulator (equipped with 3 joints, actuators and brakes) projected for the study of passive dynamics.

Key–Words: *Underactuated Robot Manipulator; Robust Control; μ-Synthesis; Computed Torque Method.*

Capítulo 1

Introdução

Robôs manipuladores vêm sendo utilizados há algumas décadas para a automação de uma diversidade de tarefas em ambientes industriais. Com o crescente avanço da tecnologia, a utilização desta ferramenta em outras áreas, como exploração espacial, medicina e ambientes de difícil acesso ou hostis, como instalações nucleares, têm exigido que estes sistemas sejam cada vez mais robustos e tolerantes a falhas, já que a manutenção destes sistemas é demorada e de custo elevado. Portanto, metodologias de controle mais sofisticadas têm sido desenvolvidas com a finalidade de superar os efeitos indesejáveis presentes na operação destes sistemas mais complexos.

A ocorrência de uma falha no sistema robótico (por exemplo, uma falha elétrica em um dos atuadores) faz com que o manipulador torne-se um sistema subatuado. No entanto, o sistema também pode ser projetado ou mesmo operado de tal forma que apresente a característica de subatuação. O fato de que nem todos os graus de liberdade do sistema são diretamente controlados caracteriza a situação de subatuação. Estudos recentes proporcionaram o desenvolvimento de uma técnica de controle para manipuladores subatuados, em que diferentemente de um manipulador convencional, as juntas não atuadas são controladas indiretamente através de seu acoplamento dinâmico com as juntas atuadas. Utilizando esta técnica de controle é possível implementar um sistema robótico capaz de se reconfigurar e terminar o procedimento de posicionamento, após a ocorrência de uma falha em um dos atuadores.

Mesmo assim, é importante ressaltar que a maioria dos sistemas reais estão sujeitos a mudanças nos seus parâmetros internos e a distúrbios externos (ruído dos sensores, etc). É por esse motivo que controladores robustos capazes de proporcionar uma maior confiabilidade desses sistemas de controle, têm sido um dos tópicos de maior atenção da comunidade de controle nos últimos tempos.

A robustez é uma característica desejável dos sistemas de controle por várias razões, entre

elas, a preocupação permanente de todo projetista que os sistemas de controle funcionem satisfatoriamente, ainda que as condições de operação sejam distintas daquelas consideradas no modelo de projeto (nominal). O objetivo deste trabalho é realizar a implementação de uma técnica de projeto de controle robusto, Síntese-μ, em um robô manipulador de três graus de liberdade com juntas passivas. Na arquitetura do sistema proposto, são utilizadas duas metodologias de controle: método do torque calculado e controle robusto via Síntese-μ. A primeira tem por objetivo linearizar o sistema original e proporcionar um modelo nominal para o manipulador, e a segunda tem por função garantir insensibilidade a erros de modelagem e variações paramétricas, como também rejeição à distúrbios externos. A combinação destas metodologias tem a finalidade proporcionar um bom acompanhamento dos sinais de referência, implicando em um desempenho satisfatório do manipulador.

Neste trabalho, a técnica de projeto de controle robusto, Síntese-μ, será enfatizada e apresentada com maiores detalhes. O diferencial desta técnica está no fato de que elementos desconhecidos são representados por uma matriz de perturbação Δ, que é incorporada na análise do sistema e síntese dos controladores. O procedimento de síntese consiste em uma sequência de otimizações que resulte em um controlador estabilizante para a "pior situação" do sistema perturbado. Em outras palavras, consiste em projetar um controlador que minimize a medida da menor perturbação que causa instabilidade no sistema realimentado. A técnica pode ser utilizada em sistemas multivariáveis (manipulador) e apresenta natureza sistemática. É realizada de maneira iterativa, alternando entre uma minimização de um sistema escalonado e a solução de um problema H_∞. Uma das vantagens observadas com a utilização desta técnica de projeto e metodologia de controle foi a ausência de ajustes finais que normalmente antecedem a implementação dos controladores.

O teste e validação da metodologia de controle robusto foram realizados em um ambiente de simulação e no manipulador experimental, *UArmII* (Underactuated Robot Manipulator II), adquirido através do projeto FAPESP $N°$ 98/00649-5, que se encontra em funcionamento no Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) do Departamento de Engenharia Elétrica da USP em São Carlos. Foram relizados testes de posicionamento para cinco configurações do robô manipulador, nos quais o desempenho e o acompanhamento do erro podem ser analisados. Testes de robustez também foram elaborados com a finalidade de verificar a eficácia do sistema de controle. Com o objetivo de se fazer comparações, os testes de robustez também foram realizados utilizando uma metodologia de controle convecional.

Neste trabalho, apresenta-se no Capítulo 2 uma visão geral sobre robôs manipuladores. Primeiramente uma descrição de manipuladores robóticos é realizada e em seguida a técnica de controle e o equacionamento matemático da dinâmica de manipuladores subatuados são apresentados.

No Capítulo 3, a técnica de linearização é descrita e a metodologia de controle robusto proposta é apresentada. Ainda neste Capítulo, encontra-se uma representação no espaço de estados para o robô manipulador. A seguir, no Capítulo 4, uma breve introdução sobre síntese H_∞ é feita. A apresentação do problema de Síntese-μ, as aproximações consideradas e o método de soluções iterativas também estão presentes neste capítulo.

A descrição do robô *UArmII* e os modelos nominais para todas as configurações do manipulador são apresentadas no Capítulo 5. O Capítulo 6 traz o procedimento de determinação da planta aumentada utilizada no projeto dos controladores. No capítulo 7, encontram-se os resultados de simulação e os testes experimentais de posicionamento e robustez realizados no *UArmII*. Finalmente, o Capítulo 8 traz as discussões e conclusões sobre o trabalho realizado.

Capítulo 2

Robô Manipulador Subatuado

Robôs manipuladores estão sendo amplamente utilizados em sistemas de engenharia, tais como processos de produção, exploração espacial, medicina e outras aplicações. Uma revisão de resultados existentes na literatura sobre robôs manipuladores subatuados é apresentada neste capítulo.

2.1 Descrição

Um robô manipulador pode ser definido como uma máquina projetada para realizar uma variedade de tarefas, como mover materiais, ferramentas ou artifícios especializados. O robô manipulador utilizado neste trabalho é planar e constituído por:

- Estrutura Mecânica: constituída por um conjunto de elos conectados através de juntas e um efetuador,
- Atuadores: motores elétricos presentes nas juntas responsáveis pela movimentação do manipulador através de forças aplicadas direta ou indiretamente nas juntas,
- Sensores: *encoders* acoplados nas juntas que indicam a posição momentânea do manipulador,
- Sistema de Controle: constituído por um sistema eletrônico de amplificação e um computador responsável pela supervisão e controle do robô manipulador.

Robôs com um determinado número de juntas podem ser configurados de diferentes maneiras para realizar o mesmo posicionamento de um objeto ligado ao efetuador. O número de juntas determina a quantidade de graus de liberdade do sistema (GDLs). No caso do braço e da mão humana, estes apresentam juntos cerca de 30 graus de liberdade. O termo *subatuação* refere-se

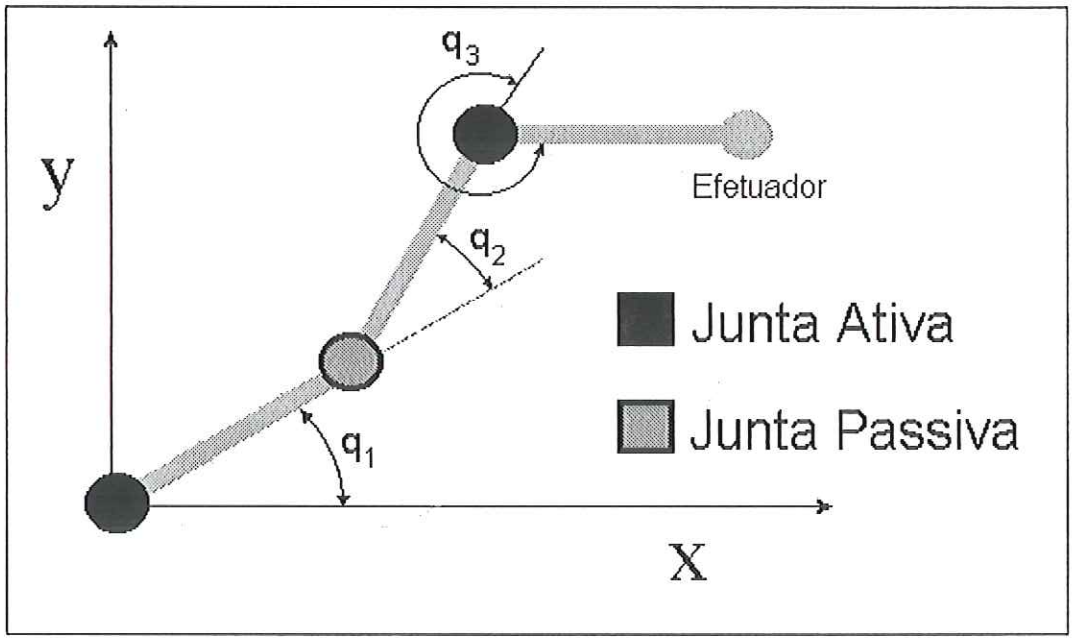


Figura 2.1: Representação gráfica de um manipulador subatuado

ao fato de que nem todos os graus de liberdade do sistema são diretamente controlados. A presença de graus de liberdade não atuados faz com que sistemas subatuados sejam essencialmente diferentes de sistemas convencionais totalmente atuados. No caso de um manipulador, o termo subatuado significa que nem todas as juntas são equipadas com atuadores. Um manipulador é dito subatuado quando possui ao menos uma junta passiva, veja Figura 2.1. Junta passiva é aquela que não possui atuadores, somente possui um freio que quando acionado mantém a posição da junta fixa. Neste trabalho, será considerado um robô manipulador subatuado com n_T juntas, sendo que n_a juntas são ativas, e n_p juntas são passivas, sendo que todas as juntas (ativas e passivas) possuem sensores de posição.

2.1.1 Controle Sequencial

O objetivo do controle é fazer com que todas as juntas atinjam posições finais q^d, partindo de posições inicias $q(t_0)$ depois de um determinado tempo $t_f > 0$, $q(t_f) = q^d$. Em um manipulador subatuado, nem todos os GDL podem ser controlados ativamente ao mesmo tempo, já que o número de atuadores é sempre menor que o número de graus de liberdade. Portanto, para controlar todas as juntas de um manipulador subatuado, duas etapas de controle devem ser realizadas. Na primeira etapa as juntas passivas são controladas indiretamente para suas posições finais por meio de torques aplicados nas juntas ativas. O acoplamento dinâmico existente entre as juntas ativas e passivas permite a realização desta etapa de controle. Ao atingirem a posição final, as juntas passivas são travadas e inicia-se a segunda etapa de controle. Nesta etapa, as juntas ativas são controladas para suas posições finais como se o manipulador fosse totalmente

Figura 2.2: Diagrama do método de controle sequencial

atuado, já que as juntas passivas estão travadas. Este método de controle só é válido quando $n_a \geq n_p$ e um diagrama esquemático é apresentado na Figura 2.2. Há diferentes maneiras de realizar as etapas e cada uma leva à uma estratégia de controle diferente. O equacionamento matemático da dinâmica do manipulador e das estratégias de controle serão apresentados na próxima seção.

2.2 Modelo Dinâmico

Considerando um manipulador de n_T juntas, sendo q um vetor $n_T \times 1$ contendo os ângulos, e τ um vetor $n_T \times 1$ contendo os torques das juntas, a equação dinâmica do manipulador é encontrada via aproximação Lagrangiana clássica em CRAIG (1989):

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + F_{atr}(q,\dot{q}) \tag{2.1}$$

sendo, M uma matriz $n_T \times n_T$ simétrica, definida positiva, a matriz de inércia; C uma matriz $n_T \times n_T$ referente a força de Coriolis, e aos termos centrífugos; G um vetor $n_T \times 1$ referente aos torques gravitacionais; e F_{atr} um vetor $n_T \times 1$ referente aos torques originados pelo atrito. A matriz de inércia e a de torques gravitacionais são funções somente da posição das juntas do manipulador, enquanto que a matriz de Coriolis e termos centrífugos e a de torques originados pelo atrito são funções das posições e das velocidades das juntas. Por conveniência, combina-se, tal como em BERGERMAN (1996), os vetores do lado direito de (2.1), exceto $M(q)\ddot{q}$, em um vetor de torques não inerciais b:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q,\dot{q}). \tag{2.2}$$

Assume-se que n_a graus de liberdade do manipulador são juntas ativas com atuadores e sensores de deslocamento. Os $n_p = (n_T - n_a)$ graus de liberdade restantes são juntas passivas que possuem freios ao invés de atuadores. Para fazer distinção entre as juntas ativas e as juntas passivas, particiona-se a equação (2.2) como segue:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ap} \\ M_{pa} & M_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_p \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

sendo que os subíndices a e p denotam as quantidades relativas às juntas ativas e passivas, respectivamente.

Quando os freios são acionados, as juntas ativas podem ser controladas sem afetar o estado das juntas passivas. Quando os freios são liberados, as juntas passivas podem se mover livremente e são controladas indiretamente pelas forças de acoplamento geradas pelo movimento das juntas ativas. O número de juntas destravadas no instante de tempo considerado será representado pela variável n_u. Assim, para diferenciar as juntas passivas travadas das juntas passivas liberadas, a equação (2.3) é particionada:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_u \\ \tau_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} & M_{al} \\ M_{ua} & M_{uu} & M_{ul} \\ M_{la} & M_{lu} & M_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_a \\ \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \\ b_l \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

sendo que os subíndices a, u e l representam as quantidades relativas às juntas ativas, passivas destravadas e passivas travadas, respectivamente. Na equação anterior, $\tau_u = 0$, já que não é aplicado torque nas juntas passivas liberadas. Por outro lado, as juntas passivas travadas não apresentam aceleração angular, $\ddot{q}_l = 0$, pois não se movem quando seus freios estão acionados. Na prática, o torque nas juntas travadas τ_l contraria os torques inerciais e não inerciais, como podemos observar na terceira linha do lado direito da equação (2.4). Portanto, do ponto de vista de controle esta linha da equação não é relevante e será eliminada. A equação mais importante é a segunda linha do sistema de equações anterior, que descreve a dinâmica das juntas passivas:

$$M_{ua}\ddot{q}_a + M_{uu}\ddot{q}_u + b_u = 0. \tag{2.5}$$

Esta equação diferencial de segunda ordem representa as restrições impostas ao sistema pelas juntas passivas liberadas. No máximo, n_a juntas podem ser controladas em um determinado momento, ARAI & TACHI (1991). Essas juntas podem ser ativas, um subconjunto de n_a juntas passivas (quando $n_p \geq n_a$), ou uma combinação de juntas ativas e passivas. Para propósitos de controle, é conveniente reescrever a equação dinâmica (2.4) de uma forma que se possa distinguir facilmente as juntas que estão sendo controladas das juntas restantes. Para isso, define-se um vetor q_c com dimensão $n_a \times 1$ que contém as posições das juntas que estão sendo controladas e um q_r contendo o restante das juntas, excluídas as juntas travadas. Dessa forma, a dinâmica do manipulador passa a ser escrita em termos de q_c e q_r como segue:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{ac} & M_{ar} \\ M_{uc} & M_{ur} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_c \\ \ddot{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

e a equação de restrição (2.5) se torna:

$$M_{uc}\ddot{q}_c + M_{ur}\ddot{q}_r + b_u = 0. \tag{2.7}$$

Há três possíveis maneiras de se formar os vetores q_c de dimensão $n_a \times 1$. Cada uma conduz à uma estratégia de controle diferente para o manipulador subatuado. As três estratégias de controle são descritas detalhadamente a seguir.

2.2.1 Estratégia de Controle A

Nesta estratégia, somente juntas ativas são controladas. Neste caso, q_c contém apenas juntas ativas e todas as outras juntas (i.e., as juntas passivas) ficam travadas em suas respectivas posições. Esta escolha permite controlar o manipulador como se o mesmo fosse totalmente atuado.

Neste caso, tem-se $\ddot{q}_c = \ddot{q}_a$, e a dimensão de q_r é zero. A equação dinâmica (2.6) se reduz a:

$$\tau_a = M_{aa}\ddot{q}_a + b_a. \tag{2.8}$$

Durante a estratégia A, a restrição (2.5) desaparece porque a dimensão de q_u é zero.

2.2.2 Estratégia de Controle P

Nesta situação, q_c contém apenas juntas passivas (somente possível quando o número de juntas passivas é pelo menos igual a n_a). Neste caso, todas as outras juntas passivas, se houver, ficam travadas enquanto q_c é controlado. Esta escolha garante que as juntas passivas que não estão sendo controladas não se movimentem e não introduzam perturbações dinâmicas nas juntas que estão sendo controladas.

Neste caso, $\ddot{q}_c = \ddot{q}_u$, $\ddot{q}_r = \ddot{q}_a$, e a equação dinâmica (2.6) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{au} & M_{aa} \\ M_{uu} & M_{ua} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_u \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_a \\ b_u \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Durante esta estratégia, a restrição (2.9) guia o comportamento do movimento das juntas ativas.

Fatorando $\ddot{q}_a$ na segunda linha da equação (2.9) e substituindo na primeira linha, obtém-se

uma relação de malha aberta entre τ_a e $\ddot{q}_u$:

$$\tau_a = \left(M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu}\right)\ddot{q}_u + \left(-M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a\right). \tag{2.10}$$

2.2.3 Estratégia de Controle AP

Nesta estratégia, q_c contém juntas ativas e passivas. Nesta situação, também escolhemos manter todas as outras juntas passivas, se houver, travadas para garantir que elas não se movimentem. Neste caso, o vetor q_c irá conter todos os elementos de q_u e alguns elementos de q_a, enquanto q_r irá conter o restante dos elementos de q_a que não estão em q_c. Uma relação de malha aberta similar a (2.10) pode ser obtida neste caso:

$$\tau_a = \left(M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc}\right)\ddot{q}_c + \left(-M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a\right). \tag{2.11}$$

Durante esta estratégia, a restrição (2.5) tem a forma da equação (2.7).

2.2.4 Relação de Malha Aberta

Todas as três estratégias de controle apresentadas anteriormente conduzem a uma relação de malha aberta entre os torques nas juntas ativas, τ_a, e as acelerações das juntas controladas, $\ddot{q}_c$, da forma:

$$\tau_a = \bar{M}_{ac}\ddot{q}_c + \bar{b}_a \tag{2.12}$$

sendo que $\bar{M}_{ac}$ e $\bar{b}_a$ possuem diferentes formas de acordo com a estratégia de controle realizada, veja a Tabela 2.1. A controlabilidade do sistema descrito pela equação (2.12) não é garantida em todo o espaço de trabalho. Em BERGERMAN (1996) um estudo detalhado mostra a relação entre o grau de acoplamento existente entre as juntas e a controlabilidade do sistema, demonstrando que as juntas controladas sempre serão controláveis quando o índice de acoplamento for maior do que zero. Na Tabela 2.2 a existência de $\bar{M}_{ac}^{-1}$ garante a controlabilidade do sistema.

Tabela 2.1: Relação entre τ_a e $\ddot{q}_c$ para as possíveis estratégias de controle

Estratégia	$\bar{M}_{ac}$	$\bar{b}_a$
A	M_{aa}	b_a
P	$M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu}$	$-M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a$
AP	$M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc}$	$-M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a$

Tabela 2.2: Condição de Existência de $\bar{M}_{ac}^{-1}$ de acordo com a estratégia de controle utilizada

Estratégia	Existência de $\bar{M}_{ac}^{-1}$
A	sempre
P	M_{ua} é invertível
AP	M_{ur} é invertível

Capítulo 3

Linearização e Controle

Robôs manipuladores apresentam uma dinâmica não linear, matematicamente representada pela equação (2.1), dificultando procedimentos de projeto baseados em sistemas lineares. No caso de um manipulador subatuado, em qualquer uma das três estratégias de controle o sistema apresenta uma característica não linear, verificada pela equação (2.12). Neste capítulo, estamos interessados em apresentar a metodologia de controle utilizada e obter uma representação linear na forma de espaço de estados para o manipulador subatuado.

3.1 Linearização por Realimentação

Linearização por realimentação tem sido extensivamente utilizada em robôs manipuladores, veja ARAI & TACHI (1991); BERGERMAN (1996); LEWIS et al. (1993). A semelhança da equação dinâmica:

$$\tau_a = \bar{M}_{ac}\ddot{q}_c + \bar{b}_a \tag{3.1}$$

com aquela de um manipulador totalmente atuado levaram Arai e Tachi a escolher um controlador via linearização por realimentação para controlar as juntas em q_c, ARAI & TACHI (1991).

O método consiste em definir uma entrada auxiliar u com:

$$\tau_a = \bar{M}_{ac}u + \bar{b}_a \tag{3.2}$$

tal que, quando $\bar{M}_{ac}$ é invertível,

$$\ddot{q}_c = u. \tag{3.3}$$

O efeito do controlador via linearização por realimentação (3.2) é desacoplar e linearizar o sistema não linear (3.1).

Considerando a função da entrada de controle dada por (3.3), pode-se definir um vetor de estados x, formado pelos erros de posição e velocidade das juntas:

$$x = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

com $e = q_d - q$, sendo q_d (constante) a trajetória de referência e encontrar uma realização no espaço de estados:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u. \tag{3.5}$$

Esta realização representa um sistema linear da forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.6}$$

controlado pela entrada de controle $u(t)$. A equação (3.3) é dita ser uma transformação de linearização para equação dinâmica não linear original do manipulador. No entanto, nesta aproximação a dinâmica dos atuadores é omitida.

3.2 Metodologias de Controle

A linearização por realimentação é uma poderosa técnica de projeto de controladores. De fato, se escolhermos $u(t)$ tal que (3.5) é estável, o torque de entrada de controle $\tau(t)$ definido por (3.2) faz o braço do robô mover-se de tal maneira que q_c seguirá uma determinada trajetória desejada $q_c^d(t)$. A escolha adequada desta entrada de controle será descrita detalhadamente nas próximas seções.

3.2.1 Método do Torque Computado

A dificuldade de controle de um sistema não-linear como (2.1) pode ser superada utilizando o método do torque computado, CRAIG (1989). Neste método a lei de controle é dividida em duas partes: uma baseada no modelo dinâmico da planta e denominada "*model based*", responsável

em transformar a planta não-linear multivariável (robô) em um conjunto de sistemas lineares desacoplados, e outra, denominada "*error driven*", responsável pelo ajuste baseado no erro entre o movimento desejado e o real. A primeira parte do controlador aparece na lei de controle da seguinte maneira:

$$\hat{\tau} = \hat{M}(q)\tau' + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q) \tag{3.7}$$

sendo $\hat{M}$ um modelo estimado da matriz de inércia do robô, M. Analogamente, $\hat{C}$ e $\hat{G}$ são os modelos estimados da matriz de Corilolis e termos gravitacionais, já que o modelo real apresentará diferenças relativas à Eq. (2.1), implicando no aparecimento de um erro de modelo nas equações dinâmicas de rastreamento do erro.

O torque de controle $\tau' = \ddot{q}$ é calculado pela segunda parte do controlador como:

$$\tau' = \ddot{q}^d + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_p(q^d - q) \tag{3.8}$$

sendo que $\{q^d, \dot{q}^d, \ddot{q}^d\}$ representam a trajetória desejada e K_p e K_v são matrizes diagonais de dimensão $n_T \times n_T$ com cada elemento da diagonal sendo um ganho positivo.

Utilizando a Eq. (3.7) para controlar a Eq. (2.1), isto é, fazendo $\tau = \hat{\tau}$, tem-se:

$$\hat{M}\tau' + \hat{C}\dot{q} + \hat{G} = M\ddot{q} + C\dot{q} + G \tag{3.9}$$

e substituindo τ' temos:

$$\begin{aligned}
\hat{M}[\ddot{q}^d + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_p(q^d - q)] + \hat{C}\dot{q} + \hat{G} &= M\ddot{q} + C\dot{q} + G \\
\hat{M}(\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_pe) &= (M - \hat{M})\ddot{q} + (C - \hat{C})\dot{q} + (G - \hat{G}) \\
\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_pe &= \hat{M}^{-1}[(M - \hat{M})\ddot{q} + (C - \hat{C})\dot{q} + (G - \hat{G})].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Em um robô real, a presença de distúrbios externos, tais como atrito, *ripple* no torque dos atuadores e perturbações na carga também interferem no desempenho do sistema. Se a soma desses distúrbios é definida como d_{ext} e adicionada à equação (3.10), temos:

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_pe = \hat{M}^{-1}[(M - \hat{M})\ddot{q} + (C - \hat{C})\dot{q} + (G - \hat{G}) + d_{ext}]. \tag{3.11}$$

Assim, temos a seguinte equação para a dinâmica do erro:

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = \eta \tag{3.12}$$

sendo que η representa o lado direito da equação (3.11). A equação (3.12) mostra que a dinâmica do erro de rastreamento é forçada por uma perturbação η, gerada pelas diferenças entre os parâmetros do modelo estimado e os parâmetros do robô real e pelas perturbações externas. Portanto, a equação acima mostra que em situações reais, perturbações decorrentes das incertezas do modelo e distúrbios externos degradam o desempenho do manipulador quando o mesmo é controlado através de técnicas de controle convencionais, como o método do torque calculado.

3.2.2 Método de Controle Robusto

O objetivo desta seção é apresentar uma metodologia de controle em que um controlador robusto pode compensar o efeito de dinâmicas não-modeladas e variações paramétricas no modelo do robô. A utilização de um controlador robusto diminui a influência do torque de perturbação η (incertezas paramétricas e perturbações externas), determinado na seção anterior, melhorando o desempenho do manipulador. A questão é: como acrescentar o controle robusto ao sistema de controle de um manipulador?

A metodologia proposta consiste em adicionar à planta (robô), controlada via método do torque computado, um controlador robusto para suprimir, em certo grau, os efeitos decorrentes entre a planta real e a modelada. Como pode ser verificado em KANG et al. (1999); GÓES & ADADE (2000), controladores robustos para manipuladores têm sido projetados em conjunto com controladores convencionais. Trata-se da combinação de um controlador PD via torque calculado com um controlador robusto, garantindo acompanhamento de referência, minimização da influência de distúrbios externos na saída do sistema e robustez a variações paramétricas. Neste trabalho é considerado um controlador robusto projetado via Síntese-μ, capaz de compensar os efeitos indesejáveis descritos anteriormente e também efeitos de dinâmicas não-modeladas. Utilizando este procedimento de síntese o controlador é projetado para um sistema nominal perturbado por incertezas estruturadas. Esta técnica de projeto será apresentada detalhadamente no Capítulo 4. Um diagrama esquemático desta metodologia de controle é apresentado na Figura 3.1. Dessa maneira, a entrada de controle u da equação (3.2) é computada como sendo:

$$u(j\omega) = \ddot{q}^d(j\omega) + K_v\dot{e}(j\omega) + K_p e(j\omega) - K_\mu(j\omega)e(j\omega). \tag{3.13}$$

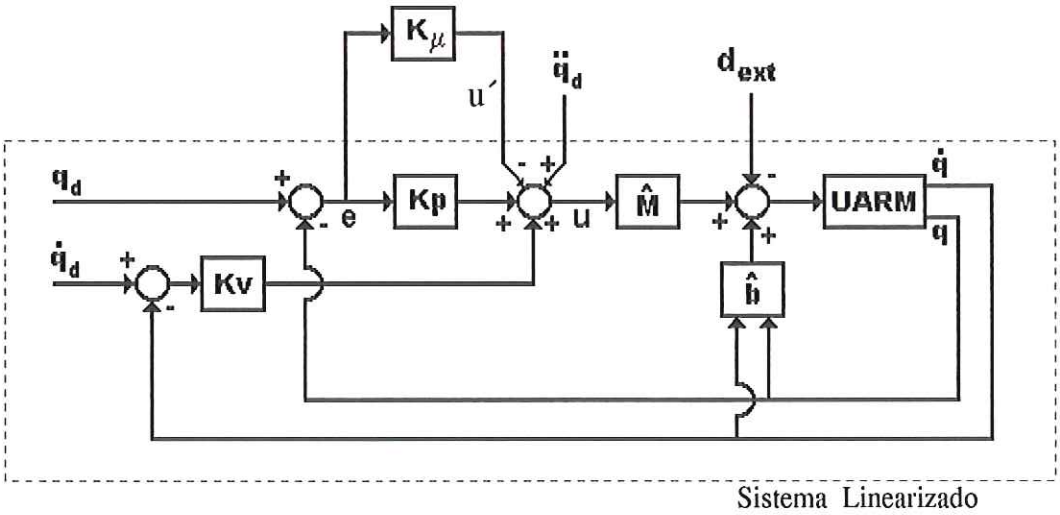


Figura 3.1: Diagrama da metodologia de controle

3.3 Modelo Nominal da Planta

A metodologia do controle combinado apresentada na seção anterior implica em uma alteração no modelo no espaço de estados (3.5) apresentado na Seção 3.1. Uma representação linear no espaço de estados da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{nom}x + B_{nom}u \\ y_n &= C_{nom}x + D_{nom}u \end{aligned} \tag{3.14}$$

é necessária no procedimento de projeto do controlador robusto. Portanto, uma representação no espaço de estados para o modelo nominal do sistema robótico controlado via método do torque computado (TC + robô) é determinada pela equação (3.12):

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

sendo K_p e K_v matrizes de ganho proporcional e derivativo respectivamente.

Capítulo 4

Síntese μ

Neste capítulo, será apresentada uma técnica de projeto de controle robusto, Síntese μ, proposta por DOYLE em 1981. Este procedimento é uma ferramenta de projeto eficaz que garante robustez de desempenho na presença de incertezas estruturadas. No procedimento de síntese dos controladores, problemas H_∞ para o sistema escalonado são resolvidos em um passo intermediário. Esta técnica tem sido aplicada em uma infinidade de sistemas de controle, veja ZHOU et al. (1996); FAN et al. (1991); PACKARD & DOYLE (1993); YOUNG & DOYLE (1990); LUNDSTRöM et al. (1999). Para um melhor entendimento do procedimento de síntese, o objetivo de um controle ótimo e os conceitos teóricos relacionados serão apresentados primeiramente.

4.1 Controle Ótimo Realimentado

Uma aproximação para caracterizar os objetivos de desempenho de malha fechada de um sistema é medir o "tamanho" da matriz de transferência de malha fechada. Para realizar esta medida utiliza-se norma de matrizes. Estas normas resultam em uma medida do tamanho que sinais de saída podem assumir para uma determinada classe de sinais de entrada. Otimizar estes objetivos de desempenho sobre um conjunto de controladores estabilizantes tem sido a principal meta da teoria de controle ótimo, tais como L_1, H_2 e H_∞.

Considere um problema de acompanhamento de referência, com rejeição de distúrbio, ruído de medida e limitação dos sinais de controle, como apresentado na Figura 4.1. Sendo P o sistema que desejamos controlar, um objetivo de projeto razoável é encontrar K que mantenha os erros e os sinais de controle pequenos para qualquer referência na presença de distúrbios externos e ruído nos sensores. Portanto, o ganho existente entre as influências externas (referência, ruídos no sensores e distúrbios externos) e as variáveis reguladas (erros e sinais de controle) é um bom

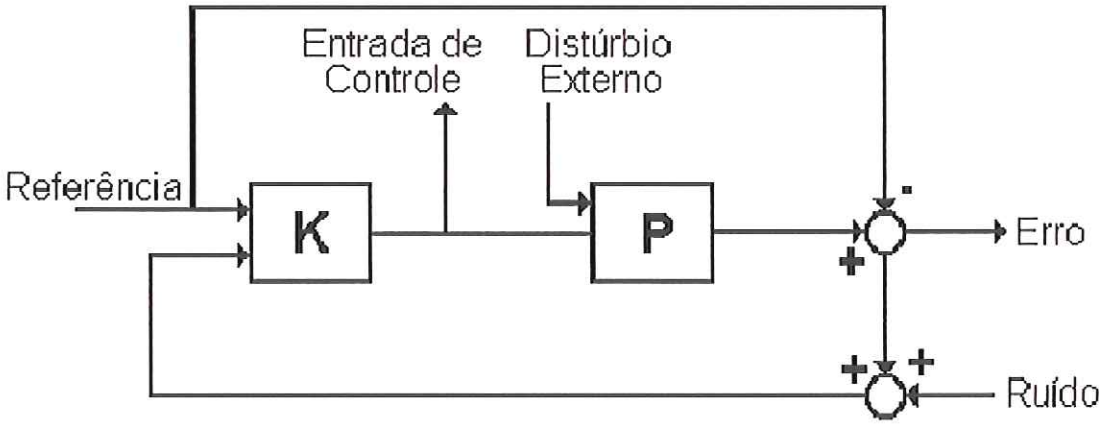


Figura 4.1: Objetivos de desempenho de malha-fechada

parâmetro que expressa os objetivos projeto. Seja V o mapeamento de malha-fechada entre as influências externas e as variáveis reguladas:

$$\begin{bmatrix} Erro \\ Entrada\ de\ Controle \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} Referência \\ Distúrbios\ Externos \\ Ruído \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Uma medida do ganho (V) entre as influências externas e as variáveis reguladas fornece uma indicação sobre o desempenho do sistema. Em outras palavras, um bom desempenho está associado a um valor pequeno para V. Para quantificar o termo ganho matematicamente no domínio da frequência utilizaremos a norma H_∞, definida por:

$$\|V\|_\infty := \max_{\omega \in \mathcal{R}} \overline{\sigma}[V(j\omega)] \tag{4.2}$$

sendo $\overline{\sigma}$ o maior valor singular calculado pontualmente na frequência.

4.2 Problema H_∞

Nesta seção, será apresentado um resumo da solução do Controle H_∞ para um caso geral. Todos os resultados apresentados a seguir estão presentes em ZHOU et al. (1996). Considere o sistema apresentado na Figura 4.2, o sistema P é uma interconecção de malha aberta e contém todos os elementos conhecidos, incluindo o modelo nominal da planta e funções peso que modelam adequadamente o sistema real. Os vetores w e u' representam o conjunto de sinais de entrada do sistema e z e y' o conjunto de sinais de saída. No vetor u' estão presentes

as entradas de controle do sistema e o vetor w é composto pelo sinal de referência, distúrbios e ruído dos sensores. As variáveis medidas formam o vetor z e o vetor y' contém as variáveis controladas. Este sistema dinâmico pode ser representado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{nom}x + B_1 w(t) + B_2 u'(t) \\ z &= C_1 x + D_{11} w(t) + D_{12} u'(t) \\ y &= C_2 x + D_{21} w(t) + D_{22} u'(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

com dimensões $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $y'(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u'(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Supondo que a matriz de transferência P é própria, a seguinte realização pode ser escrita:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_{nom} & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{aum} & B_{aum} \\ \hline C_{aum} & D_{aum} \end{array}\right] = C_{aum}(sI - A_{aum})^{-1}B_{aum} + D_{aum} \tag{4.4}$$

sendo o subíndice *aum* relacionado à planta aumentada (4.3). Considerando $F_l(P,K)$ uma transformação fracional linear inferior (*low*) entre P e K, existe um controlador linear K, com a estrutura:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array}\right] \tag{4.5}$$

tal que o sistema malha fechada $z = F_l(P,K)w$ é estável e a norma H_∞ de $F_l(P,K)$ é menor do que γ. Este resultado será demostrado a seguir.

Considere as seguintes suposições:

(S1) (A_{nom}, B_2) é estabilizável e (C_2, A_{nom}) detectável;

(S2) $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ e $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$;

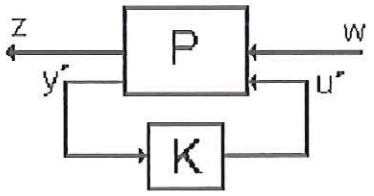


Figura 4.2: Diagrama de síntese

(S3) $\begin{bmatrix} A_{nom} - jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para qualquer $w \in \mathbb{R}$;

(S4) $\begin{bmatrix} A_{nom} - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tem posto linha completo para qualquer $w \in \mathbb{R}$.

A solução é apresentada a seguir em termos das soluções das equações de Riccati (X_∞ e Y_∞) e das matrizes F (*"State Feedback"*) e L (*"Output Injection"*) e está presente em ZHOU et al. (1996).

$$R := D_{1\bullet}^* D_{1\bullet} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad sendo \quad D_{1\bullet} := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{R} := D_{\bullet 1} D_{\bullet 1}^* - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad sendo \quad D_{\bullet 1} := \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A_{nom} & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A_{nom}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{aum} \\ -C_1^* D_{1\bullet} \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} D_{1\bullet}^* C_1 & B_{aum}^* \end{bmatrix}$$
$$J_\infty := \begin{bmatrix} A_{nom}^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A_{nom} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{aum}^* \\ -B_1 D_{\bullet 1}^* \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} D_{\bullet 1} B_1^* & C_{aum} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$X_\infty := Ric(H_\infty) \qquad Y_\infty := Ric(J_\infty) \tag{4.8}$$

$$F := \begin{bmatrix} F_{1\infty} \\ F_{2\infty} \end{bmatrix} := -R^{-1}[D_{1\bullet}^* C_1 + B_{aum}^* X_\infty]$$
$$L := \begin{bmatrix} L_{1\infty} & L_{2\infty} \end{bmatrix} := [B_1 D_{\bullet 1}^* + Y_\infty C_{aum}^*] - \tilde{R}^{-1} \tag{4.9}$$

Particiona-se D_{aum}, $F_{1\infty}$ e $L_{1\infty}$ como segue:

$$\left[\begin{array}{c|c} A' & F' \\ \hline L' & D' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} A_\infty & F_{11\infty}^* & F_{12\infty}^* & F_{2\infty}^* \\ \hline L_{11\infty}^* & D_{1111} & D_{1112} & 0 \\ L_{12\infty}^* & D_{1121} & D_{1122} & I \\ L_{2\infty}^* & 0 & I & 0 \end{array}\right] \tag{4.10}$$

sendo

$$A_\infty := A_{nom} + \gamma^2 B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2. \tag{4.11}$$

A matriz Z_∞ é definida a seguir, veja a equação (4.16).

Supondo que P satisfaz $(S1) - (S4)$:

(a) Existe um controlador $K(s)$ tal que $\|F_l(P,K)\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se:

(i) $\gamma > max(\overline{\sigma}[D^*_{1111}, D^*_{1112}], \overline{\sigma}[D_{1111}, D_{1121}])$;

(ii) $H_\infty \in dom(Ric)$ com $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$;

(iii) $J_\infty \in dom(Ric)$ com $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$;

(iv) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$.

(b) Sendo as condições da parte (a) aceitas, então todos os controladores racionais $K(s)$ internamente estáveis que satisfazem $\|F_l(P,K)\|_\infty \leq \gamma$ são da forma:

$K = F_l(M_\infty, Q)$ para uma $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ arbitrária tal que $\|Q\| < \gamma$ sendo

$$M_\infty = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array}\right] \tag{4.12}$$

e

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121}D^*_{1111}(\gamma^2 I - D_{1111}D^*_{1111})^{-1}D_{1112} - D_{1122} \tag{4.13}$$

$\hat{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$ são matrizes quaisquer (*Cholesky factors*), satisfazendo:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{12}\hat{D}^*_{12} &= I - D_{1121}(\gamma^2 I - D^*_{1111}D_{1111})^{-1}D^*_{1121} \\ \hat{D}^*_{12}\hat{D}_{12} &= I - D^*_{1112}(\gamma^2 I - D_{1111}D^*_{1111})^{-1}D^*_{1112} \end{aligned} \tag{4.14}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{B}_2 &= Z_\infty(B_2 + L_{12\infty})\hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 &= -\hat{D}_{21}(C_2 + F_{12\infty}) \\ \hat{B}_1 &= -Z_\infty L_{2\infty} + \hat{B}_2\hat{D}^{-1}_{12}\hat{D}_{11} \\ \hat{C}_1 &= F_{2\infty} + \hat{D}_{11}\hat{D}^{-1}_{21}\hat{C}_2 \\ \hat{A} &= A_{nom} + B_{aum}F + \hat{B}_1\hat{D}^{-1}_{21}\hat{C}_2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}. \tag{4.16}$$

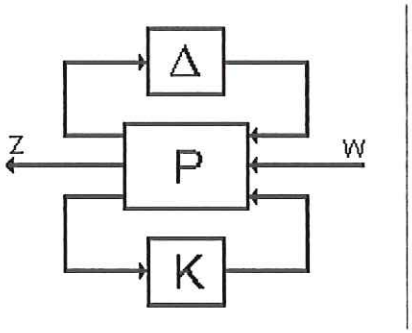


Figura 4.3: Descrição LFT do problema de controle

4.3 Valor Singular Estruturado

A análise da estabilidade e do desempenho para sistemas com incertezas estruturadas requer a definição de uma nova função matricial, denominada Valor Singular Estruturado (SSV), denotada pela letra grega μ.

4.3.1 Estrutura Típica

As incertezas podem ser modeladas como entradas externas ao sistema ou como perturbações no sistema nominal. O desempenho de um sistema é medido em termos do comportamento das saídas ou dos erros. Assim, as suposições que caracterizam a incerteza, o desempenho e o modelo nominal determinam a técnica de análise que deve ser utilizada. Várias combinações dessas suposições formam a base para todas as ferramentas de análise de sistemas lineares convencionais.

Considerando que o modelo nominal é um *Sistema Linear Invariante no Tempo com Dimensão Finita*, o sistema interconectado é da forma:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

e o sistema malha fechada, apresentado na Figura 4.3, é uma transformação fracional linear da perturbação (Δ) e do controlador (K) definida por:

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(P,K),\Delta)w \\ &= \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P,\Delta),K)w. \end{aligned} \tag{4.18}$$

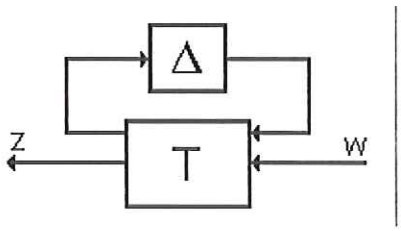


Figura 4.4: Diagrama de análise

Define-se:

$$T(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = \begin{bmatrix} T_{11}(s) & T_{12}(s) \\ T_{21}(s) & T_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

sendo $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$ uma transformação fracional linear superior (*upper*) entre P e Δ. O diagrama desta estrutura é apresentado na Figura 4.4, sendo:

$$z = \mathcal{F}_u(T, \Delta)w = [T_{22} + T_{21}\Delta(I - T_{11}\Delta)^{-1}T_{12}]w. \tag{4.20}$$

Suponha que $K(s)$ é um controlador estabilizante para a planta nominal P. Então, $T(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. No geral, a estabilidade de $\mathcal{F}_u(T, \Delta)$ não implica necessariamente na estabilidade interna do sistema realimentado em malha fechada. Entretanto, elas podem ser equivalentes com uma escolha adequada de w e z. Além disso, o modelo interconectado T sempre pode ser escolhido, tal que $\Delta(s)$ é formada pos blocos diagonais e $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Então, assumimos que $\Delta(s)$ é da forma:

$$\Delta(s) = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, ..., \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, ..., \Delta_F] : \delta_i \in \mathcal{RH}_\infty, \Delta_j \in \mathcal{RH}_\infty\} \tag{4.21}$$

com $\|\delta_i\|_\infty \leq 1$ e $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$.

4.3.2 Definições de μ

Neste item defini-se a função μ, ZHOU et al. (1996). Serão consideradas matrizes $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Na definição de $\mu(T)$, há uma estrutura básica $\mathbf{\Delta}$ em que toda a definição de $\mu(T)$ dependerá da formação de $\mathbf{\Delta}$. Para cada problema, esta estrutura é, em geral, diferente. Isto depende da incerteza e dos objetivos de desempenho do problema. A definição da estrutura envolve a especificação de três aspectos: o tipo de cada bloco, o número de blocos e suas dimensões. Existem dois tipos de blocos: *escalares repetidos* e *completos*. Dois inteiros não negativos, S e F, representam o número de blocos escalares repetidos e o número de blocos completos respectivamente. Para contar suas dimensões, introduz-se inteiros positivos $r_1, ..., r_S$

e $m_1, ..., m_F$. O *i-ésimo* bloco escalar repetido é $r_i \times r_i$, enquanto o *j-ésimo* bloco completo é $m_j \times m_j$. Dados estes inteiros, define-se $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a seguir :

$$\mathbf{\Delta} = \{diag[\delta_1 I_{r_1}, ..., \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, ..., \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}\}. \tag{4.22}$$

Para haver consistência entre todas as dimensões, deve-se ter :

$$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n. \tag{4.23}$$

Frequentemente, precisa-se de subconjuntos de normas limitadas de $\mathbf{\Delta}$ e introduz-se as seguintes notações:

$$\mathbf{B\Delta} = \{\Delta \in \mathbf{\Delta} : \overline{\sigma}(\Delta) \leq 1\} \tag{4.24}$$

$$\mathbf{B}^{\circ}\mathbf{\Delta} = \{\Delta \in \mathbf{\Delta} : \overline{\sigma}(\Delta) < 1\} \tag{4.25}$$

sendo que o sobrescrito $\circ$ simboliza uma bola aberta. Para manter a notação o mais simples possível em (4.22), colocam-se todos os blocos escalares primeiro.
Para $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mu_{\mathbf{\Delta}}(T)$ é definida a seguir:

$$\mu_{\mathbf{\Delta}}(T) := \frac{1}{min\{\overline{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{\Delta}, det(I - T\Delta) = 0\}}. \tag{4.26}$$

Se não existir nenhum $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ que faça $I - T\Delta$ singular, então $\mu_{\mathbf{\Delta}}(T) := 0$.

Em outras palavras, o conceito recíproco da função $\mu_{\mathbf{\Delta}}(.)$ é a medida do menor Δ estruturado que causa instabilidade no sistema realimentado.

4.3.3 Limites

Sendo U uma matriz unitária e D uma matriz de escalonamento, a função $\mu_{\mathbf{\Delta}}(T)$ apresentada anteriormente está limitada da seguinte maneira:

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \rho(UT) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}(T) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \overline{\sigma}(DTD^{-1}) \tag{4.27}$$

sendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{D}$ subconjuntos de $\mathbb{C}^{n \times n}$ definidos da seguinte maneira:

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathbf{\Delta} : UU^* = I_n\}$$

e

$$\mathcal{D} = \left[\begin{array}{c} diag[D_1, ..., D_S, d_1 I_{m1}, ..., d_{F-1} I_{mF-1}, I_{mF}] : \\ D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0 \end{array} \right].$$

O limite inferior é sempre uma igualdade,veja DOYLE (1982), e para qualquer $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, $U \in \mathcal{U}$ e $D \in \mathcal{D}$, as seguintes propriedades são válidas:

$$U^* \in \mathcal{U} \qquad U\Delta \in \mathbf{\Delta} \qquad \Delta U \in \mathbf{\Delta} \qquad \overline{\sigma}(U\Delta) = \overline{\sigma}(\Delta U) = \overline{\sigma}(\Delta) \tag{4.28}$$

$$D\Delta = \Delta D. \tag{4.29}$$

4.4 Problema μ

Considere o sistema representado pela Figura 4.3. A meta de síntese μ é minimizar sobre todos os controladores estabilizantes K, o valor do pico $\mu_\Delta(.)$ da função de transferência do sistema em malha fechada $\mathcal{F}_l(P, K)$. Este problema pode ser descrito matematicamente pela seguinte equação:

$$\min_K \max_\omega \mu_\Delta(\mathcal{F}_l(P, K)(j\omega)) \tag{4.30}$$

sendo $\mu_\Delta(.)$ é uma medida do menor Δ estruturado que causa instabilidade no sistema realimentado, apresentada no item 4.3.2.

4.4.1 Aproximação

Com o objetivo de adequar o problema para um procedimento computacional realiza-se a substituição de μ_Δ por seu limite superior. O limite superior apresentado no item 4.3.3 pode ser escrito como:

$$\mu_\Delta(T) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \overline{\sigma}(D\mathcal{F}_l(P, K)D^{-1}). \tag{4.31}$$

Substituindo (4.31) em (4.30), o problema de otimização pode ser reformulado como:

$$\min_K \max_\omega \min_{D_\omega \in \mathcal{D}} \overline{\sigma}[D_w \mathcal{F}_l(P, K)(jw) D_w^{-1}]. \tag{4.32}$$

Lembrando que a minimização de D é simplesmente uma aproximação de $\mu[\mathcal{F}_l(P, K)]$, D_ω é escolhida do conjunto de matrizes de escalonamento $\mathcal{D}$, independentemente para cada ω. Então,

$$\min_{K} \min_{D_w \in \mathcal{D}} \max_{\omega} \overline{\sigma}[D_w \mathcal{F}_l(P,K)(jw) D_w^{-1}]. \tag{4.33}$$

Sabendo que a expressão $\max_\omega \overline{\sigma}[f(\omega)]$ é denotada por $\|f\|_\infty$, podemos reescrever a equação (4.33) e encontrar uma aproximação para o problema original (4.30):

$$\min_{K} \inf_{D, D^{-1} \in \mathcal{H}_\infty} \|D\mathcal{F}_l(P,K)D^{-1}\|_\infty. \tag{4.34}$$

4.4.2 Procedimento de Síntese

Os conceitos teóricos mostrados anteriormente permitem apresentar o método de síntese proposto. A síntese envolve a seguinte transformação fracional linear, representada pela figura 4.2:

$$T = \mathcal{F}_l(P,K) = P_A + P_B K(I - P_D K)^{-1} P_C \tag{4.35}$$

sendo que $P = \begin{bmatrix} P_A & P_B \\ P_C & P_D \end{bmatrix}$, é escolhida, respectivamente, com:

- Desempenho nominal somente ($\Delta = 0$): $P = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$
- Estabilidade robusta somente: $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{31} & P_{33} \end{bmatrix}$
- Desempenho robusto: $P = \left[\begin{array}{cc|c} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{array}\right]$.

Então, cada caso leva ao problema de síntese:

$$\min_{K} \|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\mu \tag{4.36}$$

que está sujeito à estabilidade interna da planta nominal. O parâmetro μ pode ser obtido por um escalonamento e aplicação da norma H_∞, (para $F \leq 3$ e $S = 0$). Como já foi apresentado anteriormente, uma aproximação razoável é resolver a expressão:

$$\min_{K} \inf_{D, D^{-1} \in \mathcal{H}_\infty} \|D\mathcal{F}_l(P,K)D^{-1}\|_\infty \tag{4.37}$$

utilizando soluções iterativas para K e D. Esta sistemática é conhecida como *iteração D-K*. A matriz $D(s)$, estável, escalonada e de fase mínima, é escolhida de tal forma que seja possível a igualdade $D(s)\Delta(s) = \Delta(s)D(s)$. Para uma determinada matriz de escalonamento D fixada, temos:

$$\min_{K} \|D\mathcal{F}_l(P,K)D^{-1}\|_\infty. \tag{4.38}$$

Este é um problema de otimização H_∞ padrão, descrito na Seção 4.2. Para um determinado controlador estabilizante K, tem-se que:

$$\inf_{D,D^{-1}\in\mathcal{H}_\infty} \|D\mathcal{F}_l(P,K)D^{-1}\|_\infty \tag{4.39}$$

é um problema padrão de otimização convexa e pode ser resolvido pontualmente no domínio da frequência:

$$\sup_{w} \inf_{D_w\in\mathcal{D}} \overline{\sigma}[D_w\mathcal{F}_l(P,K)(jw)D_w^{-1}]. \tag{4.40}$$

Quando não existem blocos escalares ($S = 0$) tem-se que:

$$D_w = diag(d_1^w I, ..., d_{F-1}^w I, I) \in \mathcal{D} \tag{4.41}$$

que é uma matriz bloco diagonal de escalonamento, aplicada em cada freqüência para a resposta em frequência de $\mathcal{F}_l(P,K)(jw)$.

4.5 Método de Iterações D-K

A metodologia de *Iterações D-K* consiste em uma sequência de minimizações: primeiro uma minimização de K com D_w fixo, depois uma minimização ponto a ponto na frequência de D_w com K fixo, então novamente uma minimização de K, e de D_w na sequência, e assim por diante. Pode-se resumir este método nas seguintes etapas:

(i) Fixa-se uma estimativa inicial da matriz de escalonamento $D_w \in \mathcal{D}$ pontualmente através da frequência;

(ii) Encontram-se as funções de transferência escalares $d_i(s), d_i^{-1}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ para $i = 1, 2, ..., (F-1)$, tal que $|d_i(jw)| \approx d_i^w$. Este passo pode resolvido utilizando a teoria de interpolação, YOULA & SAITO (1967).

(iii) Sendo,

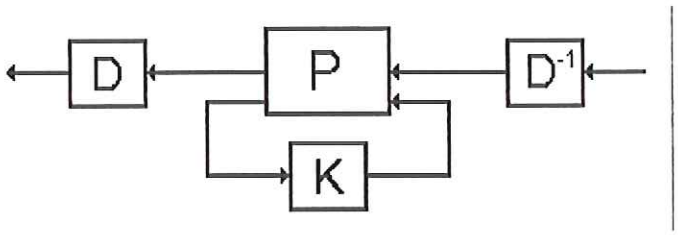


Figura 4.5: Síntese-μ via escalonamento

$$D(s) = diag(d_1(s)I, ..., d_{F-1}(s)I, I). \tag{4.42}$$

Gera-se um modelo no espaço de estados para o sistema, apresentado na Figura 4.5, e descrito abaixo:

$$\hat{P}(s) = \begin{bmatrix} D(s) & \\ & I \end{bmatrix} P(s) \begin{bmatrix} D^{-1}(s) & \\ & I \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

(iv) Resolve-se o problema de otimização H_∞ para minimizar:

$$\|\mathcal{F}_l(\hat{P}, K)\|_\infty \tag{4.44}$$

sobre todos os controladores estabilizantes $K's$. Este problema de otimização usa a versão escalonada de P. O controlador que minimiza esta norma H_∞ é denotado por $\hat{K}$;

(v) Minimiza-se $\overline{\sigma}[D_w \mathcal{F}_l(P, \hat{K}) D_w^{-1}]$ sobre D_w, ponto a ponto na frequência. Note que esta avaliação utiliza o $\hat{K}$ minimizado do passo anterior, mas P não está escalonada. A minimização, por si só, produz uma nova função de escalonamento, denotada por $\hat{D}_w$;

(vi) Compara-se $\hat{D}_w$ com a estimativa prévia D_w. Se elas estão próximas finaliza-se o procedimento, caso contrário, retorna-se ao passo (*ii*).

O problema da otimização simultânea de D e K é não convexo, e a convergência global não é garantida. No entanto, o objetivo deste trabalho é explorar as qualidades que esta ferramenta proporciona no projeto de controle robusto de um robô manipulador subatuado.

Capítulo 5

O Robô Manipulador UArmII

5.1 Descrição

A Figura 5.1 mostra o robô experimental presente no Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI), denominado *UArmII*. O manipulador é constituído de três juntas, cada uma equipada com um atuador (motor DC), um freio pneumático e um sensor de posição (*encoder*). Todas as juntas apresentam um sistema pneumático responsável pelo colchão de ar que minimiza o atrito das juntas com a mesa. Para facilitar, numeramos as juntas de 1 a 3, sendo que a primeira junta é a base do robô e permanece fixa em uma mesa horizontal. Um diagrama esquemático do robô é apresentado na Figura 5.2 e seus parâmetros nominais estão na Tabela 5.1. No Apêndice B encontram-se as especificações do *UArmII*. O robô pode funcionar como um manipulador totalmente atuado ou como um manipulador subatuado. Na primeira situação, todas as juntas estão ativas, e na segunda, uma ou mais juntas são passivas. Dessa maneira, o manipulador *UArmII* pode ser configurado para trabalhar em sete configurações: $AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP$, e PPA.

Tabela 5.1: Parâmetros do UArmII

Elo	$m_i(Kg)$	$I_i(Kgm^2)$	$l_i(m)$	$l_{ci}(m)$
1	0.850	0.0075	0.203	0.096
2	0.850	0.0075	0.203	0.096
3	0.625	0.0060	0.203	0.077

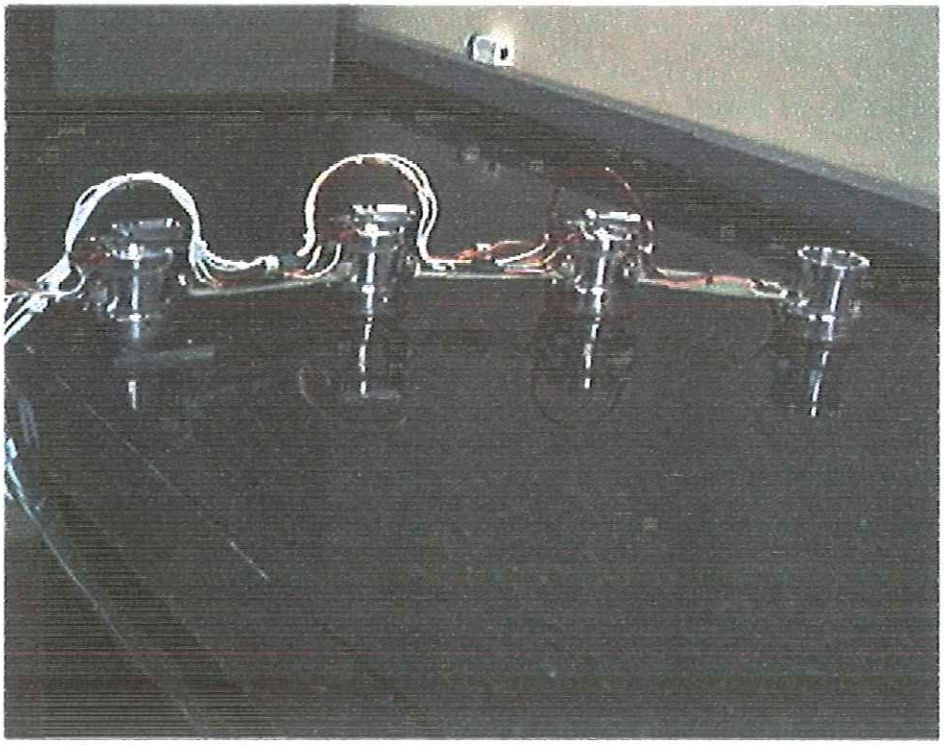


Figura 5.1: Manipulador experimental *UArmII*

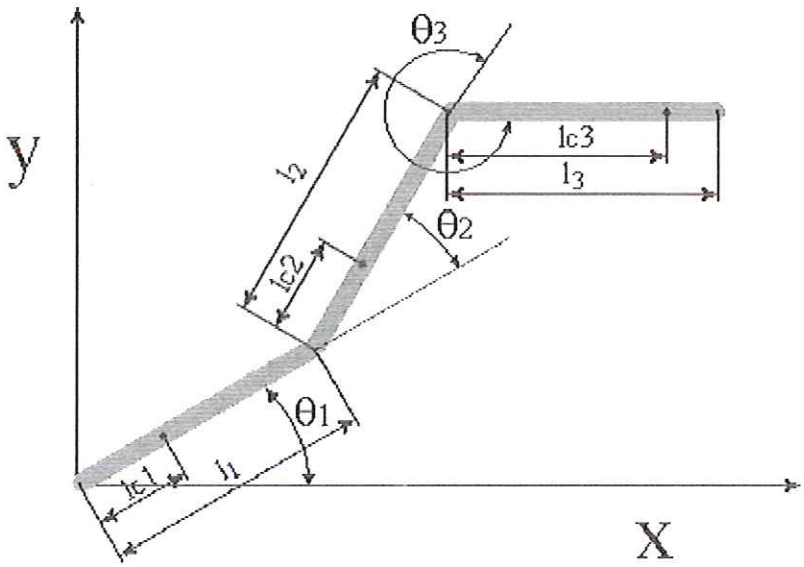


Figura 5.2: Diagrama do manipulador *UArmII*

5.2 Modelo Dinâmico do UArmII

Utilizando os resultados obtidos no Capítulo 2, podemos reescrever a equação:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q})$$

para o manipulador *UArmII*. Considerando $n_T = 3$, temos:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Cada elemento M_{ij} da matriz de inércia depende das posições momentâneas das juntas (vetor q), das massas (m_i), dos momentos de inércia (I_i), dos comprimentos (l_i) e dos centros de massa dos elos (l_{ci}). Os termos independentes b_i também são calculados através de expressões que dependem desses parâmetros e das velocidades momentâneas das juntas (vetor $\dot{q}$). Portanto, utilizando as expressões aproximadas apresentadas no próximo item e as equações de controle para cada estratégia, encontradas na Seção 2.2, determina-se o torque nas juntas ativas para qualquer configuração do robô a cada instante de tempo.

5.2.1 Expressões Algébricas do Modelo

Uma aproximação numérica para a matriz de inércia do robô M e para o vetor de torques não inerciais b para cada instante do movimento é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos(\theta_2)) + \\
&\quad m_3(l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_1 l_{c3}\cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3}\cos(\theta_3)) \\
M_{12} &= I_2 + I_3 + m_2(l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos(\theta_2)) + \\
&\quad m_3(l_2^2 + l_{c3}^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + l_1 l_{c3}\cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3}\cos(\theta_3)) \\
M_{13} &= I_3 + m_3(l_{c3}^2 + l_1 l_{c3}\cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3}\cos(\theta_3)) \\
M_{22} &= I_2 + I_3 + m_2(l_{c2}^2) + m_3(l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3}\cos(\theta_3)) \\
M_{23} &= I_3 + m_3(l_{c3}^2 + l_2 l_{c3}\cos(\theta_3)) \\
M_{33} &= I_3 + m_3(l_{c3}^2) \\
M_{21} &= M_{12} \\
M_{31} &= M_{13}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{32} &= M_{23} \\
b_1 &= (-m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(\theta_2) + m_3(-l_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_2+\theta_3))) \\
&\quad (\dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2) + m_3(-l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_2+\theta_3) - l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_3)) \\
&\quad (\dot\theta_3^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_3 + 2\dot\theta_2\dot\theta_3) + m_1 g l_{c1} \cos(\theta_1) + \\
&\quad m_2 g(l_1 \cos(\theta_1) + l_{c2}\cos(\theta_1+\theta_2)) + m_3 g(l_1\cos(\theta_1) + \\
&\quad l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l_{c3}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) \\
b_2 &= (m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(\theta_2) + m_3(l_1 l_2 \operatorname{sen}(\theta_2) + l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_2+\theta_3)))\dot\theta_1^2 - \\
&\quad m_3 l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_3)(\dot\theta_3^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_3 + 2\dot\theta_2\dot\theta_3) + \\
&\quad m_2 g(l_{c2}\cos(\theta_1+\theta_2)) + m_3 g(l_2\cos(\theta_1+\theta_2) + l_{c3}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) \\
b_3 &= m_3(l_1 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_2+\theta_3) + l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_3))\dot\theta_1^2 + \\
&\quad m_3 l_2 l_{c3} \operatorname{sen}(\theta_3)(\dot\theta_2^2 + 2\dot\theta_1\dot\theta_2) + m_3 g(l_{c3}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)).
\end{aligned}
$$

5.3 Modelo no Espaço de Estados

No Capítulo 3, mostrou-se que é possível encontrar uma realização no espaço de estados para o modelo nominal de um manipulador com juntas passivas, veja a Seção 3.3. Estes modelos são necessários no procedimento de cálculo do controlador robusto K_μ que está acoplado à malha fechada de controle do robô. Esta metodologia está representada na Figura 3.1. Os modelos no espaço de estados para as diferentes configurações do robô são apresentados na sequência.

5.3.1 Modelo Nominal para Configuração AAA

Nesta configuração a estratégia de controle A, descrita no item 2.2.1, é utilizada. Com isso, podemos reescrever a equação do modelo no espaço de estados (3.15) para configuração AAA do $UArmII$:

$$
\begin{bmatrix} \dot e_1 \\ \dot e_2 \\ \dot e_3 \\ \ddot e_1 \\ \ddot e_2 \\ \ddot e_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-K_{p1} & 0 & 0 & -K_{v1} & 0 & 0 \\
0 & -K_{p2} & 0 & 0 & -K_{v2} & 0 \\
0 & 0 & -K_{p3} & 0 & 0 & -K_{v3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dot e_1 \\ \dot e_2 \\ \dot e_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

5.3.2 Modelo Nominal para as Configurações AAP, APA e PAA

Como já foi apresentado no item 2.1.1 a presença de uma junta passiva faz com que a metodologia de controle seja dividida em duas etapas. Portanto, para cada etapa de controle é determinado um modelo nominal para o robô. Por exemplo, assumindo que o robô esteja configurado para operar com a configuração APA e que na primeira etapa uma estratégia AP seja utilizada e o vetor de juntas controladas q_c seja formado pelas juntas 2 e 3 respectivamente, a seguinte realização no espaço de estados representa o modelo nominal para esta etapa do controle:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \ddot{e}_2 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{p2} & 0 & -K_{v2} & 0 \\ 0 & -K_{p3} & 0 & -K_{v3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Após o posicionamento da junta passiva inicia-se uma segunda etapa de controle para posicionar as juntas ativas restantes. Nesta fase, uma estratégia de controle A é utilizada para posicionar as juntas 1 e 3. O modelo nominal para esta etapa pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{p1} & 0 & -K_{v1} & 0 \\ 0 & -K_{p3} & 0 & -K_{v3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Os modelos nominais para as configurações AAP e PAA podem ser determinados de maneira análoga levando em consideração as juntas controladas em cada etapa de controle.

5.3.3 Modelo Nominal para as Configurações APP, PAP e PPA

Três modelos nominais devem ser determinados para estas configurações, já que o posicionamento final de todas as juntas do manipulador é realizado em três etapas. Considerando a configuração PAP. Na primeira etapa trava-se a terceira junta e controla-se a primeira junta utilizando uma estratégia AP. Assim, fazendo $c = 1$ em (5.5) determina-se o modelo nominal para a primeira etapa. Com a primeira junta travada, novamente uma estratégia AP é utilizada na segunda etapa para controlar a terceira junta. Com isso, $c = 3$ define o modelo nominal. Finalmente, uma estratégia A é realizada na terceira etapa para controlar a junta 2 e neste caso $c = 2$.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_c \\ \ddot{e}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{pc} & K_{vc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c \\ \dot{e}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c \\ \dot{e}_c \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

Com esses resultados e com os conceitos teóricos apresentados nos capítulos anteriores, é possível apresentar o procedimento utilizado no projeto dos controladores robustos para o manipulador *UArmII*.

Capítulo 6

Procedimento de Projeto

Como já foi apresentado no Capítulo 4 a determinação de uma planta que represente adequadamente o sistema real é necessária no procedimento de síntese dos controladores robustos. Esta representação, chamada de planta aumentada P, é constituída pelo modelo nominal e pelas funções de ponderação. A planta aumentada do robô *UArmII* é definida neste capítulo e o método de Iterações D-K, descrito no Capítulo 4, é utilizado no projeto dos controladores robustos. A utilização do *toolbox mutools* do $MATLAB^{©}$ foi fundamental na elaboração dos programas de projeto dos controladores. Maiores detalhes sobre o *toolbox* podem ser encontrados em BALAS et al. (1998).

6.1 Determinação da Planta Aumentada

No problema de regulação descrito na Seção 3.2 não se deseja que entradas de perturbações influenciem o desempenho do sistema quando a referência é ajustada para um determinado valor. Portanto, a conformação da função sensibilidade:

$$S = (I - PK_{\mu})^{-1} \tag{6.1}$$

garante a minimização dos distúrbios e perturbações na saída da planta. Esta conformação é realizada utilizando funções de ponderação. A utilização destas funções faz com que as incertezas do sistema e a influência dos distúrbios externos sejam incorporados de maneira adequada no procedimento de síntese. A análise do modelo real levou à escolha de duas funções peso: W_{Δ} e W_p. Sendo o robô um sistema $MIMO$, estas funções são matrizes diagonais formadas por funções de transferência acopladas ao modelo nominal, veja Figura 6.1. A caracterização destas funções é apresentada a seguir:

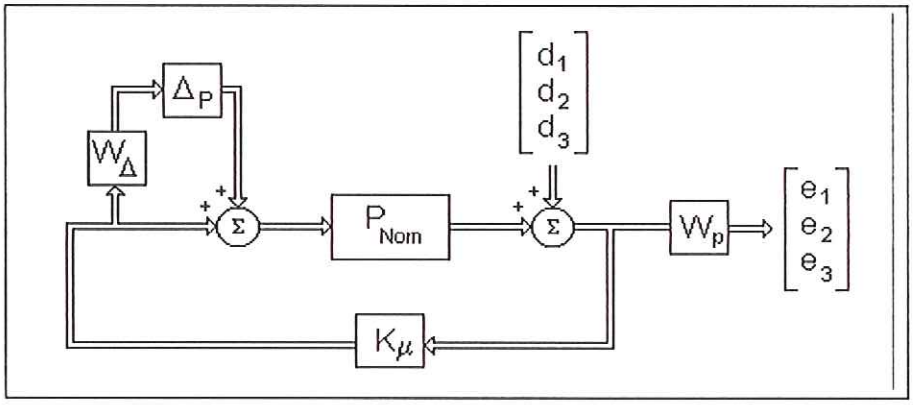


Figura 6.1: Diagrama de interconecção (planta aumentada) - Malha Aberta

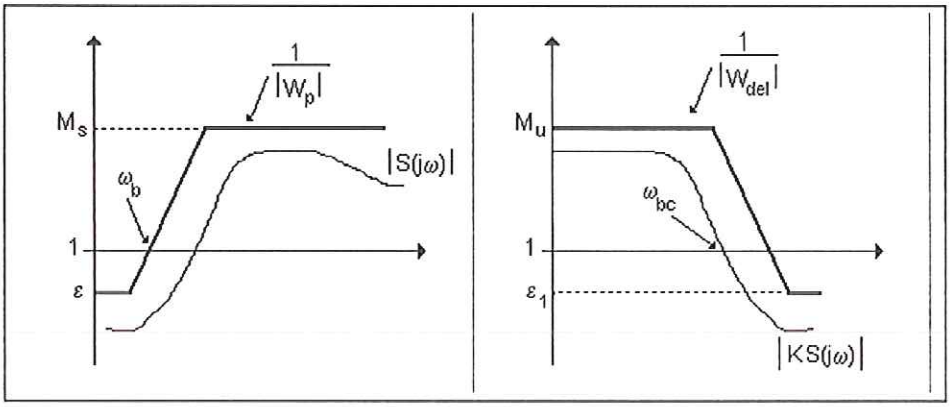


Figura 6.2: Funções pesos W_p, W_Δ e S, $K_\mu S$ desejados

- W_Δ modela erros na entrada (atuadores) e dinâmicas de alta freqüência não modeladas;
- W_p conforma a diferença entre a resposta da planta e a resposta do modelo ideal.

Em ZHOU & DOYLE (1998) um procedimento para a determinação das matrizes W_p e W_Δ é formulado, utilizando funções de primeira ordem. Este procedimento é apresentado resumidamente a seguir.

Função Peso W_p

A função apresentada a seguir permite um bom acompanhamento de referência para uma entrada degrau. Para isso, escolhe-se uma função peso w_p satisfazendo $\|w_p(0)\| \geq \frac{1}{\epsilon}$ com $\|w_p S\|_\infty \leq 1$, veja a Figura 6.2. Assim, calculando a freqüência natural ω_n, o índice de acomodação ϵ, a largura de banda ω_b e o pico de sensibilidade M_s, uma escolha possível é:

$$w_p = \frac{\frac{s}{M_s} + \omega_b}{s + \omega_b \epsilon}. \tag{6.2}$$

Sendo o manipulador um sistema multivariável, a seguinte matriz de funções peso pode ser

considerada:

$$W_p = diag\{w_{p_1}, ..., w_{p_{n_c}}\}$$

sendo n_c o número de juntas controladas na configuração utilizada.

Função Peso W_Δ

Na escolha desta função, M_u de $K_\mu S$ pode ser consideravelmente grande, enquanto que os ganhos nas altas freqüências são limitados pela largura de banda (ω_{bc}). Portanto, calculando o ganho máximo M_u de $K_\mu S$ e a largura de banda ω_{bc}, uma escolha adequada é:

$$W_\Delta = diag\{w_{\Delta_1}, ..., w_{\Delta_{n_c}}\}$$

sendo,

$$w_\Delta = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_u}}{\epsilon_1 s + \omega_{bc}}. \tag{6.3}$$

Portanto, a seguinte matriz representa a planta aumentada P e será utilizada no procedimento de cálculo do controlador robusto K_μ:

$$P = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_p & -K_v & 0 & 0 & I & 0 & I \\ 0 & 0 & A_{W_\Delta} & 0 & 0 & 0 & B_{W_\Delta} \\ B_{W_p} & 0 & 0 & A_{W_p} & 0 & B_{W_p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{W_\Delta} & 0 & 0 & 0 & D_{W_\Delta} \\ D_{W_p} & 0 & 0 & C_{W_p} & 0 & D_{W_p} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{array}\right] \tag{6.4}$$

sendo que $(A_{W_\Delta}, B_{W_\Delta}, C_{W_\Delta}, D_{W_\Delta})$ é uma realização no espaço de estados para a função peso W_Δ e $(A_{W_p}, B_{W_p}, C_{W_p}, D_{W_p})$ para a função peso W_p.

6.1.1 Estrutura de Perturbação Δ

Como já foi apresentado no Capítulo 4, a idéia básica no modelamento de sistemas com incertezas é separar o que é conhecido do que não é conhecido em um sistema realimentado. A matriz de perturbação Δ não é conhecida, mas é estruturada. Apresenta uma estrutura bloco-diagonal e deve ser definida no procedimento de projeto. Isto significa que a composição

da matriz deve ser informada, isto é, se é formada apenas por blocos escalares, blocos cheios ou por blocos escalares e cheios. Neste trabalho, considerar-se-á uma matriz de perturbação Δ formada apenas por blocos cheios. Com a finalidade de garantir robustez de desempenho um bloco de incertezas fictício é adicionado na estrutura de perturbação. Maiores detalhes sobre a definição desta matriz podem ser encontrados em BALAS et al. (1998); ZHOU et al. (1996). Considere P uma matriz de transferência estável, real-racional e própria com $n_e + n_{ef}$ entradas e $n_s + n_{sf}$ saídas, particiona-se:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

sendo que P_{11} tem n_e entradas e n_s saídas. Seja $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{C}^{n_e \times n_s}$, a seguinte estrutura aumentada de incerteza é definida e será utilizada no procedimento de projeto:

$$\Delta := \left[\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \Delta_F \in C^{n_{ef} \times n_{sf}} \right]. \tag{6.6}$$

6.2 Resultados de Projeto

Utilizando o modelo de planta nominal dado pela equação 3.15 e o procedimento de determinação das funções de ponderação apresentado na seção anterior, a planta aumentada representativa do manipulador *UArmII* foi definida e controladores robustos foram projetados utilizando o procedimento de iterações D-K (Síntese-μ). Os valores dos parâmetros utilizados para determinação da planta aumentada são apresentados na Tabela 6.1. Na tabela, os subíndices presentes nas configurações referem-se à etapa de controle. Por exemplo, AAP_1 refere-se à 1° etapa de controle para esta configuração. A seguinte expressão foi utilizada para calcular valor do ganho derivativo no projeto dos controladores robustos:

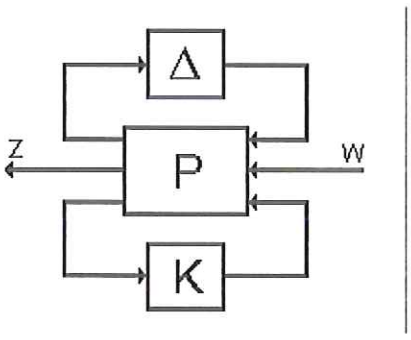


Figura 6.3: Representação do problema de controle

$$K_{vj} = \sqrt{2K_{pj}} \tag{6.7}$$

sendo $j = 1, 2$ *ou* 3, correspondendo à junta considerada. As matrizes das plantas aumentadas para cinco configurações do manipulador, utilizadas no procedimento de projeto são apresentadas no Apêndice D. No Apêndice E, encontram-se os controladores robustos projetados na forma espaço de estados.

6.2.1 Exemplo de Projeto: Segunda Etapa de Controle - Configuração PAP

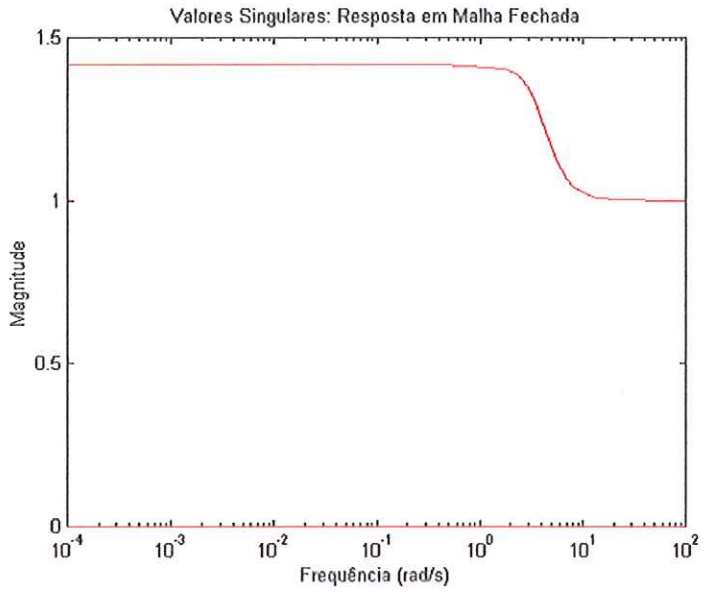
A seguir, um exemplo do procedimento de projeto utilizando o método de iterações D-K é apresentado. Os gráficos apresentados ilustram os passos presentes no projeto de um controlador para a segunda etapa de controle da configuração PAP do manipulador (PAP_2). Os parâmetros utilizados estão presentes na Tabela 6.1 e os programas podem ser encontrados no Apêndice C. Observando os Gráficos 6.4(b) e 6.5(b) percebe-se que há uma diminuição do pico do valor da função $\mu_\Delta(.)$ de uma iteração para outra, o que caracteriza o procedimento de síntese. Neste caso, somente duas iterações foram realizadas, já que na terceira iteração houve um aumento no valor do pico de μ. Na tabela 6.2 um resumo dos parâmetros de análise verificados no projeto do controlador é apresentado.

Tabela 6.1: Parâmetros de Projeto

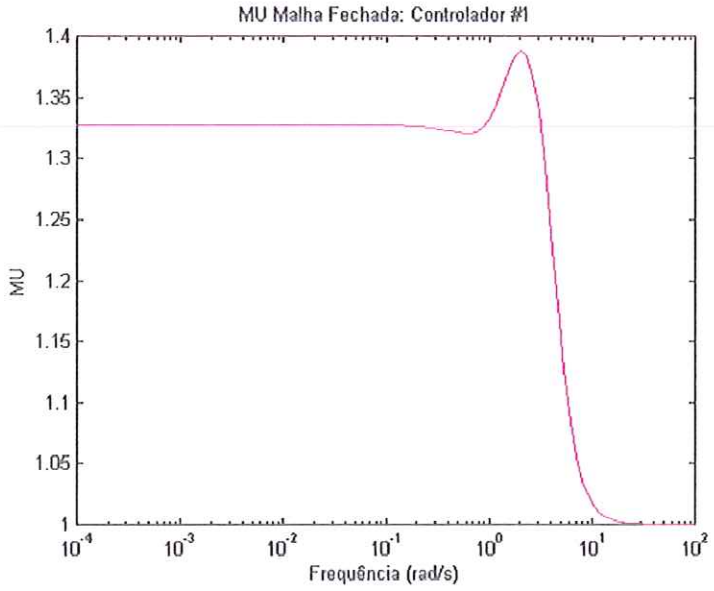
Conf.	K_{p1}	K_{p2}	K_{p3}	M_s	ω_{bc} (rad/s)	ϵ	M_u	ω_b (rad/s)	ϵ_1
AAA	10	10	20	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
AAP_1	10	-	20	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
AAP_2	10	10	-	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
APA_1	-	10	2	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
APA_2	4	-	4	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
PAA_1	10	-	20	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
PAA_2	-	10	20	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
PAP_1	-	50	-	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
PAP_2	-	2	-	1	10000	0.00001	15	1	0.00001
PAP_3	-	2	-	1	10000	0.00001	15	1	0.00001

Tabela 6.2: Resumo das Iterações para Configuração PAP

Iteração	#1	#2	#3
Ordem do Controlador	4	6	6
Ordem da Matriz D	0	2	2
Gama Resultante	4.898	1.104	1.121
Pico do valor de μ	1.388	1.104	1.120

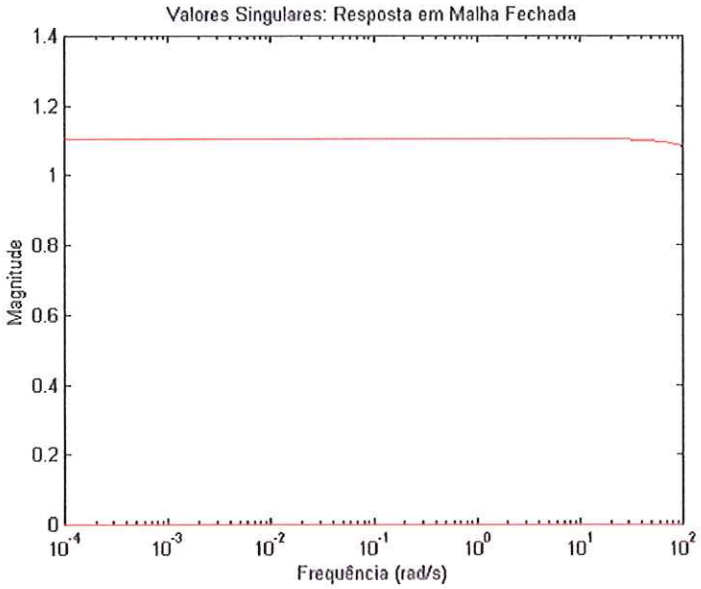


(a) Valores Singulares - 1ª iteração

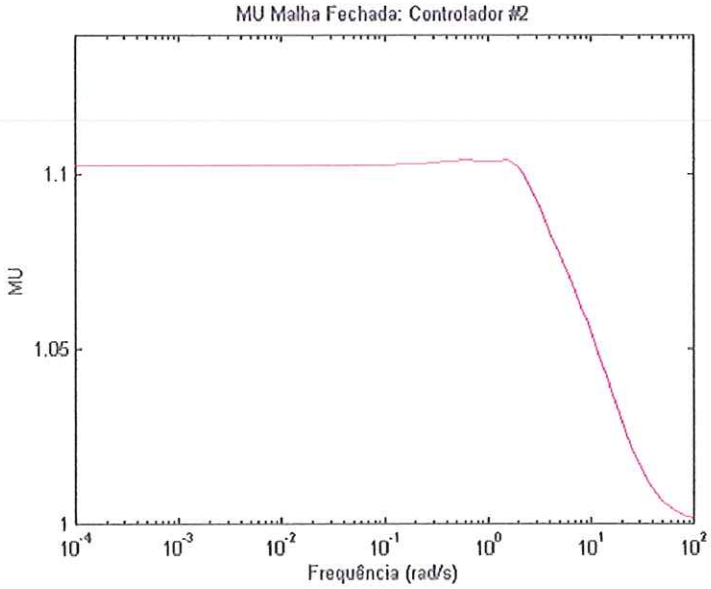


(b) Função μ - 1ª iteração

Figura 6.4: Resultados de projeto - 1ª iteração - Conf. PAP

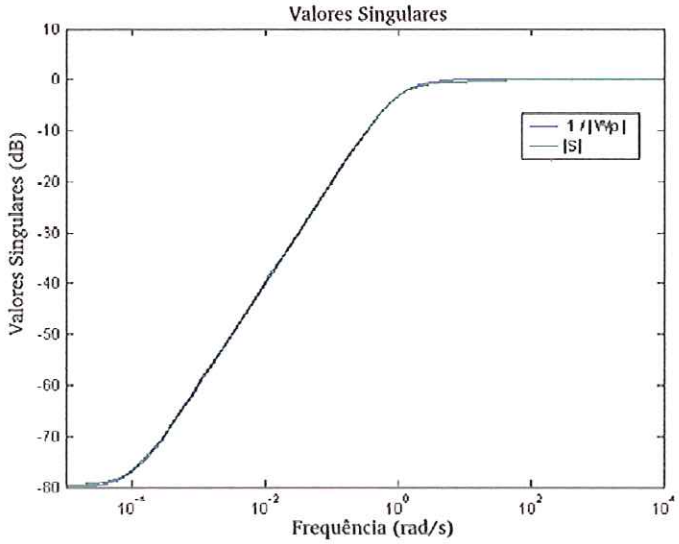


(a) Valores Singulares - 2ª iteração

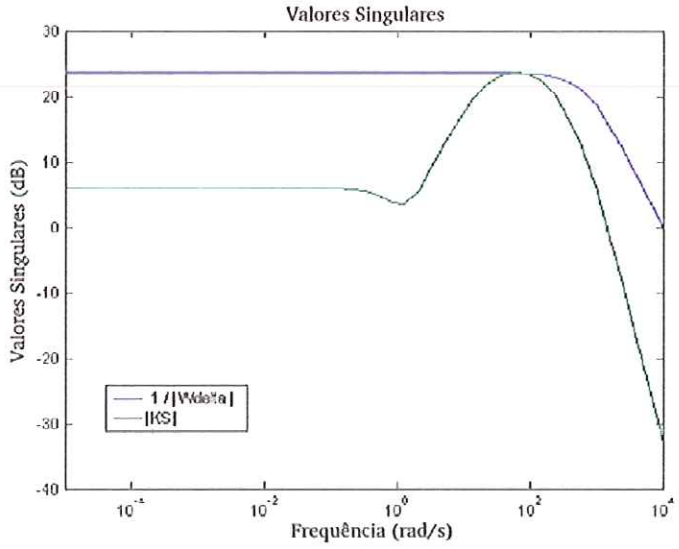


(b) Função μ - 2ª iteração

Figura 6.5: Resultados de projeto - 2ª iteração - Conf. PAP



(a) Função Peso W_p e Função Sensibilidade S



(b) Função Peso W_Δ e Função KS

Figura 6.6: Ajuste das funções pesos - Conf. PAP

Capítulo 7

Resultados

Vários controladores foram projetados, implementadados e tiveram seu desempenho avaliado, considerando diferentes parâmetros de projeto. Os parâmetros apresentados na Seção 6.2 foram utilizados no projeto dos controladores que apresentaram o melhor desempenho para cada configuração do robô. Para validar os controladores encontrados utilizou-se um ambiente de simulação e também o robô *UArmII*. Uma breve descrição do ambiente de simulação pode ser encontrada no Apêndice A. Neste capítulo, os testes de posicionamento e de robustez à incertezas paramétricas e distúrbios externos são apresentados.

7.1 Testes de Posicionamento

Primeiramente foram realizados testes de posicionamento das juntas do manipulador. Nos testes apresentados a seguir o manipulador parte da posição inicial $q_0 = [0\ 0\ 0]^\circ$ e acompanha uma trajetória de referência até a posição final desejada. Os controladores são testados previamente no ambiente de simulação com a finalidade de detectar possíveis erros de projeto que resultem em instabilidade do sistema ou em um desempenho inesperado. Após serem validados no ambiente de simulação, os controladores projetados são testados no robô experimental *UArmII*. Nesta primeira etapa de testes o desempenho do manipulador é avaliado e o acompanhamento da referência é a analisado. Os resultados de simulação para as configurações AAA, AAP, APA, PAA e PAP do robô são apresentados nos Gráficos 7.1, 7.8, 7.11, 7.14, 7.17, respectivamente. Resultados experimentais de posicionamento podem ser observados nos Gráficos 7.2, 7.9, 7.12, 7.15, 7.18, respectivamente.

7.1.1 Configuração AAA

Neste modo o robô é configurado para operar como se fosse totalmente atuado, isto é, todos os motores estão habilitados e torques são aplicados simultaneamente nas três juntas. Dessa maneira, o posicionamento realiza-se em uma única etapa e o vetor de juntas controladas é formado pelas juntas $1, 2$ *e* 3, $q_c = [q_1 \; q_2 \; q_3]$. Os resultados de simulação para esta configuração podem ser encontrados na Figura 7.1. O robô *UArmII* apresentou um desempenho muito satisfatório nesta configuração, confirmando os objetivos de projeto. O desempenho do manipulador experimental para esta configuração pode ser observado nas Figuras 7.2 e 7.3. Uma característica interessante do funcionamento do robô nesta configuração, utilizando o controlador combinado projetado, foi a capacidade de posicionar o manipulador em praticamente qualquer ponto do espaço de trabalho. Nenhum resultado similar foi observado utilizando controladores projetados com técnicas diferentes. Posições finais aleatórias foram geradas e o desempenho do robô para algumas destas posições pode ser verificado nas Figuras 7.4 à 7.7.

7.1.2 Configuração AAP

Nesta configuração o motor da terceira junta é desabilitado e o modo de controle sequencial é acionado. Portanto, o movimento realiza-se em duas etapas de controle. Na primeira etapa, posiciona-se a junta passiva (junta 3) controlando as juntas 1 e 3 ($q_{c1} = [q_1 \; q_3]$) por meio de torques aplicados nas juntas 1 e 2 (estratégia AP). Após o travamento da junta passiva, inicia-se a segunda etapa de controle, na qual as juntas 1 e 2 ($q_{c2} = [q_1 \; q_2]$) são controladas para a posição final desejada por torques aplicados nas mesmas (estratégia A). Resultados de simulação para esta configuração podem ser observados na Figura 7.8. Nos gráficos da Figuras 7.9 e 7.10 observa-se um bom desempenho e um posicionamento adequado do *UArmII* para esta configuração.

7.1.3 Configuração APA

Assim como na configuração anterior, o posicionamento do manipulador nesta configuração realiza-se em duas etapas. Na primeira etapa, o vetor de juntas controladas é $q_{c1} = [q_2 \; q_3]$ e a estratégia AP é utilizada. Na segunda etapa, uma estratégia A é realizada com $q_{c2} = [q_1 \; q_3]$. Nesta configuração, os torques são aplicados nas juntas 1 e 3 (juntas ativas). Os resultados de simulação podem ser verificados na Figura 7.11 e desempenho do robô pode ser avaliado nas Figuras 7.12 e 7.13.

7.1.4 Configuração PAA

Nesta configuração, torques aplicados nas juntas 2 e 3 serão responsáveis pelo movimento do manipulador. Neste caso, o vetor de juntas controladas na primeira etapa foi escolhido como sendo $q_{c1} = [q_1 \; q_3]$ (estratégia AP). Na segunda etapa, as juntas 2 e 3 são controladas para as posições finais desejadas (estratégia A). A Figura 7.14 apresenta os resultados de simulação e as Figuras 7.15 e 7.16 os resultados experimentais.

7.1.5 Configuração PAP

Nesta configuração, os motores das juntas 1 e 3 são desabilitados, implicando em uma seqüência de controle um pouco mais complexa. Primeiramente, a terceira junta é travada em sua posição inicial e um torque adequado aplicado na segunda junta faz com que a junta 1 seja controlada para sua posição final desejada (estratégia AP). Terminada a primeira etapa, trava-se a junta 1 e inicia-se o controle da outra junta passiva (junta 3). No entanto, no caso do robô *UArmII* é necessário primeiramente posicionar a segunda junta em 60° antes de iniciar o controle da junta 3, já que não há espaço suficiente (fim de curso) para completar a operação partindo da posição final atingida na primeira etapa. Com a segunda junta posicionada em 60°, a junta 3 é destravada e inicia-se o controle da mesma aplicando um torque na segunda junta (estratégia AP). Atingindo a posição final, a terceira junta é travada e então controla-se a junta ativa (junta 2) para sua posição final desejada (estratégia A). Este procedimento de posicionamento pode ser verificado na simulação apresentada na Figura 7.17. Apesar das restrições presentes no espaço de trabalho do robô *UArmII*, utilizando a etapa intermediária descrita anteriormente, foi possível realizar testes de posicionamento para esta configuração do robô. Estes testes experimentais são apresentados nas Figuras 7.18 e 7.19.

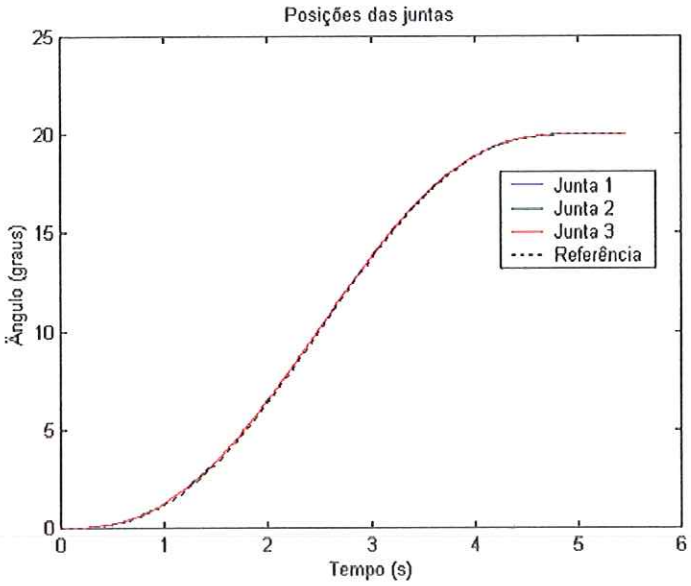
7.2 Testes de Robustez

Os resultados experimentais apresentados na seção anterior mostram que a metodologia de controle combinado (CTq+K_μ) foi capaz de atenuar o efeito de incertezas nos parâmetros do robô, já que os valores utilizados no algoritmo de controle são nominais e mesmo assim o controlador proporcionou um bom acompanhamento do erro nos testes de posicionamento realizados. No entanto, testes mais realistas foram propostos com a finalidade de comprovar a eficácia dos controladores projetados. Em uma situação real, o robô pode ser utilizado para transportar uma determinada carga de um ponto até outro dentro do seu espaço de trabalho. Portanto, um teste de robustez adequado é verificar o desempenho do sistema quando uma determinada massa é adicionada no último elo do manipulador provocando assim uma alteração no parâmetro m_3 do robô. Sistemas reais estão sujeitos a ruídos e interferências, principalmente

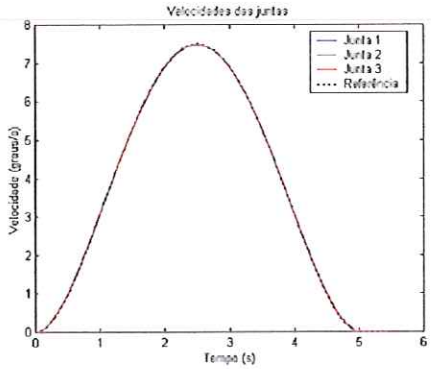
em ambientes hostis, como indústrias. Diante desta situação, um segundo teste foi proposto, no qual a capacidade do sistema de controle de rejeitar perturbações externas é verificada. Os dois testes de robustez descritos foram realizados utilizando a metodologia de controle proposta (CTq+K_μ) e também um sistema controlado por um PD via torque calculado. A comparação entre os resultados obtidos utilizando metodologias de controle diferentes é realizada com o objetivo de mostrar a vantagem da utilização de controladores robustos em sistemas reais. No primeiro teste, uma massa de aproximadamente $450g$ é adicionada no último elo do manipulador e o desempenho de posicionamento do *UArmII* é analisado. Os resultados deste teste de robustez são apresentados nas Figuras 7.20 e 7.21. Analisando os Gráficos 7.20(a) e 7.21(a), verifica-se que o sistema de controle combinado é capaz de superar a alteração paramétrica de massa e proporcionar um bom acompanhamento do erro e posicionamento do manipulador. No segundo teste, um distúrbio de torque com intensidade de 0.1 Nm é inserido na terceira junta no instante $t = 10.0s$ e o desempenho do robô é verificado nas Figuras 7.22 e 7.23. Novamente, a metodologia de controle robusto mostrou-se mais eficiente, já que após a aplicação do distúrbio, o manipulador foi capaz de corrigir o erro provocado e atingir a posição final desejada.

7.3 Testes Comparativos - H_∞ e Síntese-μ

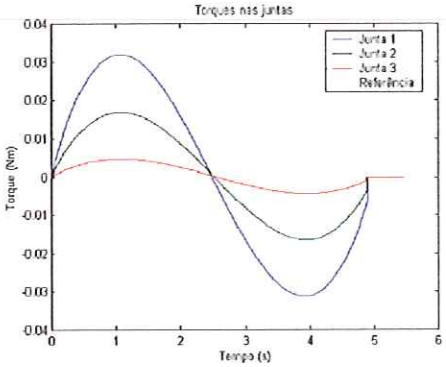
No capítulo 4, apresentou-se o procedimento de iterações D-K (Síntese-μ) utilizado no cálculo dos controladores robustos. É importante mencionar que na primeira iteração foram utilizadas matrizes de escalonamento (D e D^{-1}) sendo matrizes identidades. Portanto, o controlador projetado na primeira iteração é um controlador H_∞ padrão. Com o objetivo de investigar o aumento da robutez proporcionado pelo procedimento de Síntese-μ, dois novos testes de robustez foram simulados para três configurações do robô (AAA, AAP e PAP). Nestes testes, perturbações são introduzidas na entrada de controle u'. No primeiro teste, distúrbios do tipo impulso ($\Delta t = 0.1s$) são aplicados durante um determinado tempo. No segundo, um ruído branco é introduzido na entrada de controle. Analisando as figuras 7.24 à 7.35 conclui-se que o procedimento de Síntese-μ proporciona controladores que apresentam uma robustez comparativamente melhor do que aqueles projetados via Síntese H_∞.



(a) Posições das juntas

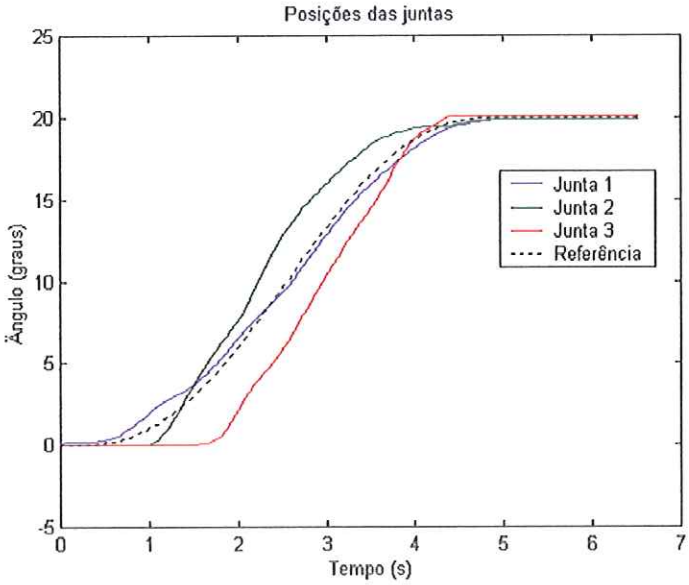


(b) Velocidades das juntas

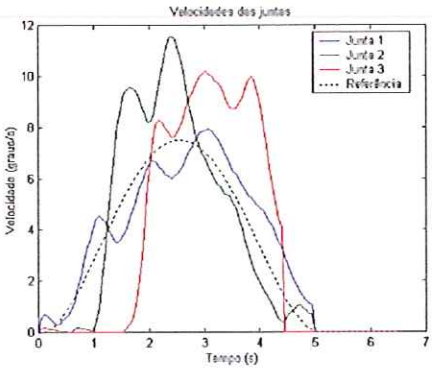


(c) Torques nas juntas

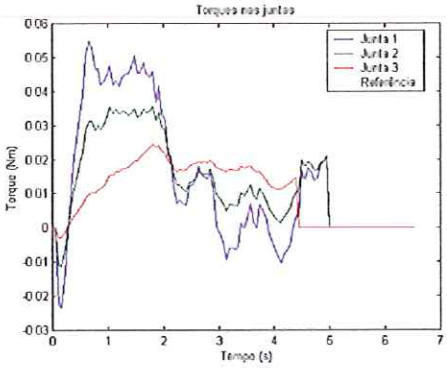
Figura 7.1: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]°$ - Conf. AAA - Simulação



(a) Posições das juntas

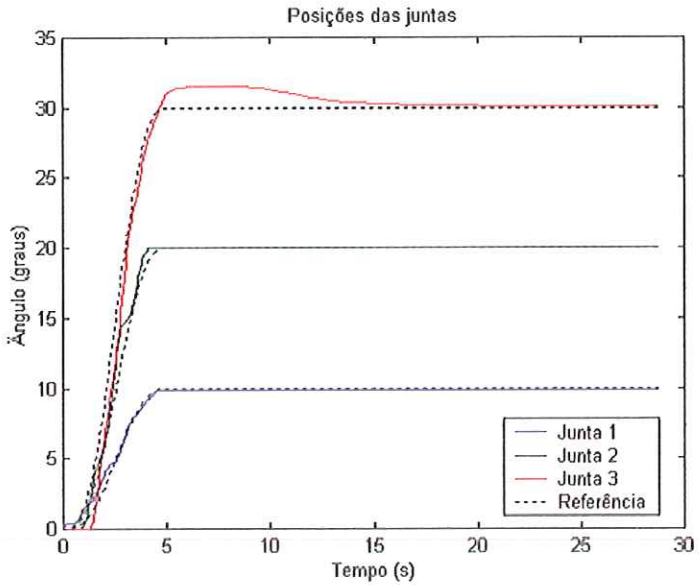


(b) Velocidades das juntas

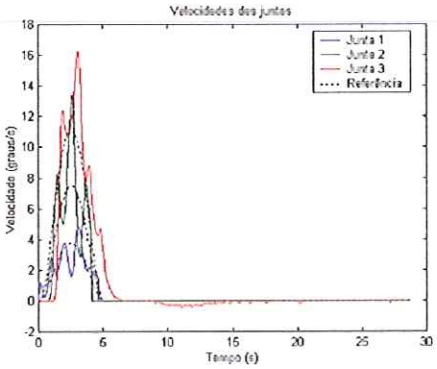


(c) Torques nas juntas

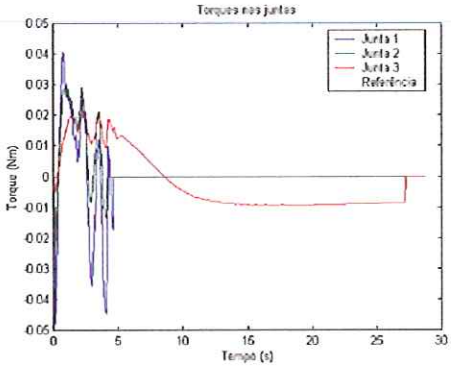
Figura 7.2: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental



(a) Posições das juntas

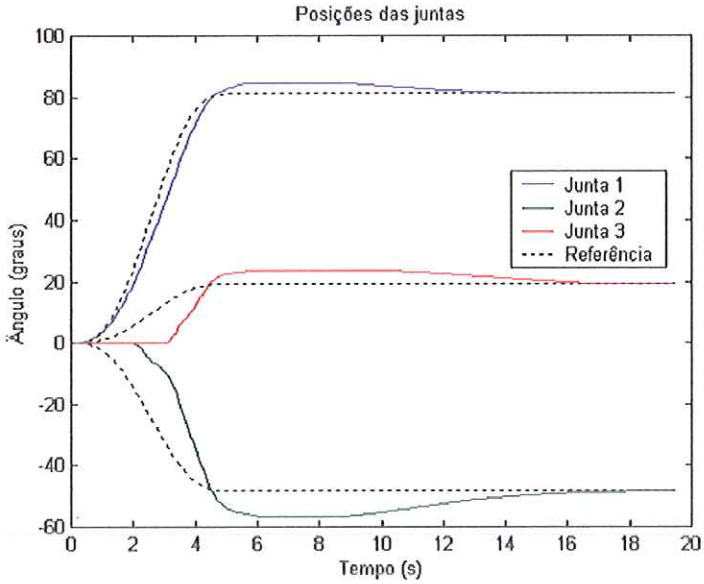


(b) Velocidades das juntas

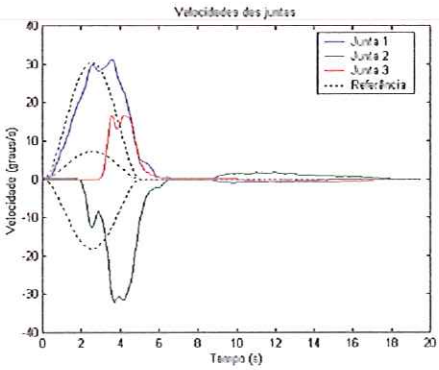


(c) Torques nas juntas

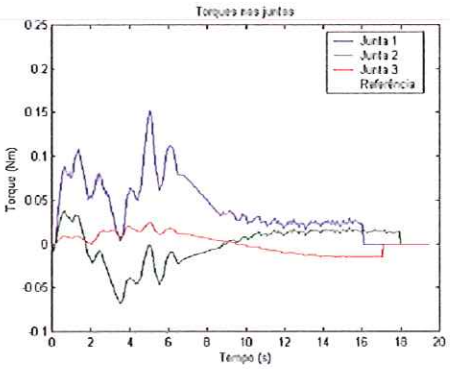
Figura 7.3: Posição final $q_d = [10\ 20\ 30]°$ - Conf. AAA - Experimental



(a) Posições das juntas



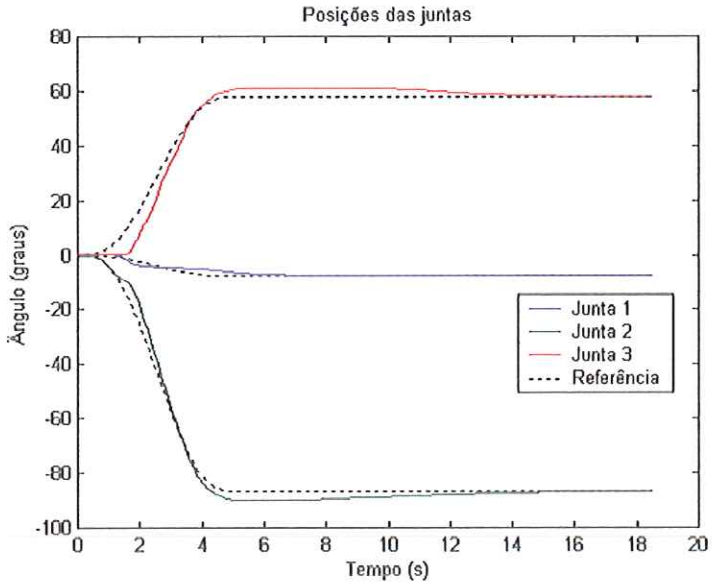
(b) Velocidades das juntas



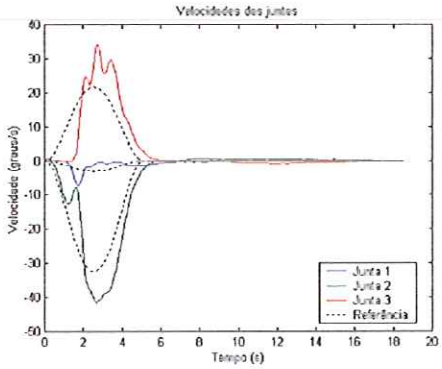
(c) Torques nas juntas

Figura 7.4: Posição final $q_d = [81 \ \ -48.4 \ 19.2]°$ - Conf. AAA - Experimental

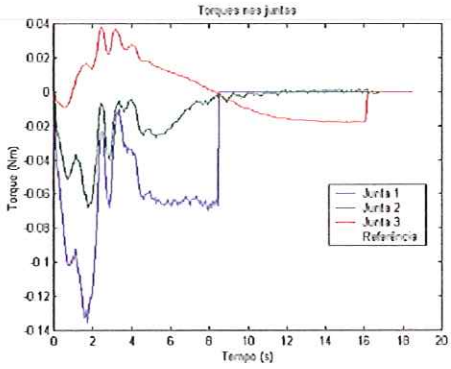
EESC • USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS



(a) Posições das juntas

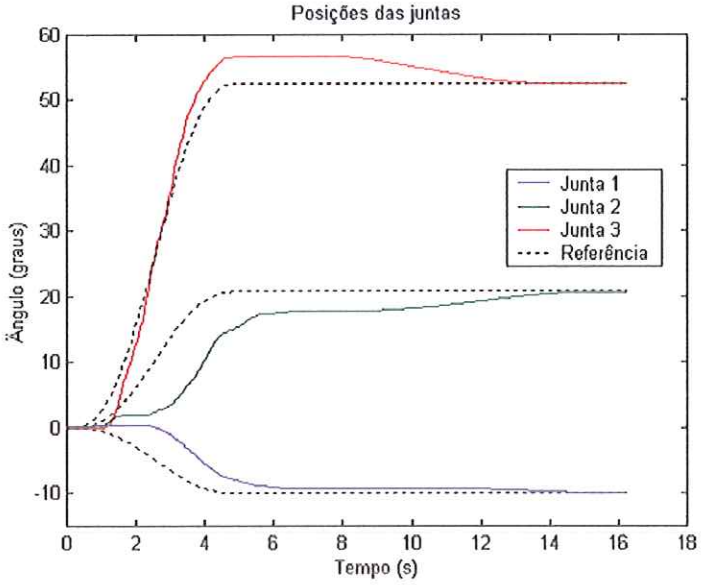


(b) Velocidades das juntas

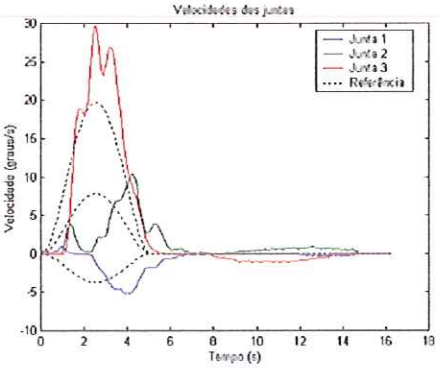


(c) Torques nas juntas

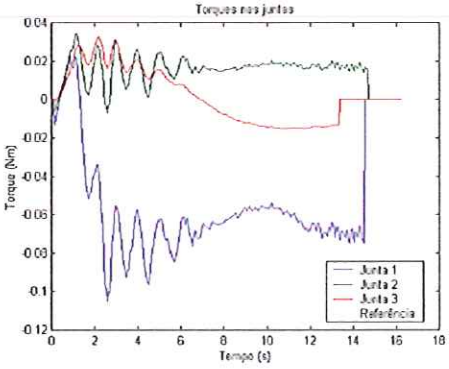
Figura 7.5: Posição final $q_d = [-7.8 \;\; -86.7 \; 57.8]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental



(a) Posições das juntas

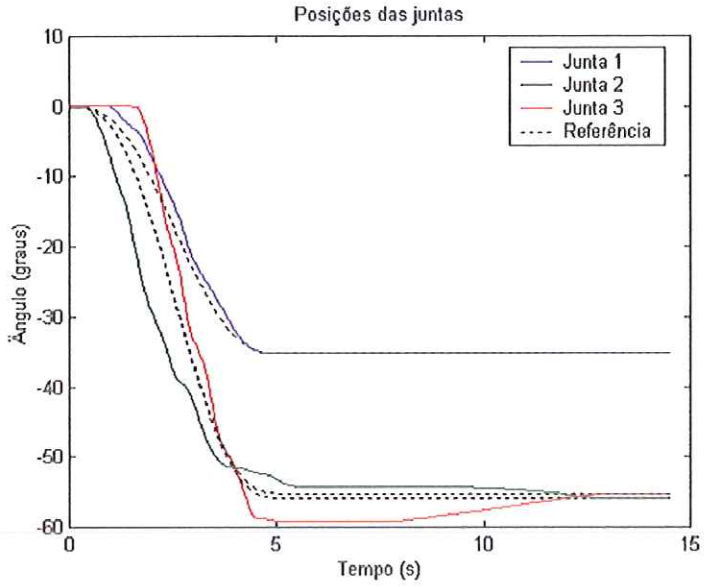


(b) Velocidades das juntas

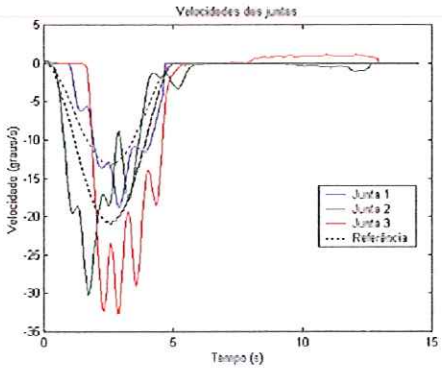


(c) Torques nas juntas

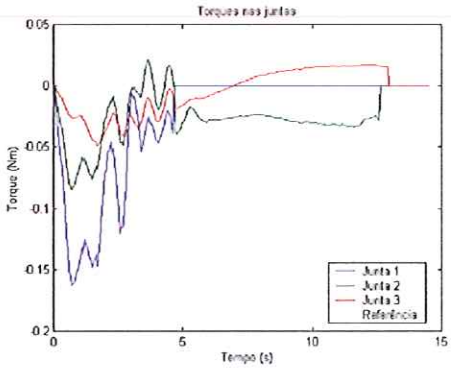
Figura 7.6: Posição final $q_d = [-9.9\ 20.8\ 52.5]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental



(a) Posições das juntas

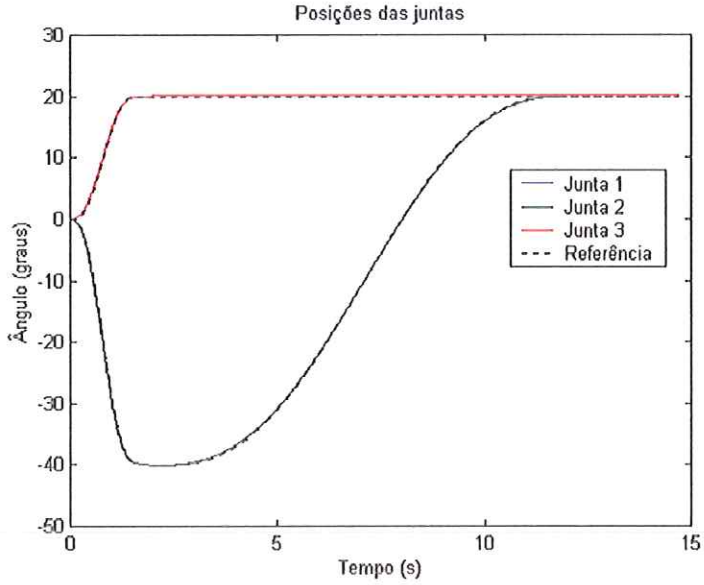


(b) Velocidades das juntas

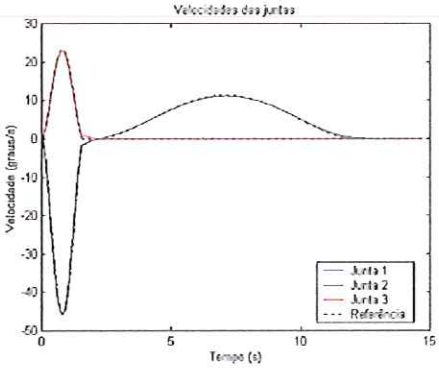


(c) Torques nas juntas

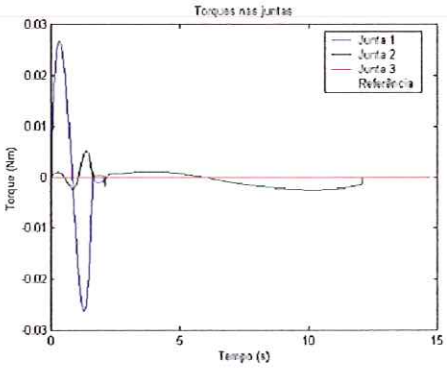
Figura 7.7: Posição final $q_d = [-35.2 \ -55.9 \ -55.2]^\circ$ - Conf. AAA - Experimental



(a) Posições das juntas

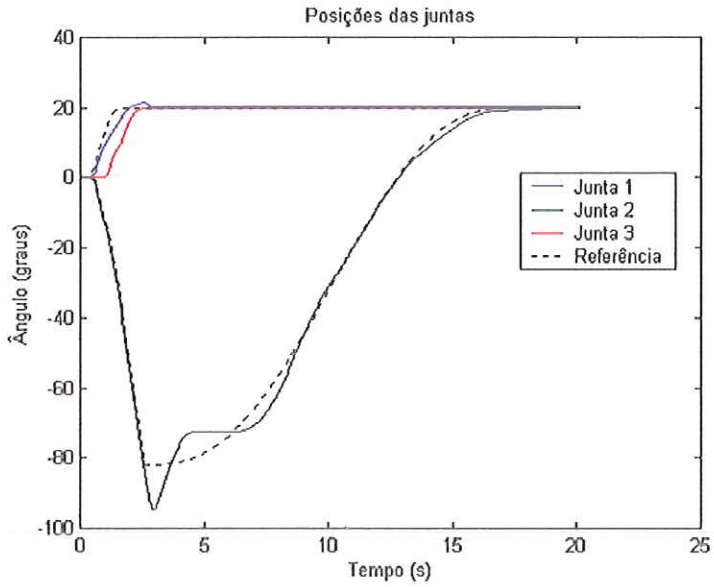


(b) Velocidades das juntas

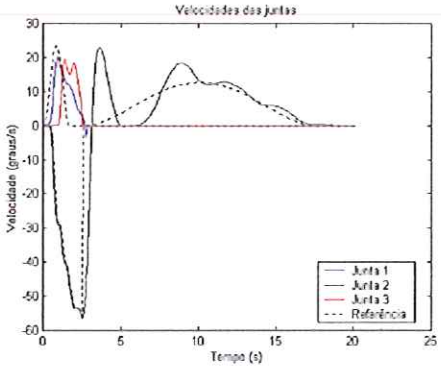


(c) Torques nas juntas

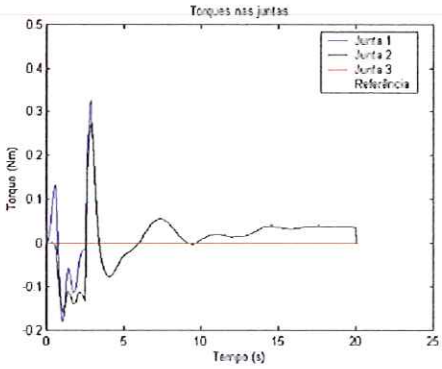
Figura 7.8: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]°$ - Conf. AAP - Simulação



(a) Posições das juntas

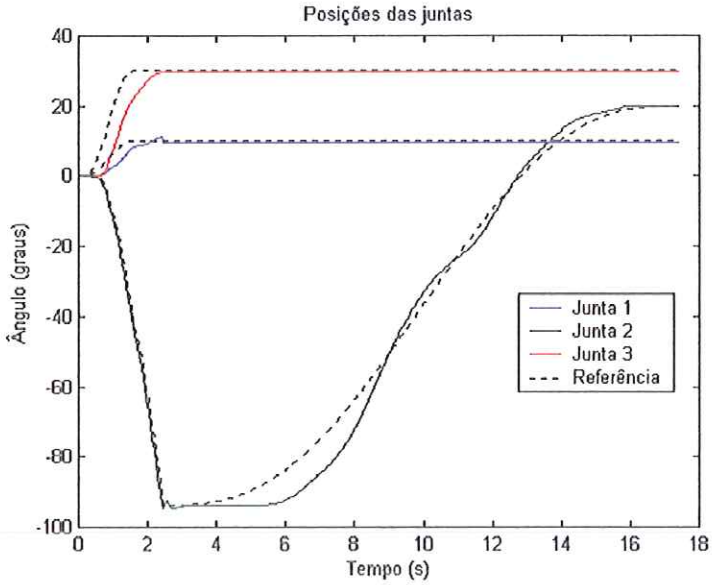


(b) Velocidades das juntas

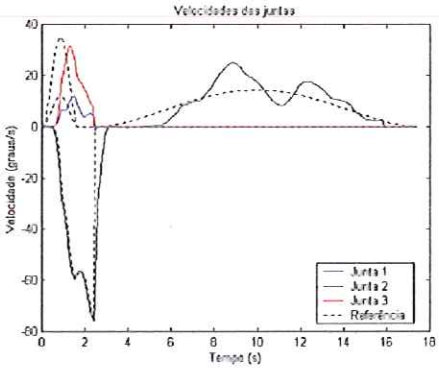


(c) Torques nas juntas

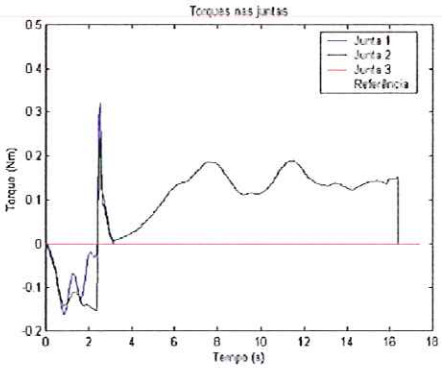
Figura 7.9: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. AAP - Experimental



(a) Posições das juntas

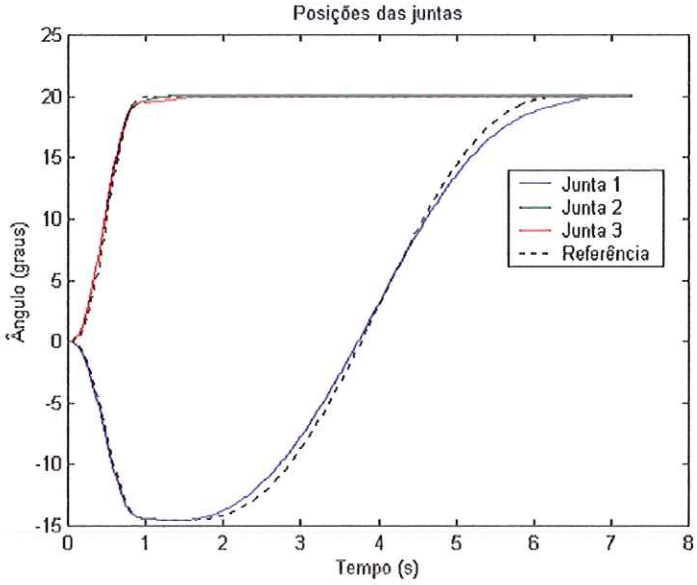


(b) Velocidades das juntas

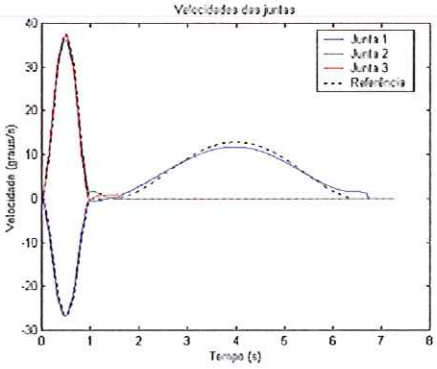


(c) Torques nas juntas

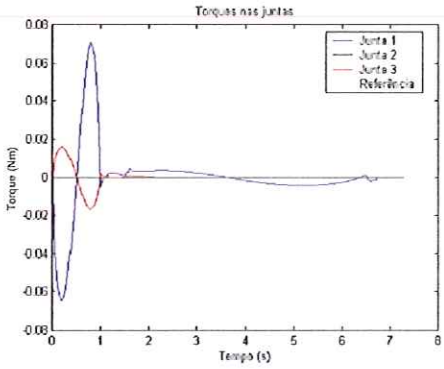
Figura 7.10: Posição final $q_d = [10\ 20\ 30]°$ - Conf. AAP - Experimental



(a) Posições das juntas

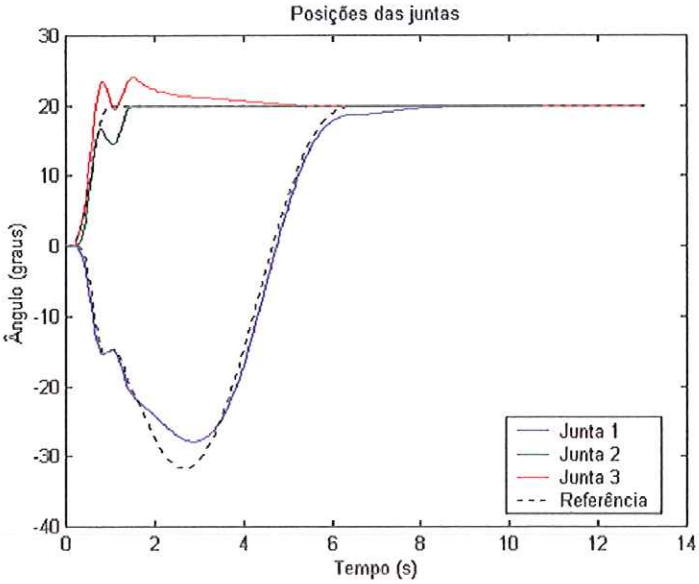


(b) Velocidades das juntas

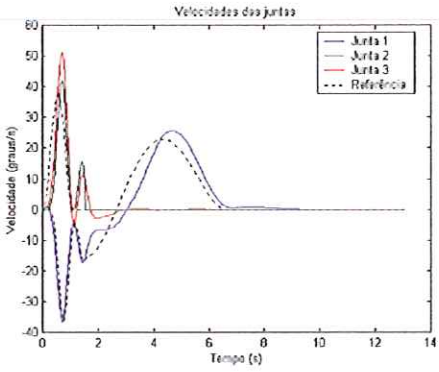


(c) Torques nas juntas

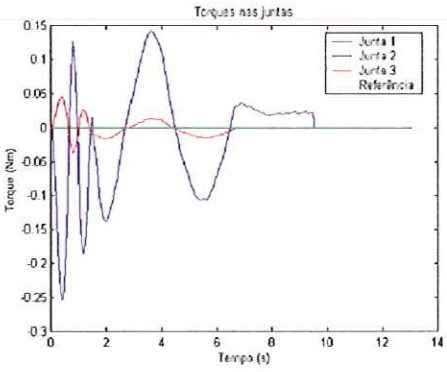
Figura 7.11: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. APA - Simulação



(a) Posições das juntas

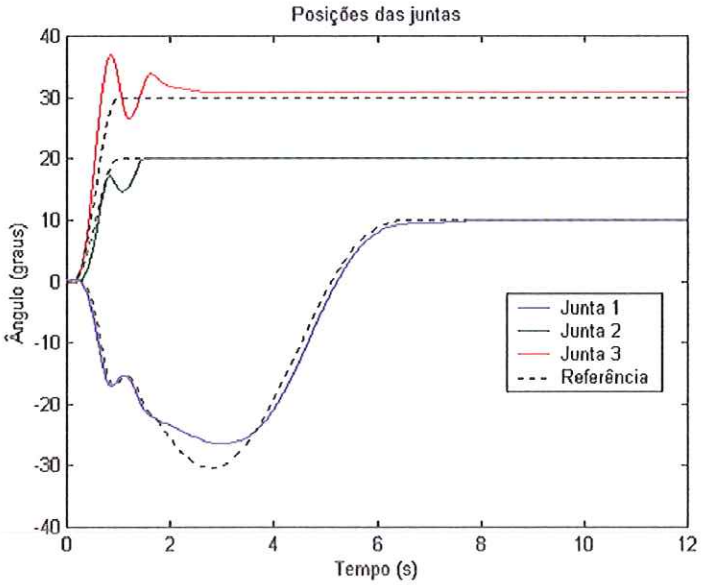


(b) Velocidades das juntas

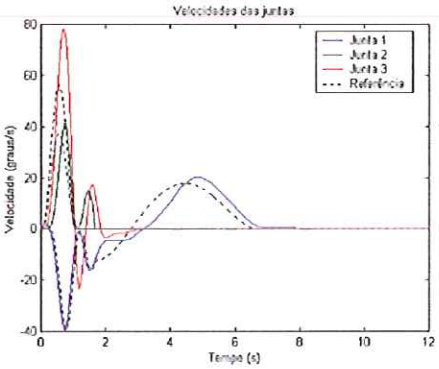


(c) Torques nas juntas

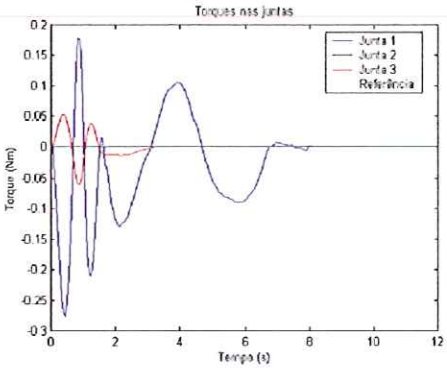
Figura 7.12: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. APA - Experimental



(a) Posições das juntas

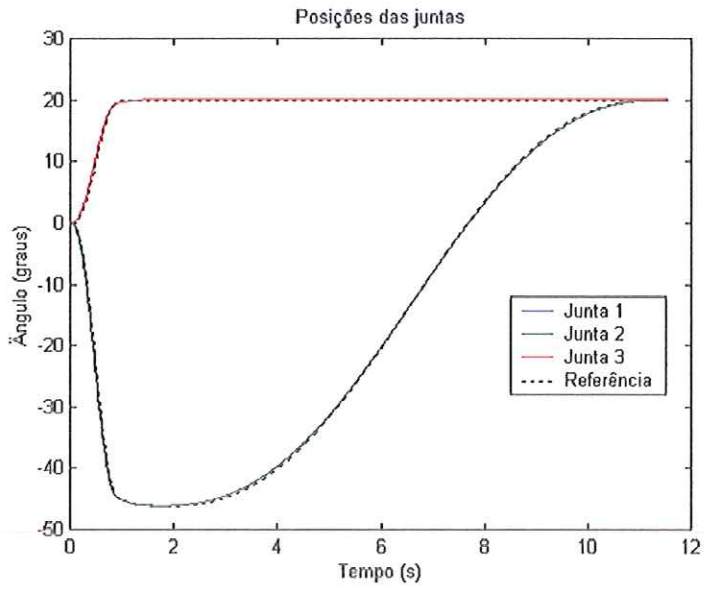


(b) Velocidades das juntas

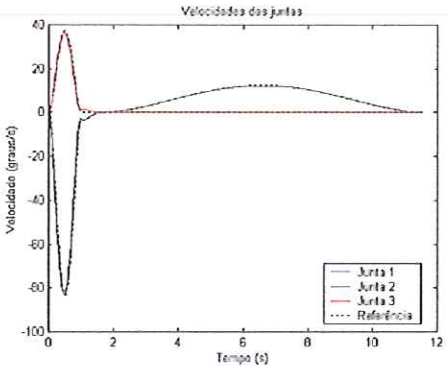


(c) Torques nas juntas

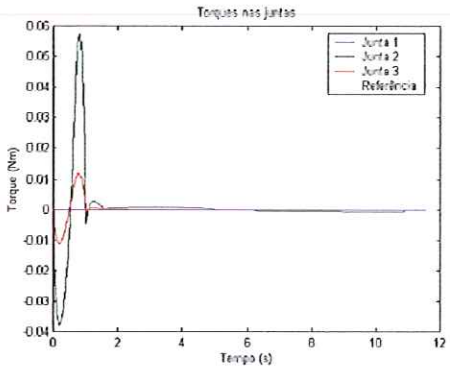
Figura 7.13: Posição final $q_d = [10\ 20\ 30]°$ - Conf. APA - Experimental



(a) Posições das juntas

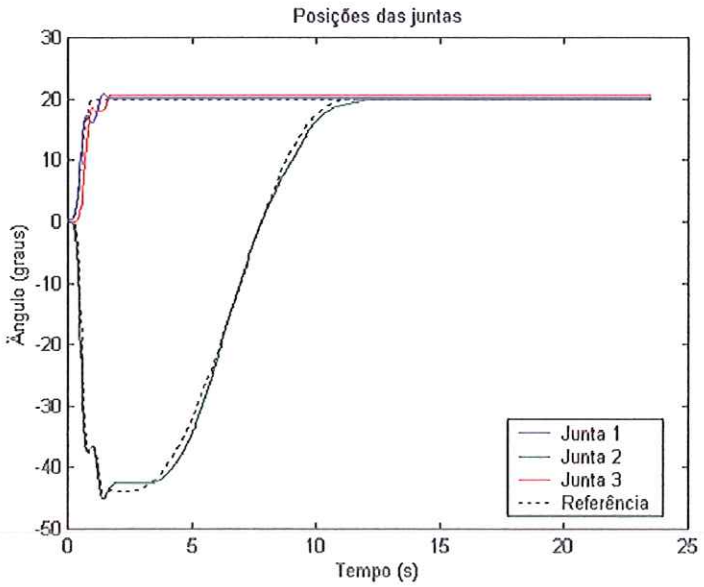


(b) Velocidades das juntas

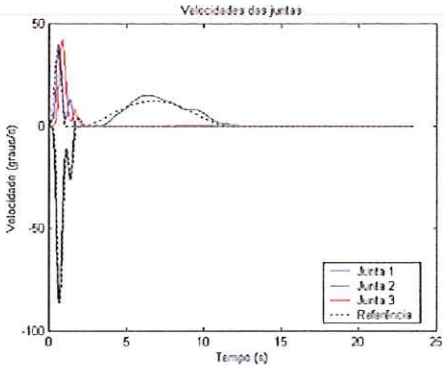


(c) Torques nas juntas

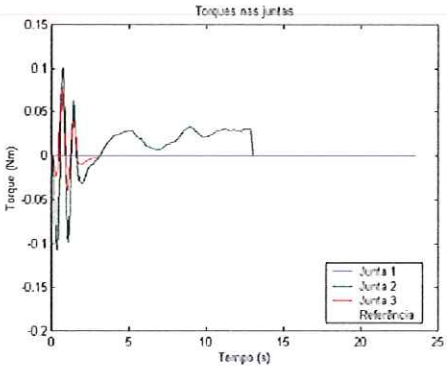
Figura 7.14: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. PAA - Simulação



(a) Posições das juntas

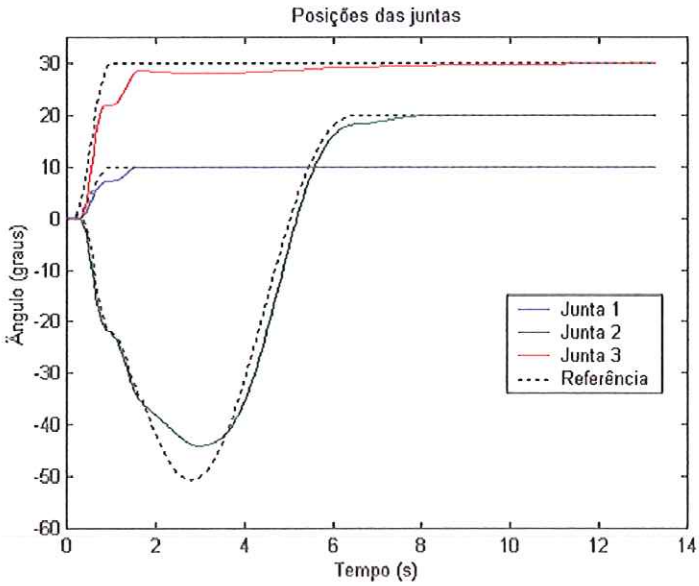


(b) Velocidades das juntas

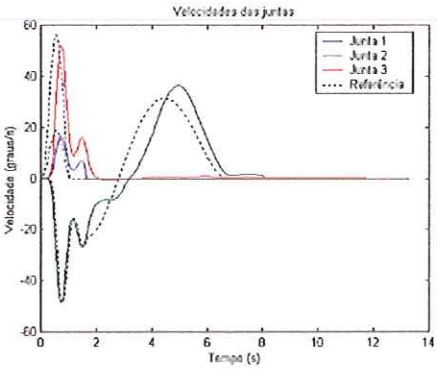


(c) Torques nas juntas

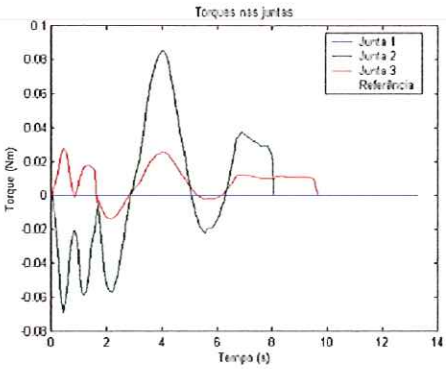
Figura 7.15: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]°$ - Conf. PAA - Experimental



(a) Posições das juntas

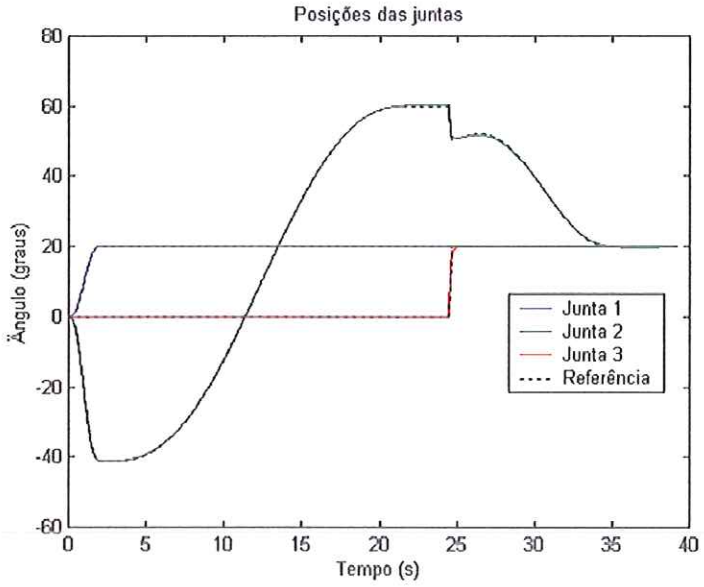


(b) Velocidades das juntas

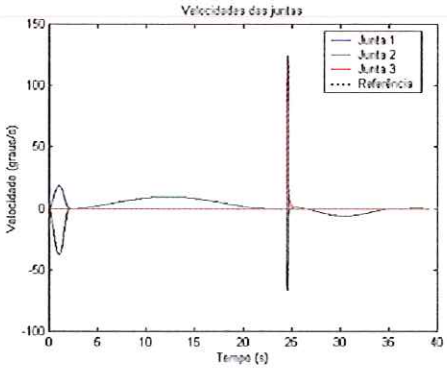


(c) Torques nas juntas

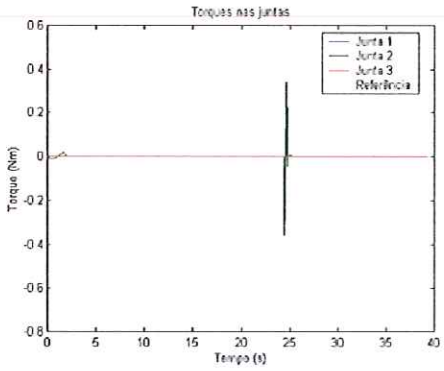
Figura 7.16: Posição final $q_d = [10\ 20\ 30]°$ - Conf. PAA - Experimental



(a) Posições das juntas

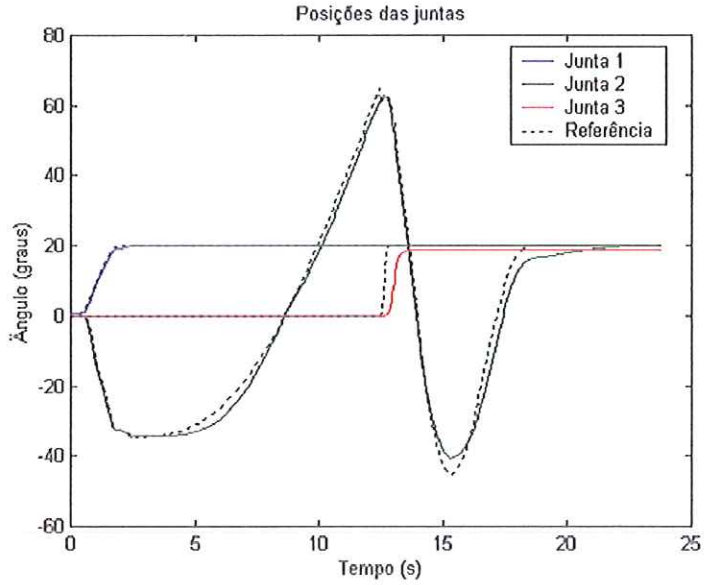


(b) Velocidades das juntas

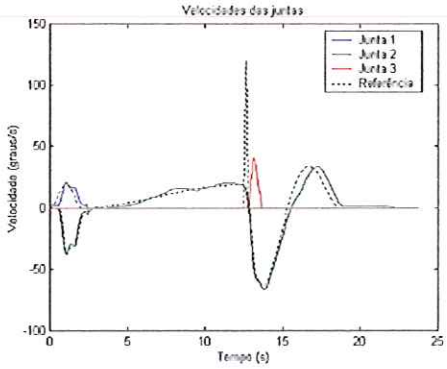


(c) Torques nas juntas

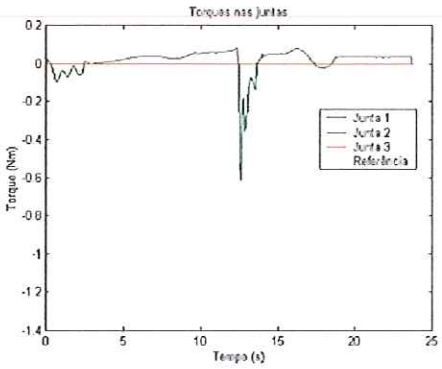
Figura 7.17: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]°$ - Conf. PAP - Simulação



(a) Posições das juntas

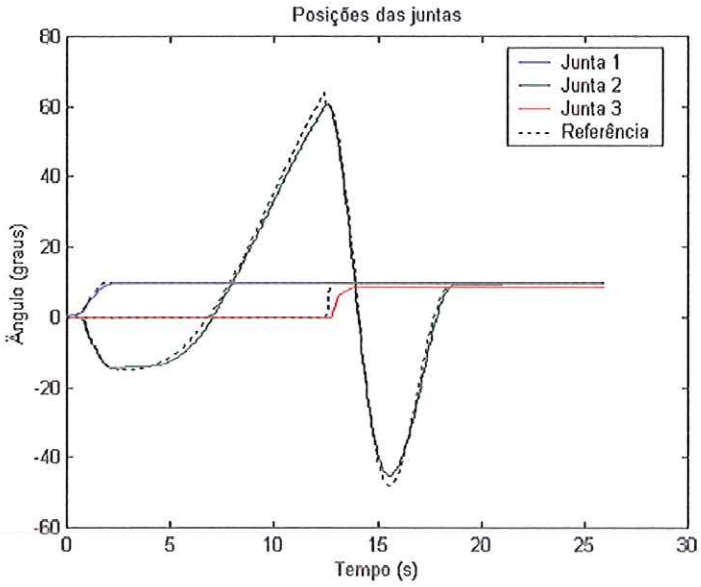


(b) Velocidades das juntas

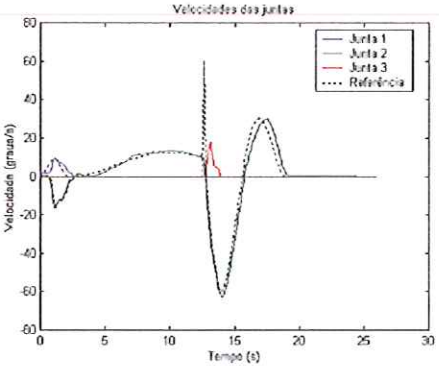


(c) Torques nas juntas

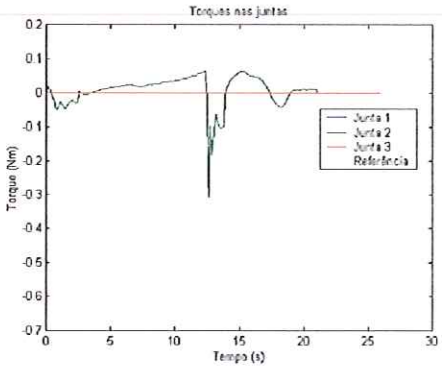
Figura 7.18: Posição final $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Conf. PAP - Experimental



(a) Posições das juntas

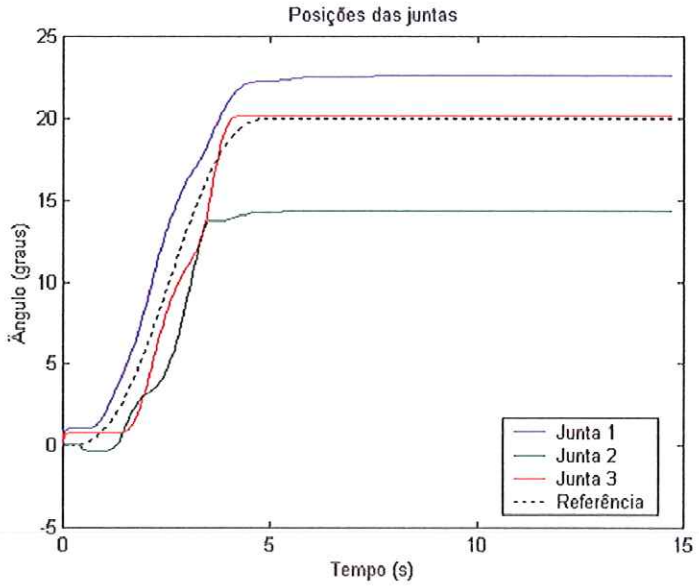


(b) Velocidades das juntas

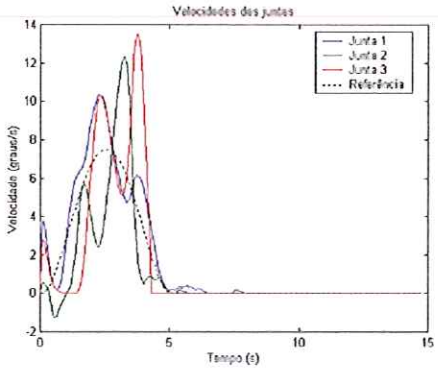


(c) Torques nas juntas

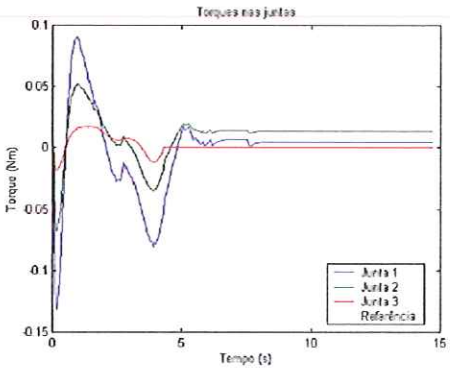
Figura 7.19: Posição final $q_d = [10\ 10\ 10]^\circ$ - Conf. PAP - Experimental



(a) Posições das juntas

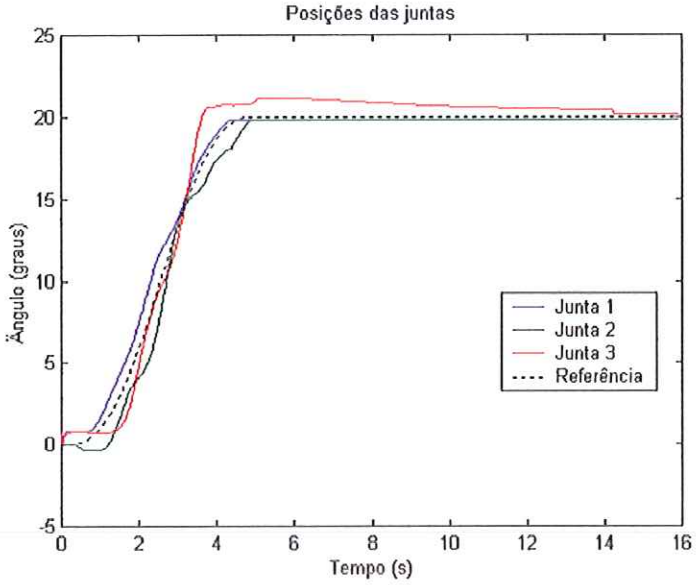


(b) Velocidades das juntas

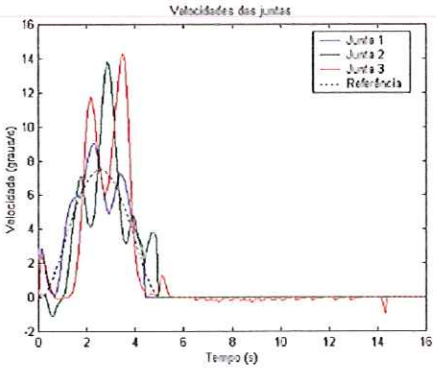


(c) Torques nas juntas

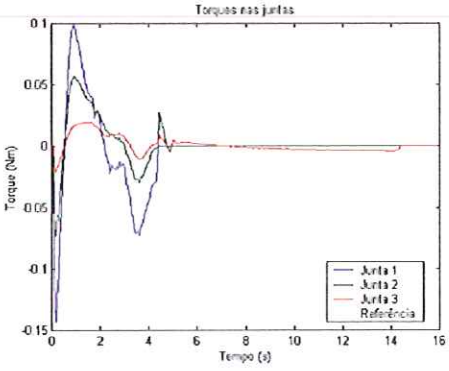
Figura 7.20: $q_d = [20\ 20\ 20]°$ - Controlador PD - Massa Adicionada



(a) Posições das juntas

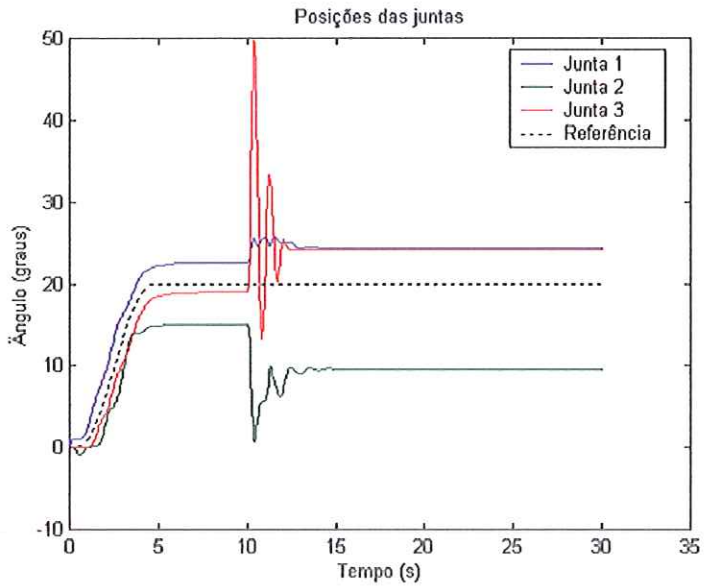


(b) Velocidades das juntas

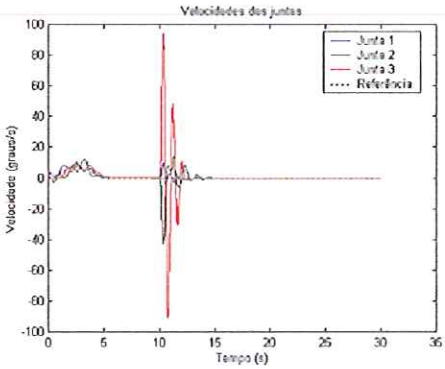


(c) Torques nas juntas

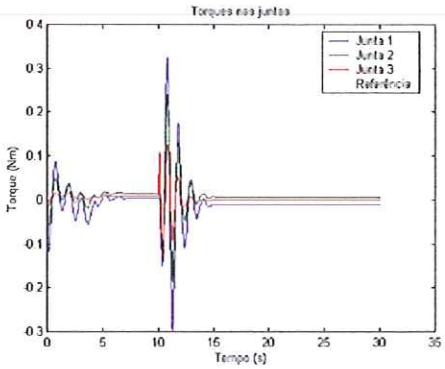
Figura 7.21: $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Controlador PD e K_μ - Massa Adicionada



(a) Posições das juntas

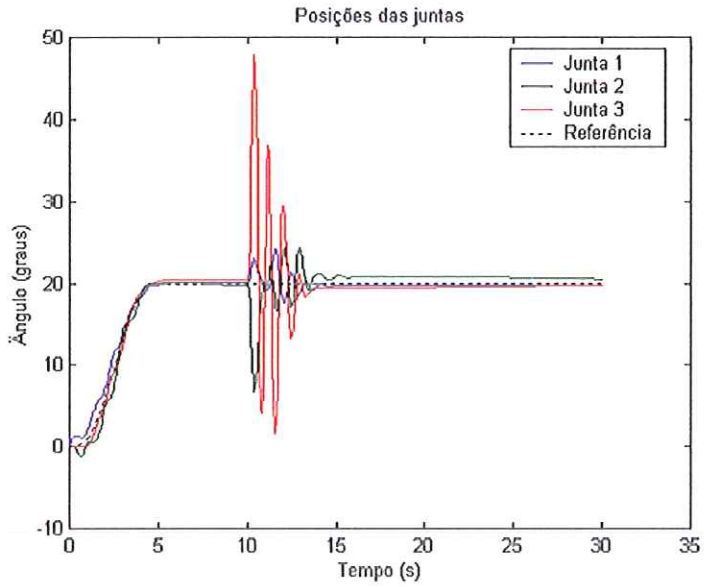


(b) Velocidades das juntas

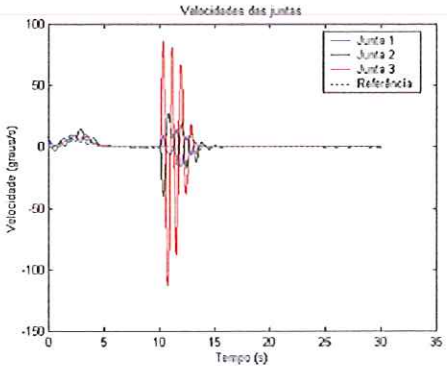


(c) Torques nas juntas

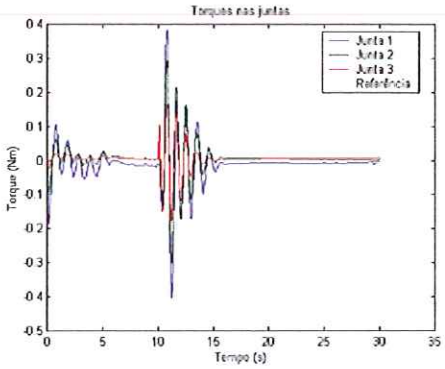
Figura 7.22: $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Controlador PD - Distúrbio Externo



(a) Posições das juntas

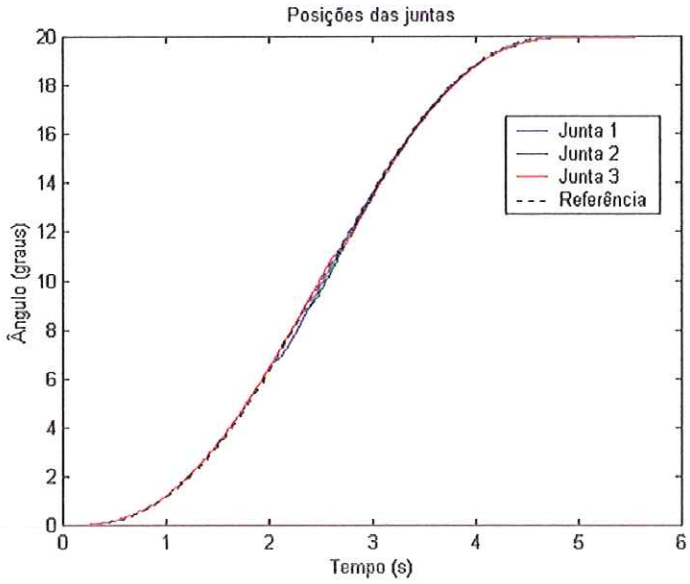


(b) Velocidades das juntas

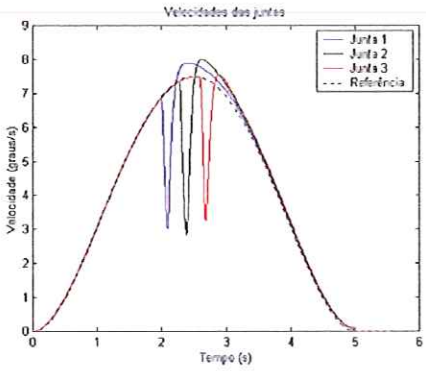


(c) Torques nas juntas

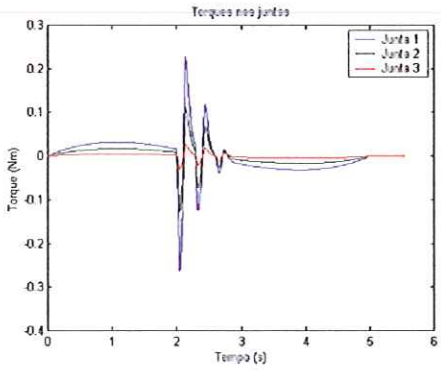
Figura 7.23: $q_d = [20\ 20\ 20]^\circ$ - Controlador PD e K_μ - Distúrbio Externo



(a) Posições das juntas

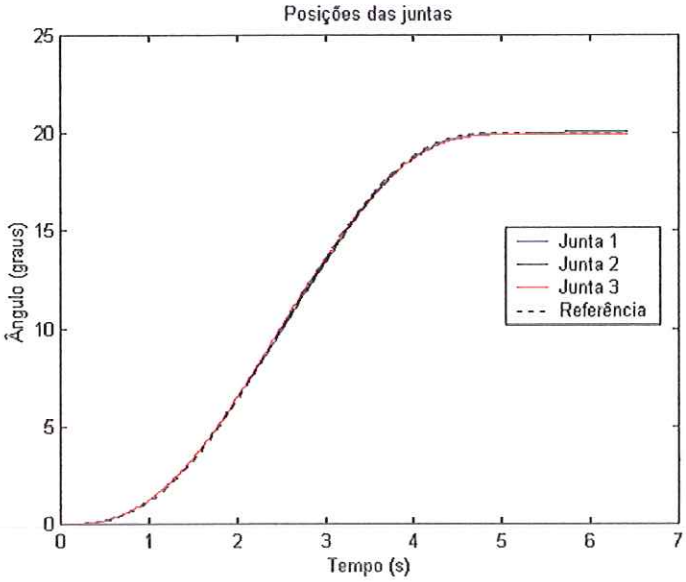


(b) Velocidades das juntas

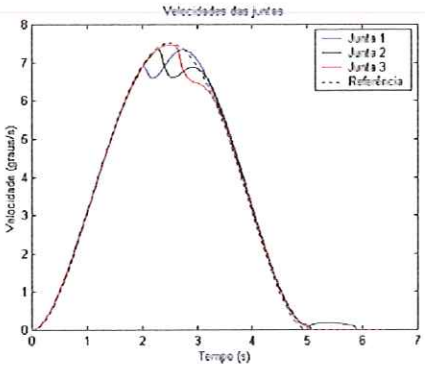


(c) Torques nas juntas

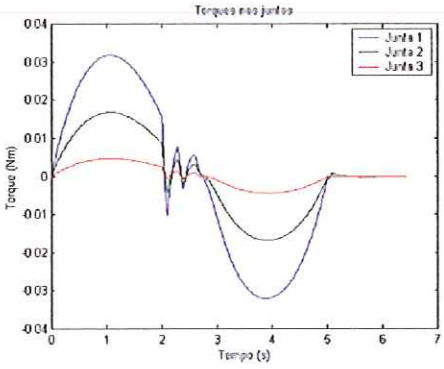
Figura 7.24: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAA



(a) Posições das juntas

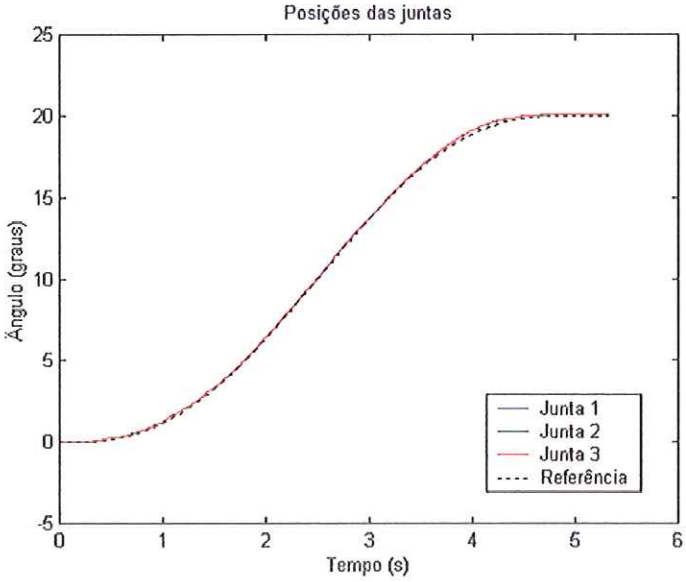


(b) Velocidades das juntas

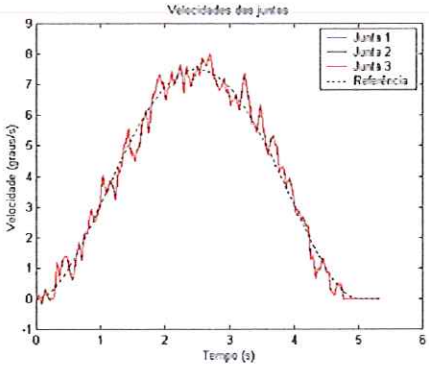


(c) Torques nas juntas

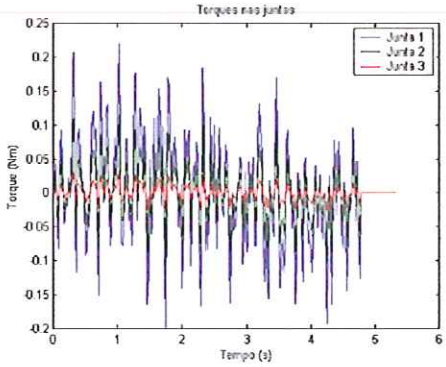
Figura 7.25: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAA



(a) Posições das juntas

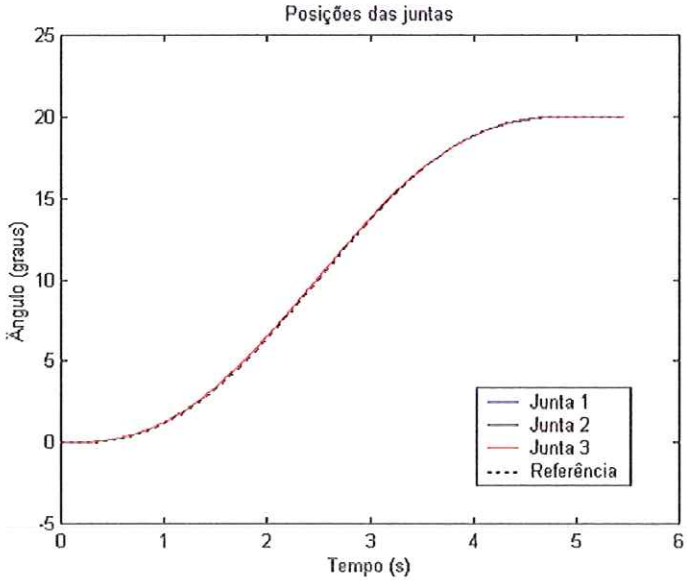


(b) Velocidades das juntas

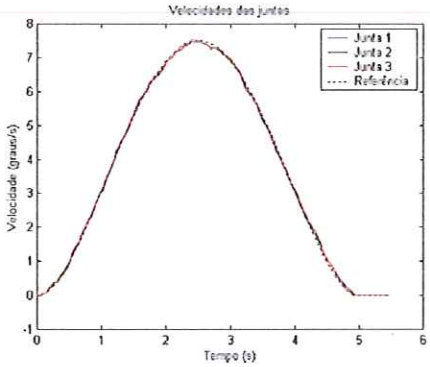


(c) Torques nas juntas

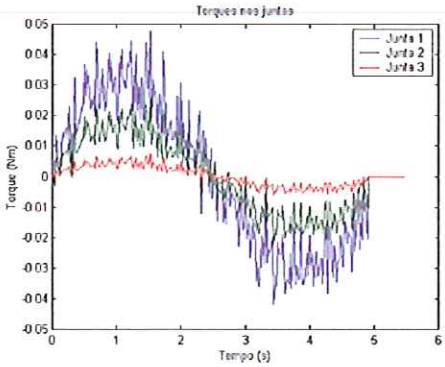
Figura 7.26: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAA



(a) Posições das juntas

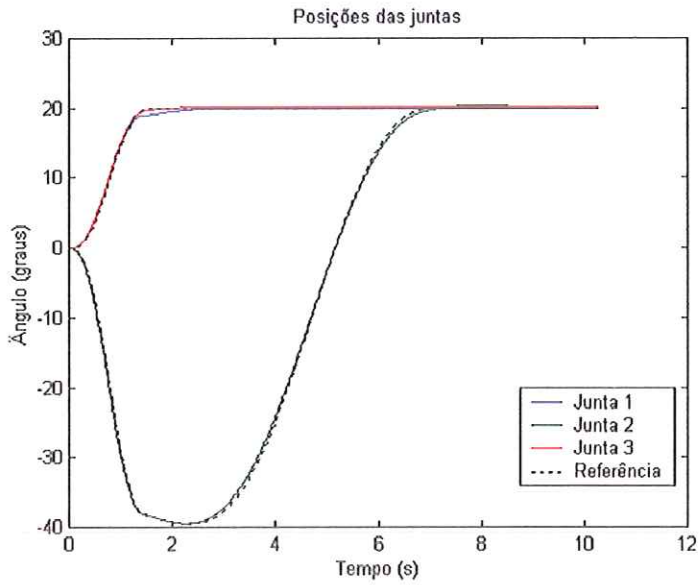


(b) Velocidades das juntas

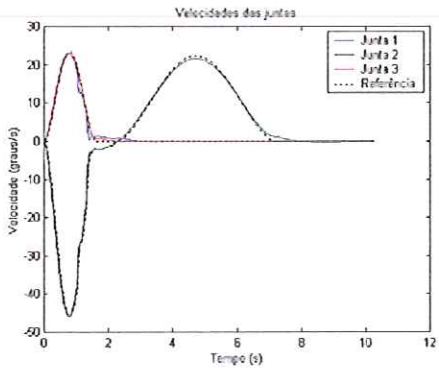


(c) Torques nas juntas

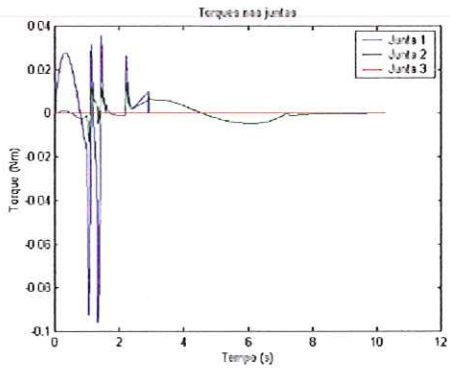
Figura 7.27: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAA



(a) Posições das juntas

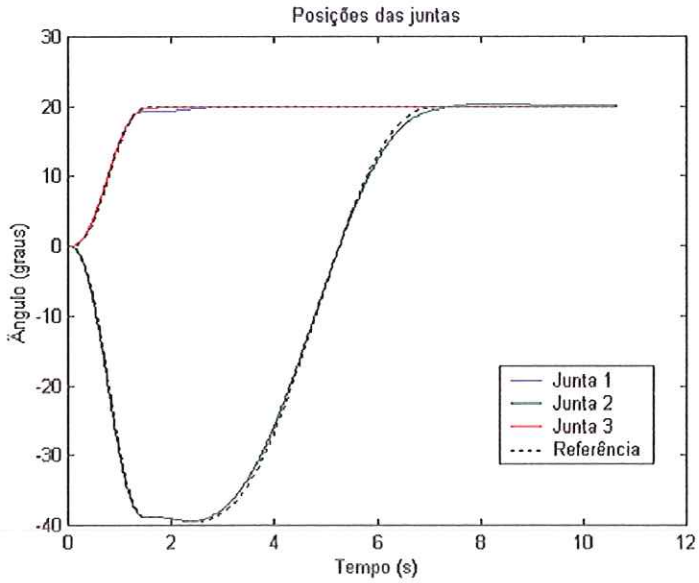


(b) Velocidades das juntas

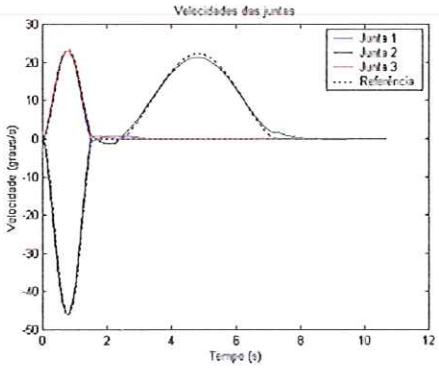


(c) Torques nas juntas

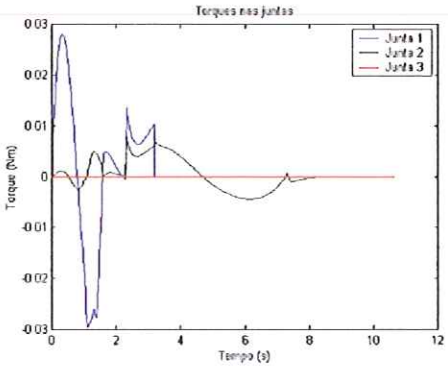
Figura 7.28: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAP



(a) Posições das juntas

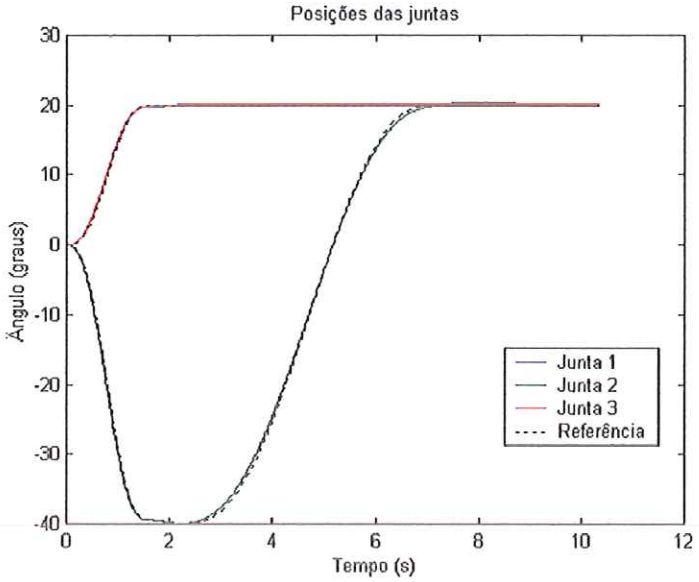


(b) Velocidades das juntas

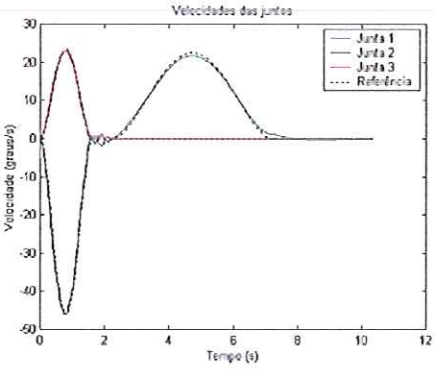


(c) Torques nas juntas

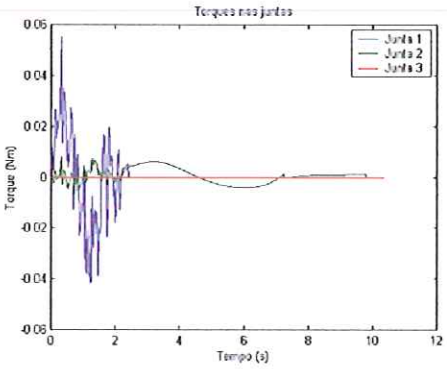
Figura 7.29: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. AAP



(a) Posições das juntas

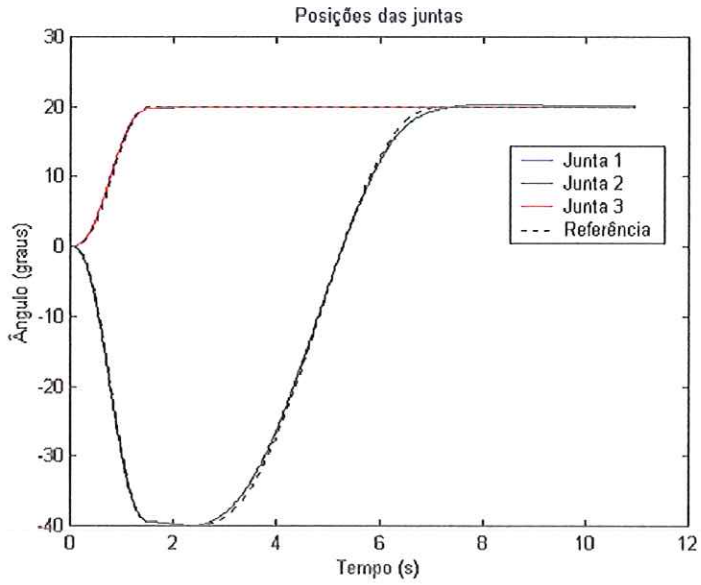


(b) Velocidades das juntas

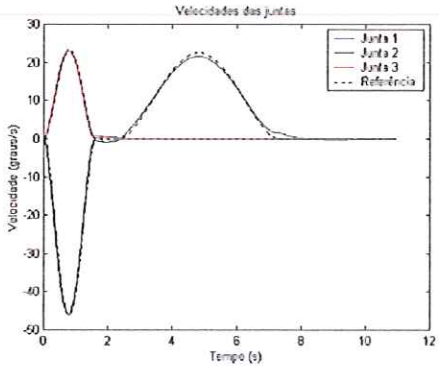


(c) Torques nas juntas

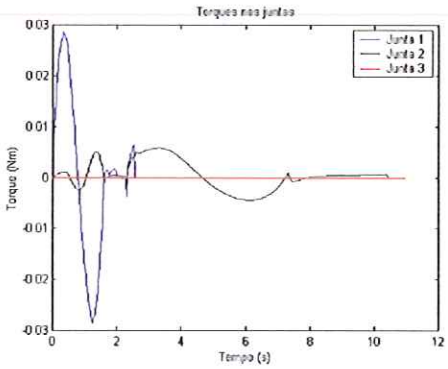
Figura 7.30: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAP



(a) Posições das juntas

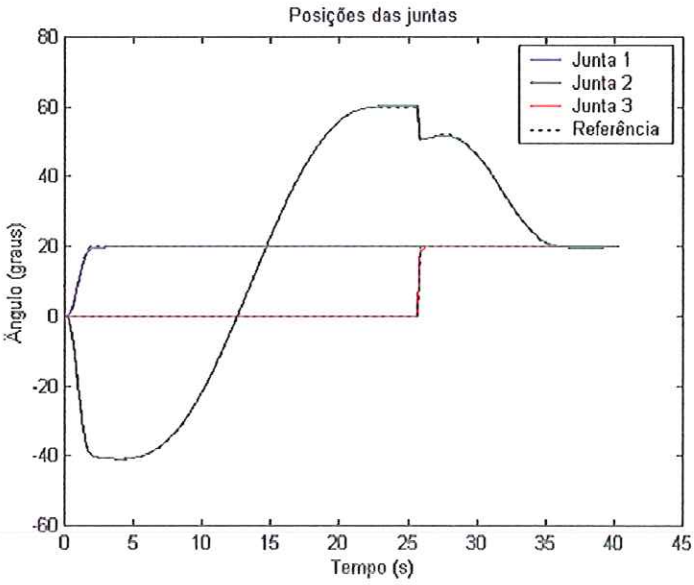


(b) Velocidades das juntas

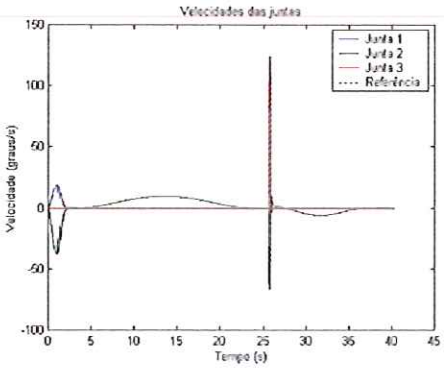


(c) Torques nas juntas

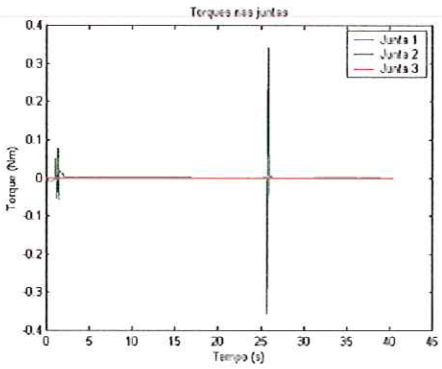
Figura 7.31: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. AAP



(a) Posições das juntas

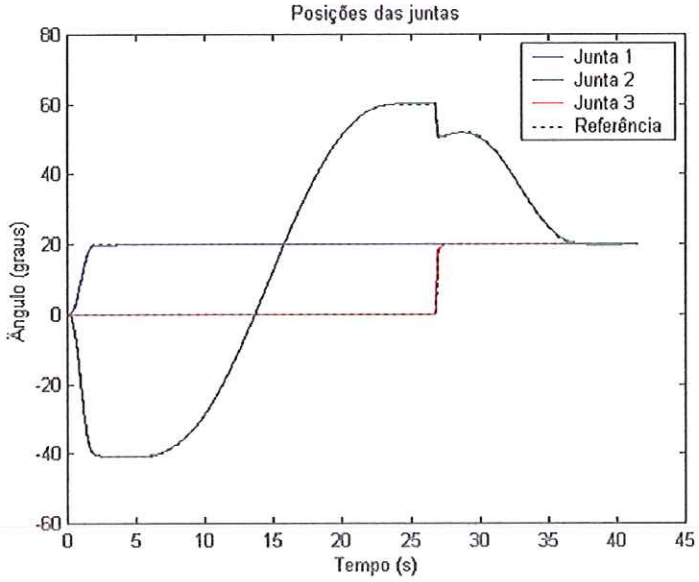


(b) Velocidades das juntas

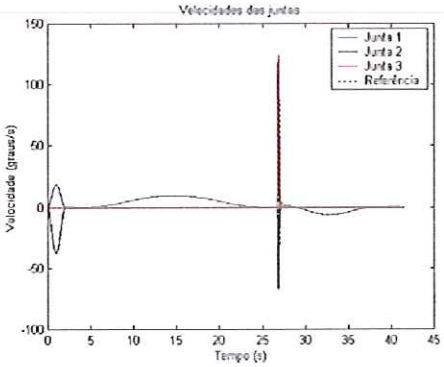


(c) Torques nas juntas

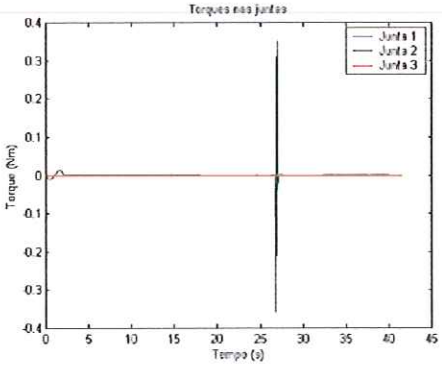
Figura 7.32: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. PAP



(a) Posições das juntas

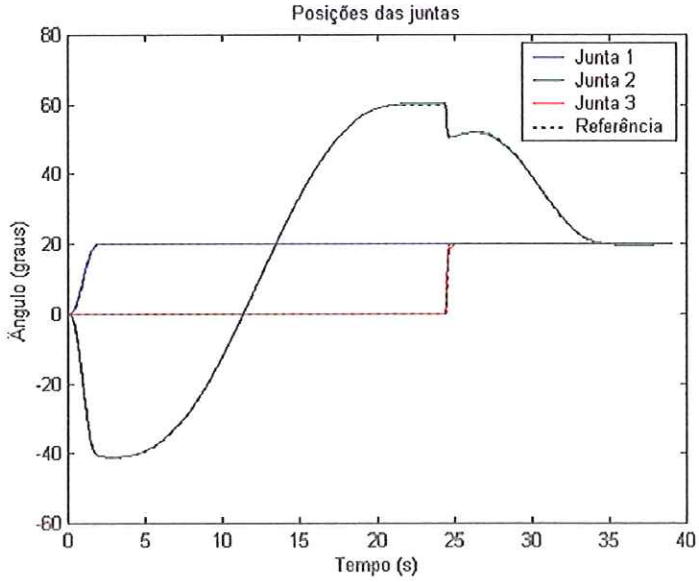


(b) Velocidades das juntas

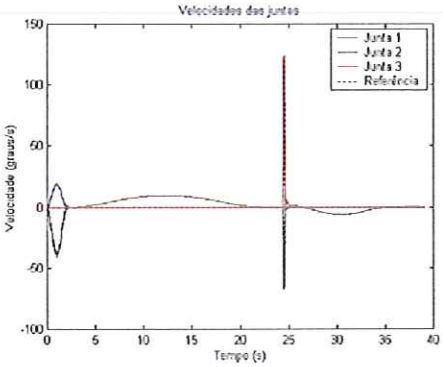


(c) Torques nas juntas

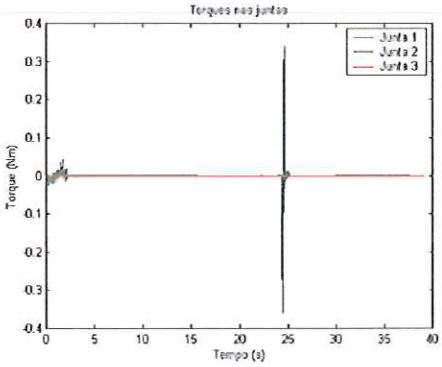
Figura 7.33: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo impulso - Conf. PAP



(a) Posições das juntas

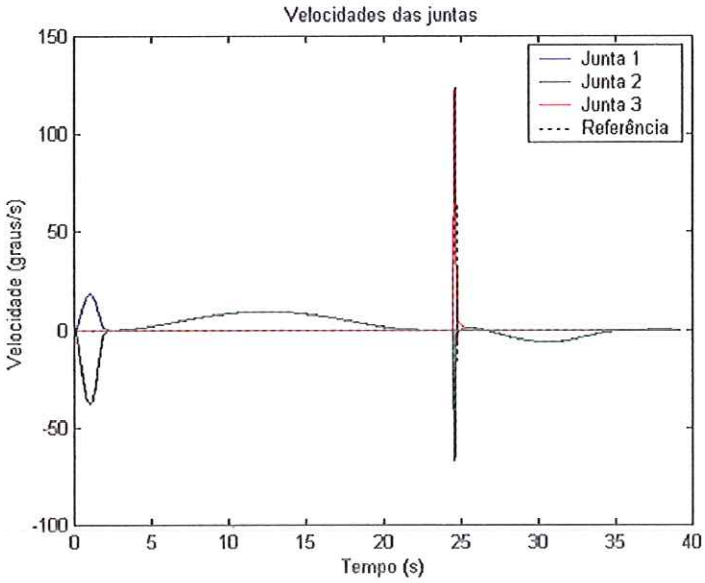


(b) Velocidades das juntas

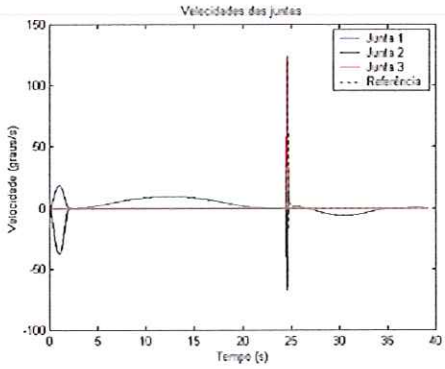


(c) Torques nas juntas

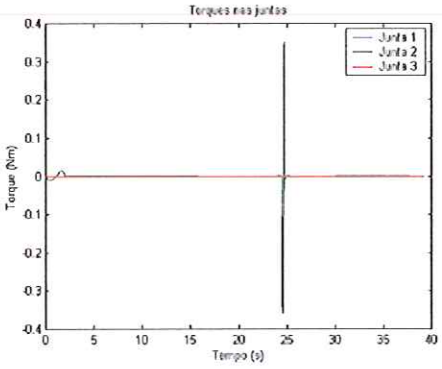
Figura 7.34: Controlador robusto K_∞ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. PAP



(a) Posições das juntas



(b) Velocidades das juntas



(c) Torques nas juntas

Figura 7.35: Controlador robusto K_μ - Distúrbio do tipo ruído branco - Conf. PAP

Capítulo 8

Conclusões

A metodologia de controle que combina controladores robustos projetados via Síntese-μ e a técnica do torque calculado apresenta bons resultados quando aplicada em um manipulador subatuado de três graus de liberdade. Salienta-se que o grande atrativo é que, de acordo com os testes realizados, o sistema de controle projetado mostrou-se muito eficiente quando utilizado em um sistema real (UArmII), mesmo que este esteja sujeito a situações que podem degradar o desempenho de qualquer sistema de controle. Deve-se observar também que a "distância" entre projeto e implementação, presente em outras técnicas de projeto, é diminuída consideravelmente. Isto significa que, ajustes que normalmente antecedem a implementação dos controladores projetados não foram necessários utilizando esta técnica de projeto e controle.

Assim, os resultados obtidos mostram que os objetivos deste trabalho foram alcançados com êxito. O excelente desempenho verificado no controle de posicionamento do manipulador subatuado para diversas configurações e trajetórias mostra a capacidade do sistema projetado de proporcionar um bom acompanhamento do erro de referência. A implementação dos controladores projetados foi realizada com sucesso e os testes confirmaram os bons resultados previstos nas simulações.

É importante lembrar que o sistema real está sujeito a mudanças nos seus parâmetros internos e a distúrbios externos (ruído dos sensores, etc). Para verificar o comportamento do sistema diante destas situações de perturbação foram realizados dois diferentes testes de robustez. No primeiro teste, a adição de massa no terceiro elo do manipulador representa uma variação paramétrica (Δm_3) no sistema. No segundo, um impulso de torque aplicado na terceira junta simula a atuação de um distúrbio externo durante a operação de posicionamento do manipulador. Analisando o desempenho apresentado pelo *UArmII* durante a realização destes testes, pode-se concluir que o sistema de controle robusto projetado mostra-se superior quando comparado com um sistema de controle convencional (CTq).

Deve-se observar também que a linearização presente na metodologia proposta mostrou-se uma boa técnica auxiliar no modelamento do manipulador subatuado, já que permitiu uma rápida determinação de representações lineares na forma de espaço de estados, necessárias no procedimento de projeto. Contudo, sabe-se que as condições de operação são distintas daquelas consideradas no modelo de projeto (nominal). Diante deste fato, conclui-se que neste caso, a utilização do procedimento de Síntese-μ foi extremamente adequada, proporcionando uma robustez mais satisfatória. Note que as dinâmicas dos acionamentos dos motores e dos sensores não são consideradas no modelo nominal, mas são modeladas com a utilização de funções de ponderação. A utilização destas funções também incorpora o comportamento de outras dinâmicas não-modeladas presentes no sistema real. Salienta-se também, que o termo da equação dinâmica do manipulador correspondente aos torques friccionais (F_{atr}) não foi considerado no algoritmo de controle. Mesmo assim, os resultados mostram que esta deficiência foi superada com a utilização da metodologia de controle proposta.

Apesar da facilidade de implementação proporcionada pela metodologia utilizada, quando comparada com outras técnicas (por exemplo, controle adaptativo), um aspecto negativo do método é a quantidade de parâmetros que devem ser ajustados quando várias funções de ponderação são consideradas.

Utilizando o sistema de controle projetado combinado com alguma metodologia de detecção de falhas é possível desenvolver um sistema tolerante a falhas altamente robusto capaz de ser operado e utilizado nos mais diferentes ambientes e situações.

Apêndice A

Ambiente de Simulação

As sínteses de métodos de controle e detecção de falhas para sistemas robóticos podem ser facilitadas utilizando-se ambientes de simulação que integrem projeto, teste e validação dos algoritmos. Apesar de já existirem programas comerciais para simular manipuladores industriais, não existem programas para estudar métodos de controle e detecção de falhas em manipuladores subatuados. Para isso, foi criado um ambiente de simulação baseado no software de programação $MATLAB^{©}$, que permite projetar, testar e validar métodos de controle e detecção de falhas para um manipulador subatuado.

O ambiente é composto por uma interface gráfica através da qual os parâmetros do manipulador, o algoritmo de controle e a metodologia de detecção de falhas podem ser escolhidos. A interface mostra também o movimento do manipulador durante o processamento do controle, em tempo real ou mesmo durante uma simulação. Falhas nas juntas podem ser introduzidas em qualquer instante durante a simulação. Os algoritmos FDI detectam a junta com problema e o ambiente reconfigura automaticamente o manipulador para uma nova lei de controle capaz de levar todas as suas juntas para as posições finais especificadas.

A versão atual para este ambiente foi desenvolvida para um manipulador de 3 juntas, já que existe um manipulador real com estas características no *Departamento de Engenharia Elétrica* da $USP - SC$, descrito no capítulo 5. Nesse ambiente, o usuário pode simular o comportamento do manipulador incluindo seus parâmetros de inércia, centrífugos, Coriolis e gravitacionais. Terminada a simulação pode-se verificar em janelas separadas os gráficos de posição, velocidade e torque das juntas, como também os resultados dos algoritmos de detecção de falhas. A interface tem sido desenvolvida de maneira que as diferentes escolhas para os algoritmos FDI e métodos de controle possam ser acessadas com apenas o toque de um botão. O ambiente de simulação também permite que inclusões de novos algoritmos de detecção e métodos de controle sejam feitas de maneira rápida e fácil.

Na versão atual o pacote do ambiente simulador apresenta dois métodos para detecção de falhas: um algoritmo FDI baseado em redes neurais e uma metodologia de detecção via raio de estabilidade. Apresenta também algumas opções para o tipo de controlador: *Torque Calculado*, LMI, VSC, H_∞, H_∞ não linear e *Síntese-*μ. Nas figuras a seguir são apresentadas algumas telas da interface gráfica do $UArmII$. O simulador e o código fonte de uma versão de livre distribuição podem ser adquiridos no endereço: *http://www.sel.eesc.sc.usp.br/~ lasi.*

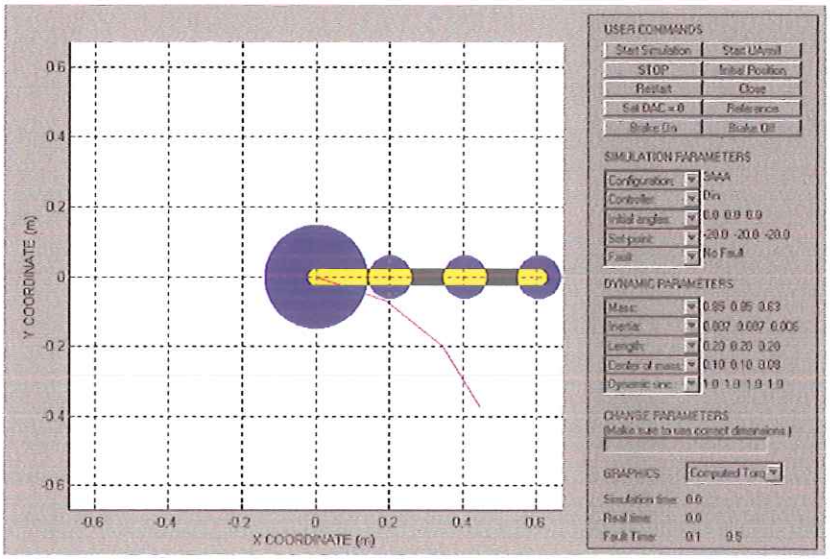


Figura A.1: Ambiente de simulação do UArmII

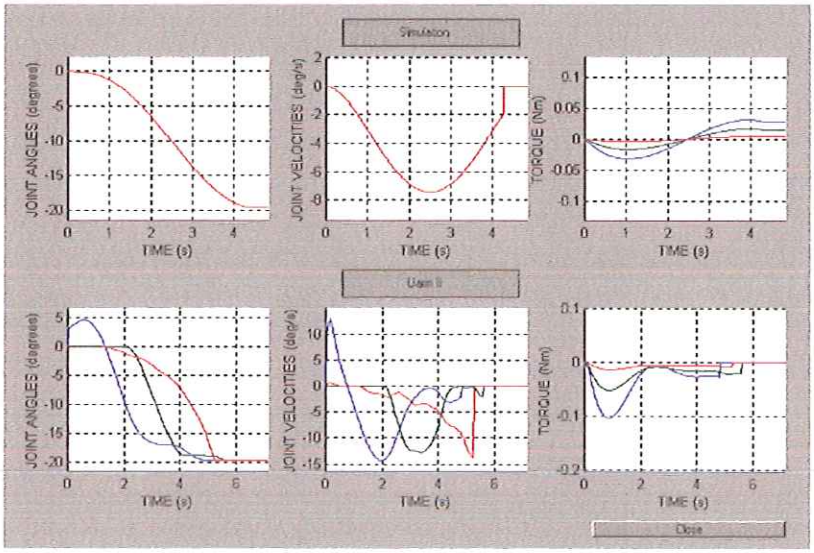


Figura A.2: Janela de gráficos

Apêndice B

Especificações do UArmII

- Braço

  Número de juntas: 3

  Tamanho do ligamento: 31,5 cm

  Tamanho do braço (centro da junta 1 ao centro da última junta): 94,5 cm

  Tamanho da junta: 76 mm de diâmetro, por 86 mm de altura

  Massa das juntas 1 e 2: 670 g

  Massa da última junta: 220 g

  Massa do ligamento: 30 g

- Flutuadores de ar

  Diâmetro das juntas: 76 mm

  Diâmetro dos orifícios: 0.36 mm

  Altura da camada de ar: 0.08 mm aproximadamente

  Pressão do ar: 100 PSI (700 kPa) max.

- Motores

  Modelo: Kollmorgen RBE- brushless DC

  Voltagem nominal: 48 V DC

  Resistência de giro: 2.4 ohm

  Torque constante: 0.14 Nm/amp

  Torque de pico: 2.8 Nm

  Massa do motor: 344 g

- Amplificadores de corrente

  Modelo: Elmo SBA -10/100H-4

  Corrente de pico: 20 A

  Corrente contínua: 10 A

Tensão: 20 - 90 V DC

- Fonte de energia
  48 V DC até 20 A
  24 V DC até 1 A

- Encoders Óticos
  Modelo: Hewlett Packard mod. HEDS -9040-T00
  Disco: Modelo HEDS-6140-T08
  Linhas: 2000/rev
  Contagem após decodificação em quadratura: 8000/rev

- Freios
  Tipo: Diafragma acionado por ar
  Pressão: 100 PSI (700 kPa) max.
  Torque: Aproximadamente 2.8 Nm

- Sistema Computacional
  Computador: Pentium PC com entrada disponível para placa STG
  Placa: Modelo Servo To Go S8, Servo I/O 8 eixos

- Sistema de Controle da Pressão do Ar
  Válvulas solenóides (bobinas): Modelo Clippard Evo-3M , 24 V DC , 0.67 W
  Válvulas reguladoras de pressão.

Apêndice C

Programas Desenvolvidos

Os programas apresentados a seguir foram desenvolvidos utilizando o software MATLAB e o *toolbox mutools*.

C.1 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para a Configuração AAA do UArmII

```
% Projeta um Controlador Via D-K (Síntese mu) para conf. AAA do UARMII
% Obs : Utiliza o comando dkit (Toolbox mutools)
% Autor : Tácio Luiz de Souza Barbeiro

clear;clc;

Z = zeros(3,3);
I = eye(3);

% Ganhos do PD
Kp1=10;
Kp2=10;
Kp3=20;
Kv1=sqrt(2*Kp1);
Kv2=sqrt(2*Kp2);
Kv3=sqrt(2*Kp3);

KP = [ Kp1 0 0
```

```
        0 Kp2 0
        0 0 Kp3 ];
KV = [ Kv1 0 0
        0 Kv2 0
        0 0 Kv3 ];

% Sistema Nominal
Ag = [    Z        I    ;
         -KP     -KV ] ;

Bg = [ Z    ;
        I ] ;

Cg = [ I Z ] ;

Dg = [ Z ] ;

G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Modelo de Incertezas e Perturbação
% Função de ponderação Wdel
Mu=15;
wbc=10000;
E1=.01/100;
nwu=[1 wbc/Mu];
dwu=[E1 wbc];
Wu=tf(nwu,dwu)

Wu1=nd2sys(nwu,dwu);
Wu2=nd2sys(nwu,dwu);
Wu3=nd2sys(nwu,dwu);
Wu=daug(Wu1,Wu2,Wu3);

% Função de Ponderação Wp
Ms=1;
wb=1;
E=.01/100;
```

```
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe)

We1=nd2sys(nwe,dwe);
We2=nd2sys(nwe,dwe);
We3=nd2sys(nwe,dwe);
We=daug(We1,We2,We3);

% Definição do Sistema Interconectado
systemnames = 'G Wu We';
inputvar = '[pert(3); dist(3); control(3)]';
outputvar = '[ Wu ; We; G + dist ]';
input_to_G = '[ control + pert ]';
input_to_Wu = '[ control ]';
input_to_We = '[ G + dist ]';
sysoutname = 'P';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

DK_DEF_NAME = 'dk_AAA' ;

% Síntese Hinf ( Opcional)
%gmin=0.5;
%gmax=5;
% Síntese Hinf
%[k1,g1,gf1]=hinfsyn(P,3,3,gmin,gmax,0.05,2);
%[aK,bK,cK,dK]=unpck(k1);
%[ag,bg,cg,dg]=unpck(g1);

% Mu Síntese via D-K
dkit
[aK1,bK1,cK1,dK1] = unpck(k_dk1_AAA) ;
[aK2,bK2,cK2,dK2] = unpck(k_dk2_AAA) ;

% Controlador Projetado
aK=aK2;bK=bK2;cK=cK2;dK=dK2;
```

```
K=ss(aK,bK,cK,dK);
[agk,bgk,cgk,dgk]=series(aK,bK,cK,dK,Ag,Bg,Cg,Dg);

% Análise do Sistema
%[ac1,bc1,cc1,dc1]=cloop(agk,bgk,cgk,dgk,1);
%gfb=pck(ac1,bc1,cc1,dc1);
%SYS_FB = ss(ac1,bc1,cc1,dc1) ;
%SYS_MA = ss(Ag,Bg,Cg,Dg);
%figure(1);
%sigma(SYS_MA);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Aberta');
%figure(2);
%sigma(SYS_FB);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Fechada');

% Análise da Função Sensibilidade do Sistema
Lo=ss(agk,bgk,cgk,dgk);
We=tf(nwe,dwe);
WE=eye(3)*We;
Wu=tf(nwu,dwu);
WU=eye(3)*Wu;
So=inv(eye(size(Lo))+Lo);

figure
sigma(inv(WE),So);

SYS=series(So,K);
figure
sigma(inv(WU),SYS);

% Armazenamento dos Resultados
delete /users/tacio/dinamico/ctr_AAA.mat ;
save /users/tacio/dinamico/ctr_AAA.mat aK bK cK dK ;
```

C.1.1 Arquivo de Definição - Conf. AAA

O arquivo apresentado a seguir contém os parâmetros que devem ser definidos para o correto funcionamento do programa acima.

```
%   dk_defin
%
%   This script file contains the USER DEFINED VARIABLES for the
%       mutools DKIT script file. The user MUST define all of the
%       variables listed in the REQUIRED section.  Variables listed
%       in the OPTIONAL section may be omitted.
%   Copyright (c) 1991-98 by MUSYN Inc. and The MathWorks, Inc.
% $Revision: 1.3 $

%-------------------------------------------------------%
%          REQUIRED USER-DEFINED VARIABLES              %
%-------------------------------------------------------%
% Nominal Open-Loop Interconnection Structure
NOMINAL_DK = P ;
% Number of Control Measurements (# of inputs to the controller)
NMEAS_DK = 3;
% Number of Control Actuators (# of outputs of the controller)
NCONT_DK = 3;
% Block Structure for MU Calculation (including, in typical
%   problems, both the uncertainty blocks and the performance  block)
BLK_DK = [ 3 3 ; 3 3 ] ;
% Frequency Response Range
OMEGA_DK = logspace(-4,2,100);
%-------------------------------------------------------%
%          OPTIONAL USER-DEFINED VARIABLES              %
%-------------------------------------------------------%
% DISCRETE_DK (used for unit disk, rather than imaginary axis)
%   if DISCRETE_DK==1, then all frequency responses and norms
%   are computed over the unit disk, as opposed to the right-half
%   plant.  The Default Value is DISCRETE_DK = 0, which forces
%   imaginary axis interpretation.  The required variable, OMEGA_DK,
%   is interpreted as either imaginary axis values (DISCRETE_DK==0)
%   or angle (in radians) on the unit disc (DISCRETE_DK==1)
```

```
DISCRETE_DK = 0;
% AUTOINFO_DK (used for automatic iteration, ie. batch mode)
%   This should be a row vector, 1 x (3+size(BLK_DK,1)).  The
%   interpretations of each term is given below:
%
%   The first entry is the beginning iteration number, usually 1,
%       except when you are resuming, or restarting, an existing
%       iteration.
%   The second entry is the final iteration number.  The automatic
%       iteration will complete this iteration, and then stop.
%   The third entry is a Visual Flag.  If AUTOINFO_DK(3)==1, then
%       the results of the DK-iteration are displayed (both in figures
%       and in the Command Window).    If AUTOINFO_DK(3)==0, then
%       no results are displayed.
%   The remaining entries (there are as many as there are uncertainty
%       blocks in the uncertainty set described by BLK_DK) denote the
%       maximum dynamic order of the rational D-scalings.
%
%   Hence, to
%           Begin at Iteration 3
%           End after Iteration 7
%           Display Results to screen
%           Use 4th order (maximum) systems in entries of scaling matrix
%   define
%           AUTOINFO_DK = [3 7 1 4*ones(1,size(BLK_DK,1))];
AUTOINFO_DK = [1 2 1 1*ones(1,size(BLK_DK,1))];
% Suffix appended to all variables exported to workspace
NAME_DK = '_AAA';
GMAX_DK = 500
```

C.2 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para as Configurações AAP, APA e PAA do UArmII

O programa apresentado a seguir foi elaborado para a 1° etapa de controle da configuração AAP, mas pode ser utilizado para as outras configurações e etapas de controle, desde que os valores de ganhos correspondendes às juntas controladas sejam definidos adequadamente no programa.

```
% Projeta um Controlador Via D-K (Síntese mu) para conf. AAP, APA e  PAA  do UARMII
% Obs : Utiliza o comando dkit (Toolbox mutools)
% Autor : Tácio Luiz de Souza Barbeiro

clear;clc;

Z = zeros(2,2);
I = eye(2);

% Ganhos do PD
Kp1=4;
Kp2=4;
Kv1=sqrt(2*Kp1);
Kv2=sqrt(2*Kp2);

KP = [ Kp1 0
       0 Kp2 ];
KV = [ Kv1 0
       0 Kv2 ];

% Sistema Nominal
Ag = [    Z        I    ;
         -KP      -KV ] ;

Bg = [ Z    ;
       I ] ;

Cg = [ I Z ] ;

Dg = [ Z ] ;

G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Modelo de Incertezas e Perturbação
% Função de ponderação Wdel
Mu=15;
wbc=10000;
```

```
E1=.01/100;
nwu=[1 wbc/Mu];
dwu=[E1 wbc];
Wu=tf(nwu,dwu)

Wu1=nd2sys(nwu,dwu);
Wu2=nd2sys(nwu,dwu);
Wu=daug(Wu1,Wu2);

% Função de Ponderação Wp
Ms=1;
wb=1;
E=.01/100;
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe)

We1=nd2sys(nwe,dwe);
We2=nd2sys(nwe,dwe);
We=daug(We1,We2);

% Definição do Sistema Interconectado
systemnames = 'G Wu We';
inputvar = '[pert(2); dist(2); control(2)]';
outputvar = '[ Wu ; We; G + dist ]';
input_to_G = '[ control + pert ]';
input_to_Wu = '[ control ]';
input_to_We = '[ G + dist ]';
sysoutname = 'P';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

DK_DEF_NAME = 'dk_AAP' ;

% Síntese Hinf (Opcional)
%gmin=0.5;
%gmax=5;
```

```
% Síntese Hinf
%[k1,g1,gf1]=hinfsyn(P,3,3,gmin,gmax,0.05,2);
%[aK,bK,cK,dK]=unpck(k1);
%[ag,bg,cg,dg]=unpck(g1);

% Mu Síntese via D-K
dkit
[aK1,bK1,cK1,dK1] = unpck(k_dk1_AAP) ;
[aK2,bK2,cK2,dK2] = unpck(k_dk2_AAP) ;

% COntrolador Projetado
aK=aK2;bK=bK2;cK=cK2;dK=dK2;

K=ss(aK,bK,cK,dK);
[agk,bgk,cgk,dgk]=series(aK,bK,cK,dK,Ag,Bg,Cg,Dg);

% Análise do Sistema
%[ac1,bc1,cc1,dc1]=cloop(agk,bgk,cgk,dgk,1);
%gfb=pck(ac1,bc1,cc1,dc1);
%SYS_FB = ss(ac1,bc1,cc1,dc1) ;
%SYS_MA = ss(Ag,Bg,Cg,Dg);
%figure(1);
%sigma(SYS_MA);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Aberta');
%figure(2);
%sigma(SYS_FB);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Fechada');

% Análise da Função Sensibilidade do Sistema
Lo=ss(agk,bgk,cgk,dgk);
We=tf(nwe,dwe);
WE=eye(2)*We;
Wu=tf(nwu,dwu);
WU=eye(2)*Wu;
So=inv(eye(size(Lo))+Lo);

figure
```

```
sigma(inv(WE),So);

SYS=series(So,K);
figure
sigma(inv(WU),SYS);

% Armazenamento dos Resultados
delete /users/tacio/dinamico/ctr_AAP2.mat ;
save /users/tacio/dinamico/ctr_AAP2.mat aK bK cK dK ;
```

C.2.1 Arquivo de Definição - Conf. AAP, APA, PAA

```
% Nominal Open-Loop Interconnection Structure
NOMINAL_DK = P ;
% Number of Control Measurements (# of inputs to the controller)
NMEAS_DK = 2;
% Number of Control Actuators (# of outputs of the controller)
NCONT_DK = 2;
% Block Structure for MU Calculation (including, in typical
%   problems, both the uncertainty blocks and the performance  block)
BLK_DK = [ 2 2 ; 2 2 ] ;
% Frequency Response Range
OMEGA_DK = logspace(-4,2,100);
DISCRETE_DK = 0;
AUTOINFO_DK = [1 2 1 1*ones(1,size(BLK_DK,1))];
% Suffix appended to all variables exported to workspace
NAME_DK = '_AAP';
GMAX_DK = 500 ;
```

C.3 Programa de Projeto do Controlador Robusto K_μ para a Configuração PAP do UArmII

As observações apresentadas no início da seção anterior também valem para este programa.

```
% Projeta um Controlador Via D-K (Síntese mu) para conf.  PAP  do UARMII
% Obs : Utiliza o comando dkit (Toolbox mutools)
% Autor : Tácio Luiz de Souza Barbeiro
```

```
clear;clc;

Z = zeros(1,1);
I = eye(1);

% Ganhos do PD
KP = 50;
KV = sqrt(2*KP);

% Sistema Nominal
Ag = [    Z        I    ;
         -KP     -KV ] ;

Bg = [ Z    ;
       I ] ;

Cg = [ I Z ] ;

Dg = [ Z ] ;

G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Modelo de Incertezas e Perturbação
% Função de Ponderação Wdel
Mu=15;
wbc=10000;
E1=.01/100;
nwu=[1 wbc/Mu];
dwu=[E1 wbc];
Wu=tf(nwu,dwu)
Wu3=nd2sys(nwu,dwu);
Wu=Wu3;

% Função de Ponderação Wp
Ms=1;
wb=1;
```

```
E=.01/100;
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe)
We3=nd2sys(nwe,dwe);
We=We3;

% Definição do Sistema Interconectado
systemnames = 'G Wu We';
inputvar = '[pert(1); dist(1); control(1)]';
outputvar = '[ Wu ; We; G + dist ]';
input_to_G = '[ control + pert ]';
input_to_Wu = '[ control ]';
input_to_We = '[ G + dist ]';
sysoutname = 'P';
cleanupsysic = 'yes';
sysic

DK_DEF_NAME = 'dk_PAP' ;

% Síntese Hinf (Opcional)
%gmin=0.5;
%gmax=5;
% Síntese Hinf
%[k1,g1,gf1]=hinfsyn(P,3,3,gmin,gmax,0.05,2);
%[aK,bK,cK,dK]=unpck(k1);
%[ag,bg,cg,dg]=unpck(g1);

% Mu Síntese via D-K
dkit
[aK1,bK1,cK1,dK1] = unpck(k_dk1_PAP) ;
[aK2,bK2,cK2,dK2] = unpck(k_dk2_PAP) ;

% Controlador Projetado
aK=aK2;bK=bK2;cK=cK2;dK=dK2;

K=ss(aK,bK,cK,dK);
```

EESC - USP Biblioteca Campus de S. Carlos

```
[agk,bgk,cgk,dgk]=series(aK,bK,cK,dK,Ag,Bg,Cg,Dg);

% Análise do Sistema
%[ac1,bc1,cc1,dc1]=cloop(agk,bgk,cgk,dgk,1);
%gfb=pck(ac1,bc1,cc1,dc1);
%SYS_FB = ss(ac1,bc1,cc1,dc1) ;
%SYS_MA = ss(Ag,Bg,Cg,Dg);
%figure(1);
%sigma(SYS_MA);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Aberta');
%figure(2);
%sigma(SYS_FB);
%title('Valores Singulares do Sistema Malha Fechada');

% Análise da Função Sensibilidade do Sistema
Lo=ss(agk,bgk,cgk,dgk);
We=tf(nwe,dwe);
WE=eye(1)*We;
Wu=tf(nwu,dwu);
WU=eye(1)*Wu;
So=inv(eye(size(Lo))+Lo);

figure
sigma(inv(WE),So);

SYS=series(So,K);
figure
sigma(inv(WU),SYS);

kp3 = KP ; kv3 = KV ;

% Armazenamento dos Resultados
delete /users/tacio/dinamico/ctr_PAP1.mat ;
save /users/tacio/dinamico/ctr_PAP1.mat aK bK cK dK kp3 kv3;
```

C.3.1 Arquivo de Definição - Conf. PAP

```
% Nominal Open-Loop Interconnection Structure
```

```
NOMINAL_DK = P ;
% Number of Control Measurements (# of inputs to the controller)
NMEAS_DK = 1;
% Number of Control Actuators (# of outputs of the controller)
NCONT_DK = 1;
% Block Structure for MU Calculation (including, in typical
%   problems, both the uncertainty blocks and the performance  block)
BLK_DK = [ 1 1 ; 1 1 ] ;
% Frequency Response Range
OMEGA_DK = logspace(-4,2,100);
DISCRETE_DK = 0;
AUTOINFO_DK = [1 2 1 1*ones(1,size(BLK_DK,1))];
% Suffix appended to all variables exported to workspace
NAME_DK = '_PAP';
GMAX_DK = 500 ;
```

Apêndice D

Matrizes de Projeto

As matrizes no espaço de estados dos modelos de planta aumentada para as diferentes configurações do robô são apresentadas a seguir:

$$A_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.0 & 0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10.0 & 0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20.0 & 0 & 0 & -6.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$B1_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} B2_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C1_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C2_{AAA} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D11_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} D12_{AAA} = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D21_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} D22_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{AAP1} = A_{PAA1} = A_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20.0 & 0 & -6.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$A_{AAP2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10.0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$A_{APA1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.0 & 0 & -4.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$A_{APA2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.0 & 0 & -2.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.0 & 0 & -2.83 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^8 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$B1_{AAP1} = B1_{AAP2} = B1_{APA1} = B1_{APA2} = B1_{PAA1} = B1_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B2_{AAP1} = B2_{AAP2} = B2_{APA1} = B2_{APA2} = B2_{PAA1} = B2_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \\ 10^6 & 0 \\ 0 & 10^6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C1_{AAP1} = C1_{AAP2} = C1_{APA1} = C1_{APA2} = C1_{PAA1} = C1_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^6 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C2_{AAP1} = C2_{AAP2} = C2_{APA1} = C2_{APA2} = C2_{PAA1} = C2_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D11_{AAP1} = D11_{AAP2} == D11_{APA1} = D11_{APA2} = D11_{PAA1} = D11_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D12_{AAP1} = D12_{AAP2} = D12_{APA1} = D12_{APA2} = D12_{PAA1} = D12_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D21_{AAP1} = D21_{AAP2} = D21_{APA1} = D21_{APA2} = D21_{PAA1} = C2_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D22_{AAP1} = D22_{AAP2} = D22_{APA1} = D22_{APA2} = D22_{PAA1} = D22_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{PAP1} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -50.0 & -10.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^8 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$A_{PAP2} = A_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -2.0 & -2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^8 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$B1_{PAP1} = B1_{PAP3} = B1_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B2_{PAP1} = B2_{PAP3} = B2_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \\ 10^6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C1_{PAP1} = C1_{PAP3} = C1_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10^6 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$C2_{PAP1} = C2_{PAP3} = C2_{PAP3} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D11_{PAP1} = D11_{PAP3} = D11_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D12_{PAP1} = D12_{PAP3} = D12_{PAP3} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D12_{PAP1} = D12_{PAP3} = D12_{PAP3} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D22_{PAP1} = D22_{PAP3} = D22_{PAP3} = 0$$

Apêndice E

Controladores Projetados

As matrizes no espaço de estados dos controladores projetados para as diferentes configurações do robô são apresentadas a seguir:

$$Ak_{AAA} = [AK1_{AAA} \quad AK2_{AAA} \quad AK3_{AAA}]$$

sendo

$$AK1_{AAA} = \begin{bmatrix} -0.0944 & -3.6 \times 10^{-18} & 7.76 \times 10^{-29} & 1.0 \\ 2.14 \times 10^{-50} & -0.0944 & -3.24 \times 10^{-17} & 0 \\ 0 & 4.4 \times 10^{-21} & -0.0342 & 0 \\ -10.0 & -1.56 \times 10^{-15} & -3.55 \times 10^{-15} & -4.47 \\ 9.16 \times 10^{-16} & -10.0 & 3.16 \times 10^{-16} & 5.79 \times 10^{-17} \\ 6.39 \times 10^{-16} & -3.76 \times 10^{-15} & -20.0 & 3.91 \times 10^{-17} \\ 12500.0 & 0.00000000159 & 0.00000000355 & 814.0 \\ -0.000000000916 & 12500.0 & -0.000000000261 & -5.79 \times 10^{-11} \\ -0.000000000639 & 0.00000000376 & 14900.0 & -3.91 \times 10^{-11} \\ -1.11 \times 10^{-16} & 7.33 \times 10^{-34} & 2.21 \times 10^{-25} & 0 \\ -1.19 \times 10^{-66} & -1.11 \times 10^{-16} & -1.1 \times 10^{-22} & 0 \\ 3.62 \times 10^{-71} & -1.57 \times 10^{-22} & -1.11 \times 10^{-16} & 0 \end{bmatrix}$$

$$AK2_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -1.2 \times 10^{-16} & -2.27 \times 10^{-16} & -100.0 & 1.47 \times 10^{-17} \\ -4.47 & 1.8 \times 10^{-17} & -8.67 \times 10^{-18} & -100.0 \\ -2.68 \times 10^{-16} & -6.33 & -5.75 \times 10^{-18} & 3.97 \times 10^{-17} \\ 0.000000000102 & 0.000000000227 & -787.0 & -1.47 \times 10^{-11} \\ 814.0 & -1.8 \times 10^{-11} & 8.67 \times 10^{-12} & -787.0 \\ 0.000000000268 & 955.0 & 5.75 \times 10^{-12} & -3.97 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AK3_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & -1.31 \times 10^{-17} & -3.64 \times 10^{-34} & 4.94 \times 10^{-35} \\ 0 & -1.25 \times 10^{-34} & -1.31 \times 10^{-17} & 8.17 \times 10^{-28} \\ 0 & 5.33 \times 10^{-54} & 4.24 \times 10^{-23} & -6.56 \times 10^{-18} \\ 3.36 \times 10^{-17} & 0.0120 & 1.61 \times 10^{-15} & 3.72 \times 10^{-15} \\ -1.92 \times 10^{-18} & -9.36 \times 10^{-16} & 0.0120 & -3.84 \times 10^{-16} \\ -100.0 & -6.84 \times 10^{-16} & 3.37 \times 10^{-15} & 0.0154 \\ -3.36 \times 10^{-11} & -12000.0 & -0.00000000161 & -0.00000000372 \\ 1.92 \times 10^{-12} & 0.000000000935 & -12000.0 & 0.000000000384 \\ -808.0 & 0.000000000684 & -0.00000000337 & -15400.0 \\ 0 & -0.000100 & 6.47 \times 10^{-40} & -7.38 \times 10^{-40} \\ 0 & 5.99 \times 10^{-51} & -0.000100 & -6.7 \times 10^{-24} \\ 0 & -2.7 \times 10^{-55} & -9.71 \times 10^{-24} & -0.000100 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{AAA} = \begin{bmatrix} 3.20 & -5.97 \times 10^{-17} & -2.89 \times 10^{-17} \\ 0 & 3.20 & -3.7 \times 10^{-16} \\ 0 & 1.19 \times 10^{-16} & 1.16 \\ 0.151 & 1.59 \times 10^{-15} & -4.18 \times 10^{-16} \\ 0 & 0.151 & -3.86 \times 10^{-16} \\ 0 & 3.58 \times 10^{-16} & 0.0198 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 33.9 & 0 & 0 \\ 0 & 33.9 & 0 \\ 0 & 0 & 33.9 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{AAA} = [CK1_{AAA} \quad CK2_{AAA} \quad CK3_{AAA}]$$

sendo

$$CK1_{AAA} = \begin{bmatrix} -0.000368 & -4.70 \times 10^{-17} & -1.5 \times 10^{-16} & -0.0000240 \\ 2.70 \times 10^{-17} & -0.000368 & 7.71 \times 10^{-18} & 1.71 \times 10^{-18} \\ 1.89 \times 10^{-17} & -1.11 \times 10^{-16} & -0.000441 & 1.15 \times 10^{-18} \end{bmatrix}$$

$$CK2_{AAA} = \begin{bmatrix} -3.0 \times 10^{-18} & -6.71 \times 10^{-18} & -2.95 & 4.35 \times 10^{-19} \\ -0.0000240 & 3.19 \times 10^{-19} & -2.56 \times 10^{-19} & -2.95 \\ -7.91 \times 10^{-18} & -0.0000282 & -1.70 \times 10^{-19} & 1.17 \times 10^{-18} \end{bmatrix}$$

$$CK3_{AAA} = \begin{bmatrix} 9.92 \times 10^{-19} & 0.000354 & 4.77 \times 10^{-17} & 1.10 \times 10^{-16} \\ -5.67 \times 10^{-20} & -2.76 \times 10^{-17} & 0.000354 & -1.13 \times 10^{-17} \\ -2.95 & -2.2 \times 10^{-17} & 9.95 \times 10^{-17} & 0.000456 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{AAA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ak_{AAP1} = Ak_{PAA1} = Ak_{PAA2} = [AK1_{AAP1} \quad AK2_{AAP1}]$$

sendo

$$AK1_{AAP1} = \begin{bmatrix} -0.0936 & 4.37 \times 10^{-18} & 1.0 & 0 \\ 3.88 \times 10^{-18} & -0.0339 & 0 & 1.0 \\ -10.0 & -4.76 \times 10^{-16} & -4.47 & -3.52 \times 10^{-17} \\ 2.14 \times 10^{-17} & -20.0 & 2.21 \times 10^{-18} & -6.32 \\ 5770.0 & 0.000000000511 & 399.0 & 3.52 \times 10^{-11} \\ -3.5 \times 10^{-11} & 6190.0 & -2.21 \times 10^{-12} & 416.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AK2_{AAP2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.30 \times 10^{-17} & 7.24 \times 10^{-34} \\ 0 & 0 & 7.24 \times 10^{-34} & -6.52 \times 10^{-18} \\ -100.0 & 5.4 \times 10^{-18} & 0.00554 & 5.79 \times 10^{-16} \\ -3.28 \times 10^{-19} & -100.0 & -2.21 \times 10^{-17} & 0.00644 \\ -726.0 & -5.4 \times 10^{-12} & -5540.0 & -0.000000000579 \\ 3.28 \times 10^{-13} & -728.0 & 2.21 \times 10^{-11} & -6440.0 \\ 0 & 0 & -0.000100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000100 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{AAP1} = Bk_{PAA1} = Bk_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.18 & -4.78 \times 10^{-16} \\ -7.39 \times 10^{-22} & 1.15 \\ 0.149 & -5.38 \times 10^{-15} \\ -1.25 \times 10^{-23} & 0.0195 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 34.1 & 2.55 \times 10^{-21} \\ -2.58 \times 10^{-38} & 34.1 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{AAP1} = Ck_{PAA1} = Ck_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.000179 & 4.61 \times 10^{-18} & -0.0000123 & 3.41 \times 10^{-19} & 2.94 & 5.64 \times 10^{-20} & -0.000172 & 4.10 \times 10^{-18} \\ -1.52 \times 10^{-17} & -0.000194 & -1.11 \times 10^{-18} & -0.0000130 & -1.64 \times 10^{-19} & 2.94 & -1.50 \times 10^{-17} & -0.000201 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{AAP1} = Dk_{PAA1} = Dk_{PAA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ak_{AAP2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0469 & -2.44 \times 10^{-17} & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 9.17 \times 10^{-18} & 4.7 \times 10^{-33} \\ -1.34 \times 10^{-18} & -0.0469 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 9.17 \times 10^{-18} \\ -10.0 & 1.27 \times 10^{-14} & -4.47 & 9.85 \times 10^{-16} & 100.0 & 1.44 \times 10^{-16} & -0.0209 & 1.24 \times 10^{-14} \\ -4.89 \times 10^{-17} & -10.0 & -5.6 \times 10^{-18} & -4.47 & -7.55 \times 10^{-19} & 100.0 & -1.51 \times 10^{-17} & -0.0209 \\ -21600.0 & 0.0000000127 & -1670.0 & 0.000000000985 & -915.0 & 0.000000000144 & -20900.0 & 0.0000000124 \\ -4.89 \times 10^{-11} & -21600.0 & -5.6 \times 10^{-12} & -1670.0 & -7.55 \times 10^{-13} & -915.0 & -1.51 \times 10^{-11} & -20900.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000100 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{AAP2} = \begin{bmatrix} 2.27 & 1.18 \times 10^{-15} \\ 6.47 \times 10^{-17} & 2.27 \\ 0.0533 & 3.98 \times 10^{-16} \\ 0 & 0.0533 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 48.4 & 0 \\ 0 & 48.4 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{AAP2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.000445 & 2.63 \times 10^{-16} & -0.0000346 & 2.3 \times 10^{-17} & 2.06 & 2.98 \times 10^{-18} & -0.000431 & 2.57 \times 10^{-16} \\ -1.1 \times 10^{-18} & -0.000445 & -1.4 \times 10^{-19} & -0.0000346 & -1.56 \times 10^{-20} & 2.06 & -3.12 \times 10^{-19} & -0.000431 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{AAP2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ak_{APA1} = [AK1_{APA1} \quad AK2_{APA1} \quad AK3_{APA1}]$$

sendo

$$AK1_{APA1} = \begin{bmatrix} -39.1 & -2.76 \times 10^{-11} & 74.5 & 0.000000000119 \\ 7.74 \times 10^{-12} & -487.0 & -2.71 \times 10^{-11} & 2010.0 \\ 0 & 0 & -0.0233 & 1.86 \times 10^{-19} \\ 0 & 0 & -3.13 \times 10^{-16} & -0.225 \\ -0.000103 & 4.31 \times 10^{-16} & -10.0 & -1.86 \times 10^{-15} \\ -1.21 \times 10^{-16} & 0.00690 & 9.41 \times 10^{-17} & -2.06 \\ 103.0 & -0.000000000431 & 1160.0 & 0.00000000186 \\ 0.000000000121 & -6900.0 & -0.000000000423 & 31400.0 \\ 0 & 0 & -1.11 \times 10^{-16} & 3.38 \times 10^{-34} \\ 0 & 0 & -4.13 \times 10^{-21} & -1.11 \times 10^{-16} \\ 0 & 0 & -0.00865 & 2.46 \times 10^{-20} \\ 0 & 0 & 1.98 \times 10^{-15} & -0.00969 \end{bmatrix}$$

$$AK2_{APA1} = \begin{bmatrix} 8.08 & 1.30 \times 10^{-11} & -1.20 & -1.93 \times 10^{-12} \\ -3.10 \times 10^{-12} & 220.0 & 4.61 \times 10^{-13} & -32.7 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ -4.47 & -2.4 \times 10^{-16} & -100.0 & 3.2 \times 10^{-17} \\ 4.84 \times 10^{-17} & -2.0 & -7.21 \times 10^{-18} & -100.0 \\ 126.0 & 0.000000000204 & -685.0 & -3.2 \times 10^{-11} \\ -4.84 \times 10^{-11} & 3440.0 & 7.21 \times 10^{-12} & -1180.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AK3_{APA1} = \begin{bmatrix} -74.3 & -0.000000000106 & 1.30 & 1.87 \times 10^{-12} \\ 2.62 \times 10^{-11} & -1800.0 & -5.0 \times 10^{-13} & 31.5 \\ 0 & 1.63 \times 10^{-22} & 0 & 0 \\ -1.70 \times 10^{-24} & 0 & 0 & 0 \\ 0.00116 & 1.66 \times 10^{-15} & 4.05 & -2.93 \times 10^{-17} \\ -4.10 \times 10^{-16} & 0.0282 & 7.82 \times 10^{-18} & 4.05 \\ -1160.0 & -0.00000000166 & 20.3 & 2.93 \times 10^{-11} \\ 0.000000000410 & -28200.0 & -7.82 \times 10^{-12} & 493.0 \\ -0.000100 & -1.24 \times 10^{-24} & 0 & 0 \\ -9.9 \times 10^{-27} & -0.000100 & 0 & 0 \\ 0 & 1.59 \times 10^{-22} & -19.8 & 0 \\ 1.35 \times 10^{-23} & 1.40 \times 10^{-18} & 0 & -19.8 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{APA1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.68 & -2.17 \times 10^{-15} \\ -3.39 \times 10^{-14} & 35.5 \\ 0.0429 & 1.2 \times 10^{-15} \\ -5.34 \times 10^{-14} & 4.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 158.0 & -2.9 \times 10^{-25} \\ -5.52 \times 10^{-19} & 158.0 \\ -1.37 & -9.15 \times 10^{-15} \\ -4.79 \times 10^{-14} & -1.53 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{APA1} = [CK1_{APA1} \quad CK2_{APA1} \quad CK3_{APA1}]$$

sendo

$$CK1_{APA1} = \begin{bmatrix} -0.000000651 & 2.73 \times 10^{-18} & -0.00000737 & -1.17 \times 10^{-17} \\ -7.65 \times 10^{-19} & 0.0000436 & 2.68 \times 10^{-18} & -0.000199 \end{bmatrix}$$

$$CK2_{APA1} = \begin{bmatrix} -0.000000799 & -1.29 \times 10^{-18} & -0.632 & 1.91 \times 10^{-19} \\ 3.6 \times 10^{-19} & -0.0000217 & -4.56 \times 10^{-20} & -0.632 \end{bmatrix}$$

$$CK3_{APA1} = \begin{bmatrix} 0.00000734 & 1.5 \times 10^{-17} & -0.000000128 & -1.85 \times 10^{-19} \\ -2.59 \times 10^{-18} & 0.000178 & 4.94 \times 10^{-20} & -0.00000312 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{APA1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ak_{APA2} = [AK1_{APA2} \quad AK2_{APA2}]$$

sendo

$$AK1_{APA2} = \begin{bmatrix} -0.0344 & 1.52 \times 10^{-19} & 1.0 & 0 \\ 0 & -0.0344 & 0 & 1.0 \\ -4.0 & -3.31 \times 10^{-16} & -2.83 & -4.32 \times 10^{-17} \\ -2.87 \times 10^{-16} & -4.0 & -3.86 \times 10^{-17} & -2.83 \\ 3220.0 & 0.000000000333 & 418.0 & 4.32 \times 10^{-11} \\ 0.000000000287 & 3220.0 & 3.86 \times 10^{-11} & 418.0 \\ 1.11 \times 10^{-16} & 8.89 \times 10^{-23} & 0 & 0 \\ 0 & 1.11 \times 10^{-16} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AK2_{APA2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.95 \times 10^{-18} & -1.65 \times 10^{-34} \\ 0 & 0 & 6.15 \times 10^{-24} & 3.95 \times 10^{-18} \\ -100.0 & 6.69 \times 10^{-18} & 0.00291 & 3.16 \times 10^{-16} \\ 5.75 \times 10^{-18} & -100.0 & 2.58 \times 10^{-16} & 0.00291 \\ -729.0 & -6.69 \times 10^{-12} & -2910.0 & -0.000000000316 \\ -5.75 \times 10^{-12} & -729.0 & -0.000000000258 & -2910.0 \\ 0 & 0 & -0.000100 & 1.34 \times 10^{-38} \\ 0 & 0 & 4.74 \times 10^{-40} & -0.000100 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{APA2} = \begin{bmatrix} 3.86 & 2.29 \times 10^{-17} \\ 0 & 3.86 \\ 0.0665 & -6.65 \times 10^{-16} \\ 0 & 0.0665 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 112.0 & 0 \\ 0 & 112.0 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{APA2} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.0000187 & -6.79 \times 10^{-18} & -0.00000248 & -9.26 \times 10^{-19} & 0.891 & -1.39 \times 10^{-19} & -0.0000169 & -6.22 \times 10^{-18} \\ -4.45 \times 10^{-18} & -0.0000187 & -5.95 \times 10^{-19} & -0.00000248 & -8.86 \times 10^{-20} & 0.891 & -4.18 \times 10^{-18} & -0.0000169 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{APA2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ak_{PAP1} = \begin{bmatrix} -0.0619 & 1.0 & 0 & 0 \\ -50.0 & -10.0 & 100.0 & -0.0140 \\ -13100.0 & -510.0 & -741.0 & -14000.0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001000 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{PAP1} = \begin{bmatrix} 0.783 \\ 0.0242 \\ 0 \\ 12.7 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{PAP1} = \begin{bmatrix} -0.00104 & -0.0000403 & 7.90 & -0.00111 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{PAP1} = 0$$

$$Ak_{PAP2} = \begin{bmatrix} 152.0 & -461.0 & -48.2 & -7.15 & -417.0 & -11.0 \\ 0 & -0.0352 & 1.0 & 0 & -5.23 \times 10^{-18} & 0 \\ 0.00812 & -2.02 & -2.0 & 100.0 & -0.0219 & 4.48 \\ 8120.0 & -24200.0 & -2530.0 & -1040.0 & -21900.0 & -579.0 \\ 0 & -1.11 \times 10^{-16} & 0 & 0 & -0.000100 & 0 \\ 0 & 0.0466 & 0 & 0 & 5.23 \times 10^{-18} & -10.6 \end{bmatrix}$$

$$Bk_{PAP2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.49 \\ 0.0262 \\ 0 \\ 42.4 \\ -1.98 \end{bmatrix}$$

$$Ck_{PAP2} = \begin{bmatrix} 0.000191 & -0.000571 & -0.0000597 & 2.36 & -0.000517 & -0.0000136 \end{bmatrix}$$

$$Dk_{PAP2} = 0$$

Referências Bibliográficas

ARAI & TACHI (1991) ARAI, H. e TACHI, S. Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 7(4):528–534, 1991.

ARAI et al. (1998) ARAI, H., TANIE, K., e SHIROMA, N. Nonholonomic Control af a three-DOF planar underactuated manipulator. 14(5):681–695, 1998.

ARAI et al. (1993) ARAI, H., TANIE, K., e TACHI, S. Dynamic control of a manipulator with passive joints in operaton space. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 9(1):85–93, 1993.

BALAS et al. (1998) BALAS, G., DOYLE, J., GLOVER, K., PACKARD, A., e SMITH, R. *μ-Analisis and Synthesis Toolbox*. MathWorks, 1998.

BERGERMAN (1996) BERGERMAN, M. *Dynamics and control of underactuated manipulators*. Tese de Doutoramento, Carnegie Mellon University, 1996.

BERGERMAN et al. (1999) BERGERMAN, M., SIQUEIRA, A., e TERRA, M. Underactuated Manipulator Control System Development Environment. In *15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS&FOF'99*, pages 18–20, Brazil, 1999.

BERGERMAN & XU (1994) BERGERMAN, M. e XU, Y. Robust control of underactuated manipulators: analysis and implementation. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 925–930, 1994.

BOYD et al. (1989) BOYD, S., BALAKRISHNAN, V., e KABAMBA, P. A bisection method for computing an $\mathcal{H}_\infty$ norm of a transfer matrix and related problems. *Math. Control, Signals, and Systems*, 2(3):207–220, 1989.

CRAIG (1989) CRAIG, J. *Introduction to robotics mechanics and control*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.

DOYLE (1982) DOYLE, J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. In *IEE Proceedings*, pages 45–56, 1982.

DOYLE et al. (1992) DOYLE, J. C., FRANCIS, B. A., e TANNENBAUM, A. R. *Feedback control theory*. Macmillan, 1992.

FAN & TITS (1986) FAN, M. K. H. e TITS, A. L. Characterization and efficient computation of the structured singular value. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 31(8):734–743, 1986.

FAN et al. (1991) FAN, M. K. H., TITS, A. L., e DOYLE, J. C. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 36(1):25–38, 1991.

GÓES & ADADE (2000) GÓES, E. e ADADE, A. Projeto de controlador robusto para manipulador robótico de alto desempenho utilizando teoria de otimização H_∞. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, pages 1622–1627, 2000.

KANG et al. (1999) KANG, B., KIM, S., KWAK, Y., e SMITH, C. Robust Tracking Control of a Direct Drive Robot. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121:261–269, 1999.

LEWIS et al. (1993) LEWIS, F., ABDALLAH, C., e DAWSON, D. *Control of robot manipulators*. Macmillan, 1993.

LUNDSTRöM et al. (1999) LUNDSTRöM, P., SKOGESTAD, S., e DOYLE, J. C. Two-Degree-of-Freedom Controller Design for an III-Conditioned Distillation Process Using μ-Synthesis. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(1):12–21, 1999.

MARECZEK et al. (1998) MARECZEK, J., BUSS, M., e SCHMIDT, G. Robust global stabilization of the underactuated 2-DOF manipulator R2D1. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2640–2645, 1998.

MIRANDA & JOTA () MIRANDA, M. e JOTA, F. Design and Implementation of μ Controllers for Real Industrial Plants.

PACKARD & DOYLE (1993) PACKARD, A. e DOYLE, J. C. The complex structured singular values. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 29(1):71–109, 1993.

SOARES et al. (1999) SOARES, M., TERRA, M., BERGERMAN, M., e TINÓS, R. An Environment for Simulation of Underactuated Manipulator Robots with Fault Detection and Control. In *CARS&FOF'99 - 15th International Conference on CAD/CAM, Robotics, and Future*, pages 18–20, Águas de Lindóia, Brazil, 1999.

TERRA & BARBEIRO (2000) TERRA, M. e BARBEIRO, T. Real and complex stability radii on the analysis of underactued manipulator performance controled via LMI. In *4th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Budapest, Bulgary, 2000.

TERRA et al. (2000) TERRA, M., BARBEIRO, T., SIQUEIRA, A., e BERGERMAN, M. Ambiente de simulação para detecção de falhas em um manipulador subatuado via raio de estabilidade. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, Brasil, 2000.

TERRA et al. (2000b) TERRA, M., MACIEL, B., NAKASHIMA, P., e BERGERMAN, M. Underactuated manipulator robot control by state feedback linearization via $\mathcal{H}_\infty$. In *3rd IFAC Simposium on Robust Control Design*, Prague, Czech Republic, 2000.

TERRA et al. (1999) TERRA, M., SIQUEIRA, A., e BERGERMAN, M. Underactuated Manipulator Robot Control via Linear Matrix Inequalities. In *IEEE International Conference on Decision and Control*, 1999.

YOULA & SAITO (1967) YOULA, D. C. e SAITO, M. Interpolation with positive-real functions. *Journal of The Franklin Institute*, 284(2):77–108, 1967.

YOUNG & DOYLE (1990) YOUNG, P. M. e DOYLE, J. C. Computation of μ with real and complex uncertainties. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1230–1235, 1990.

YOUNG & DOYLE (1996) YOUNG, P. M. e DOYLE, J. C. Properties of the mixed μ problem and its bounds. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 41(1):155–159, 1996.

ZHOU & DOYLE (1998) ZHOU, K. e DOYLE, J. *Essentials of robust control.* Pretince-Hall, 1998.

ZHOU et al. (1996) ZHOU, K., DOYLE, J. C., e GLOVER, K. *Robust and optimal control.* Pretince-Hall, 1st edition, 1996.