

Aline Fernanda Bianco

**Filtros de Kalman Robustos para Sistemas Dinâmicos
Singulares em Tempo Discreto**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

São Carlos
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

B578f Bianco, Aline Fernanda
Filtros de Kalman robustos para sistemas dinâmicos singulares em tempo discreto / Aline Fernanda Bianco ; orientador Marco Henrique Terra. -- São Carlos, 2009.

Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2009).

1. Filtragem robusta. 2. Sistemas singulares. 3. Estimativa de estado. 4. Estabilidade. 5. Convergência. I. Título.

Ao meu tio

LUIZ CARLOS ROMANO (in memoriam),

com amor, admiração e gratidão,

por seu carinho, incentivo e apoio.

Saudades!

Agradecimentos

Primeiramente a Jesus Cristo, nosso mestre, espírito de luz e bondade.

À memória de meus avós e tios que certamente intercedem por mim.

Aos professores Marco Henrique Terra e João Yoshiyuki Ishihara pela orientação, paciência, dedicação e incentivo nestes anos de trabalho.

Aos meus pais Miguel e Regina, irmã Alethéa, tia Neide, primos Luciana, Márcio e Marcelo, cunhado Junior, priminhos Guilherme e Rafael e meu sobrinho Murilo que está a caminho, por serem as pessoas mais importantes da minha vida

Aos colegas do LASI (Laboratório de Sistemas Inteligentes), por estarem comigo durante todo esse tempo em harmonia.

Aos amigos do coração Fernanda, Thaís, Camila, Eugênia, Cleber, Adriano, Ricardo, Daniel, Julia, Fernando, Carolina, Marco Aurélio e Antonio Carlos (Maranhão) pela generosidade, paciência e lealdade com que sempre me trataram.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, por me darem respaldo todas as vezes que precisei.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro.

*Se as coisas são inatingíveis... ora!
Não é motivo para não querê-las.
Que tristes os caminhos, se não fora a
presença distante das estrelas!*

Mário Quintana

Resumo

BIANCO, A. F. Filtros de Kalman Robustos para Sistemas Dinâmicos Singulares em Tempo Discreto. 2009. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

Esta tese trata do problema de estimativa robusta ótima para sistemas dinâmicos singulares discretos no tempo. Novos algoritmos recursivos são formulados para as estimativas filtradas e predictoras com as correspondentes equações de Riccati. O filtro robusto tipo Kalman e a equação de Riccati correspondente são obtidos numa formulação mais geral, estendendo os resultados apresentados na literatura. O funcional quadrático proposto para deduzir este filtro faz a combinação das técnicas mínimos quadrados regularizados e funções penalidade. O sistema considerado para obtenção de tais estimativas é singular, discreto, variante no tempo, com ruídos correlacionados e todos os parâmetros do modelo linear estão sujeitos a incertezas. As incertezas paramétricas são limitadas por norma. As propriedades de estabilidade e convergência do filtro de Kalman para sistemas nominais e incertos são provadas, mostrando-se que o filtro em estado permanente é estável e a recursão de Riccati associada a ele é uma sequência monótona não decrescente, limitada superiormente pela solução da Equação Algébrica de Riccati.

Palavras-Chave: Sistemas singulares, filtragem robusta, estimativa de estado, estabilidade, convergência.

Abstract

BIANCO, A. F. Robust Kalman Filters for Discrete-time Singular Systems. 2009. Thesis (Doctoral) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

This thesis considers the optimal robust estimates problem for discrete-time singular dynamic systems. New recursive algorithms are developed for the Kalman filtered and predicted estimate recursions with the corresponding Riccati equations. The singular robust Kalman-type filter and the corresponding recursive Riccati equation are obtained in their most general formulation, extending the results presented in the literature. The quadratic functional developed to deduce this filter combines regularized least squares and penalty functions approaches. The system considered to obtain the estimates is singular, time-varying with correlated noises and all parameter matrices of the underlying linear model are subject to uncertainties. The parametric uncertainty is assumed to be norm bounded. The properties of stability and convergence of the Kalman Filter for nominal and uncertain system models are proved, where we show that steady-state filter is stable and the Riccati recursion associated with this is a nondecreasing monotone sequence with upper bound.

Keywords: *Singular systems, robust filtering, state estimation, stability, convergence.*

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Lista de Figuras	xv
Lista de Abreviaturas e Siglas	xvii
Lista de Símbolos	xix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Estimativas Ótimas para Sistemas Singulares	2
1.3 Estimativas Filtrada, Preditora e Suavizada	2
1.4 Objetivos	3
1.5 Estrutura do Texto	4
1.6 Publicações Decorrentes da Pesquisa	5
2 Teoria de Otimização Não Linear	7
2.1 O Problema de Mínimos Quadrados Ponderados	7
2.2 O Problema de Mínimos Quadrados Regularizados	11
2.3 O Método das Funções Penalidade	14
3 Estimativas Recursivas Ótimas para o Modelo no Espaço de Estado	19
3.1 Estimativa Filtrada para o Modelo no Espaço de Estado	19
3.2 Estimativa Preditora para o Modelo no Espaço de Estado	23
3.3 Expressões Equivalentes para as Estimativas Recursivas Ótimas	25
4 Estimativas Recursivas Ótimas para o Modelo Singular Nominal	29

4.1	Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares Nominais	29
4.2	Estimativa Preditora para Sistemas Singulares Nominais	33
4.3	Casos Particulares das Estimativas Recursivas Ótimas	36
5	Estabilidade e Convergência dos FSNs	45
5.1	Resultados Preliminares	45
5.2	Estabilidade	52
5.3	Convergência	54
5.4	Exemplo Numérico	67
6	Estimativa Robusta para Sistemas Dinâmicos Singulares	71
6.1	Estabelecimento do Problema de Filtragem Robusta	72
6.1.1	Estimativas Filtradas Robustas	73
6.2	Estabelecimento do Problema de Predição Robusta	77
6.2.1	Estimativas Preditoras Robustas	81
6.3	Formas Matriciais Equivalentes para as Estimativas Robustas	84
7	Estabilidade e Convergência dos FSRs	91
7.1	Resultados Preliminares	91
7.2	Estabilidade	95
7.3	Convergência	96
8	Resultados Numéricos e Conclusões	99
8.1	Comparação com o Filtro BDU	99
8.2	Conclusões e Continuidade da Pesquisa	102
	Referências Bibliográficas	105

Lista de Figuras

5.1	Evolução de $P_{i+1 i+1}$	68
5.2	Evolução de $P_{i+1 i}$	69
8.1	FSR(—) e Filtro BDU (- - -)	101
8.2	Evolução de $P_{i+1 i+1}$	102

Lista de Abreviaturas e Siglas

EAR – **E**quação **A**lgébrica de **R**iccati

FSNs – **F**iltros **S**ingulares **N**ominais

FSRs – **F**iltros **S**ingulares **R**obustos

FKs – **F**iltros de **K**alman

FRKs – **F**iltros **R**obustos de **K**alman

LDU – Inferior Diagonal Superior (*Lower Diagonal Upper*)

BDU – Dados com Incertezas Limitadas (*Bounded Data Uncertainties*)

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	corpo dos números reais
\mathbb{R}^n	conjunto dos vetores de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto das matrizes de dimensão $n \times m$
A^T	transposta da matriz A
A^{-1}	inversa da matriz A
$A^{\frac{1}{2}}$	raiz quadrada de uma matriz A semidefinida positiva
A^\dagger	pseudo inversa da matriz A
$P > 0$	denota que P é definida positiva
$P \geq 0$	denota que P é semidefinida positiva
$\ \cdot\ $	norma euclidiana de um vetor ($\ x\ ^2 = x^T x$ para $x \in \mathbb{R}^n$)
$\ \cdot\ _P$	norma ponderada de um vetor ($\ x\ _P^2 = x^T P x$ para $x \in \mathbb{R}^n$)
$x^T P(\bullet)$	expressão simplificada para $x^T P x$
$\sigma(A)$	conjunto dos autovalores distintos da matriz A
\mathbf{E}	esperança matemática

Introdução

1.1 Motivação

Desde que Rudolf E. Kalman apresentou em 1960 o conceito fundamental de filtragem ótima recursiva [30], vários problemas têm sido levantados e resolvidos para aperfeiçoar uma classe de filtros originada desse conceito, que são denominados Filtros de Kalman (FKs).

Um dos problemas identificados é que os filtros que estão dentro desta categoria podem ser sensíveis às incertezas do sistema, e essa sensibilidade pode comprometer o desempenho e a estabilidade dos mesmos. Um caso típico ocorre quando o desempenho do filtro, embora ótimo para o sistema nominal, pode se deteriorar muito rapidamente quando os dados do sistema sofrem perturbações. Isto não é aceitável, uma vez que um modelo fiel do sistema é difícil de se obter.

Motivado por este problema, um número relevante de artigos tem apresentado algoritmos alternativos para o FK usual para sistemas sujeitos a incertezas nos parâmetros, veja por exemplo [20], [42], [43], [45] e as referências contidas nelas. Tais filtros são denominados Filtros Robustos de Kalman (FRKs) e algumas aplicações dessa classe de filtros podem ser encontradas em [19], [32] e [33].

O FK é um dos desenvolvimentos mais relevantes em ciência aplicada no último século, com forte destaque para as aplicações em engenharia. Atualmente, muitas exposições desta teoria e suas aplicações estão disponíveis e muitas ainda estão sendo desenvolvidas. O FK possui vários aspectos importantes, tais como produzir estimativas baseadas em informações passadas, presentes e futuras e fazer isto mesmo quando o modelo exato do sistema é desconhecido.

1.2 Estimativas Ótimas para Sistemas Singulares

Considere um sistema dinâmico linear variante no tempo descrito por

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + G_{w,i} w_i + G_{v,i} v_i, \\ z_i &= H_i x_i + K_{w,i} w_i + K_{v,i} v_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Este sistema é denominado singular, sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a variável singular (ou semi-estado), $z_i \in \mathbb{R}^p$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^m$ e $v_i \in \mathbb{R}^p$ os ruídos presentes no estado e na medida, $E_{i+1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $G_{w,i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $G_{v,i} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $K_{w,i} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $K_{v,i} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ as matrizes do sistema nominal. Quando $E_{i+1} = I$ o sistema (1.1) reduz-se ao modelo no espaço de estado usual. A teoria dessa classe de sistemas foi desenvolvida para descrever as dinâmicas de certos sistemas lineares em que a representação no espaço de estado não se aplica, tais como sistemas matriciais quadrados não invertíveis e sistemas matriciais retangulares.

Os estudos sobre sistemas singulares (também denominados sistemas descritores) são motivados pelo fato de que modelos com essas características aparecerem de maneira frequente em diversas aplicações, como em sistemas econômicos [36], modelagem de imagens [22], modelagem de aeronaves [44], modelagem de helicópteros [37], robótica [38], sistemas de potência e circuitos elétricos.

Para sistemas singulares discretos no tempo, estimativas de estado têm sido formuladas de maneira recursiva e os filtros singulares nominais (FSNs) resultantes têm sido objeto de estudo de diversos trabalhos (veja, por exemplo, [6], [13], [14], [18], [21], [28], [31], [39], [40], [48], [49]). Um indicador do crescimento deste campo de pesquisa é o desenvolvimento de um toolbox de sistemas singulares para o software Matlab [24].

1.3 Estimativas Filtrada, Preditora e Suavizada

No sistema (1.1) z_i é considerado o conjunto de medidas ou observações. Assim, pode-se determinar \hat{x}_i que é o valor estimado de x_i , a partir das observações z_i . Para tanto, pode-se estimar x_i através de diversos métodos. Conforme a disponibilidade da quantidade de medidas, o conceito de estimativa recebe uma denominação diferente.

Quando se tem i medidas, ou seja z_0, z_1, \dots, z_i , então a estimativa de x_i , até a i -ésima medida

é chamada de filtrada e é geralmente representada por $\hat{x}_{i|i}$. A segunda denominação é a de estimativa preditora. Neste caso, deseja-se estimar o sinal x_{i+1} dispondo-se apenas de i medidas ou observações, ou seja, z_0, z_1, \dots, z_i .

A terceira denominação é a de estimativa suavizada. Neste caso, a quantidade de medidas disponível é superior ao número estados que pretende-se estimar, ou seja, as medidas seguintes podem ser usadas para obtenção da estimativa. Assim, pode-se obter a estimativa \hat{x}_i dispondo-se das medidas z_0, z_1, \dots, z_{i+1} . Normalmente o processo de suavização pode se tornar mais exato do que o processo de filtragem, por envolver uma quantidade maior de medidas.

Estes três tipos de estimativas são representadas matematicamente por

- $\hat{x}_{i|i}$ a estimativa linear filtrada;
- $\hat{x}_{i+1|i}$ a estimativa linear preditora;
- $\hat{x}_{i|i+1}$ a estimativa linear suavizada;

e são apresentadas nesta tese, tanto para o modelo singular nominal, quanto para o modelo singular sujeito a incertezas paramétricas.

1.4 Objetivos

Até o momento, o problema de estimativa robusta ótima para sistemas singulares tem sido assunto de poucas pesquisas [15], [16], [27], [29] e livros [46]. Nesta tese, considera-se (1.1) com incertezas em todas as matrizes do sistema

$$\begin{aligned} (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + (G_{w,i} + \delta G_{w,i}) w_i + (G_{v,i+1} + \delta G_{v,i+1}) v_{i+1}, \\ z_{i+1} &= (H_{i+1} + \delta H_{i+1}) x_{i+1} + (K_{w,i} + \delta K_{w,i}) w_i + (K_{v,i+1} + \delta K_{v,i+1}) v_{i+1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

sendo que δE_{i+1} , δF_i , $\delta G_{w,i}$, $\delta G_{v,i}$, δH_i , $\delta K_{v,i}$ e $\delta K_{w,i}$ são perturbações variantes no tempo limitadas por normas.

A partir de (1.2), serão desenvolvidos filtros singulares robustos (FSRs) via abordagem determinística. Serão utilizados nessas deduções conceitos de Mínimos Quadrados Regularizados em

conjunto com Funções Penalidade, descritas na teoria de otimização. Veja para maiores detalhes [1] e [42].

As novas expressões para os FSRs obtidas, com as respectivas equações recursivas de Riccati, apresentam uma estrutura simples e simétrica. Todas as informações do sistema singular nominal com as respectivas informações das incertezas, são claramente identificadas em blocos matriciais. Os resultados apresentados nesta tese generalizam os resultados obtidos em [29] e [42]. O problema dual de controle robusto, utilizando as mesmas técnicas desenvolvidas nesta tese, encontra-se em [12].

Antes da apresentação dos FSRs serão apresentadas as provas da estabilidade dos filtros singulares nominais (FSNs) e da convergência da solução da Equação Algébrica de Riccati (EAR) em regime permanente. Para essa estrutura em blocos dos filtros será mostrado que há uma única solução semidefinida positiva para a EAR e que a recursão de Riccati caracteriza uma sequência monótona não decrescente limitada superiormente. Os argumentos utilizados para provar tais resultados estão baseados fundamentalmente nas referências [10], [11], [17], [34] e [40]. Todos os argumentos baseiam-se em uma análise determinística do problema. Para os FSRs, as provas de estabilidade e convergência seguirão a mesma linha das provas apresentadas para o sistema nominal, através de compactações apropriadas dos parâmetros dos filtros.

Vale destacar que uma das maiores contribuições dessa tese está no fato de que os algoritmos recursivos robustos obtidos não dependem de nenhum parâmetro auxiliar de ajuste para serem implementados. Portanto, são bastante úteis para aplicações em tempo real.

1.5 Estrutura do Texto

Esta tese está organizada da seguinte forma:

Capítulo 2

Este capítulo mostra de maneira detalhada os métodos de otimização Mínimos Quadrados Regularizados e Funções Penalidade. A partir deste estudo, as estimativas recursivas nominais e robustas para sistemas singulares discretos e variantes no tempo são encontradas.

Capítulo 3

Este capítulo apresenta filtros nominais para modelos no espaço de estado, aplicando-se a teoria dos mínimos quadrados recursivos. Nele mostra-se que há equivalência entre as expressões

em blocos matriciais com aquelas algébricas comumente encontradas na literatura [2].

Capítulo 4

Este capítulo apresenta estimativas ótimas para sistemas singulares sem incertezas paramétricas, através da utilização da abordagem desenvolvida no Capítulo 2. Através de simplificações no modelo dos sistema, demonstra-se que os filtros obtidos equivalem aos FSNs apresentados em [5], [14], [28] e [40].

Capítulo 5

Este capítulo mostra as propriedades de estabilidade e convergência dos filtros obtidos no Capítulo 4, seguindo a linha desenvolvida em [7] e [40]. Isto ocorre devido às estruturas matriciais das equações obtidas serem simples e simétricas.

Capítulo 6

Este capítulo apresenta as estimativas robustas ótimas nas formas preditora e filtrada, derivadas obtidas a partir das técnicas de otimização Mínimos Quadrados Regularizados e Funções Penalidade. Os FSRs são deduzidos para o caso mais geral e estendem os resultados obtidos em [29] e [42].

Capítulo 7

Neste capítulo são demonstradas as propriedades de estabilidade e convergência dos FSRs. Tais demonstrações são baseadas nos resultados detalhados no Capítulo 5, em decorrência das expressões recaírem na formulação deduzida para o caso singular nominal.

Capítulo 8

Neste capítulo um resultado numérico que estabelece uma comparação entre o desempenho do filtro robusto obtido nesta tese com o apresentado em [42] é mostrado. Além disso, são apresentadas as conclusões e as contribuições do trabalho, bem como as perspectivas de trabalhos futuros.

1.6 Publicações Decorrentes da Pesquisa

Esta tese gerou até o momento os seguintes artigos:

- [26] provisoriamente aceito em um periódico internacional;

- [4], [6], [8] e [25] publicados em congressos internacionais;
- [7] e [9] publicados em conferências nacionais.

Capítulo 2

Teoria de Otimização Não Linear

Este capítulo apresenta os métodos de otimização de funcionais quadráticos sem incertezas nos parâmetros (Mínimos Quadrados Ponderados) e com incertezas nos parâmetros (Mínimos Quadrados Regularizados [42]). Além destes, detalha-se também o Método das Funções Penalidade [1] e [35].

A combinação destas técnicas permite a obtenção da solução ótima \hat{x} resultante da otimização de um determinado funcional quadrático pré-definido. A partir dessa associação, algoritmos para os Filtros Singulares Nominais (FSNs) e Filtros Singulares Robustos (FSRs) são obtidos nesta tese, possuindo estrutura matricial simples e simétrica.

Os resultados deste capítulo têm permitido a solução de problemas de filtragem robusta mais gerais que os encontrados na literatura.

2.1 O Problema de Mínimos Quadrados Ponderados

Considere o seguinte problema de otimização quadrática

$$\hat{x} = \arg \min_x \{(Ax - b)^T W (Ax - b)\} \quad (2.1)$$

sendo $W = W^T \geq 0$, matriz de ponderação, A matriz conhecida e b vetor conhecido.

O próximo resultado estabelece uma relação entre expressões que possuem matrizes inversas com aquelas que aparecem na forma de blocos matriciais de forma linear. O lema a seguir terá um papel importante na dedução dos FSNs e FSRs que serão apresentados na sequência. A

primeira parte do resultado (Equação (2.2)) é apresentada em [40], enquanto a segunda parte (Equação (2.3)) foi desenvolvida por nosso grupo de pesquisa.

Lema 2.1.1 *Sejam $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz definida positiva e $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matriz posto coluna pleno. Neste caso, $A^T R A$ é invertível e sua inversa pode ser calculada por*

$$(A^T R A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$= - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Prova: Utilizando o Lema de Inversão de Blocos Matriciais ¹, obtém-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R - RA(-A^T R A)^{-1} A^T R & -RA(-A^T R A)^{-1} \\ -(A^T R A)^{-1} A^T R & -(A^T R A)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Assim,

$$(A^T R A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

O lado direito da Equação (2.5) equivale ao seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} R^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Definindo-se $b := R^{-1}a$, segue que $b - R^{-1}a = 0$, ou seja, $-Rb + a = 0$. Além disso,

¹**Lema** Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertível, B , C e D matrizes com dimensões apropriadas. Então, a seguinte identidade é válida

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

$R^{-1}a + AP = 0$, o que equivale a $b + AP = 0$, que escrito na forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} -R & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \\ P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Logo

$$(A^T R A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

◇

O próximo lema determina relações de equivalência entre as soluções \hat{x} de (2.1). Na próxima seção o lema será estendido, pois serão considerados problemas de mínimos quadrados com incertezas. Este resultado será indispensável para a obtenção das estimativas robustas, deduzidas no Capítulo 6.

Lema 2.1.2 *Suponha que $W > 00$, então as seguintes sentenças são equivalentes*

- (i) $\hat{x} \in \arg \min_x (Ax - b)^T W (Ax - b)$,
- (ii) $x = \hat{x}$ é uma solução de $A^T W A x = A^T W b$,
- (iii) $(x, \lambda, \gamma) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma})$ é uma solução de

$$\begin{bmatrix} -W & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Se $(A^T W A)$ for invertível, então tem-se que \hat{x} é solução única de (ii). Além disso,

$$(A^T W A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Prova: (i) \Rightarrow (ii) Defina-se o funcional J por

$$J := (Ax - b)^T W (Ax - b) = x^T A^T W A x - 2x^T A^T W b + b^T W b. \quad (2.10)$$

Então

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial x} = A^T W A x - A^T W b. \quad (2.11)$$

Se $x = \hat{x}$ é um ponto de mínimo de J , pela condição de otimalidade de primeira ordem deve-se ter $\frac{\partial J}{\partial x} = 0$, ou

$$A^T W A \hat{x} = A^T W b. \quad (2.12)$$

(ii) \Rightarrow (i) Como $W > 00$, tem-se

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x} = A^T W A \geq 0. \quad (2.13)$$

Assim, se x satisfaz a $A^T W A x = A^T W b$, x é um ponto de mínimo de J .

(ii) \Rightarrow (iii) Defina as variáveis auxiliares

$$\lambda := b - Ax \text{ e } \gamma := W\lambda. \quad (2.14)$$

Como $A^T W(b - Ax) = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} Ax + \lambda &= b \\ \gamma - W\lambda &= 0 \\ A^T \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou, de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} -W & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

(iii) \Rightarrow (ii)

$$\begin{bmatrix} -W & I & 0 \\ I & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \gamma \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma - W\lambda = 0 \Rightarrow \gamma = W\lambda = W(b - Ax) \\ \lambda + Ax = b \\ A^T \gamma = 0 \end{cases}.$$

De $\gamma = W(b - Ax)$ tem-se $A^T \gamma = A^T W(b - Ax) \Rightarrow 0 = A^T W(b - Ax) \Rightarrow A^T W A x = A^T W b$.

Se A tem posto coluna pleno e $W > 0$, segue que $A^T W A$ é invertível. Assim, pelo Lema 2.1.1, obtém-se a Equação (2.9). \diamond

2.2 O Problema de Mínimos Quadrados Regularizados

Nesta seção o problema de mínimos quadrados regularizados para modelos com incertezas nos dados será resolvido e sua solução será dada na forma de blocos matriciais. Essa forma é apropriada para os filtros robustos deduzidos nesta tese, uma vez que facilita análises posteriores de estabilidade e convergência.

Considere o seguinte problema de custo quadrático ótimo

$$\hat{x} = \arg \min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} \{ \|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2 \} \quad (2.17)$$

para um sistema cujas incertezas paramétricas são modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H\Delta \begin{bmatrix} N_A & N_b \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

sendo $Q = Q^T > 0$, matriz de regularização, $W = W^T \geq 0$, matriz de ponderação para o erro de estimativa, A matriz conhecida, b vetor conhecido, δA matriz de perturbação da matriz nominal A , δb vetor de perturbação do vetor nominal b , H , N_A , N_b , matrizes conhecidas com dimensões apropriadas e Δ matriz arbitrária satisfazendo $\|\Delta\| \leq 1$ (contração).

O resultado a seguir foi apresentado em [41] e nas referências internas. Trata-se de um lema fundamental para a teoria de filtragem robusta, no qual utiliza-se uma abordagem puramente determinística.

Lema 2.2.1 [41] *O problema de otimização (2.17)-(2.18) tem uma única solução \hat{x} dada por*

$$\hat{x} = \left(\hat{Q} + A^T \hat{W} A \right)^{-1} \left(A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} N_A^T N_b \right) \quad (2.19)$$

sendo que as matrizes de ponderação modificadas \hat{Q} e \hat{W} são dadas por

$$\hat{Q} := Q + \hat{\lambda} N_A^T N_A \quad (2.20)$$

$$\hat{W} := W + WH \left(\hat{\lambda} I - H^T W H \right)^\dagger H^T W \quad (2.21)$$

e $\hat{\lambda}$ é um parâmetro escalar não negativo obtido através do seguinte problema de otimização

$$\hat{\lambda} := \arg \min_{\lambda \geq \|H^T W H\|} G(\lambda) \quad (2.22)$$

sendo que

$$G(\lambda) := \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|N_A x(\lambda) - N_b\|^2 + \|Ax(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2 \quad (2.23)$$

e as funções auxiliares são definidas por

$$\begin{aligned} x(\lambda) &:= [Q(\lambda) + A^T W(\lambda) A]^{-1} [A^T W(\lambda) b + \lambda N_A^T N_b] \\ Q(\lambda) &:= Q + \lambda N_A^T N_A \\ W(\lambda) &:= W + W H (\lambda I - H^T W H)^\dagger H^T W. \end{aligned}$$

◇

O próximo resultado considera a otimização de um funcional quadrático com incertezas paramétricas e determina equivalências entre expressões obtidas para \hat{x} .

Lema 2.2.2 *As seguintes sentenças são equivalentes*

$$(i) \quad \hat{x} \in \arg \min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} \{\|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2\}, \quad (2.24)$$

sendo δA e δb dadas por

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} N_A & N_b \end{bmatrix}; \quad (2.25)$$

$$(ii) \quad \hat{x} \in \arg \min_x \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ A \\ N_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ N_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ A \\ N_A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ N_b \end{bmatrix} \right) \right\}; \quad (2.26)$$

(iii) $(x, \lambda, \gamma) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma})$ é solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -Q & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda} I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_A \\ 0 & 0 & 0 & I & A^T & N_A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ N_b \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Se $(Q + A^T \hat{W} A + \hat{\lambda} N_A^T N_A)$ é não singular, tem-se que \hat{x} é a única solução de (ii). Além disso,

$$(Q + A^T \hat{W} A + \hat{\lambda} N_A^T N_A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda} I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & N_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & A^T & N_A^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Prova: A partir do Lema 2.2.1, equação (2.19), obtém-se que

(i) \Leftrightarrow (ii)

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} N_A^T N_b) \\ &= (Q + \hat{\lambda} N_A^T N_A + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} N_A^T N_b) \end{aligned}$$

que na forma de blocos matriciais pode ser escrita como

$$\hat{x} = \left(Q + \begin{bmatrix} A^T & N_A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ N_A \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} A^T & N_A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ N_b \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

ou de maneira compacta

$$\hat{x} = (Q + \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{B}, \quad (2.29)$$

sendo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ N_A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b \\ N_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Assim,

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix} I & \mathcal{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \mathcal{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{A} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & \mathcal{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \mathcal{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Aplicando o Lema 2.1.2 na Equação (2.31), tem-se

$$\hat{x} \in \arg \min_x \{x^T Q x + (\mathcal{A}x - \mathcal{B})^T \mathcal{W} (\mathcal{A}x - \mathcal{B})\}. \quad (2.32)$$

(ii) \Rightarrow (iii) Substituindo-se as matrizes da equação (2.32) na Equação (2.8), com as identificações

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \mathcal{W} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

sendo \mathcal{A} , \mathcal{W} e \mathcal{B} dados por (2.30), obtém-se a equação (2.27). \diamond

2.3 O Método das Funções Penalidade

Esta seção trata do conceito de função penalidade sujeita a restrições lineares de igualdade. Mais detalhes sobre os resultados apresentados a seguir podem ser vistos em [35].

Considere o problema

$$\min\{f(x)\} \quad (2.34)$$

sujeito a

$$x \in S \quad (2.35)$$

sendo f uma função contínua em \mathbb{R}^n e $S \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto S é formado por restrições funcionais factíveis. A idéia fundamental do método de função penalidade é substituir o problema (2.34)-(2.35) por um problema irrestrito da forma

$$\min_x \{f(x) + cP(x)\}, \quad (2.36)$$

sendo c uma constante positiva e P uma função em \mathbb{R}^n que satisfaz as seguintes condições

- (i) P é uma função contínua;
- (ii) $P(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$.

O procedimento para resolução do problema (2.34)-(2.35) pelo método de função penalidade é definido como segue:

- (i) Seja $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais tendendo ao infinito tal que para cada k , tem-se: $c_k > 0$ e $c_{k+1} > c_k$.

(ii) Defina para cada c_k a função $q(c_k, x) = f(x) + c_k P(x)$.

(iii) Para cada k resolva o problema $\min_x \{q(c_k, x)\}$, obtendo uma solução x_k .

A convergência desse método é garantida pelos resultados apresentados a seguir que encontram-se provados em [35].

Lema 2.3.1 *As seguintes relações são válidas*

(i) $q(c_k, x_k) \leq q(c_{k+1}, x_{k+1})$;

(ii) $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$;

(iii) $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$.

Lema 2.3.2 . *Seja x^* uma solução para o problema (2.34)-(2.35). Então para cada k*

$$f(x^*) \geq q(c_k, x_k) \geq f(x_k). \quad (2.37)$$

Teorema 2.3.1 *Seja $\{x_k\}$ uma sequência gerada pelo método de penalidade. Então, qualquer ponto limite da sequência é uma solução para (2.34)-(2.35).*

Considere agora o seguinte problema

$$\hat{x} = \arg \min_x x^T V^{-1} x \quad (2.38)$$

sujeito a

$$Gx = u \quad (2.39)$$

sendo u e x vetores, V uma matriz definida positiva e G uma matriz retangular conhecida.

O próximo resultado fornece expressões para soluções ótimas do problema de otimização restrito.

Teorema 2.3.2 *Sejam $G \in \mathbb{R}^{k \times n}$ e $V > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Considere o problema de otimização com restrição*

$$\hat{x} = \arg \min_x x^T V^{-1} x \quad (2.40)$$

sujeito a

$$Gx = u \quad (2.41)$$

sendo que $u \in \mathbb{R}^{k \times 1}$. Associado ao problema com restrição (2.40)-(2.41) tem-se o seguinte problema sem restrição

$$\hat{x}(\mu) = \arg \min_x (\mathcal{G}x - \mathcal{B})^T \mathcal{V}^{-1}(\mu) (\mathcal{G}x - \mathcal{B}) \quad (2.42)$$

sendo

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad \mu > 0. \quad (2.43)$$

Então, o limite $\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} \hat{x}(\mu)$ sempre existe e é igual a

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} \hat{x}(\mu) = \hat{x}^0 \quad (2.44)$$

sendo \hat{x}^0 a solução de (2.40)-(2.41). Uma expressão para $\hat{x}(\mu_k)$ é dada por

$$\hat{x}(\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{V}(\mu) & \mathcal{G} \\ \mathcal{G}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Além disso, tem-se que

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} (\mathcal{G}\hat{x}(\mu) - \mathcal{B})^T \mathcal{V}^{-1}(\mu) (\mathcal{G}\hat{x}(\mu) - \mathcal{B}) = (x^0)^T V^{-1} x^0. \quad (2.46)$$

Prova: A demonstração deste teorema é uma extensão dos resultados apresentados em [35] e resumidos nos lemas 2.3.1 e 2.3.2 e no Teorema 2.3.1.

Considere o seguinte problema de otimização (2.38)-(2.39). Seja $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais tal que para cada k , tem-se: $\mu_k > 0$; $\mu_{k+1} > \mu_k$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty$. Defina $P(x) := (Gx - u)^T (Gx - u)$. Observe que todas as condições da definição de função penalidade são satisfeitas para a escolha acima de $P(x)$.

Defina então para cada μ_k a função auxiliar $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$. Ou seja,

$$q(\mu_k, x) = x^T V^{-1} x + \mu_k (Gx - u)^T (Gx - u). \quad (2.47)$$

Para cada k considere o problema $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$. Note que o problema $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$ admite uma única solução x_k pois $q(\mu_k, x)$ é uma função estritamente convexa em x . Observe

então que o problema $\min_x \{q(\mu_k, x)\}$ pode ser reescrito na forma

$$\hat{x}_k := \arg \min_x \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (2.48)$$

e admite a seguinte solução

$$\hat{x}(\mu_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V & 0 & I \\ 0 & \mu_k^{-1} I & G \\ I & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Para cada k , consideremos a sequência de soluções $\{\hat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$. De acordo com o Teorema 2.3.1 qualquer ponto limite da sequência $\{\hat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma solução para o problema de minimização sob restrição de igualdade definido acima. Então:

$$x^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V & 0 & I \\ 0 & 0 & G \\ I & G^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Observe que a invertibilidade do bloco matricial acima permanece garantida mesmo que $\mu_k^{-1} \rightarrow 0$ quando $\mu_k \rightarrow \infty$. Do Teorema 2.3.1 temos ainda que $\mu_k P(x_k) \rightarrow 0$ quando $\mu_k \rightarrow \infty$. Logo,

$$\lim_{\mu_k \rightarrow \infty} \left(\left(\begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} \hat{x}_k - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_k I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} \hat{x}_k - \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) \right) = (x^o)^T V^{-1} x^o. \quad (2.51)$$

◇

Capítulo 3

Estimativas Recursivas Ótimas para o Modelo no Espaço de Estado

Este capítulo desenvolve o equacionamento do FK para o modelo no espaço de estado usual e mostra que o filtro pode ser deduzido a partir dos procedimentos de otimização estabelecidos no Capítulo 2. Mostra-se que há equivalência entre as expressões matriciais para o FK apresentadas neste capítulo nas formas filtrada e preditora com as formas algébricas amplamente conhecidas [2] e [3].

Ressalta-se que, embora as expressões deduzidas para as estimativas ótimas no espaço de estado sejam equivalentes às que aparecem frequentemente na literatura, a motivação deste capítulo está na abordagem desenvolvida para determiná-las.

3.1 Estimativa Filtrada para o Modelo no Espaço de Estado

Considere o seguinte sistema dinâmico discreto no tempo

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F_i x_i + w_i \\z_{i+1} &= H_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, \quad i \geq 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $z_{i+1} \in \mathbb{R}^p$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^m$ e $v_{i+1} \in \mathbb{R}^p$ os erros de ajuste presentes nas equações de estado e de medida, e $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $H_{i+1} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ as matrizes do sistema.

O estabelecimento do problema de filtragem recursiva ótica para o modelo (3.1) é dado da seguinte maneira. Suponha que no passo i tem-se a estimativa *a priori* do estado x_i e denote esta estimativa inicial por $\hat{x}_{i|i}$. Suponha também que há uma matriz de ponderação definida positiva $P_{i|i}$ para o erro de estimação $(x_i - \hat{x}_{i|i})$. Para atualizar a estimativa de $\hat{x}_{i|i}$ para $\hat{x}_{i+1|i+1}$ propõe-se o seguinte problema de minimização

$$(\hat{x}_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}) := \arg \min_{x_i, x_{i+1}} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \\ \left(\begin{bmatrix} F_i & I & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

sendo $\mu_i > 0$ e $\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \geq 0$.

Na seqüência, encontra-se uma maneira equivalente de se escrever o problema (3.2). Esta nova formulação é mais compacta, o que facilita a sua solução, através da aplicação direta dos lemas apresentados no Capítulo 2.

Lema 3.1.1 *O problema de minimização (3.2) pode ser reescrito como*

$$\min_{\psi_i, x_{i+1}} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (3.3)$$

sendo

$$\mathcal{A}_i := \begin{bmatrix} F_i & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} -I \\ H_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_i^{-1} := \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\psi_i := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \quad e \quad \Xi_i^{-1} := \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Prova: Considere as seguintes definições, $\mathcal{X}_i := \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$ e $\mathcal{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, e reescreva $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$. Assim, segue que

$$\begin{bmatrix} \psi_i^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = (\mathcal{X}_i^T \mathcal{I}) \mathcal{P}_i^{-1} (\mathcal{I}^T \mathcal{X}_i). \quad (3.5)$$

Além disso, defina

$$\begin{bmatrix} F_i & I & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \mathcal{Z}_i, \quad (3.6)$$

sendo \mathcal{A}_i , \mathcal{H}_i , ψ_i e \mathcal{Z}_i dados por (3.4).

Portanto, o seguinte problema de minimização equivalente a (3.3) é obtido

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left\{ (\mathcal{X}_i^T \mathcal{I}) \mathcal{P}_i^{-1} (\mathcal{I}^T \mathcal{X}_i) + \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \mathcal{Z}_i \right)^T \Xi_i^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \mathcal{Z}_i \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Como $\begin{bmatrix} \psi_i^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \psi_i^T$, têm-se as seguintes igualdades entre as expressões

$$(\mathcal{X}_i^T \mathcal{I}) \mathcal{P}_i^{-1} (\mathcal{X}_i \mathcal{I}^T) = \left(\begin{bmatrix} \psi_i^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right) \mathcal{P}_i^{-1} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right) = \psi_i^T \mathcal{P}_i^{-1} \psi_i \quad (3.8)$$

e o problema (3.7) torna-se

$$\min_{\psi_i, x_{i+1}} \left\{ \psi_i^T \mathcal{P}_i^{-1} \psi_i + \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right)^T \Xi_i^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (3.9)$$

que, por sua vez, também equivale a (3.3). \diamond

O próximo resultado fornece expressões matriciais para as estimativas filtradas ótimas e para a correspondente equação recursiva de Riccati, considerando o modelo no espaço de estado usual.

Teorema 3.1.1 *Considere o sistema (3.1) e o problema de minimização (3.3). Assim, tem-se que as estimativas recursivas filtradas ótimas $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e sua correspondente equação recursiva de Riccati são dadas respectivamente por*

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \\ I & \mathcal{A}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e

$$P_{i+1|i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \\ I & \mathcal{A}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

sendo \mathcal{A}_i , \mathcal{H}_i , \mathcal{Z}_i , \mathcal{P}_i e Ξ_i definidas por (3.4).

Prova: O problema de minimização (3.3) pode ser reescrito como

$$\min_x (Ax - b)^T W (Ax - b), \quad (3.12)$$

sendo $A := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix}$, $x := \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, $b := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix}$ e $W := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix}$.

Dessa forma, aplicando o item (iii) do Lema 2.1.2 obtém-se que \hat{x}_{i+1} é solução do seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & \mathcal{A}_i^T \\ 0 & \mathcal{H}_i^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Verificando que a inversa está bem definida em (3.13), uma vez que $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} \geq 0$, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix}$

tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i , isto em decor-

rência da presença das matrizes identidade em \mathcal{A}_i e \mathcal{H}_i (veja (3.4)), a expressão (3.10) para $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é obtida.

Ainda pelo Lema 2.1.2, segue que a matriz P é definida como parte de x , ou seja,

$$P := (A^T W A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

que, escrita em termo dos parâmetros originais do sistema, resulta em (3.11). \diamond

3.2 Estimativa Preditora para o Modelo no Espaço de Estado

Considere o seguinte sistema dinâmico discreto no tempo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F_i x_i + w_i \\ z_i &= H_i x_i + v_i, \end{aligned} \quad (3.15)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $z_i \in \mathbb{R}^p$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^m$ e $v_i \in \mathbb{R}^p$ os erros de ajuste presentes nas equações de estado e de medida, e $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ as matrizes do sistema.

O problema de predição ótima é encontrar $\hat{x}_{i+1|i}$ tal que

$$\begin{aligned} (\hat{x}_{i|i}, \hat{x}_{i+1|i}) := \arg \min_{x_i, x_{i+1}} & \left\{ \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ w_i \\ v_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ w_i \\ v_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \left(- \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ -H_i \hat{x}_{i|i-1} + z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i & I & 0 & -I \\ H_i & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ w_i \\ v_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \right\}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

A solução de (3.16) é obtida seguindo o mesmo procedimento desenvolvido para a formulação filtrada. A única diferença está no rearranjo das matrizes. O próximo resultado é consequência direta do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.2.1 *Considere o sistema (3.15) e o problema de minimização (3.16). As estimati-*

vas preditoras recursivas ótimas $\hat{x}_{i+1|i}$ e a correspondente equação recursiva de Riccati são dadas respectivamente por

$$\hat{x}_{i+1|i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \\ I & \mathcal{D}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

e a correspondente equação recursiva de Riccati

$$P_{i+1|i} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \\ I & \mathcal{D}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

sendo

$$\mathcal{D}_i := \begin{bmatrix} F_i & I & 0 \\ H_i & 0 & I \end{bmatrix}, \mathcal{L}_i := \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ -H_i \hat{x}_{i|i-1} + z_i \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{P}_i := \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & R_i \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Prova: O problema de minimização (3.16) pode ser reescrito na forma (3.12), sendo

$$A := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}, x := \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, b := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \text{ e } W := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, aplicando o item (iii) do Lema 2.1.2 obtém-se que \hat{x}_{i+1} é solução do seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & \mathcal{D}_i^T \\ 0 & \mathcal{L}_i^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Verificando que a inversa está bem definida em (3.20), uma vez que $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} \geq 0$, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}$

tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i , isto em decorrência da presença das matrizes identidade em \mathcal{D}_i e \mathcal{L}_i (veja (3.19)), a expressão (3.17) para $\hat{x}_{i+1|i}$ é obtida.

Ainda pelo Lema 2.1.2, segue que a matriz P é definida como parte de \hat{x} que, escrita em termos dos parâmetros originais do sistema, resulta em (3.18). \diamond

3.3 Expressões Equivalentes para as Estimativas Recursivas Ótimas

Nesta seção serão mostradas equivalências entre as expressões das estimativas filtradas e predictoras e correspondentes recursões de Riccati obtidas previamente neste capítulo, com aquelas comumente encontradas na literatura (veja [2] e [3]). Para isto, os limites $\lim_{\mu_i \rightarrow \infty} \hat{x}$, ou de forma equivalente $\lim_{\Xi_i \rightarrow 0} \hat{x}$, serão tomados de acordo com a teoria de funções penalidade, desenvolvida na Seção 2.3 do Capítulo 2.

Teorema 3.3.1 *Sejam $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i+1}$ dadas por (3.10) e (3.11), respectivamente. Então, tem-se que tais expressões podem ser reescritas como*

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1}(F_i P_{i|i} F_i^T + Q_i)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad (3.21)$$

e

$$P_{i+1|i+1} := \left((F_i P_{i|i} F_i^T + Q_i)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Prova: A recursão $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é dada por (3.10), se e somente se, o seguinte sistema de equações tiver uma única solução

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{i|i} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_i & \mathcal{H}_i \\ I & \mathcal{A}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Esta equação matricial equivale ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathcal{P}_{i|i}a + c = 0 \\ \mathcal{A}_i c + \mathcal{H}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i \\ a + \mathcal{A}_i^T b = 0 \\ \mathcal{H}_i^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\mathcal{P}_{i|i}a \\ \mathcal{H}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i - \mathcal{A}_i c \\ a = -\mathcal{A}_i^T b \\ \mathcal{H}_i^T b = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} c = \mathcal{P}_{i|i}\mathcal{A}_i^T b \\ \mathcal{H}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i + \mathcal{A}_i \mathcal{P}_{i|i}a \\ a = -\mathcal{A}_i^T b \\ \mathcal{H}_i^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \mathcal{P}_{i|i}\mathcal{A}_i^T b \\ \mathcal{H}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i - \mathcal{A}_i \mathcal{P}_{i|i}\mathcal{A}_i^T b \\ a = -\mathcal{A}_i^T b \\ \mathcal{H}_i^T b = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Como os parâmetros $\{a, c\}$ podem ser escritos em termos de b e x_{i+1} , o sistema (3.23) tem solução se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_i \mathcal{P}_{i|i} \mathcal{A}_i^T & \mathcal{H}_i \\ \mathcal{H}_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

tem solução. Utilizando o Lema 2.1.1 do Capítulo 2 segue que x_{i+1} é dado por

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = (\mathcal{H}_i^T (\mathcal{A}_i \mathcal{P}_{i|i} \mathcal{A}_i^T)^{-1} \mathcal{H}_i)^{-1} \mathcal{H}_i^T (\mathcal{A}_i \mathcal{P}_{i|i} \mathcal{A}_i^T)^{-1} \mathcal{Z}_i \quad (3.25)$$

que escrito em termos dos parâmetros originais,

$$\mathcal{A}_i := \begin{bmatrix} F_i & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_i := \begin{bmatrix} -I \\ H_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{i|i} := \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & R_{i+1} \end{bmatrix}$$

torna-se (3.21). A recursão $P_{i+1|i+1}$ é definida como parte de $\hat{x}_{i+1|i+1}$, ou seja, (3.22) é obtida. \diamond

Teorema 3.3.2 *Sejam $\hat{x}_{i+1|i}$ e $P_{i+1|i}$ dadas por (3.17) e (3.18), respectivamente. Então, tem-se que tais estimativas podem ser reescritas como*

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} ((F_i P_{i|i-1} F_i^T + Q_i)^{-1} - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ P_{i+1|i} ((F_i P_{i|i-1} F_i^T + Q_i)^{-1} - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

e

$$P_{i+1|i} := (F_i P_{i|i-1} F_i^T + Q_i)^{-1} - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T. \quad (3.27)$$

Prova: A recursão $\hat{x}_{i+1|i}$ é dada por (3.10) se e somente se o sistema (3.28) tem uma única solução

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_{i|i} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_i & \mathcal{L}_i \\ I & \mathcal{D}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Esta equação matricial equivale ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{i|i}a + c = 0 \\ \mathcal{D}_i c + \mathcal{L}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i \\ a + \mathcal{D}_i^T b = 0 \\ \mathcal{L}_i^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\mathcal{P}_{i|i}a \\ \mathcal{L}x_{i+1} = \mathcal{Z}_i - \mathcal{D}_i c \\ a = -\mathcal{D}_i^T b \\ \mathcal{L}_i^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \mathcal{P}_{i|i}\mathcal{D}_i^T b \\ \mathcal{H}x_{i+1} = \mathcal{Z}_i + \mathcal{D}_i\mathcal{P}_{i|i}a \\ a = -\mathcal{D}_i^T b \\ \mathcal{L}_i^T b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \mathcal{P}_{i|i}\mathcal{D}_i^T b \\ \mathcal{L}x_{i+1} = \mathcal{Z}_i - \mathcal{D}_i\mathcal{P}_{i|i}\mathcal{D}_i^T b \\ a = -\mathcal{D}_i^T b \\ \mathcal{L}_i^T b = 0 \end{cases}.$$

Como os parâmetros $\{a, c\}$ podem ser escritos em termos de b e x_{i+1} , o sistema (3.28) tem solução se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_i\mathcal{P}_{i|i-1}\mathcal{D}_i^T & \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

tem solução.

Utilizando o Lema 2.1.1 do Capítulo 2 segue que x_{i+1} é dado por

$$\hat{x}_{i+1|i} = (\mathcal{L}_i^T(\mathcal{D}_i\mathcal{P}_{i|i-1}\mathcal{D}_i^T)^{-1}\mathcal{L}_i)^{-1}\mathcal{L}_i^T(\mathcal{D}_i\mathcal{P}_{i|i-1}\mathcal{D}_i^T)^{-1}\mathcal{Z}_i \quad (3.30)$$

que escrito em termos dos parâmetros originais

$$\mathcal{D}_i := \begin{bmatrix} F_i & I & 0 \\ H_i & 0 & I \end{bmatrix}, \mathcal{L}_i := \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ -H_i\hat{x}_{i|i-1} + z_i \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{P}_i := \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 \\ 0 & 0 & R_i \end{bmatrix}$$

torna-se (3.26). A recursão $P_{i+1|i}$ é definida como parte de $\hat{x}_{i+1|i}$, isto é, (3.27). \diamond

Observação 1 *Note a complexidade tomada pelas expressões das estimativas ótimas e recursões de Riccati após serem feitas as reduções das formas matriciais, principalmente considerando o caso preditor. Este fato mostra uma vantagem do método proposto nesta tese, principalmente quando a classe de sistemas singulares é considerada (veja para maiores detalhes o Capítulo 4).*

Estimativas Recursivas Ótimas para o Modelo Singular Nominal

Neste capítulo serão considerados filtros nominais para modelos no espaço de semi-estado, denominados Filtros Singulares Nominais (FSNs). Serão obtidas estimativas ótimas nas formas filtrada e preditora, por meio das seguintes técnicas de otimização: mínimos quadrados ponderados e funções penalidades. Os resultados deste capítulo mostram que os filtros apresentados são equivalentes aos filtros obtidos em [5]. O FSN apresentado neste capítulo é análogo ao apresentado em [6] e [25]. A principal diferença entre os dois procedimentos utilizados nas respectivas deduções está relacionada com o método para incorporar as restrições no funcional a ser minimizado. Na abordagem desenvolvida neste capítulo, as restrições são incorporadas de forma quadrática utilizando o termo denominado função penalidade, enquanto em [6] e [25] as restrições são incorporadas via multiplicadores de Lagrange.

4.1 Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares Nominais

Considere o seguinte sistema dinâmico singular discreto no tempo

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + G_{w,i} w_i + G_{v,i+1} v_{i+1} \\ z_{i+1} &= H_{i+1} x_{i+1} + J_i x_i + K_{w,i} w_i + K_{v,i+1} v_{i+1}, \quad i \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a variável singular, $z_i \in \mathbb{R}^p$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^m$ e $v_i \in \mathbb{R}^p$ os ruídos presentes no estado e na medida, $E_{i+1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H_{i+1} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $G_{w,i} \in \mathbb{R}^{m \times m}$,

$G_{v,i+1} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $K_{w,i} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $K_{v,i+1} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ as matrizes do sistema nominal e $J_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz que representa o termo de atraso na equação de saída.

O problema de filtragem ótima é encontrar $\hat{x}_{i+1|i+1}$, tal que

$$\begin{aligned} (\hat{x}_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}) := \arg \min_{x_i, x_{i+1}} & \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i \\ 0 & S_i^T & R_{i+1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ + & \left(\begin{bmatrix} F_i & G_{w,i} & G_{v,i+1} & -E_{i+1} \\ J_i & K_{w,i} & K_{v,i+1} & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo $\mu_i > 0$ e $\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \geq 0$.

Note que o problema de minimização (4.2) possui a mesma estrutura do problema (3.2). Sendo assim, a forma equivalente de se escrever o problema (3.2) apresentada no Lema 3.1.1, também pode ser desenvolvida para o caso singular nominal. Nesta nova formulação, segue

$$\min_{\psi_i, x_{i+1}} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ C_i & \mathcal{N}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ C_i & \mathcal{N}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (4.3)$$

sendo que as identificações (3.4) tornam-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i &:= \begin{bmatrix} F_i & G_{w,i} & G_{v,i+1} \\ J_i & K_{w,i} & K_{v,i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{N}_i := \begin{bmatrix} -E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{P}_i^{-1} := \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i \\ 0 & S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1}, \\ \Xi_i &:= \mu_i^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \text{ e } \psi_i := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como consequência deste novo arranjo para o problema (4.2), o seguinte resultado, que fornece expressões para as estimativas filtradas singulares nominais com a correspondente equação recursiva de Riccati, é obtido.

Teorema 4.1.1 *Considere o sistema (4.1) e o problema de minimização (4.2). Assuma que as*

seguintes hipóteses sejam satisfeitas

H 1 $\begin{bmatrix} \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i ;

H 2 \mathcal{N}_i tem posto coluna pleno para todo i , para uma dada sequência $\{z_0, z_1, \dots, z_{i+1}\}$.

Assim, tem-se que as estimativas filtradas singulares recursivas ótimas e sua correspondente equação recursiva de Riccati são dadas respectivamente por

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \\ I & \mathcal{C}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ \mathfrak{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e

$$P_{i+1|i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \\ I & \mathcal{C}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

sendo \mathcal{C}_i , \mathcal{N}_i , \mathcal{Z}_i , Ξ_i e \mathcal{P}_i dadas por (4.4).

Prova: O problema de minimização (4.2) pode ser reescrito como (3.12), sendo

$$A := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o item (iii) do Lema 2.1.2, tem-se que \hat{x}_{i+1} é solução do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & \mathcal{C}_i^T \\ 0 & \mathcal{N}_i^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Por meio da segunda linha de (4.7), obtém-se que

$$\Xi_i \lambda_2 + \mathcal{C}_i \psi_i + \mathcal{N}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i \Rightarrow \Xi_i \lambda_2 + \mathcal{C}_i \phi_i + \mathcal{N}_i x_{i+1} = \mathfrak{Z}_i, \quad (4.8)$$

$$\text{sendo } \phi_i := \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \text{ e } \mathfrak{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Além disso, através da primeira linha de (4.7), a equação $\mathcal{P}_i \lambda_1 + \psi_i = 0$ torna-se $\mathcal{P}_i \lambda_1 + \phi_i = \hat{\mathfrak{x}}_{i|i}$, sendo $\hat{\mathfrak{x}}_{i|i} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Logo, o sistema (4.7) equivale a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{C}_i & \mathcal{N}_i \\ I & \mathcal{C}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \phi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathfrak{x}}_{i|i} \\ \mathfrak{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Assumindo que as hipóteses **H 1** e **H 2** são satisfeitas, pelo Lema ¹, a matriz à esquerda de (4.9) é não singular e a solução ótima é dada por (4.5). Definindo $P_{i+1|i+1}$ como parte de $\hat{x}_{i+1|i+1}$, a equação (2.9) do Lema 2.1.2 resulta em (4.6). \diamond

Observação 2 *Através da solução de (4.2) tem-se que as estimativas suavizadas podem ser obtidas como*

$$\hat{x}_{i|i+1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_i^T & R_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_{w,i} & G_{v,i+1} & -E_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_i & K_{w,i} & K_{v,i+1} & H_{i+1} & z_{i+1} \\ I & I & 0 & 0 & F_i^T & J_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_{w,i}^T & K_{w,i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & G_{v,i+1}^T & K_{v,i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\text{uma vez que } \hat{\phi}_{i|i+1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \\ \hat{v}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}.$$

¹**Lema [40]** Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com $A \geq 0$. Tem-se que $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$ é invertível se e somente se B tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno.

4.2 Estimativa Preditora para Sistemas Singulares Nominais

Considere o seguinte sistema dinâmico singular discreto no tempo

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + G_i \nu_i \\ z_i &= H_i x_i + K_i \nu_i, \quad i \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ a variável singular, $z_i \in \mathbb{R}^p$ a medida da saída, $w_i \in \mathbb{R}^m$ e $v_i \in \mathbb{R}^p$ os ruídos presentes no estado e na medida, $E_{i+1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, as matrizes do sistema nominal e

$$\begin{bmatrix} G_i \\ K_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} G_{w,i} & G_{v,i} \\ K_{w,i} & K_{v,i} \end{bmatrix} \text{ e } \nu_i := \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

O estabelecimento do problema de predição para sistemas nominais segue a mesma linha desenvolvida para o caso filtrado. Suponha que no passo $i - 1$ tem-se a estimativa *a priori* do estado x_i e denote esta estimativa inicial por $\hat{x}_{i|i-1}$. Suponha também que há uma matriz de ponderação definida positiva $P_{i|i-1}$ para o erro de estimação ($x_i - \hat{x}_{i|i-1}$). Para atualizar a estimativa de $\hat{x}_{i|i-1}$ para $\hat{x}_{i+1|i}$, propõe-se o seguinte problema de minimização

$$\begin{aligned} (\hat{x}_{i|i}, \hat{x}_{i+1|i}) &:= \arg \min_{x_i, x_{i+1}} \left\{ \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \left(\begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ H_i & K_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ -H_i \hat{x}_{i|i-1} + z_i \end{bmatrix} \right)^T \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (4.13) \end{aligned}$$

sendo que ν_i , G_i e K_i são definidos por (4.12) e $\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_i \end{bmatrix}$.

O próximo resultado auxiliar apresenta uma maneira alternativa de escrever o problema de minimização acima proposto.

Lema 4.2.1 *O problema de minimização (4.13) pode ser reescrito como*

$$\min_{\psi_i, x_{i+1}} \left\{ \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \right) \right\} \quad (4.14)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i &:= \begin{bmatrix} F_i & G_i \\ H_i & K_i \end{bmatrix}, \mathcal{M}_i := \begin{bmatrix} -E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} -F\hat{x}_{i|i-1} \\ -H\hat{x}_{i|i-1} + z_i \end{bmatrix}, \psi_i := \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \end{bmatrix} \text{ e} \\ \mathcal{P}_i &:= \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \end{bmatrix}, \Xi_i^{-1} := \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

◇

A prova deste resultado é análoga à demonstração feita para o Lema 3.1.1, no qual uma compactação dos termos matriciais foi realizada, para facilitar a aplicação dos lemas do Capítulo 2. Por este motivo, a prova foi omitida.

A seguir, será apresentado um resultado que fornece expressões para as estimativas predictoras ótimas nominais.

Teorema 4.2.1 *As estimativas recursivas ótimas $\hat{x}_{i+1|i}$ resultantes da solução do problema (4.13) e sua correspondente equação recursiva de Riccati, podem ser obtidas alternativamente através das seguintes recursões*

$$\hat{x}_{i+1|i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \\ I & \mathcal{B}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{i|i-1} \\ \mathfrak{z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

e

$$P_{i+1|i} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \\ I & \mathcal{B}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

sendo $\mathfrak{z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{x}}_{i|i-1} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{B}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{P}_i$ dadas por (4.15), contanto que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas

H 3 $\begin{bmatrix} \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i ;

H 4 \mathcal{M}_i tem posto coluna pleno para todo i , e é dada uma sequência $\{z_0, z_1, \dots, z_i\}$.

Prova: O problema de minimização (4.14) pode ser reescrito como (3.12), sendo

$$A := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \Xi_i^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aplicando o item (iii) do Lema 2.1.2, tem-se que \hat{x}_{i+1} é solução do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 \\ 0 & \Xi_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & \mathcal{B}_i^T \\ 0 & \mathcal{M}_i^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \psi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Através da segunda linha de (4.18), obtém-se que

$$\Xi_i \lambda_2 + \mathcal{B}_i \psi_i + \mathcal{M}_i x_{i+1} = \mathcal{Z}_i \Rightarrow \Xi_i \lambda_2 + \mathcal{B}_i \phi_i + \mathcal{M}_i x_{i+1} = \mathfrak{z}_i, \quad (4.19)$$

sendo $\phi_i := \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \\ v_i \end{bmatrix}$ e $\mathfrak{z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}$. Além disso, através da primeira linha de (4.18), a equação $\mathcal{P}_i \lambda_1 + \psi_i = 0$ torna-se

$$\mathcal{P}_i \lambda_1 + \phi_i = \hat{\mathfrak{x}}_{i|i-1},$$

sendo $\hat{\mathfrak{x}}_{i|i-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Logo, o sistema (4.18) equivale a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}_i & 0 & I & 0 \\ 0 & \Xi_i & \mathcal{B}_i & \mathcal{M}_i \\ I & \mathcal{B}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_i^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \phi_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathfrak{x}}_{i|i-1} \\ \mathfrak{z}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Assumindo que as hipóteses **H 3** e **H 4** são satisfeitas, a matriz a esquerda de (4.20) é não singular e a solução ótima dada por (4.16). Definindo $P_{i+1|i}$ como parte de $\hat{x}_{i+1|i}$, a equação (2.9) do Lema 2.1.2 resulta em (4.17). \diamond

4.3 Casos Particulares das Estimativas Recursivas Ótimas

Considerando $\lim_{\Xi_i \rightarrow 0}$, que equivale a tomar $\lim_{\mu_i \rightarrow \infty}$, através da aplicação da teoria de funções penalidade (veja para maiores detalhes a Seção 2.3 do Capítulo 2), nas equações (4.5)-(4.6) e (4.16)-(4.17), têm-se que os FSNs apresentados nas Seções 4.1 e 4.2 recaem nos filtros propostos em [5] que, escritos em termos dos parâmetros do sistema (4.1), tornam-se

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_i^T & R_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_{w,i} & G_{v,i+1} & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_i & K_{w,i} & K_{v,i+1} & H_{i+1} \\ 0 & I & 0 & 0 & F_i^T & J_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_{w,i}^T & K_{w,i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & G_{v,i+1}^T & K_{v,i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_i^T & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_{w,i} & G_{v,i} & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_i & K_{w,i} & K_{v,i} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & F_i^T & H_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_{w,i}^T & K_{w,i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & G_{v,i}^T & K_{v,i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

A fim de comparar o Corolário 4.1.1 com os resultados encontrados na literatura, adote $J_i = 0$ na estimativa filtrada e $G_{w,i} = G_i$, $G_{v,i} = 0$, $K_{w,i} = 0$ e $K_{v,i} = I$ para todo i , considerando os casos filtrado e preditor.

Os próximos resultados mostram que há equivalência entre os filtros obtidos nas seções anteriores deste capítulo, com os deduzidos por [28] e [40] que, por sua vez, podem ser reduzidos às formas encontradas em [14].

Lema 4.3.1 *Suponha que $\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e $\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno para todo i . Então, pode-se reescrever*

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & S_i^T & R_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_i & 0 & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & H_{i+1} \\ 0 & I & 0 & 0 & F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

como

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T & -G_i S_i & E_{i+1} \\ -S_i^T G_i^T & R_{i+1} & H_{i+1} \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} & 0 \\ z_{i+1} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

ou, de forma equivalente, quando $S_i = 0$ como

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad (4.25)$$

e

$$P_{i+1|i+1} := (E_{i+1}^T (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1})^{-1}. \quad (4.26)$$

Prova: Se $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é dado por (4.23), segue que x_{i+1} é solução do seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & S_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & S_i^T & R_{i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_i & 0 & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & H_{i+1} \\ I & 0 & 0 & F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ x_i \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

A partir da primeira e segunda linha de (4.27), tem-se que

$$\begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S_i \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

e a partir da sexta e sétima linhas segue que $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_i^T \lambda_4 \\ G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix}$. Substituindo $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ na equação (4.28) obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i^T \lambda_4 \\ -G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S_i \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} -P_{i|i} F_i^T \lambda_4 \\ -Q_i G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ S_i \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Agora, considere a quarta linha de (4.27)

$$\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} - E_{i+1} x_{i+1} = 0. \quad (4.30)$$

Por (4.29) tem-se que

$$\begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i} F_i^T \lambda_4 + \hat{x}_{i|i} \\ Q_i G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ S_i \end{bmatrix} \lambda_3. \quad (4.31)$$

Fazendo a substituição do vetor $\begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix}$ em (4.30) pela equação (4.31), obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i} F_i^T \lambda_4 + \hat{x}_{i|i} \\ Q_i G_i^T \lambda_4 - S_i \lambda_3 \end{bmatrix} - E_{i+1} x_{i+1} = 0 \\ \Rightarrow & F_i P_{i|i} F_i^T \lambda_4 + G_i Q_i G_i^T \lambda_4 - G_i S_i \lambda_3 - E_{i+1} x_{i+1} = -F_i \hat{x}_{i|i} \\ \Rightarrow & -(F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T) \lambda_4 + G_i S_i \lambda_3 + E_{i+1} x_{i+1} = F_i \hat{x}_{i|i}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Tem-se também a partir da terceira, quinta e oitava linhas de (4.27), respectivamente, que

$$S_i^T \lambda_2 + R_{i+1} \lambda_3 + v_{i+1} = 0 \quad (4.33)$$

$$v_{i+1} = -H_{i+1} x_{i+1} + z_{i+1} \quad (4.34)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_5. \quad (4.35)$$

Substituindo (4.34) em (4.33) e λ_2 por $-G_i^T \lambda_4$ obtém-se

$$-S_i^T G_i^T \lambda_4 + R_{i+1} \lambda_3 - H_{i+1} x_{i+1} = -z_{i+1} \Rightarrow S_i^T G_i^T \lambda_4 - R_{i+1} \lambda_3 + H_{i+1} x_{i+1} = z_{i+1}. \quad (4.36)$$

Considerando a equação $-E_{i+1}^T \lambda_4 + H_{i+1}^T \lambda_5 = 0$, obtida a partir da última linha de (4.27), segue que substituindo λ_3 por $-\lambda_5$ dado em (4.35), tem-se

$$-E_{i+1}^T \lambda_4 - H_{i+1}^T \lambda_3 = 0. \quad (4.37)$$

Escrevendo (4.32), (4.36) e (4.37) em forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T & -G_i S_i & E_{i+1} \\ -S_i^T G_i^T & R_{i+1} & H_{i+1} \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_4 \\ -\lambda_3 \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Como, por hipótese, $\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i , segue que a matriz à esquerda de (4.38) é não singular. Sendo assim, $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é dado por (4.24).

A demonstração que $P_{i+1|i+1}$ dada por (4.23) pode ser escrita como (4.24) segue o mesmo procedimento desenvolvido para $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e, desta forma, será omitida.

Abaixo será mostrado que (4.24) equivale a (4.25)-(4.26) quando $S_i = 0$.

Utilizando o Lema 2.1.1 do Capítulo 2, tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \left(\begin{bmatrix} E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= \left(E_{i+1}^T (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1} \\ &\times E_{i+1}^T (F_i P_{i|i} F_i^T + G_i Q_i G_i^T)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Definindo parte de $\hat{x}_{i+1|i+1}$ como sendo $P_{i+1|i+1}$, as recursões (4.25) e (4.26) são obtidas.

◇

Observação 3 *Note que, embora a estrutura em blocos matricias de (4.24) recaia na estrutura proposta em [40], nessa referência a matriz G_i é considerada matriz identidade.*

O próximo resultado faz a redução do preditor singular nominal deduzido na Seção 4.2 à forma encontrada em [39] ($S_i = 0$), obtida a partir de uma reformulação do problema de máxima verossimilhança resolvido em [40].

Lema 4.3.2 *Suponha que $\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno e E_{i+1} tem posto coluna pleno para todo i . Então, pode-se reescrever*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} &:= \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T &\begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_i & 0 & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_i & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & F_i^T & H_i^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & G_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ z_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.41)$$

como

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} &:= \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T &\begin{bmatrix} F_i P_{i|i-1} F_i^T + G_i Q_i G_i^T & -F_i P_{i|i-1} H_i^T & E_{i+1} \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.42)$$

ou como

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Y_i - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Y_i - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\ &\times F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1})\end{aligned}\quad (4.43)$$

$$P_{i+1|i} := (E_{i+1}^T (Y_i - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} E_{i+1})^{-1}\quad (4.44)$$

sendo $Y_i := F_i P_{i|i-1} F_i^T + G_i Q_i G_i^T$.

Prova: Se $\hat{x}_{i+1|i}$ é dado por (4.41), segue que x_{i+1} é solução do seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_i & G_i & 0 & -E_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_i & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & F_i^T & H_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & G_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{i+1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ x_i \\ w_i \\ v_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\quad (4.45)$$

A partir da primeira e segunda linhas de (4.45), tem-se que

$$\begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix},\quad (4.46)$$

e a partir da sexta e sétima linhas segue que $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_i^T \lambda_4 + H_i^T \lambda_5 \\ G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix}$. Substituindo $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ na equação (4.46) obtém-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i^T \lambda_4 - H_i^T \lambda_5 \\ -G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} -P_{i|i-1} F_i^T \lambda_4 - P_{i|i-1} H_i^T \lambda_5 \\ -Q_i G_i^T \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.47)$$

Agora, considere a quarta linha de (4.45)

$$\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} - E_{i+1}x_{i+1} = 0. \quad (4.48)$$

Por (4.47) tem-se que

$$\begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}F_i^T\lambda_4 + P_{i|i-1}H_i^T\lambda_5 + \hat{x}_{i|i-1} \\ Q_iG_i^T\lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Fazendo a substituição do vetor $\begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix}$ em (4.48) pela equação (4.49), obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}F_i^T\lambda_4 + P_{i|i-1}H_i^T\lambda_5 + \hat{x}_{i|i-1} \\ Q_iG_i^T\lambda_4 \end{bmatrix} - E_{i+1}x_{i+1} = 0 \\ \Rightarrow & F_iP_{i|i-1}F_i^T\lambda_4 + F_iP_{i|i-1}H_i^T\lambda_5 + G_iQ_iG_i^T\lambda_4 - E_{i+1}x_{i+1} = -F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ \Rightarrow & (F_iP_{i|i-1}F_i^T + G_iQ_iG_i^T)\lambda_4 + F_iP_{i|i-1}H_i^T\lambda_5 - E_{i+1}x_{i+1} = -F_i\hat{x}_{i|i-1} \\ \Rightarrow & -(F_iP_{i|i-1}F_i^T + G_iQ_iG_i^T)\lambda_4 - F_iP_{i|i-1}H_i^T\lambda_5 + E_{i+1}x_{i+1} = F_i\hat{x}_{i|i-1}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tem-se também a partir da terceira, quinta e oitava linhas de (4.45) que

$$R_i\lambda_3 + v_i = 0, \quad (4.51)$$

$$v_i = -H_ix_i + z_i, \quad (4.52)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_5, \quad (4.53)$$

respectivamente. Substituindo (4.52) em (4.51) obtém-se

$$R_i\lambda_3 - H_ix_i = -z_i \Rightarrow -R_i\lambda_3 + H_ix_i = z_i. \quad (4.54)$$

Substituindo x_i dado por (4.48) e λ_3 dado por (4.53), ambos em (4.54) tem-se

$$(R_i + H_iP_{i|i-1}H_i^T)\lambda_5 + H_iP_{i|i-1}F_i^T\lambda_4 = z_i - H_i\hat{x}_{i|i-1}. \quad (4.55)$$

Considerando a última linha de (4.45), segue que

$$-E_{i+1}^T \lambda_4 = 0. \quad (4.56)$$

Escrevendo (4.50), (4.54) e (4.56) na forma matricial, obtém-se

$$\begin{bmatrix} F_i P_{i|i-1} F_i^T + G_i Q_i G_i^T & -F_i P_{i|i-1} H_i^T & E_{i+1} \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_4 \\ \lambda_5 \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Como, por hipótese, $\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo i , segue que a matriz à esquerda de (4.57) é não singular. Sendo assim, $\hat{x}_{i+1|i}$ é dado por (4.42).

A demonstração que $P_{i+1|i}$ dada por (4.41) pode ser escrita como (4.42) segue o mesmo procedimento desenvolvido para $\hat{x}_{i+1|i}$ e, desta forma, será omitido.

Agora será mostrado que (4.42) equivale a (4.43)-(4.44).

Utilizando o Lema 2.1.1 do Capítulo 2 e definindo $Y_i := F_i P_{i|i-1} F_i^T + G_i Q_i G_i^T$, tem-se que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} x_{i+1} \\ &= \begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \left(\begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (4.58) \end{aligned}$$

A inversa do bloco matricial central de (4.58) pode ser calculada através da fatoração LDU²,

²LDU é uma decomposição matricial da forma $A = LDU$, sendo D uma matriz diagonal e L e U matrizes unitárias.

que é dada por

$$\begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_i H_i P_{i|i-1} F_i^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Y_i - F_i P_{i|i-1} H_i^T B_i H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & F_i P_{i|i-1} H_i^T B_i \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

sendo B_i definido por $B_i := (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1}$.

Portanto, ao definirmos

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (4.59)$$

tem-se a equação (4.44). Logo, a estimativa preditora $\hat{x}_{i+1|i}$ é dada por (4.43).

◇

Capítulo 5

Estabilidade e Convergência dos FSNs

Este capítulo apresenta as condições para estabilidade e convergência da sequência P_{i+1} associada ao Filtro Singular Nominal (FSN) em regime permanente. Demonstra-se que a solução recursiva da Equação Algébrica de Riccati (EAR), sob certas condições, converge para uma matriz P simétrica e semidefinida positiva. Demonstra-se também que, caso essa solução exista, ela é única [7]. Os resultados relatados neste capítulo aplicam-se tanto às estimativas filtradas quanto às preditoras obtidas nos capítulos 3 e 4, uma vez que as matrizes serão particionadas de forma correspondente à parte dinâmica e da medida do sistema original. Os resultados deste capítulo são extensões de [10] e [34].

5.1 Resultados Preliminares

Tem-se que propriedades da EAR são mostradas quando os parâmetros do sistema são constantes. Sendo assim, considere um sistema dinâmico linear invariante no tempo descrito por

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{E}x_{i+1} + \mathcal{F}x_i + \mathcal{G}\mathcal{V}_i, \quad (5.1)$$

sendo que

$$\mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{V}_i := \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

O índice d representa a parte referente à equação dinâmica do sistema e o índice m refere-se

à equação de medida.

Considerando o modelo no espaço de estado usual (veja equação (3.1) do Capítulo 3) tem-se que

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ H \end{bmatrix}; \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

no caso filtrado, enquanto valem as seguintes definições

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

no caso preditor.

Para o caso singular nominal (equação (4.1) do Capítulo 4), tem-se para o caso filtrado

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix}; \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix}$$

enquanto no caso preditor singular valem as seguintes definições

$$\mathcal{E} := \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix}.$$

Considerando as matrizes de ponderação, associadas aos erros de ajuste, definidas como

$$\mathcal{R} := \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0,$$

foi provado que, se \mathcal{E} tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então a melhor

estimativa \hat{x}_{i+1} de x_i é gerada por

$$\hat{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

sendo a equação recursiva de Riccati associada a ela dada por

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Observe que, como as expressões para o filtro e para a equação recursiva de Riccati valem tanto para o caso filtrado como para o caso preditor, considerando os modelos espaço de estado usual (3.1) e singular nominal (4.1), as notações $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e $\hat{x}_{i+1|i}$ serão suprimidas. Sendo assim, as estimativas ótimas serão dadas apenas por \hat{x}_{i+1} .

Considere também as seguintes definições

$$e_i := \begin{bmatrix} 0 & \dots & I & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad M(P) := \Omega^{-1}(P),$$

$$\Omega(P) := \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

sendo e_i e $M(P)$ decompostos em blocos de acordo com a partição de $\Omega(P)$. M é particionada como M_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$ e o vetor de blocos e_i possui a matriz identidade na i -ésima posição do

bloco e matrizes nulas nas demais posições.

A partir de (5.3) e (5.4), tem-se que as expressões para o filtro em regime permanente e a EAR correspondente são dadas, respectivamente, por

$$\hat{x}_{i+1} = e_6^T \Omega^{-1}(P) (e_1 \hat{x}_i + e_3 \mathcal{Z}_i) \quad (5.6)$$

e

$$P = -e_6^T \Omega^{-1}(P) e_6. \quad (5.7)$$

Definição 5.1.1 *O sistema dinâmico descrito por (5.1) é*

- (i) *detectável, se $\lambda \mathcal{E} - \mathcal{F}$ tem posto coluna pleno para todo $|\lambda| \geq 1$;*
- (ii) *estabilizável, se $\begin{bmatrix} \lambda \mathcal{E} - \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo $|\lambda| \geq 1$;*

Observação 4 *Note que o critério de posto estabelecido para a condição de estabilizabilidade do sistema (5.1) é uma extensão natural do teste PBH (Popov-Belevitch-Hautus) para a classe de sistemas singulares. De fato, se os parâmetros do modelo forem assumidos*

$$E = I, \quad K_w = 0, \quad K_v = I, \quad e \quad G_v = 0,$$

a condição PBH usual é obtida.

Lema 5.1.1 [40] *Considere o sistema (5.1) detectável. Então, existe uma matriz \mathcal{M} , inversa à esquerda de \mathcal{E} , isto é, $\mathcal{M}\mathcal{E} = I$, tal que $\mathcal{M}\mathcal{F}$ é estável.*

Na sequência serão apresentados alguns lemas auxiliares, utilizados posteriormente nas provas dos resultados principais deste capítulo.

O próximo lema mostra que a matriz P pode ser escrita através de uma maneira alternativa, suprimindo-se a inversa do bloco matricial central. Também são estabelecidas duas relações matriciais fundamentais nas provas dos demais resultados.

Lema 5.1.2 *Se*

$$P = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

então $P = LRL^T$ com

$$L = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Além disto, definindo $K := -P$ tem-se

$$\begin{aligned} LR + KH^T &= 0 \\ LH &= I. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Prova: A matriz P é dada por (5.6) e pelo Lema ¹ pode ser reescrita como

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Definindo L como em (5.9) obtém-se $P = LRL^T$. Assumindo $K := -P$ segue que

$$\begin{bmatrix} L & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ou seja, $\begin{bmatrix} L & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}.$ ◊

Na sequência encontra-se um resultado importante, consequência direta do lema anterior. Nele utilizam-se matrizes auxiliares $M_{i,j}$ para que, tanto a estimativa filtrada (5.6), quanto a EAR (5.7), sejam reescritas sem que a inversa do bloco matricial intermediário seja explicitada.

Lema 5.1.3 *A estimativa filtrada ótima (5.6) e sua EAR associada (5.7) podem ser reescritas*

¹ **Lema [40]** Seja R semidefinida positiva e H posto coluna pleno. Então

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger + \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \right) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = 0.$$

como

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1} &= M_{61}\hat{x}_i + M_{63}\mathcal{Z}_i \\ &= -M_{63}\mathcal{F}\hat{x}_i + M_{63}\mathcal{Z}_i\end{aligned}\quad (5.11)$$

e

$$\begin{aligned}P &= M_{61}PM_{61}^T + M_{62}\mathcal{R}M_{62}^T \\ &= M_{63}(\mathcal{F}P\mathcal{F}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T)M_{63}^T\end{aligned}\quad (5.12)$$

respectivamente.

Prova: Através do Lema 5.1.2 segue que

$$\begin{bmatrix} M_{41} & M_{42} & M_{43} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\quad (5.13)$$

e

$$P = \begin{bmatrix} M_{41} & M_{42} & M_{43} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{41} & M_{42} & M_{43} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} \end{bmatrix}^T.\quad (5.14)$$

A partir de (5.13), é simples verificar que $M_{61} + M_{63}\mathcal{F} = 0$ e $M_{62} + M_{63}\mathcal{G} = 0$. Logo P satisfaz (5.12).

Como \hat{x}_{i+1} é dado por (5.6), $M_{61} := e_6^T \Omega^{-1}(P) e_1$ e $M_{63} := e_6^T \Omega^{-1}(P) e_3$, a equação (5.11) é obtida.

◇

Lema 5.1.4 [34] Para matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dadas, a equação de Stein

$$S - BSA = \Gamma\quad (5.15)$$

tem uma única solução, se e só se, $\lambda_r \mu_s \neq 1$ para todo $\lambda_r \in \sigma(A)$ e $\mu_s \in \sigma(B)$.

◇

O próximo resultado é auxiliar, uma vez que é utilizado na prova do Lema 5.3.9, apresentado na Seção 5.3.

Lema 5.1.5 *Seja E posto coluna pleno, $\begin{bmatrix} R_i & E \end{bmatrix}$ posto linha pleno, R_i simétrica semidefnida positiva e considere as seguintes definições para $i = 1, 2$*

$$J_i = - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_i & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad e \quad U_i := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_i & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Então, as seguintes sentenças são válidas

(i) $J_1 - J_2 = U_1 (R_1 - R_2) U_2^T$;

(ii) $U_1 - U_2 = U_2 (R_1 - R_2) \left(\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)$;

(iii) Se $R_1 \geq R_2$ então $J_1 \geq J_2$.

Prova: (i) Defina as correspondentes funções matriciais $\Upsilon_i = \Upsilon(J_i) = \begin{bmatrix} R_i & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}$.

Então

$$J_1 - J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (\Upsilon_2^{-1} - \Upsilon_1^{-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \Upsilon_1^{-1} (\Upsilon_1 - \Upsilon_2) \Upsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Mas $\Upsilon_1 - \Upsilon_2 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 - R_2) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ e, portanto

$$J_1 - J_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \Upsilon_1^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 - R_2) \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \Upsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Lembrando que Υ_2^{-1} é simétrica tem-se

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \Upsilon_1^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 - R_2) \left(\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \Upsilon_2^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} (R_1 - R_2) \left(\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Logo a relação (i) é obtida.

(ii) A prova da relação (ii) é análoga à demonstração elaborada para (i).

(iii) Por (i) e (ii) tem-se que

$$J_1 - J_2 = U_2 \left[I + (R_1 - R_2) \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] (R_1 - R_2) U_2^T. \quad (5.19)$$

Como $R_1 - R_2 \geq 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= U_2 (R_1 - R_2)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left[I + (R_1 - R_2)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & E \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right) (R_1 - R_2)^{\frac{1}{2}} \right] (R_1 - R_2)^{\frac{1}{2}} U_2^T. \end{aligned}$$

Portanto, $J_1 - J_2 \geq 0$. ◇

5.2 Estabilidade

Para garantir um desempenho apropriado do FSN em regime permanente, serão enunciados e demonstrados teoremas que garantem a estabilidade deste filtro quando os parâmetros do modelo são invariantes no tempo. Em particular, será determinada a existência e unicidade de uma solução estabilizante P para a EAR (5.12).

Definição 5.2.1 *P é uma solução estabilizante da EAR (5.12) se P satisfaz (5.12) e M_{61} é estável.*

Utilizando as definições 5.1.1 e 5.2.1, apresenta-se a seguir o principal resultado desta seção, que mostra a estabilidade do FSN em regime permanente.

Teorema 5.2.1 *Suponha que o sistema (5.1) é detectável e estabilizável e $\mathcal{R} > 0$. Considere o filtro em regime permanente (5.11) com P dada por (5.12). Neste caso, se existir uma solução semidefinida positiva P para a EAR, segue que ela é estabilizante, ou seja, o FSN em regime permanente é estável.*

Prova: Suponha que exista uma solução semidefinida positiva P para a EAR (5.12). Para garantir a estabilidade de (5.11), deve-se mostrar que $M_{63}\mathcal{F}$ é estável.

Suponha, por contradição, que $M_{63}\mathcal{F}$ não é estável. Então, existe um número complexo λ e um vetor v , tal que $|\lambda| \geq 1$ e $-v^T M_{63}\mathcal{F} = \lambda v^T$. No entanto, através do Lema 5.1.3 sabe-se que

$$M_{63}\mathcal{E} = I. \quad (5.20)$$

Pré-multiplicando (5.20) por λv^T obtém-se $\lambda v^T M_{63}\mathcal{E} = \lambda v^T$ e como $\lambda v^T = -v^T M_{63}\mathcal{F}$ segue que

$$\begin{aligned} \lambda v^T M_{63}\mathcal{E} &= -v^T M_{63}\mathcal{F} \\ v^T M_{63}(\lambda\mathcal{E} + \mathcal{F}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Agora, pré-multiplicando (5.12) por v^T e pós-multiplicando por v , tem-se

$$v^T P v = v^T (M_{63}\mathcal{F}) P (M_{63}\mathcal{F})^T v + v^T M_{63}\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T M_{63}^T v.$$

Desde que $\lambda v^T = -v^T M_{63}\mathcal{F}$, a equação acima torna-se

$$v^T P v = \lambda v^T P (\lambda v^T)^T + v^T M_{63}\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T M_{63}^T v. \quad (5.22)$$

Assim,

$$(|\lambda|^2 - 1)v^T P v + v^T M_{63}\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T M_{63}^T v = 0. \quad (5.23)$$

Por hipótese, tem-se $|\lambda| \geq 1$, $P \geq 0$ e $\mathcal{R} > 0$. Então

$$(|\lambda|^2 - 1)v^T P v \geq 0 \quad \text{e} \quad (5.24)$$

$$v^T M_{63}\mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T M_{63}^T v \geq 0. \quad (5.25)$$

Por (5.23), (5.24), e (5.25) segue que

$$v^T M_{63}\mathcal{G} = 0 \quad (5.26)$$

e por (5.21) e (5.26) obtém-se

$$v^T M_{63}(\left[\lambda \mathcal{E} + \mathcal{F} \quad \mathcal{G}\right]) = 0 \quad \text{com} \quad |\lambda| \geq 1. \quad (5.27)$$

Como M_{63} tem posto linha pleno, tem-se que $v \neq 0$, se e somente se, $v^T M_{63} \neq 0$. Assim, em (5.27), $\left[\lambda \mathcal{E} + \mathcal{F} \quad \mathcal{G}\right]$ não possui posto linha pleno para $|\lambda| \geq 1$, ou seja, uma contradição é obtida. Então, $M_{63}\mathcal{F}$ é estável. \diamond

Supondo-se agora que existe uma solução estabilizante para a EAR, o próximo resultado garante sua unicidade e fecha a primeira parte deste capítulo.

Teorema 5.2.2 *Considere a EAR (5.7). Se a solução estabilizante existir, ela é única.*

Prova: Suponha que existam duas soluções estabilizantes P^1 e P^2 para (5.7) e defina as correspondentes funções matriciais $\Omega^1 = \Omega(P^1)$, $\Omega^2 = \Omega(P^2)$, $M^1 = M(P^1)$ e $M^2 = M(P^2)$. Logo,

$$P^1 - P^2 = M_{66}^2 - M_{66}^1 = e_6^T (M^2 - M^1) e_6 = e_6^T M^1 (\Omega^1 - \Omega^2) M^2 e_6.$$

Mas $\Omega^1 - \Omega^2 = e_1 (P^1 - P^2) e_1^T$, então

$$P^1 - P^2 = M_{61}^1 (P^1 - P^2) M_{61}^{2T}. \quad (5.28)$$

Como M_{61}^1 and M_{61}^2 são estáveis, pelo Teorema 5.1.4, a equação de Stein (5.28) possui solução única $P^1 - P^2 = 0$. Portanto, $P^1 = P^2$. \diamond

5.3 Convergência

Nesta seção serão apresentados resultados que garantem a convergência da equação recursiva de Riccati (5.4), ou seja, será mostrado que $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência monótona não decrescente, limitada superiormente. Os três resultados subsequentes são auxiliares, uma vez que somente são utilizados nas provas dos principais lemas e teoremas desta seção. No primeiro deles, a positividade de P_{i+1} é demonstrada. O segundo define uma recursão auxiliar F_{fi} e estabelece uma relação entre ela e a equação recursiva de Riccati. Finalmente, o terceiro resultado auxiliar faz uma comparação entre recursões de Riccati definidas com índices diferentes.

Lema 5.3.1 *Suponha que $P_i \geq 0$. Então P_{i+1} é uma matriz semidefinida positiva.*

Prova: Pelo Lema 5.1.3, as equações (5.7) e (5.12) são equivalentes. Assim,

$$P_{i+1} = M_{61,i} P_i M_{61,i}^T + M_{62,i} \mathcal{R} M_{62,i}^T.$$

Como $\mathcal{R} > 0$ e, por hipótese, $P_i \geq 0$, segue que $P_{i+1} \geq 0$. \diamond

Lema 5.3.2 *Considere as seguintes equações matriciais, para $i = 1, 2$*

$$\begin{aligned} P_{i+1}^i &:= -M_{66,i}^i \\ F_{fi}^i &:= M_{61,i}^i. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Então, as seguintes relações são obtidas

$$(i) \quad P_{i+1}^1 - P_{i+1}^2 = F_{fi}^1 (P_i^1 - P_i^2) F_{fi}^{2,T} \quad (5.30)$$

$$(ii) \quad F_{fi}^1 - F_{fi}^2 = F_{fi}^2 (P_i^1 - P_i^2) M_{11,i}^1. \quad (5.31)$$

Prova: A demonstração deste resultado é imediata. Para isto, basta fazer as seguintes identificações com as sentenças (i) e (ii) o Lema 5.1.5

$$\begin{aligned} J_1 &\leftarrow P_{i+1}^1, & J_2 &\leftarrow P_{i+1}^2 \\ R_1 &\leftarrow P_i^1, & R_2 &\leftarrow P_i^2 \\ U_1 &\leftarrow F_{fi}^1, & U_2 &\leftarrow F_{fi}^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

\diamond

Lema 5.3.3 *Considere (5.29) para $i = 1, 2$. Se $P_i^1 \geq P_i^2$, então $P_{i+1}^1 \geq P_{i+1}^2$.*

Prova: Esta prova segue novamente do Lema 5.1.5, item (iii). \diamond

O próximo resultado garante que a recursão de Riccati é uma sequência monótona não decrescente e é imprescindível para que a convergência seja mostrada.

Lema 5.3.4 *Suponha que $\mathcal{R} > 0$ e defina $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ por*

$$P_i := M_{63,i-1} (\mathcal{F} P_{i-1} \mathcal{F}^T + \mathcal{G} \mathcal{R} \mathcal{G}^T) M_{63,i-1}^T \quad (5.33)$$

com $P_0 = 0$. Então $\{P_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência monótona não decrescente.

Prova: Desde que $\mathcal{R} > 0$ e P_i é dado por (5.33) tem-se que para $P_0 = 0$, segue $P_1 \geq 0$ e $P_1 - P_0 \geq 0$. Considere, por indução, que a hipótese $P_i - P_{i-1} \geq 0$ é satisfeita. Pelo Lema 5.3.3, se $P_i \geq P_{i-1}$ então $P_{i+1} \geq P_i$. Assim, segue que

$$0 = P_0 \leq P_1 \leq \dots \leq P_i \leq P_{i+1} \leq \dots$$

◇

O próximo resultado mostra uma maneira alternativa de escrever a recursão de Riccati (5.4), semelhante à forma apresentada em [40].

O objetivo desta nova formulação é explicitar os ganhos $L_{p,i}$ nas formas equivalentes da sequência P_{i+1} que serão definidas e demonstradas na sequência deste capítulo, especialmente no Lema 5.3.6.

Lema 5.3.5 *A recursão de Riccati dada por*

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

pode ser reescrita como

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}P_i\mathcal{F}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T & \mathcal{E} \\ \mathcal{E}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Prova: A recursão P_{i+1} é dada por (5.34) se e somente se o seguinte sistema de equações tem uma única solução

$$\begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{G}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Esta equação matricial equivale ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} P_i a + d = 0 \\ \mathcal{R}b + e = 0 \\ \mathcal{F}d + \mathcal{G}e - \mathcal{E}P_{i+1} = 0 \\ a + \mathcal{F}^T c = 0 \\ b + \mathcal{G}^T c = 0 \\ \mathcal{E}^T c = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -P_i a \\ e = -\mathcal{R}b \\ \mathcal{E}P_{i+1} = \mathcal{G}e + \mathcal{F}d \\ a = -\mathcal{F}^T c \\ b = -\mathcal{G}^T c \\ \mathcal{E}^T c = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = P_i \mathcal{F}^T c \\ e = -\mathcal{R}b \\ \mathcal{E}P_{i+1} = \mathcal{G}e - \mathcal{F}P_i a \\ a = -\mathcal{F}^T c \\ b = -\mathcal{G}^T c \\ \mathcal{E}^T c = I \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} d = P_i \mathcal{F}^T c \\ e = -\mathcal{R}b \\ \mathcal{E}P_{i+1} = -\mathcal{G}\mathcal{R}b - \mathcal{F}P_i a \\ a = -\mathcal{F}^T c \\ b = -\mathcal{G}^T c \\ \mathcal{E}^T c = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = P_i \mathcal{F}^T c \\ e = \mathcal{R}\mathcal{G}^T c \\ \mathcal{E}P_{i+1} = \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T c + \mathcal{F}P_i \mathcal{F}^T c \\ a = -\mathcal{F}^T c \\ b = -\mathcal{G}^T c \\ \mathcal{E}^T c = I \end{cases}. \quad (5.37)$$

Como os parâmetros $\{a, b, d, e\}$ podem ser escritos em termos de c e P_{i+1} , o sistema (5.36) tem solução se e somente se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}P_i \mathcal{F}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T & \mathcal{E} \\ \mathcal{E}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

tem solução.

Assim, segue que P_{i+1} é dado por (5.35). \diamond

A partir do resultado apresentado na sequência, as matrizes do sistema (5.1) serão posicionadas de forma correspondente à parte dinâmica e à medida do sistema original, como foi

feito em (5.2), ou seja

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Lema 5.3.6 *A recursão de Riccati dada por (5.35) pode ser reescrita como*

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{p,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

particionando-se o sistema (5.1) como em (5.39), sendo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i &:= \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T - (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T \\ &- L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T) \end{aligned} \quad (5.41)$$

e

$$\mathfrak{R}_{p,i} := \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T, \quad \text{e } L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) = (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T). \quad (5.42)$$

Prova: Escrevendo \mathcal{F} e \mathcal{G} como em (5.39), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} P_i \mathcal{F}^T + \mathcal{G} \mathcal{R} \mathcal{G}^T &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d^T & \mathcal{F}_m^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{G}_m^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \\ \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.43)$$

uma vez que (5.4) equivale a

$$P_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_d & \mathcal{G}_d & \mathcal{E}_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_m & \mathcal{G}_m & \mathcal{E}_m \\ 0 & 0 & \mathcal{F}_d^T & \mathcal{F}_m^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{G}_d^T & \mathcal{G}_m^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Portanto a Equação (5.35) pode ser reescrita como

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T & \mathcal{E}_d \\ \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Como $\mathcal{R} > 0$ e $P_i \geq 0$ segue que (5.43) é semidefinida positiva. Assim, o Lema ² garante que existe $L_{p,i}$ tal que

$$\begin{aligned} L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) &= (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) \text{ e} \\ (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T &= (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Portanto, o sistema (5.45) passa a ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) & \mathcal{E}_d \\ (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T & (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Pela Proposição ³ segue que definindo a variável auxiliar $\mathfrak{R}_{p,i} := (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T)$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} & \mathcal{E}_d \\ \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & \mathfrak{R}_{p,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\text{sendo } \mathcal{X} := \begin{bmatrix} I & L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i}^- \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i}^- L_{p,i}^T & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathfrak{R}_{p,i}^{-T} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & I \end{bmatrix}.$$

² **Lema** Toda matriz Hermitiana semidefinida positiva $P \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ pode ser particionada da seguinte forma $P = \begin{bmatrix} A & LD \\ DL^* & D \end{bmatrix}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

³ **Proposição** (estendido [50]) Seja $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \geq 0$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Então para cada inversa A^- e D^- de A e D , valem as identidades matriciais

$$P = \begin{bmatrix} I_n & BD^- + Z(I - DD^-) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^- B^T & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ [BD^- + W(I - DD^-)]^* & I_m \end{bmatrix}$$

para matrizes Z e W arbitrárias de dimensão compatível.

Lembrando que para uma inversa generalizada qualquer $DD^{-}D = D$, segue que

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc} I & L_{p,i}\mathfrak{R}_{p,i}\mathfrak{R}_{p,i}^- & \\ 0 & I & \\ & 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & 0 & \\ & 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mathfrak{R}_{p,i}^- \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & I \end{bmatrix} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I & -L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i}^- \\ 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix} \\
& \times \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & \\ \mathfrak{R}_{p,i}^- \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & I & \\ & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} d \\ c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\
& \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & 0 & \\ & 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \\ 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & \\ \mathfrak{R}_{p,i}^- \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & I & \\ 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} d \\ c \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} \\
& = \left[\begin{array}{ccc} I & -L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i}^- & \\ 0 & I & \\ & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \\
& \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & 0 & \\ & 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \\ 0 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} d \\ c + \mathfrak{R}_{p,i}^- \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T d \\ -P_{i+1} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se o termo $L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T - L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T & 0 & \\ & 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \chi \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} \\
& = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \\ & & I \end{array} \right]^T.
\end{aligned}$$

Utilizando $\begin{cases} L_{p,i} \mathfrak{R}_{p,i} = \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T \\ \mathfrak{R}_{p,i} L_{p,i}^T = \mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T \end{cases}$ tem-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}_i & 0 \\ 0 & \mathfrak{R}_{p,i} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \chi \\ -P_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

com \mathbb{P}_i e $\mathfrak{R}_{p,i}$ dados por (5.42) e a recursão P_{i+1} dada por (5.40). \diamond

Lema 5.3.7 *A expressão*

$$\mathbb{P}_i := \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T - (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T \quad (5.49)$$

dada no Lema 5.3.6 para \mathbb{P}_i pode ser reescrita como

$$\mathbb{P}_i := \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T). \quad (5.50)$$

Prova: Pelo Lema 5.3.6 tem-se que \mathbb{P}_i é dado por (5.41). Como $L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) = (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T)$ segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i &:= \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T - (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T \\ &\quad - L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T), \end{aligned} \quad (5.51)$$

ou seja, $\mathbb{P}_i = \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T)$. \diamond

Lema 5.3.8 *Considere a sequência arbitrária $\{N_i\}_{i=0}^\infty$ dada e*

$$Y_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_i &:= \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + N_i (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) N_i^T - (\mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) N_i^T \\ &\quad - N_i (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Então Y_{i+1} pode ser reescrita como

$$Y_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

sendo

$$\begin{aligned} Y_{11} &:= \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i - L_{y,i})^T - L_{y,i} (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) \\ \mathfrak{R}_{y,i} &:= \mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Prova: Vamos considerar apenas \mathbb{Y}_i dada por (5.53) na Equação (5.52). Definindo

$$\begin{aligned} A &:= \mathcal{F}_{d,i} Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T, \quad \mathfrak{R}_{y,i} := (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T), \\ B &:= (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_m \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T), \quad C := (\mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T), \end{aligned} \quad (5.56)$$

tem-se $\mathbb{Y}_i = A + N_i \mathfrak{R}_{y,i} N_i^T - C N_i^T - N_i B$.

Como $N_i = L_{y,i} + (N_i - L_{y,i})$ e $N_i^T = L_{y,i}^T + (N_i^T - L_{y,i}^T)$ segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_i &= A + N_i \mathfrak{R}_{y,i} N_i^T - C N_i^T - N_i B \\ &= A + (L_{y,i} + (N_i - L_{y,i})) \mathfrak{R}_{y,i} (L_{y,i}^T + (N_i^T - L_{y,i}^T)) - C (L_{y,i}^T + (N_i^T - L_{y,i}^T)) \\ &\quad - (L_{y,i} + (N_i - L_{y,i})) B \\ &= A + (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i}) (L_{y,i}^T + (N_i^T - L_{y,i}^T)) - C L_{y,i}^T - C (N_i^T - L_{y,i}^T) \\ &\quad - L_{y,i} B - (N_i - L_{y,i}) B \\ &= A + L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} L_{y,i}^T + L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} (N_i^T - L_{y,i}^T) + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} L_{y,i}^T \\ &\quad + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i^T - L_{y,i}^T) - C L_{y,i}^T - C (N_i^T - L_{y,i}^T) - L_{y,i} B - (N_i - L_{y,i}) B \\ &= A + L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} L_{y,i}^T + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i^T - L_{y,i}^T) + (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} - C) (N_i^T - L_{y,i}^T) \\ &\quad + (N_i - L_{y,i}) (\mathfrak{R}_{y,i}^T - B) - C L_{y,i}^T - L_{y,i} B. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Observe que $L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} = C$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_i &= A + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i^T - L_{y,i}^T) + (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} - C) (N_i^T - L_{y,i}^T) \\ &\quad + (N_i - L_{y,i}) (\mathfrak{R}_{y,i} L_{y,i}^T - B) - (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} - C) L_{y,i}^T - L_{y,i} B \\ &= A + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i^T - L_{y,i}^T) + (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} - C) (N_i^T - L_{y,i}^T) \\ &\quad + (N_i - L_{y,i}) (\mathfrak{R}_{y,i} L_{y,i}^T - B) - (L_{y,i} \mathfrak{R}_{y,i} - C) L_{y,i}^T - L_{y,i} B. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Portanto, Y_{i+1} é dado por (5.54) sendo Y_{11} e $\mathfrak{R}_{y,i}$ dados por (5.55).

◇

O lema a seguir mostra que uma sequência Y_{i+1} produzida através de um ganho arbitrário N_i supera P_{i+1} gerada pelo ganho deduzido nos lemas anteriores. Para isso, o lema estabelece uma comparação entre as duas sequências.

Lema 5.3.9 - Considere $\begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix}$ posto coluna pleno, $\mathcal{R} > 0$, a sequência arbitrária $\{N_i\}_{i=0}^\infty$ dada e também uma matriz $Y_0 \geq 0$. Seja a sequência $\{Y_i\}_{i=0}^\infty$ definida como

$$Y_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{Y}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_i &:= \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + N_i (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) N_i^T \\ &- (\mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T) N_i^T - N_i (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Seja P_0 uma matriz em que $0 \leq P_0 \leq Y_0$ e defina a sequência $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ como

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{p,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i &:= \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T \\ &- L_{p,i} (\mathcal{F}_m P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T) - (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) L_{p,i}^T. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Então $0 \leq P_i \leq Y_i$ para $i = 0, 1, 2, \dots$

Prova: Nesta demonstração, será utilizada a notação abreviada $Y_{i+1} = f(Y_i, N_i)$ para equação (5.59). Então, pode-se também escrever $P_{i+1} = f(P_i, L(P_i))$ com $L_{p,i} = L(P_i)$.

A prova é por indução. A relação $0 \leq P_0 \leq Y_0$ é dada e assume-se que $0 \leq P_i \leq Y_i$. Então define-se $\hat{P}_{i+1} = P_{Y,i+1} = f(Y_i, L(Y_i))$ com $L_{y,i} = L(Y_i)$ e será primeiro provado que $\hat{P}_{i+1} \leq Y_{i+1}$, ou seja, $f(Y_i, L_{y,i}) \leq f(Y_i, N_i)$.

Para simplificar a notação, escreva $\mathfrak{R}_{y,i} := (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T)$. Escreva também $N_i = L_{y,i} + (N_i - L_{y,i})$ em (5.59).

Pelo Lema 5.3.8 temos que a sequência Y_{i+1} também é dada por

$$Y_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

sendo $Y_{11} = \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i - L_{y,i})^T - L_{y,i} (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T)$.

Por (5.61) e pelo Lema 5.3.7 segue que

$$\hat{P}_{i+1} = f(Y_i, L_{y,i}) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

sendo $\hat{Y}_i = \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{y,i} (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T)$.

Assim, escreve-se (5.63) da seguinte forma

$$Y_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Y}_i + (N_i - L_{y,i}) \mathfrak{R}_{y,i} (N_i - L_{y,i})^T & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

Como $\mathfrak{R}_{y,i} := (\mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T) > 0$, pois $\{Y_i, \mathcal{R}\} > 0$ e \hat{Y}_i é o complemento de Schur [47] com respeito ao elemento (2, 2) de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \\ \mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \\ \mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{F}_m Y_i \mathcal{F}_m^T + \mathcal{G}_{m,i} \mathcal{R} \mathcal{G}_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix} Y_i \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d^T & \mathcal{F}_m^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_{m,i} \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d^T & \mathcal{G}_m^T \end{bmatrix} > 0$$

segue que $\hat{Y}_i > 0$.

Aplicando o item (iii) do Lema 5.1.5 com J_1 dado por \hat{P}_{i+1} e J_2 dado por Y_{i+1} , obtém-se que $Y_{i+1} \geq \hat{P}_{i+1}$, ou $f(Y_i, N_i) \geq f(Y_i, L_{y,i})$. Então, a escolha do ganho $L(Y_i) = L_{y,i}$ fornece um

limite inferior \hat{P}_{i+1} para Y_{i+1} .

Aplicando o mesmo argumento para a sequência $\{P_i\}$ mostra-se que

$$\hat{Y}_{i+1} = f(P_i, L(Y_i)) \geq f(P_i, L(P_i)) = P_{i+1}$$

ou seja, encontra-se um limite inferior P_{i+1} para \hat{Y}_{i+1} .

Finalmente resta mostrar que $\hat{Y}_{i+1} \leq \hat{P}_{i+1}$. Tem-se que

$$\hat{P}_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{y,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \hat{Y}_i = \mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{y,i} (\mathcal{F}_d Y_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T)^T$$

e

$$\hat{Y}_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{P}_i & 0 & \mathcal{E}_d \\ 0 & \mathfrak{R}_{p,i} & \mathcal{E}_m \\ \mathcal{E}_d^T & \mathcal{E}_m^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \hat{P}_i = \mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T - L_{p,i} (\mathcal{F}_d P_i \mathcal{F}_d^T + \mathcal{G}_d \mathcal{R} \mathcal{G}_d^T)^T.$$

Então, pela hipótese de indução ($P_i \leq Y_i$) e pelo Lema 5.1.5 segue que $\hat{Y}_{i+1} \leq \hat{P}_{i+1}$.

Combinando a desigualdade acima com $\hat{Y}_{i+1} \geq P_{i+1}$ tem-se

$$P_{i+1} \leq \hat{Y}_{i+1} \leq \hat{P}_{i+1}.$$

Se, por hipótese, $P_i \geq 0$, então aplicando o Lema 5.3.4 segue que $0 \leq P_i \leq P_{i+1}$.

Então,

$$0 \leq P_{i+1} \leq \hat{Y}_{i+1} \leq \hat{P}_{i+1} \leq Y_{i+1},$$

ou seja, $0 \leq P_{i+1} \leq Y_{i+1}$ e a indução está completa. \diamond

A comparação entre as sequências estabelecida no Lema 5.3.9 será parte da demonstração do próximo resultado que, por sua vez, garante que a recursão de Riccati possui limite superior P^s de P_{i+1} .

Lema 5.3.10 *Considere a sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ definida por*

$$P_{i+1} := M_{63,i} (\mathcal{F} P_i \mathcal{F}^T + \mathcal{G} \mathcal{R} \mathcal{G}^T) M_{63,i}^T. \quad (5.67)$$

Se o sistema é detectável e estabilizável, então para qualquer condição inicial P_0 , a sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ é limitada superiormente, ou seja, existe uma matriz P^s tal que $0 \leq P_{i+1} \leq P^s$, para $i \geq 0$.

Prova: Do Teorema 5.2.1 segue que se o sistema é estabilizável, então existe uma matriz $M_{63}\mathcal{F}$ tal que $M_{63}\mathcal{F}$ é estável, ou seja, $\|\lambda(M_{63}\mathcal{F})\| < 1$. Gere a sequência $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$ de $Z_0 = P_0$ e a relação recorrente $Z_{i+1} = f(Z_i, M_{63}) = (M_{63}\mathcal{F})Z_i(M_{63}\mathcal{F})^T$. Aplicando o Lema 5.3.9 tem-se que $0 \leq P_{i+1} \leq Z_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ e para $j = 1, 2, \dots$

$$Z_{j+1} - Z_j = M_{63} (\mathcal{F} (Z_j - Z_{j-1}) \mathcal{F}^T) M_{63}^T.$$

Logo

$$Z_j - Z_{j-1} = (M_{63}\mathcal{F})^{j-1} (Z_1 - Z_0) (M_{63}\mathcal{F})^T.$$

Como

$$Z_n = Z_0 + \sum_{j=1}^n (Z_j - Z_{j-1}) \tag{5.68}$$

substituindo $(Z_j - Z_{j-1})$ na equação acima tem-se que

$$Z_n = Z_0 + \sum_{j=1}^n (M_{63}\mathcal{F})^{j-1} (Z_1 - Z_0) (M_{63}\mathcal{F})^T.$$

Como $M_{63}\mathcal{F}$ é estável, pode-se definir $\kappa := \|M_{63}\mathcal{F}\| < 1$ ⁴ e segue que

$$\|Z_n\| \leq \|Z_0\| + \|Z_1 - Z_0\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \kappa^{2j-2} \right) =: \kappa_0 \tag{5.69}$$

e κ_0 é independente de n . Então, tomando $P^s = \kappa_0 I$, obtemos $P_n \leq Z_n \leq \|Z_n\| I \leq \kappa_0 I = P^s$. Logo, P_{i+1} é limitada superiormente. \diamond

Abaixo encontra-se o principal resultado desta seção, conclusivo para a prova da convergência da equação recursiva de Riccati.

⁴**Teorema [23]** Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então $\rho(A) \leq \|A\|$, sendo $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é um autovalor de } A\}$ e $\|A\|$ é a norma espectral de A .

Teorema 5.3.1 *Suponha que o sistema seja detectável, estabilizável e $\mathcal{R} > 0$. Defina uma sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ por*

$$P_{i+1} = M_{63,i} (\mathcal{F}P_i\mathcal{F}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T) M_{63,i}^T \quad (5.70)$$

com $P_0 \geq 0$. Então, existe uma única matriz $P^s \geq 0$ tal que $P_{i+1} \rightarrow P^s$ quando $i \rightarrow \infty$. O limite P^s é a solução da EAR

$$P = M_{63} (\mathcal{F}P\mathcal{F}^T + \mathcal{G}\mathcal{R}\mathcal{G}^T) M_{63}^T. \quad (5.71)$$

Prova: Através do Lema 5.3.4 mostra-se que $0 \leq P_i \leq P_{i+1}$, ou seja, $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência monótona não decrescente. Como, por hipótese, o sistema é detectável e estabilizável, aplicando o Lema 5.3.10 segue que a sequência P_{i+1} é limitada superiormente. Combinando estes resultados com o Teorema 5.2.1 e Lema 5.3.1 que, por sua vez, garantem que $M_{63}\mathcal{F}$ é estável e a solução estabilizante da EAR é única, a demonstração é concluída. \diamond

5.4 Exemplo Numérico

Considere o sistema descrito por (5.1) para o caso filtrado, com as matrizes de parâmetros dadas por

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G_w = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 6 \end{bmatrix}, \quad G_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$H = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad J = 0, \quad K_w = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad K_v = 1$$

e as matrizes de ponderação dos erros w_i and v_i (com termo cruzado) dadas respectivamente por

$$Q = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0.1, \quad S = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.05 \end{bmatrix}.$$

A Figura 5.1 mostra a convergência do máximo valor singular da matriz $P_{i+1|i+1}$, calculada de acordo com a EAR (5.4) do filtro preditor (5.3), com $P_{0|0} = 0$.

Considere, agora, o sistema descrito por (5.1) para o caso preditor com as matrizes de

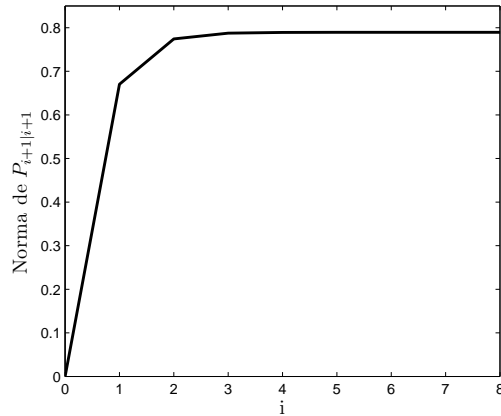


Figura 5.1: Evolução de $P_{i+1|i+1}$

parâmetros dadas por

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \\ 0.34 & 0.21 \end{bmatrix}, \quad G_w = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 6 \\ 0.87 & 0.62 \end{bmatrix}, \quad G_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.7 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad K_w = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad K_v = 1;$$

e as seguintes matrizes de ponderação

$$Q = \begin{bmatrix} 7 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.001 \end{bmatrix}; \quad R = 0.5; \quad S = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.0001 \end{bmatrix}.$$

A Figura 5.2 mostra a convergência do máximo valor singular da matriz $P_{i+1|i}$, calculada de acordo com a EAR (5.4) do filtro preditor (5.3), com condição inicial dada por $P_{0|-1} = 0$.

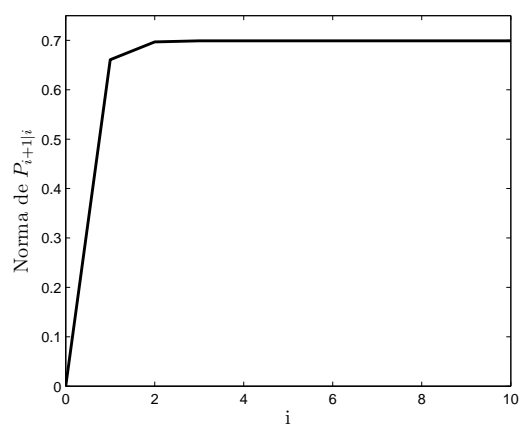


Figura 5.2: Evolução de $P_{i+1|i}$

Capítulo 6

Estimativa Robusta para Sistemas Dinâmicos Singulares

Neste capítulo são apresentadas as estimativas robustas ótimas nas formas filtrada e preditora, deduzidas com base na combinação das técnicas de otimização detalhadas no Capítulo 2. Para isso, são feitas modificações no modelo singular apresentado no Capítulo 4, ou seja,

$$E_{i+1} \leftarrow E_{i+1} + \delta E_{i+1}, F_i \leftarrow F_i + \delta F_i, H_i \leftarrow H_i + \delta H_i, J_i \leftarrow J_i + \delta J_i$$

sendo os erros de ajuste reescritos como

$$\begin{bmatrix} G_{w,i} w_i + G_{v,i} v_i \\ K_{w,i} w_i + K_{v,i} v_i \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} (G_{w,i} + \delta G_{w,i}) w_i + (G_{v,i} + \delta G_{v,i}) v_i \\ (K_{w,i} + \delta K_{w,i}) w_i + (K_{v,i} + \delta K_{v,i}) v_i \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Algoritmos recursivos para os Filtros Singulares Robustos (FSRs) e correspondentes equações recursivas de Riccati são obtidos, sendo que as estruturas matriciais das equações são simples e simétricas, facilitando posterior análise das propriedades de estabilidade e convergência deduzidas no Capítulo 7.

Os resultados apresentados neste capítulo generalizam os resultados obtidos em [29] e [42]. Os FSRs serão deduzidos para o caso mais geral, baseados no modelo descrito nas equações (6.2) e (6.14).

Formas matriciais equivalentes para os filtros serão mostradas, objetivando a obtenção de estruturas mais próximas às obtidas para os FSNs, apresentados no Capítulo 4. Essas equivalências

são importantes, uma vez que facilitam a análise das propriedades de estabilidade e convergência do filtro robusto em regime permanente, bem como recaem em expressões já conhecidas dos FSNs [4] e [5].

A contribuição deste capítulo está na determinação de soluções para problemas de filtragem robusta combinando a utilização das teorias de otimização mínimos quadrados regularizados e funções penalidade, através da extensão da estratégia adotada no Capítulo 4.

6.1 Estabelecimento do Problema de Filtragem Robusta

Considere o seguinte sistema dinâmico singular sujeito a incertezas paramétricas construído a partir da modificação do modelo (4.1)

$$\begin{aligned} (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + \tilde{v}_i, \\ z_{i+1} &= (H_{i+1} + \delta H_{i+1}) x_{i+1} + (J_i + \delta J_i) x_i + \tilde{v}_i, \quad i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

sendo que $x_i \in \mathbb{R}^n$ é a variável descritora (ou semi-estado) que descreve o comportamento interno do sistema; $z_i \in \mathbb{R}^p$ é o sinal observado, \tilde{v}_i é o erro de ajuste do modelo definido como:

$$\tilde{v}_i := \begin{bmatrix} \tilde{w}_i \\ \tilde{v}_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (G_{w,i} + \delta G_{w,i}) w_i + (G_{v,i+1} + \delta G_{v,i+1}) v_{i+1} \\ (K_{w,i} + \delta K_{w,i}) w_i + (K_{v,i+1} + \delta K_{v,i+1}) v_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

As matrizes E_i , F_i , $G_{w,i}$, $G_{v,i+1}$, H_{i+1} , J_i , $K_{w,i}$, e $K_{v,i+1}$ são assumidas conhecidas, de dimensões apropriadas, quadradas ou retangulares; δE_{i+1} , δF_i , $\delta G_{w,i}$, $\delta G_{v,i+1}$, δH_{i+1} , $\delta K_{w,i}$ e $\delta K_{v,i+1}$ são perturbações nos parâmetros do sistema nominal, variantes no tempo.

As incertezas paramétricas de (6.2) são modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & \delta E_{i+1} \\ \delta J_i & \delta K_i & \delta H_{i+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & N_{E_{i+1}} \\ N_{J_i} & N_{K_i} & N_{H_{i+1}} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

sendo que $N_{G_i} := \begin{bmatrix} N_{G_{w,i}} & N_{G_{v,i+1}} \end{bmatrix}$ e $N_{K_i} := \begin{bmatrix} N_{K_{w,i}} & N_{K_{v,i+1}} \end{bmatrix}$.

Observe que são consideradas incertezas em todas as matrizes do sistema, enquanto em [29] não há perturbações em $G_{w,i}$ e $K_{v,i+1}$ e em [42], somente há incertezas nas matrizes F_i , e $G_{w,i}$ do modelo no espaço de estado usual considerado.

O problema de ajuste ótimo para estimativas filtradas do sistema (6.2) é definido da seguinte maneira. Assuma que no passo i tem-se a estimativa *a priori* para o estado x_i e denote a estimativa inicial por $\hat{x}_{i|i}$. Além disso, suponha que há uma matriz de ponderação definida positiva $P_{i|i}$ para o erro de estimativa $(x_i - \hat{x}_{i|i})$. Para atualizar a estimativa de $\hat{x}_{i|i}$ para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, o seguinte funcional associado a (6.2) é proposto

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i := & \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \\ & & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \\ & \left(- \left(\begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ -\delta J_i \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ J_i & K_i & H_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & -\delta E_{i+1} \\ \delta J_i & \delta K_i & \delta H_{i+1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \\ & \times \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5)$$

com

$$\begin{aligned} \nu_i & := \begin{bmatrix} w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix}, \quad G_i := \begin{bmatrix} G_{w,i} & G_{v,i+1} \end{bmatrix}, \quad K_i := \begin{bmatrix} K_{w,i} & K_{v,i+1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{R}_i & := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix} \text{ e } \Xi_i := \mu_i^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

O problema de filtragem robusta é encontrar $\hat{x}_{i+1|i+1}$ que minimize \mathcal{J}_i , considerando o pior caso das perturbações, ou seja

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \max_{\delta_i} \mathcal{J}_i \quad (6.7)$$

sendo $\delta_i := \{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta J_i, \delta G_i, \delta K_i, \delta H_{i+1}\}$.

6.1.1 Estimativas Filtradas Robustas

Nesta seção expressões para as estimativas robustas ótimas na forma filtrada com a respectiva equação recursiva de Riccati são determinadas. Este resultado está apresentado em [9].

Note que o funcional quadrático proposto para solucionar o problema de filtragem está formulado de acordo com a teoria desenvolvida no Capítulo 2, modificando o problema proposto

para o modelo singular nominal apresentado no Capítulo 4.

O próximo resultado é o principal desta seção, que fornece expressões para as estimativas robustas ótimas na forma filtrada com a respectiva equação recursiva de Riccati.

Teorema 6.1.1 *Considere o sistema dinâmico singular (6.2) e o problema de otimização (6.7), sendo as incertezas paramétricas dadas por (6.4). Suponha*

$$\begin{bmatrix} E_{i+1}^T & H_{i+1}^T & N_{E_{i+1}}^T & N_{H_{i+1}}^T \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} F_i & G_i & E_{i+1} \\ J_i & K_i & H_{i+1} \\ N_{F_i} & N_{G_i} & N_{E_{i+1}} \\ N_{J_i} & N_{K_i} & N_{H_{i+1}} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

posto linha pleno para todo i . Assim, tem-se que as estimativas robustas filtradas $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e sua correspondente equação recursiva de Riccati são dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W}_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & A_i \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hat{X}_i & 0 \\ Z_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i &:= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_i := \begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ J_i & K_i & H_{i+1} \end{bmatrix} \\ N_{A_i} &:= \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & -N_{E_{i+1}} \\ N_{J_i} & N_{K_i} & N_{H_{i+1}} \end{bmatrix}, Z_{i+1} := \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \hat{X}_i := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Além disso, tem-se que

$$\hat{W}_i = (\Xi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T)^{-1}$$

sendo $\Xi_i := \mu_i^{-1} \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}^{-1}$ e $M_i := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix}$ para $\mu_i > 0$ fixado.

O parâmetro $\hat{\lambda}_i$ deve satisfazer a seguinte desigualdade $\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|$ e minimizar $G(\lambda)$ definida por (2.23).

Prova: Aplicando o Lema 2.2.2, segue que o problema de otimização (6.7) possui \hat{x} como solução e esta, por sua vez, é dada pela resolução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & A_i \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

A inversa é bem definida em (6.11) devido às hipóteses de posto linha pleno estabelecidas em (6.8). Esta informação fará mais sentido quando expressões equivalentes para (6.9) forem explicitadas na Seção 6.3, tornando a análise da invertibilidade mais confortável.

Ao escrevermos o sistema (6.11) em termos dos parâmetros originais do sistema (6.2), parte da quinta e sexta linhas é dada por

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_2^1 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ J_i & K_i & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{v}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_i \hat{x}_{i|i} \\ -J_i \hat{x}_{i|i} + z_{i+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_3^1 \\ \lambda_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & -N_{E_i} \\ N_{J_i} & N_{K_i} & N_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{v}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{F_i} \hat{x}_{i|i} \\ -N_{J_i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_2^1 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ J_i & K_i & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_3^1 \\ \lambda_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & N_{E_i} \\ N_{J_i} & N_{K_i} & N_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.12)$$

Dessa forma $\mathbb{Z}_{i+1} := \begin{bmatrix} 0 \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$ é definida. Através da mesma estratégia, determina-se $\hat{\mathbb{X}}_i$, ou seja, pela quarta linha do sistema (6.11) tem-se

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}_i - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{\nu}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^1 \\ \lambda_1^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{\nu}_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Assim, define-se $\hat{\mathbb{X}}_i := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é dado por (6.9).

A expressão para \hat{W}_i é obtida através do Lema 2.2.1,

$$\hat{W}_i^{-1} = \Xi_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T.$$

O parâmetro $\hat{\lambda}_i$ é obtido por meio das expressões (2.22)-(2.23) do Lema 2.2.1, ou seja, através da minimização da função $G(\lambda)$, quando

$$\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|$$

para $\mu_i > 0$ fixado.

Pelo Lema 2.2.2, segue que a matriz P é definida como parte da expressão de \hat{x} , sendo dada pela Equação (2.28). Assim, $P_{i+1|i+1}$ dada em (6.9) é obtida. \diamond

Observação 5 *Conforme o parâmetro μ_i é fixado para valores muito grandes, segue que o valor de $\hat{\lambda}_i$ cresce rapidamente e $\hat{\lambda}_i^{-1}$ tende a zero. Esta consideração foi feita no Capítulo 4 buscando encontrar a estimativa ótima, estando de acordo com o Método de Funções Penalidade.*

Observação 6 *A estimativa suavizada robusta $\hat{x}_{i|i+1}$ pode ser determinada a partir da solução do problema de filtragem robusta proposto em (6.7). Tal estimativa será explicitada na Seção 6.3.*

Observação 7 *A formulação proposta nesta seção permite considerar um atraso no sinal de medida, dado pela matriz J_i . Este é um diferencial que a abordagem feita nesta tese proporciona.*

6.2 Estabelecimento do Problema de Predição Robusta

Considere o seguinte sistema dinâmico singular sujeito a incertezas paramétricas

$$\begin{aligned} (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + \tilde{\nu}_i, \\ z_i &= (H_i + \delta H_i) x_i + \tilde{\nu}_i, \quad i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

sendo que $x_i \in \mathbb{R}^n$ é a variável descritora (ou semi-estado) que descreve o comportamento interno do sistema; $z_i \in \mathbb{R}^p$ é o sinal observado, \tilde{w}_i e $\tilde{\nu}_i$ são os erros de ajuste do modelo definidos como:

$$\tilde{\nu}_i := \begin{bmatrix} \tilde{w}_i \\ \tilde{\nu}_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (G_{w,i} + \delta G_{w,i}) w_i + (G_{v,i} + \delta G_{v,i}) v_i \\ (K_{w,i} + \delta K_{w,i}) w_i + (K_{v,i} + \delta K_{v,i}) v_i \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

As matrizes E_i , F_i , $G_{w,i}$, $G_{v,i}$, H_i , $K_{w,i}$, e $K_{v,i}$ são assumidas conhecidas, de dimensões apropriadas, quadradas ou retangulares; δE_{i+1} , δF_i , $\delta G_{w,i}$, $\delta G_{v,i}$, δH_i , $\delta K_{w,i}$ e $\delta K_{v,i}$ são perturbações nos parâmetros do sistema nominal, variantes no tempo.

As incertezas paramétricas são modeladas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_i & \delta K_i & 0 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & N_{E_{i+1}} \\ N_{H_i} & N_{K_i} & 0 \end{bmatrix}, \\ N_{G_i} &:= \begin{bmatrix} N_{G_{w,i}} & N_{G_{v,i}} \end{bmatrix}, \quad N_{K_i} := \begin{bmatrix} N_{K_{w,i}} & N_{K_{v,i}} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_j\| \leq 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

O problema de ajuste ótimo para estimativas preditoras do sistema (6.14) é definido da seguinte maneira. Assuma que no passo $i - 1$ tem-se a estimativa *a priori* para o estado x_i e denote a estimativa inicial por $\hat{x}_{i|i-1}$. Além disso, suponha que há uma matriz de ponderação definida positiva $P_{i|i-1}$ para o erro de estimativa $(x_i - \hat{x}_{i|i-1})$. Para atualizar a estimativa de $\hat{x}_{i|i-1}$ para $\hat{x}_{i+1|i}$, propõe-se o seguinte funcional

$$\begin{aligned} J_i &:= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \\ &\left(\begin{bmatrix} F_i + \delta F_i & G_i + \delta G_i & -(E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ H_i + \delta H_i & K_i + \delta K_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i-1} \\ z_{i+1} - (H_i + \delta H_i)\hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right)^T \\ &\times \mu_i \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

com

$$\nu_i := \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix}, K_i := \begin{bmatrix} K_{w,i} & K_{v,i} \end{bmatrix}, \mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_i \end{bmatrix} \text{ e } G_i := \begin{bmatrix} G_{w,i} & G_{v,i} \end{bmatrix}.$$

O problema de predição robusta é encontrar $\hat{x}_{i+1|i}$ que minimize J_i , considerando o pior caso das perturbações, ou seja,

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \max_{\delta_i} J_i \quad (6.17)$$

sendo que $\delta_i := \{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta G_i, \delta K_i, \delta H_i\}$.

Com o objetivo de diferenciar a expressão matricial para $\hat{x}_{i+1|i}$ da expressão obtida para a estimativa filtrada robusta obtida na Seção 6.1.1, o próximo resultado irá explicitar os parâmetros $\hat{\lambda}^{-1}$ e W^{-1} na forma matricial final do predictor.

Esta estratégia será interessante no momento em que algumas análises sobre limites forem feitas, com base na teoria desenvolvida no Capítulo 2.

Lema 6.2.1 *Seja $\hat{\lambda}_i$ em (2.21) tal que $(\hat{\lambda}_i I - M_i^T W_i M_i)$ é invertível. Então*

$$\hat{W}_i := (W_i^{-1} - \lambda^{-1} M_i M_i^T)^{-1},$$

e o sistema matricial (2.27) é equivalente a

$$\mathcal{T}\sigma = \mathcal{B} \quad (6.18)$$

sendo

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} -Q_i & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & A_i^T & 0 & 0 & N_{A_i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ e \\ d \\ \gamma_3 \\ \lambda_3 \\ c \\ x \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_{b_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Prova: Se x é solução do sistema (2.27) ou, de forma equivalente,

$$\begin{cases} -\mathcal{Q}_i \lambda_1 + \gamma_1 = 0 \\ -\hat{W}_i \lambda_2 + \gamma_2 = 0 \\ -\hat{\lambda}_i I \lambda_3 + \gamma_3 = 0 \\ \lambda_1 + x = 0 \\ \lambda_2 + A_i x = b_i \\ \lambda_3 + N_{A_i} x = N_{b_i} \\ \gamma_1 + A_i^T \gamma_2 + N_{A_i}^T \gamma_3 = 0 \end{cases}, \quad (6.20)$$

tem-se que, através da segunda linha de (6.20), $-\hat{W}_i \lambda_2 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = \hat{W}_i \lambda_2 \Rightarrow \hat{W}_i^{-1} \gamma_2 = \lambda_2$.

Já, pela quinta e sexta linhas de (6.20), segue que $\lambda_2 + A_i x = b_i$. Dessa forma, $\hat{W}_i^{-1} \gamma_2 + A_i x = b_i$, que escrito em forma matricial torna-se

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & \hat{W}_i^{-1} & 0 & A_i \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Observe que neste primeiro procedimento da prova λ_2 foi retirado do vetor pré multiplicado. Como, por hipótese, $(\hat{\lambda}_i I - M_i^T W_i M_i)$ é invertível, abrindo a expressão para \hat{W}_i^{-1} tem-se

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T & 0 & A_i \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Através da quarta linha de (6.22), segue a equação $(W_i^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T) \gamma_2 + A_i x = b_i$, ou seja, $W_i^{-1} \gamma_2 - M_i (\hat{\lambda}_i^{-1} I) M_i^T \gamma_2 + A_i x = b_i$.

Adotando a definição $(\hat{\lambda}_i^{-1}I) M_i^T \gamma_2 := -c$, tem-se $M_i^T \gamma_2 + \hat{\lambda}_i c = 0 \Rightarrow W_i^{-1} \gamma_2 + M_i c + A_i x = b_i$ que escrito em forma matricial, torna-se

$$\begin{bmatrix} -Q_i & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & M_i & 0 & A_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_i^T & \hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} & 0 \\ 0 & 0 & I & A_i^T & 0 & N_{A_i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ c \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ 0 \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Neste segundo procedimento foi inserido c no vetor multiplicado, visando abrir a expressão de \hat{W}_i .

Através da quinta linha de (6.23) tem-se $M_i^T \gamma_2 + \hat{\lambda}_i c = 0$. Definindo agora $\hat{\lambda}_i c := -d$ segue que $c = -\hat{\lambda}_i^{-1} d \Rightarrow c + \hat{\lambda}_i^{-1} d = 0$. Além disso, $M_i^T \gamma_2 + \hat{\lambda}_i c = 0 \Rightarrow M_i^T \gamma_2 + d = 0$, que escrito em forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} -Q_i & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & M_i & 0 & 0 & A_i \\ 0 & 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & I & A_i^T & 0 & 0 & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ c \\ d \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ 0 \\ 0 \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Veja que neste procedimento foi colocado d no vetor multiplicado, objetivando aparecer $\hat{\lambda}_i^{-1}$ no lugar de $\hat{\lambda}_i$.

Para finalizar, tem-se através da segunda linha de (6.24) que $-\hat{\lambda}_i I \lambda_3 + \gamma_3 = 0$.

Definindo $e := -\hat{\lambda}_i I \lambda_3 \Rightarrow \hat{\lambda}_i^{-1} e + \lambda_3 = 0$. Assim $e + \gamma_3 = 0$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -Q_i & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & A_i^T & 0 & 0 & N_{A_i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ e \\ d \\ \gamma_3 \\ \lambda_3 \\ c \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i \\ 0 \\ 0 \\ N_{b_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

que é exatamente igual ao sistema (6.18) escrito de forma expandida.

◇

6.2.1 Estimativas Predictoras Robustas

O resultado que fornece expressões para as estimativas robustas ótimas na forma preditora com a respectiva equação recursiva de Riccati encontra-se na sequência.

Para obtê-lo, utilizou-se o mesmo procedimento desenvolvido para o caso filtrado, apresentado previamente neste capítulo na Seção 6.1.1.

Teorema 6.2.1 *Considere o sistema dinâmico singular (6.14) e o problema de otimização (6.17), sendo as incertezas paramétricas dadas por (6.16). Assuma*

$$\begin{bmatrix} E_{i+1}^T & 0 & N_{E_{i+1}}^T & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} F_i & G_i & E_{i+1} \\ H_i & K_i & 0 \\ N_{F_i} & N_{G_i} & N_{E_{i+1}} \\ N_{H_i} & N_{K_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

posto linha pleno para todo i . Assim, tem-se que as estimativas predictoras robustas $\hat{x}_{i+1|i}$ e a

correspondente equação recursiva de Riccati são dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1} I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & A_i^T & 0 & 0 & N_{A_i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\mathfrak{x}}_i & 0 \\ \mathfrak{z}_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i &:= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_i := \begin{bmatrix} F_i & G_i & -E_{i+1} \\ H_i & K_i & 0 \end{bmatrix}, N_{A_i} := \begin{bmatrix} N_{F_i} & N_{G_i} & -N_{E_{i+1}} \\ N_{H_i} & N_{K_i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{z}_i &:= \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}, \hat{\mathfrak{x}}_i := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, W_i = \Xi_i^{-1}, \mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

O parâmetro ótimo $\hat{\lambda}_i$ que minimiza $G(\lambda)$, definida em (2.23), deve satisfazer a seguinte desigualdade

$$\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|, \quad (6.29)$$

para $\mu_i > 0$ fixado.

Prova: Aplicando o Lema 2.2.2 segue que o problema de otimização (6.17) possui \hat{x} como solução e esta, por sua vez, é dada pela resolução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & A_i \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & N_{A_i} \\ 0 & 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Como a inversa é bem definida em (6.30), devido às hipóteses de posto linha pleno estabelecidas em (6.26) (veja no final deste capítulo estruturas matriciais equivalentes, que tornam esta análise mais adequada), a estimativa preditora $\hat{x}_{i+1|i}$ pode ser obtida como segue

$$\hat{x}_{i+1|i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{W}_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\lambda}_i I & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & A_i^T & N_{A_i}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_i \\ N_{b_i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

que, pelo Lema 6.2.1, equivale ao sistema (6.18).

Escreve-se o sistema (6.30) em termos dos parâmetros originais e modifica-se o vetor x de $\begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} x_i \\ \nu_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, a fim de obter \mathfrak{z}_i e $\hat{\mathfrak{x}}_i$ no lugar de b_i e N_{b_i} (veja para maiores detalhes (6.12) e (6.13) na demonstração do Teorema 6.1.1).

O parâmetro $\hat{\lambda}_i$ é obtido por meio de (2.22)-(2.23) do Lema 2.2.1, ou seja, através da minimização da função $G(\lambda)$, quando

$$\hat{\lambda}_i \geq \|M_i^T \Xi_i^{-1} M_i\|$$

para $\mu_i > 0$ fixado.

Pelo Lema 2.2.2 segue que a matriz P é definida como parte da expressão de \hat{x} (equação (2.28)), que equivale a (6.27). \diamond

Observação 8 À medida que o parâmetro μ_i toma valores excessivamente grandes, obtém-se que $\hat{\lambda}_i^{-1}$ e W^{-1} decrescem rapidamente, ou seja, $\hat{\lambda}_i^{-1} \rightarrow 0$ e $W^{-1} \rightarrow 0$. Sendo assim, algumas posições de (6.27) praticamente desaparecem, como ocorreu no Capítulo 4, após a aplicação do Método das Funções Penalidade.

6.3 Formas Matriciais Equivalentes para as Estimativas Robustas

Nesta seção as condições de posto pleno assumidas nos teoremas dos FSRs serão justificadas, garantindo a invertibilidade das formas matriciais presentes nas expressões dos filtros.

No próximo resultado a matriz \mathcal{Q}_i será particionada como

$$\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_2 \end{bmatrix},$$

de tal forma que as matrizes de ponderação apareçam na expressão matricial central das estimativas robustas sem inversa, ou seja, deseja-se obter \mathcal{Q}_1^{-1} , quando $\mathcal{Q}_2 = 0$. Para isso, será necessário abrir A_i e N_{A_i} como $A_i = [A_1 \ A_2]$ e $N_{A_i} = [N_{A,1} \ N_{A,2}]$, para que as dimensões matriciais permaneçam compatíveis.

Teorema 6.3.1 *Sejam $\mathcal{Q}_1 := \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \end{bmatrix}^{-1}$ e $\mathcal{Q}_2 = 0$ com $\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix}$. Então, as expressões para $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i+1}$ dadas por (6.9) são equivalentes a*

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i & := \begin{bmatrix} -E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ J_i \end{bmatrix}, \mathcal{G}_i := \begin{bmatrix} G_i \\ K_i \end{bmatrix}, N_{\mathcal{G},i} = \begin{bmatrix} N_{G_i} \\ N_{K_i} \end{bmatrix} \\ N_{\mathcal{E},i} & := \begin{bmatrix} N_{E_{i+1}} \\ N_{H_{i+1}} \end{bmatrix}, N_{\mathcal{F},i} := \begin{bmatrix} N_{F_i} \\ N_{J_i} \end{bmatrix}, M_i := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Prova: Se a matriz \mathcal{Q}_i é particionada como $\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_2 \end{bmatrix}$ com $\mathcal{Q}_2 = 0$, e se $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é dado por (6.9), isto implica que \hat{x} é solução do seguinte sistema matricial

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q}_1 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A,1} & N_{A,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & A_1^T & 0 & 0 & N_{A,1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & A_2^T & 0 & 0 & N_{A,2}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1' \\ \gamma_1 \\ \gamma_1' \\ \gamma_2 \\ e \\ d \\ \gamma_3 \\ \lambda_3 \\ c \\ x_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ Z_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

A partir da primeira linha de (6.34) tem-se que $-\mathcal{Q}_1\lambda_1 + \gamma_1 = 0$. Definindo a variável auxiliar $g := -\mathcal{Q}_1\lambda_1$, segue que $\mathcal{Q}_1^{-1}g + \lambda_1 = 0$ e $g + \gamma_1 = 0$, que escrito em termos matriciais torna-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1^{-1} & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A,1} & N_{A,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & A_1^T & 0 & 0 & N_{A,1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & A_2^T & 0 & 0 & N_{A,2}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ \lambda_1 \\ \lambda_1' \\ \gamma_1 \\ \gamma_1' \\ \gamma_2 \\ e \\ d \\ \gamma_3 \\ \lambda_3 \\ c \\ x_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ Z_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

A primeira linha de (6.35) fornece a equação $\mathcal{Q}_1^{-1}g + \lambda_1 = 0$, enquanto a segunda e quarta linhas produzem, respectivamente, $-g = \gamma_1$ e $\lambda_1 = \hat{x}_{i|i} - x_i$. Assim,

$$\mathcal{Q}_1^{-1}g + (\hat{x}_{i|i} - x_i) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}_1^{-1}g - x_i = -\hat{x}_{i|i} \Rightarrow -\mathcal{Q}_1^{-1}g + x_i = \hat{x}_{i|i}. \quad (6.36)$$

Ainda por (6.35), como $-g = \gamma_1$, segue que $\mathcal{Q}_1^{-1}\gamma_1 + x_i = \hat{x}_{i|i}$. Além disso, através da terceira linha de (6.35) nota-se que $\gamma'_1 = 0$, que substituído na última linha resulta em $A_2^T\gamma_2 + E_{A,2}^T\gamma_3 = 0$. Segue, então, o seguinte sistema matricial equivalente

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{A,1} & N_{A,2} \\ 0 & 0 & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i^T & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & A_1^T & 0 & 0 & N_{A,1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^T & 0 & 0 & N_{A,2}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ e \\ d \\ \gamma_3 \\ \lambda_3 \\ c \\ x_i \\ \hat{x}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ \mathcal{Z}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^{-1} &:= \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \Xi, \quad N_{A,2} := N_{\mathcal{E},i}, \\ N_{A,1} &:= \begin{bmatrix} N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} \end{bmatrix}, \quad A_1 := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i \end{bmatrix}, \quad A_2 := \mathcal{E}_i, \end{aligned} \quad (6.38)$$

a expressão (6.32) para $\hat{x}_{i+1|i+1}$ é obtida. Utilizando os mesmos cálculos algébricos feitos para $\hat{x}_{i+1|i+1}$, obtém-se a expressão para $P_{i+1|i+1}$. \diamond

Observação 9 *Observe que, quando as incertezas do sistema (6.14) são tomadas nulas, ou seja, as matrizes que as compõe $N_{\mathcal{F},i} = N_{\mathcal{G},i} = N_{\mathcal{E},i} = M_i = 0$, a expressão (6.32) recai no FSN proposto em [4], que por sua vez foi detalhadamente deduzido no Capítulo 4.*

O corolário a seguir estabelece a equivalência entre a estimativa preditora robusta e correspondente equação recursiva de Riccati com a estrutura matricial apresentada no Teorema 6.2.1.

A diferença entre os resultados para o filtro e preditor somente está no arranjo das matrizes.

Corolário 6.3.1 *Sejam $\mathcal{Q}_1 := \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i \end{bmatrix}^{-1}$ e $\mathcal{Q}_2 = 0$ com $\mathcal{R}_i := \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_i \end{bmatrix}$. Então as ex-*

pressões para $\hat{x}_{i+1|i}$ e $P_{i+1|i}$ dadas por (6.27) são equivalentes a

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_i^{-1}I & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^{-1} & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

sendo

$$\mathcal{E}_i := \begin{bmatrix} -E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ H_i \end{bmatrix}, \mathcal{G}_i := \begin{bmatrix} G_i \\ K_i \end{bmatrix},$$

$$N_{\mathcal{E},i} := \begin{bmatrix} N_{E_{i+1}} \\ 0 \end{bmatrix}, N_{\mathcal{F},i} := \begin{bmatrix} N_{F_i} \\ N_{H_i} \end{bmatrix}, N_{\mathcal{G},i} = \begin{bmatrix} N_{G_i} \\ N_{K_i} \end{bmatrix}$$

$$M_i := \begin{bmatrix} M_{1,i} & 0 \\ 0 & M_{2,i} \end{bmatrix}, \mathcal{Z}_i := \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

◇

Observação 10 Aplicando a teoria de Funções Penalidade, conforme foi feito na Seção 4.3 do Capítulo 4, a fim de encontrar a solução ótima, considere os limites

$$\mu_i \rightarrow \infty, \hat{\lambda}_i^{-1} \rightarrow 0 \text{ e } W_i^{-1} \rightarrow 0$$

em (6.32). Dessa forma, obtém-se

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Entretanto, a estimativa $\hat{x}_{i+1|i+1}$ satisfaz (6.41) se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_i & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & M_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \\ h \\ j \\ k \\ x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

A partir da terceira linha e quarta linha, respectivamente, tem-se que $h = 0$ e $i = 0$. Assim, (6.42) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ I & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ f \\ g \\ j \\ x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

Como, por hipótese do Teorema 6.1.1, $\begin{bmatrix} \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \end{bmatrix}$ têm posto linha pleno, segue que a inversa está bem definida. Portanto

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ I & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Embora as formas (6.41) e (6.44) sejam equivalentes, a informação presente na matriz M_i não aparece em (6.44).

Observação 11 O mesmo procedimento estabelecido na Observação 10 pode ser feita para $\hat{x}_{i+1|i}$ e $P_{i+1|i}$, ou seja, tais recursões passam a ser dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i} & P_{i+1|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F}_i & \mathcal{G}_i & \mathcal{E}_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{F},i} & N_{\mathcal{G},i} & N_{\mathcal{E},i} \\ I & 0 & \mathcal{F}_i^T & N_{\mathcal{F},i}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \mathcal{G}_i^T & N_{\mathcal{G},i}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_i^T & N_{\mathcal{E},i}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

para $\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i, \mathcal{G}_i, N_{\mathcal{G},i}, N_{\mathcal{E},i}, N_{\mathcal{F},i}$ definidas em (6.40).

Estabilidade e Convergência dos FSRs

Para garantir um desempenho apropriado do Filtro Singular Robusto (FSR) em regime permanente, será determinada a existência e unicidade da solução estabilizante P para a Equação Algébrica de Riccati (EAR) e será mostrado que a recursão de Riccati $\{P_{i+1|i+1}\}$ é uma sequência não decrescente que converge para a solução da EAR. Os resultados propostos neste capítulo utilizam o mesmo procedimento adotado para as provas de estabilidade e convergência do FSN, uma vez que quando as incertezas são desconsideradas no modelo singular, a expressão obtida para o FSR recai na estrutura matricial estabelecida para o caso nominal. Através da estrutura de blocos matriciais em que os filtros aparecem, a equivalência entre as expressões pode ser observada de maneira direta, através da simples compactação de blocos.

A estratégia desenvolvida neste capítulo para as provas de estabilidade e convergência dos FSRs tem a vantagem de não adotar hipóteses adicionais sobre as matrizes que compõem as incertezas do sistema singular, como foi considerado em [42]. Nessa referência foi assumida a ortogonalidade entre as matrizes N_F e N_{G_w} .

7.1 Resultados Preliminares

Sempre que os sistemas dinâmicos singulares (6.2) e (6.14) considerados forem invariantes no tempo, isto é,

$$\mathcal{Z}_i = (\mathcal{E} + \delta\mathcal{E}) x_{i+1} + (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F}) x_i + (\mathcal{G} + \delta\mathcal{G}) \mathcal{V}_i, \quad (7.1)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_i &:= \begin{bmatrix} 0 \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_d \\ \mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_d \\ \mathcal{F}_m \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{bmatrix} \mathcal{G}_d \\ \mathcal{G}_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{V}_i := \begin{bmatrix} w_i \\ v_i \end{bmatrix} \\ \delta\mathcal{E} &:= \begin{bmatrix} \delta\mathcal{E}_d \\ \delta\mathcal{E}_m \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{F} := \begin{bmatrix} \delta\mathcal{F}_d \\ \delta\mathcal{F}_m \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{G} := \begin{bmatrix} \delta\mathcal{G}_d \\ \delta\mathcal{G}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2)$$

pode-se demonstrar importantes propriedades da EAR, como será visto na sequência.

Assim, como foi adotado no Capítulo 5, o índice d representa a parte referente a equação dinâmica do sistema e o índice m refere-se a equação de medida.

As incertezas paramétricas $\begin{bmatrix} \delta\mathcal{F} & \delta\mathcal{G} & \delta\mathcal{E} \end{bmatrix}$ são modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta\mathcal{F} & \delta\mathcal{G} & \delta\mathcal{E} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \delta\mathcal{F}_d & \delta\mathcal{G}_d & \delta\mathcal{E}_d \\ \delta\mathcal{F}_m & \delta\mathcal{G}_m & \delta\mathcal{E}_m \end{bmatrix} := M_i \Lambda \begin{bmatrix} N_{\mathcal{F}} & N_{\mathcal{G}} & N_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

sendo

$$N_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} N_{\mathcal{F}_d} \\ N_{\mathcal{F}_m} \end{bmatrix}, \quad N_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} N_{\mathcal{G}_d} \\ N_{\mathcal{G}_m} \end{bmatrix}, \quad N_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} N_{\mathcal{E}_d} \\ N_{\mathcal{E}_m} \end{bmatrix}, \quad M_i := \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Para o caso singular filtrado robusto (Equação (6.2) do Capítulo 6), tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \begin{bmatrix} -E \\ H \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix} \\ N_{\mathcal{E}} &:= \begin{bmatrix} -N_E \\ N_H \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{F}} := \begin{bmatrix} N_F \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } N_{\mathcal{G}} := \begin{bmatrix} N_{G_w} & N_{G_v} \\ N_{K_w} & N_{K_v} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5)$$

enquanto no caso preditor robusto singular (Equação (6.14) do Capítulo 6) valem as seguintes definições

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{F} := \begin{bmatrix} F \\ H \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{bmatrix} G_w & G_v \\ K_w & K_v \end{bmatrix} \\ N_{\mathcal{E}} &:= \begin{bmatrix} -N_E \\ 0 \end{bmatrix}; \quad N_{\mathcal{F}} := \begin{bmatrix} N_F \\ N_H \end{bmatrix} \text{ e } N_{\mathcal{G}} := \begin{bmatrix} N_{G_w} & N_{G_v} \\ N_{K_w} & N_{K_v} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Considerando as matrizes de ponderação, associadas aos erros de ajuste, definidas como

$$\mathcal{R} := \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0,$$

foi provado que, se $\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ N_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{G} \\ N_{\mathcal{E}} & N_{\mathcal{F}} & N_{\mathcal{G}} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno, então a melhor estimativa \hat{x}_{i+1} de x_i é gerada por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1} & P_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{F} & \mathcal{G} & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{F}} & N_{\mathcal{G}} & N_{\mathcal{E}} \\ I & 0 & \mathcal{F}^T & N_{\mathcal{F}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \mathcal{G}^T & N_{\mathcal{G}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}^T & N_{\mathcal{E}}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{Z}_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Assim, como foi observado no Capítulo 5, note que as expressões para as estimativas e para a recursão de Riccati valem tanto para o caso filtrado como para o caso predictor. Portanto, as notações $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e $\hat{x}_{i+1|i}$ serão suprimidas e tais estimativas serão dadas apenas por \hat{x}_{i+1} .

Considerando as seguintes compactações matriciais

$$\bar{\mathcal{E}} := \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ N_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{F}} := \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ N_{\mathcal{F}} \end{bmatrix} \text{ e } \bar{\mathcal{G}} := \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ N_{\mathcal{G}} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

tem-se que \hat{x}_{i+1} e P_{i+1} passam a ser escritas como

$$\hat{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{G}} & \bar{\mathcal{E}} \\ I & 0 & \bar{\mathcal{F}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \bar{\mathcal{G}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{E}}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ 0 \\ \mathcal{Z}_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

e

$$P_{i+1} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{G}} & \bar{\mathcal{E}} \\ I & 0 & \bar{\mathcal{F}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{G}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{E}}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

É importante salientar que as expressões (7.9) e (7.10), são análogas a (5.3) e (5.4), respectivamente, excetuando-se o fato das matrizes \mathcal{E} , \mathcal{F} e \mathcal{G} serem modificadas para $\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{F}}$ e $\bar{\mathcal{G}}$ quando há incorporação de incertezas no modelo.

Devido a esta analogia, torna-se trivial a utilização das mesmas demonstrações desenvolvidas no Capítulo 5 para as propriedades de estabilidade e convergência dos filtros robustos.

Sendo assim, considere novamente as seguintes notações

$$e_i := \begin{bmatrix} 0 & \dots & I & \dots & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \bar{M}(P) := \bar{\Omega}^{-1}(P),$$

$$\bar{\Omega}(P) := \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathcal{G}} & \bar{\mathcal{E}} \\ I & 0 & \bar{\mathcal{F}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{G}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathcal{E}}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

sendo e_i e $\bar{M}(P)$ decompostos em blocos de acordo com a partição de $\bar{\Omega}(P)$. \bar{M} é particionada como \bar{M}_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$ e o vetor de blocos e_i possui a matriz identidade na i -ésima posição do bloco e matrizes nulas nas demais posições.

A partir de (7.9) e (7.10) e das definições (7.11) e (7.11), tem-se que o filtro em regime permanente e a EAR correspondente são dados por

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= e_6^T \bar{\Omega}^{-1}(P) (e_1 \hat{x}_i + e_3 \mathcal{Z}_i) \\ P &= -e_6^T \bar{\Omega}^{-1}(P) e_6 \end{aligned} \quad (7.12)$$

respectivamente.

Lema 7.1.1 *As equações para \hat{x}_{i+1} e P dadas respectivamente por (7.12) e (7.12) podem ser reescritas como*

$$\hat{x}_{i+1} := \bar{M}_{61}\hat{x}_i + \bar{M}_{63}\mathcal{Z}_i = -\bar{M}_{63}\mathcal{F}\hat{x}_i + \bar{M}_{63}\mathcal{Z}_i \quad (7.13)$$

$$P := \bar{M}_{61}P\bar{M}_{61}^T + \bar{M}_{62}\mathcal{R}\bar{M}_{62}^T = \bar{M}_{63}(\bar{\mathcal{F}}P\bar{\mathcal{F}}^T + \bar{\mathcal{G}}\mathcal{R}\bar{\mathcal{G}}^T)\bar{M}_{63}^T. \quad (7.14)$$

Prova: A prova deste Lema é igual à elaborada para o Lema 5.1.3 do Capítulo 5.

7.2 Estabilidade

Para garantir um desempenho apropriado do FSR em regime permanente, serão enunciados resultados que garantem a estabilidade deste filtro quando os parâmetros do modelo são invariantes no tempo. Em particular, será determinada a existência e unicidade de uma solução estabilizante P para a EAR (7.14). Em virtude do fato das estruturas de (7.9) e (7.10) serem análogas a (5.3) e (5.4), serão feitos esboços das demonstrações desta seção, omitindo-se os detalhes.

Teorema 7.2.1 *Suponha que o sistema (7.1) é detectável e estabilizável e $\mathcal{R} > 0$. Seja P uma solução da EAR (7.14). Se $P \geq 0$ então P é uma solução estabilizante para a EAR.*

Prova: Esta prova é feita por contradição. Suponha que exista uma solução semidefinida positiva P para (7.14). Para mostrar a estabilidade de (7.13) deve-se mostrar que $\bar{M}_{63}\bar{\mathcal{F}}$ é estável.

Assuma, por contradição, que $\bar{M}_{63}\bar{\mathcal{F}}$ não é estável. Então, após alguns cálculos algébricos (veja para maiores detalhes a demonstração do Teorema 5.2.1 do Capítulo 5), tem-se que $[\lambda\bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{F}} \quad \bar{\mathcal{G}}]$ não tem posto linha pleno, para $|\lambda| \geq 1$, ou seja, uma contradição é obtida. Logo, $\bar{M}_{63}\bar{\mathcal{F}}$ é estável. \diamond

Teorema 7.2.2 *Considere a EAR (7.14). Se a solução estabilizante existir, ela é única.*

Prova: Esta prova utiliza o seguinte procedimento desenvolvido no Teorema 5.2.2 do Capítulo 5. Suponha que existam duas soluções estabilizantes P^1 e P^2 para (7.14). Como $\bar{M}_{61} = \bar{M}_{63}\bar{\mathcal{F}}$

são estáveis, a equação de Stein dada no Lema 5.1.4

$$P^1 - P^2 = \bar{M}_{61}^1 (P^1 - P^2) \bar{M}_{61}^{2T} \quad (7.15)$$

possui solução única $P^1 - P^2 = 0$. Logo, $P^1 = P^2$. \diamond

7.3 Convergência

Nesta seção serão apresentados resultados que garantem a convergência da recursão de Riccati (7.14), ou seja, será mostrado que tal recursão é uma sequência monótona não decrescente, limitada superiormente.

Os três resultados encontrados na sequência são auxiliares. No primeiro deles, o sinal da recursão de Riccati P_{i+1} é obtido. O segundo define uma recursão auxiliar F_{fi} e estabelece uma relação entre ela e a recursão de Riccati. Finalmente, o terceiro resultado auxiliar faz uma comparação entre recursões de Riccati definidas com índices diferentes.

Lema 7.3.1 *Suponha que $P_i \geq 0$. Então P_{i+1} é uma matriz semidefinida positiva.*

Prova: Pelo Lema 7.1.1, as expressões (7.12) e (7.14) para P_{i+1} são equivalentes. Assim, para determinar o sinal de P_{i+1} basta verificar a positividade de \mathcal{R} e utilizar a hipótese $P_i \geq 0$. Assim, conclui-se de maneira direta que $P_{i+1} \geq 0$. \diamond

Lema 7.3.2 *Considere as seguintes equações matriciais, para $j = 1, 2$*

$$P_{i+1}^j := -\bar{M}_{66,i}^j \text{ e } F_{fi}^j := \bar{M}_{61,i}^j. \quad (7.16)$$

Então, as seguintes relações são obtidas

$$(i) \quad P_{i+1}^1 - P_{i+1}^2 = F_{fi}^1 (P_i^1 - P_i^2) F_{fi}^{2T} \quad (7.17)$$

$$(ii) \quad F_{fi}^1 - F_{fi}^2 = F_{fi}^2 (P_i^1 - P_i^2) M_{11,i}^1. \quad (7.18)$$

Prova: A demonstração deste resultado é análoga à desenvolvida para o Lema 5.3.2 do Capítulo 5, sendo, portanto, omitida. \diamond

Lema 7.3.3 *Considere (7.16) para $j = 1, 2$. Se $P_i^1 \geq P_i^2$, então $P_{i+1}^1 \geq P_{i+1}^2$.*

Prova: Utilizando as relações matriciais presentes no Lema 7.3.2, e a mesma álgebra desenvolvida no Lema 5.3.3, obtém-se

$$P_{i+1}^1 - P_{i+1}^2 = F_{fi}^2 (P_i^1 - P_i^2)^{\frac{1}{2}} \left[I + (P_i^1 - P_i^2)^{\frac{1}{2}} \bar{M}_{11,i}^1 (P_i^1 - P_i^2)^{\frac{1}{2}} \right] (P_i^1 - P_i^2)^{\frac{1}{2}} F_{fi}^{2T}.$$

Através da Proposição ¹, da hipótese $P_i^1 - P_i^2 \geq 0$ e do Lema 7.3.1, obtém-se $P_{i+1}^1 - P_{i+1}^2 \geq 0$.

◇

O próximo lema garante que a recursão de Riccati é uma sequência monótona não decrescente. Ele é indispensável para que a convergência seja demonstrada.

Lema 7.3.4 *Suponha que $\mathcal{R} > 0$ e defina $\{P_i\}_{i=0}^{\infty}$ por (7.10) com $P_0 = 0$. Então $\{P_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência monótona não decrescente.*

Prova: Desde que $\mathcal{R} > 0$ e P_i é dado por (7.12) tem-se que, para $P_0 = 0$ segue $P_1 \geq 0$ e $P_1 - P_0 \geq 0$. Considere a hipótese de indução $P_i - P_{i-1} \geq 0$. Aplicando o Lema 7.3.3

$$0 = P_0 \leq P_1 \leq \dots \leq P_i \leq P_{i+1} \leq \dots$$

Os dois últimos resultados deste capítulo utilizam a comparação entre as sequências estabelecidas no Lema 5.3.9 do Capítulo 5. Eles garantem que a sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ é limitada superiormente e converge para P^s . Eles estão sem provas, pois são análogos ao Lema 5.3.10 e Teorema 5.3.1, a menos da modificação nas matrizes \mathcal{E} , \mathcal{F} e \mathcal{G} para $\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{F}}$ e $\bar{\mathcal{G}}$.

Lema 7.3.5 *Considere a sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ definida no Lema 7.1.1. Se $\left[\lambda \bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{F}} \right]$ tem posto coluna pleno e $\left[\lambda \bar{\mathcal{E}} - \bar{\mathcal{F}} \quad \bar{\mathcal{G}} \right]$ tem posto linha pleno para todo i , então para qualquer condição inicial P_0 , a sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ é limitada superiormente, ou seja, existe uma matriz P^s tal que $0 \leq P_{i+1} \leq P^s$, para $i \geq 0$.*

◇

Teorema 7.3.1 *Suponha que o sistema (7.1) seja detectável e estabilizável e $\mathcal{R} > 0$. Defina uma sequência $\{P_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ por*

$$P_{i+1} = \bar{M}_{63,i} (\bar{\mathcal{F}} P_i \bar{\mathcal{F}}^T + \bar{\mathcal{G}} \mathcal{R} \bar{\mathcal{G}}^T) \bar{M}_{63,i}^T \quad (7.19)$$

¹**Proposição** A matriz $\bar{M}_{11,i}$ é dada por $\bar{M}_{11,i} = \bar{M}_{41,i} P_i \bar{M}_{41,i}^T + \bar{M}_{42,i} \mathcal{R} \bar{M}_{42,i}^T$, sendo $\{P_i, \mathcal{R}\} \geq 0$.

com $P_0 \geq 0$. Então, existe uma única matriz $P^+ \geq 0$ tal que $P_{i+1} \rightarrow P^+$ quando $i \rightarrow \infty$. O limite P^+ é a solução da EAR

$$P = \bar{M}_{63}(\bar{\mathcal{F}}P\bar{\mathcal{F}}^T + \bar{\mathcal{G}}\mathcal{R}\bar{\mathcal{G}}^T)\bar{M}_{63}^T. \quad (7.20)$$

◇

Capítulo 8

Resultados Numéricos e Conclusões

8.1 Comparação com o Filtro BDU

Considere o seguinte modelo com incertezas

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + (G_i + \delta G_i) w_i \\
 z_i &= H_i x_i + v_i \\
 \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} &= M_i \Delta_i \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{g,i} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

sendo $\{M_i, N_{f,i}, N_{g,i}\}$ matrizes conhecidas e Δ_i uma matriz arbitrária satisfazendo $\|\Delta_i\| \leq 1$.

Em [42] a estimativa filtrada robusta com incertezas limitadas, denominada filtro BDU é obtida a partir do seguinte resultado

Algoritmo Considere o sistema sujeito a incertezas (8.1). Sejam dadas as matrizes de ponderação $\Pi_0 > 0$, $R_i > 0$ e $Q_i > 0$. As estimativas dos estados podem ser computadas recursivamente segundo o seguinte algoritmo:

Passo 0 (Condições iniciais): Faça

$$\begin{aligned}
 P_{0|0} &:= (\Pi_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}, \\
 \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0.
 \end{aligned}$$

Passo 1 : Se $H_{i+1} M_i = 0$, então faça $\hat{\lambda}_i = 0$.

Caso contrário, determine $\hat{\lambda}_i$ no intervalo

$$\lambda > \lambda_{l,i} := \|M_i^T H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} M_i\| \quad (8.2)$$

que minimiza $G(\lambda)$ definido por (2.23) com as identificações (2.24).

Passo 2 : Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, substituir $\{Q_i, R_{i+1}, P_{i|i}, G_i, F_i\}$ por:

$$\hat{Q}_i^{-1} = Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{g,i}^T \left(I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T \right)^{-1} N_{g,i} \quad (8.3)$$

$$\hat{R}_{i+1} = R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H_{i+1} M_i M_i^T H_{i+1}^T \quad (8.4)$$

$$\hat{P}_{i|i} = \left(P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} \right)^{-1} \quad (8.5)$$

$$= P_{i|i} - P_{i|i} N_{f,i}^T (\hat{\lambda}_i^{-1} I + N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)^{-1} N_{f,i} P_{i|i} \quad (8.6)$$

$$\hat{G}_i = G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{g,i} \quad (8.7)$$

$$\hat{F}_i = \left(F_i - \hat{\lambda}_i \hat{G}_i \hat{Q}_i N_{g,i}^T N_{f,i} \right) \left(I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \quad (8.8)$$

Se $\hat{\lambda}_i = 0$, faça

$$\hat{Q}_i = Q_i, \hat{R}_{i+1} = R_{i+1}, \hat{P}_{i|i} = P_{i|i}, \hat{G}_i = G_i, \text{ e } \hat{F}_i = F_i.$$

Passo 3 : Atualize $\{\hat{x}_{i|i}, P_{i|i}\}$ da seguinte maneira:

$$\hat{x}_{i+1|i} = \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \quad (8.9)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} e_{i+1} \quad (8.10)$$

$$e_{i+1} = z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} \quad (8.11)$$

$$P_{i+1|i} = F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T \quad (8.12)$$

$$P_{i+1|i+1} = P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T R_{e,i+1}^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i} \quad (8.13)$$

$$R_{e,i+1} = \hat{R}_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1|i} H_{i+1}^T. \quad (8.14)$$

Neste exemplo uma comparação entre o Filtro Singular Robusto (FSR) obtido no Capítulo 6 e o Filtro Bounded Data Uncertainties (BDU) apresentado em [42] é feita. Ressalta-se que na Equação (6.44) não é necessário o ajuste de nenhum parâmetro auxiliar de otimização, enquanto que no filtro BDU faz-se necessário o ajuste de $\hat{\lambda}$.

Os parâmetros utilizados na simulação são os mesmos utilizados em [42], ou seja,

$$F_i = \begin{bmatrix} 0.9802 & 0.0196 \\ 0 & 0.9802 \end{bmatrix}, G_{w,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (8.15)$$

e as seguintes matrizes de ponderação

$$Q_i = \begin{bmatrix} 1.9608 & 0.0195 \\ 0.0195 & 1.9605 \end{bmatrix}, R_{i+1} = 1, S_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As incertezas paramétricas são modeladas através de

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.0198 \\ 0 \end{bmatrix}, N_f = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Os resultados da Figura 8.1 foram obtidos considerando as matrizes (8.15) e (8.16), sendo que a variância do erro de estimativa foi calculado através do seguinte procedimento

$$\mathbf{E}\|x_i - \hat{x}_i\| = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_i^{(j)} - \hat{x}_i^{(j)}\|.$$

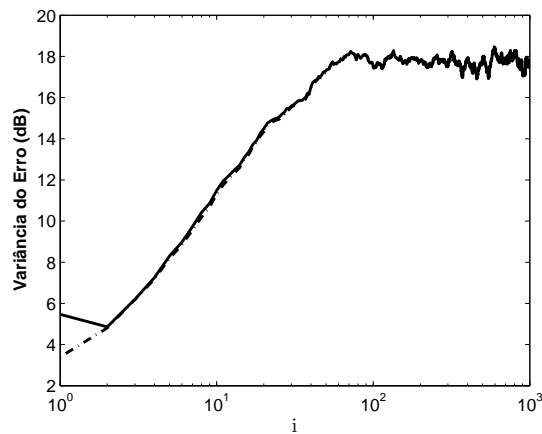


Figura 8.1: FSR(—) e Filtro BDU (- - -)

Cada ponto no instante i em cada curva é a Variância do Erro calculada sobre T experimentos ($T = 500$ trajetórias com $N = 1000$ pontos).

Para cada experimento j , a matriz $\|\Delta_1\| < 1$ é selecionada aleatoriamente e fixada para todo i .

As matrizes P encontradas são:

$$P_{BDU} = \begin{bmatrix} 8.0963 & 7.9298 \\ 7.9298 & 8.0721 \end{bmatrix}$$

$$P_{FSR} = \begin{bmatrix} 8.0869 & 7.6425 \\ 7.6425 & 7.9084 \end{bmatrix}$$

para os respectivos ajustes: $\hat{\lambda}_{BDU} = 5.8806E - 4$ por meio da expressão

$$\hat{\lambda}_{BDU} = (1 + \alpha) \|M_1^T H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} M_1\|, \quad \alpha = 0.5$$

e $\hat{\lambda}_{FSR}$ é dado no Teorema 6.1.1, onde $\mu_i \rightarrow \infty$.

A figura abaixo mostra a convergência do máximo valor singular da matriz P_i , calculada de acordo com a EAR (7.7), com $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

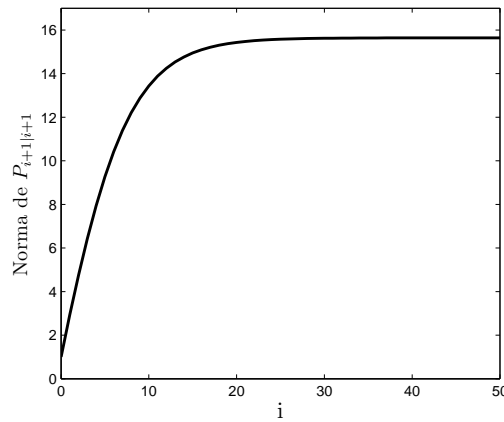


Figura 8.2: Evolução de $P_{i+1|i+1}$

8.2 Conclusões e Continuidade da Pesquisa

Neste trabalho, o problema de obtenção de estimativas recursivas robustas nas formas filtrada e preditora para sistemas singulares discretos no tempo sujeitos a incertezas paramétricas foi resolvido. Para isso, utilizaram-se duas técnicas de otimização não lineares: mínimos quadrados regularizados e funções penalidade.

O sistema dinâmico considerado nesta tese possui uma formulação mais geral, com ruídos de

estado e medida correlacionados e incertezas em todas as matrizes que o compõe. Sendo assim, os resultados obtidos generalizam os apresentados até o momento na literatura.

As estimativas recursivas robustas com as respectivas equações recursivas de Riccati foram expressas na forma de blocos matriciais, possuindo estrutura simples e simétrica, sendo que as expressões obtidas não necessitam de ajustes de parâmetros auxiliares, o que caracteriza uma importante contribuição da abordagem proposta nesta tese.

As propriedades de convergência e estabilidade dos filtros nominais e robustos foram detalhadamente demonstradas, provando-se que o filtro em estado permanente é estável e a recursão de Riccati é uma sequência monótona não decrescente limitada superiormente pela solução da Equação Algébrica de Riccati.

Mostrou-se que há equivalência entre as expressões obtidas para o filtro robusto neste projeto com as encontradas na literatura, através da simplificação do sistema singular considerado.

Como trabalho futuro pretende-se calcular filtros de Kalman para sistemas lineares singulares sujeitos a saltos Markovianos (SLSSM), possuindo formulação mais geral, com incertezas em todas as matrizes que os compõem, de acordo com o problema resolvido nesta tese.

Referências Bibliográficas

- [1] Albert, A. (1972). *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*. New York and London: Academic Press.
- [2] Anderson, B. D. O. e J. B. Moore (1979). *Optimal Filtering*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- [3] Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control*, Volume I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific.
- [4] Bianco, A., J. Y. Ishihara, e M. H. Terra (2008a). Optimal recursive linear filtering for general discrete time singular systems. *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Corsica, France*, 1663–1668.
- [5] Bianco, A. F. (2004). Filtros de Kalman para sistemas singulares em tempo discreto. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- [6] Bianco, A. F., J. Y. Ishihara, e M. H. Terra (2005). A deterministic approach for general discrete-time Kalman filter for singular systems. *Proceedings of the American Control Conference, Portland, OR, USA*, 4045–4050.
- [7] Bianco, A. F., J. Y. Ishihara, e M. H. Terra (2006). Estudo sobre a equação algébrica de Riccati associada à filtragem ótima de sistemas singulares discretos no tempo. *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática, Salvador, Brasil*.
- [8] Bianco, A. F., J. Y. Ishihara, e M. H. Terra (2008b). Optimal robust prediction for general discrete time singular systems. *Proceedings of the 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2008, Hanoi, Vietnam*.

- [9] Bianco, A. F., J. Y. Ishihara, M. H. Terra, e J. P. Cerri (2008). Filtragem robusta de Kalman para sistemas dinâmicos singulares discretos no tempo. *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática, Juiz de Fora, Brasil*.
- [10] Caines, P. e D. Mayne (1970). On the discrete time matrix Riccati equation of optimal control. *International Journal of Control* 12(5), 785–794.
- [11] Callier, F. M. e J. L. Willems (1981). Criterion for the convergence of the solution of the Riccati differential equation. *IEEE Transactions Automatic Control* 26(6), 1232–1242.
- [12] Cerri, J. P., M. H. Terra, e J. Y. Ishihara (2009). Recursive robust regulator for discrete-time state-space systems. *Proceedings of the American Control Conference, St. Louis, Missouri, USA*.
- [13] Dai, L. (1989). Impulsive modes and causality in singular systems. *International Journal of Control* 50(4), 1267–1281.
- [14] Darouach, M., M. Zasadzinski, e D. Mehdi (1993). State estimation of stochastic singular linear systems. *International Journal of Systems and Science* 24(2), 345–354.
- [15] de Souza, C. A., K. A. Barbosa, e F. Minyue (2008). Robust filtering for uncertain linear discrete-time descriptor systems. *Automatica* 44, 792–798.
- [16] de Souza, C. A., F. Minyue, e K. A. Barbosa (2006). Robust filtering for uncertain linear discrete-time descriptor systems. *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle 1*, 1228–1233.
- [17] de Souza, C. E., M. R. Gevers, e G. C. Goodwin (1986). Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. *IEEE Transactions Automatic Control* 31(9), 831–838.
- [18] Deng, Z. e Y. Liu (1999). Descriptor Kalman estimators. *International Journal of Systems and Science* 30(11), 1205–1212.
- [19] Dominguez, S. M., T. Keaton, e A. H. Sayed (2001). Comparison of robust estimation and Kalman filtering applied to fingertip tracking in human-machine interfaces. In *Proceedings of the Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, California, USA.
- [20] Einicke, G. A. e L. B. White (1999). Robust extended Kalman filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing* 47(9), 2596–2599.

-
- [21] Germani, A., C. Manes, e P. Palumbo (2001). Optimal linear filtering for stochastic Non-Gaussian descriptor systems. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA*, 2514–2519.
- [22] Hasan, M. A. e M. R. Azim-Sadjani (1995). Noncausal image modeling using descriptor approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II* 42(8), 536–540.
- [23] Horn, R. A. e C. R. Johnson (1996). *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [24] Huffel, S., V. Sima, S. H. A. Varga, e F. Delebecque (2004). High-performance numerical software for control. *IEEE Control Systems Magazine* 24(1), 60–76.
- [25] Ishihara, J. Y., A. F. Bianco, e M. H. Terra (2005). A deterministic approach for optimal recursive prediction of singular discrete-time systems. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*.
- [26] Ishihara, J. Y., A. F. Bianco, e M. H. Terra (2008). Recursive linear estimation for general discrete time linear systems. *submetido para a Automatica*.
- [27] Ishihara, J. Y. e M. H. Terra (2008). Robust state prediction for descriptor systems. *Automatica* 44, 1–5.
- [28] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e J. C. T. Campos (2005). Optimal recursive estimation for discrete-time descriptor systems. *International Journal of Systems and Science* 36(10), 605–615.
- [29] Ishihara, J. Y., M. H. Terra, e J. C. T. Campos (2006). Robust Kalman filter for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51(8), 1354–1358.
- [30] Kalman, R. E. (1960). Contributions to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana* 5, 102–119.
- [31] Keller, J. Y., S. Nowakowski, e M. Darouach (1992). State estimation and failure detection in singular systems. *Control Theory and Advanced Technology* 8(4), 755–762.
- [32] Kwon, S., K. Yang, e S. Park (2006). An effective Kalman filter localization method for mobile robots. In *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Beijing, China.

- [33] Kwon, S., K. Yang, S. Park, e Y. Ryuh (2005). Robust mobile robot localization with combined Kalman filter-perturbation estimator. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Alberta, Canada.
- [34] Lancaster, P. e L. Rodman (1995). *Algebraic Riccati Equations*, Volume 1. Oxford and New York: Oxford Science Publications.
- [35] Luenberger, D. G. (2003). *Linear and Nonlinear Programming*. Kluwer Academic Publishers.
- [36] Luenberger, D. V. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions Automatic Control* 22(3), 312–321.
- [37] Mettler, B., M. B. Tischler, e T. Kanade (2002). System identification modeling of a small-scale unmanned rotorcraft for flight control design. *Journal of the American Helicopter Society*, 50–63.
- [38] Mills, J. K. e A. A. Goldenberg (1989). Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. *IEEE Transactions Robototics and Automation* 68, 30–46.
- [39] Nikoukhah, R., S. L. Campbell, e F. Delebecque (1999). Kalman filtering for general discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(10), 1829–1839.
- [40] Nikoukhah, R., A. L. Willsky, e B. C. Levy (1992). Kalman filtering and Riccati equations for decriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 37(9), 1325–1342.
- [41] Sayed, A., V. Nascimento, e F. Cipparrone (2002). A regularized robust design criterion for uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Its Applications* 23(4), 1120–1142.
- [42] Sayed, A. H. (2001). A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46(7), 998–1013.
- [43] Shaked, U. e C. E. de Souza (1995). Robust minimum variance filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing* 43(11), 2474–2483.
- [44] Stevens, B. L. e F. L. Lewis (1991). *Aircraft Modeling, Dynamics and Control*. New York: Wiley.
- [45] Wang, F. e V. Balakrishnan (2002). Robust Kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties. *IEEE Transactions Signal Process.* 50(4), 803–813.

- [46] Xu, S. e J. Lam (2006). *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Springer-Verlag, London.
- [47] Zhang, F. (2005). *The Schur Complement and Its Applications*, Volume 4. Springer-Verlag, London.
- [48] Zhang, H., L. Xie, e Y. C. Soh (1998). Optimal recursive state estimation for singular stochastic discrete-time systems. *IEEE Conference Decision Control, Tampa, Florida, USA*, 2908–2913.
- [49] Zhang, H. S., L. Xie, e Y. C. Soh (1999). Optimal recursive filtering, prediction and smoothing for singular stochastic discrete-time systems. *IEEE Transactions Automatic Control* 44 (11), 2154–2158.
- [50] Zhou, K., C. Doyle, e K. Glover (1996). *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.