Campus de São Carlos

**CONTROLES H_2 , H_∞ e H_2/H_∞ APLICADOS A UM
ROBÔ MANIPULADOR SUBATUADO**

Autor: Paulo Hiroaqui Ruiz Nakashima

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 03 / 09 / 01

Ass.: *Guilherme*

Controles $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Aplicados a um Robô Manipulador Subatuado

Paulo H. R. Nakashima

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

DEDALUS - Acervo - EESC

31100036756

Class.	TESE-EESC
Cutt.	3855
Tombo	T0205/01

st 1200396

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

N163c Nakashima, Paulo H. R.
Controles H_2 , H_∞ e H_2/H_∞ aplicados a um robô
manipulador subatuado / Paulo H. R. Nakashima. -- São
Carlos, 2001.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra.

1. Controle robusto. 2. Robôs manipuladores
subatuados. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PAULO HIROAQUI RUIZ NAKASHIMA**

Dissertação defendida e julgada em 06-07-2001 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

aprovado

Prof. Dr. **ALUÍZIO FAUSTO RIBEIRO ARAÚJO**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

Prof. Livre-Doc. **PEDRO LUIS DIAS PERES**
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)

APROVADO

Prof. Doutor **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais,
Hiroaqui e Ivone, e à minha tia Alice,
por terem me proporcionado sempre a
melhor educação possível, permitindo
que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra, pela orientação, amizade, paciência, apoio, e pela confiança depositada para a realização deste trabalho.

Aos meus companheiros de laboratório, Adriano, Arthur, Daniel, Guilherme, Karla, Renato, Zé Carlos, e em especial Benedito e Tácio. Com certeza tudo seria mais difícil e muito menos divertido sem vocês.

Aos meus amigos (em ordem alfabética): Alexandre, Camila, Cristiano (Bart), Luis, Marcio, Matheus, Milena, Renata, Ronaldo, que muito me ajudaram, com quem muito aprendi, com os quais passei ótimos momentos, e que ficarão para sempre em minha lembrança.

A toda minha família, que soube compreender minha ausência e me apoiou nos momentos difíceis.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo suporte financeiro fornecido durante a realização deste trabalho, sem o qual não seria possível.

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	x
Lista de Abreviaturas e Siglas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Resumo	xvi
Abstract	xvii
1 Introdução	1
1.1 Revisão bibliográfica	2
1.2 Sumário estruturado	4
2 Modelagem dinâmica de manipuladores subatuados	6
3 O robô UArmII	10
3.1 Equações dinâmicas	12
3.1.1 Configuração AAA	14
3.1.2 Configuração APA	14
3.1.3 Configuração PAP	15
4 Controles $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	17
4.1 Equações Algébricas de Riccati	18
4.2 O controle $\mathcal{H}_2$	20
4.3 O controle $\mathcal{H}_\infty$	21
4.4 O controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	27
4.5 Ponderação de desempenho	30
4.6 Representações de incertezas não-estruturadas	31

5	Controle combinado	33
5.1	Controle por Torque Computado	33
5.2	Cálculo dos controladores	35
5.3	Seleção de K_p e K_v	37
5.4	Seleção de W_e e W_Δ	40
5.5	Determinação da planta aumentada e síntese $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	46
6	Simulação e implementação dos controladores	47
6.1	Testes de posicionamento	48
6.1.1	Configuração AAA	48
6.1.2	Configuração APA	57
6.1.3	Configuração PAP	66
6.2	Teste de robustez com variação de massa	75
6.2.1	Configuração AAA	75
6.2.2	Configuração APA	81
6.2.3	Configuração PAP	86
6.3	Teste de robustez com distúrbio de torque	91
7	Conclusões	95
A	Ambiente de controle	97
B	Listagens	101
B.1	Controlador $\mathcal{H}_2$	101
B.2	Controlador $\mathcal{H}_\infty$	104
B.3	Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	107
C		111
C.1	Configuração AAA	111
C.1.1	Controlador $\mathcal{H}_2$	111
C.1.2	Controlador $\mathcal{H}_\infty$	112
C.1.3	Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	115
C.2	Configuração APA	118
C.2.1	Controlador $\mathcal{H}_2$	118
C.2.2	Controlador $\mathcal{H}_\infty$	119
C.2.3	Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	122
C.3	Configuração PAP	125

C.3.1	Controlador $\mathcal{H}_2$	125
C.3.2	Controlador $\mathcal{H}_\infty$	126
C.3.3	Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	127
Referências Bibliográficas		129

Lista de Figuras

FIGURA 3.1	Robô manipulador subatuado UArmII	10
FIGURA 3.2	Equipamento completo utilizado no controle do UArmII . . .	11
FIGURA 3.3	Esquema do robô UArmII	12
FIGURA 4.1	Diagrama de blocos dos sistemas de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	17
FIGURA 4.2	Todas as soluções K	22
FIGURA 4.3	Configuração padrão do sistema com pesos realimentado . . .	30
FIGURA 4.4	Incertezas não-estruturadas	31
FIGURA 5.1	Diagrama de blocos do método do torque computado	34
FIGURA 5.2	Estrutura do controlador combinado	36
FIGURA 5.3	Diagrama de valores singulares da função sensibilidade S e do inverso da especificação de saída W_e , configuração AAA	45
FIGURA 5.4	Diagrama de valores singulares da função sensibilidade com- plementar T e do inverso de W_Δ , configuração AAA	45
FIGURA 6.1	Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	50
FIGURA 6.2	Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.	51
FIGURA 6.3	Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.	52
FIGURA 6.4	Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	53

FIGURA 6.5 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	54
FIGURA 6.6 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	55
FIGURA 6.7 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	56
FIGURA 6.8 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	59
FIGURA 6.9 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.	60
FIGURA 6.10 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.	61
FIGURA 6.11 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	62
FIGURA 6.12 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	63
FIGURA 6.13 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	64
FIGURA 6.14 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	65
FIGURA 6.15 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	68
FIGURA 6.16 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.	69
FIGURA 6.17 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.	70
FIGURA 6.18 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	71
FIGURA 6.19 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	72
FIGURA 6.20 Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	73

FIGURA 6.21 Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	74
FIGURA 6.22 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	77
FIGURA 6.23 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.	78
FIGURA 6.24 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	79
FIGURA 6.25 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	80
FIGURA 6.26 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	82
FIGURA 6.27 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.	83
FIGURA 6.28 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	84
FIGURA 6.29 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.	85
FIGURA 6.30 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	87
FIGURA 6.31 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.	88
FIGURA 6.32 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	89
FIGURA 6.33 Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.	90
FIGURA 6.34 Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.	92

FIGURA 6.35 Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	93
FIGURA 6.36 Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.	94
FIGURA A.1 <i>Underactuated Manipulator Control Environment</i> , o ambiente de controle do robô manipulador subatuado	98
FIGURA A.2 Janela gerada pelo ambiente de controle, mostrando os gráficos de posição, simulação e torque, em simulação e implementação.	100

Lista de Tabelas

TABELA 2.1	Relação entre a aceleração das juntas controladas e os torques ativos para todas as possíveis estratégias de controle.	9
TABELA 3.1	Relação dos parâmetros do robô UArmII.	13
TABELA 5.1	Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot Kp}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$	37
TABELA 5.2	Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot Kp}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$	38
TABELA 5.3	Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot Kp}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	39
TABELA 5.4	Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$	41
TABELA 5.5	Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$	41
TABELA 5.6	Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	42
TABELA 5.7	Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$	43
TABELA 5.8	Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$	43
TABELA 5.9	Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	44

TABELA 6.1	Índice de desempenho para a configuração AAA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	49
TABELA 6.2	Índice de desempenho para a configuração APA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	58
TABELA 6.3	Índice de desempenho para a configuração PAP, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	67
TABELA 6.4	Índice de desempenho para a configuração AAA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.	76
TABELA 6.5	Índice de desempenho para a configuração APA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.	81
TABELA 6.6	Índice de desempenho para a configuração PAP, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.	86

Lista de Abreviaturas e Siglas

A/D	analógico/digital
D/A	digital/analógico
EARs	equações algébricas de Riccati
GDLs	graus de liberdade
MIMO	múltiplas entradas, múltiplas saídas (<i>Multiple Input Multiple Output</i>)
UArmII	Underactuated Arm II

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	campo dos números reais
$\mathbb{C}$	campo dos números complexos
$j\mathbb{R}$	eixo imaginário
$\in$	pertence a
$:=$	definido como
$Re(\alpha)$	parte real de $\alpha \in \mathbb{C}$
I_n	matriz identidade $n \times n$
A_{ij}	elemento da i -ésima linha e da j -ésima coluna da matriz A
A^T	transposta de A
A^*	complexo conjugado transposto de A
A^{-1}	inversa de A
$tr(A)$	traço de A
$\lambda(A)$	auto-valor de A
$\rho(A)$	raio espectral de A
σ	o conjunto do espectro de A
$\bar{\sigma}(A)$	maior valor singular de A
$\underline{\sigma}(A)$	menor valor singular de A
σ_i	i -ésimo valor singular de A
$\ A\ $	norma espectral de A : $\ A\ = \bar{\sigma}(A)$
$\text{Im}(A)$	espaço imagem de A
$\mathcal{X}_-(A)$	subespaço estável invariante de A
$\mathcal{X}_+(A)$	subespaço antiestável invariante de A
$Ric(H)$	a solução estabilizante de uma EAR
γ	nível de desempenho $\mathcal{H}_\infty$

$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	representação de $C(sI - A)^{-1}B + D$
$\mathcal{F}(P, K)$	transformação fracional linear de P e K
$[x]$	dimensão do vetor x
m_i	massa do i -ésimo elo
I_i	inércia do i -ésimo elo
l_i	comprimento do i -ésimo elo
lc_i	distância entre a i -ésima junta e o centro de massa do i -ésimo elo
M	matriz de inércia
C	matriz de Coriolis e forças centrífugas
G	vetor de forças gravitacionais
b	vetor de torques não-inerciais
M_{est}	estimação da matriz de inércia
b_{est}	estimação do vetor de torques não inerciais
n	número de juntas
n_a	número de juntas ativas
n_p	número de juntas passivas
n_u	número de juntas passivas destravadas
n_l	número de juntas passivas travadas
q	vetor de posição das juntas
$\dot{q}$	vetor de velocidade das juntas
$\ddot{q}$	vetor de aceleração das juntas
$\ddot{q}_c$	vetor de aceleração das juntas controladas
q^d	vetor de posição desejada das juntas
$\dot{q}^d$	vetor de velocidade desejada das juntas
$\ddot{q}^d$	vetor de aceleração desejada das juntas
q_a	vetor de posição das juntas ativas
q_p	vetor de posição das juntas passivas
q_u	vetor de posição das juntas passivas destravadas
q_l	vetor de posição das juntas passivas travadas

τ	vetor de torques nas juntas
τ_a	vetor de torques nas juntas ativas
τ_p	vetor de torques nas juntas passivas
τ_u	vetor de torques nas juntas passivas destravadas
τ_l	vetor de torques nas juntas passivas travadas
u	entrada de controle
w	vetor de distúrbios externos
y	vetor de saídas medidas
z	vetor de saídas controladas

Resumo

NAKASHIMA P. H. R. (2001) Nakashima, Paulo Hiroaqui Ruiz *Controles $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Aplicados a um Robô Manipulador Subatuado*. São Carlos, 2001. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta os resultados da aplicação de três técnicas de controle utilizadas no projeto e implementação do controle de um manipulador subatuado planar de três juntas em série e de elos rígidos, projetado e construído pela Universidade Carnegie Mellon, EUA.

Devido ao alto grau de não-linearidade deste sistema, seria muito difícil implementar um controlador $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ que atuasse sozinho. Assim, propõe-se a utilização de um método de controle combinado: torque computado/ $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. No controle combinado, a porção correspondente ao torque computado lineariza e pré-compensa a dinâmica do modelo da planta nominal, enquanto a porção correspondente ao controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ realiza uma pós-compensação dos erros residuais, que não foram completamente eliminados pelo método torque computado.

Testes de acompanhamento de trajetória e testes de robustez são realizados aqui para comprovar a eficiência destes controladores, com resultados de implementação bastante satisfatórios.

Palavras-Chave: Controle Robusto; Robôs manipuladores subatuados.

Abstract

NAKASHIMA P.H.R. (2001) Nakashima, Paulo Hiroaqui Ruiz $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Controls Applied to an Underactuated Manipulator Robot. São Carlos, 2001. *Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.*

This work presents the application results of three control techniques used for the control design and implementation of a serial planar underactuated manipulator with three joints and rigid links, designed and built by the Carnegie Mellon University, USA.

Due to the high non-linearity degree of this system, it would be very difficult to implement an $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ or $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control which would actuate on the system by itself. Therefore, it is proposed a combined control method: computed torque/ $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ or $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. In the combined control, the portion corresponding to the computed torque linearizes and pre-compensates the dynamics of the nominal model, while the portion corresponding to the $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ or $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control realizes a pos-compensation of the residual errors, not completely removed by the computed torque method.

Trajectory tracking and robustness tests are performed here to demonstrate the efficiency of these controllers, with very satisfactory implementation results.

Key–Words: *Robust control; Underactuated robot manipulator.*

Capítulo 1

Introdução

Manipuladores mecânicos vêm sendo utilizados há várias décadas para a automação de tarefas repetitivas em ambientes industriais. Estes ambientes normalmente possuem fácil acesso em termos físicos e baixo risco à saúde humana. Porém, nos últimos anos, tem havido uma utilização cada vez maior de manipuladores em ambientes de difícil acesso ou inóspitos, como no interior de usinas nucleares, no fundo dos oceanos e no espaço. O ambiente de trabalho dos manipuladores desta nova gama de aplicações faz com que sua manutenção, após uma falha mecânica ou elétrica, seja custosa e demorada, o que faz com que estes mecanismos necessitem de sofisticadas metodologias de controle tolerante a falhas. Após a ocorrência de uma falha em um de seus atuadores, o manipulador torna-se um sistema subatuado. O controle de um manipulador após a ocorrência de uma falha é fundamental do ponto de vista de operação, principalmente nos casos descritos acima, em que a localização do manipulador impede sua manutenção de forma fácil. Sendo assim, tanto a pesquisa de técnicas de detecção e isolamento de falhas, como de técnicas de controle pós-falha, ou seja, técnicas de controle para sistemas subatuados, se torna importante.

Uma técnica bastante utilizada no controle de manipuladores é o controlador particionado ou torque computado (*computed-torque method*, CRAIG (1986)), cuja lei de controle é dividida em duas partes. Uma das partes é baseada no modelo dinâmico nominal da planta e denominada *model based*, e que basicamente objetiva transformar a planta não-linear multivariável (robô) num conjunto de sistemas lineares desacoplados. A outra parte, denominada *error driven*, fica responsável pelo ajuste baseado no erro entre o movimento desejado e o real, ou seja, nos erros de posição e velocidade. Se

tivermos conhecimento perfeito de todos os parâmetros do robô e não houver nenhum distúrbio externo ao sistema, o método de torque computado é capaz de proporcionar excelente qualidade em todas as configurações do robô.

Já na abordagem tipo controle robusto, o controlador tem uma estrutura fixa que produz um desempenho aceitável para um dado conjunto de incertezas da planta. O objetivo do projeto de sistemas de controle robusto é sintetizar uma lei de controle que mantenha os sinais de erro e de resposta de um sistema dentro de tolerâncias pré-especificadas, apesar dos efeitos de incertezas. Estas incertezas podem ser externas (distúrbios e ruídos) ou internas (imperfeições do modelo da planta) ao sistema. Podem-se destacar duas importantes características a serem obtidas no projeto de sistemas realimentados: robustez de desempenho e robustez de estabilidade. A técnica de controle $\mathcal{H}_2$ é baseada na minimização da norma quadrática da função de transferência entre os sinais de distúrbio na entrada da planta e os sinais de saída da mesma. O controle $\mathcal{H}_\infty$ tem o objetivo fundamental de minimizar o efeito de distúrbios na saída da planta, mas em contrapartida apresenta limitações na qualidade do desempenho do sistema. O controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ alia a capacidade da técnica $\mathcal{H}_\infty$ de minimizar os efeitos dos distúrbios de entrada na saída da planta com a qualidade de desempenho proporcionada pela técnica $\mathcal{H}_2$.

Neste trabalho são utilizadas três técnicas de controle. Imperfeições de modelagem e distúrbios externos introduzem erro e degradam o desempenho de controle do método de torque computado. Para superar esta deficiência, aliamos este método aos controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, obtendo assim controladores combinados.

Resultados parciais deste trabalho podem ser encontrados em TERRA et al. (2000b) e TERRA et al. (2000).

1.1 Revisão bibliográfica

Neste item faz-se uma breve revisão bibliográfica sobre os artigos, livros e manuais que deram suporte a este trabalho.

A modelagem de manipuladores subatuados e a análise das equações dinâmicas resultantes são apresentadas em diferentes formas, por diversos autores. ARAI & TACHI (1991) obtiveram uma relação de malha aberta entre as forças aplicadas às juntas

atuadas e as acelerações das juntas não atuadas, propõem uma linearização por realimentação de estados e apresentam o conceito de controle sequencial em duas fases para um manipulador com juntas passivas. LEWIS et al. (1993) e BERGERMAN (1996) mostram toda a modelagem matemática para robôs manipuladores, sendo que BERGERMAN (1996) trata especificamente de manipuladores subatuados, apresentando três estratégias de controle. BERGERMAN et al. (1999) e SOARES et al. (1999) apresentam o ambiente de controle utilizado nos testes aqui apresentados.

Sobre a teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$, DOYLE et al. (1989) é uma referência fundamental. Este artigo resolve o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ basicamente através da resolução de duas Equações Algébricas de Riccati (EARs) e calcula um controlador cuja ordem é a mesma da planta aumentada. SAFONOV et al. (1989) generalizam a solução desenvolvida por DOYLE et al. (1989). A solução apresentada por DOYLE et al. (1989) impõe restrições à planta a ser controlada, e SAFONOV et al. (1989) propõem uma transformação das matrizes A , B , C e D que descrevem a planta aumentada de tal forma que as restrições à planta sejam contornadas e, assim, uma gama maior de problemas possa ser resolvida.

ZHOU et al. (1995) e ZHOU & DOYLE (1998) são ótimas referências para se entender os problemas de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Nestes dois livros é feito um apanhado geral de todo o desenvolvimento teórico que ocorreu até o momento de suas publicações.

A aplicação do controle $\mathcal{H}_\infty$ apresenta uma dificuldade relativamente grande, a tradução das especificações de desempenho para as funções peso $W(s)$. BEAVEN et al. (1996) e ZHOU & DOYLE (1998) fornecem algumas sugestões e diretrizes para a seleção inicial destas funções no processo de projeto de um controlador $\mathcal{H}_\infty$.

A teoria sobre controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ utilizada neste trabalho está baseada nos trabalhos de BERNSTEIN & HADDAD (1989), ZHOU et al. (1994) e ZHOU et al. (1994b).

Para o projeto dos controladores utilizou-se o programa MATLAB. CHIANG & SAFONOV (1992) e BALAS et al. (1994) descrevem as ferramentas que possibilitam o projeto dos controladores.

1.2 Sumário estruturado

Este trabalho é uma aplicação prática das teorias de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ a um robô manipulador subatuado de três juntas. O trabalho envolve desde a análise teórica até a sua implementação prática.

No capítulo 2 é feita uma breve descrição dos tipos de sistemas subatuados e de algumas características deste tipo de sistema, como os conceitos de acoplamento dinâmico e de controle sequencial proposto por ARAI & TACHI (1991). A modelagem dinâmica para manipuladores subatuados é apresentada. As três estratégias de controle para o robô subatuado propostas por BERGERMAN (1996) são descritas neste capítulo.

No capítulo 3 é apresentado o robô manipulador subatuado de três juntas utilizado neste trabalho, UArmII (*Underactuated Arm II*), adquirido com o auxílio da FAPESP (projeto no. 98/00649-5), montado no laboratório de robótica da *Carnegie Mellon University*, EUA, e instalado no Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) do Departamento de Engenharia Elétrica da USP São Carlos.

No capítulo 4, os conceitos essenciais das teorias de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ são apresentados. Aspectos fundamentais do projeto são abordados, e com base nestes conceitos preliminares, o problema de controle é formulado e sua solução é apresentada. O conceito de representação de incertezas não-estruturadas é abordado, pois é de grande importância para a especificação de robustez do sistema. As funções peso $W(s)$ recebem interpretação do ponto de vista prático para que, mais adiante, se possa aplicar estas idéias às especificações do projeto de controle.

No capítulo 5, é feita a aplicação dos conceitos desenvolvidos no capítulo 4. Apresenta-se o controle combinado e o cálculo dos controladores para o UArmII.

O capítulo 6 contém os resultados dos controladores obtidos no capítulo 5, tanto em simulação como em implementação real. São feitos testes de robustez para testar o desempenho dos três controladores.

O capítulo 7 contém as considerações feitas sobre o trabalho em termos dos resultados obtidos.

No apêndice A é mostrado o ambiente de controle utilizado para a validação dos controladores. No apêndice B são mostradas as listagens de alguns programas utilizados,

e o apêndice C mostra todos os controladores obtidos em forma matricial.

O controle de alta qualidade para manipuladores tem sido uma das questões mais importantes no campo da robótica e numerosos sistemas de controle têm sido estudados nestas duas últimas décadas. Na maioria dos casos encontrados na literatura, estas técnicas de controle, tais como controle baseado em modelo (*model-based control*), controle adaptativo, redes neurais, entre outras, produzem bons resultados em simulações, porém em muitos casos a distância entre simulação e implementação do controle de movimento em manipuladores reais é significativa. As contribuições deste trabalho estão nos bons resultados atingidos nas implementações reais, na pequena distância entre projeto e implementação, ou seja, os controladores projetados funcionam na prática sem a necessidade de ajustes posteriores, e também no fato de não haver, até o presente momento, nenhuma publicação que proponha controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas subatuados.

Capítulo 2

Modelagem dinâmica de manipuladores subatuados

Neste capítulo é feita uma breve descrição de sistemas subatuados, e são apresentados os conceitos principais da modelagem dinâmica no espaço das juntas de um manipulador subatuado proposto por BERGERMAN (1996).

O termo subatuado refere-se ao fato de nem todas as juntas ou graus de liberdade (*GDLs*) do sistema são equipados com atuadores, ou são diretamente controlados. Há três tipos de sistemas subatuados. Primeiro, um sistema pode se tornar subatuado quando um ou mais atuadores começam a não funcionar propriamente. O controle deste tipo de sistema subatuado é importante do ponto de vista de tolerância à falhas, pois algumas vezes é necessário que o robô complete a sua tarefa antes que possa ser realizado o reparo, e.g., se um robô estiver manipulando resíduos radioativos e ocorre uma falha, necessita-se que ele armazene este material em local seguro até que seja possível a aproximação humana. Um sistema também pode ser subatuado quando ele é especificamente projetado para tal, ou quando o operador deliberadamente mantém um ou mais atuadores inoperantes durante uma tarefa. Alguns sistemas são projetados desta maneira pois em alguns casos, reduzindo o número de atuadores, o consumo de energia pode se tornar menor. Finalmente, a subatuação pode ser uma característica inerente ao sistema, como por exemplo um satélite espacial em órbita equipado com um manipulador robô convencional. Neste caso, a base do manipulador é o próprio satélite, que é um elemento passivo.

Algumas características importantes de sistemas subatuados são:

- acoplamento dinâmico: os *GDLs* de um sistema subatuado são normalmente acoplados por forças dinâmicas. Esta característica é geralmente indesejada em mecanismos robóticos comuns, pois dificulta o controle dos *GDLs*. Porém, em sistemas subatuados, o controle dos *GDLs* não atuados só pode ser realizado indiretamente, através de forças aplicadas aos *GDLs* atuados, ou seja, o acoplamento dinâmico é uma característica necessária.
- controlabilidade de *GDLs* não atuados e controle sequencial: todos os *GDLs* de um sistema subatuado geralmente podem ser controlados (porém não concomitantemente) direta ou indiretamente pelos *GDLs* atuados. Assim, é possível controlar todos os *GDLs* até sua posição desejada, utilizando uma sequência de controle bem projetada, ou seja, controle sequencial de alguns *GDLs*, seguido do controle de mais alguns, e assim por diante, até que todos os *GDLs* sejam posicionados.
- restrições não-holonômicas: geralmente as equações dinâmicas de sistemas subatuados possuem restrições não-holonômicas associadas. O termo não-holonômico é usado para descrever um sistema cujas coordenadas generalizadas dependem de suas derivadas temporais. Estas restrições aparecem naturalmente devido à falta de atuação sobre certos *GDLs*, e devido a estas restrições que se é capaz de controlar os *GDLs* não atuados de sistemas subatuados.
- não linearidade e dependência de parâmetros cinemáticos e dinâmicos: as equações dinâmicas de sistemas subatuados são geralmente não lineares, e seus modelos cinemáticos e dinâmicos podem depender não somente de sua estrutura, como também de suas características inerciais.

O problema de controle no espaço das juntas pode ser enunciado da seguinte forma: dado um manipulador subatuado com n_a atuadores e n_p freios, e posições inicial e final desejadas $q(t_0)$ e q^d respectivamente, controlar todas as juntas de modo que após um tempo $T > 0$, $q(T) = q^d$. Considere um robô manipulador de elos rígidos e de n -juntas em série, sendo n_a o número de juntas ativas (juntas que possuem atuador e freio) e n_p o número de juntas passivas (juntas que possuem apenas freio, que quando acionado, mantém a posição angular da junta fixa, ou seja, “trava” a junta). Seja $q \in \mathbb{R}^n$ um

vetor composto pelas posições angulares das juntas e $\tau \in \mathbb{R}^n$ um vetor composto pelos torques aplicados às juntas. A equação dinâmica de um manipulador pode ser escrita como (BERGERMAN (1996)):

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}), \quad (2.1)$$

sendo $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia, simétrica e definida positiva, e $b(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de torques não inerciais, composto pela matriz de Coriolis e termos centrífugos $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o vetor de torques gravitacionais $G(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e o vetor de torques friccionais $F(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Manipuladores subatuados diferem dos totalmente atuados pois são equipados com um número de atuadores que é sempre menor que o número de *GDLs*. Portanto, nem todos os *GDLs* podem ser controlados ativamente ao mesmo tempo. Segundo ARAI & TACHI (1991), para controlar todas as juntas de um manipulador subatuado, deve-se trocar as juntas que estão sendo controladas, ou seja, através de um controle sequencial, sendo que no máximo n_a juntas podem ser controladas ao mesmo tempo. Este conjunto de juntas controladas pode conter apenas juntas ativas, ou um subconjunto das n_p juntas passivas (quando $n_p \geq n_a$), ou uma combinação de ativas e passivas. Assim, existem três maneiras possíveis de compor um vetor de juntas controladas $q_c \in \mathbb{R}^{n_a}$, cada uma levando a uma estratégia de controle diferente para o manipulador subatuado. Primeiro, q_c pode conter apenas as juntas ativas. Quando este é o caso, escolhe-se manter todas as outras juntas (i.e., as juntas passivas) travadas. Esta escolha nos permite controlar as juntas ativas como se o manipulador fosse totalmente atuado. Este caso é definido como estratégia de controle *A*, porque apenas as juntas ativas estão sendo controladas, e define-se um movimento *A* como sendo o movimento do manipulador subatuado no espaço das juntas quando a estratégia *A* é executada. Segundo, q_c pode conter apenas as juntas passivas (o que só é possível quando o número de juntas passivas é pelo menos igual a n_a). Neste caso, escolhe-se manter todas as outras juntas passivas, se existir mais alguma, travadas enquanto q_c é controlado. Esta escolha garante que as juntas passivas que não estão sendo controladas não se movam e não introduzam distúrbios dinâmicos nas juntas que estão sendo controladas. Esta estratégia é denominada estratégia de controle *P*, porque apenas as juntas passivas estão sendo controladas, e quando esta estratégia é utilizada, diz-se que o manipulador realiza um

Tabela 2.1: Relação entre a aceleração das juntas controladas e os torques ativos para todas as possíveis estratégias de controle.

<i>Estratégia de controle</i>	$\bar{M}_{ac}$	$\bar{b}_a$
<i>A</i>	M_{aa}	b_a
<i>P</i>	$M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu}$	$-M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a$
<i>AP</i>	$M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc}$	$-M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a$

movimento *P*. Terceiro, o vetor q_c pode conter tanto as juntas ativas quanto as passivas. Neste caso, também, pode-se manter todas as outras juntas passivas, se existir mais alguma, travadas, para garantir que elas não se movam. Este caso é denominado estratégia de controle *AP* (movimento *AP*), porque tanto as juntas ativas quanto as passivas estão sendo controladas.

Todas as três estratégias de controle acima levam a relações de malha aberta entre $\ddot{q}_c$ e τ_a na forma:

$$\tau_a = \bar{M}_{ac}\ddot{q}_c + \bar{b}_a. \quad (2.2)$$

A Tabela 2.1 mostra as expressões de $\bar{M}_{ac}$ e $\bar{b}_a$ para as três estratégias de controle. Nesta tabela, o índice *a* é usado para denotar elementos relativos às juntas ativas, o índice *u* para juntas passivas destravadas, o índice *c* para juntas controladas, e o índice *r* para as juntas restantes, que são as juntas que não estão sendo controladas, exceto as juntas passivas travadas, pois estas não contribuem com o movimento do sistema.

Outra equação importante a ser considerada é a equação diferencial de segunda ordem que representa as restrições impostas ao sistema pelas juntas passivas destravadas, dada por

$$M_{uc}\ddot{q}_c + M_{ur}\ddot{q}_r + b_u = 0. \quad (2.3)$$

Esta é uma restrição não-holônica de segunda ordem que, em geral, não pode ser integrada para que se obtenha uma relação entre as velocidades ou posições das juntas ativas e passivas. Esta equação rege o movimento das juntas ativas quando estas estão controlando juntas passivas, quando se usa uma estratégia *P*, por exemplo.

Capítulo 3

O robô UArmII

O manipulador subatuado utilizado como planta neste trabalho (Figura 3.1), adquirido com o auxílio da FAPESP (projeto no. 98/00649-5), recebeu o nome de UArmII (*Underactuated Arm II*), foi montado no laboratório de robótica da *Carnegie Mellon University*, Pittsburgh, EUA, e encontra-se instalado no Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) do Departamento de Engenharia Elétrica da USP São Carlos. Trata-se de um manipulador planar de 3 juntas em série com elos rígidos. As juntas e elos são numeradas de 1 a 3, sendo a junta 1 e o elo 1 os mais próximos à base do manipulador, que é fixa a uma mesa de granito, horizontal e plana. Um sistema de ar comprimido produz um filme de ar entre a mesa e a base das juntas 2, 3 e do efetuador, fazendo com que as bases destes componentes “flutuem” sobre a mesa, reduzindo consideravelmente o atrito entre estas partes. Cada junta é equipada com um atuador (motor de corrente contínua), um freio pneumático e um *encoder* que mede a posição angular da junta. Quando o atuador está aplicando torque à junta, diz-se que a junta é ativa (A), caso contrário, a junta é passiva (P). Portanto, o robô pode assumir 7 configurações: AAA, AAP, APA, APP, PAA, PAP e PPA.

Figura 3.1: Robô manipulador subatuado UArmII

Figura 3.2: Equipamento completo utilizado no controle do UArmII

A Figura 3.2 mostra o equipamento utilizado para o controle do UArmII (microcomputador, circuitos de potência, fonte de alimentação). O sistema possui três entradas (torque τ aplicado a cada uma das três juntas) e três saídas (posição angular q de cada junta), e funciona da seguinte maneira: cada um dos três *encoders* fornece uma tensão contínua proporcional à posição angular, q_i , da junta i ; o microcomputador coleta estas três tensões e converte seus valores analógicos para valores digitais através de um conversor A/D; os valores destas tensões (posições), são as entradas de um algoritmo de controle que, para cada período de amostragem, calculará três valores de saída; os valores digitais destas saídas são convertidos em tensões analógicas através de um conversor D/A, que são aplicadas a um circuito de potência; por sua vez, o circuito de potência fornece uma corrente a cada atuador, que produz o torque τ_i necessário para mover cada junta.

Um diagrama esquemático do sistema está mostrado na Figura 3.3. De acordo com esta figura:

- m_i : massa do elo i ,
- l_i : comprimento do elo i ,
- l_{ci} : distância da junta i ao centro de massa do elo i ,
- θ_i : ângulo da junta i ,
- I_i : momento de inércia do elo i ,

com $i \in \{1, 2, 3\}$.

Figura 3.3: Esquema do robô UArmII

3.1 Equações dinâmicas

Nesta seção, aplicamos os resultados apresentados no capítulo 2 ao UArmII. Reescrevendo a equação (2.1),

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) .$$

No caso do UArmII temos $n=3$ e a equação (2.1) se torna

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} , \quad (3.1)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + \\ &\quad m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2) + 2l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) ; \\ M_{12} &= I_2 + I_3 + m_2 (l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)) + \\ &\quad m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) ; \\ M_{13} &= I_3 + m_3 (l_{c3}^2 + l_1 l_{c3} \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) ; \\ M_{21} &= M_{12} ; \\ M_{22} &= I_2 + I_3 + m_2 (l_{c2}^2) + m_3 (l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) ; \\ M_{23} &= I_3 + m_3 (l_{c3}^2 + l_2 l_{c3} \cos(\theta_3)) ; \end{aligned}$$

$$M_{31} = M_{13} ;$$

$$M_{32} = M_{23} ;$$

$$M_{33} = I_3 + m_3(l_{c_3}^2) ;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= (-m_2 l_1 l_{c_2} \sin(\theta_2) + m_3(-l_1 l_2 \sin(\theta_2) - l_1 l_{c_3} \sin(\theta_2 + \theta_3))) \\ &\quad (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3(-l_1 l_{c_3} \sin(\theta_2 + \theta_3) - l_2 l_{c_3} \sin(\theta_3)) \\ &\quad (\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) + m_1 g l_{c_1} \cos(\theta_1) + \\ &\quad m_2 g(l_1 \cos(\theta_1) + l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_3 g(l_1 \cos(\theta_1) + \\ &\quad l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c_3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) ; \\ b_2 &= (m_2 l_1 l_{c_2} \sin(\theta_2) + m_3(l_1 l_2 \sin(\theta_2) + l_1 l_{c_3} \sin(\theta_2 + \theta_3)))\dot{\theta}_1^2 - \\ &\quad m_3 l_2 l_{c_3} \sin(\theta_3)(\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) + \\ &\quad m_2 g(l_{c_2} \cos(\theta_1 + \theta_2)) + m_3 g(l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_{c_3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) \quad e \\ b_3 &= m_3(l_1 l_{c_3} \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 l_{c_3} \sin(\theta_3))\dot{\theta}_1^2 + \\ &\quad m_3 l_2 l_{c_3} \sin(\theta_3)(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_3 g(l_{c_3} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) . \end{aligned}$$

A Tabela 3.1 mostra os parâmetros do UArmII utilizados no projeto.

Tabela 3.1: Relação dos parâmetros do robô UArmII.

	m (Kg)	l (m)	l_c (m)	I (Kg $\times$ m ²)
Elo 1	0.850	0.203	0.096	0.0075
Elo 2	0.850	0.850	0.096	0.0075
Elo 3	0.625	0.203	0.077	0.0060

Os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 variam com o tempo. Portanto, a cada instante amostral são calculadas novas matrizes M e b .

Como foi dito anteriormente, o UArmII pode assumir 7 configurações, AAA, AAP, APA, APP, PAA, PAP e PPA. Neste trabalho, utilizaremos apenas 3 delas: AAA, APA e PAP. A seguir, são mostradas as equações que descrevem a dinâmica de cada uma

destas 3 configurações. Neste ponto, é interessante reescrever a equação (2.2):

$$\tau_a = \overline{M}_{ac}\ddot{q}_c + \overline{b}_a .$$

3.1.1 Configuração AAA

Nesta configuração, existe apenas 1 fase de controle, visto que todas as juntas são ativas. O vetor de juntas controladas q_c , portanto, é composto por todas as três juntas ativas, e a estratégia de controle utilizada nesta configuração é a estratégia *A*. Assim, os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} , \quad (3.2)$$

$$\overline{M}_{ac} = M_{aa} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} , \quad (3.3)$$

$$\ddot{q}_c = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} e \quad (3.4)$$

$$\overline{b}_a = b_a \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} . \quad (3.5)$$

3.1.2 Configuração APA

Nesta configuração, existem 2 fases de controle. Na primeira fase, utiliza-se uma estratégia de controle *AP*, onde as juntas 2 (passiva, controlada através de acoplamento dinâmico com as juntas 1 e 3) e junta 3 (ativa) são controladas. Neste caso, os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix} , \quad (3.6)$$

$$\overline{M}_{ac} = M_{ac} - M_{ar}M_{ur}^{-1}M_{uc} = \begin{bmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{31} \end{bmatrix} M_{21}^{-1} \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\ddot{q}_c = \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} e \quad (3.8)$$

$$\bar{b}_a = -M_{ar}M_{ur}^{-1}b_u + b_a = -\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{31} \end{bmatrix} M_{21}^{-1}b_2 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A primeira fase de controle termina quando a junta 2 atinge sua posição angular desejada e é travada. A junta 3 pode ou não ter atingido sua posição final. Na segunda fase de controle, são controladas as juntas ativas 1 e 3 (caso esta última já não tenha sido travada na primeira fase), utilizando portanto uma estratégia *A*. Os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\overline{M}_{ac} = M_{aa} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\ddot{q}_c = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} e \quad (3.12)$$

$$\bar{b}_a = b_a \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

3.1.3 Configuração PAP

Nesta configuração, existem 3 fases de controle. Na primeira fase, utiliza-se uma estratégia de controle *P*, onde a junta 1 (passiva, controlada através de acoplamento dinâmico com a junta 2) é controlada. A junta 3 é mantida travada em sua posição angular inicial. Nesta fase, os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \tau_2, \quad (3.14)$$

$$\overline{M}_{ac} = M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu} = M_{21} - M_{22}M_{12}^{-1}M_{11}, \quad (3.15)$$

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_1 \quad e \quad (3.16)$$

$$\bar{b}_a = -M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a = -M_{22}M_{12}^{-1}b_1 + b_2 . \quad (3.17)$$

A primeira fase de controle termina quando a junta 1 atinge sua posição angular desejada e é travada. A junta 2 então vai até uma determinada posição angular, escolhida previamente, de modo que haja espaço físico suficiente para levar a junta 3 até sua posição desejada. Quando esta posição é atingida, inicia-se a segunda fase de controle. Agora, a junta 3 é destravada e é levada até sua posição final desejada, através de acoplamento dinâmico, pela junta 2. A estratégia utilizada é novamente P e os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \tau_2 , \quad (3.18)$$

$$\bar{M}_{ac} = M_{au} - M_{aa}M_{ua}^{-1}M_{uu} = M_{23} - M_{22}M_{32}^{-1}M_{33} , \quad (3.19)$$

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_3 \quad e \quad (3.20)$$

$$\bar{b}_a = -M_{aa}M_{ua}^{-1}b_u + b_a = -M_{22}M_{32}^{-1}b_3 + b_2 . \quad (3.21)$$

Quando a junta 3 atinge sua posição angular final e é travada, tem início a última fase de controle. Nesta fase, a junta 2 vai até sua posição angular final, e uma estratégia A é utilizada. Os elementos da equação (2.2) são:

$$\tau_a = \tau_2 , \quad (3.22)$$

$$\bar{M}_{ac} = M_{aa} = M_{22} , \quad (3.23)$$

$$\ddot{q}_c = \ddot{q}_2 \quad e \quad (3.24)$$

$$\bar{b}_a = b_a = b_2 . \quad (3.25)$$

Capítulo 4

Controles $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Este capítulo contém os conceitos essenciais das teorias de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura de CHIANG & SAFONOV (1992), DOYLE et al. (1989), SAFONOV et al. (1989), ZHOU & DOYLE (1998), ZHOU et al. (1995), BERNSTEIN & HADDAD (1989), ZHOU et al. (1994) e ZHOU et al. (1994b).

O sistema considerado aqui é descrito pelo seguinte diagrama de blocos padrão mostrado na figura 4.1.

Figura 4.1: Diagrama de blocos dos sistemas de controle $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O diagrama contém dois blocos principais, a planta $P(s)$ e o controlador $K(s)$. A planta possui dois conjuntos de sinais de entrada e dois conjuntos de sinais de saída. As entradas da planta são classificadas como entradas de controle e entradas externas. A entrada de controle, u , é a saída do controlador. A entrada externa, w , é na verdade um conjunto de entradas, tais como distúrbios externos e sinais de referência. A principal distinção entre w e u é que o controlador não exerce influência sobre as entradas externas. As saídas da planta também são caracterizadas em dois grupos. O

primeiro grupo, y , são sinais medidos e realimentados. O segundo grupo, z , são as saídas reguladas. A realização da matriz de transferência P é dada por:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] . \quad (4.1)$$

Uma representação do sistema da figura 4.1 por funções de transferência é:

$$z = P_{11}w + P_{12}u \quad (4.2)$$

$$y = P_{21}w + P_{22}u \quad (4.3)$$

$$u = Ky . \quad (4.4)$$

Combinando as equações (4.2), (4.3) e (4.4), obtemos a função transferência de malha fechada T_{zw} entre as saídas reguladas z e entradas externas w , chamada transformação fracional linear, e dada por

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} . \quad (4.5)$$

Antes de prosseguir com a apresentação dos resultados é oportuno esclarecer a notação relativa às Equações Algébricas de Riccati.

4.1 Equações Algébricas de Riccati

Equações algébricas de Riccati (EARs) desempenham um papel importante na síntese de controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. A forma fundamental de uma EAR é descrita por:

$$E^T X + XE + XRX + Q = 0 , \quad (4.6)$$

sendo $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com Q e R simétricas. Esta equação de Riccati está associada à matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} E & -R \\ -Q & -E^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} . \quad (4.7)$$

Assumindo que H não possua autovalores no eixo imaginário, então deve haver n autovalores em $\text{Re}(s) < 0$ e n em $\text{Re}(s) > 0$. Considere os dois subespaços espectrais n -dimensionais, $\mathcal{X}_-(H)$ e $\mathcal{X}_+(H)$: o primeiro é o subespaço invariante correspondente aos autovalores em $\text{Re}(s) < 0$ e o último corresponde aos autovalores em $\text{Re}(s) > 0$. Encontrando uma base para $\mathcal{X}_-(H)$, dispondo os vetores desta base de modo a formar uma matriz, e particionando esta matriz, temos

$$\mathcal{X}_-(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

com $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Se X_1 é não singular, ou, equivalentemente, se os dois subespaços

$$\mathcal{X}_-(H), \quad \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

são complementares, podemos fazer $X := X_2 X_1^{-1}$. Então X é unicamente determinada por H , i.e., $H \mapsto X$ é uma função, que será denotada por Ric . Seja $\text{dom}(\text{Ric})$ a notação utilizada para o domínio de Ric , que consiste de matrizes Hamiltonianas que possuem duas propriedades: H não possui autovalores no eixo imaginário e os dois subespaços em (4.9) são complementares. Então, $X = \text{Ric}(H)$ é chamada *solução estabilizante*, e

$$\text{Ric} : \quad \text{dom}(\text{Ric}) \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Se $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, $X = \text{Ric}(H)$ possui as seguintes propriedades:

- (i) X é real e simétrica;
- (ii) X satisfaz a equação algébrica de Riccati $E^T X + X E + X R X + Q = 0$;
- (iii) $E + R X$ é estável.

4.2 O controle $\mathcal{H}_2$

Nesta seção, a realização da matriz P da equação (4.1) é dada por:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right], \quad (4.10)$$

sendo a matriz D_{22} é considerada zero para que P_{22} seja estritamente própria. Não há perda de generalidade nesta suposição, pois o controlador para o caso $D_{22} \neq 0$ pode ser recuperado do caso $D_{22} = 0$ (ZHOU et al. (1995)). D_{11} é assumida como sendo zero para garantir que o problema seja bem definido. O caso $D_{11} \neq 0$ será discutido mais adiante. As seguintes hipóteses adicionais são feitas para esta seção:

- (i) (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável;
- (ii) D_{12} tem posto coluna pleno e D_{21} tem posto linha pleno;
- (iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno para todo ω ;
- (iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tem posto linha pleno para todo ω .

A hipótese (i) serve para garantir a estabilizabilidade de P , e as hipóteses (iii) e (iv), juntamente com (i), garantem que as duas matrizes Hamiltonianas associadas ao problema $\mathcal{H}_2$ pertencem ao $\text{dom}(\text{Ric})$. A hipótese (ii) garante que o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ é não singular.

O problema de controle $\mathcal{H}_2$ é encontrar um controlador K próprio, real e racional, que estabilize internamente P e minimize a norma $\mathcal{H}_2$ da matriz de transferência T_{zw} .

A solução do controle $\mathcal{H}_2$ envolve a resolução de duas *EARs* associadas às matrizes Hamiltonianas dadas pelas equações (4.11) e (4.12).

$$\mathcal{H}_2 := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* C_1 & B_2^* \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$J_2 := \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2^* \\ -B_1 D_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{21} B_1^* & C_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Definindo:

$$F_2 := -(B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1), \quad (4.13)$$

$$L_2 := -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*) \quad (4.14)$$

e

$$\hat{A}_2 := A + B_2 F_2 + L_2 C_2, \quad (4.15)$$

com $X_2 := Ric(\mathcal{H}_2)$ e $Y_2 := Ric(J_2)$, existe um único controlador, ótimo, dado por

$$K_{opt}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.16)$$

Considerando a estrutura do sistema generalizado, agora com D_{11} não necessariamente sendo igual a zero:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right], \quad (4.17)$$

ZHOU et al. (1995) mostram que o controlador K para este tipo de sistema é dado por:

$$K_{opt}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 - B_2 D_K C_2 & -(L_2 - B_2 D_K) \\ \hline F_2 - D_K C_2 & D_K \end{array} \right], \quad (4.18)$$

com $D_K := -D_{12}^* D_{11} D_{21}^*$.

4.3 O controle $\mathcal{H}_\infty$

Existem dois tipos de controle $\mathcal{H}_\infty$, o controle ótimo e sub-ótimo. Controle $\mathcal{H}_\infty$ ótimo significa encontrar todos os controladores admissíveis $K(s)$ tal que a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência T_{zw} é minimizada. Um controlador é dito *admissível* quando estabiliza internamente o sistema. Deve-se notar que os controladores $\mathcal{H}_\infty$ ótimos

Figura 4.2: Todas as soluções K

definidos acima geralmente não são únicos para sistemas MIMO (*Multiple Input, Multiple Output* - Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas). O problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo pode ser definido da seguinte maneira: dado $\gamma > 0$, encontrar todos os controladores admissíveis $K(s)$, se existirem, tal que a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de malha fechada T_{zw} esteja abaixo de um certo nível de desempenho γ , ou seja, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$. Seja $\gamma_{opt} := \min\{\|T_{zw}\|_\infty : K(s) \text{ admissível}\}$, i.e., o nível ótimo. Então, γ deve ser maior que γ_{opt} para a existência de controladores $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimos. Se os erros de modelagem ou os distúrbios estiverem abaixo de γ^{-1} , o sistema em malha fechada possuirá robustez de estabilidade, de acordo com o teorema de pequenos ganhos (*small-gain theorem*, MACIEJOWSKY (1989)).

Encontrar um controlador $\mathcal{H}_\infty$ ótimo é na maioria das vezes uma tarefa complicada, tanto numericamente quanto teoricamente. Conhecer a norma $\mathcal{H}_\infty$ ótima (mínima) pode ser útil teoricamente, pois indica um limite para o que se pode alcançar. Porém, na prática, geralmente não é necessário e algumas vezes até indesejável projetar um controlador ótimo, pois é muito mais “barato” (numericamente falando, por exemplo) obter controladores sub-ótimos, que são muito próximos (no sentido de norma) dos ótimos. A solução utilizada neste trabalho é a do controle $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótimo.

A solução do controle $\mathcal{H}_\infty$ descrita aqui é um resultado obtido por DOYLE et al. (1989). Esta solução faz uso da resolução de duas equações de Riccati e projeta um controlador com o mesmo número de estados da planta aumentada.

Dado um sistema P bloco 2×2 e um limite superior γ para o ganho de malha

fechada, a solução retorna um compensador parametrizado $K = \mathcal{F}(J, Q)$ de todos os controladores que estabilizam o sistema (figura 4.2) tal que

$$\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty \leq \gamma. \quad (4.19)$$

Qualquer função de transferência estável Q que satisfaça $\|Q\|_\infty < \gamma$ estabiliza o sistema e satisfaz a inequação (4.19). Inversamente, qualquer Q instável ou $\|Q\|_\infty > \gamma$ desestabiliza o sistema ou causa $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty > \gamma$, ou ambos. O resultado que se segue faz certas restrições à matriz D da matriz de transferência da planta aumentada P (a matriz D de P é a matriz formada por D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} que aparece na equação 4.1). Mais adiante essas restrições podem deixar de existir aplicando-se os resultados de SAFONOV et al. (1989). Seja a realização P dada pela equação (4.1). Os resultados de DOYLE et al. (1989) assumem o seguinte para P :

- (i) (A, B_1) e (A, B_2) são estabilizáveis ;
- (ii) (C_1, A) e (C_2, A) são detectáveis ;
- (iii) $D_{12}^T D_{12} = I$;
- (iv) $D_{21} D_{21}^T = I$;
- (v) $D_{11} = D_{22} = 0$.

A solução do controle $\mathcal{H}_\infty$ envolve a resolução de duas *EARs* associadas às matrizes Hamiltonianas dadas pelas equações (4.20) e (4.21):

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ \tilde{C}_1^T \tilde{C}_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

sendo

$$\tilde{C}_1 = (I - D_{12} D_{12}^T) C_1$$

e

$$J_\infty = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -\tilde{B}_1^T \tilde{B}_1 & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

sendo

$$\tilde{B}_1 = B_1 (I - D_{21}^T D_{21}).$$

Definindo:

$$F = -(B_2^T X_\infty + D_{12}^T C_1) , \quad (4.22)$$

$$H = -(Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T) , \quad (4.23)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} . \quad (4.24)$$

A solução é válida se as seguintes condições são obedecidas:

- (i) $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ e $X = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$;
- (ii) $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ e $Y = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$;
- (iii) $\rho(X_\infty Y_\infty) \leq \gamma^2$,

sendo $\rho(X_\infty Y_\infty) = \max_i |\lambda_i(X_\infty Y_\infty)|$ o raio espectral de $X_\infty Y_\infty$. Se alguma destas três condições falha, então γ é muito pequeno e não existe solução, portanto γ deve ser aumentado. Assumindo que γ é grande o suficiente para passar em todos os três testes, então a família de todos os controladores estabilizantes K que satisfazem $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty \leq \gamma$ é dado por $K = \mathcal{F}(J, Q)$ sendo Q qualquer função de transferência estável com $\|Q\|_\infty < \gamma$, e

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} , \quad (4.25)$$

sendo

$$J_{11} = A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + Z H (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) ,$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} -ZH & Z(B_2 + \gamma^{-2} T C_1^T D_{12}) \end{bmatrix} ,$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} F \\ -(C_2 + \gamma^{-2} D_{12} B_1^T X) \end{bmatrix} ,$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} .$$

Os resultados anteriores (equações 4.20 a 4.25) assumiram que $D_{11} = D_{22} = 0$, $D_{12}^T D_{12} = I$ e $D_{21} D_{21}^T = I$. Dada uma matriz D geral e um limite superior desejado γ , a série de passos mostrada a seguir transforma o sistema para a forma desejada. O conhecimento de γ é necessário para que se possa zerar a matriz D_{11} , e estas transformações devem ser repetidas cada vez que γ mudar. A maioria das transformações

envolvem simplesmente multiplicação de sinais por matrizes ortogonais, que preservam a norma e assim não mudam a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema. A transformação α que zera D_{11} , não preserva a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, mas preserva o seu limite superior γ . Em outras palavras, embora a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema transformado possa diferir da norma do sistema original, a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema transformado é menor do que γ , se e somente se, a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema original for menor que γ . Pode-se transformar as matrizes D_{12} , D_{21} , D_{11} e D_{22} para que se possa calcular a solução do problema para qualquer tipo de matriz D . Estas transformações são resultados obtidos por Safonov et al. SAFONOV et al. (1989), e estão descritas nos seguintes cinco passos.

1. Usar a decomposição em valores singulares para fatorar D_{12} e D_{21} :

$$D_{12} = U_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_1 \end{bmatrix} V_1^T \quad (4.26)$$

$$D_{21} = U_2 \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} V_2 \quad (4.27)$$

2. Transformar D_{11} e particioná-la em uma matriz bloco 2×2 onde D_{1122} tem as mesmas dimensões de D_{22}^T :

$$U_1^T D_{11} V_2 = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

3. Calcular K_∞ :

$$K_\infty = -[D_{1122} + D_{1121}(\gamma^2 I - D_{1111}^T D_{1111})^{-1} D_{1111}^T D_{1112}] \quad (4.29)$$

4. Calcular N e a matriz de transformação α tal que

$$N = U_1^T D_{11} V_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} + K_\infty \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N & (I - \gamma^{-2} N N^T)^{\frac{1}{2}} \\ (I - \gamma^{-2} N^T N)^{\frac{1}{2}} & \gamma^{-2} N^T \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Neste ponto, a matriz $\hat{D}_{11}$ do sistema transformado é zero. As outras três partes

da matriz $\hat{D}$ são dadas por:

$$\hat{D}_{12} = (I - \gamma^{-2}NN^T)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} (I - \gamma^{-2}NN^T)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.33)$$

$$\hat{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \gamma^{-2}N^T(I - \gamma^{-2}NN^T)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

5. Usar a decomposição de valores singulares para calcular $\hat{D}_{12}$ e $\hat{D}_{21}$:

$$\hat{D}_{12} = U_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \Sigma_3 \end{bmatrix} V_3^T, \quad (4.35)$$

$$\hat{D}_{21} = U_4 \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_4 \end{bmatrix} V_4^T. \quad (4.36)$$

A matriz $\hat{D}$ do sistema transformado tem agora os componentes $\hat{D}_{11} = 0$, $\hat{D}_{22} = 0$, $\hat{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T$ e $\hat{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$. Uma vez que o controlador $\hat{K}$ é calculado para o sistema transformado $\hat{P}$, ele deve ser transformado novamente para o sistema original P , fazendo

$$K = \mathcal{F}(T, \hat{K}), \quad (4.37)$$

sendo a matriz de transformação T dada por

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

com

$$\begin{aligned} T_{11} &= V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1}, \\ T_{12} &= V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} V_3 \Sigma_3^{-1}, \\ T_{21} &= \Sigma_4^{-1} U_4^T \Sigma_2^{-1} U_2^T (I - L_1)^{-1}, \\ T_{22} &= -\Sigma_4^{-1} U_4^T [\Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} (I - L_2)^{-1} - \hat{D}_{22}] V_3 \Sigma_3^{-1}, \\ L_1 &= -D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1} K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T, \\ L_2 &= -K_\infty \Sigma_2^{-1} U_2^T D_{22} V_1 \Sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

O *Robust Control Toolbox* do *MATLAB* (CHIANG & SAFONOV (1992)), através do comando *hinfsyn*, implementa esta solução do controle $\mathcal{H}_\infty$.

4.4 O controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ consiste no controle em malha fechada $\mathcal{H}_2$ com restrição $\mathcal{H}_\infty$ para atenuação dos distúrbios de entrada. Para mais detalhes, recomenda-se a leitura de BERNSTEIN & HADDAD (1989), DOYLE et al. (1994) e DOYLE et al. (1994b).

O problema de controle $\mathcal{H}_2$ com restrição $\mathcal{H}_\infty$ pode ser enunciado da seguinte maneira: dada a realização da matriz P da equação (4.1) de ordem n , estabilizável e detectável, com $D_{22} = 0$, determinar a dinâmica do compensador de dimensão n

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (4.39)$$

$$u = C_k x_k, \quad (4.40)$$

que satisfaça os seguintes critérios de projeto:

- (i) O sistema em malha fechada é assintoticamente estável;
- (ii) A função de transferência T_{zw} satisfaz a restrição $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$, para $\gamma > 0$;
- (iii) O funcional

$$J(A_k, B_k, C_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t)^T R_1 x(t) + u(t)^T R_2 u(t)] \quad (4.41)$$

é minimizado, sendo $R_1 = E_1^T E_1$ e $R_2 = E_2^T E_2$. Uma expressão mais familiar do funcional (4.41) é

$$J(A_k, B_k, C_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [x(v)^T R_1 x(v) + u(v)^T R_2 u(v)] dv. \quad (4.42)$$

Se o sistema em malha fechada é assintoticamente estável para o compensador (A_k, B_k, C_k) , então a função desempenho (4.41) é dada por

$$J(A_k, B_k, C_k) = \text{tr}(\tilde{Q} \tilde{E}^T \tilde{E}), \quad (4.43)$$

com $\tilde{E} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 C_k \end{bmatrix}$ e em regime a covariância dos estados é definida como

$$\tilde{Q} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\tilde{x}(t)^T \tilde{x}(t)) \quad (4.44)$$

e satisfaz a equação de Lyapunov

$$\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A}^T + \tilde{V} = 0 \quad (4.45)$$

sendo $\tilde{V} = \text{diag}[V_1 \quad B_k V_2 B_k^T]$.

O passo chave para se fazer respeitar $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$ consiste em trocar a equação de Lyapunov (4.45) por uma EAR que limita a covariância da malha fechada em regime. Dada a realização no espaço de estados (A_k, B_k, C_k) , e assumindo que $Q \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ satisfazendo

$$\tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T + \gamma^{-2}Q\tilde{R}_\infty Q + \tilde{V} = 0. \quad (4.46)$$

então $(\tilde{A}, \tilde{D})$ é estabilizável se e somente se $\tilde{A}$ é assintoticamente estável, sendo

$$\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

e

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_k D_{21} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Assim, $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$ e $\tilde{Q} \leq Q$, e consequentemente

$$J(A_k, B_k, C_k) \leq J(A_k, B_k, C_k, Q) \quad (4.49)$$

sendo $\mathcal{J} = \text{tr}(Q\tilde{E}^T \tilde{E})$. A prova deste resultado encontra-se em BERNSTEIN & HADDAD (1989).

Este resultado mostra que a restrição $\mathcal{H}_\infty$ à atenuação do distúrbio é automaticamente respeitada quando uma solução semi-definida positiva Q para (4.46) é conhecida e $\tilde{A}$ é assintoticamente estável. Além disso, todas as soluções fornecem um limite superior para a covariância $\tilde{Q}$ dos estados em malha fechada de acordo com o critério $\mathcal{L}_2$.

Assim, é necessário determinar (A_k, B_k, C_k) que minimize $J(A_k, B_k, C_k)$ sujeito à

(4.46) e com solução semi-positiva definida. Uma condição necessária para este problema de minimização é que (A_k, B_k, C_k, Q) pertença ao conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \{ & (A_k, B_k, C_k, Q) : Q \text{ } \tilde{n} \times \tilde{n} \text{ definida positiva } \mathcal{P}^{\tilde{n}}, \\ & \tilde{A} + \gamma^{-2} Q \tilde{R}_\infty \text{ é assintoticamente estável,} \\ & \text{e } (A_k, B_k, C_k) \text{ é controlável e observável} \} . \end{aligned}$$

Se $(A_k, B_k, C_k, Q) \in \mathcal{X}$ resolve o problema de minimização, então existem $Q, P, \tilde{Q}$ $n \times n$ semi-definidas positivas tal que

$$A_k = A - Q\Gamma - (B_2 R_2^{-1} B_2^T) P S + \gamma^{-2} Q C_1^T C_1 ; \quad (4.50)$$

$$B_k = Q C_2^T V_2^{-1} ; \quad (4.51)$$

$$C_k = -R_2^{-1} B_2^T P S ; \quad (4.52)$$

com

$$S = (I_n + \beta^2 \gamma^{-2} \tilde{Q} P)^{-1} ; \quad (4.53)$$

$$\Gamma = C_2^T V_2^{-1} C_2 ; \quad (4.54)$$

$$\Sigma = B_2 R_2^{-1} B_2^T ; \quad (4.55)$$

$$V_1 = B_1 B_1^T ; \quad (4.56)$$

$$V_2 = D_{21} D_{21}^T ; \quad (4.57)$$

e $Q, P, \tilde{Q}$ satisfazem

$$A Q + Q A^T + V_1 + \gamma^{-2} Q C_1^T C_1 Q - Q \Gamma Q = 0 ; \quad (4.58)$$

$$[A + \gamma^{-2} (Q + \tilde{Q}) C_1^T C_1]^T P + P [A + \gamma^{-2} (Q + \tilde{Q}) C_1^T C_1] + R_1 - S^T P \Sigma P S = 0 ; \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & (A - \Sigma P S + \gamma^{-2} Q C_1^T C_1) \tilde{Q} + \tilde{Q} (A - \Sigma P S + \gamma^{-2} Q C_1^T C_1)^T \\ & + \gamma^{-2} \tilde{Q} (C_1^T C_1 + \beta^2 S^T P \Sigma P S) \tilde{Q} + Q \Gamma Q = 0 . \end{aligned} \quad (4.60)$$

A demonstração deste resultado encontra-se em BERNSTEIN & HADDAD (1989).

A equação (4.58) é desacoplada das equações (4.59) e (4.60), e pode portanto ser resolvida independentemente. Porém, como (4.59) está acoplada a (4.60), necessita-

mos utilizar um processo iterativo para encontrar estas soluções, dado pelo seguinte algoritmo:

1. Inicializar $\gamma > 0$
2. Resolver $\mathbf{Q}$
3. $k = 0$, $\tilde{\mathbf{Q}}_0 = 0$
4. Resolver $\mathbf{P}$ para $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}$ com $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}_k$
5. Resolver $\tilde{\mathbf{Q}}$ para $\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{Q}}$ com $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{k+1}$
6. Se $k \geq 1$ e $\|\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k\| < \varepsilon$ e $\|\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} - \tilde{\mathbf{Q}}_k\| < \varepsilon$
7. Se n-o houve convergência $k = k + 1$ e voltar ao passo 4.

4.5 Ponderação de desempenho

Os objetivos de desempenho de um sistema realimentado podem ser geralmente especificados em termos de certas características desejadas a respeito das funções de sensibilidade S e/ou de sensibilidade complementar T , ou em termos de alguma outra função de transferência de malha fechada. No projeto de sistemas multivariáveis, é conveniente refletir os objetivos de desempenho do sistema escolhendo funções peso apropriadas, como mostrado em ZHOU & DOYLE (1998). As funções peso do diagrama mostrado na figura 4.3 são escolhidas de maneira a refletir o comportamento dos

Figura 4.3: Configuração padrão do sistema com pesos realimentado

Figura 4.4: Incertezas não-estruturadas

distúrbios d e d_i , no domínio da frequência. A matriz peso W_n é utilizada para modelar o ruído de sensores na frequência. W_e reflete os requisitos no formato da função de transferência de malha fechada do sistema. W_u é usada para refletir restrições nos sinais de controle dos atuadores. O pré-compensador tracejado W_r é um elemento opcional, utilizado para formatar deliberadamente o sinal de comando ou para representar um sistema de realimentação não unitário.

4.6 Representações de incertezas não-estruturadas

Existem duas maneiras de se representar incertezas não-estruturadas: o modelo aditivo e o modelo multiplicativo. Seja G_0 a função de transferência nominal que é o modelo escolhido para representar o comportamento da planta, e seja G_r a função de transferência real da planta. Então,

$$G_r = G_0 + \Delta_A, \quad (4.61)$$

ou

$$G_r = [1 + \Delta_M]G_0. \quad (4.62)$$

Estes dois modelos (aditivo e multiplicativo) de representação de incertezas podem ser utilizados na entrada e/ou na saída da planta, isoladamente ou em conjunto, como mostrado em ZHOU & DOYLE (1998). Dependendo da configuração utilizada, as incertezas do sistema tais como erros nos sensores, dinâmicas de alta frequência não

modeladas, erros paramétricos, entre outras, podem ser representadas, obtendo assim um modelo mais condizente com a planta real.

Capítulo 5

Controle combinado

Os projetos de controle via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ apresentados no capítulo 4 são agora aplicados ao UArmII. Seria difícil implementar um controlador $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ que atuasse sozinho no sistema, devido ao comportamento não linear do robô. O que se propõe aqui é o controle do UArmII através de um controlador combinado torque computado/ $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. No controlador combinado, a porção relativa ao torque computado lineariza o sistema e pré-compensa a dinâmica da planta modelada e o controlador $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ realiza uma pós-compensação dos erros residuais que não foram completamente removidos pelo método torque computado. Estes erros residuais são causados por incertezas tais como distúrbios externos e imperfeições no modelo da planta. Na sequência, é feita uma breve apresentação sobre o controle por torque computado, e então o cálculo dos controladores é apresentado.

5.1 Controle por Torque Computado

O problema de controlar um sistema não linear como (2.2) pode ser resolvido através da técnica do torque computado (CRAIG (1986)) mostrado na figura 5.1. A lei de controle associada à esta técnica é dada por:

$$\tau = M_{est}(q)\tau' + b_{est}(q, \dot{q}) . \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Diagrama de blocos do método do torque computado

O valor de τ' é computado da seguinte maneira:

$$\tau' = \ddot{q}^d + K_v(\dot{q}^d - \dot{q}) + K_p(q^d - q), \quad (5.2)$$

sendo q^d , $\dot{q}^d$ e $\ddot{q}^d$ a posição desejada, a velocidade desejada e a aceleração desejada, respectivamente; $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes diagonais, sendo que cada elemento da diagonal é um ganho positivo e escalar. M_{est} e b_{est} são modelos estimados da matriz de inércia M do vetor de torques não inerciais b do robô real, respectivamente. A equação de malha fechada do sistema, derivada de (5.1) e (5.2) é:

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = M_{est}^{-1}[(M - M_{est})\ddot{q} + (b - b_{est})]. \quad (5.3)$$

Em um robô real, podem existir distúrbios não modelados tais como atrito, variação de torque dos atuadores, e perturbações em virtude das cargas no robô. Se a soma destes distúrbios for definida como d_{ext} e adicionada à (5.3), teremos

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = M_{est}^{-1}[(M - M_{est})\ddot{q} + (b - b_{est}) + d_{ext}]. \quad (5.4)$$

Portanto, se tivermos conhecimento perfeito de todos os parâmetros do robô ($M = M_{est}$ e $b = b_{est}$) e não houver distúrbio externo ($d_{ext} = 0$), o lado direito de (5.4) se torna zero, e o método do torque computado é capaz de proporcionar excelente qualidade em todas as configurações do robô. A equação dinâmica para este sistema

ideal, controlado por um sinal $u(t)$ é dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u. \quad (5.5)$$

Imperfeições de modelagem e distúrbios externos introduzirão erros e degradarão o desempenho de controle do método de torque computado, KANG et al. (1999). Para superar esta deficiência do método torque computado, combinamos este método com os controladores robustos obtendo assim um controlador combinado.

O controlador combinado, mostrado na figura 5.2 possui basicamente a estrutura do controlador robusto para um sistema linear. W_e é uma função peso utilizada para moldar o desempenho do sistema no domínio da frequência (seção 4.5), e W_Δ modela incertezas não estruturadas multiplicativas na entrada da planta, representando possíveis erros nos atuadores do manipulador, dinâmicas desprezadas de alta frequência, e zeros incertos no semiplano direito, como mostrado por ZHOU & DOYLE (1998). A porção da figura 5.2 delimitada pela linha tracejada (que compreende as porções relativas ao torque computado, representação de incertezas paramétricas e ponderação de desempenho) é chamada de *planta aumentada*, $\hat{P}$, utilizada no cálculo dos controladores lineares $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, como mostrado na próxima seção.

5.2 Cálculo dos controladores

Para a síntese dos controladores, é necessário calcular a planta aumentada $\hat{P}$ mostrada na figura (5.2). Para isso, é preciso escolher os valores de K_p , K_v , W_e e W_Δ .

Primeiramente, definem-se os valores de K_p e K_v do método do torque computado, e obtém-se o sistema linearizado dado pela equação 5.5, o que chamaremos de *planta nominal*. As seguintes equações de estado definem este sistema:

$$\dot{x} = A_g x + B_g u \quad (5.6)$$

$$y = C_g x + D_g u. \quad (5.7)$$

5.3 Seleção de K_p e K_v

Os ganhos estáticos K_p e K_v foram ajustados iterativamente, observando-se os resultados obtidos em simulação e implementação, utilizando um critério heurístico. Os ganhos escolhidos para cada configuração e para cada controlador estão mostrados nas tabelas 5.1 (controle $\mathcal{H}_2$), 5.2 (controle $\mathcal{H}_\infty$) e 5.3 (controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

Tabela 5.1: Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot K_p}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$

	K_p	K_v
Configuração AAA	$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.3246 & 0 & 0 \\ 0 & 7.7460 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 1	$\begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14.8324 & 0 \\ 0 & 8.9443 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 2	$\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.9443 & 0 \\ 0 & 8.9443 \end{bmatrix}$
Configuração PAP, Fase 1	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 2	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 3	20	6.3246

Tabela 5.2: Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot K_p}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$

	K_p	K_v
Configuração AAA	$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.3246 & 0 & 0 \\ 0 & 7.7460 & 0 \\ 0 & 0 & 10.4881 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 1	$\begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13.4164 & 0 \\ 0 & 7.7460 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 2	$\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.3246 & 0 \\ 0 & 6.3246 \end{bmatrix}$
Configuração PAP, Fase 1	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 2	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 3	30	7.7460

Tabela 5.3: Valores dos ganhos K_p e $K_v = \sqrt{2 \cdot K_p}$ para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

	K_p	K_v
Configuração AAA	$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.3246 & 0 & 0 \\ 0 & 7.7460 & 0 \\ 0 & 0 & 11.8322 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 1	$\begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.4919 & 0 \\ 0 & 8.9443 \end{bmatrix}$
Configuração APA, Fase 2	$\begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.7460 & 0 \\ 0 & 7.0711 \end{bmatrix}$
Configuração PAP, Fase 1	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 2	120	15.4919
Configuração PAP, Fase 3	20	6.3246

5.4 Seleção de W_e e W_Δ

A seleção da função peso W_e e da matriz de ponderação W_Δ utilizada na representação de incertezas não estruturadas multiplicativas na entrada da planta foi realizada seguindo as indicações dadas por ZHOU & DOYLE (1998). Deve-se ressaltar que a escolha de matrizes que reflitam especificações de desempenho do sistema não é trivial, pois não há uma regra geral para a escolha destas funções. O processo de escolha das duas matrizes é bastante similar, e é descrito a seguir.

A matriz W_e é escolhida como sendo uma matriz de funções de transferência diagonal, e com dimensão coerente com o número de graus de liberdade do sistema, sendo que os elementos da diagonal são dados por:

$$W_e(i, i) = \frac{\frac{s}{M_s} + \omega_b}{s + \omega_b \varepsilon}, \quad (5.10)$$

sendo M_s o pico da magnitude do maior valor singular da função de sensibilidade de saída do sistema, $S = (I + PK)^{-1}$, ω_b a mínima frequência de largura de banda, e ε o máximo erro de rastreamento de estado estacionário. Estes valores devem ser escolhidos de modo que o maior valor singular da função sensibilidade do sistema, S , seja menor que o menor valor singular de W_e^{-1} em toda a faixa de frequência, ou seja, utilizando o conceito de norma H_∞ ,

$$\|W_e S\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|S\|_\infty \leq \|W_e^{-1}\|_\infty, \quad (5.11)$$

o que significa que o maior valor singular da função de sensibilidade S deve ser menor que o menor valor singular de W_e^{-1} em toda a faixa de frequência.

Os valores escolhidos de M_s , ω_b e ε para cada configuração estão mostrados nas tabelas 5.4 (controle $\mathcal{H}_2$), 5.5 (controle $\mathcal{H}_\infty$) e 5.6 (controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

Tabela 5.4: Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$.

	M_s	ω_b (rad/s)	ε (%)
Configuração AAA	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 1	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 2	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 1	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 2	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 3	1.1	0.1	0.01

Tabela 5.5: Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$.

	M_s	ω_b (rad/s)	ε (%)
Configuração AAA	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 1	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 2	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 1	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 2	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 3	1.1	0.1	0.01

Tabela 5.6: Valores de M_s , ω_b e ε para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

	M_s	ω_b (rad/s)	ε (%)
Configuração AAA	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 1	1.2	0.1	0.01
Configuração APA, Fase 2	1.2	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 1	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 2	1.1	0.1	0.01
Configuração PAP, Fase 3	1.1	0.1	0.01

A matriz W_Δ é uma matriz diagonal com dimensão coerente com o número de graus de liberdade do sistema, sendo que os elementos da diagonal são dados por:

$$W_\Delta(i, i) = \frac{s + \frac{\omega_{bc}}{M_u}}{\varepsilon_1 s + \omega_{bc}}. \quad (5.12)$$

A função W_Δ deve obedecer a

$$\|TW_\Delta\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \|T\|_\infty \leq \|W_\Delta^{-1}\|_\infty, \quad (5.13)$$

ou seja, o maior valor singular da função de sensibilidade complementar $T = KP(I + KP)^{-1}$ deve ser menor que o menor valor singular de W_Δ^{-1} em toda a faixa de frequência.

Os valores escolhidos de M_u , ω_{bc} e ε_1 para cada configuração estão mostrados nas tabelas 5.7 (controle $\mathcal{H}_2$), 5.8 (controle $\mathcal{H}_\infty$), 5.9 (controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

Tabela 5.7: Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2$.

	M_u	ω_{bc} (rad/s)	ε_1 (%)
Configuração AAA	70	100	0.01
Configuração APA, Fase 1	130	100	0.01
Configuração APA, Fase 2	40	100	0.01
Configuração PAP, Fase 1	150	150	0.01
Configuração PAP, Fase 2	150	150	0.01
Configuração PAP, Fase 3	40	100	0.01

Tabela 5.8: Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_\infty$.

	M_u	ω_{bc} (rad/s)	ε_1 (%)
Configuração AAA	70	100	0.01
Configuração APA, Fase 1	110	110	0.01
Configuração APA, Fase 2	40	100	0.01
Configuração PAP, Fase 1	150	150	0.01
Configuração PAP, Fase 2	150	150	0.01
Configuração PAP, Fase 3	50	100	0.01

Tabela 5.9: Valores de M_u , ω_{bc} e ε_1 para as configurações AAA, APA e PAP do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

	M_u	ω_{bc} (rad/s)	ε_1 (%)
Configuração AAA	90	100	0.01
Configuração APA, Fase 1	140	100	0.01
Configuração APA, Fase 2	40	100	0.01
Configuração PAP, Fase 1	140	100	0.01
Configuração PAP, Fase 2	140	100	0.01
Configuração PAP, Fase 3	40	100	0.01

Para a configuração AAA, W_e e W_Δ são matrizes 3×3 , para a configuração AAP, são matrizes 2×2 e para a configuração PAP, são funções de transferência.

O procedimento de escolha segue os seguintes passos:

1. Definir os ganhos K_p e K_v e calcular a planta nominal (A_g , B_g , C_g e D_g);
2. Escolher valores para os elementos M_s , ω_b e ε de W_e e para os elementos M_u , ω_{bc} e ε_1 de W_Δ ;
3. Calcular a planta aumentada;
4. Obter a função sensibilidade S e a função sensibilidade complementar T , desenhar os gráficos de S e W_e^{-1} , e de T e W_Δ^{-1} , e observar se $\|S\|_\infty \leq \|W_e^{-1}\|_\infty$ e se $\|T\|_\infty \leq \|W_\Delta^{-1}\|_\infty$.
5. Se as condições do item 4 não se verificam, voltar ao passo 1.

Um exemplo dos gráficos obtidos no item 4 é mostrado nas figuras 5.3 e 5.4.

Figura 5.3: Diagrama de valores singulares da função sensibilidade S e do inverso da especificação de saída W_e , configuração AAA

Figura 5.4: Diagrama de valores singulares da função sensibilidade complementar T e do inverso de W_Δ , configuração AAA

Nota-se que nas figuras 5.3 e 5.4, as especificações dadas por (5.11) e (5.13) são obedecidas. Este procedimento é repetido para projetar os controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para as três configurações utilizadas aqui, AAA, APA (fases 1 e 2) e PAP (fases 1, 2 e 3).

5.5 Determinação da planta aumentada e síntese $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Para obtermos a planta aumentada, utilizada no cálculo dos controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, utiliza-se o comando *sysic* do software *Matlab*. Para a síntese do controlador $\mathcal{H}_2$, utiliza-se a formulação dada por ZHOU et al. (1995), para a síntese $\mathcal{H}_\infty$ utiliza-se o comando *hinfsyn* (*Matlab*). Para o cálculo do controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, utiliza-se o algoritmo desenvolvido por BERNSTEIN & HADDAD (1989), sendo que a escolha de γ é feita de maneira iterativa, até atingir o limite mínimo. As instruções executadas pelos comandos *sysic*, *h2syn* e *hinfsyn* podem ser encontradas em maiores detalhes em BALAS et al. (1994) e CHIANG & SAFONOV (1992). Estes comandos implementam as soluções descritas no capítulo 4. Os códigos em *Matlab* relativos a estes cálculos estão mostrados no Apêndice B, e as matrizes de estado de todos os controladores obtidos são apresentadas no Apêndice C.

Capítulo 6

Simulação e implementação dos controladores

Para testar o desempenho dos controladores obtidos no capítulo anterior, foram feitos alguns testes. Para realizar estes testes, utilizamos o ambiente de controle descrito no Apêndice A, construído para reproduzir a dinâmica do manipulador. Avaliamos o comportamento do UArmII controlado pelas técnicas $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ através de testes de posicionamento (acompanhamento de referência), e também com testes de robustez dos controladores, através do acréscimo de massa na terceira junta e introduzindo distúrbios no torque. Para obter os gráficos apresentados neste capítulo, foram feitas várias séries de testes, e cada gráfico é a amostra mais representativa de cada série. Como dito anteriormente, a principal “função” do controlador $\mathcal{H}_\infty$ é rejeitar distúrbios, espera-se do controlador $\mathcal{H}_2$ um desempenho melhor do que o $\mathcal{H}_\infty$, e também é esperado que o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ possua tanto desempenho quanto capacidade de rejeitar distúrbios. Os testes realizados e apresentados a seguir procuram investigar se estas características se confirmam.

Como parâmetro de comparação de desempenho entre os três controladores, foi utilizada a soma do módulo do erro entre a trajetória desejada e a real para cada junta, do instante $i = 0$ até o momento do travamento da junta, ou seja:

$$\sum_i |q_i - q_i^d|. \quad (6.1)$$

6.1 Testes de posicionamento

Nestes testes, avalia-se a capacidade do UArmII de acompanhar uma certa referência, controlado pelas três técnicas. Esta referência é escolhida como um polinômio de quinto grau, de modo que o posicionamento seja suave, ou seja, com velocidades de partida e de travamento baixas. Nas figuras 6.2 a 6.21, a posição inicial do UArmII é $q = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$, e a posição final $q = [30^\circ \ 20^\circ \ 10^\circ]^T$. O erro de posicionamento das juntas nos testes de implementação deve estar dentro de uma faixa de tolerância de 0.5° , e em simulação, dentro de 0.2° .

6.1.1 Configuração AAA

As figuras 6.2 a 6.7 mostram os resultados obtidos com os três controladores, para a configuração AAA, em simulação e implementação, respectivamente. Nota-se que nos resultados de implementação há um bom acompanhamento de referência e que estes resultados então relativamente próximos dos resultados de simulação, se levarmos em conta o tempo de posicionamento, por exemplo. A tabela 6.1 nos mostra o valor do índice de desempenho para os três controladores. A análise de desempenho de cada junta mostra uma alternância de desempenho entre os três controladores. Para a primeira junta, observa-se que o desempenho dos controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é praticamente idêntico. O controlador $\mathcal{H}_2$ possui um erro de acompanhamento 50% maior que o erro obtido com o controle $\mathcal{H}_\infty$. Para a junta 2, o controle que se mostra mais eficaz é o $\mathcal{H}_\infty$, seguido pelo controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, e pelo $\mathcal{H}_2$, cujo erro de acompanhamento é mais de três vezes maior que o erro obtido com o controlador $\mathcal{H}_\infty$. Para a junta 3, nota-se que o controlador que se comportou melhor foi o $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, seguido pelo controlador $\mathcal{H}_2$, e por último o controlador $\mathcal{H}_\infty$. Se observarmos a soma dos erros das três juntas, notamos que o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ possui o melhor desempenho, seguido pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, como era esperado. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na figura 6.1.

Tabela 6.1: Índice de desempenho para a configuração AAA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	1.4343	0.9529	1.0577
Junta 2	1.3205	0.3860	0.6177
Junta 3	0.9094	1.3047	0.4964
Soma	3.6643	2.6436	2.1718

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.1: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.2: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.3: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.4: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.5: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.6: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.7: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

6.1.2 Configuração APA

As figuras 6.9 a 6.14 mostram os resultados obtidos com os três controladores, para a configuração APA, em simulação e implementação, respectivamente. Pode-se identificar nestes gráficos as duas fases de controle. Por exemplo, no gráfico da figura 6.10, a primeira fase de controle, onde então sendo controladas a junta passiva 2 (através de acoplamento dinâmico com a junta 1) e a junta ativa 3, ocorre entre 0 e 1.5s aproximadamente. Nesta fase, a junta 1 não possui referência, seu movimento é ditado pela restrição não-holonômica (2.3). A segunda fase se inicia quando a junta 2 atinge sua posição final. As juntas 1 e 3 dirigem-se então para suas posições desejadas, sendo que a junta 3 atinge rapidamente sua posição, pois já estava sendo controlada na primeira fase, e a junta 1 leva um certo tempo até inverter seu movimento e dirigir-se até sua posição final. Mais uma vez, nos resultados de implementação há um bom acompanhamento de referência. Nota-se uma diferença quando estes resultados são comparados com os resultados de simulação: a junta 1 necessita de um pouco mais de espaço para inverter seu movimento. Isto porém não prejudica muito o desempenho do sistema se observarmos por exemplo que o tempo de posicionamento é praticamente o mesmo. Se levarmos em conta o tempo de posicionamento, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ tem um desempenho um pouco pior que os outros dois controladores. Uma outra diferença que se nota é que o controlador $\mathcal{H}_2$ precisa de um pouco mais de espaço para inverter o movimento da junta 1, porém, esta junta está acompanhando sua referência. A tabela 6.2 nos mostra o valor do índice de desempenho para os três controladores. Neste caso, o controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ se mostra melhor, se analisarmos a soma dos erros das três juntas. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na figura 6.8.

Tabela 6.2: Índice de desempenho para a configuração APA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	3.8912	2.3409	1.8997
Junta 2	1.1834	0.7016	0.4892
Junta 3	0.9916	1.0024	0.6448
Soma	6.0662	4.0449	3.0337

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.8: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.9: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.10: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.11: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.12: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.13: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.14: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

6.1.3 Configuração PAP

As figuras 6.16 a 6.21 mostram os resultados obtidos com os três controladores, para a configuração PAP, em simulação e implementação, respectivamente. Pode-se identificar nestes gráficos as três fases de controle. Por exemplo, no gráfico da figura 6.17, a primeira fase de controle ocorre entre 0 e 2s aproximadamente. Nesta fase, a junta passiva 1 está sendo controlada (através de acoplamento dinâmico com a junta 2) e a junta ativa 3 permanece travada, para que não introduza distúrbios dinâmicos ao sistema. A junta 2 não possui referência, seu movimento é ditado pela restrição não-holonômica (2.3). A segunda fase se inicia quando a junta 1 atinge sua posição final. O posicionamento da junta 3 não pode ser iniciado de imediato, pois não haveria espaço físico para tal, pois a junta 2 atingiria seu fim de curso antes que a junta 3 alcançasse a posição desejada. Assim, a junta 2 posiciona-se a 60° (para outro *set – point* este valor se altera), e só então a junta 3 é destravada e levada até a posição desejada. Mais uma vez a junta 2 não possui referência, seu movimento é ditado pela restrição (2.3). A fase 2 termina aproximadamente aos 11s, e a partir daí a junta 2 segue o polinômio de referência até sua posição final. Os resultados de implementação apresentam bom acompanhamento de referência também para esta configuração. Aqui, temos quatro pontos de interesse: (1) a oscilação no posicionamento da junta 1, aproximadamente entre 1 e 2s; (2) a oscilação da junta 2 aproximadamente entre 1 e 3s; (3) o “sobre-sinal” no posicionamento da junta 2, aproximadamente entre 13 e 16s, nos casos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$; (4) o tempo de posicionamento. No ponto (1), os controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ praticamente se equivalem, e o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ possui um desempenho melhor, ou seja, uma oscilação menos pronunciada. No ponto (2), o controlador $\mathcal{H}_2$ se comporta ligeiramente melhor que o $\mathcal{H}_\infty$, e mais uma vez o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ proporciona menor oscilação. No ponto (3), o controlador $\mathcal{H}_2$ também tem um desempenho um pouco melhor que o $\mathcal{H}_\infty$, e o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ faz com que a junta atinja sua posição sem que haja “sobre-sinal”. Finalmente, o tempo de acomodação do controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é aproximadamente 2s menor que o tempo de posicionamento dos outros dois controladores. Estes fatos podem ser notados se observarmos a tabela 6.2. Mais uma vez, se analisarmos a soma dos erros das três juntas, o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ possui o melhor desempenho, seguido pelos controladores $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na

figura 6.15.

Tabela 6.3: Índice de desempenho para a configuração PAP, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	3.0042	1.7698	0.4785
Junta 2	5.0278	5.2976	4.0437
Junta 3	1.1459	0.9758	0.5913
Soma	9.1780	8.0432	5.1135

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.15: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.16: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.17: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.18: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.19: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.20: Simulação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.21: Implementação do controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

6.2 Teste de robustez com variação de massa

Nestes testes, avalia-se a capacidade dos três controladores de manter a estabilidade do UArmII mesmo sob desvios do modelo nominal. Adiciona-se uma massa de aproximadamente 450g ao efetuador, e o comportamento do UArmII ao acompanhar a mesma referência do item anterior é analisado. Este teste simula, por exemplo, uma situação onde o efetuador possua uma garra e esteja carregando um objeto. Espera-se que o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ rejeite este “distúrbio” e possua um desempenho melhor que o $\mathcal{H}_\infty$, e que o desempenho do controlador $\mathcal{H}_2$ seja um pouco pior. Nas figuras 6.23 a 6.33, a posição inicial do UArmII é $q = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$, e a posição final $q = [30^\circ \ 20^\circ \ 10^\circ]^T$. O erro de posicionamento das juntas nos testes deve estar dentro de uma faixa de tolerância de 0.5° .

6.2.1 Configuração AAA

As figuras 6.23 a 6.25 mostram os resultados obtidos com a implementação dos três controladores, para a configuração AAA. A tabela 6.4 nos mostra o valor do índice de desempenho para os três controladores. O desempenho do controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é superior ao dos outros dois controladores, em termos de acompanhamento de referência, e também de tempo de posicionamento. No controle $\mathcal{H}_2$, o acompanhamento de referência se mostra um pouco prejudicado, o que é mais evidente se observarmos a junta 3. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na figura 6.22.

Tabela 6.4: Índice de desempenho para a configuração AAA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	1.1966	1.2772	1.1117
Junta 2	0.6553	0.5371	0.3419
Junta 3	1.3761	0.5698	0.4912
Soma	3.2280	2.3841	1.9448

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.22: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.23: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.24: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.25: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

6.2.2 Configuração APA

As figuras 6.27 a 6.29 mostram os resultados obtidos na implementação dos três controladores, para a configuração APA. A tabela 6.5 contém os valores dos erros de acompanhamento de referência. Neste caso já se nota uma boa diferença no desempenho dos três controladores. No controle $\mathcal{H}_2$, pode-se observar que o posicionamento das juntas 2 e 3 é pior do que nos casos $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ obteve um desempenho melhor que o do controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ no posicionamento das juntas 1 e 3. Contudo, o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ obteve o melhor desempenho geral, ou seja, analisando a soma dos erros. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na figura 6.26.

Tabela 6.5: Índice de desempenho para a configuração APA, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	1.9002	2.3592	2.5818
Junta 2	1.1740	0.9702	0.3810
Junta 3	1.6434	0.6908	0.8886
Soma	4.7175	4.0202	3.8514

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.26: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.27: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.28: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.29: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração APA.

6.2.3 Configuração PAP

As figuras 6.31 a 6.33 mostram os resultados obtidos com a implementação dos três controladores, para a configuração PAP. A tabela 6.6 nos mostra o valor do índice de desempenho para os três controladores. Mais uma vez, o desempenho do controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é melhor que o do $\mathcal{H}_\infty$, que por sua vez é melhor que o desempenho do controlador $\mathcal{H}_2$. Para uma visualização comparativa dos resultados, os gráficos de posição obtidos na implementação dos três controladores são mostrados na figura 6.30.

Tabela 6.6: Índice de desempenho para a configuração PAP, controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, teste de robustez com variação de massa.

	$\mathcal{H}_2$	$\mathcal{H}_\infty$	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
Junta 1	3.7962	2.9312	1.4146
Junta 2	6.3134	4.7605	5.0290
Junta 3	0.9113	0.8571	0.8321
Soma	11.0210	8.5488	7.2758

(a) Controle $\mathcal{H}_2$ (b) Controle $\mathcal{H}_\infty$ (c) Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Figura 6.30: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.31: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.32: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.33: Teste de robustez com variação de massa para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração PAP.

6.3 Teste de robustez com distúrbio de torque

Nestes testes, avalia-se a capacidade dos três controladores de manter a estabilidade do UArmII quando ocorre um distúrbio em um dos atuadores. Este teste é feito através da introdução de um impulso de torque na terceira junta do UArmII durante seu funcionamento, e análise do comportamento do UArmII ao acompanhar a mesma referência do item anterior. O impulso é introduzido aos 1.5s, tem duração de 0.1s, e intensidade de 0.4N, na direção contrária ao movimento. Este valor, apesar de ser bastante pequeno, se comparado ao pico de torque observado nos testes da seção 6.1, que é da de aproximadamente 0.1N, se mostra um distúrbio bastante significativo. Nas figuras 6.34 a 6.36, a posição inicial do UArmII é $q = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$, e a posição final $q = [30^\circ \ 20^\circ \ 10^\circ]^T$. O erro de posicionamento das juntas nos testes deve estar dentro de uma faixa de tolerância de 0.5° . Os testes foram realizados apenas para a configuração AAA do UArmII.

Observando os gráficos, nota-se claramente a diferença de desempenho dos controladores. Todos eles possuem robustez de estabilidade, porém o controlador $\mathcal{H}_2$ mostra um desempenho muito ruim, como era de se esperar. O controlador $\mathcal{H}_\infty$ se comporta muito melhor do que o controlador $\mathcal{H}_2$ na rejeição deste tipo de distúrbio, e o controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ possui, além de uma boa rejeição de distúrbio, um bom desempenho, se comparado aos outros dois controladores, principalmente se observarmos os tempos de posicionamento das juntas.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.34: Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.35: Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

(a) Posições angulares das juntas

(b) Velocidades angulares das juntas

(c) Torques nas juntas

Figura 6.36: Teste de robustez com distúrbio de torque para o controle do UArmII via $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, configuração AAA.

Capítulo 7

Conclusões

A modelagem matemática de um robô manipulador subatuado de elos rígidos e com três juntas seriais foi explicitada. Controladores combinados torque computado/ $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, foram projetados e aplicados a este robô. A análise dos resultados no capítulo 6 mostra a robustez de estabilidade e desempenho destes controladores na presença de incertezas. Notou-se que as diferenças nas características de cada controlador com relação a robustez de desempenho é mais acentuada quanto maior for o distúrbio. Isto pode ser observado claramente na seção 6.3.

A partir do momento que iniciou-se a implementação do controlador no robô real, foram feitos testes individuais com as juntas, o que nos proporcionou uma maior percepção das características não modeladas do robô. Por exemplo, foi observado que a terceira junta do UArmII tem um comportamento diferente das duas outras juntas. Não sabemos se isto se deve a problemas no acionamento (problemas de *hardware*), algum erro na modelagem ou nos parâmetros desta junta. Todos estes problemas foram tratados como distúrbios, e devem ser compensados pelo controlador, através do modelo de incertezas não estruturadas e do ajuste de K_p e K_v .

O ajuste das funções W_e e W_Δ foi um passo importante no projeto dos controladores, pois observou-se que com a inclusão destas funções ocorreu uma melhora acentuada no desempenho verificado nos testes feitos com o robô real, pois estas têm o objetivo de representar incertezas não modeladas, e como consequência há uma melhora de robustez a estas incertezas. Estas forças foram consideradas como distúrbios nas juntas, e modeladas através da representação de incertezas multiplicativas na entrada da planta.

No início os pesos foram escolhidos de maneira intuitiva, a partir de análises qualitativas do comportamento dos distúrbios do sistema no domínio da frequência. A partir do momento em que foi percebido que a escolha destes pesos poderia ser auxiliada através da visualização do comportamento de seus valores singulares juntamente com o dos valores singulares de algumas funções de malha fechada do sistema (como a função de sensibilidade S e a função de sensibilidade complementar T), o projeto foi bastante facilitado.

Há que se ressaltar também que a proposta inicial deste trabalho era o projeto e implementação somente do controle $\mathcal{H}_\infty$. Os resultados dos controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ são bastante recentes.

O controle de alta qualidade para manipuladores tem sido uma das questões mais importantes no campo da robótica e numerosos sistemas de controle têm sido estudados nestas duas últimas décadas. Na maioria dos casos encontrados na literatura, estas técnicas de controle, tais como controle baseado em modelo (*model-based control*), controle adaptativo, redes neurais, entre outras, produzem bons resultados em simulações, porém em muitos casos a distância entre simulação e implementação do controle de movimento em manipuladores reais é significativa. As contribuições deste trabalho estão nos bons resultados atingidos nas implementações reais, na pequena distância entre projeto e implementação, ou seja, os controladores projetados funcionam na prática sem a necessidade de ajustes posteriores, e também no fato de não haver, até o presente momento, nenhuma publicação que proponha controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas subatuados.

Apêndice A

Ambiente de controle

Para realizar os testes do controlador projetado, tanto em simulação quanto no robô real, utilizamos o ambiente de controle mostrado na figura A.1. Para mais detalhes sobre este ambiente, recomenda-se a leitura de BERGERMAN et al. (1999) e SOARES et al. (1999). A contribuição deste trabalho para o ambiente de controle é a inclusão dos controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Este ambiente contém, na sua porção esquerda, uma visão superior do UArmII, com as coordenadas cartesianas X e Y, e uma linha vermelha que indica a posição angular final desejada de cada junta. A porção direita possui várias opções de configuração. A função de cada botão é descrita a seguir:

1. *User Commands*

- *Start Simulation*: Botão utilizado para dar início a uma simulação;
- *Start UArmII*: Botão utilizado para iniciar o movimento do UArmII;
- *STOP*: Botão utilizado para parar a simulação ou movimento do UArmII;
- *Initial Position*: Leva o UArmII para sua posição inicial;
- *Restart*: Reinicia o ambiente de controle;
- *Close*: Fecha o ambiente de controle;
- *Set DAC = 0*: Zera as tensões que estão sendo enviadas aos motores das juntas;
- *Reference*: Botão utilizado para referenciar o manipulador;

Figura A.1: *Underactuated Manipulator Control Environment*, o ambiente de controle do robô manipulador subatuado

- *Brake On*: Aciona os freios das juntas;
- *Brake Off*: Libera os freios das juntas.

2. Simulation Parameters

- *Configuration*: Configuração do UArmII. Pode assumir sete valores: AAA, AAP, APA, PAA, APP, PAP, PPA.
- *Controller*: Tipo de controlador utilizado. Pode assumir os valores *CTq* (Torque Computado), *VSC* (Estrutura Variável), *LMI* (Desigualdades Matriciais Lineares), *LQG* (*LQG/LTR*), *H-2* ($\mathcal{H}_2$), *HID* ($\mathcal{H}_\infty$) e *MIX* ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).
- *Initial angles*: Define os ângulos iniciais das três juntas, em graus. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor escolhido como sendo $[0\ 0\ 0]$, ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.
- *Set-point*: Define as posições angulares finais desejadas para as três juntas, em graus. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor escolhido como sendo $[30\ 20\ 10]$, ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo

usuário no campo *Change Parameters*.

- *Fault*: Botão que simula falhas nas juntas do UArmII. Pode assumir os valores *No Fault*, quando não ocorre a simulação de falha, *Joint 1*, quando é simulada uma falha na junta 1, *Joint 2*, quando é simulada uma falha na junta 2 e *Joint 3*, quando é simulada uma falha na junta 3.

3. *Dynamic Parameters*

- *Mass*: Massa de cada elo, em *Kg*. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor nominal [0.85 0.85 0.63], ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.
- *Inertia*: Momento de inércia de cada elo, em $Kg \cdot m^2$. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor nominal [0.007 0.007 0.006], ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.
- *Length*: Comprimento de cada elo, em *m*. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor nominal [0.20 0.20 0.20], ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.
- *Center of mass*: Centro de massa de cada elo, em *m*. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor nominal [0.10 0.10 0.08], ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.
- *Dynamic unc.*: Incertezas dinâmicas. Este parâmetro é um vetor de quatro elementos, sendo que cada um deles multiplica um dos quatro parâmetros acima (massa, momento de inércia e centro de massa). É utilizado para simular erros nos parâmetros do UArmII. Pode assumir os valores *Default*, que é o valor nominal [1.0 1.0 1.0 1.0], ou *User Defined*, quando assume o valor digitado pelo usuário no campo *Change Parameters*.

4. *Change Parameters*: Neste campo o usuário digita os valores de qualquer um dos parâmetros que podem ser alterados livremente.
5. *Graphics*: Este menu abre uma nova janela, como mostra a figura A.2, contendo os gráficos de posição angular, velocidade angular e torque, tanto de simulação quanto de teste feito no robô real. Pode assumir qualquer um dos valores apresentado no item *Controller*.

Figura A.2: Janela gerada pelo ambiente de controle, mostrando os gráficos de posição, simulação e torque, em simulação e implementação.

Há ainda os itens *Simulation Time*, *Real Time* e *Fault Time*, que marcam respectivamente os tempos de simulação, teste real, e de tempo de ocorrência da falha.

Apêndice B

Listagens

Apresentamos a seguir as listagens dos programas desenvolvido em *Matlab*, para o cálculo dos controladores $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, para a configuração AAA. O programa utilizado para o cálculo dos controladores para as demais configurações são bastante similares, pois a única alteração é na ordem do sistema, e portanto serão omitidos.

B.1 Controlador $\mathcal{H}_2$

```
clear all
clc

Z=zeros(3);
I=eye(3);

% Ganhos do PD
Kp1=20;
Kp2=30;
Kp3=50;
Kv1=sqrt(2*Kp1);
Kv2=sqrt(2*Kp2);
Kv3=sqrt(2*Kp3);
KPh2=[Kp1 0 0
      0 Kp2 0
      0 0 Kp3];
KVh2=[Kv1 0 0
      0 Kv2 0
```

```

0 0 Kv3];

% Sistema Nominal
Ag=[ Z   I
    -KPh2 -KVh2];
Bg=[Z
    I];
Cg=[I Z];
Dg=Z;
G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Definição dos pesos
% We
Ms=1.2;
wb=0.1;
E=0.01/100;
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe);
We1=nd2sys(nwe,dwe);
We2=nd2sys(nwe,dwe);
We3=nd2sys(nwe,dwe);
We=daug(We1,We2,We3);

% Wu
Mu=70;
wbc=100;
E1=0.01/100;
nwu=[1 wbc/Mu];
dwu=[E1 wbc];
Wu=tf(nwu,dwu);
Wu1=nd2sys(nwu,dwu);
Wu2=nd2sys(nwu,dwu);
Wu3=nd2sys(nwu,dwu);
Wu=daug(Wu1,Wu2,Wu3);

% Planta aumentada
systemnames='G Wu We';
inputvar='[pert(3); dist(3); control(3)]';
outputvar='[Wu ; We; G+dist]';
input_to_G='[control+pert]';

```

```

input_to_Wu='[control]';
input_to_We='[G+dist]';
sysoutname='P';
cleanup_sysic='yes';
sysic

[A,B,C,D]=branch(P);
B1=B(:,1:6);
B2=B(:,7:9);
C1=C(1:6,:);
C2=C(7:9,:);
D11=D(1:6,1:6);
D12=D(1:6,7:9);
D21=D(7:9,1:6);
D22=D(7:9,7:9);

% Sistema transformado (pagina 389)
Dk=-D12'*D11*D21';
At=A+B2*Dk*C2;
B1t=B1+B2*Dk*D21;
C1t=C1+D12*Dk*C2;

% Pagina 384 Zhou (D11=0)

%H2=[A zeros(size(A)); -C1'*C1 -A']-[B2; -C1'*D12]*[D12'*C1 B2'];
Ah2=At-B2*D12'*C1t;
Rh2=B2*B2'+1e-7*eye(12);
Qh2=-C1t'*C1t+C1t'*D12*D12'*C1t;
X2=are(Ah2,Rh2,Qh2);

%J2=[A' zeros(size(A)); -B1*B1' -A]-[C2'; -B1*D21']*[D21*B1' C2];
Aj2=At'-C2'*D21*B1t';
Rj2=C2'*C2;
Qj2=-B1t*B1t'+B1t*D21'*D21*B1t';
Y2=are(Aj2,Rj2,Qj2);

%Calculo do controlador
F2=-(B2'*X2+D12'*C1t);
L2=-(Y2*C2'+B1t*D21');
Ac2=At+B2*F2+L2*C2; % Ac2 = Achapeu2

```



```

Dkh2=Dk;

% Controlador pag. 389 Zhou
Akh2=Ac2-B2*Dkh2*C2;
Bkh2=-(L2-B2*Dkh2);
Ckh2=F2-Dkh2*C2;

K=ss(Akh2,Bkh2,Ckh2,Dkh2);

% Gráficos
[Agk,Bgk,Cgk,Dgk]=series(Akh2,Bkh2,Ckh2,Dkh2,Ag,Bg,Cg,Dg);
Lo=ss(Agk,Bgk,Cgk,Dgk);
We=tf(nwe,dwe);
WE=eye(3)*We;
Wu=tf(nwu,dwu);
WU=eye(3)*Wu;
So=inv(eye(size(Lo))+Lo);
figure
sigma(inv(WE),So);
SYS=series(So,K);
figure
sigma(inv(WU),SYS,{1e-3,1e3});

% Grava os ganhos
delete /users/paulo/uarm1/ctr_AAAh2.mat;
save /users/paulo/uarm1/ctr_AAAh2.mat Akh2 Bkh2 Ckh2 Dkh2 KPh2 KVh2;

```

B.2 Controlador $\mathcal{H}_\infty$

```

clc
clear all

Z=zeros(3);
I=eye(3);

% Ganhos do torque computado
Kp1=20;
Kp2=30;
Kp3=55;
Kv1=sqrt(2*Kp1);

```

```

Kv2=sqrt(2*Kp2);
Kv3=sqrt(2*Kp3);
KP=[Kp1 0 0
    0 Kp2 0
    0 0 Kp3];
KV=[Kv1 0 0
    0 Kv2 0
    0 0 Kv3];

% Sistema Nominal
Ag=[ Z I
    -KP -KV];
Bg=[Z
    I];
Cg=[I Z];
Dg=Z;
G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Definição de We e Wdelta (Wd)
% We
Ms=1.2;
wb=0.1;
E=0.01/100;
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe)
We1=nd2sys(nwe,dwe);
We2=nd2sys(nwe,dwe);
We3=nd2sys(nwe,dwe);
We=daug(We1,We2,We3);

% Wdelta
Mu=70;
wbc=100;
E1=0.01/100;
nwu=[1 wbc/Mu];
dwd=[E1 wbc];
Wd=tf(nwd,dwd)
Wd1=nd2sys(nwd,dwd);
Wd2=nd2sys(nwd,dwd);
Wd3=nd2sys(nwd,dwd);

```

```

Wd=daug(Wd1,Wd2,Wd3);

% Planta aumentada
systemnames='G Wd We';
inputvar='[pert(3); dist(3); control(3)]';
outputvar='[Wd ; We; G+dist]';
input_to_G='[control+pert]';
input_to_Wd='[control]';
input_to_We='[G+dist]';
sysoutname='P';
cleanupsysic='yes';
sysic

% Síntese Hinf
gmin=0.5;
gmax=15;
K1=hinfsyn(P,3,3,gmin,gmax,0.05);
[Ak,Bk,Ck,Dk]=unpck(K1);
K=ss(Ak,Bk,Ck,Dk);

% Gráficos
[Agk,Bgk,Cgk,Dgk]=series(Ak,Bk,Ck,Dk,Ag,Bg,Cg,Dg);
Lo=ss(Agk,Bgk,Cgk,Dgk);
We=tf(nwe,dwe);
WE=eye(3)*We;
Wu=tf(nwu,dwu);
WU=eye(3)*Wu;
So=inv(eye(size(Lo))+Lo);
figure
sigma(inv(WE),So);
SYS=series(So,K);
figure
sigma(inv(WU),SYS,{1e-3,1e3});

% Grava os ganhos
delete /users/paulo/uarm/ctr_AAA.mat;
save /users/paulo/uarm/ctr_AAA.mat Ak Bk Ck Dk KP KV;

```

B.3 Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

```

clear all
clc

Z=zeros(3);
I=eye(3);

% Ganhos do torque computado
Kp1=20;
Kp2=30;
Kp3=70;
Kv1=sqrt(2*Kp1);
Kv2=sqrt(2*Kp2);
Kv3=sqrt(2*Kp3);
Kpx=[Kp1 0 0
      0 Kp2 0
      0 0 Kp3];
Kvx=[Kv1 0 0
      0 Kv2 0
      0 0 Kv3];

% Sistema Nominal
Ag=[ Z I
     -Kpx -Kvx];
Bg=[Z
     I];
Cg=[I Z];
Dg=Z;
G=pck(Ag,Bg,Cg,Dg);

% Definição de We e Wdelta (Wd)
% We
Ms=1.2;
wb=.1;
E=.01/100;
nwe=[1/Ms wb];
dwe=[1 wb*E];
We=tf(nwe,dwe);
We1=nd2sys(nwe,dwe);
We2=nd2sys(nwe,dwe);

```



```

We3=nd2sys(nwe,dwe);
We=daug(We1,We2,We3);

% Wd
Mu=90;
wbc=100;
E1=.01/100;
nwd=[1 wbc/Mu];
dwd=[E1 wbc];
Wd=tf(nwd,dwd);
Wd1=nd2sys(nwd,dwd);
Wd2=nd2sys(nwd,dwd);
Wd3=nd2sys(nwd,dwd);
Wd=daug(Wd1,Wd2,Wd3);

% Planta aumentada
systemnames='G Wd We';
inputvar='[pert(3); dist(3); control(3)]';
outputvar='[Wd ; We; G+dist]';
input_to_G='[control+pert]';
input_to_Wd='[control]';
input_to_We='[G+dist]';
sysoutname='P';
cleanupsysic='yes';
sysic

[A,B,C,D]=branch(P);
B1=B(:,1:6);
B2=B(:,7:9);
C1=C(1:6,:);
C2=C(7:9,:);
D11=D(1:6,1:6);
D12=D(1:6,7:9);
D21=D(7:9,1:6);
D22=D(7:9,7:9);

% Definicao de constantes

[n,n] = size(A);
beta = 1;

```

```

gama = 1;
E1 = [C2 ; zeros(3,n)];
R1 = E1'*E1;
E2 = [1 0 0
      0 1 0
      0 0 1];
R2 = E2'*E2;
E1inf = E1;
R1inf = E1inf'*E1inf;
R2inf = beta^2*R2;
I = eye(n);
V1 = B1*B1';
V2 = D21*D21';
tau = C2'*inv(V2)*C2;
sigma = B2*inv(R2)*B2';

% Resolucao de Q
Q = are(A', tau-gama^(-2)*R1inf, V1);

% Loop para resolver as equacoes acopladas
l = 0; % Numero de iteracoes
Qc = zeros(n);
Qcaux = Qc;
P = zeros(n);
Paux = P;
k = 1;
ps = 0.001;
ErroQc = 1;
ErroP = 1;

while ( (ErroP > ps) | (ErroQc > ps) )
    S = inv(I + beta^2*gama^(-2)*Qc*P);

    % Resolucao de P
    PA = inv(S) * (A + gama^(-2)*(Q+Qc)*R1inf);
    PB = sigma;
    PC = R1;
    Px = are(PA, PB, PC);
    P = Px * inv(S);
    k = k+1;

```

```

% Resolucao de Qchapeu
QA = (A - sigma*P*S + gama^(-2)*Q*R1inf)';
QB = -gama^(-2)*(R1inf + beta^2*S'*P*sigma*S);
QC = Q*tau*Q;
Qc = are(QA, QB, QC);

% Calculo do erro
ErroP = max(max(abs(P-Paux)))/max(max(abs(P)));
ErroQc = max(max(abs(Qc-Qcaux)))/max(max(abs(Qc)));

% Atualiza P e Qchapeu
Paux = P;
Qcaux = Qc;
l = l+1;
if (l > 500)
    disp('Sistema em loop infinito')
    return
end
end

% Calculo do controlador
Ac = A - Q*tau - (B2*inv(R2)*B2')*P*S + gama^(-2)*Q*R1inf;
Bc = Q*C2'*inv(V2);
[j,k]=size(Bc);
Cc = -inv(R2)*B2'*P*S;
[m,n]=size(Cc);
Dc = zeros(m,k);
clear j k m n

delete /users/paulo/uarm/mix_AAA.mat;
save /users/paulo/uarm/mix_AAA.mat Ac Bc Cc Dc Kpx Kvx;

```

Apêndice C

C.1 Configuração AAA

C.1.1 Controlador $\mathcal{H}_2$

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} -0.003949 & 0 & 0 \\ 0 & -0.002151 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009999 \\ -20.02 & 0 & 0 \\ 0 & -30.02 & 0 \\ 0 & 0 & -50.01 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6.329 & 0 & 0 \\ 0 & -7.748 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.003949 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002151 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0009999 \\ 0.000007798 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000002313 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000004999 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.02498 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01666 & 0 \\ 0 & 0 & -0.009999 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} -0.003949 & 0 & 0 \\ 0 & -0.002151 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0009999 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

C.1.2 Controlador $\mathcal{H}_\infty$

Valor de γ : 0.8887

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{bmatrix} \quad (C.9)$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} -0.003949 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.002151 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0008667 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & -6.325 \\ 0 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -55 & 0 \\ -20.84 & 0 & 0 & -3.040 \\ 0 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -50.13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ -7.746 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10.49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.066 & 0 \\ -2.323 & 0 & 0 & -7.166 \\ 0 & -4.405 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.11)$$

$$A_{k3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0001636 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -0.0009540 \\ 0 & -14.26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16.36 & 0 \\ -13.63 & 0 & 0 & -95.4 \\ 0 & -0.00001000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.3949 & 2.788 \times 10^{-17} & 3.633 \times 10^{-17} \\ -1.27 \times 10^{-17} & 0.2151 & -4.49 \times 10^{-17} \\ -1.65 \times 10^{-17} & -1.76 \times 10^{-16} & 0.08667 \\ 0.0007798 & 1.8 \times 10^{-15} & -1.361 \times 10^{-16} \\ 7.822 \times 10^{-17} & 0.0002313 & 9.192 \times 10^{-17} \\ -5.782 \times 10^{-17} & 3.64 \times 10^{-16} & 0.00003756 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31.62 & 0 & 0 \\ 0 & 31.62 & 0 \\ 0 & 0 & 31.62 \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} & C_{k3} \end{bmatrix} \quad (C.14)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.000002084 & 0 & 0 & -0.0000003040 \\ 0 & -0.000001800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000005013 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.10000 & 0 \\ -0.0000002323 & 0 & 0 & 0.10000 \\ 0 & -0.0000004405 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.16)$$

$$C_{k3} = \begin{bmatrix} 0 & -0.000001426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000001636 & 0 \\ 0.10000 & 0 & 0 & -0.000009540 \end{bmatrix} \quad (C.17)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.18)$$

C.1.3 Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Valor de γ : 0.05

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{bmatrix} \quad (C.19)$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20.03 & -0.0000000004 & -0.0000000527 & -6.329 \\ 0 & -30.02 & -0.0000000004 & 0 \\ 0 & -0.0000000003 & -70.01 & 0 \\ -2503 & -0.00004373 & -0.005270 & -395.7 \\ 0.0000000961 & -1668 & -0.00004387 & 0.0000000151 \\ 0.0000003134 & -0.00003158 & -714.4 & 0.0000000495 \\ 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3162 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3162 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.20)$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.0000000060 & 0.0000000010 & 0 & 0 \\ -7.748 & 0.0000000005 & 0 & 0 \\ -0.0000000012 & -11.83 & 0 & 0 \\ 0.0005967 & 0.0009994 & -1000000 & -0.0000000168 \\ -215.3 & 0.00005014 & 0 & -1000000 \\ -0.0001185 & -60.37 & -0.0000000002 & 0.0000002692 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.21)$$

$$A_{k3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000000095 & -0.0000000021 & 0.0000000010 \\ 0 & 0 & -0.0000000002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0000000043 & 0.0009463 & -0.0002111 & 0.0001026 \\ 0.0000000005 & 0.0000009567 & -0.00001634 & -0.000007643 \\ -1000000 & 0.000003128 & -0.000005142 & -0.0000000016 \\ 0 & -0.00001000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (C.22)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.003953 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002152 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0006037 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0003953 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001757 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00003227 \end{bmatrix} \quad (C.23)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} & C_{k3} \end{bmatrix} \quad (C.24)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.02503 & -0.0000000004 & -0.0000000527 & -0.003957 \\ 0 & -0.01668 & -0.0000000004 & 0 \\ 0 & -0.0000000003 & -0.007144 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.25)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0.0000000060 & 0.0000000010 & 0 & 0 \\ -0.002153 & 0.0000000005 & 0 & 0 \\ -0.000000001185 & -0.0006037 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.26)$$

$$C_{k3} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0000000095 & -0.0000000021 & 0.0000000010 \\ 0 & 0 & -0.0000000002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.27)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.28)$$

C.2 Configuração APA

C.2.1 Controlador $\mathcal{H}_2$

Fase 1

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.0003064 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.001397 & 0 & 1 \\ -110 & 0 & -14.83 & 0 \\ 0 & -40.01 & 0 & -8.946 \end{bmatrix} \quad (\text{C.29})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.0003064 & 0 \\ 0 & 0.001397 \\ 0.0000000470 & 0 \\ 0 & 0.0000009761 \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.004545 & 0 & -0.0003064 & 0 \\ 0 & -0.01250 & 0 & -0.001397 \end{bmatrix} \quad (\text{C.31})$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.32})$$

Fase 2

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.001397 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.001397 & 0 & 1 \\ -40.01 & 0 & -8.946 & 0 \\ 0 & -40.01 & 0 & -8.946 \end{bmatrix} \quad (\text{C.33})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.001397 & 0 \\ 0 & 0.001397 \\ 0.0000009761 & 0 \\ 0 & 0.0000009761 \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.01250 & 0 & -0.001397 & 0 \\ 0 & -0.01250 & 0 & -0.001397 \end{bmatrix} \quad (\text{C.35})$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.36})$$

C.2.2 Controlador $\mathcal{H}_\infty$

Fase 1

Valor de γ : 0.9163

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.37})$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} -0.0004141 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.002151 & 0 & 1 \\ -90 & 0 & -13.42 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & -7.746 \\ -22.25 & 0 & -1.647 & 0 \\ 0 & -10.61 & 0 & -1.512 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.38})$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -0.0007649 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -0.0001045 \\ -8.607 & 0 & -76.49 & 0 \\ 0 & -5.641 & 0 & -10.45 \\ 0 & 0 & -0.00001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (\text{C.39})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.04141 & 0 \\ 0 & 0.2151 \\ 0.000008573 & 0 \\ 0 & 0.0002313 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 31.62 & 0 \\ 0 & 31.62 \end{bmatrix} \quad (C.40)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.41)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.000002225 & 0 & -0.0000001647 & 0 \\ 0 & -0.000001061 & 0 & -0.0000001512 \end{bmatrix} \quad (C.42)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0.10000 & 0 & -0.000007649 & 0 \\ 0 & 0.10000 & 0 & -0.000001045 \end{bmatrix} \quad (C.43)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.44)$$

Fase 2

Valor de γ : 0.9366

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.45)$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} -0.003949 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.003949 & 0 & 1 \\ -20 & 0 & -6.325 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & -6.325 \\ -75.78 & 0 & -8.751 & 0 \\ 0 & -75.78 & 0 & -8.751 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.46)$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -0.0004221 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -0.0004221 \\ -14.76 & 0 & -42.21 & 0 \\ 0 & -14.76 & 0 & -42.21 \\ 0 & 0 & -0.000010000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000010000 \end{bmatrix} \quad (C.47)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.3949 & 0 \\ 0 & 0.3949 \\ 0.0007798 & 0 \\ 0 & 0.0007798 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 31.62 & 0 \\ 0 & 31.62 \end{bmatrix} \quad (C.48)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.49)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.000007578 & 0 & -0.0000008751 & 0 \\ 0 & -0.000007578 & 0 & -0.0000008751 \end{bmatrix} \quad (C.50)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0.10000 & 0 & -0.000004221 & 0 \\ 0 & 0.10000 & 0 & -0.000004221 \end{bmatrix} \quad (C.51)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.52)$$

C.2.3 Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Fase 1

Valor de γ : 0.03

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.53)$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -120 & 0 & -15.49 & 0 \\ 0 & -40.01 & 0 & -8.946 \\ -416.7 & 0.000005087 & -26.9 & 0.000003384 \\ 0 & -1250 & 0 & -139.8 \\ 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3162 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.54)$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000000 & 0.0000000069 & 0.0000000006 & -0.000001284 \\ 0 & -1000000 & 0.0000000003 & 0.0000007414 \\ 0 & 0 & -0.00001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (C.55)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.0002690 & 0 \\ 0 & 0.001398 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.00001098 & 0 \\ 0 & 0.00009882 \end{bmatrix} \quad (C.56)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.57)$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.004167 & 0 & -0.0002690 & 0 \\ 0 & -0.01250 & 0 & -0.001398 \end{bmatrix} \quad (C.58)$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.59)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.60)$$

Fase 2

Valor de γ : 0.05

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} \end{bmatrix} \quad (C.61)$$

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30.02 & -0.0000000002 & -7.748 & -0.0000000012 \\ 0 & -25.02 & 0 & -7.074 \\ -1668 & -0.00001558 & -215.3 & -0.0001215 \\ 0.0000000001 & -2002 & 0 & -283 \\ 0.3162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3162 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.62})$$

$$A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1000000 & -0.0000000011 & 0.0000000041 & -0.0000004284 \\ 0 & -1000000 & 0.0000000028 & 0.0000000252 \\ 0 & 0 & -0.00001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (\text{C.63})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.002152 & 0 \\ 0 & 0.002828 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0001757 & 0 \\ 0 & 0.0002530 \end{bmatrix} \quad (\text{C.64})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{k1} & C_{k2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.65})$$

$$C_{k1} = \begin{bmatrix} -0.01668 & -0.0000000002 & -0.002153 & -0.0000000012 \\ 0 & -0.02002 & 0 & -0.002830 \end{bmatrix} \quad (\text{C.66})$$

$$C_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.67})$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.68})$$

C.3 Configuração PAP

C.3.1 Controlador $\mathcal{H}_2$

Fases 1 e 2

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.0002690 & 1 \\ -120 & -15.49 \end{bmatrix} \quad (\text{C.69})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.0002690 \\ 0.0000000362 \end{bmatrix} \quad (\text{C.70})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.004167 & -0.0002690 \end{bmatrix} \quad (\text{C.71})$$

$$D_k = 0 \quad (\text{C.72})$$

Fase 3

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.003949 & 1 \\ -20.02 & -6.329 \end{bmatrix} \quad (\text{C.73})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.003949 \\ 0.000007798 \end{bmatrix} \quad (\text{C.74})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.02498 & -0.003949 \end{bmatrix} \quad (\text{C.75})$$

$$D_k = 0 \quad (\text{C.76})$$

C.3.2 Controlador $\mathcal{H}_\infty$

Fases 1 e 2

Valor de γ : 0.9730

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.0002690 & 1 & 0 & 0 \\ -120 & -15.49 & 10 & -0.0008063 \\ -27.43 & -1.762 & -9.474 & -80.63 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00001000 \end{bmatrix} \quad (C.77)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.02690 \\ 0.000003617 \\ 0 \\ 31.62 \end{bmatrix} \quad (C.78)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.000002743 & -0.0000001762 & 0.10000 & -0.000008063 \end{bmatrix} \quad (C.79)$$

$$D_k = 0 \quad (C.80)$$

Fase 3

Valor de γ : 0.9411

$$A_k = \begin{bmatrix} -0.002151 & 1 & 0 & 0 \\ -30 & -7.746 & 10 & -0.0004180 \\ -57.79 & -6.194 & -12.57 & -41.80 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000010000 \end{bmatrix} \quad (C.81)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.2151 \\ 0.0002313 \\ 0 \\ 31.62 \end{bmatrix} \quad (C.82)$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.000005779 & -0.0000006194 & 0.10000 & -0.000004180 \end{bmatrix} \quad (C.83)$$

$$D_k = 0 \quad (\text{C.84})$$

C.3.3 Controlador $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Fases 1 e 2

Valor de γ : 0.009

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -120 & -15.49 & 0 & 0 \\ -416.7 & -26.90 & -1000000 & -0.0000000548 \\ 0.3162 & 0 & 0 & -0.000010000 \end{bmatrix} \quad (\text{C.85})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.0002690 \\ 0 \\ 0 \\ 0.00001098 \end{bmatrix} \quad (\text{C.86})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.004167 & -0.0002690 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.87})$$

$$D_k = 0 \quad (\text{C.88})$$

Fase 3

Valor de γ : 0.06

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20.03 & -6.329 & 0 & 0 \\ -2503 & -395.7 & -1000000 & 0.0000002754 \\ 0.3162 & 0 & 0 & -0.000010000 \end{bmatrix} \quad (\text{C.89})$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0.003953 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0003953 \end{bmatrix} \quad (\text{C.90})$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -0.02503 & -0.003957 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.91})$$

$$D_k = 0 \quad (\text{C.92})$$

Referências Bibliográficas

- ARAI & TACHI (1991) Arai, H. e Tachi, S. Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(4):528–534, 1991.
- BALAS et al. (1994) Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A., e Smith, R. *μ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The MathWorks, 1994.
- BEAVEN et al. (1996) Beaven, R. W., Wright, M. T., e Seaward, D. R. Weighting function selection in the $\mathcal{H}_\infty$ design process. *Control Engineering Practice*, 4(5):625–633, 1996.
- BERGERMAN (1996) Bergerman, M. *Dynamics and control of underactuated manipulators*, PhD Thesis. Carnegie Mellon University, Pittsburg, 1996.
- BERGERMAN et al. (1999) Bergerman, M., Siqueira, A. G., e Terra, M. H. Underactuated manipulator control system development environment. In *Proceedings of the 15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS&FOF99*, volume 2, Brazil, 1999.
- BERNSTEIN & HADDAD (1989) Bernstein, D. S. e Haddad, W. M. LQG control with an $\mathcal{H}_\infty$ performance bound: a Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3):293–305, 1989.
- CHIANG & SAFONOV (1992) Chiang, R. Y. e Safonov, M. G. *Robust Control Toolbox*. The MathWorks, New York, 1992.
- CRAIG (1986) Craig, J. J. *Introduction to Robotics - Mechanics and Control*. Addison-Wesley, 1986.
- DOYLE et al. (1994) Doyle, J., Zhou, K., Glover, K., e Bodenheimer, B. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1564–1574, 1994.
- DOYLE et al. (1994b) Doyle, J., Zhou, K., Glover, K., e Bodenheimer, B. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Performance Objectives II: Optimal Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1575–1586, 1994.
- DOYLE et al. (1989) Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., e Francis, B. A. State space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.
- KANG et al. (1999) Kang, B. S., Kim, S. H., Kwak, Y. K., e Smith, C. C. Robust Tracking Control of a Direct Drive Robot. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 121(6):261–269, 1999.
- LEWIS et al. (1993) Lewis, F. L., Abdallah, C. T., e Dawson, D. M. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Company, New York, 1993.

- MACIEJOWSKY (1989) Maciejowsky, J. M. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley, Workingham, 1989.
- SAFONOV et al. (1989) Safonov, M. G., Limebeer, D. J. N., e Chiang, R. Y. Simplifying the $\mathcal{H}_\infty$ theory via loop shifting, matrix pencil and descriptor concepts. *International Journal of Control*, 50(6):2467–2488, 1989.
- SOARES et al. (1999) Soares, M. R., Terra, M. H., Bergerman, M., e Tinós, R. A simulation environment for fault detection and isolation and control of underactuated manipulators. In *Proceedings of the 15th International Conference on CAD/CAM Robotics & Factories of the Future CARS&FOF99*, volume 2, Brazil, 1999.
- TERRA et al. (2000) Terra, M. H., Maciel, B. C. O., Nakashima, P. H. R., e Bergerman, M. Controles $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de um Robô Manipulador Subatuado via Linearização por Realimentação de Estados. In *XIII Congresso Brasileiro de Automática, CBA2000*, Florianópolis, Brasil, 2000.
- TERRA et al. (2000b) Terra, M. H., Maciel, B. C. O., Nakashima, P. H. R., e Bergerman, M. Underactuated Manipulator Robot Control by State Feedback Linearization via $\mathcal{H}_\infty$. In *3th IFAC Symposium on Robust Control Design, ROCOND2000*, Czech Republic, 2000.
- ZHOU & DOYLE (1998) Zhou, K. e Doyle, J. C. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- ZHOU et al. (1995) Zhou, K., Doyle, J. C., e Glover, K. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.
- ZHOU et al. (1994) Zhou, K., Glover, K., Bodenheimer, B., e Doyle, J. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives I: robust performance analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1564–1574, 1994.
- ZHOU et al. (1994b) Zhou, K., Glover, K., Bodenheimer, B., e Doyle, J. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives II: optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1575–1586, 1994.