Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço.....01/02/05

Ass.:.....*Lozan*.....

Filtragem Robusta para Sistemas Singulares Discretos no Tempo

José Carlos Teles Campos

Tese apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em
Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra

Co-orientador: Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara

São Carlos
2004

DEDALUS - Acervo - EESC

31100050801

Class.	TESE
Cult.	1402
Tempo	T 031/05
Sysno	142,55 87

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C198f Campos, José Carlos Teles
Filtragem robusta para sistemas singulares discretos
no tempo / José Carlos Teles Campos. -- São Carlos, 2004.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2004.
Área: Engenharia Elétrica.
Orientador: Prof. Dr. Marco Henrique Terra.
Co-orientador: Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara.

1. Sistemas singulares discretos no tempo. 2. Filtro
de Kalman. 3. Filtro robusto. 4. Estimativas filtrada e
preditora. 5. Mínimos quadrados recursivos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JOSÉ CARLOS TELES CAMPOS**

Tese defendida e julgada em 13-09-2004 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Associado **MARCO HENRIQUE TERRA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA (co-Orientador)**
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **VITOR HELOIZ NASCIMENTO**
(Escola Politécnica/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **RICARDO MERCHED**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Aprovado

Prof. Dr. **RICARDO HIROSHI CALDEIRA TAKAHASHI**
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFGM)

Aprovado

Prof. Associado **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedicatória

*Dedico este trabalho à Clélia,
Marluce (in memorian), Mirela,
Monique e Maria José pelo
incentivo, cooperação, renúncia,
compreensão, e orações.*

- Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra, meu orientador, pela oportunidade concedida, pela dedicação, competência, compreensão e amizade que me proporcionou durante este período de trabalho em comum;
- Ao Prof. Dr. João Yoshiyuki Ishihara, pela competência, compreensão, amizade e pelas inestimáveis contribuições, que facilitaram a execução deste trabalho;
- À minha família, aos parentes e aos amigos pelo incentivo, pela compreensão, pela confiança e pelas orações;
- Aos amigos do LASI, Adriano, Aline, Antônio Carlos, Arthur, Cleber Buosi, Everaldo, Gilson, Guilherme, Karla, Luciana, Márcio, Renato Tinós e todos os outros que não foram aqui mencionados, pela ajuda e pelos momentos bem vividos durante a minha permanência em São Carlos;
- Aos colegas professores e funcionários do Depto. de Engenharia Elétrica da UFC, especialmente à Professora Laurinda, pela ajuda e pelo incentivo dado para a realização deste trabalho;
- Aos professores e funcionários do Depto. de Engenharia Elétrica da EESC-USP, que de forma direta ou indireta, tiveram participação neste trabalho e
- À CAPES pelo suporte financeiro fornecido para a realização deste trabalho.

Epígrafe

*“O Controle de nossos atos aliado à
persistência otimiza os resultados”.*

Maria José Loiola

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Abreviaturas e Siglas	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
1.1 Modelagem Singular (Descritora)	1
1.2 Exemplos Ilustrativos	3
1.3 Definições Preliminares	10
1.4 Modos Impulsivos e Causalidade	12
1.5 Organização Geral do Texto	13
1.6 Produção Acadêmica Resultante deste Trabalho	14
2 Estimativa Recursiva no Espaço de Estados	16
2.1 Estimativa Filtrada Recursiva no Espaço de Estados	16
2.2 Estimativa Preditora Recursiva no Espaço de Estados	20
2.2.1 Estimativa Preditora - Corretora	24
2.2.2 Estimativa Filtrada Recursiva no Espaço de Estados em Função da Estimativa Preditora	27
3 Estimativa Filtrada Robusta BDU	28
3.1 O Problema de Mínimos Quadrados com Incertezas	28
3.2 Estimativa Filtrada Robusta	30
4 Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares	41
4.1 Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares	41
4.2 Estimativa Robusta para Sistemas Singulares	46

4.3	Comparação com a Estimativa Filtrada BDU	53
4.4	Estimativa Suavizadora Robusta	57
4.5	Exemplo Numérico	57
5	Estimativa Preditora para Sistemas Singulares	60
5.1	Estimativa Preditora Singular	60
5.1.1	Estimativa Preditora - Corretora Singular	66
5.2	Estimativa Preditora Robusta Singular	70
5.2.1	Comparação com a Estimativa Preditora Singular sem Robustez	76
5.2.2	Comparação com a Estimativa Preditora Robusta BDU	78
5.2.3	Estimativa Preditora - Corretora Robusta Singular	83
6	Matriz de Variâncias para Sistemas Singulares	88
6.1	Variância do Erro da Estimativa Ótima	88
6.2	Variância da Estimativa Ótima Determinística	93
6.3	Aplicação às Estimativas Robustas Singulares	97
6.3.1	Aplicação à Estimativa Filtrada Robusta Singular	100
6.3.2	Aplicação à Estimativa Preditora Robusta Singular	102
6.4	Variância do Erro de Estimativa do Filtro BDU	105
7	Conclusões e Continuidade do Estudo	112
A	Alguns Resultados da Análise Matricial	117
A.1	Alguns Resultados de Análise Matricial	117
A.1.1	Lema da Inversão de Matrizes	117
A.1.2	Lemas Auxiliares	119
B	Modelagem SVD para Sistemas Singulares	125

Lista de Figuras

1.1	Circuito RLC (Exemplo 1.2.1.)	3
1.2	Circuito equivalente de uma chave perfeita (Exemplo 1.2.2.)	4
1.3	Circuito equivalente do modelo do transistor (Exemplo 1.2.3).	5
1.4	Circuito elétrico contendo resistor não-linear (Exemplo 1.2.4.)	5
1.5	Exemplo de um sistema não redutível ao espaço de estados - Curva de Crescimento da Produção Agrícola (Exemplo 1.2.5.)	7
1.6	Robô manipulador com três juntas (Exemplo 1.2.7.)	8
1.7	Modelagem não-causal da recuperação de uma imagem (Exemplo 1.2.8.)	9
4.1	Filtros Descriptor Robusto (DR), Ótimo, e de Máxima Verossimilhança (ML).	59

Lista de Abreviaturas e Siglas

- ARMA - Modelo auto-regressivo de média móvel (*autoregressive moving average model*)
- BDU - Dados com incertezas limitadas (*Bounded Data Uncertainties*)
- DR - Filtro Robusto Descritor (*Descriptor Robust Filter*)
- ML - Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood*)
- SVD - Decomposição em valores singulares (*Singular Value Decomposition*)

Resumo

Esta tese apresenta novos algoritmos que resolvem problemas de estimativas filtrada, suavizadora e preditora para sistemas singulares no tempo discreto usando apenas argumentos determinísticos. Cada capítulo aborda inicialmente as estimativas para o sistema nominal e em seguida, as versões robustas para o sistema com incertezas limitadas. Os resultados encontrados podem ser aplicados tanto em sistemas invariantes como variantes no tempo discreto, utilizando a mesma estrutura do filtro de Kalman.

Nos últimos anos, uma quantidade significativa de trabalhos envolvendo estimativas singulares foi publicada enfocando apenas a estimativa filtrada sob a justificativa de que a estimativa preditora era de significativa complexidade quando modelada pelo método dos mínimos quadrados. Por este motivo, poucos trabalhos, como NIKOUKHAH et al. (1992) e ZHANG et al. (1998), deduziram a estimativa preditora. Este último artigo apresentou também um algoritmo para a estimativa suavizadora, mas usando o modelo de inovação ARMA. No entanto, até onde foi possível identificar, nenhum trabalho até agora resolveu o problema de estimativa robusta, considerando incertezas nos parâmetros, para sistemas singulares.

Para a dedução das estimativas singulares robustas, esta tese tomou como base SAYED (2001), que deduz o filtro de Kalman robusto com incertezas limitadas utilizando uma abordagem determinística, o chamado filtro BDU. Os filtros robustos para sistemas singulares apresentados nesta tese, são mais abrangentes que os apresentados em SAYED (2001). Quando particularizados para o espaço de estados sem incertezas, todos os filtros se assemelham ao filtro de Kalman.

Palavras-Chave: Sistemas Singulares Discretos no Tempo, Filtro de Kalman, Filtro Robusto, Estimativas Filtrada e Preditora, Mínimos Quadrados Recursivos.

Abstract

New algorithms to optimal recursive filtering, smoothed and prediction for general time-invariant or time-variant descriptor systems are proposed in this thesis. The estimation problem is addressed as an optimal deterministic trajectory fitting. This problem is solved using exclusively deterministic arguments for systems with or without uncertainties. Kalman type recursive algorithms for robust filtered, predicted and smoothed estimations are derived.

In the last years, many papers have paid attention to the estimation problems of linear singular systems. Unfortunately, all those works were concentrated only on the study of filtering problems, for nominal systems. The predicted and smoothed filters are more involved and were considered only by few works: NIKOUKHAH et al. (1992) and ZHANG et al. (1998). ZHANG et al. (1998) had proposed a unified approach for filtering, prediction and smoothing problems which were derived by using the projection formula and were calculated based on the ARMA innovation model, but they had not considered the uncertainties.

In this thesis it is applied for descriptor systems a robust procedure for usual state space systems developed by SAYED (2001), called BDU filter. It is obtained a robust descriptor Kalman type recursions for filtered, predicted and smoothed estimates. Considering the nominal state space, all descriptor filters developed in this work collapse to the Kalman filter.

Keywords: *Linear Systems, Descriptor Systems, Singular Systems, Robust Filter, Kalman Filtering, State Estimation, Parametric Uncertainty, Discrete-time Systems, Least-squares.*

Capítulo 1

Introdução

O estudo da estimativa e do controle de sistemas descritores (também conhecidos como sistemas singulares ou sistemas implícitos) tem recebido significativa atenção na literatura. Isto ocorre porque sistemas na formulação descritora surgem naturalmente e freqüentemente nos processos de modelagem de sistemas econômicos (LUENBERGER (1977)), modelagem de imagens (HASAN & AZIM-SADJANI (1995)), pacotes de programas de modelagem orientados a objetos (GERDIN et al. (2003)), robótica (MILLS & GOLDENBERG (1989)), sistemas de potência, circuitos elétricos, engenharia aeroespacial, processos químicos, sistemas biológicos, análise de séries temporais, etc. Além disso, a formulação descritora é mais abrangente de modo que a modelagem no espaço de estados convencional é um caso particular seu, daí ela ser chamada também de sistema generalizado (VERGHESE et al. (1981)). Há sistemas que não podem ser modelados no espaço de estados, mas facilmente modelados como um sistema descritor (ZAGHLOUL & NEWCOMB (1986)). A seguir serão feitas considerações sobre a conceituação destes sistemas, definições principais e exemplos ilustrativos.

1.1 Modelagem Singular (Descritora)

Seja o sistema representado por

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0 \quad (1.1)$$

e

$$g(x(t), u(t), y(t), t) = 0 \quad (1.2)$$

sendo $x(t)$ o estado do sistema, $u(t)$ a entrada de controle, $y(t)$ a medida da saída, f e g são funções vetoriais de $\dot{x}(t)$, $x(t)$, $u(t)$ e t com dimensões apropriadas. Sistemas que têm a formulação (1.1) - (1.2) são chamados de sistemas implícitos ou singulares. Um caso especial de (1.1) - (1.2) ocorre quando

$$E(t)\dot{x}(t) = \varphi_1(x(t), u(t), t) \quad (1.3)$$

$$y(t) = \varphi_2(x(t), u(t), t) \quad (1.4)$$

sendo φ_1 , φ_2 funções vetoriais de $x(t)$, $u(t)$ e t . A matriz $E(t)$ normalmente é retangular. Se φ_1 e φ_2 são funções lineares de $x(t)$ e $u(t)$, a formulação mais conhecida para este sistema é

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t). \quad (1.6)$$

Quando $E(t)$ é não singular, o sistema recai no espaço de estados convencional, daí a outra denominação para ele: sistema generalizado. De acordo com DAI (1989d), os sistemas singulares foram mencionados pela primeira vez na literatura em 1973 (SINGH & LIU (1973)). Em várias publicações, os sistemas singulares são chamados também de sistemas no espaço de semi-estado, sistemas degenerados e sistemas algébrico-diferenciais, por envolver equações algébricas e equações diferenciais. Na próxima seção serão mostrados vários exemplos de sistemas singulares.

1.2 Exemplos Ilustrativos

Exemplo 1.2.1 O circuito RLC da Figura 1.1 é modelado pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} L \frac{di(t)}{dt} &= v_L(t) \\ C \frac{dv_C(t)}{dt} &= i(t) \\ 0 &= v_R(t) - Ri(t) \\ 0 &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) + v_S(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Escolhendo-se como saída a tensão no capacitor tem-se então

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dv_L(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \\ \frac{dv_R(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v_L(t) \\ v_C(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_S(t) \quad (1.8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ v_L(t) \\ v_C(t) \\ v_R(t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Figura 1.1: Circuito RLC (Exemplo 1.2.1.)

Os dois exemplos mostrados a seguir são característicos de sistemas com compor-

tamentos impulsivos.

Exemplo 1.2.2 *Seja o circuito representativo de uma chave perfeita, conforme Figura 1.2, cuja equação matricial é dada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

cuja solução impulsiva é dada por

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_2(0_-)\delta(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Figura 1.2: Circuito equivalente de uma chave perfeita (Exemplo 1.2.2.)

Exemplo 1.2.3 *Seja a Figura 1.3 a seguir que mostra a representação mais simples para o modelo de um transistor. A equação descritora deste circuito é dada por*

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0 \quad e \quad (1.11)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha R \end{bmatrix} x(t), \quad (1.12)$$

sendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_E(t) \end{bmatrix}.$$

Figura 1.3: Circuito equivalente do modelo do transistor (Exemplo 1.2.3).

Os exemplos 1.2.4 e 1.2.5 que serão mostrados a seguir caracterizam situações em que a modelagem no espaço de estados não se aplica, sendo portanto necessária a representação descritora.

Exemplo 1.2.4 *Seja o circuito RC da Figura 1.4, com a resistência tendo características não lineares. A representação matemática deste circuito é dada por*

$$\begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i_R^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad t \geq 0 \quad (1.13)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (1.14)$$

sendo $x(t) = \begin{bmatrix} v_R^T & v_C^T & i_R^T \end{bmatrix}^T$. Note que este modelo (1.13)-(1.14) está na forma de semi-estados. Porém pode-se mostrar que este circuito 1.4 não pode ser representado na forma de espaço de estados.

Figura 1.4: Circuito elétrico contendo resistor não-linear (Exemplo 1.2.4.)

O exemplo a seguir trata do problema do crescimento da produção agrícola.

Exemplo 1.2.5 A curva do crescimento da produção agrícola é dada pela expressão $\dot{\bar{y}}(t)/\bar{y}(t) = K(\bar{y}^* - \bar{y}(t))$ e pela função mostrada na Figura 1.5. A equação de $\bar{y}(t)$ é dada por $\bar{y}(t) = \bar{y}^* \frac{e^{K\bar{y}^*(t-t^*)}}{1+e^{K\bar{y}^*(t-t^*)}}$. Da curva da função logística percebe-se três regiões distintas, sendo uma com crescimento exponencial, outra com crescimento linear e outra com crescimento logarítmico. Esta curva de crescimento da produção agrícola é solução da seguinte equação retangular singular

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}(t) \\
 = & \begin{bmatrix} -\bar{s}_1 & -s_1 & \frac{1}{|\alpha|} - \alpha & 1 & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & -\bar{a} & -a & 1-a\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -\alpha & -\alpha & \frac{1}{|s_2|} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{|s_2|} - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 - 1 & -s_2 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\
 + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (\omega_0^2 |\alpha| |a|) \end{bmatrix}^T u, \quad t \geq 0 \quad e \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} |a|^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t). \tag{1.16}$$

Os termos $\bar{s}_1$, s_1 , s_2 , α , a e ω_0 estão definidos em BONILLA & MALABRE (2000).

O exemplo a seguir é um caso típico de sistema retangular que ocorre em controle ótimo.

Exemplo 1.2.6 (DAI (1989)) Considere o problema de controle ótimo com restrição. Deseja-se encontrar o valor ótimo do vetor $u(t)$ tal que uma função custo $L(x(t), u(t))$ seja otimizada, sendo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

e a equação de restrição

Figura 1.5: Exemplo de um sistema não redutível ao espaço de estados - Curva de Crescimento da Produção Agrícola (Exemplo 1.2.5.)

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Re-escrevendo-se a equação de estado e a de restrição em uma única formulação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \\ C & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ D \end{bmatrix} u(t),$$

portanto uma nova formulação para o problema consiste em se achar um valor ótimo de $u(t)$ para este sistema singular tal que a função custo $L(x(t), u(t))$ seja otimizada.

Exemplo 1.2.7 Considere o modelo simplificado e linearizado de um braço de robô com três juntas usado para limpeza de grandes edifícios, conforme Figura 1.6, com a seguinte equação Lagrangeana de movimento

$$\begin{aligned} M(\theta(t)) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + C\left(\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}\right) + G(\theta(t)) &= u + F^T \mu \\ \psi(\theta(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

sendo $\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) & \theta_2(t) & \theta_3(t) \end{bmatrix}^T$ o vetor das posições das juntas, $M(\cdot) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de inércia, $u \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de torques aplicados nas juntas, $C(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^3$ é o

vetor de forças centrífugas e de Coriolis e $G(.) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de forças gravitacionais. A função de restrição ψ é dada por

$$\psi(\theta) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - l \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

$F = \frac{\partial(\psi)}{\partial(\theta)}$, $\mu \in \mathbb{R}^2$ é o multiplicador de Lagrange e $F^T \mu$ é a força de restrição generalizada. Linearizando-se este sistema e escrevendo-o na forma Cartesiana, tem-se

$$\begin{aligned} M_0 \delta \ddot{z} + D_0 \delta \dot{z} + K_0 \delta z &= S_0 \delta u + F_0^T \delta \mu \\ F_0 \delta z &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Seja $x = \begin{bmatrix} \delta z & \delta \dot{z} & \delta \mu \end{bmatrix}^T$ e $u = \delta u$, então o sistema fica na seguinte forma descritora

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 & 0 \\ -K_0 & -D_0 & F_0^T \\ F_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ S_0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (1.20)$$

Figura 1.6: Robô manipulador com três juntas (Exemplo 1.2.7.)

Exemplo 1.2.8 (HASAN & AZIM-SADJANI (1995)). Este exemplo trata de um problema de recuperação de imagem. A Figura 1.7 apresenta uma região dita de suporte (ROS) de um sistema não-causal representado pela seguinte equação descritora

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i$$

$$z_i = Cx_i,$$

sendo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\rho}{1+\rho^2} & 0 & -1 & 0 & \frac{\rho}{1+\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{1+\rho^2} & 0 & -1 & 0 & \frac{\rho}{1+\rho^2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ z_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix},$$

e $\mathcal{E}[z_{i-j,k-l}z_{i,k}] = \rho^{|j|+|l|}$, $|\rho| < 1$, sendo $\mathcal{E}[\cdot]$ a esperança matemática.

Figura 1.7: Modelagem não-causal da recuperação de uma imagem (Exemplo 1.2.8.)

1.3 Definições Preliminares

Estas definições foram retiradas das referências (DAI (1989c)), (DAI (1989b)), (DAI (1989d)), (LEWIS (1986)), (CAMPBELL (1982)), (ISHIHARA & TERRA (2001)), (ISHIHARA & TERRA (2002)). Elas envolvem os sistemas contínuos e os sistemas discretos no tempo. Tal como os exemplos apresentados na seção anterior, estas definições foram incluídas por motivação didática. Primeiro serão mostradas as definições dos sistemas contínuos e em seguida, dos sistemas discretos.

Definição 1.3.1 *O sistema (1.5) - (1.6) com $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é regular se $\det(sE - A) \neq 0$ para algum $s \in \mathbb{C}$;*

Definição 1.3.2 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é estável na dinâmica finita se todas as raízes de $\det(sE - A) = 0$ estão no semi-plano esquerdo aberto;*

Definição 1.3.3 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é livre de impulsos se não existir nenhuma resposta impulsiva da forma*

$$x(t) = x_m(t) + \nu_0 \delta(t) + \nu_1 \delta^{(1)}(t) + \nu_2 \delta^{(2)}(t) + \dots + \nu_k \delta^{(k)}(t),$$

sendo $\delta(t)$ a função de Dirac;

Definição 1.3.4 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é impulso controlável se e somente se*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = n + \text{posto}(E);$$

Definição 1.3.5 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é impulso observável se e somente se*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & C \\ 0 & E \end{bmatrix} = n + \text{posto}(E);$$

Definição 1.3.6 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é detectável na dinâmica finita se*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \text{Re}(s) \geq 0;$$

Definição 1.3.7 *O sistema regular (1.5) - (1.6) é S-observável (fortemente observável) se e somente se*

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C};$$

Definição 1.3.8 O sistema regular (1.5) - (1.6) é *C-observável* (completamente observável) se e somente se $\text{posto} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}$ e $\text{posto} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$. Note que *C-observabilidade* implica em *S-observabilidade*.

Para o caso dos sistemas discretos no tempo, valem as seguintes equações

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad (1.21)$$

$$y_i = Cx_i, \quad (1.22)$$

com as respectivas definições,

Definição 1.3.9 O sistema (1.21) - (1.22) com $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é regular se $\det(zE - A) \neq 0$ para qualquer $z \in \mathbb{C}$;

Definição 1.3.10 O sistema regular (1.21) - (1.22) é estável na dinâmica finita se todas as raízes de $\det(zE - A) = 0$ estão no círculo aberto de raio $|z| < 1$;

Definição 1.3.11 O sistema regular (1.21) - (1.22) é causal ou não antecipatório se $\text{grau}(\det(zE - A)) = \text{posto}(E)$;

A referência (DAI (1989c)) define um sistema causal como sendo aquele em que $x(i)$ em qualquer instante i ($i \geq 0$), pode ser determinado a partir de $x(0)$ e de $u(0), u(1) \dots u(i)$ unicamente. Do contrário, ele é chamado de não causal.

Definição 1.3.12 O sistema regular (1.21) - (1.22) é controlável na dinâmica finita se e somente se o $\text{posto} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = n + \text{posto}(E)$;

Definição 1.3.13 O sistema regular (1.21) - (1.22) é observável na dinâmica finita se e somente se o $\text{posto} \begin{bmatrix} zE - A \\ C \end{bmatrix} = n$ para $\forall z \in \mathbb{C}$;

Definição 1.3.14 O sistema regular (1.21) - (1.22) é detectável na dinâmica finita se o $\text{posto} \begin{bmatrix} zE - A \\ C \end{bmatrix} = n, |z| \geq 1$.

1.4 Modos Impulsivos e Causalidade

Em engenharia os impulsos podem causar danos ou até a destruição de equipamentos. Os modos impulsivos e a causalidade podem ser melhor entendidos se for usada a chamada forma de Weierstrass, que decompõe o sistema (1.5) - (1.6) em um sub-sistema chamado de lento e um outro chamado de rápido. A forma de Weierstrass afirma que se o sistema for regular então existem duas matrizes Q_w e P_w que decompõem o sistema de forma que

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t) \quad (1.23)$$

$$N \dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t) \quad (1.24)$$

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \quad (1.25)$$

sendo $Q_w E P_w = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $Q_w A P_w = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n2} \end{bmatrix}$, $Q_w B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $x(t) = P_w \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $C P_w = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$ e $n = n1 + n2$. N é uma matriz nilpotente. A solução deste sistema usando-se a transformada de Laplace é dada por

$$x_1(t) = \exp(A_1 t) x_1(0) + \int_0^t [\exp(A_1(t - \tau))] B_1 u(\tau) d\tau \quad (1.26)$$

$$x_2(t) = - \sum_{i=1}^{d-1} N^i x_2(0_-) \delta^{(i-1)}(t) - \sum_{i=0}^{d-1} N^i B_2 u^{(i)}(t), \quad (1.27)$$

sendo d o índice de nilpotência da matriz N , $\delta(t)$ é a função delta de Dirac, $u^{(i)}(t)$ é a i -ésima derivada de $u(t)$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são chamados de semi-estados lento e rápido respectivamente. Pode-se observar que os modos impulsivos podem aparecer em $x_2(t)$ se $N x_2(0_-) \neq 0$ ou se $u(t)$ não for diferenciável. Pode-se concluir conforme (VERGHESE et al. (1981)), que os modos impulsivos não aparecerão em $x_2(t)$ se $N = 0$, que equivale ao sistema não ter pólos no infinito.

Usando-se o mesmo procedimento de decomposição para a formulação discreta, obtém-se a seguinte solução para o sistema (1.21) - (1.22)

$$x_{1,i} = A_1^i x_{1,0} + \sum_{j=0}^{i-1} A_1^{i-j-1} B_1 u_j \quad (1.28)$$

$$x_{2,i} = \sum_{j=0}^{d-1} N^j B_2 u_{i+j}. \quad (1.29)$$

A solução $x_{2,i}$ é válida para sistemas no horizonte infinito. No caso de sistemas que possuem condição final, além da inicial, a solução $x_{2,i}$ é dada por

$$x_{2,i} = N^{i_f-i} x_{2,i_f} - \sum_{j=0}^{i_f-i-1} N^j B_2 u_{i+j}, \quad 0 \leq i \leq i_f, \quad (1.30)$$

sendo x_{2,i_f} a condição final de $x_{2,i}$. Pode-se observar pelas expressões de $x_{2,i}$, que dependendo do valor de N , o sistema poderá ser não causal.

Finalmente, pode-se afirmar que tanto o problema dos modos impulsivos como o da causalidade em aplicações de controle podem ser solucionados através do uso de realimentação de estado ou de saída.

1.5 Organização Geral do Texto

A seguir é dada uma breve descrição de cada um dos capítulos restantes.

- **Capítulo 2: Estimativa Recursiva no Espaço de Estados**

Este capítulo estuda as estimativas filtrada e preditora no espaço de estados através do método dos mínimos quadrados recursivos, tal como em SAYED (2001), mas sem a exigência da matriz de ponderação Q ser definida positiva, apenas semi-definida positiva. Ele estuda também a estimativa preditora-corretora e encontra a relação que existe entre as expressões de $P_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i}$.

- **Capítulo 3: Estimativa Filtrada Robusta BDU**

Este capítulo apresenta a dedução detalhada do filtro robusto, denominado filtro BDU (*Bounded Data Uncertainties*), apresentado em (SAYED (2001)). Este filtro apresenta características interessantes do ponto de vista de projeto. Uma destas características é que o intervalo do parâmetro de ajuste deste filtro é conhecido *a-priori*, a partir dos parâmetros do sistema. Este filtro minimiza o erro de estimativa para as maiores incertezas que aparecem no sistema, utilizando uma abordagem determinística.

- **Capítulo 4: Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares**

Este capítulo apresenta a estimativa filtrada singular inicialmente sem robustez e depois com a inclusão da robustez nas matrizes E , F e H . Em seguida, ele apresenta a comparação desta estimativa com a estimativa filtrada robusta no espaço de estados deduzida no artigo SAYED (2001).

- **Capítulo 5: Estimativa Preditora para Sistemas Singulares**

Este capítulo deduz inicialmente a estimativa preditora e a estimativa preditora-corretora sem robustez para um sistema singular. Em seguida, ele estuda a estimativa preditora robusta singular e faz comparações tanto com a estimativa preditora singular sem robustez, como com a estimativa preditora no espaço de estados. Finalmente ele apresenta a expressão da estimativa preditora-corretora robusta singular.

- **Capítulo 6: Matriz de Variâncias para Sistemas Singulares**

Este capítulo demonstra que as matrizes chamadas de auxiliares ao longo das deduções $P_{i+1|i+1}$ do Teorema 4.2.1 do Capítulo 4, $P_{i+1|i}$ do Teorema 5.2.1 do Capítulo 5, e $P_{i+1|i+1}$ do Teorema 3.2.1 do Capítulo 3, são as matrizes das variâncias dos erros das estimativas filtrada robusta singular, preditora robusta singular e filtrada robusta no espaço de estados, respectivamente. Para se chegar a estes resultados foi usado o Lema de (YU et al. (1995), que usa a estimativa ótima pelo método da máxima verossimilhança (*Maximum Likelihood - ML*).

- **Capítulo 7: Conclusões e Continuidade do Estudo**

Este capítulo relata os resultados das deduções encontradas e faz sugestões para a continuidade desta pesquisa.

1.6 Produção Acadêmica Resultante deste Trabalho

Esta tese gerou até agora os seguintes artigos

1. J.C.T. Campos, J. Y. Ishihara & M. H. Terra (2004). “ Estimativa Recursiva Ótima para Sistemas Singulares Discretos no Tempo”. *XV Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Gramado-RS-Brasil, setembro, 2004.
2. J.Y.Ishihara, M.H. Terra & J.C.T. Campos (2004). “Robust Kalman Estimators for Discrete-Time Descriptor Systems ”. *Proc. of American Control Conference*,

Boston, MA, June/July.

3. J.Y.Ishihara, M.H. Terra & J.C.T. Campos (2004). "Optimal Recursive Estimation for Discrete-time Descriptor Systems". *Proc. of American Control Conference*, Boston, MA, June/July.

Capítulo 2

Estimativa Recursiva no Espaço de Estados

Este capítulo estuda as estimativas filtrada, preditora e preditora-corretora no espaço de estados usando-se o método dos mínimos quadrados recursivo.

2.1 Estimativa Filtrada Recursiva no Espaço de Estados

Considere o sistema modelado no espaço de estados variante no tempo descrito por

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F_i x_i + w_i, \quad i = 0, 1, \dots \\z_i &= H_i x_i + v_i.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nesta seção considera-se o problema de se achar um algoritmo recursivo para a estimativa filtrada. Esta estimativa pode ser obtida a partir de uma conveniente utilização determinística do método dos mínimos quadrados. Seja um conjunto de estimativas $\{x_{0|i}, x_{1|i}, \dots, x_{i|i}\}$ e um conjunto de medidas conhecidas $\{z_0, z_1, \dots, z_i\}$. Fixando-se um instante de tempo i e supondo que a estimativa filtrada $\hat{x}_{i|i}$ já foi encontrada com sua correspondente matriz de variâncias do erro $P_{i|i}$, pode-se encontrar uma nova estimativa para x_{i+1} a partir de uma nova medida z_{i+1} , encontrando-se a solução ótima da função custo

$$J_i = \min_{x_i, x_{i+1}} \left[\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1}}^2 \right] \tag{2.2}$$

para $i > 0$ e

$$J_0 = \min_{x_0} \left[\|x_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \|z_0 - H_0 x_0\|_{R_0^{-1}}^2 \right], \quad \text{para } i = 0, \quad (2.3)$$

sendo Q_i uma matriz de ponderação para o ruído de estado e R_i uma matriz de ponderação para o erro de medida.

Para se encontrar a solução deste problema, será utilizada a técnica dos mínimos quadrados regularizados cuja função custo é dada por

$$\min_{x_i} [x_i^T Q x_i + (Ax - b)^T W (Ax - b)], \quad (2.4)$$

que tem como solução (SAYED (2001))

$$\hat{x} = [Q + A^T W A]^{-1} A^T W b, \quad (2.5)$$

sendo $Q, W \geq 0$ tais que $Q + A^T W A$ é invertível.

Teorema 2.1.1 *A estimativa ótima filtrada $\hat{x}_{i|i}$ pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}; \quad (2.6)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0 \quad (2.7)$$

Passo i: Atualize $\{\hat{x}_{i|i}, P_{i|i}\}$ para $\{\hat{x}_{i+1|i+1}, P_{i+1|i+1}\}$ do seguinte modo

$$P_{i+1|i+1} := \left((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1} \quad (2.8)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}). \quad (2.9)$$

Prova: Escrevendo-se a função custo (2.2) na forma de blocos matriciais, tem-se

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\
& \left. - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Comparando-se esta equação com o problema de minimização (2.4), obtêm-se as identificações

$$\begin{aligned}
x & \leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
b & \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\
A & \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \\
Q & \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
W & \leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Substituindo-se estas identificações em (2.5),

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} \\ -Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
& \times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix} \tag{2.11}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} & = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} \\ -Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
& \times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Usando-se o lema da inversão de blocos matriciais, Lema A.1.1, com as identificações óbvias dos blocos A , B , C e D , obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

O termo $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}&(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ &= \left(Q_i^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Definindo-se a variável auxiliar $P_{i+1|i+1}$ como

$$P_{i+1|i+1} = \left((Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}, \quad (2.15)$$

segue que

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \\ &\times \begin{bmatrix} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= -P_{i+1|i+1} Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ &+ P_{i+1|i+1} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Então

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}). \quad (2.18)$$

Quanto à condição inicial, ela é obtida fazendo-se a derivada parcial da Equação (2.3), resultando em

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_0}{\partial x_0} &= -2x_0^T P_0^{-1} - 2(z_0 - H_0 x_0)^T R_0^{-1} H_0 = 0 \\ &= x_0^T P_0^{-1} - z_0^T R_0^{-1} H_0 + x_0^T H_0^T R_0^{-1} H_0 = 0.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Igualando a zero obtém-se a solução mínima

$$\hat{x}_{0|0} = (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1} H_0^T R_0^{-1} z_0. \quad (2.20)$$

Definindo-se $P_{0|0} = (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}$, então

$$\hat{x}_{0|0} = P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0. \quad (2.21)$$

□

2.2 Estimativa Preditora Recursiva no Espaço de Estados

Considere o sistema representado pela Equação (2.1) e a função custo dada por

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \left\{ \|x_i - \hat{x}_{i|i-1}\|_{P_{i|i-1}^{-1}}^2 + \|x_{i+1} - F_i x_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|z_i - H_i x_i\|_{R_i^{-1}}^2 \right\}. \quad (2.22)$$

Reescrevendo-se esta equação na forma matricial como foi feito para o caso da estimativa filtrada no espaço de estados, obtém-se

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \left(\begin{bmatrix} F_i & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Comparando-se esta expressão com a Equação (2.4), como também foi feito para o caso da estimativa filtrada, obtém-se as equivalências

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} F_i & I \\ H_i & 0 \end{bmatrix}; b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix};$$

$$Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; W \leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix};$$

cuja solução é dada por (2.5).

Teorema 2.2.1 *Suponha que é dada uma sequência $\{z_0, z_1, \dots\}$. A estimativa preditora ótima $\hat{x}_{i+1|i}$ resultante de (2.22) pode ser obtida a partir do algoritmo recursivo*

Passo 0:

$$P_{0|-1} := P_0 \quad (2.24)$$

$$\hat{x}_{0|-1} := \bar{x}_0 = 0 \quad (2.25)$$

Passo 1: Atualize $\{P_{i|i-1}, \hat{x}_{i|i-1}\}$ para $\{P_{i+1|i}, \hat{x}_{i+1|i}\}$ da seguinte forma

$$P_{i+1|i} := Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T \quad (2.26)$$

$$\hat{x}_{i+1|i} := F_i \hat{x}_{i|i-1} + F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}). \quad (2.27)$$

Prova: Comparando-se a Equação (2.23) com a Equação (2.5), segue que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & F_i^T Q_i^{-1} \\ Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + H_i^T R_i^{-1} (H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i) \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Explicitando-se o termo $\hat{x}_{i+1|i}$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & F_i^T Q_i^{-1} \\ Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + H_i^T R_i^{-1} (H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i) \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Aplicando-se o lema da inversão de blocos matriciais, Lema A.1.1, ao bloco matricial central, resulta

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} (F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \\ \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\
&\left(Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - CA^{-1} \left((F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \right) \right). \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Definindo $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \left(Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} F_i^T Q_i^{-1} \right)^{-1} \\
&= Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T \\
&= Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \\
&\quad \left(Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \left((F_i^T Q_i^{-1} F_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \right) \right), \tag{2.34}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \\
&\quad \left(Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right. \\
&\quad - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad \left. + Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i \right). \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
&P_{i+1|i} \left(Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right) \\
&= P_{i+1|i} \left(Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} F_i^T Q_i^{-1} \right) F_i \hat{x}_{i|i-1} \\
&= P_{i+1|i} \left(Q_i + F_i (H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} F_i^T \right)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\
&= F_i \hat{x}_{i|i-1} \tag{2.36}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
&P_{i+1|i} Q_i^{-1} F_i (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \\
&= P_{i+1|i} \left(Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T \right)^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
&= F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1}. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Então

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}), \quad \text{ou} \tag{2.38}$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}). \tag{2.39}$$

□

2.2.1 Estimativa Preditora - Corretora

Esta seção trata da Estimativa Preditora - Corretora que é a relação entre a estimativa filtrada e a estimativa preditora no espaço de estados, dada pelo Lema 2.2.1 a seguir.

Lema 2.2.1 *A expressão para atualização no tempo da estimativa, no espaço de estados, é dada por*

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i}. \quad (2.40)$$

Prova: Da Equação (2.28) do Teorema 2.2.1 segue que

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & F_i^T Q_i^{-1} \\ Q_i^{-1} F_i & Q_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + H_i^T R_i^{-1} (H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i) \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando-se o lema da inversão de blocos matriciais, encontra-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} &= \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \\ Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} &= (A - BD^{-1}C)^{-1} \left((F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \right. \\ &\quad \left. - BD^{-1} Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sendo,

$$\begin{aligned} (A - BD^{-1}C)^{-1} &= \left(F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1} - F_i^T Q_i^{-1} Q_i Q_i^{-1} F_i \right)^{-1} \\ &= \left(H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} &= (H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \left((F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i \right. \\ &\quad \left. - F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right)\end{aligned}\quad (2.45)$$

ou

$$\hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} = (H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} (H_i^T R_i^{-1} H_i \hat{x}_{i|i-1} - H_i^T R_i^{-1} z_i). \quad (2.46)$$

Colocando-se em evidência os termos que multiplicam $\hat{x}_{i|i-1}$, segue que

$$\begin{aligned}(I - (H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} &= \hat{x}_{i|i} - (H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \\ &\quad \times H_i^T R_i^{-1} z_i.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Multiplicando-se os dois lados desta equação por $(H_i^T R_i^{-1} H_i + P_{i|i-1}^{-1})$, obtém-se

$$P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} = P_{i|i}^{-1} \hat{x}_{i|i} - H_i^T R_i^{-1} z_i. \quad (2.48)$$

Então

$$\hat{x}_{i|i-1} = (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i} - P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i. \quad (2.49)$$

Substituindo-se este valor de $\hat{x}_{i|i-1}$ na Equação (2.27) do Teorema 2.2.1, resulta em

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= F_i (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i} - F_i P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} \\ &\quad + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i - F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} \\ &\quad \times H_i \left((I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i} - P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i \right), \text{ ou}\end{aligned}\quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= F_i \left(I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i (I \right. \\ &\quad \left. + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \right) \hat{x}_{i|i} - F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} + (P_{i|i-1}^{-1} \right. \\ &\quad \left. + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Simplificação do termo que multiplica $\hat{x}_{i|i}$

$$\begin{aligned}
& F_i \left(I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i \right. \\
& \times \left. (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \right) \\
& = F_i + F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \right. \\
& \times \left. H_i^T R_i^{-1} H_i P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} H_i, \tag{2.52}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
& F_i \left(I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i \right. \\
& \times \left. (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \right) \\
& = F_i + F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (I + H_i^T R_i^{-1} H_i P_{i|i-1}) \right) \\
& \times H_i^T R_i^{-1} H_i, \tag{2.53}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& F_i \left(I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i \right. \\
& \times \left. (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \right) \\
& = F_i + F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i) P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} H_i \\
& = F_i + F_i \left(P_{i|i-1} - P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} H_i \\
& = F_i. \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Simplificação do termo que multiplica z_i

$$\begin{aligned}
& F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} + (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} H_i P_{i|i-1} \right) \\
& \times H_i^T R_i^{-1} \\
& = F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (I + H_i^T R_i^{-1} H_i P_{i|i-1}) \right) H_i^T R_i^{-1} \\
& = F_i \left(P_{i|i-1} - (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i) P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} \\
& = F_i \left(P_{i|i-1} - P_{i|i-1} \right) H_i^T R_i^{-1} \\
& = 0. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Assim

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i}. \quad (2.56)$$

□

2.2.2 Estimativa Filtrada Recursiva no Espaço de Estados em Função da Estimativa Preditora

A estimativa filtrada recursiva no espaço de estados pode ser obtida também a partir da Equação (2.49) da seguinte maneira

$$\hat{x}_{i|i-1} = (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i} - P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i. \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \hat{x}_{i|i-1} + (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i \\ &= (I - (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} \\ &\quad + (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Então

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_{i|i-1} + (I + P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}) \quad (2.59)$$

e

$$P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i. \quad (2.60)$$

Capítulo 3

Estimativa Filtrada Robusta BDU

3.1 O Problema de Mínimos Quadrados com Incertezas

Considere o seguinte problema de custo quadrático ótimo

$$\min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} \left[\|x\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x - (b + \delta b)\|_W^2 \right] \quad (3.1)$$

para um sistema cujas incertezas nos parâmetros são descritas por

$$\begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_a & E_b \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

sendo

Q	$Q = Q^T > 0$, matriz de ponderação de regularização,
W	$W = W^T \geq 0$, matriz de ponderação para o erro de estimativa,
A	matriz $N \times n$ conhecida,
b	vetor $N \times 1$ conhecido,
δA	matriz de perturbação da matriz nominal A ,
δb	vetor de perturbação do vetor nominal b ,
H, E_a, E_b	matrizes conhecidas com dimensões apropriadas,
Δ	matriz arbitrária satisfazendo $\ \Delta\ \leq 1$ (contração).

O seguinte resultado é provado em SAYED (2001).

Teorema 3.1.1 *O problema de otimização (3.1)-(3.2) tem uma única solução $\hat{x}$. Esta solução é dada por*

$$\hat{x} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} E_a^T E_b) \quad (3.3)$$

sendo que as matrizes de ponderação modificadas $\hat{Q}$ e $\hat{W}$ são definidas como

$$\hat{Q} := Q + \hat{\lambda} E_a^T E_a \quad (3.4)$$

$$\hat{W} := W + W H (\hat{\lambda} I - H^T W H)^\dagger H^T W \quad (3.5)$$

e o parâmetro escalar positivo $\hat{\lambda}$ é determinado a partir do seguinte problema de otimização

$$\hat{\lambda} := \arg \max_{\lambda \geq \|H^T W H\|} G(\lambda) \quad (3.6)$$

com

$$G(\lambda) := \|x(\lambda)\|_Q^2 + \lambda \|E_a x(\lambda) - E_b\|^2 + \|A x(\lambda) - b\|_{W(\lambda)}^2 \quad (3.7)$$

e as funções auxiliares são definidas por

$$x(\lambda) := [Q(\lambda) + A^T W(\lambda) A]^{-1} [A^T W(\lambda) b + \lambda E_a^T E_b] \quad (3.8)$$

$$Q(\lambda) := Q + \lambda E_a^T E_a \quad (3.9)$$

$$W(\lambda) := W + W H (\lambda I - H^T W H)^\dagger H^T W. \quad (3.10)$$

Tem-se ainda que o valor do custo ótimo resultante de (3.1) é igual a $G(\hat{\lambda})$ e é dado por

$$G(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\lambda} \|E_b\|^2 & -\hat{\lambda} E_b^T E_a \\ -\hat{\lambda} E_a^T E_b & Q(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{x} \end{bmatrix} + (A\hat{x} - b)^T W(\lambda) (A\hat{x} - b). \quad (3.11)$$

□

3.2 Estimativa Filtrada Robusta

Considere o seguinte modelo com incertezas

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + (G_i + \delta G_i) w_i \\ z_i &= H_i x_i + v_i \\ \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} &= M_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo $\{M_i, E_{f,i}, E_{g,i}\}$ matrizes conhecidas e Δ_i uma matriz arbitrária satisfazendo $\|\Delta_i\| \leq 1$. Fixe um instante de tempo i . Suponha que sejam conhecidas

- (i) a estimativa filtrada de x_i : $\hat{x}_{i|i}$ e
- (ii) a estimativa filtrada de w_i : $\hat{w}_{i|i} = 0$

sendo que a estimativa filtrada de uma variável a_i indica o valor previsto para esta variável dado o conhecimento que se tem até o instante i . Considere que ocorra uma atualização na medida, ou seja, é dada uma nova medida z_{i+1} . Note que os valores ‘reais’ para as variáveis x_i , w_i e z_{i+1} que ocorrem no sistema em geral diferem dos valores previstos pelo nosso conhecimento do sistema e das nossas estimativas. Assim, pode-se definir os seguintes erros de previsão

$$\begin{aligned} e_{x,i} &:= x_i - \hat{x}_{i|i} \\ e_{w,i} &:= w_i - \hat{w}_{i|i} = w_i \\ e_{y,i+1} &:= z_{i+1} - H_{i+1}x_{i+1} = v_{i+1}. \end{aligned}$$

Os erros de previsão de cada variável indicam o nosso desconhecimento a respeito da respectiva variável. Assim, o fato do erro de previsão em relação à variável w_i ser a própria w_i , ou seja, $e_{w,i} = w_i$, indica que neste modelo não se conhece o valor de w_i . Da mesma forma, o fato de se ter $e_{y,i} = v_i$ decorre de considerarmos o nosso desconhecimento da saída ser representada na forma de um sinal de ruído v_i . O valor exato dos erros de previsão são desconhecidos mas pode-se supor que sejam conhecidas matrizes de ponderação para estes erros

- (i) matriz de ponderação para o erro de previsão do estado $e_{x,i}$: $P_{i|i}$

(ii) matriz de ponderação para o erro de previsão do ruído de estado $e_{w,i}$: Q_i

(iii) matriz de ponderação para o erro de previsão da saída $e_{y,i+1}$: R_{i+1} .

As matrizes de ponderação indicam o peso relativo das variáveis, uma em relação às outras. A dependência em relação a i indica que o peso relativo varia a cada instante i . Estas matrizes são usadas para definir uma ponderação (custo) do efeito dos erros de previsão

$$J_i := \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|w_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - H_{i+1}x_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1}}^2. \quad (3.13)$$

Este custo dos erros de previsão, J_i , incorpora a informação adicional z_{i+1} e depende de x_i , w_i e das incertezas δF_i e δG_i . Note ainda que as estimativas dadas $\hat{x}_{i|i}$ e $\hat{w}_{i|i}$ são exatamente a solução ótima do problema de minimizar em x_i e w_i o seguinte custo dos erros de previsão sem a informação z_{i+1}

$$\|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|w_i\|_{Q_i^{-1}}^2. \quad (3.14)$$

Com isto, pode-se propor como atualização das estimativas de x_i e w_i em face ao conhecimento da saída z_{i+1} , a solução ótima $\{\hat{x}_{i|i+1}, \hat{w}_{i|i+1}\}$ do seguinte problema *min-max* quadrático

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix} := \arg \min_{\{x_i, w_i\}} \max_{\{\delta F_i, \delta G_i\}} \{ \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}^{-1}}^2 + \|w_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|z_{i+1} - H_{i+1}x_{i+1}\|_{R_{i+1}^{-1}}^2 \} \quad (3.15)$$

$$s.a. \begin{cases} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i) x_i + (G_i + \delta G_i) w_i \\ z_{i+1} &= H_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1} \\ \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} &= M_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix}, \|\Delta_i\| \leq 1. \end{cases}$$

Com a solução $\{\hat{x}_{i|i+1}, \hat{w}_{i|i+1}\}$ pode-se construir uma estimativa filtrada para x_{i+1} (atualização no tempo para a estimativa semelhante à atualização no tempo do estado na equação de estados)

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := F_i \hat{x}_{i|i+1} + G_i \hat{w}_{i|i+1} = \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Note que o problema de otimização (3.15) pode ser resolvido via Teorema 3.1.1, e assim, a estimativa (3.16) pode ser obtida para cada i . As expressões das estimativas podem ser apresentadas na forma de um algoritmo do tipo predição-correção, conforme o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 (*Filtro robusto na forma preditora - corretora*): *Considere as equações de estado e de saída*

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + (G_i + \delta G_i)w_i \\ z_i &= H_i x_i + v_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

com as incertezas nas matrizes F_i e G_i modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix} = M_i \Delta_i \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_i\| \leq 1. \quad (3.18)$$

Considere ainda que as matrizes de ponderação $\Pi_0 > 0$, $R_i > 0$ e $Q_i > 0$ sejam conhecidas. As estimativas dos estados podem ser calculadas recursivamente segundo o seguinte algoritmo

Passo 0 (Condições iniciais): Faça

$$\begin{aligned} P_{0|0} &:= (\Pi_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0. \end{aligned}$$

Passo 1 : Se $H_{i+1} M_i = 0$, então faça $\hat{\lambda}_i = 0$. Caso contrário, determine $\hat{\lambda}_i$ no intervalo

$$\lambda > \lambda_{l,i} := \|M_i^T H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} M_i\| \quad (3.19)$$

que minimiza $G(\lambda)$ definido por (3.7) com as identificações (3.36)-(3.46).

Passo 2 : Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, substituir $\{Q_i, R_{i+1}, P_{i|i}, G_i, F_i\}$ por

$$\hat{Q}_i^{-1} = Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left(I + \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T \right)^{-1} E_{g,i} \quad (3.20)$$

$$\hat{R}_{i+1} = R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H_{i+1} M_i M_i^T H_{i+1}^T \quad (3.21)$$

$$\hat{P}_{i|i} = \left(P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

$$= P_{i|i} - P_{i|i} E_{f,i}^T (\hat{\lambda}_i^{-1} I + E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T)^{-1} E_{f,i} P_{i|i} \quad (3.23)$$

$$\hat{G}_i = G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{g,i}^T E_{g,i} \quad (3.24)$$

$$\hat{F}_i = \left(F_i - \hat{\lambda}_i \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{g,i} \right) \left(I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{f,i} \right). \quad (3.25)$$

Se $\hat{\lambda}_i = 0$, faça

$$\hat{Q}_i = Q_i, \hat{R}_{i+1} = R_{i+1}, \hat{P}_{i|i} = P_{i|i}, \hat{G}_i = G_i, \text{ e } \hat{F}_i = F_i.$$

Passo 3 : Atualize $\{\hat{x}_{i|i}, P_{i|i}\}$ da seguinte maneira

$$\hat{x}_{i+1|i} = \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \quad (3.26)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} e_{i+1} \quad (3.27)$$

$$e_{i+1} = z_{i+1} - H_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} \quad (3.28)$$

$$P_{i+1|i} = F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T \quad (3.29)$$

$$P_{i+1|i+1} = P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T R_{e,i+1}^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i} \quad (3.30)$$

$$R_{e,i+1} = \hat{R}_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1|i} H_{i+1}^T. \quad (3.31)$$

Prova: Primeiro note que o funcional J_i pode ser re-escrito como

$$J_i = \begin{bmatrix} e_{x,i} \\ w_i \\ e_{y,i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x,i} \\ w_i \\ e_{y,i+1} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

sendo definidos os seguintes erros de informação

$$\begin{aligned} e_{x,i} &:= x_i - \hat{x}_{i|i}, \\ e_{y,i+1} &:= z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo-se x_{i+1} pela equação (3.17) na equação do erro $e_{y,i+1}$, tem-se

$$\begin{aligned}
e_{y,i+1} &:= z_{i+1} - H_{i+1}x_{i+1} \\
&= z_{i+1} - H_{i+1}[(F_i + \delta F_i)x_i + (G_i + \delta G_i)w_i] \\
&= z_{i+1} - H_{i+1}[(F_i + \delta F_i)e_{x,i} + (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} + (G_i + \delta G_i)w_i] \\
&= (z_{i+1} - H_{i+1}\hat{x}_{i+1|i}) - H_{i+1}\delta F_i\hat{x}_{i|i} - (H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \\
&\quad + H_{i+1} \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} e_{x,i} \\ w_i \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Desta forma, o funcional a ser otimizado J_i pode ser re-escrito seguindo o padrão do Teorema 3.1.1

$$\begin{aligned}
J_i &= \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \end{bmatrix} + \\
&\quad + \left[(H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} + H_{i+1} \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta G_i \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - ((z_{i+1} - H_{i+1}F_i\hat{x}_{i|i}) - H_{i+1}\delta F_i\hat{x}_{i|i}) \right]^T R_{i+1}^{-1}(\cdot).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, pelo Teorema 3.1.1 valem as seguintes identificações

$$x \longleftarrow \begin{bmatrix} e_{x,i} \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ w_i \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$b \longleftarrow z_{i+1} - H_{i+1}F_i\hat{x}_{i|i} \tag{3.37}$$

$$A \longleftarrow H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$\delta A \longleftarrow H_{i+1}M_i\Delta \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

$$\delta b \longleftarrow -H_{i+1}M_i\Delta E_{f,i}\hat{x}_{i|i} \tag{3.40}$$

$$Q \longleftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

$$W \longleftarrow R_{i+1}^{-1} \tag{3.42}$$

$$H \longleftarrow H_{i+1}M_i \tag{3.43}$$

$$E_a \longleftarrow \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

$$E_b \longleftarrow -E_{f,i}\hat{x}_{i|i} \tag{3.45}$$

$$\Delta \longleftarrow \Delta_i. \tag{3.46}$$

A solução $\hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix}$ do problema min-max (3.15) é encontrada resolvendo a equação

$$(Q(\hat{\lambda}_i) + A^T W(\hat{\lambda}_i) A) \hat{x} = (A^T W(\hat{\lambda}_i) b + \hat{\lambda}_i E_a^T E_b) \quad (3.47)$$

sendo

$$\begin{aligned} Q(\hat{\lambda}_i) &= Q + \hat{\lambda}_i E_a^T E_a \\ &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} W(\hat{\lambda}_i) &= W + WH \left(\hat{\lambda}_i I - H^T W H \right)^{-1} H^T W \\ &= \left(R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H_{i+1} M_i M_i^T H_{i+1}^T \right)^{-1} =: \hat{R}_{i+1}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

e $\hat{\lambda}_i$ é o argumento que minimiza a função $G(\lambda)$ conforme o Passo 1 do enunciado do teorema. Fazendo-se as substituições requeridas, a Equação (3.47) se escreve como

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \right) \\ &\times \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i}) - \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} E_{f,i} \hat{x}_{i|i}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Note que $\hat{x}_{i|i}$ está presente nos dois lados da Equação (3.50) e que

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} F_i \hat{x}_{i|i} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} E_{f,i} \hat{x}_{i|i}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Desta forma, (3.50) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \right) \\ &\times \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} + \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Como se deseja encontrar a estimativa filtrada $\hat{x}_{i+1|i+1}$ para x_{i+1} que se considera como sendo dada por

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := F_i \hat{x}_{i|i+1} + G_i \hat{w}_{i|i+1} = \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix},$$

multiplicando-se os dois lados de (3.52) por

$$\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (3.53)$$

obtém-se uma equação em $\hat{x}_{i+1|i+1}$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(I + \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \right)}_{P_{i+1|i}} \\ & \times H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \underbrace{\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{w}_{i|i+1} \end{bmatrix}}_{\hat{x}_{i+1|i+1}} \\ & = \underbrace{\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix}}_{P_{i+1|i}} \\ & \times H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{F}_i \hat{x}_{i|i}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Com as variáveis auxiliares $P_{i+1|i}$, $\hat{x}_{i+1|i+1}$ e $\hat{F}_i$ definidas conforme apresentadas em (3.54), então pode-se escrever de maneira compacta

$$\left(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right) \hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} + \hat{F}_i \hat{x}_{i|i}. \quad (3.55)$$

Supondo-se que a matriz $(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1})$ possua inversa, então

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= \underbrace{\left(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1}\right)^{-1} P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1}}_{P_{i+1|i+1}} \\ &+ \left(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1}\right)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Com a variável auxiliar $P_{i+1|i+1}$ definida em (3.56) pode-se escrever

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} + \left(I - P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1}\right) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \quad (3.57)$$

ou

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} \left(z_{i+1} - H_{i+1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i}\right). \quad (3.58)$$

Assim, definindo-se a variável auxiliar e_{i+1} conforme (3.28) e a variável auxiliar $\hat{x}_{i+1|i}$ conforme (3.26) obtém-se

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \hat{x}_{i+1|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} e_{i+1} \quad (3.59)$$

que é exatamente a Equação (3.27) do Passo 3 do teorema. Falta agora re-escrever as variáveis auxiliares $P_{i+1|i+1}$, $P_{i+1|i}$ e $\hat{F}_i$ de forma conveniente. Da Equação (3.56) tem-se

$$\begin{aligned}P_{i+1|i+1} &:= \left(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1}\right)^{-1} P_{i+1|i} \\ &= \left(I - P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \left(I + P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1}\right)^{-1}\right) P_{i+1|i} \\ &= P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} \left(I + H_{i+1} P_{i+1|i} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1}\right)^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i} \\ &= P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1|i} H_{i+1}^T\right)^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i} \quad (3.60)\end{aligned}$$

que é a expressão encontrada em (3.30) quando se adota a variável auxiliar $R_{e,i+1}$ conforme definida em (3.31). Na equação (3.54) observa-se que $P_{i+1|i}$ e $\hat{F}_i$ dependem da inversa da matriz $Q(\hat{\lambda}_i)$ em (3.48). Assim, determina-se a inversa de $Q(\hat{\lambda}_i)$

$$\begin{aligned}
Q(\hat{\lambda}_i)^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} & -\hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{g,i} \\ \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} & Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & I \end{bmatrix}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Na Equação (3.61) foram definidas as variáveis auxiliares

$$\hat{P}_{i|i} := (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i})^{-1} \tag{3.62}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_i &:= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} - \hat{\lambda}_i^2 E_{g,i}^T E_{f,i} \left(P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} \right)^{-1} E_{f,i}^T E_{g,i} \right)^{-1} \\
&= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left(I - \hat{\lambda}_i E_{f,i} \left(P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} \right)^{-1} E_{f,i}^T \right) E_{g,i} \right)^{-1} \\
&= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left(I - \hat{\lambda}_i E_{f,i} \left(I + \hat{\lambda}_i P_{i|i} E_{f,i}^T E_{f,i} \right)^{-1} P_{i|i} E_{f,i}^T \right) E_{g,i} \right)^{-1} \\
&= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left(I - \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T \left(I + \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T \right)^{-1} \right) E_{g,i} \right)^{-1} \\
&= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left(I + \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T \right)^{-1} E_{g,i} \right)^{-1} \tag{3.63}
\end{aligned}$$

que fornecem exatamente as equações (3.22) e (3.20) do Passo 2 do algoritmo do teorema. Com isto, das equações (3.54) e (3.63) obtém-se

$$P_{i+1|i} := \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

ou

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \\
P_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} F_i & G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ (G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i})^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Definindo-se a variável auxiliar $\hat{G}_i$ como em (3.24), tem-se $P_{i+1|i}$ escrita na forma compacta (3.30). Novamente, das equações (3.54) e (3.63) segue que

$$\begin{aligned}
\hat{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i & G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} \\ -\hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} P_{i|i}^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i & \hat{G}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \end{bmatrix} \hat{P}_{i|i} P_{i|i}^{-1} \\
&= (F_i - \hat{\lambda}_i \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i}) \hat{P}_{i|i} (\hat{P}_{i|i}^{-1} - \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i}) \\
&= (F_i - \hat{\lambda}_i \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i}) (I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{f,i})
\end{aligned}$$

que é exatamente a expressão encontrada em (3.25). Para a condição inicial x_0 , pode-se supor que se conhece uma estimativa $\hat{x}_{0|-1} = 0$ juntamente com uma matriz de ponderação para o erro de previsão $\Pi_0 > 0$. Dada uma medida z_0 , para qual se conhece a matriz de ponderação para o erro de previsão $R_0 > 0$, pode-se definir um custo do erro de previsão como

$$C_0 := \|x_0 - \hat{x}_{0|-1}\|_{\Pi_0^{-1}}^2 + \|z_0 - Hx_0\|_{R_0^{-1}}^2. \quad (3.65)$$

Com isto pode-se propor como estimativa inicial dada a informação z_0 como sendo a solução ótima $\hat{x}_{0|0}$ que minimiza o funcional (3.65). Como

$$C_0 = x_0^T (\Pi_0^{-1} + H^T R_0^{-1} H) x_0 - 2x_0^T H^T R_0^{-1} z_0 + z_0^T H^T R_0^{-1} H z_0. \quad (3.66)$$

Derivando C_0 em relação a x_0 , obtém-se facilmente que a solução ótima é dada por

$$\hat{x}_{0|0} = (\Pi_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1} H_0^T R_0^{-1} z_0.$$

Pode-se ainda, de forma consistente com (3.30), definir $P_{0|0} := (\Pi_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}$.

□

Observação 3.2.1 : *Uma expressão alternativa para $\hat{Q}_i$ envolvendo uma inversa a menos é dada por*

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &:= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} - \hat{\lambda}_i^2 E_{g,i}^T E_{f,i} \underbrace{\left(P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} \right)^{-1}}_{\hat{P}_{i|i}} E_{f,i}^T E_{g,i} \right)^{-1} \\ &= \left(Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T \left[I - \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T \right] E_{g,i} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares

Neste capítulo apresenta-se a estimativa filtrada singular com e sem a inclusão de incertezas nas matrizes E , F e H . O filtro robusto singular é comparado com a estimativa filtrada robusta no espaço de estados do filtro BDU apresentado no Capítulo 3.

4.1 Estimativa Filtrada para Sistemas Singulares

Seja o sistema linear discreto estocástico descrito por

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + w_i \\ z_i &= H_i x_i + v_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo x_i o vetor de estados de dimensão $n \times 1$ e z_i o vetor de saída de dimensão $m \times 1$. E_{i+1} e F_i são matrizes com dimensões $p \times n$ e H_i é uma matriz com dimensão $m \times n$. w_i e v_i são vetores que têm média zero com dimensões $p \times 1$ e $m \times 1$ e matrizes de covariâncias

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{w_k w_i^T\} &= \begin{cases} Q_i > 0 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \\
\mathcal{E}\{v_k v_i^T\} &= \begin{cases} R_i > 0 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \\
\mathcal{E}\{w_k v_i^T\} &= 0 \quad \text{para todos } k \text{ e } i
\end{aligned} \tag{4.2}$$

e o estado inicial x_0 é gaussiano com média $\bar{x}_0$ e variância $P_0 > 0$, independente de v_i e de w_i . O filtro de Kalman singular, pode ser obtido a partir da solução de um problema de otimização determinístico que corresponde à formulação original do problema estocástico. Assumindo que no instante i tem-se uma estimativa *a-priori* para o estado x_i , $\hat{x}_{i|i}$, uma matriz de ponderação definida positiva para o erro $x_i - \hat{x}_{i|i}$, denominada $P_{i|i}$ e uma nova medida z_{i+1} , então pode-se estimar um novo valor para x_i , $\hat{x}_{i+1|i+1}$ a partir das soluções dos seguintes funcionais, para $i = 0$

$$\min_{x_0} [x_0^T P_0^{-1} x_0 + (z_0 - H_0 x_0)^T R_0^{-1} (z_0 - H_0 x_0)] \tag{4.3}$$

e para $i > 0$

$$\begin{aligned}
&\min_{x_i, x_{i+1}} [(x_i - \hat{x}_{i|i})^T P_{i|i}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i}) + (z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1})^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1}) \\
&+ (E_{i+1} x_{i+1} - F_i x_i)^T Q_i^{-1} (E_{i+1} x_{i+1} - F_i x_i)].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Com estas informações pode-se enunciar o seguinte teorema

Teorema 4.1.1 *Suponha que $\begin{bmatrix} E_i \\ H_i \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno para todo $i \geq 0$. A estimativa ótima filtrada $\hat{x}_{i|i}$ de x_i pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo*

Passo 0: (Condições Iniciais)

$$\begin{aligned}
P_{0|0} &:= (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}; \\
\hat{x}_{0|0} &:= P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Passo i: Atualize $\{\hat{x}_{i|i}, P_{i|i}\}$ para $\{\hat{x}_{i+1|i+1}, P_{i+1|i+1}\}$ como segue

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T & 0 \\ 0 & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}; \quad (4.6)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T & 0 \\ 0 & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Prova: Re-escrevendo-se o funcional da Equação (4.4) na forma de blocos matriciais, segue que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (x_i - \hat{x}_{i|i})^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comparando-se os termos desta equação com a dos mínimos quadrados, Equação (2.4), valem as seguintes equivalências

$$\begin{aligned} x & \leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ b & \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ Q & \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A & \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \\ W & \leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução de (4.8) é dada por

$$\hat{x} = [Q + A^T W A]^{-1} A^T W b. \quad (4.9)$$

O termo $A^T W A$ fica sendo

$$\begin{aligned} A^T W A &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim, $Q + A^T W A$ será igual a

$$\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e

$$\begin{aligned} A^T W b &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo-se o vetor $\begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$, pelo vetor $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$, então (4.9) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando-se o lema da inversão de blocos matriciais,

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(CA^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \right. \\ &\quad \left. + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} &= \left(E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1} \\ &= \left(E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) E_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1} \\ &= \left(E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T)^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na forma matricial esta equação pode ser escrita como

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T & 0 \\ 0 & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (4.18)$$

Definindo-se $P_{i+1|i+1} = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \left(-E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + \right. \\ &\quad \left. + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \right)\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ H_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i} F_i^T & 0 \\ 0 & R_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

A solução do *Passo 0* é a mesma daquela encontrada pelo Teorema 2.1.1. $\square$

4.2 Estimativa Robusta para Sistemas Singulares

Esta seção desenvolve o equacionamento do filtro considerando-se as incertezas de modelagem. As incertezas estruturadas afetam as matrizes E_{i+1} , F_i e H_{i+1} de (4.1), que passa a ser re-escrita na seguinte forma

$$\begin{aligned}(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i \\ y_{i+1} &= (H_{i+1} + \delta H_{i+1})x_{i+1} + v_{i+1}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

As incertezas nas matrizes E_{i+1} , F_i e H_{i+1} são modeladas como

$$\delta F_i = M_{f,i} \Delta_{1,i} N_{f,i} \quad (4.23)$$

$$\delta E_{i+1} = M_{f,i} \Delta_{1,i} N_{e,i+1} \quad (4.24)$$

$$\delta H_i = M_{h,i} \Delta_{2,i} N_{h,i}, \quad (4.25)$$

sendo $\Delta_{1,i}$ e $\Delta_{2,i}$ matrizes arbitrárias satisfazendo $\|\Delta_{1,i}\| \leq 1$ e $\|\Delta_{2,i}\| \leq 1$. Com estas informações sobre as incertezas, o funcional poderá ser escrito como

$$\min_{x_0} \max_{\delta H_0} [x_0^T P_{i|i}^{-1} x_0 + (z_0 - (H_0 + \delta H_0)x_0)^T R_0^{-1} (z_0 - (H_0 + \delta H_0)x_0)], \quad (4.26)$$

para $i = 0$, e

$$\begin{aligned}
 & \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1}\}} [(x_i - \hat{x}_{i|i})^T P_{i|i}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i}) + (z_{i+1} \\
 & - (H_{i+1} + \delta H_{i+1})x_{i+1})^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - (H_{i+1} + \delta H_{i+1})x_{i+1}) + ((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} \\
 & - (F_i + \delta F_i)x_i)^T Q_i^{-1} ((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i)], \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

para $i > 0$, sujeito às restrições do modelo, Equação (4.22), e às restrições das incertezas, equações (4.23), (4.24) e (4.25). Re-escrevendo-se o funcional (4.27) na forma matricial, segue que

$$\begin{aligned}
 J_i = & \begin{bmatrix} (x_i - \hat{x}_{i|i})^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & (E_{i+1} + \delta E_{i+1}) \\ 0 & (H_{i+1} + \delta H_{i+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} (F_i + \delta F_i)\hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

que escrito na forma compacta assume a seguinte expressão

$$J_i = \min_x \max_{\delta A, \delta b} [x^T Q x + [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]^T W(\cdot)], \quad (4.29)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 x & \leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}; \\
 b & \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}; \\
 A & \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix}; \\
 \delta A & \leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & \delta E_{i+1} \\ 0 & \delta H_{i+1} \end{bmatrix}, \text{ ou} \\
 \delta A & \leftarrow \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i} \\ 0 & N_{h,i} \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta b &\leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou} \\
\delta b &\leftarrow \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}; \\
Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
W &\leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}; \\
H &\leftarrow \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix}; \\
N_a &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i} \\ 0 & N_{h,i} \end{bmatrix}; \\
N_b &\leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}; \\
\Delta &\leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

No caso das condições iniciais, as equivalências retiradas de (4.26) são

$$\begin{aligned}
A &\leftarrow H_0; \quad b \leftarrow z_0; \\
\delta A &\leftarrow \delta H_0; \quad \delta b \leftarrow 0; \\
Q &\leftarrow P_0^{-1}; \quad W \leftarrow R_0^{-1}; \\
H &\leftarrow M_{h,0}; \quad N_a \leftarrow N_{h,0}; \\
N_b &\leftarrow 0.
\end{aligned}$$

Definindo-se $\hat{E}_i := \begin{bmatrix} E_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i} \end{bmatrix}$ e $\hat{H}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{h,i} \end{bmatrix}$, então a dedução da estimativa filtrada robusta será feita pelo teorema a seguir, seguindo o Teorema 3.1.1.

Teorema 4.2.1 *Suponha que $\begin{bmatrix} \hat{E}_i \\ \hat{H}_i \end{bmatrix}$ tem posto coluna pleno para todo $i \geq 0$. A estimativa filtrada robusta ótima $\hat{x}_{i|i}$ de x_i pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo*

recursivo

Passo 0: Condições Iniciais: Se $M_{h,0} = 0$ então

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0)^{-1}; \quad (4.30)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} H_0^T R_0^{-1} z_0. \quad (4.31)$$

Se $M_{h,0} \neq 0$ encontre o parâmetro escalar ótimo $\hat{\lambda}_{-1}$ minimizando a função $G(\lambda)$ do Teorema 3.1.1 no intervalo $\lambda > \|M_{h,0}^T R_0^{-1} M_{h,0}\|$ e considere

$$\hat{R}_0 := R_0 - \hat{\lambda}_{-1}^{-1} M_{h,0} M_{h,0}^T; \quad (4.32)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + H_0^T \hat{R}_0^{-1} H_0 + \hat{\lambda}_{-1}^{-1} N_{h,0}^T N_{h,0})^{-1}; \quad (4.33)$$

$$\hat{x}_{0|0} := P_{0|0} H_0^T \hat{R}_0^{-1} z_0. \quad (4.34)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i+1} = 0$ então $\hat{\lambda}_i := 0$. Se não, encontre o parâmetro escalar ótimo $\hat{\lambda}_i$ minimizando a função $G(\lambda)$ do Teorema 3.1.1 no intervalo

$$\hat{\lambda}_i > \lambda_{l,i} := \left\| \begin{bmatrix} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1} \end{bmatrix} \right\|. \quad (4.35)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_{i+1}, P_{i|i}, E_{i+1}, F_i, H_{i+1}\}$ pelos parâmetros corrigidos

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ sendo } \hat{Q}_i := Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T; \quad (4.36)$$

$$\hat{R}_{i+1} := \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \hat{R}_{i+1} := R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{h,i+1} M_{h,i+1}^T; \quad (4.37)$$

$$\hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{h,i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$ para $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$ do seguinte modo

$$P_{i+1|i+1} := \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (4.41)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ Z_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

sendo

$$Z_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Prova: De acordo com SAYED (2001), a solução de (4.29) é dada por

$$\hat{x} = [\hat{Q} + A^T \hat{W} A]^{-1} [A^T \hat{W} b + \hat{\lambda}_i N_a^T N_b] \quad (4.44)$$

sendo $\hat{Q} := Q + \hat{\lambda}_i N_a^T N_a$ e $\hat{W} := W + WH(\hat{\lambda}_i I - H^T W H)^\dagger H^T W$. Pelo lema da inversão de matrizes a expressão de $\hat{W}$ pode ser escrita como $\hat{W}^{-1} = W^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H H^T = W^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T$. Sendo assim, então

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= Q + \hat{\lambda}_i N_a^T N_a \\ &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i}^T & N_{h,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_{f,i} & N_{e,i} \\ 0 & N_{h,i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i}) & -\hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i} \\ -\hat{\lambda}_i N_{e,i}^T N_{f,i} & \hat{\lambda}_i (N_{e,i}^T N_{e,i} + N_{h,i}^T N_{h,i}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

e a equação $\hat{W} = (W^{-1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_i M_i^T)^{-1}$ é dada por

$$\hat{W} = \left(\begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & R_{i+1} \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_i^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i} M_{h,i}^T \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (4.46)$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{W} &= \begin{bmatrix} (Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T) & 0 \\ 0 & (R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{h,i} M_{h,i}^T) \end{bmatrix}^{-1}, \\
&= \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

O termo $A^T \hat{W} A$ é expresso como

$$\begin{aligned}
A^T \hat{W} A &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & -F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

O termo $A^T \hat{W} b$ é expresso como

$$\begin{aligned}
A^T \hat{W} b &= \begin{bmatrix} -F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Assim

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix} (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i}) & -\hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i} \\ -\hat{\lambda}_i N_{e,i}^T N_{f,i} & \hat{\lambda}_i (N_{e,i}^T N_{e,i} + N_{h,i}^T N_{h,i}) \end{bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & -F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} (\hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i}) \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} -F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} -N_{f,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ N_{e,i}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i + P_{i|i}^{-1} & -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} = & \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i + P_{i|i}^{-1} & -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} \\ -\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i & \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando-se o lema da inversão de blocos matriciais, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} = & \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Assim

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} = & (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(CA^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \right. \\ & \left. + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

e

$$\begin{aligned} (D - CA^{-1}B)^{-1} = & \left(\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} - \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i (\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \right. \\ & \left. + P_{i|i}^{-1})^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{E}_{i+1} \right)^{-1} = \left(\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} - \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i (\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \right. \\ & \left. + P_{i|i}^{-1})^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1}) \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Usando-se o lema da inversão de matrizes nesta equação, encontra-se

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = \left(\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right)^{-1} \quad (4.56)$$

Definindo-se $P_{i+1|i+1} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, e pondo-se esta equação na forma matricial, então

$$P_{i+1|i+1} = \left(\begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (4.57)$$

Quanto à expressão de $\hat{x}_{i+1|i+1}$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \left(CA^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \right), \quad (4.58)$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} & \left(-\hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i (\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i + P_{i|i}^{-1})^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \right. \\ & \left. + \hat{E}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

então

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} & \left(\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i^{-1} - \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i (\hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{F}_i + P_{i|i}^{-1})^{-1} \hat{F}_i^T \hat{Q}_i^{-1}) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \right. \\ & \left. + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Aplicando-se o lema da inversão de matrizes a esta equação, encontra-se

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1}, \quad (4.61)$$

que na forma matricial, fica sendo

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{E}_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

□

4.3 Comparação com a Estimativa Filtrada BDU

O filtro para sistemas singulares deduzido na Seção 4.2, será comparado a seguir com o filtro BDU deduzido em SAYED (2001), para isto são necessárias as seguintes simplificações

$$\hat{E}_{i+1} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{H}_{i+1} = \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{R}}_{i+1} = \begin{bmatrix} R_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{Q}_i = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Assim a expressão

$$P_{i+1|i+1} := \left(\hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right)^{-1} \quad (4.63)$$

fica sendo

$$\begin{aligned} P_{i+1|i+1} &= \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.64)$$

ou

$$\begin{aligned} P_{i+1|i+1} &= \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_i + F_i P_{i|i} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i} N_{f,i}^T \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i} F_i^T & I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Aplicando-se o lema da inversão de blocos matriciais à Equação (4.65), obtém-se

$$P_{i+1|i+1} = \left(\left(\hat{Q}_i + F_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} F_i^T \right)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}. \quad (4.66)$$

Como $\hat{P}_{i|i} = (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1}$, então

$$P_{i+1|i+1} = \left((\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}. \quad (4.67)$$

Quanto à expressão do filtro tem-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + F_i P_{i|i} F_i^T & \sqrt{\lambda_i} F_i P_{i|i} N_{f,i}^T \\ \sqrt{\lambda_i} P_{i|i} F_i^T & (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T) \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\lambda_i} N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}. \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Supondo que $(I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)$ seja invertível, então

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} \left((\hat{Q}_i + F_i P_{i|i} F_i^T - \hat{\lambda}_i F_i P_{i|i} N_{f,i}^T (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)^{-1} N_{f,i} P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i \right. \\
&- \hat{\lambda}_i (\hat{Q}_i + F_i P_{i|i} F_i^T - \hat{\lambda}_i F_i P_{i|i} N_{f,i}^T (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)^{-1} N_{f,i} P_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i P_{i|i} N_{f,i}^T \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)^{-1} N_{f,i} \left. \right) \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}; \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i (I - \hat{\lambda}_i P_{i|i} N_{f,i}^T (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i} N_{f,i}^T)^{-1} N_{f,i}) \hat{x}_{i|i} \\
&+ P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}; \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i (I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i}) \hat{x}_{i|i} \\
&+ P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}; \quad (4.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= P_{i+1|i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_i (I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i}) \hat{x}_{i|i} \\
&+ P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}. \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Definindo-se $F_{c,i} = F_i (I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i})$, então

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}. \quad (4.74)$$

Substituindo-se a expressão de $P_{i+1|i+1}$ no primeiro termo desta equação

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i+1} &= ((\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1})^{-1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} \\
&+ P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

e aplicando-se o lema da inversão de matrizes ao primeiro termo do segundo membro desta equação, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= \left((\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) - (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T (R_{i+1} + H_{i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) \right. \\ &\quad \times \left. H_{i+1}^T)^{-1} H_{i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) \right) (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad \text{ou} \quad (4.76)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= F_{c,i} \hat{x}_{i|i} - (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T (R_{i+1} + H_{i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T)^{-1} \\ &\quad \times H_{i+1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}, \quad (4.77)\end{aligned}$$

que também pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i+1} &= F_{c,i} \hat{x}_{i|i} - ((\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1})^{-1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} \\ &\quad + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}, \quad \text{ou} \quad (4.78)\end{aligned}$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_{c,i} \hat{x}_{i|i} - P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1}. \quad (4.79)$$

Sendo que em função do erro de estimativa, a versão no espaço de estados é expressa da seguinte maneira

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} F_{c,i} \hat{x}_{i|i}). \quad (4.80)$$

Pode-se então comparar o algoritmo apresentado neste capítulo com o apresentado em SAYED (2001) para o espaço de estados usual, quando $(E_{i+1} = I)$, e quando as incertezas estão presentes somente na matriz F_i . Destacam-se as expressões (4.67) e (4.74),

$$P_{i+1|i+1} = \left((\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}; \quad (4.81)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} (\hat{Q}_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} \hat{F}_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad (4.82)$$

sendo $\hat{Q}_i = Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T$. As equações correspondentes de SAYED (2001) são dadas por

$$P_{i+1|i+1} = \left((Q_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} + H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \right)^{-1}; \quad (4.83)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = P_{i+1|i+1} (Q_i + F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T)^{-1} \hat{F}_{c,i} \hat{x}_{i|i} + P_{i+1|i+1} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1} \quad (4.84)$$

sendo $\hat{R}_{i+1} = R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H_{i+1} M_{f,i} M_{f,i}^T H_{i+1}^T$. As expressões para $\hat{P}_{i|i}$ e $\hat{F}_{c,i}$ são as mesmas para ambos os filtros, mas o intervalo de ajuste para o parâmetro de otimização λ é diferente. Observe que o filtro proposto nesta tese, apesar de ser diferente do filtro proposto em SAYED (2001), mantém a propriedade de regularização ou seja, os intervalos de ajuste de λ são conhecidos *a-priori* pois dependem somente dos parâmetros do sistema. Os funcionais de ambos os filtros são diferentes, mas ambos se reduzem ao filtro de Kalman usual quando o sistema não está sujeito a incertezas.

4.4 Estimativa Suavizadora Robusta

A estimativa suavizadora robusta singular pode ser encontrada com facilidade a partir da Equação (4.51) do Teorema 4.2.1. Explicitando-se o termo $x_{i|i+1}$ naquela equação e após algumas manipulações algébricas, encontra-se que a estimativa suavizadora robusta é dada por

$$\begin{aligned} & \hat{x}_{i|i+1} \\ = & \hat{x}_{i|i} - P_{i|i} \hat{F}_i^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \left(I - \hat{E}_{i+1} P_{i+1|i+1} \hat{E}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \right) \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ & + P_{i|i} \hat{F}_i^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{E}_{i+1} P_{i+1|i+1} \hat{H}_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} z_{i+1}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

4.5 Exemplo Numérico

Exemplo 4.5.1 Considere o sistema singular com incertezas estruturadas modeladas de acordo com as equações (4.22) - (4.25), cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \\
 Q &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, N_f = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}, N_e = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 N_h &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 28.18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, \\
 R &= 0.16, M_h = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Os resultados da Figura 4.1 foram simulados considerando-se as matrizes (4.86), para todo $i > 0$ e o sistema sem incerteza, para $i = 0$. A Figura 4.1 mostra as curvas das variâncias dos erros calculadas via Monte-Carlo cuja expressão é dada por

$$\mathcal{E}\|x_i - \hat{x}_i\| \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_i^{(j)} - \hat{x}_i^{(j)}\|. \tag{4.87}$$

Cada ponto no instante i em cada curva da variância é a média calculada sobre $T = 800$ experimentos. Para cada experimento j , a matriz Δ com norma menor ou igual a um é selecionada aleatoriamente e fixada para todo i . Gera-se $T = 800$ trajetórias de 1000 pontos cada. Os filtros considerados são: o de Máxima Verossimilhança (ML) que é apresentado em NIKOUKHAH et al. (1992), com uma abordagem estocástica mas que se assemelha às expressões apresentadas no Teorema 4.1.1, implementado com os parâmetros nominais e aplicado ao sistema com incertezas; o ótimo do Teorema 4.1.1 implementado com os parâmetros nominais e aplicado ao sistema sem incertezas e o Descriptor Robusto (DR), Teorema 4.2.1. O filtro DR apresenta melhor desempenho que o filtro ML (o parâmetro $\hat{\lambda}_i$ é fixado em $\hat{\lambda} = 80\lambda_l$, para todo i).

Figura 4.1: Filtros Descriptor Robusto (DR), Ótimo, e de Máxima Verossimilhança (ML).

Capítulo 5

Estimativa Preditora para Sistemas Singulares

Este capítulo apresenta inicialmente algoritmos de filtragem para a estimativa preditora e a estimativa preditora-corretora sem robustez para o sistema singular (4.1), em seguida apresenta um algoritmo para a estimativa preditora robusta singular e compara a estimativa preditora singular sem robustez com a estimativa preditora no espaço de estados. Finalmente encontra a expressão da estimativa preditora-corretora robusta singular.

5.1 Estimativa Preditora Singular

O estudo da estimativa preditora recursiva para o sistema singular consiste em se achar uma sequência $\{\hat{x}_{0|i}, \hat{x}_{1|i}, \hat{x}_{2|i}, \dots, \hat{x}_{i+1|i}\}$ a partir de uma sequência de medidas $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_i\}$. Ao invés de se fazer uma abordagem estocástica, este trabalho adota a abordagem determinística usando-se o método dos mínimos quadrados recursivos através da minimização do seguinte funcional

$$\begin{aligned} J_i = \min_{x_i, x_{i+1}} & [(x_i - \hat{x}_{i|i-1})^T P_{i|i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i-1}) + (z_i - H_i x_i)^T R_i^{-1} (z_i - H_i x_i) \\ & + (E_{i+1} x_{i+1} - F_i x_i)^T Q_i^{-1} (E_{i+1} x_{i+1} - F_i x_i)]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

A solução deste sistema é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 5.1.1 *Suponha que a matriz E_{i+1} tem posto coluna pleno para todo $i \geq 0$ e é dada uma seqüência de medidas $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_i\}$. A estimativa preditora ótima $\hat{x}_{i+1|i}$ resultante da minimização do funcional J_i (5.1), pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo.*

Passo 0: Condições Iniciais

$$P_{0|-1} = P_0 \quad (5.2)$$

$$\hat{x}_{0|-1} = 0. \quad (5.3)$$

Passo i: Atualize os termos $\{\hat{x}_{i|i-1}, P_{i|i-1}\}$ para $\{\hat{x}_{i+1|i}, P_{i+1|i}\}$ através das recursões

$$\hat{x}_{i+1|i} = P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

sendo

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Prova: Re-escrevendo-se o funcional J_i (5.1) na forma matricial, obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (x_i - \hat{x}_{i|i-1})^T & x_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \left(\begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Comparando-se os termos desta equação com a equação dos mínimos quadrados regularizados de (SAYED (2001)), obtém-se as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}
x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i-1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
b &\leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\
Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A &\leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\
W &\leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\hat{x} = [Q + A^T W A]^{-1} A^T W b. \quad (5.7)$$

O termo $A^T W A$ fica sendo

$$\begin{aligned}
A^T W A &= \begin{bmatrix} -F_i^T & H_i^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Assim, $Q + A^T W A$ será igual a

$$\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

e o termo

$$A^T W b = \begin{bmatrix} -F_i^T & H_i^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$A^T W b = \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Substituindo-se o vetor $\begin{bmatrix} (x_i - \hat{x}_{i|i-1}) \\ x_{i+1} \end{bmatrix}$ pelo vetor $\begin{bmatrix} (\hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1}) \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$, então a Equação (5.7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (\hat{x}_{i|i} - \hat{x}_{i|i-1}) \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Usando-se o lema da inversão de blocos matriciais, então esta equação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\ &\times (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo

$$\begin{aligned}
(D - CA^{-1}B)^{-1} &= (E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} \\
&\quad + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1})^{-1} \\
&= \left(E_{i+1}^T (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T)^{-1} E_{i+1} \right)^{-1} \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Definindo-se $P_{i+1|i} = (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \left(E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i \right. \\
&\quad \left. + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} E_{i+1} \right)^{-1}. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Na forma matricial esta equação fica sendo

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T) & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (5.17)$$

Quanto à expressão da estimativa preditora, tem-se de (5.14)

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
&\quad \times (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\
&\quad + P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
&\quad \times H_i^T R_i^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}) - P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i \\
&\quad + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i \\
&\quad + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) F_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} \\
&\quad + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}). \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Termo que multiplica $F_i \hat{x}_{i|i-1}$

$$\begin{aligned}
 & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i^{-1} - Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T Q_i^{-1}) \\
 = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T)^{-1} \\
 = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) F_i^T)^{-1} \\
 = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Termo que multiplica $(z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1})$

$$\begin{aligned}
 & P_{i+1|i} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + F_i^T Q_i^{-1} F_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} \\
 = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\
 \times & F_i (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) H_i^T R_i^{-1} \\
 = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T)^{-1} \\
 \times & F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

A equação do preditor pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} = & P_{i+1|i} E_{i+1}^T \left(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} \right. \\
 & \times \left. H_i P_{i|i-1} F_i^T \right)^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} E_{i+1}^T \left(Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T \right. \\
 & \times \left. (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T \right)^{-1} F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} \\
 & \times (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

que na forma matricial resulta em

$$\hat{x}_{i+1|i} = P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T) & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}) \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

□

5.1.1 Estimativa Preditora - Corretora Singular

A estimativa preditora-corretora singular associa a expressão da estimativa filtrada com a expressão da estimativa preditora e pode ser obtida a partir do Lema a seguir.

Lema 5.1.1 *A atualização no tempo para a estimativa preditora-corretora de sistemas singulares é dada pela seguinte expressão*

$$\hat{x}_{i+1|i} = \left(E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}. \quad (5.25)$$

Prova: Explicitando-se o termo $\hat{x}_{i|i}$ da Equação (5.11) do Teorema 5.1.1, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i & -F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \\ -E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Aplicando-se o lema da inversão de blocos matriciais nesta matriz inversa, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} & -A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \quad \text{ou} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + A^{-1} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ &- A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + A^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i - A^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i - A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} \\ &\times (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} - A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} \\ &\times E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= \left(I - A^{-1}(F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right. \\
&\quad \times \left. (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(A - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) - B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}(F_i^T Q_i^{-1} F_i \right. \\
&\quad + \left. H_i^T R_i^{-1} H_i) - B(D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(P_{i|i-1}^{-1} - F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i \right. \\
&\quad + \left. H_i^T R_i^{-1} H_i) + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \left(I - A^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. H_i^T R_i^{-1} H_i) \right) \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(I + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right) P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right) H_i^T R_i^{-1} z_i.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i-1} &= P_{i|i-1} \left(A^{-1} + A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&\quad - P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

A expressão do preditor encontrada na Equação (5.14) é definida como

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \right. \\
&\quad \times \left. (H_i^T R_i^{-1} z_i - (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1}) + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \right),
\end{aligned} \tag{5.36}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
 &\times H_i^T R_i^{-1} z_i - (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i \\
 &+ H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \hat{x}_{i|i-1} \\
 &+ (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \left(I - (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i \right. \\
 &+ H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} (F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i) \Big) \hat{x}_{i|i-1} + (D - CA^{-1}B)^{-1} \\
 &\times E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} \\
 &+ (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Substituindo-se nesta equação o valor de $\hat{x}_{i|i-1}$ da Equação (5.35), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i \\
 &+ H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \left(P_{i|i-1} \left(A^{-1} + A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D \right. \right. \\
 &- CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \Big)^{-1} \hat{x}_{i|i} - P_{i|i-1} H_i^T R_i^{-1} z_i \Big) \\
 &+ (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} \\
 &\times \left(A^{-1} + A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
 &- (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i \\
 &+ (D - CA^{-1}B)^{-1}E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + F_i^T Q_i^{-1} F_i + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} H_i^T R_i^{-1} z_i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \\
&\times \left(A^{-1} + A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&= (D - CA^{-1}B)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \left(I + A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \right. \\
&\times \left. E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&= \left(D - CA^{-1}B + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}. \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \left(E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} - E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right. \\
&\quad \left. + E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i A^{-1} F_i^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = \left(E_{i+1}^T Q_i^{-1} E_{i+1} \right)^{-1} E_{i+1}^T Q_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i}. \quad (5.42)$$

□

Nota: De (5.42) tem-se que

$$E_{i+1}^T Q_i^{-1} \left(E_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} - F_i \hat{x}_{i|i} \right) = 0. \quad (5.43)$$

Como no Teorema 5.1.1 foi considerado E_{i+1} posto coluna pleno para a existência do filtro preditor, de (5.43) pode-se concluir que

$$E_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i} \quad (5.44)$$

somente se for considerado E_{i+1} também com posto linha pleno, ou seja, se E_{i+1} for invertível. Segue também que se $E_{i+1} = I$ então obtém-se a expressão usual para a atualização da estimativa no tempo

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i}.$$

5.2 Estimativa Preditora Robusta Singular

Considere o sistema

$$(E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} = (F_i + \delta F_i)x_i + w_i \quad (5.45)$$

$$y_i = (H_i + \delta H_i)x_i + v_i \quad (5.46)$$

sendo as incertezas nas matrizes E_{i+1} , F_i e H_i modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Considere o problema de otimização

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_i\}} \left[(x_i - \hat{x}_{i|i-1})^T P_{i|i-1}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i-1}) + \left(z_i - (H_i + \delta H_i)x_i \right)^T \right. \\ & \times R_i^{-1} \left(z_i - (H_i + \delta H_i)x_i \right) + \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i \right)^T \\ & \times Q_i^{-1} \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

sujeito às restrições (5.45) e (5.46) e às incertezas representadas por (5.47). Definindo-se $\hat{E}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}$ e seguindo-se a mesma seqüência de cálculo adotada para a estimativa preditora singular sem incertezas, pode-se enunciar o seguinte Teorema

Teorema 5.2.1 *Suponha que a matriz $\hat{E}_{i+1}$ tem posto coluna pleno para todo $i \geq 0$ e é dada a seqüência de medidas $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_i\}$. A estimativa preditora ótima $\hat{x}_{i+1|i}$ resultante da solução do problema min-max do funcional J_i sujeito à restrição (5.46) e às incertezas representadas por (5.47) pode ser obtida a partir do seguinte algoritmo recursivo.*

Passo 0: Condições Iniciais

$$P_{0|-1} = P_0 \quad (5.49)$$

$$\hat{x}_{0|-1} = 0, \quad (5.50)$$

Passo 1: Se $M_{f,i} = 0$ e $M_{h,i} = 0$ então $\hat{\lambda}_i := 0$. Se não, encontre o parâmetro escalar

ótimo $\hat{\lambda}_i$ minimizando a função $G(\lambda)$ do Teorema 3.1.1, no intervalo

$$\hat{\lambda}_i > \lambda_{l,i} := \left\| \begin{bmatrix} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \right\|. \quad (5.51)$$

Passo 2: Se $\hat{\lambda}_i \neq 0$, substitua os parâmetros $\{Q_i, R_i, P_{i|i-1}, E_{i+1}, F_i, H_i\}$ pelos parâmetros corrigidos

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ sendo } \hat{Q}_i := Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T; \quad (5.52)$$

$$\hat{R}_i := \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ sendo } \hat{R}_i := R_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{h,i} M_{h,i}^T; \quad (5.53)$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{i+1} := \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}; \quad (5.54)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}; \quad (5.55)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i := \begin{bmatrix} H_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{h,i} \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Passo 3: Atualize $\{P_{i|i-1}, \hat{x}_{i|i-1}\}$ para $\{P_{i+1|i}, \hat{x}_{i+1|i}\}$ do seguinte modo

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & -\hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & \hat{R}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (5.57)$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & -\hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & \hat{R}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ Z_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

sendo

$$Z_i := \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

Prova: O funcional J_i do problema de otimização (5.48) pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned}
 J_i = & \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \right. \\
 & + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_i & 0 \end{bmatrix} \left. \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix} \right. \\
 & + \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \delta H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \left. \right) \left. \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}, \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

que de maneira compacta pode ser re-escrito como

$$J = x^T Q x + \left((A + \delta A)x - (b + \delta b) \right)^T W \left((A + \delta A)x - (b + \delta b) \right). \tag{5.61}$$

Comparando-se os termos desta equação com a equação dos mínimos quadrados regularizados de (SAYED (2001)), obtém-se as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}
 x & \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}; \quad A \leftarrow \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix}; \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix}; \\
 \delta A & \leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix} \\
 \delta b & \leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \delta H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \\
 Q & \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad W \leftarrow \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix}; \quad H \leftarrow \begin{bmatrix} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i} \end{bmatrix}; \\
 N_a & \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix}; \quad N_b \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{h,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}; \quad \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\hat{x} = \left(\hat{Q} + A^T \hat{W} A \right)^{-1} \left(A^T \hat{W} b + \hat{\lambda}_i N_a^T N_b \right), \quad \text{sendo} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= Q + \hat{\lambda}_i N_a^T N_a \\ &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^T \\ N_{e,i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} + \hat{\lambda}_i N_{h,i}^T N_{h,i} & \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ \hat{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \hat{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.63)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{W} &= \left(\begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} - \hat{\lambda}_i^{-1} \begin{bmatrix} M_{f,i} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & M_{h,i} M_{h,i}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} Q_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T & 0 \\ 0 & R_i - \hat{\lambda}_i^{-1} M_{h,i} M_{h,i}^T \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Usando-se as variáveis auxiliares $\hat{Q}_i$ e $\hat{R}_i$, pode-se escrever os termos $A^T \hat{W} A$ e $A^T \hat{W} b$ como

$$\begin{aligned} A^T \hat{W} A &= \begin{bmatrix} F_i^T & H_i^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & \hat{R}_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i & F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} A^T \hat{W} b &= \begin{bmatrix} F_i^T & H_i^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} (H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i) \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Substituindo-se os valores encontrados em (5.64), (5.65) e (5.66) em (5.62) e considerando-se que agora

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix},$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i} + \hat{\lambda}_i N_{h,i}^T N_{h,i} & \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{e,i+1} \\ \hat{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{f,i} & \hat{\lambda}_i N_{e,i+1}^T N_{e,i+1} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i & F_i^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i & E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} E_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(\begin{bmatrix} F_i^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} (H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i) \\ E_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} F_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} (N_{f,i}^T N_{f,i} + N_{h,i}^T N_{h,i}) \hat{x}_{i|i-1} \\ N_{e,i+1}^T N_{f,i} \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (5.67)$$

ou de maneira compacta

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1}) & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} - \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Explicitando-se o termo $\hat{x}_{i+1|i}$, resulta

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1}) & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} - \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Aplicando-se o lema da inversão de blocos matriciais à Equação (5.69), obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} - \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Então

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \left(-CA^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) + \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ (D - CA^{-1}B)^{-1} CA^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i,\end{aligned}\quad (5.71)$$

sendo

$$\begin{aligned}(D - CA^{-1}B)^{-1} &= \\ &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} - \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \\ &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \left(\hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (5.72)$$

Considerando-se $P_{i+1|i} := (D - CA^{-1}B)^{-1}$, então

$$P_{i+1|i} := \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \left(\hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1}\quad (5.73)$$

ou na forma de blocos matriciais

$$P_{i+1|i} := \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & -\hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}.\quad (5.74)$$

Assim, a Equação (5.71) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \left(-CA^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) + \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ P_{i+1|i} CA^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i,\end{aligned}\quad (5.75)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \left(-\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \\ &- \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i \\ &+ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left. \right) \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i \\ &+ P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i,\end{aligned}\quad (5.76)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \left(\hat{Q}_i^{-1} - \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \right) \\
&\times \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i + P_{i|i-1}^{-1})^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \\
&\times (Z_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{x}_{i|i-1}). \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Aplicando-se o lema da inversão de matrizes a esta equação, obtém-se

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \left((\hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T) - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T)^{-1} \right. \\
&\times \left. \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \left((\hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T) - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \right. \\
&\times \left. (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T)^{-1} \\
&\times (Z_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{x}_{i|i-1}). \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Na forma de blocos matriciais, esta equação pode ser re-escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \\
P_{i+1|i} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T &\begin{bmatrix} \hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & -\hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \\ -\hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \\ Z_i - \hat{\mathcal{H}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \tag{5.79}
\end{aligned}$$

□

5.2.1 Comparação com a Estimativa Preditora Singular sem Robustez

Esta seção faz a comparação entre o resultado encontrado na seção anterior e a estimativa preditora singular sem robustez. Fazendo-se $N_{e,i+1} = 0$, $N_{f,i} = 0$, e $N_{h,i} = 0$ nas equações (5.57) e (5.58) do Teorema 5.2.1. Então

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_{i+1} &= \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{H}}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathcal{R}}_i = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\
\hat{Q}_i &= \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } Z_i = \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } M_{f,i} = M_{h,i} = 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 P_{i+1|i} = & \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} F_i^T & 0 \end{bmatrix} \right. \right. \\
 & - \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. \left. + \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} F_i^T & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Após algumas manipulações algébricas esta equação reduz-se a

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \tag{5.81}$$

A expressão da estimativa preditora sem a robustez é escrita como

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i+1|i} = & P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 & \times \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} + P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
 & \times \left(\begin{bmatrix} Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 & \times \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right),
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= P_{i+1|i} \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
&\times \begin{bmatrix} (Q_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T) & -F_i P_{i|i-1} H_i^T \\ -H_i P_{i|i-1} F_i^T & (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.83}$$

coincidindo, portanto, com a Equação (5.24).

5.2.2 Comparação com a Estimativa Preditora Robusta BDU

Os resultados encontrados no Teorema 5.2.1 são agora comparados com aqueles apresentados na referência (SAYED (2001)), cujas deduções foram apresentadas no Capítulo 3. No caso do sistema quadrado no espaço de estados, $\hat{\mathcal{E}}_{i+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T$. Não se considera também a incerteza na matriz H_i , então faz-se $N_{h,i} = 0$ e $\hat{R}_i = R_i$. Assim

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \right. \right. \\
&\quad - \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. \left. + \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \times \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Big)^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i P_{i|i-1} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} F_i^T & \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \right. \right. \\
&\quad - \begin{bmatrix} F_i P_{i|i-1} H_i^T & 0 \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i P_{i|i-1} H_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&\quad \left. \times \begin{bmatrix} H_i P_{i|i-1} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Big)^{-1}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} = & \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} (\hat{Q}_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T) & \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} F_i^T & (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} N_{f,i}^T) \end{bmatrix} \right. \right. \\
& - \begin{bmatrix} F_i P_{i|i-1} H_i^T & 0 \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\
& \left. \times \begin{bmatrix} H_i P_{i|i-1} F_i^T & \sqrt{\hat{\lambda}_i} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \Big)^{-1}. \quad (5.85)
\end{aligned}$$

De forma compacta, tem-se

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (5.86)$$

sendo

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (\hat{Q}_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T) - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T; \\
A_{12} &= \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T; \\
A_{21} &= \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} F_i^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T \text{ e} \\
A_{22} &= (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} N_{f,i}^T) - \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T.
\end{aligned}$$

Assim

$$P_{i+1|i} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \hat{Q}_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T \\
&- (\sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T) \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} N_{f,i}^T - \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T)^{-1} \\
&\times (\sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} F_i^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} F_i^T). \\
&= \hat{Q}_i + F_i (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) F_i^T \\
&- \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) N_{f,i}^T \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) N_{f,i}^T)^{-1} \\
&\times \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) F_i^T \\
&= \hat{Q}_i + F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i} F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} N_{f,i}^T \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} N_{f,i}^T)^{-1} \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} (P_{i|i-1} \\
&+ H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T, \quad (5.88)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
P_{i+1|i} &= \hat{Q}_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T - \hat{\lambda}_i F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i \\
&\quad + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i} (P_{i|i-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T \\
&= \hat{Q}_i + F_i(I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i}) \\
&\quad \times (P_{i|i-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T \\
&= \hat{Q}_i + F_i(I + \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} (P_{i|i-1} \\
&\quad + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} F_i^T \\
&= \hat{Q}_i + F_i(P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} F_i^T \\
&= \hat{Q}_i + F_i(P_{i|i-1} - P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (I + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1}) F_i^T. \quad (5.89)
\end{aligned}$$

Então

$$P_{i+1|i} = \hat{Q}_i + F_i P_{i|i-1} F_i^T - F_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T (I + \bar{H}_i P_{i|i-1} \bar{H}_i^T)^{-1} \bar{H}_i P_{i|i-1} F_i^T, \quad (5.90)$$

sendo $\bar{H}_i = \begin{bmatrix} R_i^{-1/2} H_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}$.

Quanto à expressão da estimativa preditora, tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} + \left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
&\quad \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right), \quad (5.91)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
&\times \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \# & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}^T \\
&\times \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \# & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} \\
&\times P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_iP_{i|i-1}H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right)
\end{aligned} \tag{5.92}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \\
&\times \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} + (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \\
&\times \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_iP_{i|i-1}H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right)
\end{aligned} \tag{5.93}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right). \tag{5.94}
\end{aligned}$$

Termo

$$\begin{aligned}
A_{12}A_{22}^{-1} &= (\sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T - \sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T) \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} N_{f,i}^T - \hat{\lambda}_i N_{f,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1} N_{f,i}^T)^{-1} \\
&= \sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) N_{f,i}^T \\
&\times (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} (P_{i|i-1} - P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} H_i P_{i|i-1}) N_{f,i}^T)^{-1} \\
&= \sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} N_{f,i}^T (I + \hat{\lambda}_i N_{f,i} (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} N_{f,i}^T)^{-1} \\
&= \sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T. \tag{5.95}
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \begin{bmatrix} I & -\sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T \hat{R}_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} I & -\sqrt{\hat{\lambda}_i}F_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i}N_{f,i} \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \\
&\times \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right), \tag{5.96}
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= F_i \left(I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ F_i \left(I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \\
&\times P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} \right)
\end{aligned} \tag{5.97}$$

ou

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= F_i \left(I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ F_i \left(I - \hat{\lambda}_i (P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \\
&\times P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}).
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Como $P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i$ e $\hat{P}_{i|i} = (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= F_i \left(I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \hat{x}_{i|i-1} + F_i \left(I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i} \right) \\
&\times P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}).
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Lembrando que $F_{c,i} = F_i (I - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} N_{f,i}^T N_{f,i})$, então

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_{c,i} \hat{x}_{i|i-1} + F_{c,i} P_{i|i-1} H_i^T (R_i + H_i P_{i|i-1} H_i^T)^{-1} (z_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}). \tag{5.100}$$

Comparando-se (5.100) com a expressão do filtro preditor robusto apresentado em (SAYED (2001)) (Tabela 2), conclui-se que a diferença entre ambas é que na Equação (5.100) a matriz de ponderação R_i não é corrigida em função das incertezas (veja que em (SAYED (2001))), R_i é corrigida de acordo com a seguinte expressão $\hat{R}_{i+1} = R_{i+1} - \hat{\lambda}_i^{-1} H_{i+1} M_{f,i}^T M_{f,i}^T H_{i+1}^T$.

5.2.3 Estimativa Preditora - Corretora Robusta Singular

A partir da dedução da estimativa preditora robusta singular, pode-se encontrar a estimativa preditora-corretora robusta singular também.

Lema 5.2.1 *A expressão para a estimativa preditora-corretora robusta para sistemas*

singulares é dada por

$$\hat{\mathcal{E}}_{i+1}\hat{x}_{i+1|i} = \hat{\mathcal{F}}_i\hat{x}_{i|i}. \quad (5.101)$$

Prova: Explicitando-se o termo $\hat{x}_{i|i}$ da Equação (5.68) do Teorema 5.2.1, pode-se expressar o termo $\hat{x}_{i|i}$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i & -\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ -\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Aplicando-se o lema da inversão de blocos matriciais, resulta

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + A^{-1}(\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ &+ A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}(\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\ &- A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \hat{x}_{i|i-1} + A^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - A^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ &\times (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i|i} &= \left(I - A^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \\ &+ \left. \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) - A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right) \hat{x}_{i|i-1} \\ &+ A^{-1} \left(I + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right) \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i. \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(A - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) - B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \\
&\quad + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) - B(D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left. \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \right) \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(P_{i|i-1}^{-1} - \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \\
&\quad + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left. \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right) \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left(I - A^{-1} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \right. \\
&\quad + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \left. \right) \hat{x}_{i|i-1} + A^{-1} \left(I + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right) \\
&\quad \times \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.109}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \right) \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right) \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i} &= A^{-1} \left(I + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right) P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} \\
&\quad + A^{-1} \left(I + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right) \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i|i-1} &= P_{i|i-1} \left(A^{-1} + A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&\quad - P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.112}$$

A expressão da estimativa preditora robusta encontrada na Equação (5.71) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \\
&\quad \times (\hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1}) \\
&\quad + (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1},
\end{aligned} \tag{5.113}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \\
&\times \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i - (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \\
&+ \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i-1}.
\end{aligned} \tag{5.114}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left(I - (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right. \\
&+ \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} (\hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i) \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i
\end{aligned} \tag{5.115}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \hat{x}_{i|i-1} \\
&+ (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i.
\end{aligned} \tag{5.116}$$

Substituindo-se $\hat{x}_{i|i-1}$, Equação (5.112), na Equação (5.116), obtém-se

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \\
&+ \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} P_{i|i-1}^{-1} \left(P_{i|i-1} \left(A^{-1} + A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D \right. \right. \\
&- CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \Big)^{-1} \hat{x}_{i|i} - P_{i|i-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \Big) \\
&+ (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \\
&\times \left(A^{-1} + A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&- (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i \\
&+ (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{H}}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} Z_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \\
&\times \left(A^{-1} + A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&= (D - CA^{-1}B)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \left(I + A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} (D - CA^{-1}B)^{-1} \right. \\
&\times \left. \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \right)^{-1} \hat{x}_{i|i} \\
&= \left(D - CA^{-1}B + \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i+1|i} &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} - \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right. \\
&\quad \left. + \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i A^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i}
\end{aligned}$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i}. \quad (5.117)$$

□

Como $\hat{\mathcal{E}}_{i+1}$ tem posto coluna pleno, então

$$\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} - \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i} \right) = 0, \quad (5.118)$$

conseqüentemente

$$\hat{\mathcal{E}}_{i+1} \hat{x}_{i+1|i} = \hat{\mathcal{F}}_i \hat{x}_{i|i}. \quad (5.119)$$

Capítulo 6

Matriz de Variâncias para Sistemas Singulares

Este capítulo demonstra que as matrizes $P_{i+1|i+1}$ do Teorema 4.2.1 do Capítulo 4, $P_{i+1|i}$ do Teorema 5.2.1 do Capítulo 5, e $P_{i+1|i+1}$ do Teorema 3.2.1 do Capítulo 3, são as matrizes das variâncias dos erros das estimativas filtrada robusta singular, estimativa preditora robusta singular e estimativa filtrada robusta no espaço de estados, respectivamente.

6.1 Variância do Erro da Estimativa Ótima

Considere o seguinte lema (YU et al. (1995), sem prova).

Lema 6.1.1 *Considere a estimativa de máxima verossimilhança (ML) do vetor x baseado no vetor de medidas z*

$$z = Hx + v \quad (6.1)$$

sendo v um vetor gaussiano com média zero e covariância V . Supondo que a matriz H tenha posto coluna pleno e $\begin{bmatrix} V & H \end{bmatrix}$ tenha posto linha pleno, então a estimativa ML $\hat{x}$ de x baseada nas medições z é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

sendo λ um vetor multiplicador de Lagrange e $\tilde{x} = \hat{x} - x$ o erro de estimativa dado por

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Além disto com

$$\begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & T \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

obtém-se

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & -T \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Em particular, quando V é invertível,

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}\tilde{x}^T\} = (H^T V^{-1} H)^{-1} \quad e \quad (6.6)$$

$$\mathcal{E}\{\lambda\lambda^T\} = (I - V^{-1} H (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T)^2 V^{-1}. \quad (6.7)$$

Prova: Substituindo-se $\hat{x}$ por $\tilde{x} + x$ na Equação (6.2), obtém-se

$$\begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Assim

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Hx \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z - Hx \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

portanto

$$\begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Substituindo-se (6.4) em (6.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} v \\ &= \begin{bmatrix} R \\ U^T \end{bmatrix} v. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T \right\} &= \begin{bmatrix} R \\ U^T \end{bmatrix} \mathcal{E}\{vv^T\} \begin{bmatrix} R^T & U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R \\ U^T \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} R^T & U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} RVR^T & RVU \\ U^TVR^T & U^TVU \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

De acordo com (6.4), vale a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & U \\ U^T & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

então

$$H^T R = 0 \quad (6.15)$$

$$VU + HT = 0 \quad (6.16)$$

$$VR + HU^T = I \quad (6.17)$$

$$H^T U = I. \quad (6.18)$$

1. Pré-multiplicando-se (6.17) por R^T , obtém-se

$$R^T V R + R^T H U^T = R^T. \quad (6.19)$$

De acordo com (6.15), $R^T H = 0$, então

$$R^T V R = R^T, \quad \text{ou} \quad (6.20)$$

$$R V R^T = R. \quad (6.21)$$

2. Fazendo-se a transposta de (6.17), obtém-se

$$R^T V + U H^T = I. \quad (6.22)$$

Pós-multiplicando-se os termos da Equação (6.22) por U , resulta em

$$R^T V U + U H^T U = U. \quad (6.23)$$

De acordo com a Equação (6.18), $H^T U = I$, portanto

$$R^T V U = 0. \quad (6.24)$$

Pós-multiplicando-se a Equação (6.22) por R , obtém-se

$$R^T V R + U H^T R = R. \quad (6.25)$$

Da Equação (6.15), tem-se que $H^T R = 0$, portanto

$$R^T V R = R = R^T. \quad (6.26)$$

Assim pode-se concluir que

$$R^T V U = R V U = 0. \quad (6.27)$$

3. Pré-multiplicando-se a Equação (6.16) por U^T , obtém-se

$$U^T V U + U^T H T = 0. \quad (6.28)$$

Transpondo-se a equação (6.28), encontra-se

$$U^T V U + T^T H^T U = 0, \quad (6.29)$$

da equação (6.18), segue que $H^T U = I$, portanto

$$\begin{aligned} U^T V U + T &= 0 \\ U^T V U &= -T. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pode-se concluir portanto, que

$$\mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & -T \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Este resultado mostra que λ e $\tilde{x}$ são vetores Gaussianos independentes com média zero e matrizes de variâncias R e $-T$ respectivamente. Supondo que V seja invertível e usando-se o lema da inversão de blocos matriciais para inverter a matriz $\begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} &= \\ \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}H(H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} & V^{-1}H(H^T V^{-1}H)^{-1} \\ (H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} & -(H^T V^{-1}H)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Assim

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}H(H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} & V^{-1}H(H^T V^{-1}H)^{-1} \\ (H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} & -(H^T V^{-1}H)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}H(H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} \\ (H^T V^{-1}H)^{-1}H^T V^{-1} \end{bmatrix} v \end{aligned} \quad (6.33)$$

e

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \tilde{x} \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}H(H^TV^{-1}H)^{-1}H^TV^{-1} & \\ & (H^TV^{-1}H)^{-1}H^TV^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{E}(vv^T) \\ \begin{bmatrix} V^{-1} - V^{-1}H(H^TV^{-1}H)^{-1}H^TV^{-1} & V^{-1}H(H^TV^{-1}H)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Então

$$\mathcal{E}\{\lambda\lambda^T\} = (I - V^{-1}H(H^TV^{-1}H)^{-1}H^T)^2V^{-1} \quad \text{e} \quad (6.35)$$

$$\mathcal{E}\{\tilde{x}\tilde{x}^T\} = (H^TV^{-1}H)^{-1}. \quad (6.36)$$

□

6.2 Variância da Estimativa Ótima Determinística

Lema 6.2.1 *Considere o seguinte sistema linear*

$$z = Hx + v \quad (6.37)$$

sendo $\mathcal{E}(vv^T) = V$. Suponha que após um experimento obteve-se uma medida z . Seja a seguinte estimativa determinística

$$\hat{x} := \min_x \|z - Hx\|_{V^{-1}}^2. \quad (6.38)$$

Tem-se que

$$\hat{x} = (H^TV^{-1}H)^{-1}H^TV^{-1}z. \quad (6.39)$$

O erro de estimativa é dado por

$$\tilde{x} = x - \hat{x} = (H^TV^{-1}H)^{-1}H^TV^{-1}v \quad (6.40)$$

e a variância do erro é dada por

$$P = \mathcal{E}(\tilde{x}\tilde{x}^T) = (H^TV^{-1}H)^{-1}. \quad (6.41)$$

Prova: Considere o funcional relacionado com o problema de minimização (6.38)

$$J = \|z - Hx\|_{V^{-1}}^2. \quad (6.42)$$

O valor ótimo de x é dado por

$$\hat{x} = (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} z. \quad (6.43)$$

Com esta expressão, pode-se calcular a variância do erro de estimativa, que é dada por $P = \mathcal{E}(\tilde{x}\tilde{x}^T)$, assim

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} z \\ &= (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} (Hx + v) \\ &= x + (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} v \\ \hat{x} - x &= (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} v \\ \tilde{x} &= (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} v. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Então

$$\begin{aligned} P &= (H^T V^{-1} H)^{-1} H^T V^{-1} \mathcal{E}(vv^T) V^{-1} H (H^T V^{-1} H)^{-1} \\ P &= (H^T V^{-1} H)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

□

Lema 6.2.2 *Suponha que $W \geq 0$, então as seguintes sentenças são equivalentes*

- i - $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_x (Ax - b)^T W (Ax - b)$,
- ii - $x = \hat{x}$ é uma solução de $A^T W A x = A^T W b$,
- iii - $(x, \lambda, \gamma) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma})$ é uma solução de

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & W \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Além disso, para a estimativa $\hat{x}$ obtida por qualquer um dos itens acima tem-se

que a variância do erro é dada por

$$P = \mathcal{E}(\tilde{x}\tilde{x}^T) = (A^T W A)^{-1}. \quad (6.47)$$

Prova: (i) $\Rightarrow$ (ii) Define-se

$$\begin{aligned} J &= (Ax - b)^T W (Ax - b) \\ &= x^T A^T W A x - 2x^T A^T W b + b^T W b \end{aligned} \quad (6.48)$$

então

$$\frac{1}{2} D_x J = A^T W A x - A^T W b, \quad (6.49)$$

portanto se $x = \hat{x}$ é um ponto de mínimo de J , deve-se ter $D_x J = 0$, ou

$$A^T W A \hat{x} = A^T W b, \quad (6.50)$$

resultando em

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b. \quad (6.51)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Como $W \geq 0$, tem-se

$$D_x^2 J = A^T W A \geq 0. \quad (6.52)$$

Assim se x satisfaz $A^T W A x = A^T W b$, x é um ponto de mínimo de J .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Definem-se as variáveis auxiliares

$$\begin{aligned} \lambda &:= b - Ax \\ \gamma &:= -W\lambda. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Como $A^T W (b - Ax) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} Ax + \lambda &:= b \\ \gamma + W\lambda &:= 0 \\ A^T \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (6.54)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & I & A \\ I & W & 0 \\ A^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & I & A \\ I & W & 0 \\ A^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + Ax = b \\ \gamma + W\lambda = 0 \Rightarrow \gamma = -W\lambda = W(Ax - b) \\ A^T\gamma = 0 \end{cases}$$

De $\gamma = W(Ax - b)$ tem-se $A^T\gamma = A^TW(Ax - b) \Rightarrow 0 = A^TW(Ax - b) \Rightarrow A^TWAx = A^TWb$.

(iv) - A partir do Lema 6.1.1, pode-se calcular a matriz de variância do vetor x na Equação (6.55), da seguinte maneira: Seja a matriz de coeficientes da Equação (6.55) particionada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & I & A \\ I & W & 0 \\ A^T & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & | & A \\ I & W & | & 0 \\ \hline A^T & 0 & | & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

Identificando-se $V = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & W \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$, $H^T = \begin{bmatrix} A^T & 0 \end{bmatrix}$, pode-se constatar que de acordo com o Lema 6.1.1, a matriz de variância de x na Equação (6.55) é dada por

$$P = \mathcal{E}(\tilde{x}\tilde{x}^T) = \left(\begin{bmatrix} A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & W \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (6.57)$$

Considerando-se que

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -W & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$P = \left(- \begin{bmatrix} A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -W & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} = (A^T W A)^{-1}. \quad (6.58)$$

□

6.3 Aplicação às Estimativas Robustas Singulares

Lema 6.3.1 *As seguintes sentenças são equivalentes:*

i -

$$\hat{x} \in \arg. \min_x \max_{\{\delta A, \delta b\}} \{x^T Q x + [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]^T W [(A + \delta A)x - (b + \delta b)]\} \quad (6.59)$$

$$\text{sendo } \begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_a & E_b \end{bmatrix}, \|\Delta\| \leq 1;$$

ii -

$$\hat{x} \in \arg. \min_x \left\{ x^T Q x + \left(\begin{bmatrix} A \\ E_a \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix} \right\} \quad (6.60)$$

iii -

$$\hat{x} \in \arg. \min_x \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ A + \delta A \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b + \delta b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix} \right\} \quad (6.61)$$

$$\text{sendo } \begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} = H \Delta \begin{bmatrix} E_a & E_b \end{bmatrix}, \|\Delta\| \leq 1;$$

iv -

$$\hat{x} \in \arg. \min_x \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ A \\ E_a \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda} I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix} \right\}; \quad (6.62)$$

v - $(x, \lambda, \gamma) = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\gamma})$ é uma solução de

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 & | & I \\
0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 & | & A \\
0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & I & | & E_a \\
\hline
I & 0 & 0 & | & Q & 0 & 0 & | & 0 \\
0 & I & 0 & | & 0 & \hat{W} & 0 & | & 0 \\
0 & 0 & I & | & 0 & 0 & \hat{\lambda}I & | & 0 \\
\hline
I & A^T & E_a^T & | & 0 & 0 & 0 & | & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\gamma_1 \\
\gamma_2 \\
\gamma_3 \\
\hline
\lambda_1 \\
\lambda_2 \\
\lambda_3 \\
\hline
x
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
b \\
E_b \\
\hline
0 \\
0 \\
0 \\
\hline
0
\end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Além disto, para a estimativa obtida por qualquer dos itens acima, a covariância do erro é dada por

$$P = \mathcal{E}(\tilde{x}\tilde{x}^T) = \left(Q + A^T \hat{W} A + \hat{\lambda} E_a^T E_a \right)^{-1}. \quad (6.64)$$

Prova: De SAYED (2001), sabe-se que

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\hat{x} = (\hat{Q} + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} E_a^T E_b)$ ou

$$\hat{x} = (Q + \hat{\lambda} E_a^T E_a + A^T \hat{W} A)^{-1} (A^T \hat{W} b + \hat{\lambda} E_a^T E_b) \quad (6.65)$$

que na forma de blocos matriciais pode ser escrita como

$$\hat{x} = \left(Q + \begin{bmatrix} A^T & E_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ E_a \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} A^T & E_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

De maneira compacta

$$\hat{x} = (Q + \tilde{A}^T \tilde{W} \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T \tilde{W} \tilde{b}, \quad (6.67)$$

sendo $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ E_a \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix}$ e $\tilde{W} = \begin{bmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix}$. Assim

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix} I & \tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & \tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix}. \quad (6.68)$$

Usando-se o Lema 6.2.2 na Equação (6.68), obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{x} &\in \arg. \min_x \left\{ \left(\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \hat{x} \in \arg. \min_x \{ x^T Q x + (\tilde{A}x - \tilde{b})^T \tilde{W} (\tilde{A}x - \tilde{b}) \}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

(ii) $\Rightarrow$ (v) Substituindo-se as matrizes da Equação (6.69) na Equação (6.55), com as identificações

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \text{ e } W \leftarrow \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix}, \text{ obtém-se}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I & \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \\ I & \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \tilde{W} \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} I \\ \tilde{A} \end{bmatrix}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 & | & I \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 & | & A \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & I & | & E_a \\ \hline I & 0 & 0 & | & Q & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & I & 0 & | & 0 & \tilde{W} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & I & | & 0 & 0 & \hat{\lambda}I & | & 0 \\ \hline I & A^T & E_a^T & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) - Basta desfazer a formulação matricial de (iii);

(iv) $\Rightarrow$ (ii) - Basta desfazer a formulação matricial de (iv). Com o resultado obtido em (6.58), pode-se encontrar a matriz de variância do erro a partir da Equação (6.71), fazendo-se as equivalências

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} I \\ A \\ E_a \end{bmatrix} \text{ e } W \leftarrow \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix}, \text{ assim}$$

$$P = \left(\begin{bmatrix} I & A^T & E_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & \hat{W} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ A \\ E_a \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$P = \left(Q + A^T \hat{W} A + \hat{\lambda} E_a^T E_a \right)^{-1}. \quad (6.72)$$

□

6.3.1 Aplicação à Estimativa Filtrada Robusta Singular

Lema 6.3.2 *Seja $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$ solução do problema de otimização*

$$\begin{aligned} & \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_{i+1}\}} [(x_i - \hat{x}_{i|i})^T P_{i|i}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i}) \\ & + \left(z_{i+1} - (H_{i+1} + \delta H_{i+1}) x_{i+1} \right)^T R_{i+1}^{-1} \left(z_{i+1} - (H_{i+1} + \delta H_{i+1}) x_{i+1} \right) \\ & + \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} - (F_i + \delta F_i) x_i \right)^T Q_i^{-1} \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1}) x_{i+1} - (F_i + \delta F_i) x_i \right) \end{aligned} \quad (6.73)$$

que pode ser escrito na forma de blocos matriciais como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \left(\left(\begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ 0 & \delta H_{i+1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Com $\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \end{bmatrix} = M_{f,i} \Delta_{1,i} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \end{bmatrix}$ e $\delta H_i = M_{h,i} \Delta_{2,i} N_{h,i}$.

Tem-se que $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$ é a estimativa ML para o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 & | & I \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 & | & A \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & I & | & E_a \\ \hline I & 0 & 0 & | & Q & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & I & 0 & | & 0 & \hat{W} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & I & | & 0 & 0 & \hat{\lambda}I & | & 0 \\ \hline I & A^T & E_a^T & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

sendo $Q = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix}$, $\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}$ e

$E_a = \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1} \end{bmatrix}$ e a variância do erro de estimativa é dada por

$$P = \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right)^{-1}. \quad (6.76)$$

Prova: Como $Q = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix}$, $\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}$ e

$E_a = \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1} \end{bmatrix}$, então substituindo-se estes valores na Equação (6.72), obtém-se

$$\begin{aligned} P = & \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T & 0 \\ E_{i+1}^T & H_{i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & 0 \\ N_{e,i+1}^T & N_{h,i+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ 0 & N_{h,i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.77)$$

resultando em

$$P = \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (6.78)$$

sendo $\hat{\mathcal{E}}_{i+1} = \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}$, $\hat{H}_{i+1} = \begin{bmatrix} H_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{h,i+1} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathcal{R}}_{i+1} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ e $\hat{\mathcal{Q}}_i = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Assim

$$P = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.79)$$

Esta expressão representa a matriz de variâncias para o vetor $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix}$. A variância do erro da estimativa filtrada, $P_{i+1|i+1}$, é dada pela expressão do bloco matricial P_{22} da inversa de P . Assim, admitindo-se que $P_{i|i}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i$ seja invertível e usando-se o Lema A.1.4, da inversão de blocos matriciais, tem-se

$$\begin{aligned} P_{i+1|i+1} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} - \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \\ &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T (\hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i} \hat{\mathcal{F}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (6.80)$$

que é a mesma expressão encontrada em (4.41) do Teorema 4.2.1. $\square$

6.3.2 Aplicação à Estimativa Preditora Robusta Singular

Lema 6.3.3 *Seja $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$ solução do problema de otimização*

$$\begin{aligned}
& \min_{\{x_i, x_{i+1}\}} \max_{\{\delta E_{i+1}, \delta F_i, \delta H_i\}} [(\hat{x}_{i|i-1} - x_i)^T P_{i|i-1}^{-1} (\hat{x}_{i|i-1} - x_i) \\
& + \left(z_i - (H_i + \delta H_i)x_i \right)^T R_i^{-1} \left(z_i - (H_i + \delta H_i)x_i \right) \\
& + \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i \right)^T Q_i^{-1} \left((E_{i+1} + \delta E_{i+1})x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i \right)],
\end{aligned} \tag{6.81}$$

que pode ser escrito na forma de blocos matriciais como

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\
& + \left(\left(\begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \\ \delta H_i & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - x_i \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ H_i \hat{x}_{i|i-1} - z_i \end{bmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i-1} \\ \delta H_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.82}$$

Com $\begin{bmatrix} \delta F_i & \delta E_{i+1} \end{bmatrix} = M_{f,i} \Delta_{1,i} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \end{bmatrix}$ e $\delta H_i = M_{h,i} \Delta_{2,i} N_{h,i}$.

Tem-se que $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$ é a estimativa ML para o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 & | & I \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 & | & A \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & I & | & E_a \\ \hline I & 0 & 0 & | & Q & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & I & 0 & | & 0 & \hat{W} & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & I & | & 0 & 0 & \hat{\lambda}I & | & 0 \\ \hline I & A^T & E_a^T & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \hline \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \tag{6.83}$$

sendo $Q = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_i^{-1} \end{bmatrix} e$

$E_a = \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix}$ e a variância do erro de estimativa é dada por

$$P = \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T (\hat{Q}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1}. \quad (6.84)$$

Prova: Como $Q = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_i^{-1} \end{bmatrix} e$

$E_a = \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix}$, então substituindo-se estes valores na Equação (6.72) obtém-se

$$\begin{aligned} P &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T & H_i^T \\ E_{i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q}_i^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{R}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i & E_{i+1} \\ H_i & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} N_{f,i}^T & N_{h,i}^T \\ N_{e,i+1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{f,i} & N_{e,i+1} \\ N_{h,i} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (6.85) \end{aligned}$$

sendo $\hat{\mathcal{E}}_{i+1} = \begin{bmatrix} E_{i+1} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{e,i+1} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathcal{F}}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{f,i} \end{bmatrix}$, $\hat{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_i} N_{h,i} \end{bmatrix}$,

$\hat{\mathcal{R}}_i = \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ e $\hat{Q}_i = \begin{bmatrix} \hat{Q}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Assim

$$P = \begin{bmatrix} P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i & \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i & \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (6.86)$$

Esta expressão representa a matriz de variâncias para o vetor $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i-1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i} \end{bmatrix}$. A variância do erro da estimativa preditora, $\hat{x}_{i+1|i}$, é dada pela expressão do bloco matricial P_{22} da inversa de P . Assim, admitindo-se que $P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{Q}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i$ seja

invertível e usando-se o Lema A.1.4, da inversão de blocos matriciais, obtém-se

$$\begin{aligned}
 P_{\hat{x}_{i+1}|i} &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\
 &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} - \hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i (P_{i|i-1}^{-1} + \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i + \hat{H}_i^T \hat{\mathcal{R}}_i^{-1} \hat{H}_i)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1} \\
 &= \left(\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^T (\hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T - \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T (\hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T)^{-1} \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T)^{-1} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

ou

$$P_{i+1|i} = \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{Q}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & -\hat{\mathcal{F}}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \\ -\hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{\mathcal{F}}_i^T & \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{H}_i P_{i|i-1} \hat{H}_i^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{E}}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \tag{6.88}$$

que é igual à Equação (5.57) do Teorema 5.2.1. $\square$

6.4 Variância do Erro de Estimativa do Filtro BDU

Lema 6.4.1 *Seja $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{u}_{i+1|i} \end{bmatrix}$ solução do problema de otimização*

$$\begin{aligned}
 \min_{\{x_i, u_i\}} \max_{\{\delta F_i, \delta G_i\}} & [(x_i - \hat{x}_{i|i})^T P_{i|i}^{-1} (x_i - \hat{x}_{i|i}) + u_i^T Q_i^{-1} u_i \\
 & + (z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1})^T R_{i+1}^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} x_{i+1})].
 \end{aligned} \tag{6.89}$$

A matriz de variância do erro de estimativa do vetor $\begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} \\ \hat{u}_{i+1|i} \end{bmatrix}$ é dada por

$$\begin{aligned}
 P &= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i+1|i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i+1|i} \end{bmatrix}^T \right\} \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} R_{e,i+1}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

$$\text{sendo } \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ u_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{i|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{u}_{i|i+1} \end{bmatrix}. \text{ Considerando}$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = F_i \hat{x}_{i|i+1} + G_i \hat{u}_{i|i+1}, \quad (6.91)$$

a variância do erro de estimativa do filtro é dada por

$$P_{i+1|i+1} := \mathcal{E}(\tilde{x}_{i+1|i+1} \tilde{x}_{i+1|i+1}^T) = P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T R_{e,i+1}^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i}, \quad (6.92)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1|i+1} &= x_{i+1} - \hat{x}_{i+1|i+1}, \\ P_{i+1|i} &= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T, \\ \hat{P}_{i|i} &= (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i})^{-1}, \\ \hat{Q}_i &= (Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T (I + \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T)^{-1} E_{g,i})^{-1} \\ \hat{G}_i &= G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i}, \quad e \\ R_{e,i+1} &= \hat{R}_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^T. \end{aligned}$$

Prova: Seja a Equação (6.64) do Lema 6.3.1:

$$P = \mathcal{E}(\tilde{x} \tilde{x}^T) = \left(Q + A^T \hat{W} A + \hat{\lambda} E_a^T E_a \right)^{-1}. \quad (6.93)$$

Usando-se as identificações

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ u_i \end{bmatrix} \\ A &\leftarrow H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \\ Q &\leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} \\ W &\leftarrow R_{i+1}^{-1} \quad e \\ E_a &\leftarrow \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

na Equação (6.92), obtém-se

$$\begin{aligned}
 P &= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i|i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i|i+1} \end{bmatrix}^T \right\} \\
 P &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_i^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \hat{\lambda}_i \begin{bmatrix} E_{f,i}^T \\ E_{g,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{f,i} & E_{g,i} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} & \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{g,i} \\ \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} & Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \times H_{i+1}^T \hat{R}_{i+1}^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \right)^{-1}. \tag{6.94}
 \end{aligned}$$

Usando-se o Lema A.1.3 da inversão de blocos matriciais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} & \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{g,i} \\ \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} & Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix} \right]^{-1} = \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix}. \tag{6.95}
 \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{i|i} &= (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i})^{-1} \quad \text{e} \\
 \hat{Q}_i &= (Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} - \hat{\lambda}_i^2 E_{g,i}^T E_{f,i} (P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i}) E_{f,i}^T E_{g,i})^{-1} \quad \text{ou} \\
 \hat{Q}_i &= (Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T (I + \hat{\lambda}_i E_{f,i} P_{i|i} E_{f,i}^T)^{-1} E_{g,i})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Usando-se o Lema A.1.1 da inversão de matrizes sendo

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{f,i} & \hat{\lambda}_i E_{f,i}^T E_{g,i} \\ \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} & Q_i^{-1} + \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{g,i} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T, \\
 C &= \hat{R}_{i+1}^{-1} \quad \text{e} \quad D = H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

então pode-se re-escrever a Equação (6.94) como

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \left(\hat{R}_{i+1} \right. \\
&+ H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \Big)^{-1} H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix}. \tag{6.96}
\end{aligned}$$

Sendo os termos de P explicitados a seguir:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \\
&= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i G_i^T H_{i+1}^T \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + \hat{Q}_i G_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i (G_i^T - \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i (G_i^T - \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix}, \tag{6.97}
\end{aligned}$$

sendo $\hat{G}_i = G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i}$.

$$\begin{aligned}
&H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix}. \tag{6.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \right. \\
& \times \left. \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i G_i^T H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i (G_i^T - \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T) H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} (F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T) H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = \left(\hat{R}_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^T \right)^{-1} \\
& = R_{e,i+1}^{-1}, \tag{6.99}
\end{aligned}$$

sendo $P_{i+1} = F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T$. A Equação (6.96) pode ser escrita então como

$$\begin{aligned}
P & = \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} R_{e,i+1}^{-1} \\
& \times \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix}. \tag{6.100}
\end{aligned}$$

A partir da Equação (6.91), pode-se encontrar a expressão da variância do erro do filtro, que é dada por

$$\mathcal{E}(\tilde{x}_{i+1|i+1} \tilde{x}_{i+1|i+1}^T) = \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i|i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{i|i+1} \\ \tilde{u}_{i|i+1} \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} R_{e,i+1}^{-1} \right. \\
&\quad \times \left. \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} R_{e,i+1}^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (H_{i+1} F_i \hat{P}_{i|i} - \hat{\lambda}_i H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i}) & H_{i+1} \hat{G}_i \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix}. \tag{6.101}
\end{aligned}$$

Sendo os termos da variância simplificados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} + \hat{\lambda}_i^2 \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & -\hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \\ -\hat{\lambda}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{\lambda}_i^2 F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T - \hat{\lambda}_i G_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T \\
&\quad - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i G_i^T + G_i \hat{Q}_i G_i^T \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T - \hat{\lambda}_i (G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i}) \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T \\
&\quad + (G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i}) \hat{Q}_i G_i^T \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T - \hat{\lambda}_i \hat{G}_i \hat{Q}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i G_i^T \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i (G_i^T - \hat{\lambda}_i E_{g,i}^T E_{f,i} \hat{P}_{i|i} F_i^T) \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T \\
&= P_{i+1|i}. \tag{6.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} F_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\ \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \end{bmatrix} \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i} \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T + G_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + (G_i - \hat{\lambda}_i F_i \hat{P}_{i|i} E_{f,i}^T E_{g,i}) \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\
&= F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T H_{i+1}^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T H_{i+1}^T \\
&= (F_i \hat{P}_{i|i} F_i^T + \hat{G}_i \hat{Q}_i \hat{G}_i^T) H_{i+1}^T \\
&= P_{i+1|i} H_{i+1}^T.
\end{aligned} \tag{6.103}$$

Assim, pode-se re-escrever a Equação (6.101) da seguinte forma

$$\mathcal{E}(\tilde{x}_{i+1|i+1} \tilde{x}_{i+1|i+1}^T) = P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H_{i+1}^T R_{e,i+1}^{-1} H_{i+1} P_{i+1|i}, \tag{6.104}$$

que é a mesma encontrada pelo Teorema 3.2.1. $\square$

Capítulo 7

Conclusões e Continuidade do Estudo

Esta tese apresentou no capítulo introdutório, conceitos detalhados dos sistemas chamados descritores ou singulares. O Capítulo 2 mostrou uma dedução alternativa determinística para as estimativas filtrada, preditora e preditora-corretora no espaço de estados. Mostrou também a relação que existe entre a equação de $P_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i}$.

Nos demais capítulos foram deduzidos os algoritmos recursivos das estimativas filtrada, suavizadora e preditora para sistemas singulares no tempo discreto, inicialmente sem a consideração das incertezas e depois com a consideração delas, usando somente a abordagem determinística, com a utilização de funcionais apropriados.

Foi possível também concluir no Capítulo 6, que as matrizes auxiliares $P_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i}$ são respectivamente, as matrizes de variâncias do erro de estimativa da estimativa filtrada e da estimativa preditora, tanto para o sistema com robustez, como para o sistema sem robustez. Percebe-se também que para os sistemas singulares não se pode tirar uma relação imediata entre as matrizes $P_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i}$, como ocorre no estudo de sistemas no espaço de estados.

Como propostas para trabalhos futuros, inclusive já iniciados, sugere-se:

- A inclusão de uma matriz G_i e sua incerteza δG_i , multiplicando o ruído de estado. Esta inclusão já foi feita no artigo (CAMPOS et al. (2004)) para sistemas sem incertezas;

- O aprofundamento do estudo da estabilidade e da convergência para o sistema com incertezas. Neste trabalho a estabilidade foi verificada pela análise dos autovalores do sistema e pela convergência da curva das normas das matrizes $P_{i+1|i+1}$ e $P_{i+1|i}$, conforme Teorema do artigo de (SOUZA et al. (1986);
- Inclusão das incertezas nos sistemas singulares discretos não-lineares.

Referências Bibliográficas

- BONILLA & MALABRE (2000). BONILLA, M. & MALABRE, M. (2000). More about Non Square Implicit Descriptions for Modelling and Control. *in Proc. 39th IEEE Conf. Decision Control, Sydney, Australia*, pages 3642–3647.
- CAMPBELL (1982). CAMPBELL, S. L. (1982). *Singular Systems of Differential Equations II*. Pitman.
- CAMPOS et al. (2004). CAMPOS, J. C. T., ISHIHARA, J. Y., & TERRA, M. H. (2004). Estimativa Recursiva Ótima para Sistemas Singulares Discretos no Tempo. *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática - CBA, Gramado- RS - Brasil*.
- DAI (1989). DAI, L. (1989). The Difference Between Regularity and Irregularity in Singular Systems. *Circuits Systems Signal Process*, 8(4):435–444.
- DAI (1989b). DAI, L. (1989). Filtering and LQG Problems for Discrete-Time Stochastic Singular Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34(10):1105–1108.
- DAI (1989c). DAI, L. (1989). Impulsive Modes and Causality in Singular Systems. *Int. J. Control*, 50(4):1267–1281.
- DAI (1989d). DAI, L. (1989). *Singular Control Systems. Lectures Notes in Control and Information Sciences Series*, volume 118. Springer-Verlag.
- GANTMACHER (1959). GANTMACHER, F. R. (1959). *The Theory of Matrices*, volume II. Chelsea, New York.
- GERDIN et al. (2003). GERDIN, M., GLAD, T., & LJUNG, L. (2003). A Modeling and Filtering Framework for Linear Implicit Systems. *Proceedings of the 13th IFAC symposium on systems identification*, Rotterdam, NE.

- HASAN & AZIM-SADJANI (1995). HASAN, M. A. & AZIM-SADJANI, M. R. (1995). Noncausal Image Modeling Using Descriptor Approach. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 42(8):536–540.
- ISHIHARA & TERRA (2001). ISHIHARA, J. Y. & TERRA, M. H. (2001). Impulsive Controllability and Observability of Rectangular Descriptor Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46(6):991–994.
- ISHIHARA & TERRA (2002). ISHIHARA, J. Y. & TERRA, M. H. (2002). On the Lyapunov Theorem for Singular Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(11):1926–1930.
- KAYLATH et al. (2000). KAYLATH, T., SAYED, A. H., & HASSIBI, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice-Hall.
- LEWIS (1986). LEWIS, F. L. (1986). A Survey of Linear Singular Systems. *Circ. Syst. Sig. Proc.*, 5(1):3–36.
- LUENBERGER (1977). LUENBERGER, D. V. (1977). Dynamic Equations in Descriptor Form. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 22(3):312–321.
- MILLS & GOLDENBERG (1989). MILLS, J. K. & GOLDENBERG, A. A. (1989). Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 68:30–46.
- NIKOUKHAH et al. (1992). NIKOUKHAH, R., WILLSKY, A. L., & LEVY, B. C. (1992). Kalman Filtering and Riccati Equations for Descriptor Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37(9):1325–1342.
- SAYED (2001). SAYED, A. H. (2001). A Framework for State-Space Estimation with Uncertain Models. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-46(7):998–1013.
- SINGH & LIU (1973). SINGH, S. P. & LIU, R. W. (1973). Existence of State Equation Representation if Linear Large-Scale Dynamic Systems. *IEEE Trans. on Circuit Theory*, 20(5):239–246.
- SOUZA et al. (1986). SOUZA, C. E. D., GEVERS, M. R., & GOODWIN, G. C. (1986). Riccati Equations in Optimal Filtering of Nonstabilizable Systems having Singular State Transition matrices. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 31:831–838.

- VERGHESE et al. (1981). VERGHESE, G. C., LEVY, B. C., & KAILATH, T. (1981). A Generalized State-Space for Singular Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26(4):811–831.
- YU et al. (1995). YU, T., LIN, C. F., & MULLER, P. C. (1995). Kalman Filtering Utilizing Future Dynamics for Descriptor Systems. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 119–123.
- ZAGHLOUL & NEWCOMB (1986). ZAGHLOUL, M. E. & NEWCOMB, W. N. (1986). Semistate Implementation: Differentiator Example. *Circuits Systems, and Signal Processing*, 5(1):171–183.
- ZHANG et al. (1998). ZHANG, H., CHAI, T., & LIU, X. (1998). A Unified Approach to Optimal State Estimation for Stochastic Singular System. *Automatica*, 34(6):777–781.

Apêndice A

Alguns Resultados da Análise Matricial

A.1 Alguns Resultados de Análise Matricial

Este apêndice apresenta fórmulas da teoria de matrizes retiradas principalmente das referências KAYLATH et al. (2000), e GANTMACHER (1959). Algumas demonstrações destas expressões aparecem nas referências originais e outras foram deduzidas nesta tese.

A.1.1 Lema da Inversão de Matrizes

Lema A.1.1 *Se $(A + BCD)$ e $(I + CDA^{-1}B)$ são não-singulares e se A é uma matriz $n \times n$ e também não-singular e se as matrizes B , C e D são dimensionalmente compatíveis, então*

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}.$$

Se além disto, C for invertível, então

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Prova: Seja a matriz

$$F := A + BCD. \quad (\text{A.1})$$

Pré-multiplicando esta expressão matricial por F^{-1} :

$$F^{-1}F = F^{-1}A + F^{-1}BCD = I. \quad (\text{A.2})$$

Pós-multiplicando cada lado de (A.2) por A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= F^{-1} + F^{-1}BCDA^{-1} \\ F^{-1}BCDA^{-1} &= A^{-1} - F^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Pós-multiplicando cada lado de (A.3) por B :

$$F^{-1}BCDA^{-1}B = A^{-1}B - F^{-1}B \quad (\text{A.4})$$

ou

$$A^{-1}B = F^{-1}B(I + CDA^{-1}B). \quad (\text{A.5})$$

Pós-multiplicando cada lado de (A.5) por $(I + CDA^{-1}B)^{-1}$:

$$A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1} = F^{-1}B. \quad (\text{A.6})$$

Pós-multiplicando cada lado de (A.6) por CDA^{-1} :

$$A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} = F^{-1}BCDA^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

De acordo com (A.6):

$$A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} = A^{-1} - F^{-1} \quad (\text{A.8})$$

então

$$F^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1} \quad (\text{A.9})$$

e

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CDA^{-1}B)^{-1}CDA^{-1}. \quad (\text{A.10})$$

Se a matriz C for invertível então de acordo com a regra da inversa do produto de matrizes o termo $(I + CDA^{-1}B)^{-1}C$ de (A.10) pode ser expresso como $(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}$. Então obtém-se:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (\text{A.11})$$

□

Lema A.1.2 : *Como consequência direta do Lema A.1.1 tem-se que se A e C forem invertíveis tem-se*

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1} \quad (\text{A.12})$$

Prova:

$$\begin{aligned} & (A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} \\ &= (A^{-1} - A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1})BC^{-1} \\ &= (A^{-1}BC^{-1} - A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}BC^{-1}) \\ &= A^{-1}B(C^{-1} - (C + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}BC^{-1}) \\ &= A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.1.2 Lemas Auxiliares

Alguns destes lemas são apresentados em KAYLATH et al. (2000) sem as comprovações.

Lema A.1.3 : *Para a matriz A invertível tem-se*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

e para a matriz D invertível tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Prova: Seja $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ uma matriz que se deseja triangularizar através de um procedimento de eliminação de Gauss. Para tanto note que

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Escolhendo-se uma matriz X tal que $X = -CA^{-1}$, então

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

sendo $D - CA^{-1}B$ chamado de complemento de Schur de A em M . Do mesmo modo, pode-se obter

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Usando-se o mesmo procedimento para D invertível, obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

e

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

sendo $A - BD^{-1}C$ chamado de complemento de Schur de D em M . Pré-multiplicando-se a equação (A.18) por $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Pós-multiplicando-se a equação (A.20) por $\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

assim de (A.21) resulta que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}, \quad (\text{A.23})$$

então

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

para A invertível. Usando-se o mesmo procedimento chega-se a

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

para D invertível. □

Lema A.1.4 : *Como consequência do Lema A.1.2, tem-se que a seguinte identidade é válida para A invertível*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Como também a seguinte identidade é válida para D invertível :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Prova: Usando-se a equação (A.24) encontra-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

para A invertível e usando-se a equação (A.25) encontra-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

para D invertível. □

Lema A.1.5 *Sejam $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz invertível e $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ uma matriz de posto coluna pleno. Neste caso, $A^T R^{-1} A$ é invertível e a sua inversa pode ser calculada por*

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} = - \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

tem-se ainda que

$$(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

e

$$R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Prova: Como A tem posto coluna pleno, é imediato que $A^T R^{-1} A$ seja invertível. Por outro lado, pelo complemento de Schur, sabe-se que

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix} &= \text{rank} R + \text{rank} (-A^T R^{-1} A) = n + p \\ \text{rank} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} &= \text{rank} R + \text{rank} (-A^T R^{-1} A) = n + p. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Assim, as matrizes $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$ são invertíveis. Usando-se a equação (A.27) do Lema A.1.4 para a matriz D invertível e fazendo-se as identificações óbvias tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (-A^T R^{-1} A)^{-1} & (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} \\ R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} & R^{-1} - R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

sendo que $\#$ indica que os termos, nas respectivas posições da matriz, não são importantes para a análise. Segue imediatamente que

$$\begin{aligned} (A^T R^{-1} A)^{-1} &= - \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-A^T R^{-1} A)^{-1} & \# \\ \# & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned}
(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} \\ \# & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

e

$$\begin{aligned}
R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# \\ R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Para A invertível e usando-se a Equação (A.26) do Lema A.1.4 tem-se que

$$\begin{aligned}
(A^T R^{-1} A)^{-1} &= - \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# \\ \# & (-A^T R^{-1} A)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
(A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# \\ (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

e

$$\begin{aligned}
R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & R^{-1} A (A^T R^{-1} A)^{-1} \\ \# & \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

□

Apêndice B

Modelagem SVD para Sistemas Singulares

Este apêndice apresenta uma forma de se obter computacionalmente a solução para algumas classes de sistemas singulares. Considera-se especificamente o uso de decomposição em valores singulares (SVD) da matriz E do sistema. Estes resultados foram utilizados no exemplo numérico apresentado no Capítulo 4.

Seja o sistema linear discreto estocástico descrito por:

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= F_i x_i + B_i u_i + G_i w_i \\ z_i &= H_i x_i + v_i \end{aligned} \tag{B.1}$$

sendo x_i o vetor de estados de dimensão $n \times 1$ e z_i o vetor de saída de dimensão $m \times 1$. O vetor de entrada u é $r \times 1$. E_{i+1} e F_i são matrizes com dimensões $n \times n$. B é uma matriz $n \times r$ e H_i é uma matriz com dimensão $m \times n$. w_i e v_i são vetores de entrada com dimensões $n \times 1$ e $m \times 1$

Fazendo-se a transformação SVD de E_i , a primeira equação de (B.1), fica

$$\begin{aligned} USV^T x_{i+1} &= F_i x_i + B_i u_i + G_i w_i \\ USV^T x_{i+1} &= F_i V V^T x_i + B_i u_i + G_i w_i. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Definindo $\bar{x}_i = V^T x_i$, então

$$\begin{aligned} US\bar{x}_{i+1} &= F_i V \bar{x}_i + B_i u_i + G_i w_i \\ S\bar{x}_{i+1} &= U^T F_i V \bar{x}_i + U^T B_i u_i + U^T G_i w_i. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,i+1} \\ \bar{x}_{2,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,i} \\ \bar{x}_{2,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} w_i, \quad (\text{B.4})$$

ou

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{x}_{1,i+1} &= F_{11} \bar{x}_{1,i} + F_{12} \bar{x}_{2,i} + B_1 u_i + G_1 w_i \\ 0 &= F_{21} \bar{x}_{1,i} + F_{22} \bar{x}_{2,i} + B_2 u_i + G_2 w_i. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Se $\det F_{22} \neq 0$, então esta equação fica reduzida a

$$\begin{aligned} \bar{x}_{1,i+1} &= \Sigma^{-1}(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})\bar{x}_{1,i} + \Sigma^{-1}(B_1 - F_{12}F_{22}^{-1}B_2)u_i \\ &+ \Sigma^{-1}(G_1 - F_{12}F_{22}^{-1}G_2)w_i. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Quanto à equação da medida

$$\begin{aligned} z_i &= H_i V V^T x_i + v_i \\ z_i &= H_i V \bar{x}_i + v_i, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ou

$$z_i = H_1 \bar{x}_{1,i} + H_2 \bar{x}_{2,i} + v_i. \quad (\text{B.8})$$

Considere agora o caso onde as matrizes E_{i+1} e F_i têm dimensões $m \times n$ e o posto da matriz E_{i+1} é igual a n . A partir da equação (B.4), tem-se

$$\begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} \bar{x}_i + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} w_i, \quad (\text{B.9})$$

sendo F_{21} uma matriz com posto linha pleno. Assim

$$\bar{x}_{i+1} = \Sigma^{-1} F_{11} \bar{x}_i + \Sigma^{-1} B_1 u_i + \Sigma^{-1} G_1 w_i \quad (\text{B.10})$$

e

$$0 = F_{21} \bar{x}_i + B_2 u_i + G_2 w_i. \quad (\text{B.11})$$

Quanto à equação da medida, ela fica sendo a mesma,

$$z_i = HV \bar{x}_i + v_i. \quad (\text{B.12})$$