

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

MÉTODO FD-BPM SEMIVETORIAL DE ÂNGULO  
LARGO PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS  
TRIDIMENSIONAIS UTILIZANDO A TÉCNICA ADI

Valtemir Emerencio do Nascimento

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica.



31100037010

ORIENTADOR: Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges

São Carlos, SP

Junho 2002

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

EXEMPLAR REVISADO

Data de entrada no Serviço: 05/08/02

Ass.:



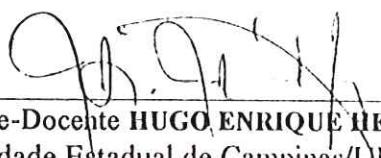
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **VALTEMIR EMERENCIO DO NASCIMENTO**

Dissertação defendida e julgada em 28-06-2002 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **BEN-HUR VIANA BORGES** (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APPROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Livre-Docente **HUGO ENRIQUE HERNANDEZ FIGUEROA**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APPROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **JOSÉ EDUARDO CASTILHO**  
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Doutor **MURILO ARAUJO ROMERO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Assoc. **MARIA DO CARMO CALIJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

“Tudo vale a pena se a alma não é pequena”  
Fernando Pessoa.

Dedico esta dissertação a minha mãe Zilda, ao meu pai Edeval e a minha irmã Kamilla por todo amor e confiança que sempre me deram. Especialmente dedico a minha namorada Patrícia pela enorme compreensão, companheirismo e amor.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus pela vida e pela sua constante presença que me dá forças para sempre continuar.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Ben-Hur Viana Borges pela sua confiança e apoio sempre demonstrados para que este trabalho pudesse ser concretizado.

Agradeço a CAPES pela bolsa fornecida para a realização deste mestrado.

Agradeço aos professores do grupo de Telecomunicações Amílcar, Murilo, Sartori e Luiz pelo conhecimento partilhado, bem como todos os demais professores, funcionários do departamento e da USP.

Agradecimento a Cida que com o seu café pela manhã, sempre nos ajudava a iniciar a batalha do dia a dia.

Agradeço aos amigos de mestrado Pizolato, Evandro, Reinaldo, Fernandão, Belini, Fernanda, Anderson e Carlão. Aos amigos doutorandos Stilante e Regiane, agradeço a todos pela amizade partilhada em todos os momentos.

Agradeço em especial aos amigos doutorandos Licinius e Carlos, pelas valiosas discussões e opiniões no desenvolvimento do trabalho e principalmente pela amizade conquistada. Agradeço também ao doutorando Marcão, um rapaz lá do Sul de Goiás que se tornou um grande amigo.

Agradeço de coração aos meus amigos Big Fields: Fabinho, Raí, Joãozinho e Pardal, que foram uma verdadeira família para mim nesses dois anos e meio de convivência, partilhando todos os momentos de alegria e tristeza e sempre dando força um ao outro.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente ajudaram na realização deste trabalho.

# Índice

Lista de figuras.....	iii
Lista de tabelas.....	vi
Lista de siglas.....	vii
Lista de símbolos.....	viii
Resumo.....	ix
Abstract.....	x
Capítulo 1 .....	1
Introdução.....	1
1.1 Equação de Onda Escalar .....	2
1.2 Equação de Onda Semivetorial.....	2
1.3 Análise de Ângulo Largo Através dos Aproximantes de Padé.....	3
1.4 Técnica Implícita das Direções Alternadas (ADI).....	4
1.5 Objetivos deste trabalho .....	4
1.6 Organização do trabalho.....	5
Capítulo 2 .....	6
Introdução.....	6
2.1 Método da Propagação de Feixe (BPM).....	6
2.2 Formalismo semivetorial: formulação H.....	8
2.3 Aplicação dos Aproximantes de Padé no FD-BPM Semivetorial .....	11
2.4 Método Implícito das Direções Alternadas (ADI).....	14
2.5 Considerações sobre a implementação do formalismo.....	17
Capítulo 3 .....	20
Introdução .....	20
3.1 Análise de sensitividade utilizando formulações $H_x$ e $H_y$ para guias de onda tipo <i>rib</i> .	
Introdução.....	21
3.1.1 Resultados numéricos .....	22
3.1.1.1 Estrutura 1 .....	22
3.1.1.2 Estrutura 2 .....	28
3.1.1.3 Estrutura 3 .....	34
3.2 Análise de resultados para fibra tipo D.....	41

Introdução .....	41
3.2.1 Resultados numéricos .....	41
3.3 Comparação entre o formalismo proposto e o Método do Índice Efetivo. ....	44
3.4 Resumo e conclusão Parcial .....	46
Capítulo 4 .....	50
Conclusões.....	50
Referências Bibliográficas.....	51
Apêndice A .....	58
Apêndice B.....	68
Apêndice C.....	73
Apêndice D .....	82
Apêndice E.....	88
Apêndice F .....	106
Apêndice G .....	109

## Lista de figuras

FIGURA 2. 1 - Planos transversais em uma propagação longitudinal na direção z .....	7
FIGURA 2. 2 - Propagação paraxial.....	7
FIGURA 2. 3 – Ilustração do método ADI .....	15
FIGURA 2. 4 – Critério de estabilidade de von Neumann aplicado a um guia de onda tipo <i>rib</i> .....	19
FIGURA 3. 1 - Representação tridimensional de um guia de onda do tipo <i>rib</i> .....	21
FIGURA 3. 2 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Poucas iterações são suficientes para se obter o valor do $n_{eff}$ .....	23
FIGURA 3. 3 - Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função de $\Delta z$ . (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Valores elevados de $\Delta z$ ocasionam divergência no cálculo do índice efetivo. ....	24
FIGURA 3. 4 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal ocasiona divergência no cálculo do índice efetivo.....	25
FIGURA 3. 5 - Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial.. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Verifica-se divergência numérica para o $n_{eff}$ com o aumento da largura da gaussiana de excitação inicial.....	26
FIGURA 3. 6 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do índice de referência $n_0$ . (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo para o índice de referência $n_0$ permite a utilização de uma ampla faixa de valores iniciais para $n_0$ .....	27
FIGURA 3. 7- (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ utilizando Padé (1,1). .....	28
FIGURA 3. 8 –Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Pelo fato desta estrutura apresentar um menor confinamento modal são necessários um número maior de iterações do que a estrutura 1, para a convergência numérica.....	29

FIGURA 3. 9 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função de $\Delta z$ . (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Valores elevados de $\Delta z$ diminuem a eficiência do método.....	30
FIGURA 3. 10 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal ocasiona divergência numérica.....	31
FIGURA 3. 11 –Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Esta estrutura sofre uma menor influência da largura da gaussiana de excitação inicial para a convergência do índice efetivo modal.....	32
FIGURA 3. 12 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do índice de referência $n_0$ . (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo permite uma maior liberdade de escolha de $n_0$ ? .....	33
FIGURA 3. 13-(a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ utilizando Padé (1,1). .....	34
FIGURA 3. 14 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Para que ocorra convergência é necessário um número elevado de iterações em virtude do baixo confinamento modal desta estrutura.....	35
FIGURA 3. 15- Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função de $\Delta z$ . (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Valores elevados de $\Delta z$ diminuem a eficiência do método numérico.....	36
FIGURA 3. 16 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal reduz a eficiência do método numérico. ....	37
FIGURA 3. 17 –Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial. (a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . Esta estrutura praticamente não sofre influência da largura da gaussiana de excitação inicial em virtude da grande dimensão da seção transversal desta estrutura. ....	38
FIGURA 3. 18 – Índice efetivo, $n_{eff}$ , em função do índice de referência $n_0$ .(a) formulação $H_y$ e (b) formulação $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo para $n_0$ garante uma ampla faixa de convergência.....	39
FIGURA 3. 19-(a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ utilizando Padé (1,1). .....	40

FIGURA 3.20 – Seção transversal fibra tipo D.....	41
FIGURA 3. 21 – (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ para fibra tipo D, com $D = 0,0 \mu m$ .....	42
FIGURA 3. 22 – (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ para fibra tipo D, com $D = 0,5 \mu m$ .....	42
FIGURA 3. 23 – (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente $H_y$ para fibra tipo D, com $D = 1,0 \mu m$ .....	43
FIGURA 3. 24 – Esquema representativo do método do índice efetivo (MIE). (a) as três regiões que compõe o guia <i>rib</i> , (b) três guias de ondas planares distintos e (c) guia de onda planar de 3 camadas simétrico.....	45
FIGURA A.1 - Diagrama de um esquema de diferenças finitas de cinco pontos em estrutura de células. O esquema de diferenças finitas de cinco pontos está centrado em $(i,j)$ e cada célula possui índice de refração constante. A mudança no índice de refração ocorre somente na interface entre as células. Cada célula tem lados de comprimento $\Delta x$ e $\Delta y$ .....	64
FIGURA C.2 – Diagrama de um esquema de diferenças finitas de cinco pontos em uma estrutura de células. O esquema de diferenças finitas de cinco pontos está centrado em $(i,j)$ e cada célula possui índice de refração constante. A mudança no índice de refração ocorre somente na interface entre as células. Cada célula tem lados de comprimento $\Delta x$ e $\Delta y$ .....	78
FIGURA G.1 – Fluxograma do FD-BPM.....	110

## Lista de tabelas

TABELA 2.1 - Aproximantes de Padé em termos do operador diferencial P para a equação de onda de Helmholtz.....	14
TABELA 3.1 - Parâmetros das três estruturas rib avaliadas através da formulação Hy e Hx .....	21
.....	
TABELA 3. 2: Erro relativo entre os valores do encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação Hy e Hx.....	28
TABELA 3. 3: Erro relativo entre os valores do encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação Hy e Hx .....	34
TABELA 3. 4: Erro relativo entre os valores do encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação Hy e Hx.....	40
TABELA 3.5: Parâmetros físicos e geométricos da fibra tipo D.....	41
TABELA 3.6: Comparação do índice efetivo para fibra tipo D entre Padé (1,0) e valores de referência.....	43
TABELA 3.7: Comparação do índice efetivo para fibra tipo D entre Padé (1,1) e valores de referência.....	44
TABELA 3.8: Erro percentual do MIE e do Padé(1,0) com respeito aos <i>benchmarks</i> da literatura.....	46
TABELA 3.9: Erro percentual do MIE e do Padé(1,1) com respeito aos <i>benchmarks</i> da literatura.....	46

## **Lista de siglas**

ADI: ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT  
BPM: BEAM PROPAGATION METHOD  
CAD: COMPUTER AIDED DESIGNER  
CATV: COMMUNITY ANTENNA TELEVISION  
CN: CRANCK-NICHOLSON  
FD: FINITE DIFFERENCE  
FE: FINITE ELEMENT  
FFT: FAST FOURIER TRANSFORM  
PML: PERFECTLY MATCHED LAYER  
TE: TRANSVERSE ELECTRIC  
TM: TRANSVERSE MAGNETIC  
WA: WIDE ANGLE  
WDM: WAVELENGTH DIVISION MULTIPLEXING

## Lista de Símbolos

- $n(x,y)$  - Perfil de índice de refração.
- $n_g$  - Índice de refração do núcleo.
- $n_s$  - Índice de refração do substrato.
- $\beta$  - Constante de propagação longitudinal.
- $\Delta z$  - Passo de propagação longitudinal.
- $\kappa_0$  - Número de onda.
- $\lambda_0$  - Comprimento de onda.
- $n_{eff}$  - Índice efetivo.
- $n_0$  - Índice de referência
- $\mu_0$  - Permeabilidade magnética.
- $\epsilon_0$  - Permissividade dielétrica do meio.
- $\sigma$  - Perfil de condutividade magnética.
- $g$  - Fator de amplificação.
- $\alpha$  - Parâmetro de controle do esquema de diferenças finitas.
- $H_x$  e  $H_y$  - Componentes transversais do campo magnético.
- $E_x$  e  $E_y$  - Componentes transversais do campo elétrico.
- $P$  - Operador diferencial.
- $L_x$  - Operador diferencial transversal na direção x.
- $\Delta x$  - Passo transversal na direção x.
- $L_y$  - Operador diferencial transversal na direção y.
- $\Delta y$  - Passo transversal na direção y.
- $L_0$  - Termo de fase.
- $a$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.
- $b$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.
- $c$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.
- $d$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.
- $e$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.
- $f$  - coeficiente de polarização dos operadores diferenciais transversais.

## Resumo

O projeto de dispositivos ópticos integrados é de fundamental importância no desenvolvimento de sistemas de comunicações ópticas. Por esse motivo, várias técnicas de modelamento para estes dispositivos tem surgido na literatura. Esta corrida em direção à sofisticação das ferramentas de modelamento decorre da evolução natural dos processos de fabricação, que tem permitido a construção de estruturas com geometrias bastante complexas. Dentre as várias técnicas utilizadas atualmente nas simulações de dispositivos fotônicos destaca-se o método da propagação do feixe (BPM). Este método apresenta como grande atrativo o fato de ser de fácil implementação e de apresentar baixa carga computacional. Inicialmente, a técnica BPM foi empregada utilizando a equação de onda escalar de Helmholtz. Esta abordagem é eficiente desde que a diferença entre os índices de refração dos materiais utilizados no guia de onda seja pequena e que a geometria da estrutura não apresente variações na direção de propagação. Entretanto, a luz é uma onda eletromagnética que possui propriedades intrinsecamente vetoriais. As propriedades vetoriais (efeitos de polarização) tornam-se importantes quando estruturas que apresentam elevado contraste de índices de refração precisam ser investigadas.

Neste trabalho o fenômeno da polarização é avaliado através da utilização da equação de onda semivetorial de Helmholtz em três dimensões, a qual é desenvolvida em termos das componentes transversais de campo magnético (Formulação H). A solução da equação de onda semivetorial de Helmholtz é obtida pelo método BPM expandido em diferenças finitas (FD). Os aproximantes de Padé de ordem (1,0), equivalentes à propagação no limite paraxial, e de ordem (1,1), equivalentes à propagação em ângulo largo, são implementados e seus resultados discutidos. A propagação do campo no FD-BPM tridimensional proposto aqui se dá através da utilização da técnica implícita das direções alternadas (ADI), a qual proporciona uma ótima estabilidade com baixo esforço computacional. A validação deste método é feita através da simulação de guias de onda tipo *rib*, avaliando parâmetros numéricos como: passo de propagação longitudinal, largura da gaussiana de excitação inicial, passo de discretização transversal, número de iterações e índice de referência. Adicionalmente, também é investigada uma fibra óptica com geometria tipo D. Estes resultados serão comparados com os resultados existentes na literatura para estas estruturas a fim de garantir a eficácia do método.

**Palavras-chave:** Método da propagação de feixe FD-BPM, semivetorial, ângulo largo, ADI.

## Abstract

It is well known that finite difference beam propagation methods have been a valuable tool for the simulation of a large variety of optical waveguides structures such as: Mach-Zehnder, Y junctions, directional couplers, switches, etc. The increasing complexity of these structures, either in terms of geometry or material composition, requires more accurate modeling techniques. Among the several techniques available nowadays the beam propagation method (BPM) is maybe the most celebrated one. This method has attracted a great deal of attention by virtue of its ease of implementation and low computational effort. Initially, the BPM was applied to solve the scalar Helmholtz equation. This approach can be quite efficient for waveguides exhibiting low refractive index contrast and no variation along the longitudinal direction. Light, by its turn, is an electromagnetic wave with intrinsically vectorial properties. The vectorial properties (polarization effects) become very important when high contrast and longitudinally varying structures are involved.

In this work the polarization phenomenon is evaluated by means of the three-dimensional semivectorial Helmholtz equation, which is solved in terms of its transverse magnetic field components ( $\mathbf{H}$  formulation). The solution of this semivectorial equation is obtained via the finite difference BPM method expanded in terms of the following Padé approximants: Padé(1,0), equivalent to the semivectorial equation in the paraxial limit, and Padé (1,1), the wide angle solution. The field propagation dynamics in both cases is performed via alternate direction implicit method (ADI), which provides good numerical stability and low computational effort. As far as the authors know, this is the first time that a wide-angle formalism based on Padé(1,1) and ADI technique is proposed to solve the semivectorial Helmholtz equation. The validation of this new wide-angle method is performed for three well known rib waveguides structures available in the literature, and its accuracy measured in terms of the following parameters: longitudinal step size, initial field (gaussian) width, transversal step size, iteration number, and reference refractive index. A D-shaped fiber is also investigated with this method for comparison purposes. The results obtained in all cases are checked against those available in the literature in order to guarantee the efficiency of the method.

**Keywords:** Beam propagation method FD-BPM, semivectorial, wide angle, ADI.

# Capítulo 1

## Introdução

Desde a invenção do transistor em 1947, sistemas eletrônicos altamente sofisticados vêm sendo desenvolvidos para realizar funções cada vez mais complexas em telecomunicações, computação digital, sistemas de radares, sistemas de televisão a cabo (CATV) e controle de processos na fabricação de produtos, etc. Em todos estes casos a informação é transportada por uma corrente elétrica fluindo em um material condutor, semicondutor ou por ondas eletromagnéticas que utilizam como meio de propagação o ar ou um guia de onda. Hoje em dia, sistemas eletrônicos alcançaram sua maturidade, estando limitados apenas pela enorme demanda por serviços que exigem uma grande largura de banda.

A revolução no setor das telecomunicações, em resposta a esta grande demanda por serviços em telefonia e internet, foi possível graças ao desenvolvimento de sistemas ópticos de comunicação. Estes sistemas possuem como principal meio de transmissão a fibra óptica, que permite a transmissão de sinais com baixas perdas em uma ampla faixa de frequências. Sistemas baseados em fibra devem ser capazes de suportar transmissão de informações em elevadas velocidades. Através da técnica de multiplexação por divisão em comprimento de onda (WDM), as taxas de transmissão dos sinais agregados já romperam a barreira dos Tb/s [1], demonstrando ser a tecnologia mais promissora. Para que no futuro as redes possam ser totalmente ópticas, grande esforço tem sido concentrado no desenvolvimento de componentes para viabilizá-las. Um diversificado conjunto de dispositivos ativos e passivos tem sido analisado, caracterizado e fabricado. São lasers, chaves, moduladores, filtros, dentre outros [2]-[4].

A provisão de técnicas para a análise precisa destes dispositivos é primordial para o teste e aperfeiçoamento de seu desempenho. Dentre as ferramentas utilizadas para análise e simulação da propagação da luz em guias de onda destaca-se o método da propagação de feixe (Beam Propagation Method, BPM) devido à sua simplicidade e baixa carga computacional. A técnica BPM foi primeiramente aplicada por Feit [5] em 1978 na análise de dispositivos ópticos, para obter a solução da equação de onda escalar de Helmholtz. Esta abordagem numérica foi aplicada em fibras ópticas multimodo com perfil gradual de índice de refração, fornecendo uma descrição precisa da propagação da onda, bem como a obtenção de suas constantes de propagação. Esta nova abordagem veio suprir as deficiências das

manipulações analíticas aplicadas até então. A seguir são discutidas algumas das técnicas de propagação de feixe disponíveis na literatura.

## 1.1 Equação de Onda Escalar

As primeiras abordagens do BPM eram baseadas em Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) [5]-[7] aplicadas à equação de onda escalar de Helmholtz. O FFT-BPM permite a análise tanto de dispositivos bidimensionais [7] quanto tridimensionais [8]. O método FFT-BPM consiste, basicamente, da propagação da onda inicial em um meio homogêneo, seguida por uma correção de fase correspondendo à variação do índice de refração da estrutura guia de onda. Este mecanismo de propagação é um modelo aproximado da propagação em guias de onda dielétricos, com isso o FFT-BPM pode ser aplicado somente a guias de onda fracamente guiantes com passo de propagação,  $\Delta z$ , pequeno [54]. A necessidade de um passo de propagação muito pequeno faz que a carga computacional do método torne-se proibitivamente grande [9]-[12].

As abordagens que vieram suprir as deficiências do FFT-BPM foram o método das diferenças finitas (FD-BPM) [7], [14]-[17] e o método dos elementos finitos (FE-BPM) [13]. O FD-BPM e o FE-BPM apresentam um menor grau de sensibilidade à variação do passo de propagação  $\Delta z$ , o que torna estes métodos muito mais atraentes do ponto de vista computacional. Da mesma forma, a limitação do FFT-BPM à análise de estruturas fracamente guiantes foi contornada pela aplicação do FD-BPM e o FE-BPM às equações de onda semivetorial e vetorial. Esta abordagem permite uma análise mais precisa de estruturas fortemente guiantes, ou seja, estruturas que possuem um maior contraste de índice de refração. A seguir será discutida a formulação semivetorial.

## 1.2 Equação de Onda Semivetorial

O campo eletromagnético é, por natureza, intrinsecamente vetorial. Portanto, para sua análise precisa, são necessárias formulações que levem em conta esta característica que é desprezada nas formulações escalares. As formulações vetoriais que empregam o FE-BPM [18], [30] e o FD-BPM [19]-[29], bem como as formulações semivetoriais [33]-[47] têm demonstrado serem muito eficientes na análise de dispositivos fotônicos, conseguindo avaliar os efeitos da polarização da luz que são desprezados pelas formulações escalares.

A diferença básica entre a formulação vetorial e a semivetorial está no fato de que a formulação semivetorial despreza o acoplamento cruzado entre as componentes transversais de campo, resultando em dois estados de polarização desacoplados, ou seja, TE e TM. As formulações vetoriais desenvolvidas até o momento sofrem frequentemente de problemas em termos de estabilidade e/ou precisão devido à existência de derivadas mistas nas equações acopladas [28]. Sendo assim, optou-se pelo formalismo semivetorial que, mesmo desprezando o efeito de acoplamento entre as componentes de campo transversais, apresenta resultados muito próximos do formalismo vetorial [30]. O BPM aplicado à equação de onda semivetorial representa um grande avanço em relação ao formalismo escalar, pois através dele é possível a análise de dispositivos que apresentam forte contraste de índice de refração, melhor traduzindo a realidade dos dispositivos fotônicos. A formulação semivetorial é desenvolvida em termos das componentes transversais do campo H ou do campo E a fim de evitar o surgimento de soluções não-físicas [31]-[35].

Em sua grande maioria, os métodos semivetoriais abordados na literatura utilizam a aproximação paraxial em seu formalismo. A aproximação paraxial supõe que o feixe se propaga quase paralelo ao eixo longitudinal, z. Adicionalmente, o formalismo paraxial escalar é melhor aplicado na solução de estruturas que possuem modos longe do corte. Portanto, estruturas que apresentam um alto grau de inclinação em relação ao eixo z não podem ser corretamente analisadas com formalismos paraxiais. Para contornar este problema, é necessário a utilização de formalismos de ângulo largo. A próxima seção faz um resumo dos métodos de ângulo largo atualmente disponíveis na literatura.

### **1.3 Análise de Ângulo Largo Através dos Aproximantes de Padé.**

A análise de dispositivos ópticos através da utilização da técnica FD-BPM tem demonstrado através dos anos sua enorme potencialidade, praticidade e versatilidade em lidar com diferentes dispositivos, tais como: guias de onda tipo rib [37], acopladores direcionais [7], junções em Y [13], e fibras ópticas [25]. Entretanto, a técnica FD-BPM para a análise de tais dispositivos era limitada à equação de onda de Helmholtz no limite paraxial, ou seja, o feixe se propaga quase que paralelo ao eixo do guia de onda na direção de propagação z. O limite paraxial é uma boa aproximação para estruturas cujo ângulo de inclinação não seja superior a 5°. Devido a esta limitação, diversas técnicas foram propostas

para contornar o problema. Entre elas destaca-se o método baseado em aproximantes de Padé proposto por Hadley [50].

A inclusão dos aproximantes de Padé na solução da equação de onda de Helmholtz proporciona uma grande melhora em relação ao limite paraxial, pois a derivada de segunda ordem na direção longitudinal não é mais desprezada. Isto permite que modos radiados sejam avaliados de forma mais precisa por este formalismo uma vez que sua atenuação ao longo da direção longitudinal  $z$  não é mais desprezada. Este efeito, no entanto, não pode ser observado quando se trabalha no limite paraxial. Assim, formalismos paraxiais devem ser aplicados apenas a estruturas com baixo contraste de índice de refração ou estruturas onde os modos radiados possam ser efetivamente desprezados [51]. A título de exemplo, aproximantes de Padé de ordem (1,1) permitem a análise de estruturas com ângulo de inclinação de até 30°; aproximantes de Padé de ordem (2,2), por sua vez, permitem ângulos de até 50° [50]. As técnicas utilizadas na literatura para contornar o problema do limite paraxial são denominadas de técnicas de ângulo largo (*Wide Angle*) [50]-[54]. A simulação de estruturas tridimensionais utilizando tanto a aproximação paraxial quanto a abordagem de ângulo largo são computacionalmente intensivas [29]. Esta dificuldade vem sendo contornada com sucesso através da utilização da técnica implícita das direções alternadas (Alternating Direction Implicit, ADI), que será discutida a seguir.

## 1.4 Técnica Implícita das Direções Alternadas (ADI)

A técnica ADI [48]-[49], [55] consiste em separar a solução do problema em dois passos de propagação distintos onde, em cada passo uma direção transversal ( $x$  ou  $y$ ) é tomada implicitamente. O ADI é uma técnica não-iterativa, ou seja, não necessita obedecer a nenhum critério de convergência dentro de cada passo de propagação, e sua utilização proporciona uma rápida convergência numérica. Outra vantagem muito importante da técnica ADI está no fato de que a matriz associada ao problema, além de ser tridiagonal, é da ordem de  $N \times N$ , onde  $N$  representa o número de pontos da malha. No caso do FD-BPM convencional (3D), a matriz associada ao problema é da ordem  $N^2 \times N^2$  em cada passo.

A implementação do ADI representa um menor esforço computacional e uma menor alocação de memória se comparado aos métodos tradicionais [49]. Por este motivo, o ADI tem sido extensivamente utilizado na análise de estruturas bidimensionais e tridimensionais, em formulações escalares [7], formulações semivetoriais [37], [40], [41], [43], [46] e formulações vetoriais [29].

## 1.5 Objetivos deste trabalho

Este trabalho tem por objetivo a análise de estruturas tridimensionais (tais como os guias de onda tipo rib) em um meio isotrópico e linear. A análise das estruturas será realizada através de simulações utilizando a técnica FD-BPM aplicada à equação de onda semivetorial de Helmholtz tanto no limite paraxial quanto para ângulo largo, para efeito de comparação de desempenho. A expansão da equação de onda de Helmholtz utilizando aproximantes de ordem (1,0) é equivalente à aproximação paraxial. A expansão utilizando aproximantes de ordem (1,1), por sua vez, constitui um formalismo de ângulo largo, podendo ser aplicado a estruturas com ângulo de inclinação de até 30°. Ambos formalismos são implementados neste trabalho com a técnica ADI.

É importante salientar que a aplicação da técnica ADI na solução da equação de onda semivetorial de Helmholtz juntamente com os aproximantes de Padé (sem a limitação paraxial) representam uma abordagem completamente nova na análise de estruturas tridimensionais. A utilização do formalismo de ângulo largo possibilita um grau de liberdade extra em termos de projeto de dispositivos optoeletrônicos.

## 1.6 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizado da seguinte maneira: O segundo capítulo apresenta um resumo dos formalismos numéricos utilizados neste trabalho, onde a equação de onda semivetorial de Helmholtz é expandida tanto em termos do campo magnético (formulação H) quanto do campo elétrico (formulação E). A derivação completa pode ser encontrada nos apêndices A, B, C e D. Os formalismos para a técnica ADI e para os aproximantes de Padé são também abordados no segundo capítulo. No terceiro capítulo são apresentados os resultados numéricos das simulações realizadas em três estruturas tipo rib com características distintas, além disso também foram realizadas simulações para a fibra tipo D. Estas simulações foram realizadas utilizando a formulação H, tanto para a componente  $H_x$  quanto para a componente  $H_y$ . No quarto capítulo são apresentadas as conclusões bem como sugestões para realização de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### Introdução

Este capítulo apresenta o formalismo numérico utilizado neste trabalho para a análise de estruturas tridimensionais através do método da propagação de feixe (BPM). Devido à importância deste método, uma breve discussão sobre seu princípio de funcionamento é também apresentada. Este método é obtido aqui através da expansão da equação de onda semivetorial de Helmholtz em termos das componentes transversais de campo magnético (Formulação H). Métodos utilizados na solução de estruturas tridimensionais são computacionalmente intensivos, e por este motivo optou-se pela utilização da técnica implícita das direções alternadas (ADI), também descrita em detalhes neste capítulo. A grande vantagem do ADI está no fato de que a matriz associada ao problema, além de ser triagonal, é da ordem de NxN, onde N representa o número de pontos da malha. No caso do FD-BPM convencional, a matriz associada ao problema é da ordem de  $N^2 \times N^2$ . Assim, a utilização do ADI proporciona um esforço computacional significativamente menor. Juntamente com a técnica ADI, foi também incorporado ao método de propagação de feixe os aproximantes de Padé de ordem (1,1) de forma a permitir que o método assim obtido possa simular corretamente estruturas com alto grau de inclinação em relação ao eixo longitudinal. Sendo assim, o formalismo proposto neste trabalho representa uma nova abordagem para a análise de estruturas tridimensionais. Este emprega o formalismo de ângulo largo baseado nos aproximantes de Padé juntamente com a técnica ADI na solução da equação de onda semivetorial.

### 2.1 Método da Propagação de Feixe (BPM)

O método da propagação do feixe em diferenças finitas (FD-BPM) é uma ferramenta largamente utilizada na análise da propagação de luz em estruturas apresentando ou não variações ao longo da direção longitudinal [12]. Uma característica inerente a estes métodos é a necessidade de se fornecer uma distribuição inicial de campo (normalmente suposta como uma distribuição gaussiana) para então proceder com sua propagação ao longo da estrutura. Este campo inicial (plano  $z=z_0$ ) pode ser do tipo escalar, semivetorial ou vetorial. Em qualquer um dos casos, o campo na posição seguinte (plano  $z_l$ ) é obtido a partir do campo na posição  $z_0$  e assim sucessivamente, até atingir a distância desejada como pode ser visto na FIGURA 2.1.

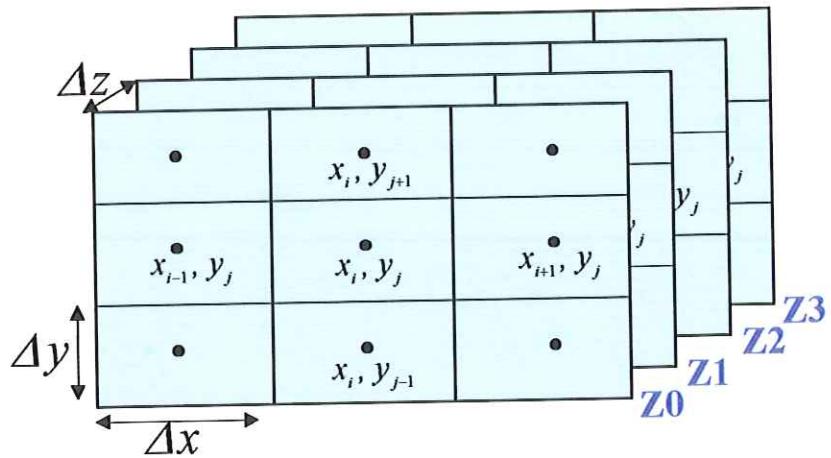


FIGURA 2.1 - Planos transversais em uma propagação longitudinal na direção z.

Os métodos de propagação de feixe convencionais partem do princípio de que a propagação da luz é paraxial, ou seja, ela ocorre praticamente paralela ao eixo longitudinal  $z$ . Desta forma, o ângulo  $\theta$  definido na FIGURA 2.2 deve ser muito pequeno. Com isso, estruturas que apresentam um alto grau de inclinação em relação ao eixo longitudinal de propagação não podem ser corretamente avaliadas. Para contornar este problema é necessária a utilização de formalismos de ângulo largo, tais como os baseados nos aproximatantes de Padé. Neste formalismo, a derivada de segunda ordem na direção longitudinal não é mais desprezada como nos formalismos paraxiais.

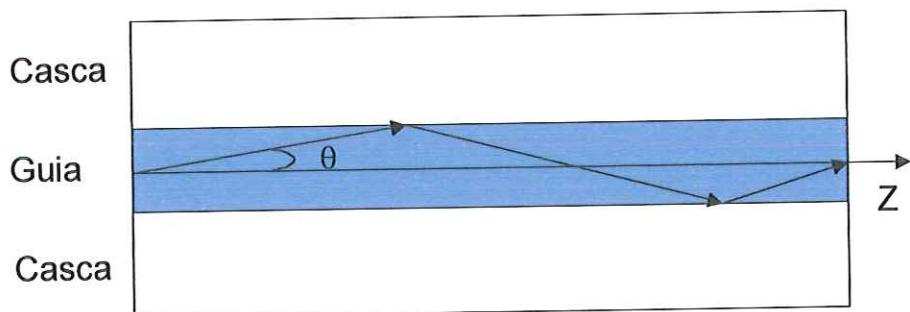


FIGURA 2.2 - Propagação paraxial.

Este trabalho aborda tanto a propagação de feixe no limite paraxial quanto no caso de ângulo largo, de modo a investigar o desempenho e limitações de ambos na simulação de guias de ondas ópticos retos ou inclinados.

## 2.2 Formalismo semivetorial: formulação H

A formulação para o campo magnético denominada de forma geral por (formulação H) será trabalhada em função das componentes transversais  $H_x$  e  $H_y$ , a fim de evitar o surgimento de soluções não-físicas [31]-[35], tais como  $(\nabla \cdot H \neq 0)$  e  $(\nabla \cdot \epsilon E \neq 0)$  [56]. Nesta formulação os modos TE e TM são representados pelas componentes transversais  $H_y$  e  $H_x$ , respectivamente. Partindo das equações de Maxwell no domínio da frequência.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 n^2 \vec{E} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.4)$$

Onde  $n = n(x, y, z)$ , é o perfil de índice de refração do meio, o qual é assumido ser isotrópico,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do meio e  $\epsilon_0$  é permissividade dielétrica do meio. Aplicando o operador ( $\nabla \times$ ) em (2.2), resulta:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - k^2 n^2 \vec{H} - \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Aplicando a identidade vetorial  $\nabla \times \nabla \times = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$ , resulta:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - k^2 n^2 \vec{H} - \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Expandindo a equação (2.6) em termos das componentes de campo transversais na direção x, (ver Apêndice C), chega-se à seguinte expressão:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} + k_0^2 n^2 \right) H_x = \left( - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) H_y \quad (2.7)$$

A equação (2.7) representa a equação de onda vetorial de Helmholtz, sendo que seu lado direito expressa o acoplamento cruzado entre as componentes  $H_x$  e  $H_y$ . Em geral, este acoplamento é fraco e pode ser desprezado, resultando na expressão abaixo:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} + k_0^2 n^2 \right) H_x = 0 \quad (2.8)$$

A equação (2.8) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz para a componente de campo  $H_x$ . Agora, suponha a seguinte dependência em relação ao eixo z:

$H_x = He^{-jn_0 kz}$ , onde  $n_0$  é o índice de refração de referência. Aplicando esta dependência em (2.8) resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x - 2j\zeta \frac{\partial}{\partial z} H_x + PH_x = 0 \quad (2.9)$$

Onde:

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} - n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2)$$

$$\zeta = \left( k + \frac{j}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \right) \text{ e } k = k_0 n_0$$

A equação (2.9) representa a equação de onda semivetorial sem a limitação paraxial para a componente  $H_x$ . O termo  $n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}$  em P da equação (2.9) representa o efeito de polarização devido à descontinuidade do índice refração nas interfaces entre os dielétricos na direção y, (ver Apêndice C) e o termo  $n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$  representa a variação do índice de refração com relação à direção longitudinal de propagação.

De maneira análoga, expandindo a equação (2.6) em termos das componentes transversais de campo na direção  $y$  (ver apêndice D):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} + k_0^2 n^2 \right) H_y = \left( - \frac{\partial}{\partial x \partial y} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) H_x \quad (2.10)$$

A equação (2.10) representa a equação de onda vetorial de Helmholtz, sendo que seu lado direito expressa o acoplamento entre as componentes  $H_y$  e  $H_x$ . Como dito anteriormente, este acoplamento é normalmente fraco e pode ser desprezado, resultando na seguinte expressão:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} + k_0^2 n^2 \right) H_y = 0 \quad (2.11)$$

A equação (2.11) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz para a componente de campo  $H_y$ . Suponha que esta componente de campo tenha a seguinte dependência longitudinal:  $H_y = He^{-jn_0 kz}$ , onde  $n_0$  é o índice de refração de referência. Aplicando esta dependência em (2.11), resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y - 2j\zeta \frac{\partial}{\partial z} H_y + PH_y = 0 \quad (2.12)$$

onde,

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} - n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2)$$

$$\zeta = \left( k + \frac{j}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \right) \text{ e } k = k_0 n_0$$

A equação (2.12) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz para a componente de campo transversal  $H_y$  sem a limitação paraxial. O termo  $n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y$

nesta equação representa o efeito de polarização devido à descontinuidade do índice refração nas interfaces entre os dielétricos na direção x. Já o termo  $n^2 jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$  representa a variação do índice de refração em relação à direção longitudinal de propagação. (ver Apêndice D).

O desenvolvimento do formalismo semivetorial para o campo elétrico, também conhecido como formulação E, pode ser encontrado nos apêndices A e B.

## 2.3 Aplicação dos Aproximantes de Padé no FD-BPM Semivetorial

Em sua grande maioria, os métodos semivetoriais abordados na literatura utilizam aproximação paraxial em seu formalismo, tanto para a formulação E (campo elétrico) quanto para a formulação H (campo magnético). Esta aproximação, como se sabe, limita a utilização destes métodos à simulação de estruturas com baixo ângulo de propagação (tipicamente 5°) [50]. Por este motivo, várias técnicas foram desenvolvidas com o objetivo de contornar esta limitação, sendo que a mais celebrada é a baseada em aproximantes de Padé proposta por Hadley [50]. Neste trabalho, os aproximantes de Padé serão combinados com diferenças finitas para a solução da equação de onda de Helmholtz juntamente com a técnica ADI. A expansão desta equação na forma discreta será feita utilizando esquemas implícitos. O algoritmo então calcula o campo através de uma distribuição transversal de índices de refração realizando pequenos passos de propagação ao longo da direção longitudinal z. Para este desenvolvimento considera-se a equação de onda semivetorial escrita em termos da componente de campo  $H_y$  (o mesmo raciocínio vale para as componentes de campo restantes tanto para a formulação H quanto para a formulação E).

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} + k_0^2 n^2 \right) H_y = 0 \quad (2.13)$$

onde  $n=n(x, y, z)$  é o perfil de índice de refração,  $k_0=2\pi/\lambda_0$  é o número de onda,  $\lambda_0$  o comprimento de onda. A solução da equação (2.9) é do tipo:

$$H_y = \psi e^{-jk_0 n_0 z} \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13), resulta em:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2j\zeta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi P = 0 \quad (2.15)$$

onde,

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} - n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2) \Rightarrow P = L_x + L_y + L_z + L_0$$

onde

$$\zeta = \left( k + \frac{j}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \right) \text{ e } k = k_0 n_0$$

$$L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ e}$$

$$L_z = n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$$

$L_x$  e  $L_y$  variam de acordo com o operador  $P$  presente nas equações (2.9) e (2.12) para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ , respectivamente.  $L_0 = k_0^2 (n^2 - n_0^2)$  representa o termo de fase. A equação (2.15) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + j \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} - j \left( \sqrt{P + \zeta^2} + \zeta \right) \right) \Psi = 0 \quad (2.16)$$

Comparando (2.16) com a solução clássica de polinômios da forma:  $(x-a)(x-b)=0$ , e considerando apenas um sentido de propagação, a mesma pode ser rescrita na forma unidirecional dada por [50], [52]-[53]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -j \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \Psi \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é equivalente à equação de onda semivetorial de Helmholtz, porém, sem aproximações. Neste caso a derivada segunda com relação a  $z$  não é desprezada, e a condição de limite paraxial pode então ser contornada. Entretanto, (2.17) não pode ser resolvida explicitamente devido à presença da raiz quadrada. Para contornar este problema, utiliza-se os polinômios aproximantes de Padé. O termo envolvendo a raiz quadrada em (2.17) pode ser expresso da seguinte forma [52]:

$$\sqrt{P+\zeta^2} - \zeta = \frac{N_m(P)}{D_n(P)} \quad (2.18)$$

onde  $N_m(P)$  e  $D_n(P)$  são polinômios em  $P$  de ordem  $m$  e  $n$  para o numerador e o denominador, respectivamente. Esses polinômios são denominados aproximantes de Padé [50]. Utilizando-se da aproximação que contém as séries de Padé para a expansão de (2.17) [50], tem-se:

$$\sqrt{P+\zeta^2} - \zeta = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{A_{i,n}}{\zeta} \frac{P}{1+B_{i,n} \frac{P}{\zeta^2}}}{1} \quad (2.19)$$

onde  $n$  é o número de termos nas séries de Padé cujos coeficientes são dados por:

$$A_{i,n} = \frac{2}{2n+1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right) \text{ e } B_{i,n} = \operatorname{cos}^2\left(\frac{i\pi}{2n+1}\right) \quad (2.20)$$

Com isso, obtém-se os aproximantes de Padé para a raiz quadrada, os quais são listados na TABELA 2.1.

TABELA 2.1 - Aproximantes de Padé em termos do operador diferencial P para a equação de onda de Helmholtz.

Ordem	$\frac{N_m(P)}{D_n(P)}$
(1,0)	$\frac{P}{2\zeta}$
(1,1)	$\frac{P}{2\zeta} - \frac{P}{1 + \frac{4\zeta^2}{P}}$
(2,2)	$\frac{\frac{P}{2\zeta} + \frac{P^2}{4\zeta^3}}{1 + \frac{3P}{4\zeta^2} + \frac{P^2}{16\zeta^4}}$

Quanto maior a ordem do aproximante, melhor a precisão dos resultados. No entanto, aproximantes de ordem igual ou superior a (3,3) não permitem ângulos de aberturas muito maiores que aqueles conseguidos com os aproximantes de ordem (2,2). Entretanto, o “esforço” computacional aumenta consideravelmente com o aumento da ordem do aproximante, o que inviabiliza a utilização de ordens mais elevadas.

Neste trabalho serão abordados os aproximantes de Padé de ordem (1,0), que representa o limite paraxial, e os aproximantes de Padé de ordem (1,1), que representa o formalismo de ângulo largo. A solução da equação de onda de Helmholtz com aproximantes de Padé de ordem (1,0) e (1,1) são obtidas substituindo os termos da TABELA 2.1 na equação (2.17). A expansão da equação de Helmholtz para ambos aproximantes pode ser vista no Apêndice E para a formulação H. Esta expansão resulta em um sistema linear tridiagonal do tipo  $AX=B$  que pode ser resolvido de maneira muito eficiente [55].

## 2.4 Técnica Implícita das Direções Alternadas (ADI)

A discretização de uma equação diferencial em duas dimensões por um método implícito gera um sistema linear de equações cuja matriz tem a dimensão do número de

pontos da malha. Por exemplo, N pontos na direção x e M na direção y resulta em um sistema linear de  $N \cdot M$  equações. Este sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$AX = X_0 B \quad (2.21)$$

onde  $X_0$  é uma matriz que representa o campo inicial de propagação,  $X$  é a matriz solução do sistema linear, A e B são matrizes dos coeficientes das equações do sistema linear.

Neste trabalho, a solução de (2.21) é obtida através da técnica implícita das direções alternadas (ADI) aplicada ao FD-BPM. Esta técnica trata de problemas bidimensionais resolvendo-se sistemas lineares tridiagonais [55]. A idéia do ADI consiste em separar a solução do problema em dois passos de propagação distintos onde, em cada passo, uma direção transversal ( $x$  ou  $y$ ) é tomada implicitamente. Pode-se compreender o ADI através da representação esquemática da FIGURA 2.3.

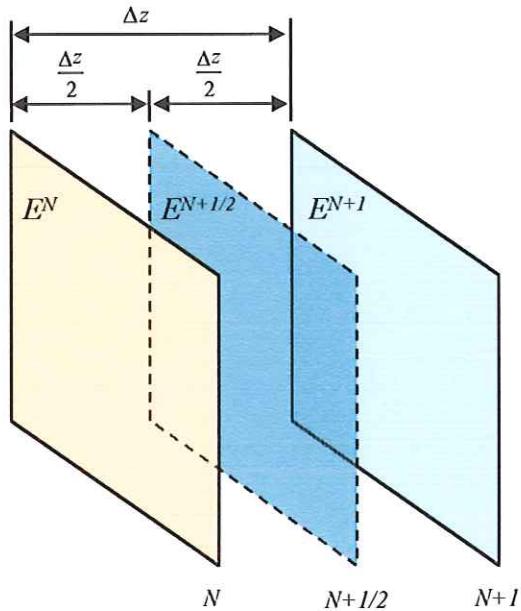


FIGURA 2.3 – Ilustração do método ADI. Cada passo  $\Delta z$  é subdividido em dois passos iguais de comprimento  $\Delta z/2$ . O campo inicial  $E^N$  é utilizado para se obter o campo  $E^{N+1/2}$  ( $\Delta z/2$  à frente), e este é então utilizado na obtenção do campo  $E^{N+1}$  ao final do passo completo,  $\Delta z$ .

Por exemplo, no primeiro passo propagando-se a distância  $\frac{\Delta z}{2}$  o operador  $L_x$  é discretizado implicitamente e o operador  $L_y$  é tratado explicitamente,  $E^N$  representa o campo inicial para propagação e como solução do sistema linear é obtido o campo  $E^{\frac{N+1}{2}}$  na

direção x. No segundo passo propagando-se novamente uma distância  $\frac{\Delta z}{2}$  o operador  $L_y$  é

discretizado implicitamente e o operador  $L_x$  é tratado explicitamente. Para o segundo passo,

$E^{N+\frac{1}{2}}$  representa o campo inicial para a propagação e como solução do sistema linear é obtido o campo  $E^{N+1}$  na direção y. Observa-se que para cada iteração , ou seja, de N para  $N+1$ , o sistema linear de (2.21) é resolvido duas vezes, onde para cada meio passo  $\frac{\Delta z}{2}$  é obtido uma solução de propagação na direção x ou y.

O passo intermediário é interpretado como um “meio” passo e foi introduzido por Peaceman e Ratchford [48]-[49]. A aplicação da técnica ADI ao FD-BPM semivetorial de ângulo largo se faz por meio de sua incorporação ao operador transversal P de (2.17) juntamente com o esquema de Cranck-Nicholson, ou seja:

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{N+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^N + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{N+\frac{1}{2}} + \Psi^N \right) \right] \quad (2.22)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{N+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^{N+1} + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{N+\frac{1}{2}} + \Psi^{N+1} \right) \right] \quad (2.23)$$

O primeiro passo do ADI é obtido aplicando (2.22) em (2.17) e expandindo com o auxílio dos aproximantes de Padé de ordem (1,0) ou ordem (1,1), onde o operador  $L_x$  é discretizado implicitamente enquanto o operador  $L_y$  é tratado explicitamente. Com isso, obtém-se uma solução implícita na direção x da seguinte forma:

$$\theta^- \Psi_{x-1,y}^{N+\frac{1}{2}} + \theta \Psi_{x,y}^{N+\frac{1}{2}} + \theta^+ \Psi_{x+1,y}^{N+\frac{1}{2}} = \gamma^- \Psi_{x,y-1}^N + \gamma \Psi_{x,y}^N + \gamma^+ \Psi_{x,y+1}^N \quad (2.24)$$

Onde os coeficientes  $\theta^-$ ,  $\theta$ ,  $\theta^+$ ,  $\gamma^-$ ,  $\gamma$  e  $\gamma^+$  estão definidos no Apêndice E.

O segundo passo do ADI é obtido aplicando (2.23) em (2.17) e expandindo com o auxílio dos aproximantes de Padé de ordem (1,0) ou ordem (1,1), onde o operador  $L_y$  é discretizado implicitamente enquanto o operador  $L_x$  é tratado explicitamente. Com isso, obtém-se uma solução implícita na direção y da seguinte forma:

$$\theta^- \Psi_{x,y-1}^{N+1} + \theta \Psi_{x,y}^{N+1} + \theta^+ \Psi_{x,y+1}^{N+1} = \gamma^- \Psi_{x-1,y}^{N+\frac{1}{2}} + \gamma \Psi_{x,y}^{N+\frac{1}{2}} + \gamma^+ \Psi_{x+1,y}^{N+\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

Onde os coeficientes  $\theta^-$ ,  $\theta$ ,  $\theta^+$ ,  $\gamma^-$ ,  $\gamma$  e  $\gamma^+$  estão definidos no Apêndice E.

O ADI é uma técnica não-iterativa, ou seja, não necessita obedecer a nenhum critério de convergência dentro de cada passo de propagação e a sua utilização proporciona uma rápida convergência numérica. Outra vantagem muito importante da técnica ADI está no fato de que a matriz associada ao problema, além de ser tridiagonal, é da ordem de NxN, onde N representa o número de pontos da malha. No caso do FD-BPM convencional, a matriz associada ao problema é da ordem  $N^2 \times N^2$ . Assim, a utilização do ADI proporciona um menor “esforço” computacional e uma menor alocação de memória [49].

## 2.5 Considerações sobre a implementação do formalismo

A condição de contorno aplicada na fronteira da janela computacional é a de camadas perfeitamente casadas (PML) [59]. Esta condição de contorno caracteriza-se pelo casamento perfeito com o domínio do problema para qualquer ângulo de incidência. A PML deve ser aplicada nos operadores diferenciais transversais  $L_x$  e  $L_y$  por uma transformação anisotrópica complexa que, para o caso da componente  $H_x$ , torna-se:

$$L_x = \delta \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$L_y = \delta n^2 \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

onde:

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{j\sigma}{1 - \frac{j\sigma}{\omega\mu_0}} \end{pmatrix}$$

Sendo  $\sigma$  o perfil de condutividade magnética. A não utilização de uma condição de fronteira adequada acarreta reflexões indesejadas tornando a solução do modo oscilatória e divergente.

Para a análise de estabilidade do esquema de diferenças finitas, foi aplicado o critério de von Neumann, supondo que:

$$\psi_{x,y}^n = \varepsilon^n e^{jk_x \Delta x} e^{jk_y \Delta y} \quad (2.26)$$

$$\psi_{x,y}^{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} e^{jk_x \Delta x} e^{jk_y \Delta y} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.26) e (2.27) em (2.24), obtém-se o fator de amplificação o qual é definido como:

$$g = \frac{\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}}{\varepsilon^n} \quad (2.28)$$

Pode ser mostrado que o fator de amplificação para  $\psi_{x,y}^{n+\frac{1}{2}}$  no domínio espacial é dado por:

$$g = \frac{1 + \zeta \left[ \frac{(a+c)\cos(k\Delta y) - (a-c)j\sin(k\Delta y) - 2b + (1-\alpha)L_0}{\Delta y^2} \right]}{1 + \varphi \left[ \frac{2\cos(k\Delta x) - 2}{\Delta x^2} + \alpha L_0 \right]} \quad (2.29)$$

onde:

$$\zeta = \left[ \left( \frac{1}{4k^2} - \frac{j\Delta z}{2k} \right)(1-\alpha) - \left( \frac{1}{4k^2} + \frac{j\Delta z}{2k} \right)\alpha \right]$$

$$\varphi = \left[ \left( \frac{1}{4k^2} + \frac{j\Delta z}{2k} \right)\alpha - \left( \frac{1}{4k^2} - \frac{j\Delta z}{2k} \right)(1-\alpha) \right]$$

O parâmetro  $\alpha$  permite o controle do esquema de diferenças finitas. Para que o esquema seja incondicionalmente estável o parâmetro  $\alpha$  deve apresentar uma variação entre 0,5 e 1,0 (o valor adotado neste trabalho foi  $\alpha=0,5$ , o que representa o esquema de Crank-Nicholson). O critério de von Neumann estabelece que o fator de amplificação  $g$  não deve exceder a 1,0, ou seja,  $|g| \leq 1$ . Este critério é totalmente satisfeito pelo método proposto.

A FIGURA 2. 4 ilustra a aplicação do critério de estabilidade de von Neumann. A estrutura empregada nesta análise consiste de um guia de onda tipo *rib* o qual será discutido em maiores detalhes na seção 3.1. Esta estrutura possui o índice de refração do substrato igual a 3,435, índice de refração do núcleo igual a 3,44 e índice de refração da camada de

cobertura igual a 1,0 (ar). Pode-se observar que o valor adotado neste trabalho para o parâmetro  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha=0,5$  atende plenamente o critério de estabilidade de von Neumann, pois para  $\alpha=0,5$  o fator de amplificação,  $g$ , em todas as camadas é unitário ( $|g|=1$ ).

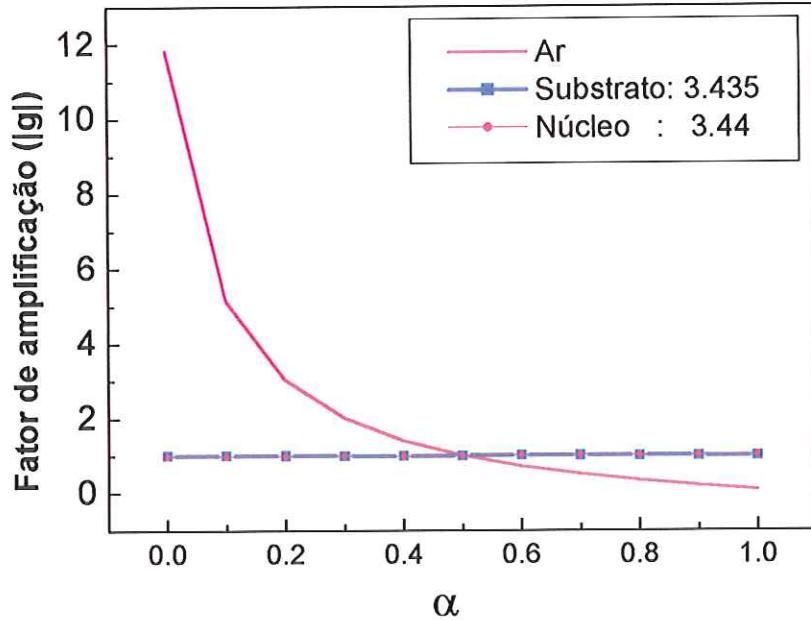


FIGURA 2. 4 – Critério de estabilidade de von Neumann aplicado a um guia de onda tipo *rib*.

A constante de propagação longitudinal  $\beta$  é obtida através de uma expressão variacional que, para uma polarização-x modo TE (componentes  $E_x$  e  $H_y$ ), pode ser escrita da seguinte forma [57]-[58]:

$$\beta^2 = \frac{-\left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|^2 + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \Psi \right) \Psi^* + k_0^2 n^2(x,y) |\Psi|^2}{|\Psi|^2} \quad (2.30)$$

Esta expressão é também utilizada para o cálculo do índice de referência  $n_0 = \beta/k_0$ . Este índice é calculado de forma adaptativa, ou seja, ele é atualizado a cada passo de propagação de modo acelerar a convergência do método. A equação (2.30) representa a expressão variacional semivetorial a qual encontra-se desenvolvida no apêndice F. O fluxograma do algoritmo implementado neste trabalho é mostrado no apêndice G.

## Capítulo 3

### Introdução

Este capítulo apresenta um estudo de três estruturas guias de ondas do tipo *rib* bem conhecidas na literatura com a finalidade de validar o formalismo proposto neste trabalho. Este estudo é realizado utilizando as formulações  $H_y$  (modo TE) e  $H_x$  (modo TM), ambas expandidas em termos dos aproximantes de Padé de ordem (1,0) e ordem (1,1). Com isso, foi elaborada uma análise de sensitividade do índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , com respeito aos seguintes parâmetros:

- a) número de iterações;
- b) passo de propagação longitudinal,  $\Delta z$ ;
- c) passo de discretização transversal;
- d) largura da gaussiana de excitação inicial;
- e) índice de referência;

Os resultados obtidos com a variação de cada um dos parâmetros citados acima são comparados a valores da literatura considerados *benchmarks* para estas estruturas. Os resultados destas comparações são apresentados na forma de erro relativo percentual e são listados em uma tabela para cada uma das estruturas, juntamente com as respectivas configurações de campo.

Tendo concluída a validação do método, uma quarta estrutura guia de onda é também investigada com o objetivo de verificar a precisão do método. Esta estrutura, uma fibra óptica com geometria tipo D, tem como característica a perda da degenerescência modal em virtude da quebra da simetria circular. Da mesma forma, o erro relativo percentual entre o formalismo proposto e os dados obtidos na literatura são apresentados em forma de tabela. A distribuição de campo obtida para esta fibra é também mostrada a título de ilustração. O formalismo numérico proposto também é comparado com o método do índice efetivo (MIE) visando demonstrar as limitações de métodos analíticos na análise de dispositivos ópticos integrados. Por fim, é apresentado um resumo geral da análise de sensitividade realizada nas três estruturas guias de onda tipo *rib* e as considerações finais sobre o método proposto.

### 3.1 Análise de sensitividade utilizando formulações $H_x$ e $H_y$ para guias de onda tipo *rib*.

#### Introdução

A validação do formalismo proposto é feita por meio de simulações que visam verificar a convergência do método com respeito à variação de parâmetros tais como: número de iterações, passo de propagação longitudinal, passo de discretização transversal, largura da gaussiana de excitação inicial e índice de referência. Estas simulações são realizadas utilizando três estruturas tipo *rib* como mostrado na FIGURA 3. 1.

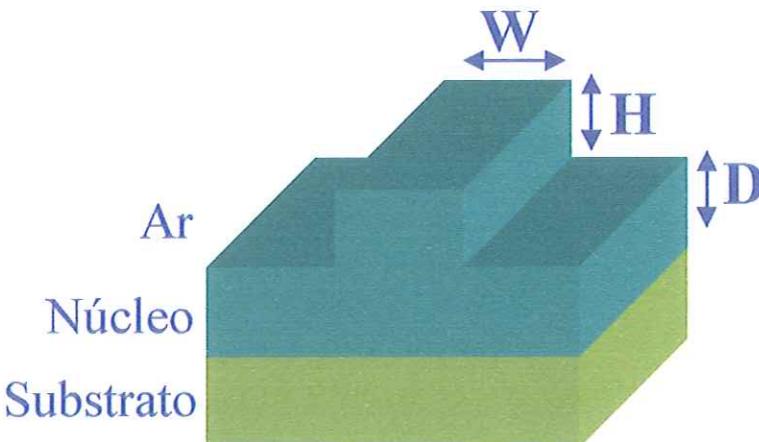


FIGURA 3. 1 - Representação tridimensional de um guia de onda do tipo *rib*.

Os parâmetros físicos e geométricos para as três estruturas tipo *rib* investigadas são listados na TABELA 3.1 juntamente com seus respectivos valores de índices efetivos obtidos na literatura, [30]e [34].

TABELA 3.1 - Parâmetros das três estruturas *rib* avaliadas através da formulação  $H_x$  e  $H_y$ .

Estruturas	$N_g$	$N_s$	Ar	$D(\mu m)$	$H(\mu m)$	$W(\mu m)$	$n_{eff}$	$n_{eff}$
							Literatura, $H_x$	Literatura, $H_y$
1	3.44	3.34	1.0	0.2	1.1	2	3.3877200*	3.3886900*
2	3.44	3.36	1.0	0.9	0.1	3	3.3905927*	3.3954405*
3	3.44	3.435	1.0	3.5	2.5	4	3.4367729*	3.4368121*

\*Referência [30].

\*Referência [34].

A próxima seção apresenta os resultados das simulações realizadas utilizando os aproximantes de Padé de ordem (1,0) e ordem (1,1) para as estruturas listadas na TABELA 3.1. Nestas simulações os valores de  $n_{eff}$  obtidos na literatura com a formulação  $H_y$  (modos TE) e  $H_x$  (modos TM) são tomados como referência para aferição do método proposto neste trabalho. O erro percentual relativo é calculado da seguinte maneira:

$$Erro = \frac{n_{eff}(\text{Literatura}) - n_{eff}(\text{Padé})}{n_{eff}(\text{Literatura})} \times 100$$

A expressão utilizada no cálculo da gaussiana de excitação inicial é a seguinte:

$$gaussiana = \exp^{-\left(\frac{(X-X_0)^2}{GX^2} + \frac{(Y-Y_0)^2}{GY^2}\right)}$$

onde  $(X_0, Y_0)$  representa o ponto onde a gaussiana está centralizada, e  $GX$  e  $GY$  representam a largura da gaussiana na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os parâmetros que serão analisados a seguir são:

- Número de iterações;
- passo de propagação  $\Delta z$ ;
- passo de discretização transversal;
- Largura da gaussiana utilizada como excitação inicial;
- Índice de referência  $n_0$ ;

### 3.1.1 Resultados numéricos

#### 3.1.1.1 Estrutura 1

Os parâmetros referentes a esta estrutura estão listados na TABELA 3.1. Os dados utilizados nas simulações são os seguintes: janela computacional de  $8,0 \mu m \times 8,0 \mu m$ , distância de propagação de  $200 \mu m$ , passo longitudinal  $\Delta z = 0,1 \mu m$ , comprimento de onda  $\lambda_0 = 1,55 \mu m$ , índice de referência  $n_0 = 3,39$ , largura da gaussiana de  $1,0 \mu m$ , e número de pontos da discretização transversal igual 200. Os resultados obtidos com as formulações  $H_y$  e  $H_x$  são mostrados na FIGURA 3. 2. Observe que a convergência numérica ocorre para

poucos passos de propagação longitudinal (em torno de 1500 passos). Isto se deve ao alto confinamento modal produzido por esta estrutura. Outra observação muito importante é que a convergência da formulação utilizando Padé (1,1) necessita praticamente da metade do número de iterações quando comparada ao Padé (1,0). Isto se deve à melhor precisão da representação da equação de onda de Helmholtz com o Padé (1,1). O erro relativo percentual entre o valor do  $n_{eff}$  encontrado para o Padé (1,0) e o valor existente na literatura é de 0,000177% para a formulação  $H_y$ , e 0,0002018% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,0000295% para a formulação  $H_y$  e 0,0002219% para a formulação  $H_x$ .

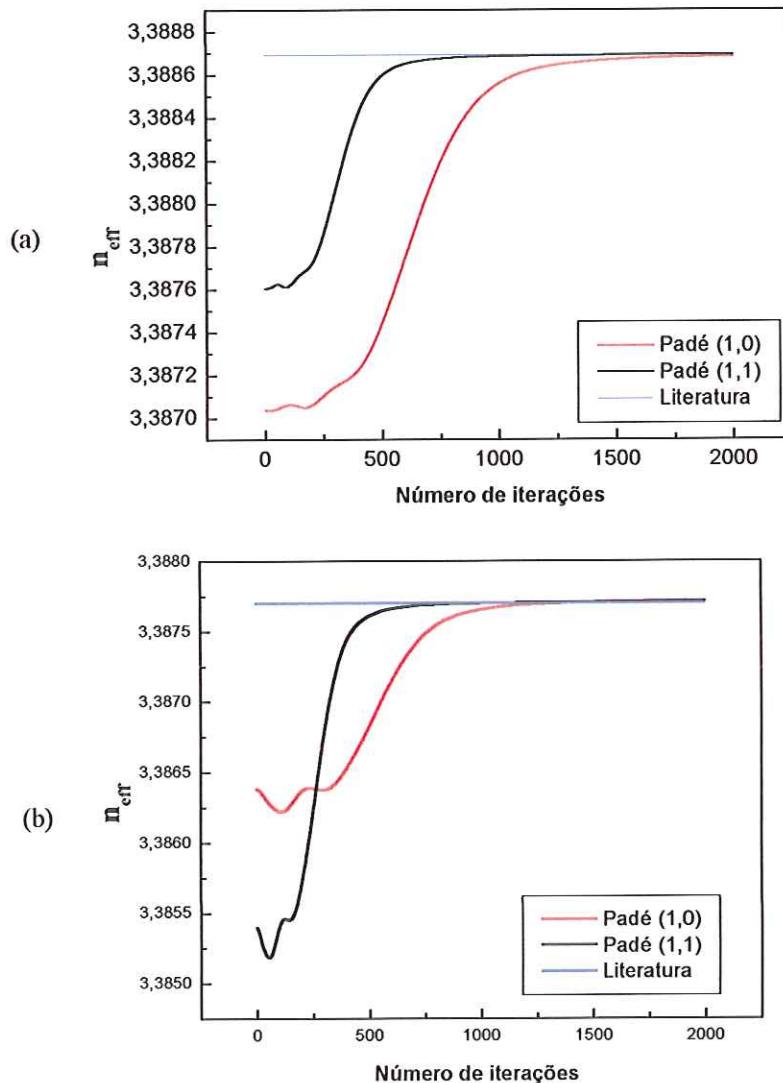


FIGURA 3. 2 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Poucas iterações são suficientes para se obter o valor do  $n_{eff}$ .

A influência do tamanho do passo de propagação longitudinal  $\Delta z$  no cálculo do índice efetivo é ilustrada na FIGURA 3. 3 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Observe que a utilização de valores elevados de  $\Delta z$  conduzem a um maior erro no valor do índice efetivo modal. Nestas circunstâncias a onda se difrata mais acentuadamente e a discretização utilizada não é capaz de representar devidamente a variação do campo. Para esta estrutura, o valor adequado para o passo de propagação deve ser  $\Delta z=1,0 \mu m$  para a formulação  $H_y$ , e  $\Delta z=1,5 \mu m$  para a formulação  $H_x$ . O erro relativo percentual para o Padé (1,0) é de 0,000177% para a formulação  $H_y$  e 0,0002018% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1) o erro é de 0,0000295% para a formulação  $H_y$  e 0,0002219% para a formulação  $H_x$ .

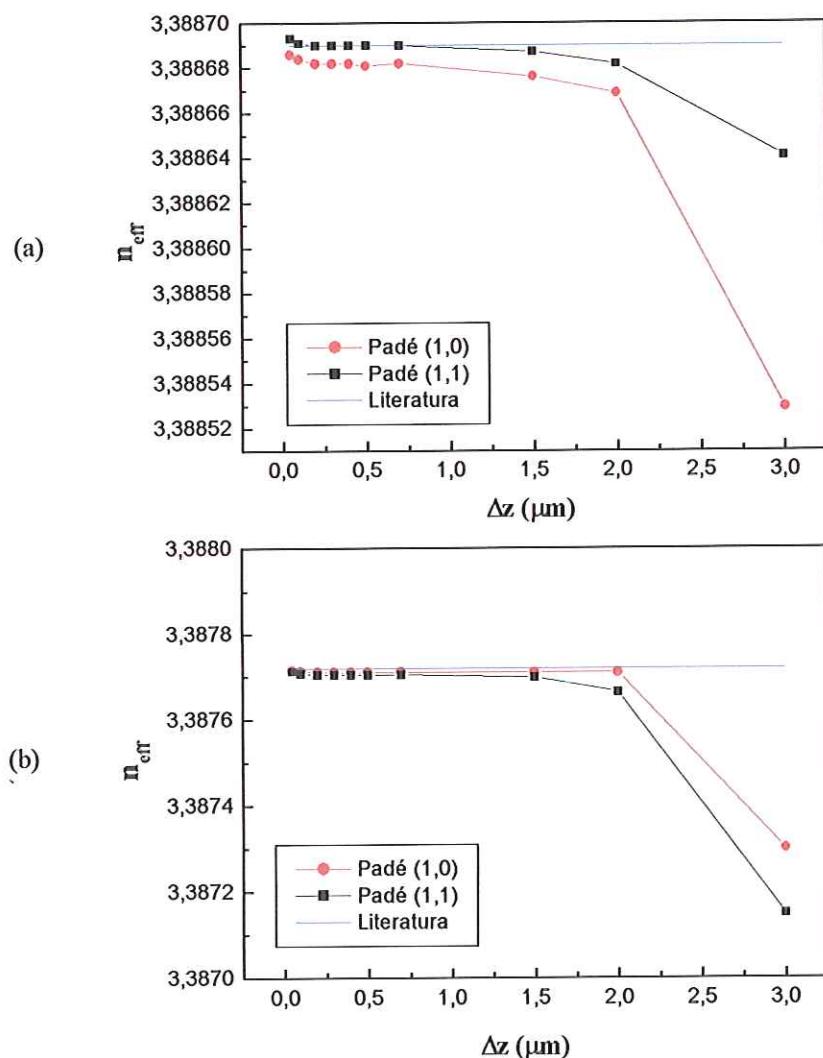


FIGURA 3. 3 - Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função de  $\Delta z$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Valores elevados de  $\Delta z$  ocasionam divergência no cálculo do índice efetivo.

Em seguida foi investigada a influência do passo de propagação transversal no cálculo do índice efetivo, como mostra a FIGURA 3. 4, para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Mais uma vez, o aumento do passo transversal leva a um consequente aumento do erro na obtenção de  $n_{eff}$ . Isto se deve ao fato de que passos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  maiores produzem um maior erro de truncamento, onde este erro é decorrente da expansão dos operadores diferenciais transversais, ou seja,  $O(\Delta_x^2)$  e  $O(\Delta_y^2)$ . O erro relativo percentual encontrado para o Padé (1,0) é de 0,000177% para a formulação  $H_y$  e 0,0002018% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,0000295% para a formulação  $H_y$  e 0,0002219% para a formulação  $H_x$ .

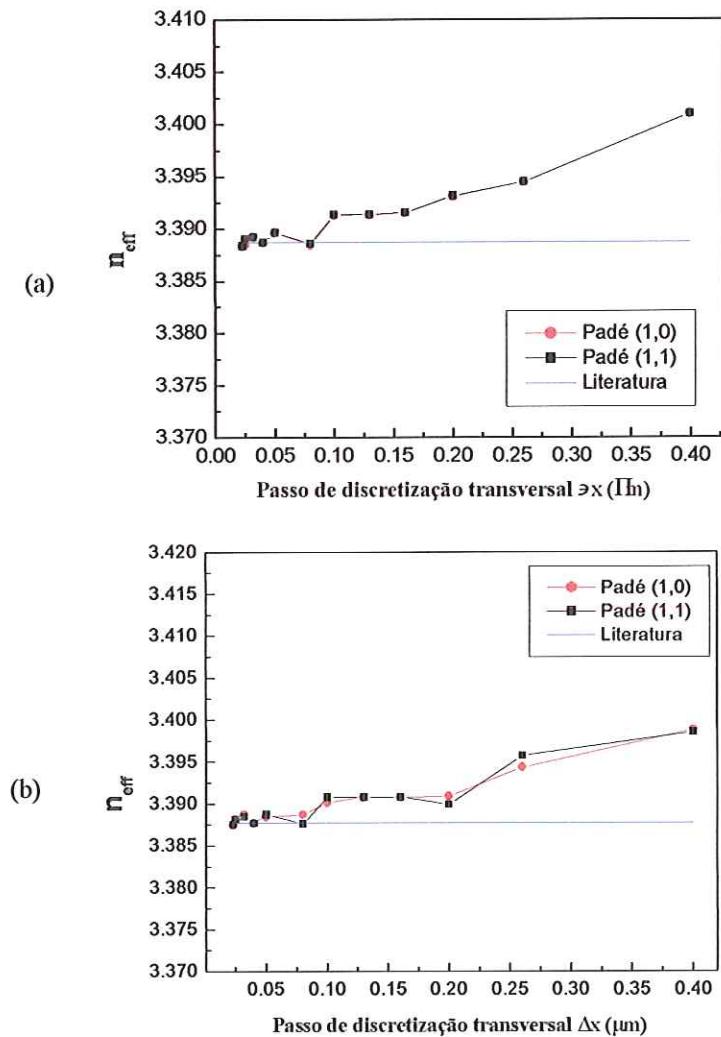


FIGURA 3. 4 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal ocasiona divergência no cálculo do índice efetivo.

As simulações seguintes ilustram o efeito da largura da gaussiana de excitação (em  $z=0\mu m$ ) no cálculo do índice efetivo. Esta influência é ilustrada na FIGURA 3. 5 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . A divergência no valor de  $n_{eff}$  em virtude do aumento da largura da gaussiana se deve, principalmente, à maior transferência de energia para o ar e substrato tendo em vista as dimensões do núcleo e da largura do *rib* para esta estrutura. O erro relativo percentual para o Padé (1,0) é de 0,000177% para a formulação  $H_y$  e 0,0002018% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1) o erro é de 0,0000295% para a formulação  $H_y$  e 0,0002219% para a formulação  $H_x$ .

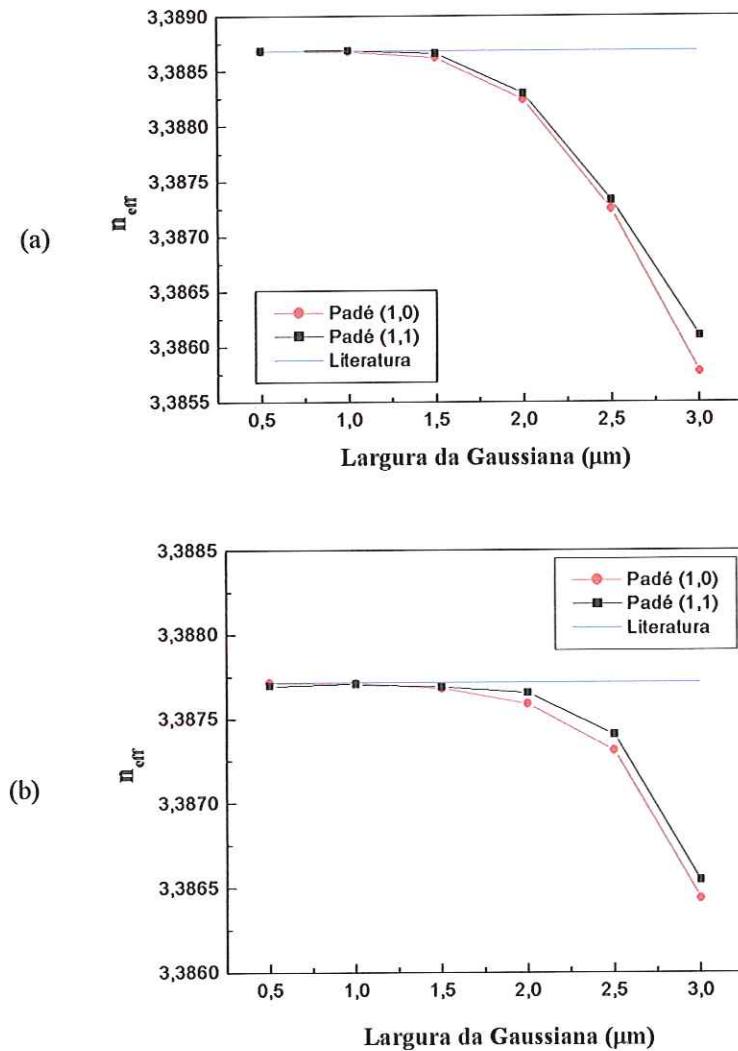


FIGURA 3.5 - Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial.. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Verifica-se divergência numérica para o  $n_{eff}$  com o aumento da largura da gaussiana de excitação inicial.

A influência do índice de referência sobre o índice efetivo é mostrada na FIGURA 3. 6 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Como pode ser observado, a escolha do índice de referência não é um fator significativo para a convergência do método em virtude da utilização do cálculo adaptativo de  $n_0$ . O erro relativo percentual encontrado para os aproximantes de Padé de ordem (1,0) é de 0,000177% para a formulação  $H_y$  e 0,0002018% para a formulação  $H_x$ . Para os aproximantes de ordem (1,1) este erro é de 0,0000295% para a formulação  $H_y$  e 0,0002219% para a formulação  $H_x$ .

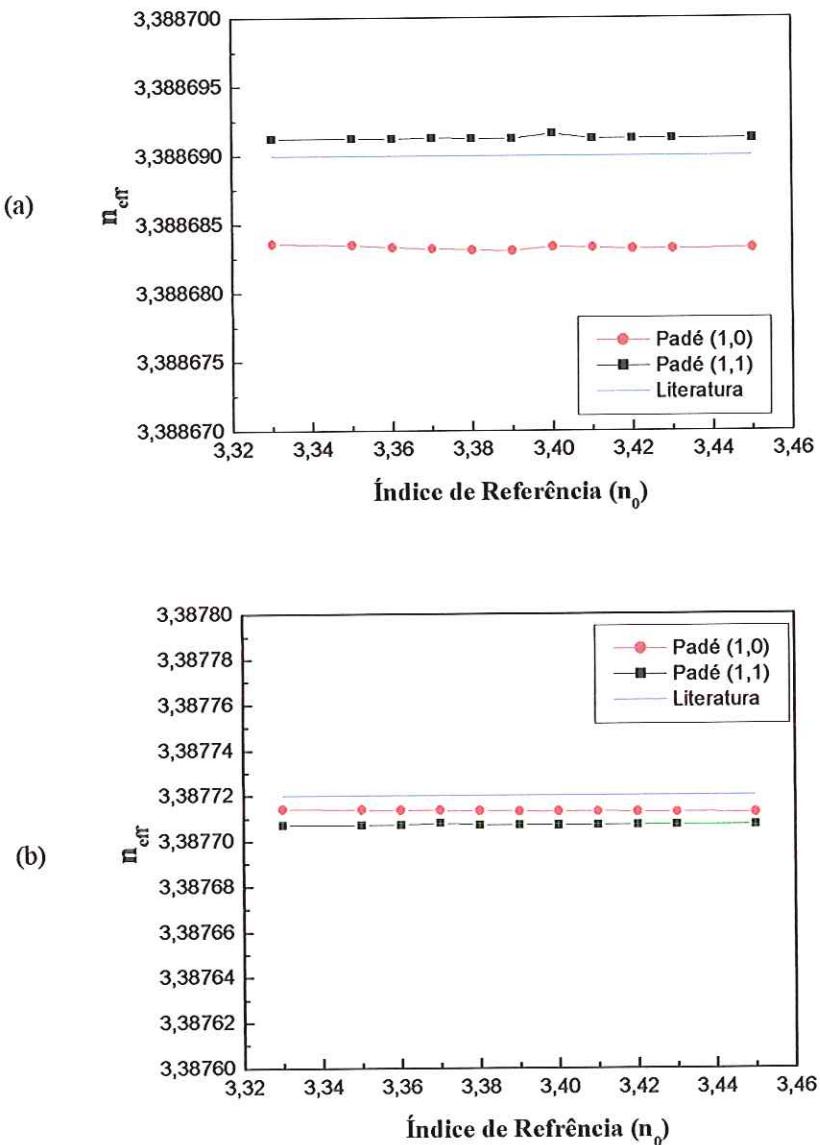


FIGURA 3. 6 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do índice de referência  $n_0$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo para o índice de referência  $n_0$  permite a utilização de uma ampla faixa de valores iniciais para  $n_0$ .

A FIGURA 3. 7 ilustra a distribuição de campo e o contorno de campo obtidos para a formulação  $H_y$ (modo TE) com os aproximantes de Padé de ordem (1,1).

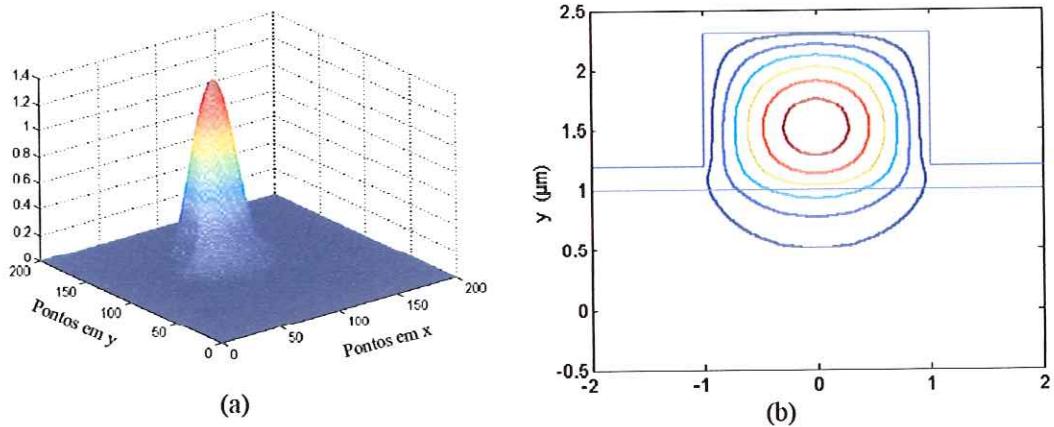


FIGURA 3. 7- (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente  $H_y$  utilizando Padé (1,1).

A TABELA 3. 2 apresenta um resumo dos erros percentuais encontrados nesta seção para os aproximantes de Padé de ordem (1,0) e (1,1) em relação aos valores de *benchmark* disponíveis na literatura para a estrutura 1. Observe que em todos os casos listados existe uma ótima concordância em relação à literatura.

TABELA 3. 2: Erro relativo entre os valores do  $n_{eff}$  encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação  $H_y$  e  $H_x$

Estrutura 1	Literatura	Padé (1,0)	Erro (%)	Padé(1,1)	Erro (%)
$H_y$	3,38869*	3,38868305	0,000177	3,38869123	0,0000295
$H_x$	3,38772*	3,38771316	0,0002018	3,38770708	0,0002219

\* Referência [30].

### 3.1.1.2 Estrutura 2

Os parâmetros físicos e geométricos referentes a esta estrutura estão listados na TABELA 3.1. A janela computacional utilizada é de  $20,0 \mu m \times 10,0 \mu m$ , distância de propagação de  $500 \mu m$ , passo longitudinal  $\Delta z = 0,1 \mu m$ , comprimento de onda  $\lambda_0 = 1,55 \mu m$ , índice de referência  $n_0 = 3,39$ , largura da gaussiana de  $2,0 \mu m$ , e número de pontos da discretização transversal igual 250.

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado para a estrutura 1, a influência do número de iterações sobre a convergência do índice efetivo modal é mostrada na FIGURA 3. 8 para as

formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Observe que para esta estrutura são necessários um número maior de iterações para a obtenção do índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , quando comparada à estrutura 1. Isto ocorre pelo fato desta estrutura possuir um menor confinamento modal. Analogamente à estrutura 1, a formulação utilizando Padé (1,1) apresenta uma convergência numérica mais rápida do que a que utiliza Padé (1,0). Isto se deve à melhor precisão da representação da equação de onda de Helmholtz com o Padé (1,1). O erro relativo percentual entre o valor do  $n_{eff}$  encontrado para o Padé (1,0) e o valor existente na literatura é de 0,004822% para a formulação  $H_y$  e 0,001988% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,00503% para a formulação  $H_y$  e 0,00213% para a formulação  $H_x$ .

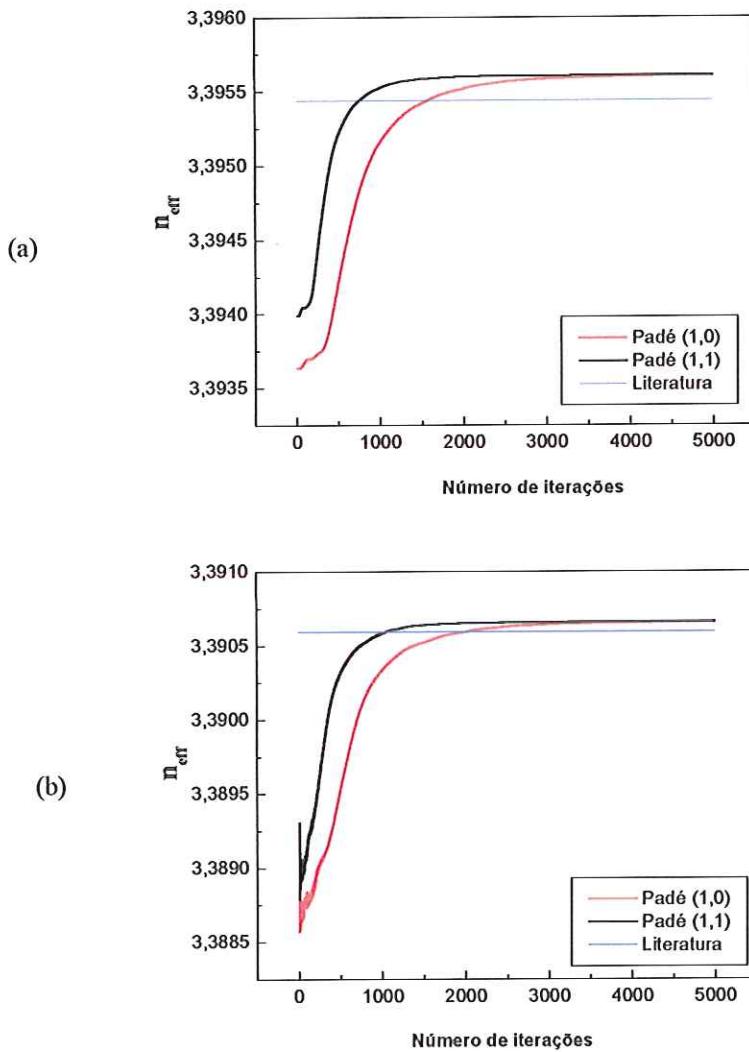


FIGURA 3.8 –Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Pelo fato desta estrutura apresentar um menor confinamento modal são necessários um número maior de iterações do que a estrutura 1, para a convergência numérica.

A influência do tamanho do passo de discretização longitudinal  $\Delta z$  sobre o índice efetivo modal é mostrada na FIGURA 3. 9 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Como observado anteriormente, passos de propagação muito grandes tendem a diminuir a eficiência do método. Estas simulações sugerem que o passo de propagação não deveria ser maior que  $1,5\mu\text{m}$  para a formulação  $H_y$  e  $0,5\mu\text{m}$  para a formulação  $H_x$ . O erro relativo percentual entre o valor do  $n_{eff}$  encontrado para o Padé (1,0) e o valor existente na literatura é de 0,004822% para a formulação  $H_y$  e 0,001988% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,00503% para a formulação  $H_y$  e de 0,00213% para a formulação  $H_x$ .

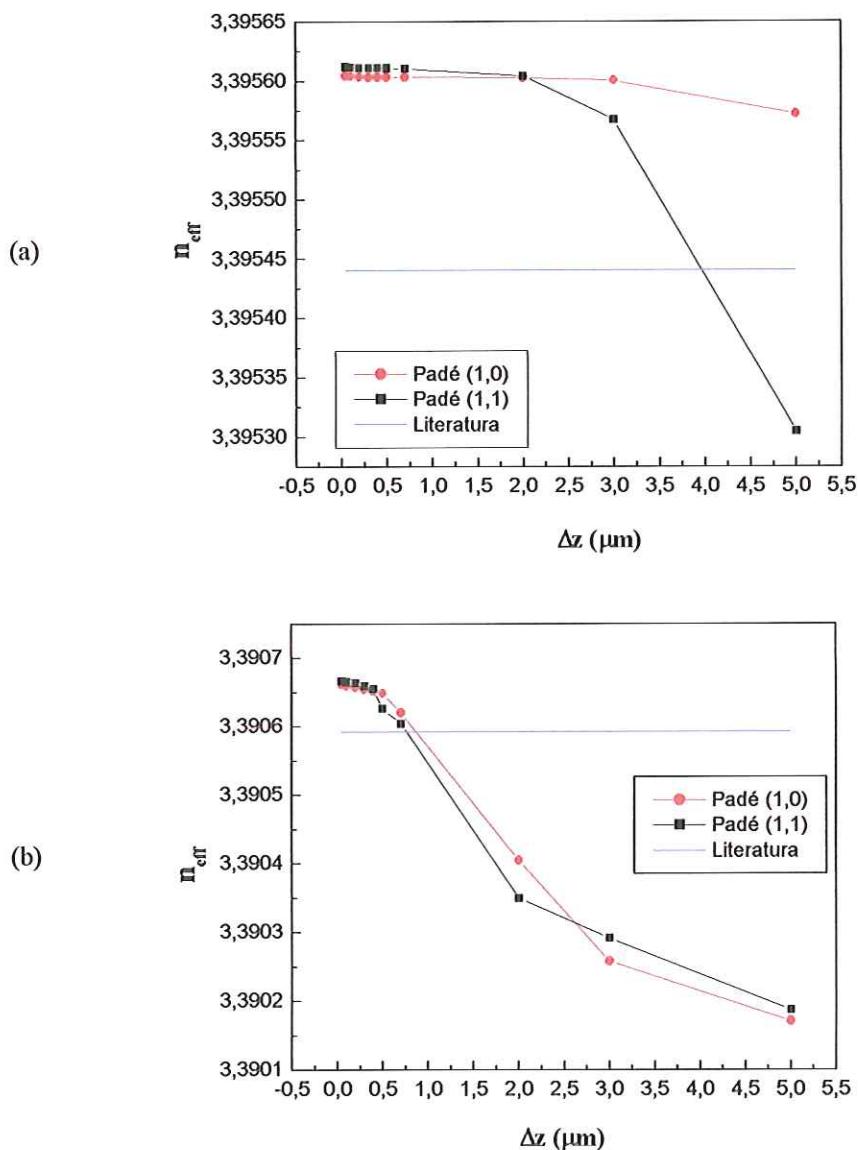


FIGURA 3. 9 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função de  $\Delta z$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Valores elevados de  $\Delta z$  diminuem a eficiência do método.

A influência do tamanho do passo de discretização transversal sobre o índice efetivo para esta estrutura é mostrada na FIGURA 3. 10 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Mais uma vez, o aumento deste parâmetro ocasiona aumento no erro de truncamento dos operadores diferenciais transversais discretizados. O erro relativo percentual entre o valor do  $n_{eff}$  encontrado para o Padé (1,0) e o valor existente na literatura é de 0,00482% para a formulação  $H_y$  e 0,001988% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,00503% para a formulação  $H_y$  e 0,00213% para a formulação  $H_x$ .

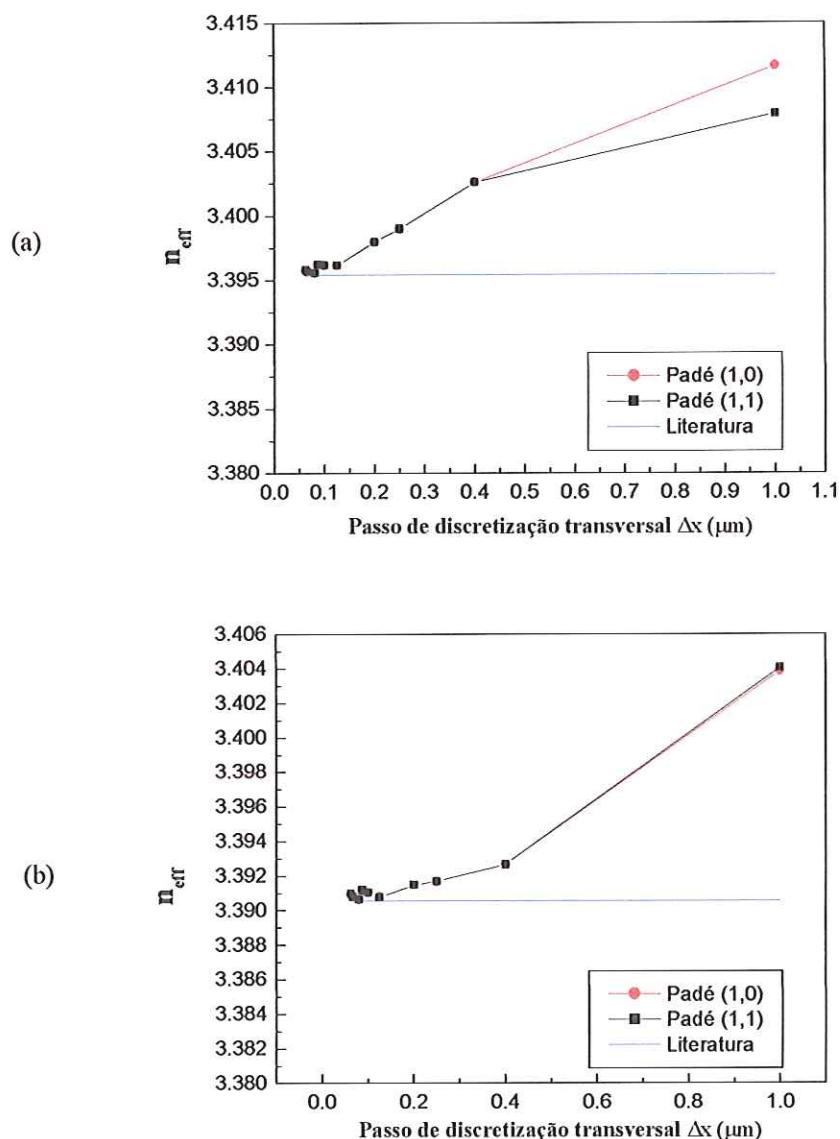


FIGURA 3. 10 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal ocasiona divergência numérica.

A FIGURA 3. 11 ilustra a influência da largura da gaussiana sobre o índice efetivo modal para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Observe que o valor do índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , sofre uma menor influência da largura da gaussiana de excitação inicial se comparada aos resultados obtidos para estrutura 1. Isto ocorre pelo fato desta estrutura apresentar uma maior largura do *rib* e uma maior espessura do núcleo. Isto maximiza a eficiência de acoplamento do guia de onda. O erro relativo percentual encontrado para o Padé (1,0) é de 0,004822% para a formulação  $H_y$  e 0,001988% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,00503% para a formulação  $H_y$  e 0,00213% para a formulação  $H_x$ .

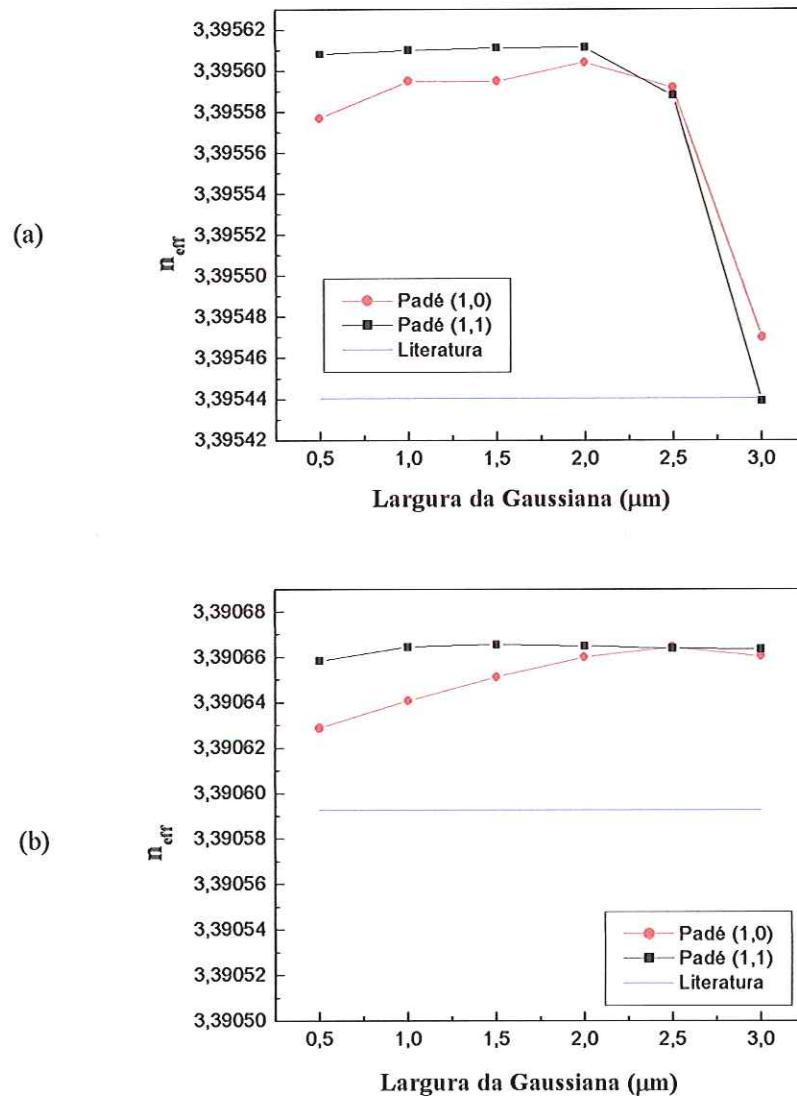


FIGURA 3. 11 –Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Esta estrutura sofre uma menor influência da largura da gaussiana de excitação inicial para a convergência do índice efetivo modal.

A FIGURA 3. 12 ilustra a influência da escolha do índice de referência,  $n_0$ , sobre o índice efetivo modal para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Como observado anteriormente para a estrutura 1, a utilização do cálculo adaptativo permite uma maior liberdade de escolha de  $n_0$ . O erro relativo percentual para o Padé (1,0) é de 0,004822% para a formulação  $H_y$  e 0,001988% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,00503% para a formulação  $H_y$  e 0,00213% para a formulação  $H_x$ .

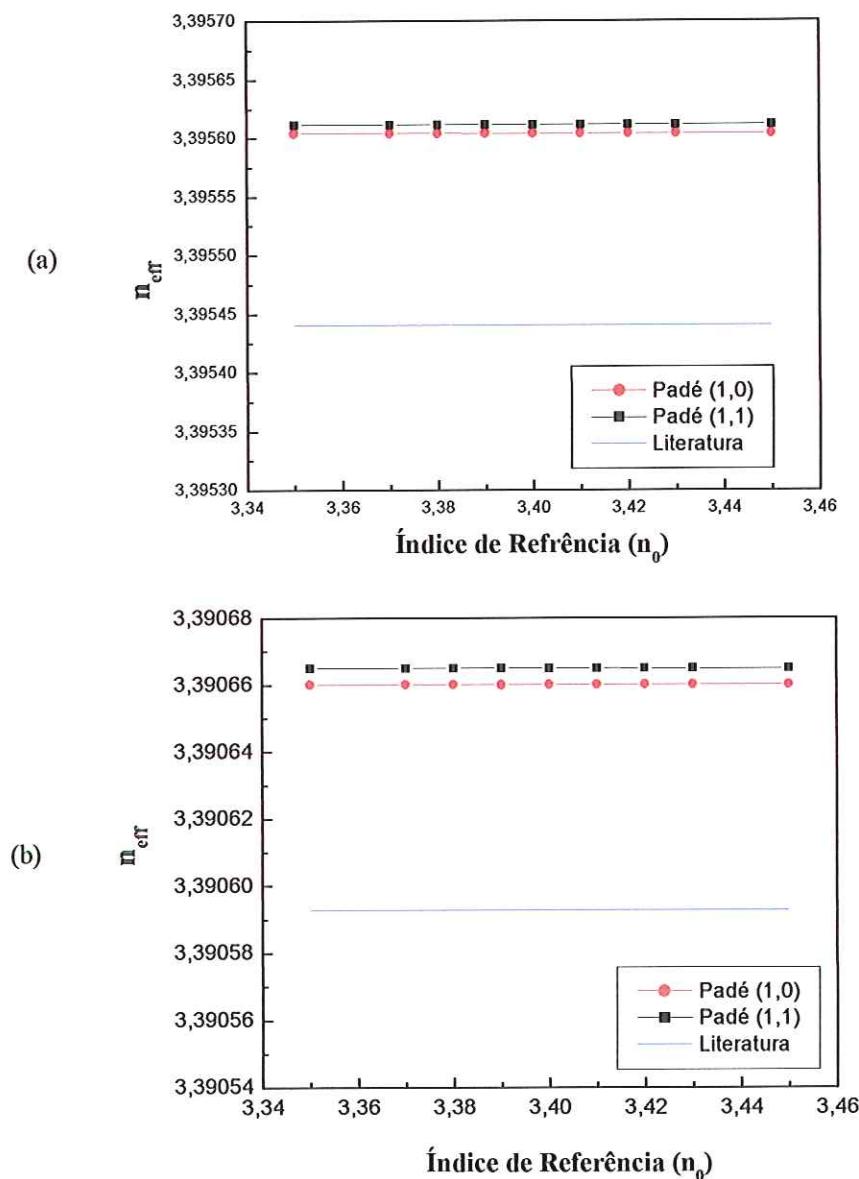


FIGURA 3. 12 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do índice de referência  $n_0$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo permite uma maior liberdade de escolha de  $n_0$ .

A FIGURA 3. 13 ilustra a distribuição de campo e o contorno de campo obtidos para a formulação  $H_y$ (modo TE) com os aproximantes de Padé de ordem (1,1).

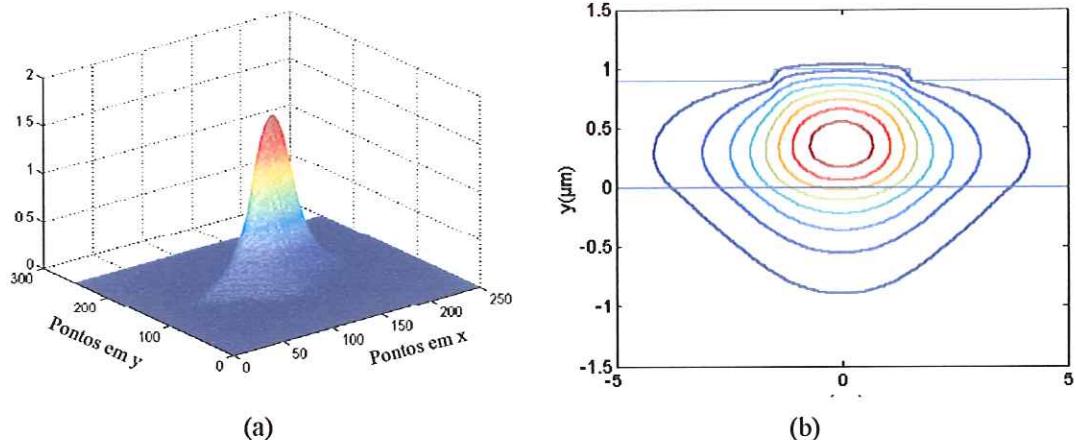


FIGURA 3. 13-(a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente  $H_y$  utilizando Padé (1,1).

A TABELA 3. 3 apresenta um resumo dos erros percentuais encontrados nesta seção para os aproximantes de Padé de ordem (1,0) e (1,1) em relação aos valores de *benchmarks* disponíveis na literatura para a estrutura 2. Observe que em todos os casos listados, os valores obtidos pelo formalismo proposto neste trabalho apresentam uma ótima concordância em relação aos *benchmarks*.

TABELA 3. 3: Erro relativo entre os valores do  $n_{eff}$  encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação  $H_y$  e  $H_x$

Estrutura 2	Literatura	Padé (1,0)	Erro (%)	Padé(1,1)	Erro (%)
$H_y$	3,3954405*	3,39560423	0,004822	3,39561143	0,00503
$H_x$	3,3905927*	3,39066010	0,001988	3,39066504	0,00213

\* Referência [34].

### 3.1.1.3 Estrutura 3

Os parâmetros físicos e geométricos referentes a esta estrutura estão listados na TABELA 3.1. A janela computacional utilizada é de  $40,0 \mu m \times 20,0 \mu m$ , distância de propagação de  $1.500 \mu m$ , passo longitudinal  $\Delta z = 0,1 \mu m$ , comprimento de onda

$\lambda_0 = 1,55 \mu m$ , índice de referência  $n_0 = 3,437$ , largura da gaussiana de  $2,0 \mu m$ , e número de pontos da discretização transversal igual 250. A sequência de resultados que será mostrada a seguir segue o mesmo raciocínio das estruturas anteriores, começando com a influência do número de iterações sobre o índice efetivo modal,  $n_{eff}$ . Esta influência pode ser vista na FIGURA 3. 14 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Observe que a estrutura 3 exige um número ainda maior de iterações (14.000) para a convergência do índice efetivo modal quando comparada às estruturas 1 e 2 em virtude do baixo confinamento modal. O erro relativo percentual entre o valor do  $n_{eff}$  encontrado para o Padé (1,0) e o valor existente na literatura é de 0,000848% para a formulação  $H_y$  e 0,000323 para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,001098% para a formulação  $H_y$  e 0,001007 para a formulação  $H_x$ .

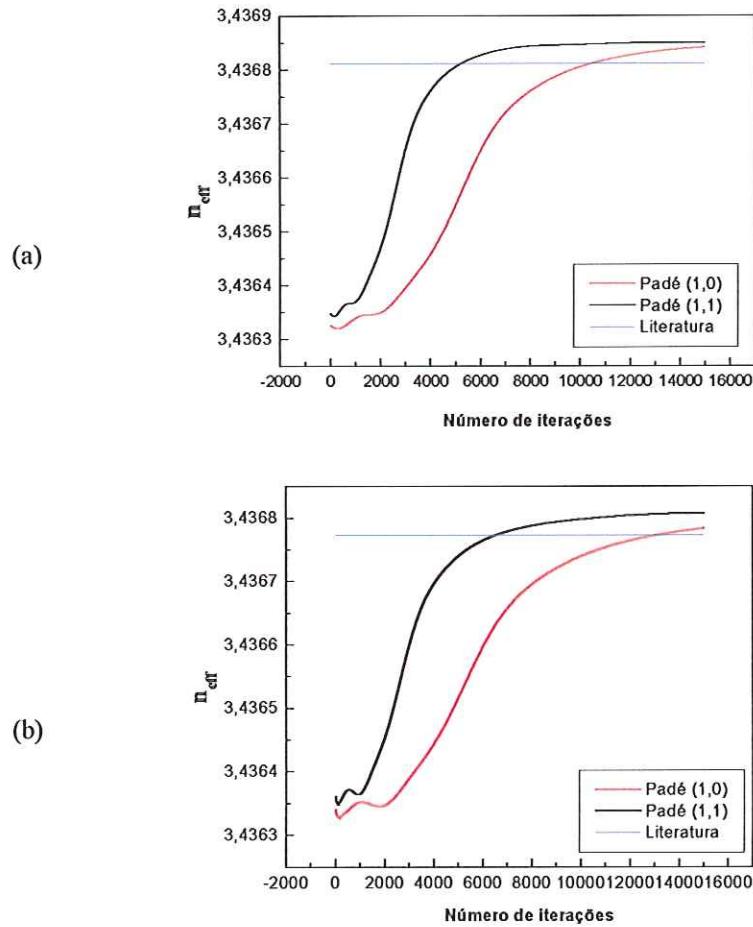


FIGURA 3. 14 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do número de passos de propagação. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Para que ocorra convergência é necessário um número elevado de iterações em virtude do baixo confinamento modal desta estrutura.

A FIGURA 3. 15 mostra a influência do tamanho do passo de propagação longitudinal  $\Delta z$  no valor do índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Da mesma forma vista para as estruturas 1 e 2, pode-se notar que a utilização de valores elevados de  $\Delta z$  prejudicam a eficiência do método na obtenção do  $n_{eff}$ . As simulações sugerem um passo  $\Delta z$  de no máximo 3,0  $\mu\text{m}$  tanto para a formulação  $H_y$  quanto para a formulação  $H_x$ . O erro relativo percentual encontrado para o Padé (1,0) é de 0,000848% para a formulação  $H_y$  e 0,000323% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,001098% para a formulação  $H_y$  e 0,001007% para a formulação  $H_x$ .

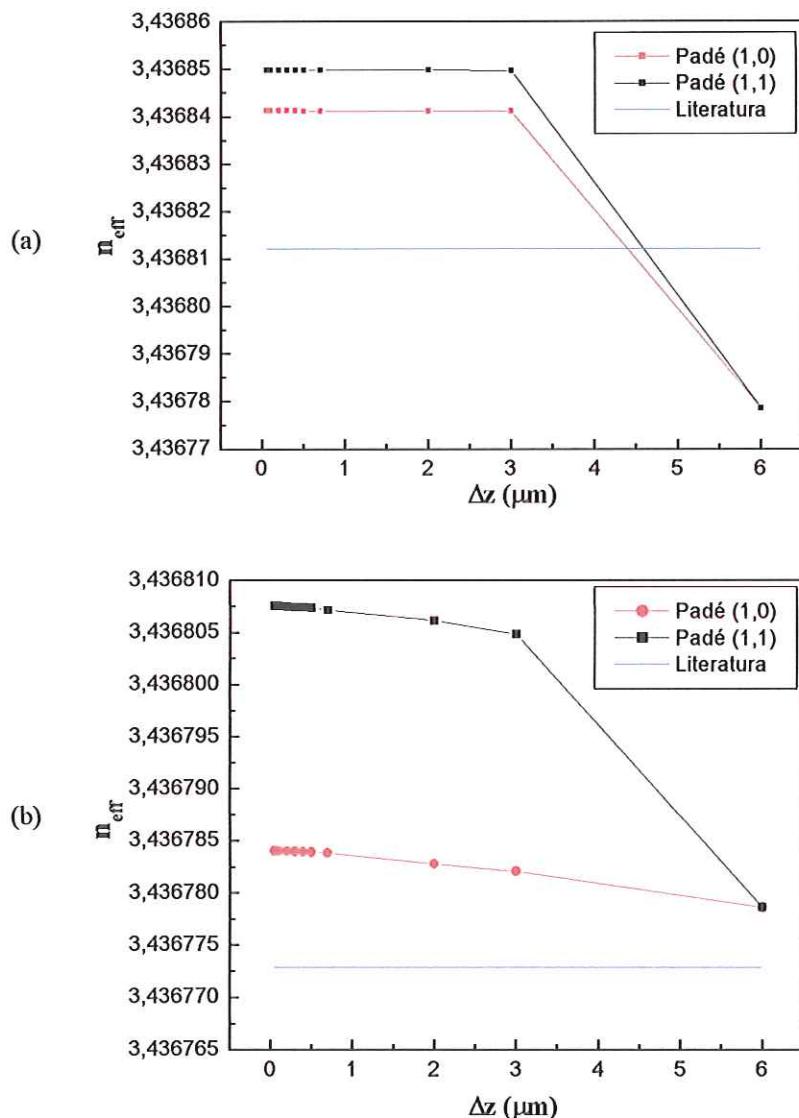


FIGURA 3. 15- Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função de  $\Delta z$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Valores elevados de  $\Delta z$  diminuem a eficiência do método numérico.

A influência do tamanho do passo de discretização transversal no valor do índice efetivo é ilustrada na FIGURA 3. 16 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Como nos casos anteriores, o aumento do passo ocasiona um aumento no erro de truncamento nos operadores diferenciais transversais discretizados reduzindo a eficiência do método. O erro relativo percentual para o Padé (1,0) é de 0,000848% para a formulação  $H_y$  e 0,000323% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,001098% para a formulação  $H_y$  e 0,001007% para a formulação  $H_x$ .

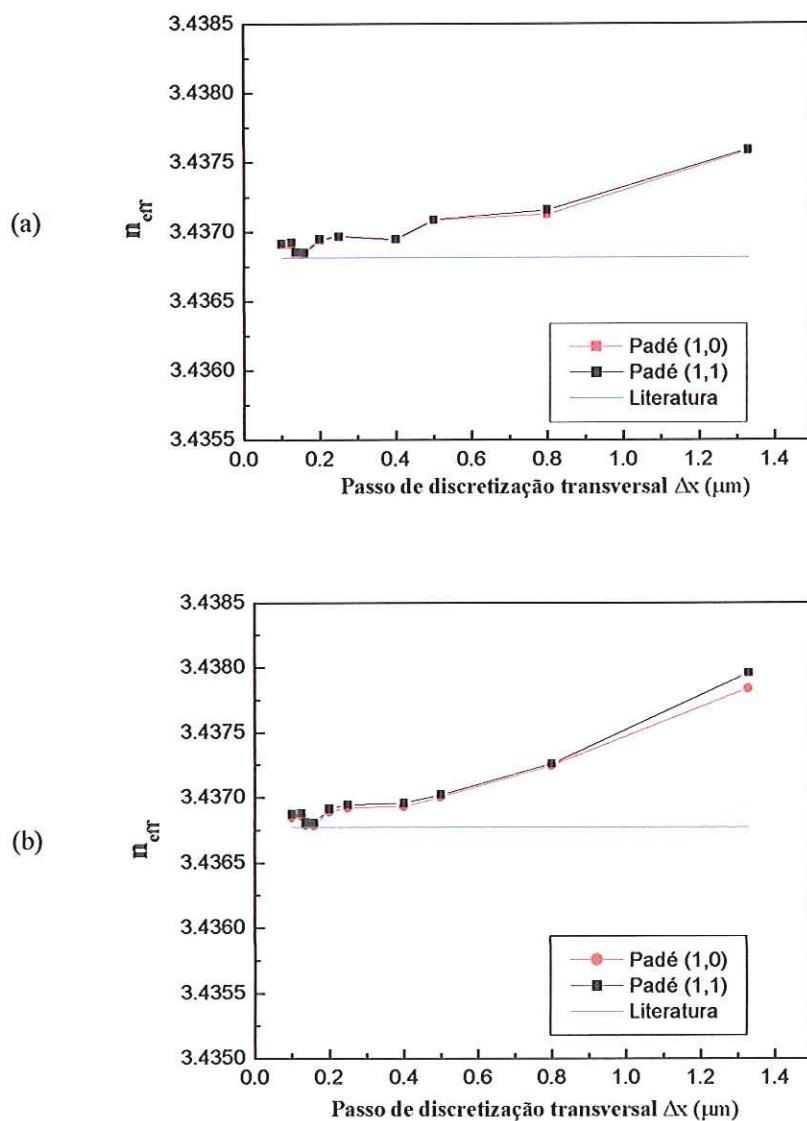


FIGURA 3. 16 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do passo de discretização transversal. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . O aumento do passo de discretização transversal reduz a eficiência do método numérico.

A FIGURA 3. 17 por sua vez ilustra o efeito do aumento da largura da gaussiana de excitação no valor do índice efetivo para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Como pode ser observado, a variação deste parâmetro praticamente não afeta o valor do índice efetivo modal,  $n_{eff}$  em virtude da grande dimensão da seção transversal desta estrutura. O erro relativo percentual para o Padé (1,0) é de 0,000848% para a formulação  $H_y$  e 0,000323% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,001098% para a formulação  $H_y$  e 0,001007% para a formulação  $H_x$ .

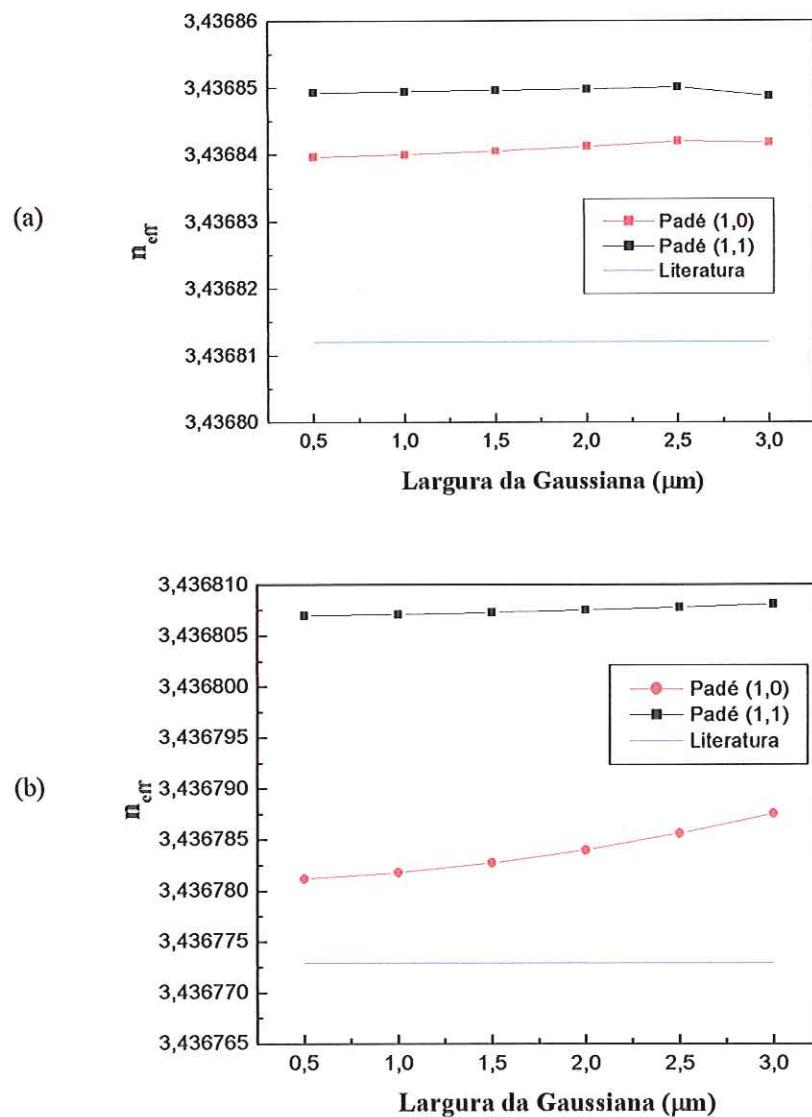


FIGURA 3. 17 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função da largura da gaussiana de excitação inicial. (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . Esta estrutura praticamente não sofre influência da largura da gaussiana de excitação inicial em virtude da grande dimensão da seção transversal desta estrutura.

Finalmente, a influência da escolha do índice de referência,  $n_0$ , sobre o índice efetivo,  $n_{eff}$ , na FIGURA 3. 18 para as formulações  $H_y$  e  $H_x$ . Observe que o valor obtido para  $n_{eff}$  permanece estável para uma ampla faixa de variação do índice de referência,  $n_0$ . Este fato decorre do cálculo adaptativo de  $n_0$  ao longo da direção de propagação. O erro relativo percentual encontrado para o Padé (1,0) é de 0,000848% para a formulação  $H_y$  e 0,000323% para a formulação  $H_x$ . No caso do Padé (1,1), o erro é de 0,001098% para a formulação  $H_y$  e 0,001007% para a formulação  $H_x$ .

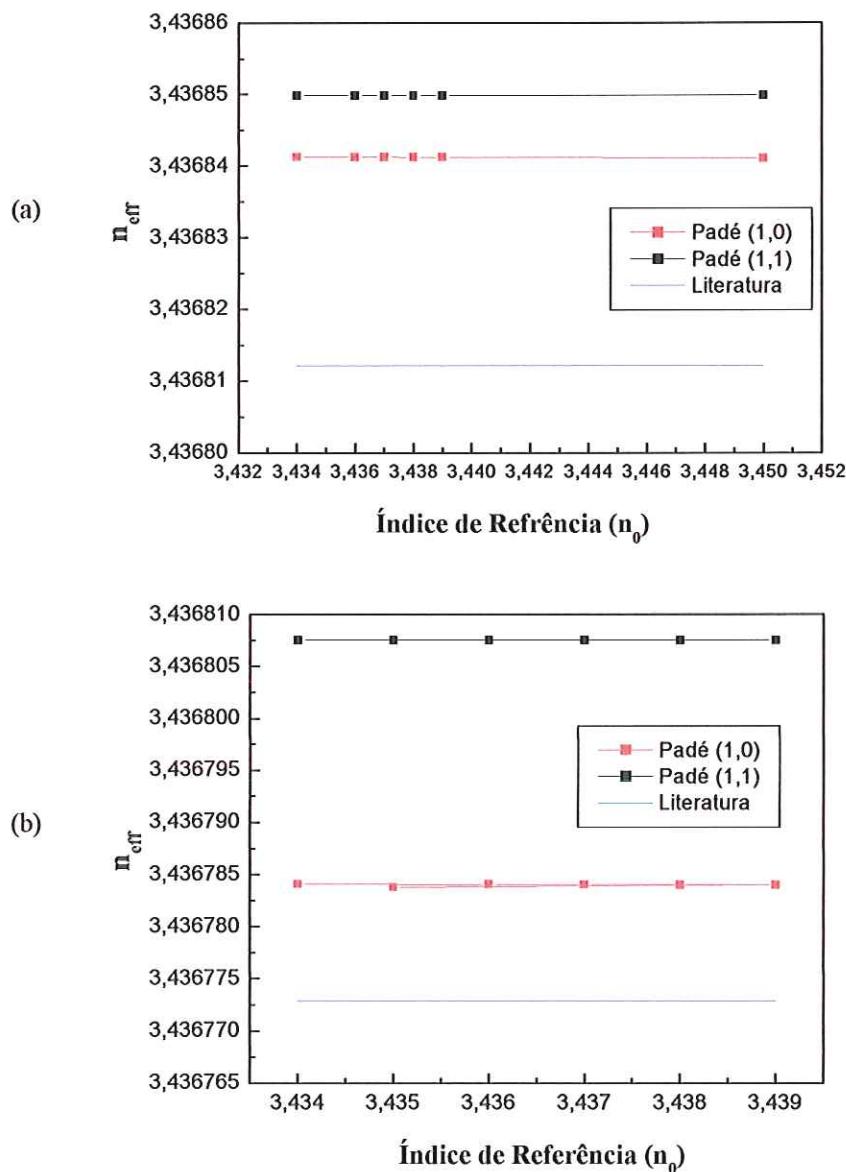


FIGURA 3. 18 – Índice efetivo,  $n_{eff}$ , em função do índice de referência  $n_0$ . (a) formulação  $H_y$  e (b) formulação  $H_x$ . A utilização do cálculo adaptativo para  $n_0$  garante uma ampla faixa de convergência.

A FIGURA 3. 19 ilustra a distribuição de campo e o contorno de campo obtidos para a formulação  $H_y$ (modo TE) com os aproximantes de Padé de ordem (1,1).

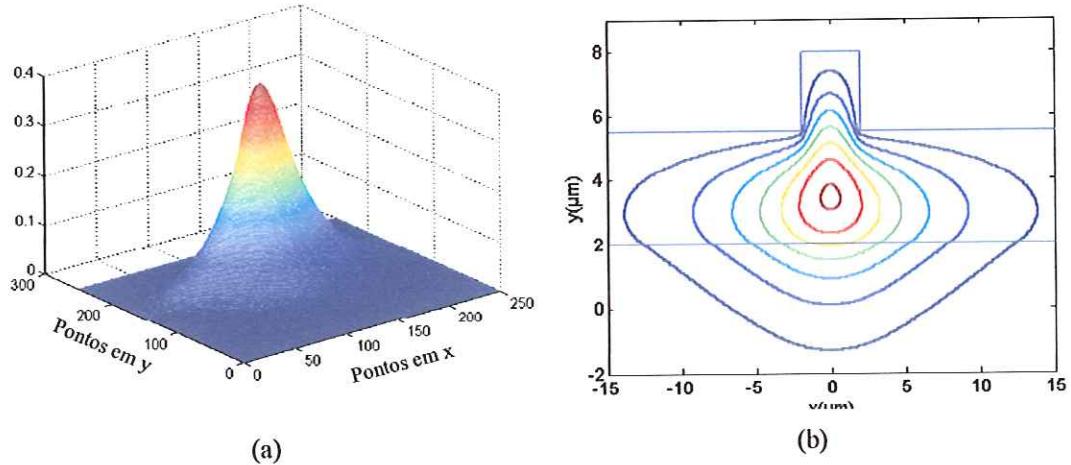


FIGURA 3. 19-(a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente  $H_y$  utilizando Padé (1,1).

A TABELA 3. 4 apresenta um resumo dos erros percentuais encontrados nesta seção para os aproximantes de Padé de ordem (1,0) e (1,1) em relação aos valores de *benchmarks* disponíveis na literatura para a estrutura 3. Observe que em todos os casos listados, os valores obtidos pelo formalismo proposto neste trabalho apresentam uma ótima concordância em relação aos *benchmarks*.

TABELA 3. 4: Erro relativo entre os valores do  $n_{eff}$  encontrados na literatura e os valores obtidos para o Padé (1,0) e (1,1) utilizando a formulação  $H_y$  e  $H_x$

Estrutura 1	Literatura	Padé (1,0)	Erro (%)	Padé(1,1)	Erro (%)
$H_y$	3,4368121*	3,4368412	0,000848	3,4368498	0,001098
$H_x$	3,4367729*	3,4367840	0,000323	3,4368075	0,001007

\* Referência [34].

### 3.2 Análise de resultados para fibra tipo D.

#### Introdução

Esta seção apresenta os resultados numéricos obtidos para uma fibra óptica tipo D utilizando os aproximatantes de Padé de ordem (1,0) e ordem (1,1) para efeito de comparação. Os cálculos foram realizados tanto para modos TE (formulação  $H_y$ ) quanto para modos TM (formulação  $H_x$ ). Os parâmetros referentes à fibra são listados na TABELA 3.5. O objetivo é fornecer um parâmetro a mais na aferição do método proposto, investigando uma estrutura com geometria circular que vem encontrando cada vez mais aplicações, principalmente na área de sensores ópticos.

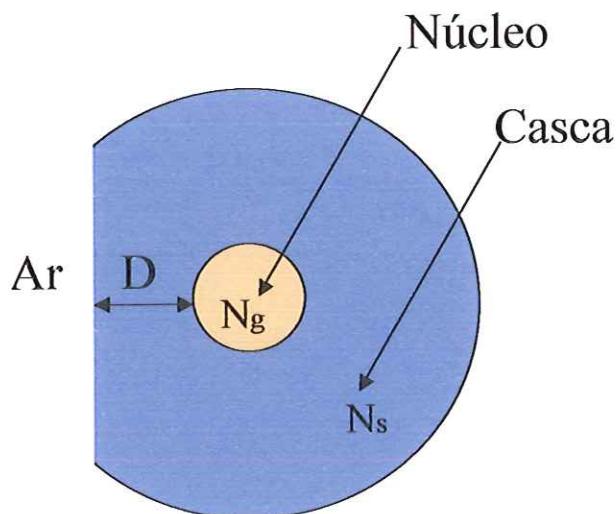


FIGURA 3. 20 – Seção transversal fibra tipo D.

TABELA 3.5: Parâmetros físicos e geométricos da fibra tipo D.

Estrutura	$N_g$	$N_s$	Raio ( $\mu\text{m}$ )	$D$ ( $\mu\text{m}$ )
Fibra D	1,46	1,456	2,0	0,0

#### 3.2.1 Resultados numéricos

Para a simulação da fibra tipo D, os parâmetros utilizados foram  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1 \mu\text{m}$ , distância de propagação 2,0 mm, e comprimento de onda

$\lambda = 0,6328 \mu m$ . As FIGURAS 3.21 a 3.23 ilustram tanto a distribuição quanto o contorno de campo para três situações distintas:  $D = 0,0 \mu m$ ,  $D = 0,5 \mu m$  e  $D = 1,0 \mu m$ , respectivamente. Estes resultados foram obtidos com a formulação  $H_y$  utilizando Padé (1,1).

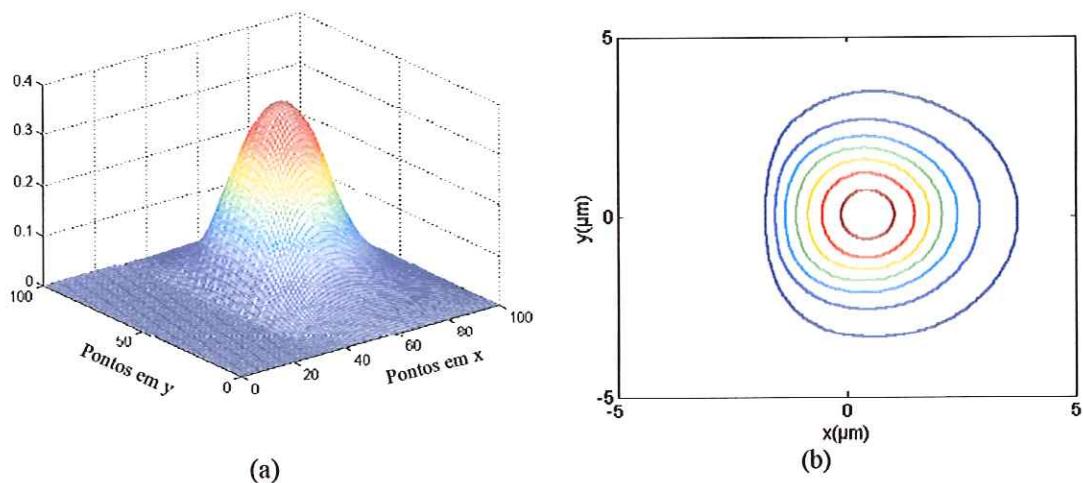
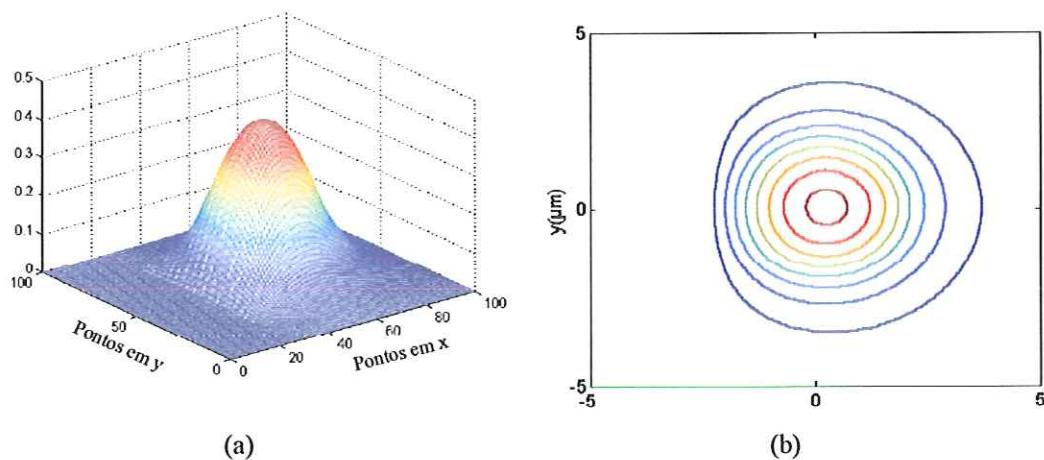


FIGURA 3.21 – (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente  $H_y$  para fibra tipo D, com  $D = 0,0 \mu m$ .



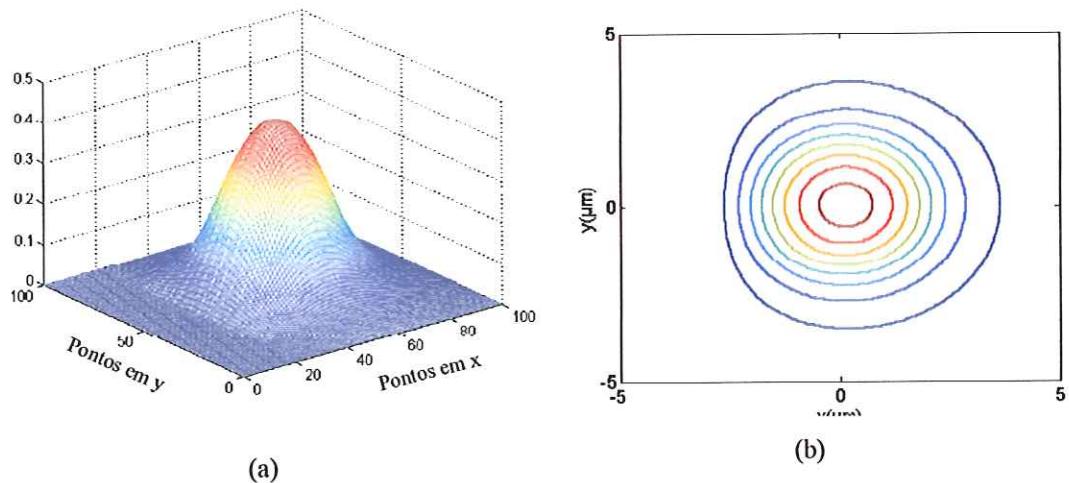


FIGURA 3.23 – (a) Distribuição de campo e (b) contorno de campo da componente  $H_y$  para fibra tipo D, com  $D = 1,0 \mu m$ .

As TABELAS 3.6 e 3.7 apresentam, respectivamente, a comparação entre os resultados obtidos com o formalismo paraxial e o de ângulo largo (proposto neste trabalho) com os disponíveis na literatura para uma fibra tipo D. Os resultados foram obtidos para as polarizações TE (formulação  $H_y$ ) e TM (formulação  $H_x$ ) tendo a espessura D, que controla a interação do campo óptico com o núcleo da fibra com o ar, como parâmetro. Estes resultados apresentam, mais uma vez, uma ótima concordância com os valores disponíveis na literatura.

TABELA 3.6: Comparação do índice efetivo para fibra tipo D entre Padé (1,0) e valores de referência.

Referências	Fibra D					
	$D = 0,0 (\mu m)$		$D = 0,5 (\mu m)$		$D = 1,0 (\mu m)$	
	$H_y$	$H_x$	$H_y$	$H_x$	$H_y$	$H_x$
Padé (1,0)	1,457440	1,457476	1,457645	1,457665	1,457745	1,457756
Literatura *	1,457484	1,457506	1,457676	1,457688	1,457770	1,457776
Erro (%)	0,00301	0,00205	0,00212	0,00157	0,00171	0,00137

\* Referência [29].

TABELA 3.7: Comparação do índice efetivo para fibra tipo D entre Padé (1,1) e valores de referência.

Referências	Fibra D					
	D = 0,0 ( $\mu\text{m}$ )		D = 0,5 ( $\mu\text{m}$ )		D = 1,0 ( $\mu\text{m}$ )	
	H <sub>y</sub>	H <sub>x</sub>	H <sub>y</sub>	H <sub>x</sub>	H <sub>y</sub>	H <sub>x</sub>
Padé (1,1)	1,457441	1,457476	1,457645	1,457665	1,457745	1,457756
Litertura *	1,457484	1,457506	1,457676	1,457688	1,457770	1,457776
Erro (%)	0,00295	0,00205	0,00212	0,00157	0,00171	0,00137

\* Referência [29].

### 3.3 Comparação entre o formalismo proposto e o Método do Índice Efetivo.

O objetivo desta seção é mostrar a limitação de certos métodos analíticos, neste caso o método do índice efetivo (MIE), na análise de estruturas guias de ondas com confinamento lateral de campo, tais como os guias de onda com geometria tipo *rib*. Um exemplo marcante desta limitação está na necessidade de se ter sempre modos acima do corte nas regiões definidas fora do *rib* e na dificuldade em se obter distribuições confiáveis de campo eletromagnético. O MIE pode ser explicado resumidamente com o auxílio da FIGURA 3.24. As três regiões que compõem o guia *rib*, Fig. 3.24(a), são decompostas em três guias planares isolados como mostra a Fig. 3.24(b). Resolvendo estes três guias de ondas para modos TE obtém-se três índices efetivos correspondendo a cada uma das regiões do guia *rib*. Estes três índices efetivos são agora utilizados para compor um quarto guia de onda cuja espessura é definida pela largura do *rib*, Fig. 3.24(c). Assim, aplica-se agora a solução para modos TM e o que se obtém é o índice efetivo final para um guia de onda tipo *rib* para polarização TE. A análise para modos TM é obtida de maneira inversa à de modos TE.

As TABELAS 3.8 e 3.9 listam os erros relativos percentuais obtidos para as três estruturas guias de onda com geometria tipo *rib* discutidas na seção 3.1 em termos dos aproximantes de Padé (1,0) e (1,1) e do MIE.

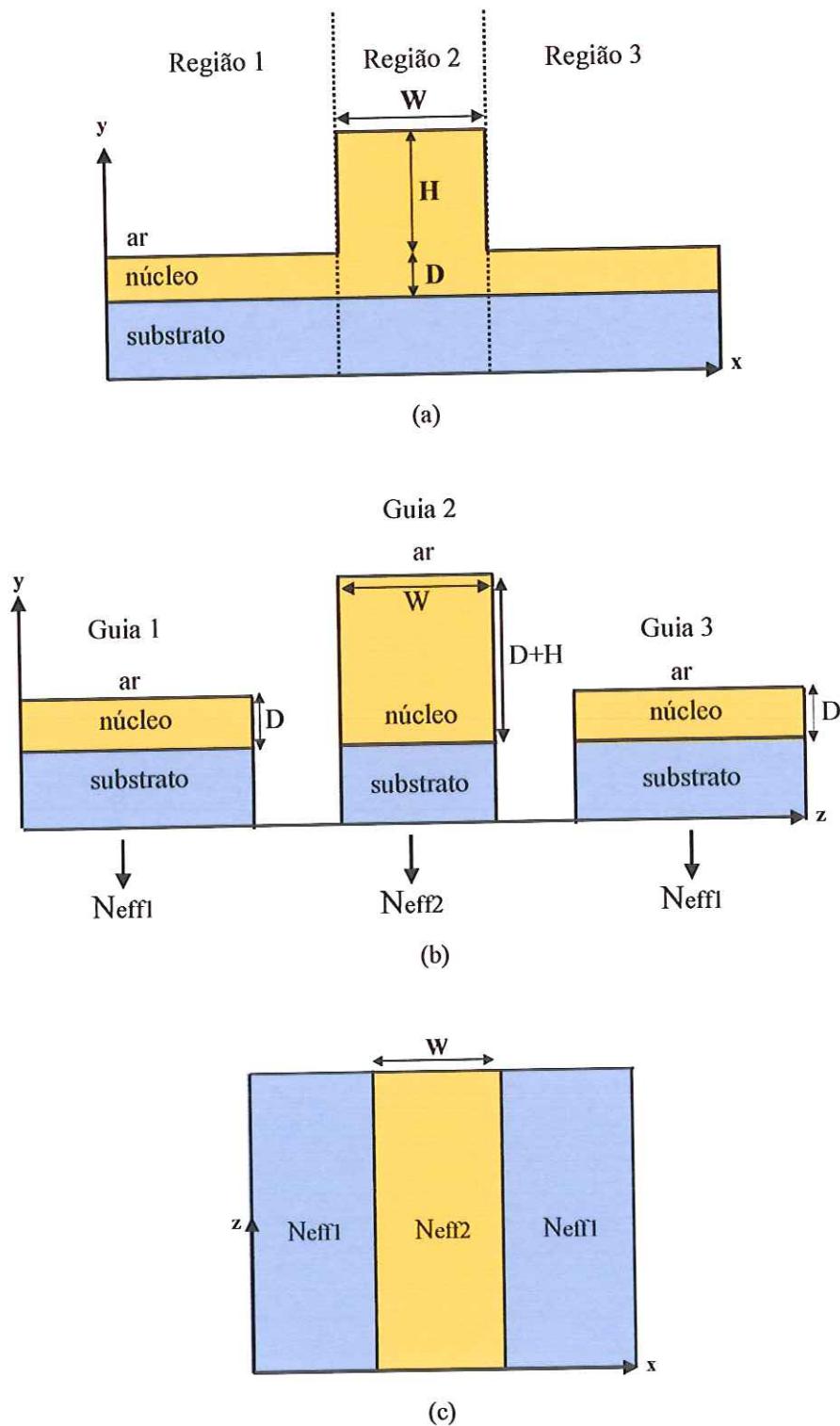


FIGURA 3.24 – Esquema representativo do método do índice efetivo (MIE). (a) as três regiões que compõe o guia *rib*, (b) três guias de ondas planares distintos e (c) guia de onda planar de 3 camadas simétrico.

TABELA 3.8: Erro percentual do MIE e do Padé(1,0) com respeito aos *benchmarks* da literatura.

Estruturas	TE		TM	
	Erro (%)		Erro (%)	
	Padé (1,0)	MIE	Padé (1,0)	MIE
1	0,000205	?	0,0002019	?
2	0,004822	0,00113	0,001988	0,0046
3	0,000848	0,0168	0,000323	0,0166

TABELA 3.9: Erro percentual do MIE e do Padé(1,1) com respeito aos *benchmarks* da literatura.

Estruturas	TE		TM	
	Erro (%)		Erro (%)	
	Padé (1,1)	MIE	Padé (1,1)	MIE
1	0,0000362	?	0,000381	?
2	0,00503	0,00113	0,00213	0,0046
3	0,001098	0,0168	0,001007	0,0166

Como pode ser observado nas TABELAS 3.8 e 3.9, o método do índice efetivo não é um método eficiente na análise de determinadas estruturas. Isto pode ser visto com base na estrutura 1 que, apesar de possuir um elevado confinamento modal, apresenta o modo cortado nos guias de ondas planares definidos pelas regiões laterais ao *rib*. Na estrutura 2 o erro entre o formalismo proposto e o MIE estão na mesma ordem de grandeza uma vez que esta estrutura apresenta um alto confinamento modal e uma espessura elevada do núcleo do guia de onda. Embora o MIE apresente bons resultados para o índice efetivo, ele falha na representação correta da distribuição de campo óptico. No caso da estrutura 3, o erro apresentado pelo MIE é no mínimo dez vezes maior do que o erro produzido pelo formalismo proposto neste trabalho em virtude do fraco confinamento modal. Além disso, a utilização do MIE não permite a obtenção precisa das distribuições de campo destas estruturas o que limita sua utilização à análise de dispositivos ópticos muito simples.

### 3.4 Resumo e conclusão Parcial

A influência dos parâmetros analisados neste capítulo, tais como: número de iterações, passo de propagação longitudinal, passo de discretização transversal, largura da gaussiana inicial, e índice de referência, sobre o cálculo do índice efetivo modal seguiram o

mesmo comportamento para as três estruturas em ambas as formulações TE ( $H_y$ ) e TM ( $H_x$ ). Uma breve discussão sobre como cada um desses parâmetros influencia nas simulações é apresentado abaixo.

**a) Número de iterações:**

Analizando-se os resultados das simulações para as três estruturas, foi possível concluir que o número de iterações necessários para que ocorra a convergência numérica está diretamente relacionado ao confinamento modal da estrutura. No caso da estrutura 1, que possui um confinamento modal muito alto, poucas iterações são suficientes para a convergência numérica. No caso da estrutura 2, que possui um confinamento modal mais fraco em relação ao da estrutura 1, são necessários um número maior de iterações. A estrutura 3, por sua vez, possui um confinamento modal ainda mais fraco e, consequentemente, requer um número muito mais elevado de iterações para atingir a convergência. Outra observação muito importante é que a formulação utilizando Padé (1,1) necessita praticamente da metade do número de iterações para que ocorra a convergência numérica quando comparada ao Padé (1,0). Isto se deve ao fato do aproximante de Padé de ordem (1,1) representar a equação de onda de Helmholtz com uma melhor precisão, produzindo assim um menor “esforço” computacional. Sugere-se como critério de parada para ambas as formulações tanto paraxial quanto de ângulo largo, que a diferença do índice efetivo modal atual e o índice efetivo modal anterior seja inferior a (1E-8), ou seja:

$$|n_{eff}(atual) - n_{eff}(anterior)| < 0,00000001$$

**b) Passo de propagação longitudinal  $\Delta z$ :**

Na simulação das três estruturas pode-se observar que ocorre divergência numérica no valor obtido para o índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , quando são utilizados passos de propagação  $\Delta z$  muito altos. Valores elevados de  $\Delta z$  fazem com que a onda se difrete mais acentuadamente. Assim, a discretização utilizada não é mais capaz de representar devidamente a variação do campo, ocasionando erros numéricos. Outro fato importante a ser observado, é a possibilidade de utilização de uma faixa de valores para  $\Delta z$  para a mesma distância de propagação sem que ocorra divergência numérica. Por exemplo, para a estrutura 1 o limite máximo para o passo de propagação longitudinal sem acarretar divergência para as formulações  $H_y$  e  $H_x$  deve ser,  $\Delta z=1,0 \mu m$  e  $\Delta z=1,5 \mu m$  respectivamente. Para a estrutura 2 o valor máximo a ser utilizado as formulações  $H_y$  e  $H_x$  deve ser,  $\Delta z=1,5 \mu m$  e

$\Delta z=0,5 \mu m$  respectivamente. No caso da estrutura 3 em ambas as formulações  $H_y$  e  $H_x$  o limite máximo para o passo de propagação longitudinal deve ser  $\Delta z=3,0 \mu m$ . Visto que as simulações realizadas utilizaram passo de propagação longitudinal de  $\Delta z=0,1 \mu m$  e com base nas informações acima citadas, conclui-se que o “esforço” computacional realizado pode ser reduzido sensivelmente com o uso de um passo de propagação longitudinal,  $\Delta z$ , sem acarretar divergência numérica.

**c) Passo de discretização transversal:**

Outro parâmetro muito importante a ser analisado é o passo de discretização transversal. Este parâmetro apresentou uma forte influência no valor obtido para o índice efetivo modal,  $n_{eff}$ , para as três estruturas investigadas. Passos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  mais elevados resultam em um maior erro de truncamento, levando a soluções numéricas imprecisas e, consequentemente, à divergência numérica. Isso acontece quando a discretização utilizada não é capaz de representar devidamente a variação do campo dentro do domínio computacional estabelecido. Com base na análise dos resultados da seção 3.1, sugere-se a adoção de um número mínimo de pontos de discretização transversal por comprimento de onda ,

$$\lambda_0 = 1,55 \mu m, \text{ para cada estrutura como sendo } \frac{\lambda_0}{\Delta x}, \text{ ou seja:}$$

$$\text{Pontos} \geq \frac{\lambda_0}{\Delta x} \Rightarrow \text{Pontos} \geq \frac{1,55 \mu m}{0,08 \mu m} \Rightarrow \text{Pontos} \geq 19,375 \quad (\text{estrutura 1})$$

$$\text{Pontos} \geq \frac{\lambda_0}{\Delta x} \Rightarrow \text{Pontos} \geq \frac{1,55 \mu m}{0,125 \mu m} \Rightarrow \text{Pontos} \geq 12,4 \quad (\text{estrutura 2})$$

$$\text{Pontos} \geq \frac{\lambda_0}{\Delta x} \Rightarrow \text{Pontos} \geq \frac{1,55 \mu m}{0,2 \mu m} \Rightarrow \text{Pontos} \geq 7,75 \quad (\text{estrutura 3})$$

Portanto, quanto maior o confinamento modal produzido pela estrutura, maior a necessidade de número de pontos de discretização transversal por comprimento de onda,  $\lambda_0$ , a fim de representar corretamente a variação do campo na estrutura.

**d) Largura da gaussiana de excitação inicial:**

Baseado nos resultados mostrados na seção 3.1 é possível concluir que a convergência numérica, investigada aqui em termos do valor do índice efetivo modal  $n_{eff}$ , sofre influência da largura da gaussiana de excitação inicial. Esta influência está diretamente

relacionada às dimensões da estrutura analisada. Por exemplo, a estrutura 1, por apresentar menores dimensões relativas à espessura do núcleo e à largura do *rib*, apresenta divergência numérica com o aumento da largura da gaussiana. Quanto maior a gaussiana, mais energia é perdida para o ar e substrato resultando em instabilidade ou imprecisão nos resultados. No caso da estrutura 2, que apresenta um núcleo espesso e uma grande largura do rib, verificou-se uma sensível diminuição da influência da largura da gaussiana na convergência do método. Finalmente, para a estrutura 3, a influência do valor da largura da gaussiana na convergência numérica é praticamente desprezível em virtude desta estrutura apresentar uma grande área de seção transversal. Um bom compromisso na escolha da largura da gaussiana de excitação consiste em adotar o seu valor como sendo a metade da largura do *rib*, ou seja  $\frac{W}{2}$ , no caso de estruturas tipo *rib*.

**e) Índice de referência:**

Foi observado nas simulações realizadas para as três estruturas do tipo *rib* que a convergência do método é pouco afetada pela escolha do índice de referência,  $n_0$ . Este comportamento se deve à utilização do cálculo adaptativo de  $n_0$ , ou seja, ele é atualizado a cada passo de propagação de modo a acelerar a convergência do método. Para a escolha do índice de referência,  $n_0$ , uma faixa de valores ótimos pode ser estabelecida como sendo  $n_s < n_0 < n_g$ , ou de maneira simplificada pode ser escolhido como sendo uma média entre o

$$\text{índice de refração do núcleo e o índice de refração do substrato, ou seja, } n_0 = \frac{n_g + n_s}{2}.$$

O valor adotado para o parâmetro de controle do esquema de diferenças finitas foi  $\alpha = 0,5$  (esquema de Cranck-Nicholson), o qual torna o método proposto incondicionalmente estável. A condição de contorno que foi aplicada nos limites da janela computacional com a finalidade de evitar reflexões indesejadas para dentro da janela computacional, foi a de camadas perfeitamente casadas (PML). Em todas as simulações realizadas os valores obtidos para os aproximantes de Padé de ordem (1,0) e ordem (1,1) apresentaram uma excelente concordância em relação aos *benchmarks* disponíveis na literatura. Deve ser enfatizando o fato de que a convergência numérica utilizando aproximantes de Padé de ordem (1,1) é mais rápida do que os aproximantes de ordem (1,0), visto que o primeiro representa uma melhor aproximação para a equação de onda semivetorial de Helmholtz.

## Capítulo 4

### Conclusões

Neste trabalho uma nova abordagem para o emprego do FD-BPM na solução da equação de onda semivetorial de Helmholtz foi proposta. A equação de onda semivetorial de Helmholtz foi desenvolvida em termos das componentes transversais do campo magnético (Formulação H) e do campo elétrico (Formulação E). Os aproximantes de Padé de ordem (1,0), limite paraxial, e ordem (1,1), ângulo largo, juntamente com a técnica ADI foram inseridos no mesmo formalismo para a solução da equação de onda semivetorial de Helmholtz a fim de possibilitar o estudo de estruturas complexas com baixo “esforço” computacional.

A validação do método proposto neste trabalho foi realizada por meio do formalismo para o campo magnético (formulação H) na análise de modos TE e TM. A aferição do formalismo foi feita por meio da simulação de três estruturas guias de onda tipo *rib*. Para cada estrutura foi realizada uma análise de sensitividade do formalismo à variação de parâmetros numéricos tais como: passo de propagação longitudinal  $\Delta z$ , passo de discretização transversal, largura da gaussiana de excitação, número de iterações, e índice de referência,  $n_0$ . Todos estes parâmetros foram analisados em função do índice efetivo modal,  $n_{eff}$ . Adicionalmente, também foram realizadas simulações para a fibra tipo-D a fim de garantir a eficácia do método na análise de dispositivos ópticos variados com vasto campo para aplicações. Os resultados obtidos com o método proposto foram comparados aos disponíveis em literatura, apresentando sempre uma ótima concordância em relação aos valores dos *benchmarks* comparados.

Como sugestão para trabalhos futuros sugerimos a aplicação do formalismo proposto neste trabalho na análise de estruturas inclinadas em relação à direção longitudinal de propagação. Um outro ponto também a ser investigado é a utilização do esquema Douglas generalizado na expansão dos operadores transversais em virtude deste permitir passos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  maiores em relação ao esquema Crank-Nicholson, sem contudo comprometer a precisão dos resultados.

## **Referências Bibliográficas**

- [1] FÄBERT, A.; et al. (2000). 7 Tb/s (176x40 Gb/s) Bidirecional Interleaved Transmission With 50 GHz Channel Spacing. *Proceedings of the European Conference on Optical Communications*, ECOC, post-deadline paper.
- [2] GREEN, P. (2001). Progress in Optical Networking, *IEEE Communications Magazine*, p. 54-61, Jan.
- [3] HIBINO, Y. (2000). Passive Optical Devices for Photonic Networks. *IEICE Transactions Communications*, v.E83-B, n.10, p.2178-90, Oct.
- [4] SADOT, D.; BOIMOVICH, E. (1998). Tunable optical Filters for Dense WDM Networks. *IEEE Communications Magazine*, p.50-55, Dec.
- [5] FEIT, M. D.; FLECK, J. A. (1978). Light Propagation in graded-index optical fibers. *Applied Optics*, v.17, n.24, p.3390-98, Dec.
- [6] ROEY, J. V.; DONK, J. V. D.; LAGASSE, P. E. (1981) . Beam-propagation method: analysis and assessment. *Journal of Optical Society of America*, v.71, n.7, p.803-10, Jul.
- [7] TERVONEN, A. (1995). Computer-aided design system for optical waveguide devices. *Optical Engineering*, v.34, n.9, p.2543-50, Sep.
- [8] ROLLAND, C.; ADAMS, D. M.; YEVICK D.; HERMANSSON B. (1990). Optimization of Strongly Guiding Semiconductor Rib Waveguide Y-Junctions. *IEEE Photonics Technology Letters*, v1.2., n.6, p.404-6, Jun.
- [9] YEVICK, D.; HERMANSSON, B. (1990). Efficient Beam Propagation Techniques. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.26, n.1, p.109-12, Jan.

- [10] CHUNG, Y.; DAGLI, N. (1990). Explicit Finite Difference Beam Propagation Method: application to semiconductor rib waveguide Y- junction analysis. *Electronics Letters*, v.27, n.23, p.711-12, Nov.
- [11] CHUNG, Y.; DAGLI, N. (1990). An Assessment of Finite Difference Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.26, n.8, p.1335-39, Aug.
- [12] CHUNG, Y.; DAGLI, N. (1991). Analysis of Z-Invariant and Z-Variant Semiconductor Rib Waveguides by Explicit Finite Difference Beam Propagation Method with Nonuniform Mesh Configuration. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.27, n.10, p. 2296-305, Oct.
- [13] YEVICK, D.; HERMANSSON, B. (1989). New Formulations of the Matrix Beam Propagation Method: Application to Rib Waveguides. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.25, n.2, p.221-29, Feb.
- [14] ROBERTSON, M. J.; RITCHIE, S.; DAYAN, P. (1985). Semiconductor waveguides: analysis of optical propagation in single rib structures and directional couplers. *IEE Proceedings*, v. 132, Pt. J, n.6, p.336-42, Dec.
- [15] CHUNG, Y.; DAGLI, N. (1990). An Assessment of Finite Difference Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.26, n.8, p.1335-39, Aug.
- [16] SPLETT, A.; MAJD, M.; PETERMANN, K. (1991). A novel Beam Propagation Method for Large Refractive Index Steps and large Propagation Distances. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.3, n.5, p.466-68, May.
- [17] HOEKSTRA, H. J. W. M.; Krijnen, G. J. M.; LAMBECK, P. V. (1992). Efficient Interface Conditions for the Finite Difference Beam Propagation Method. *Journal of Lightwave Technology*, v.10, n.10, p.1352-55, Oct.
- [18] RAHMAN, B. M .A.; DAVIES, J. B. (1985). Vector-H Finite Element solutions of GaAs/GaAlAs Rib Waveguide. *IEE Proceedings*, v.132, Pt. J, n.6, p.349-53, Dec.

- [19] HUANG, W. P. ; XU, C. L. ; CHAUDHURI, S. K. (1991). A vector Beam Propagation Method for Guided-Wave Optics. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.3, n.10, p.910-15, Oct.
- [20] HUANG, W. P.; XU, C. L.; CHAUDHURI, S. K. (1991). A Vector Beam Propagation Method Based on H Fields. *IEEE Transactions Photonics Technology Letters*, v.3, n.12, p.1117-20, Dec.
- [21] CHUNG, Y.; DAGLI, N. (1991). Explicit Finite Difference Vectorial Beam Propagation Method. *Electronics Letters*, v.27, n.23, p.2119-21. Nov.
- [22] HUANG, W. P.; XU, C. L.; CHAUDHURI, S. K. (1992). A Finite-Difference Vector Beam Propagation Method for Three-Dimensional Waveguide Structures. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.4, n.2, p.148-51, Feb.
- [23] HUANG, W. P.; XU, C. L.; CHU, S. T.; CHAUDHURI, S. K. (1992). The Finite-Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assessment. *Journal of Lightwave Technology*, v., n.3, p.295-305, Mar.
- [24] LEE, P. C.; SCHULZ, D.; VOGES, E. (1992). Three- Dimensional Finite Difference Beam Propagation Algorithms for Photonic Devices. *Journal of Lightwave Technology*, v.10, n.12, p.1832-38, Dec.
- [25] HUANG, W. P .; XU, C. L. (1993). Simulation of Three-Dimensional Optical Waveguides by Full-Vector Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.29, n.10, p.2639-48, Oct.
- [26] XU, C. L.; HUANG, W. P.; STERN, M. S.; CHAUDHURI, S.K (1994). Full- Vectorial Mode Calculations by finite Difference Method. *IEE Proc. Optoelectron.*, v.141, n.5, p.281-6, Oct.
- [27] KRIEZIS, E. E.; PAPAGIANNAKIS, A. G. (1997). A Three-Dimensional Full Vectorial Beam Propagation Method for z-Dependent Structures. . *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.33, n.5, p.883-90, May.

- [28] YAMAUCHI, J.; TAKAHASHI, G.; NAKANO, H. (1998). Full-Vectorial Beam-Propagation Method Based on the McKee-Mitchell Scheme with Improved finite-Difference Formulas. *Journal of Lightwave Technology*, v.16, n.12, p.2458-64, Dec.
- [29] HSUEH, Y. L; YANG, M. C; CHANG, H. C. (1999). Three-Dimensional Noniterative Full-Vectorial Beam Propagation Method Based on the Alternating Direction Implicit Method. *Journal of Lightwave Technology*, v.17, n.11, p.2389-97, Nov.
- [30] VINCETTI, L.; CUCINOTTA, A.; SELLERI, S. (2000). Three-Dimensional Finite-Element Beam Propagation Method: Assessments and Developments. *Journal Optical Society of America*, v.17, n.6, p.1124-31, Jun.
- [31] SCHULZ, N. (1986). Finite-Difference Analysis of Integrated Optical Waveguides without Spurious Mode Solutions. *Electronics Letters*, v.22, n.18, p.963-65, Aug.
- [32] BIERWIRTH, K.; SCHULZ, N.; ARNDT, F. (1986). Finite-Difference Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides Structures. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v.34, n.11, p.1104-14, Nov.
- [33] STERN, M. S. (1988). Semivectorial Polarised Finite Difference Method for Optical Waveguides with Arbitrary Index Profiles. *IEE Proceedings*, v.135, Pt. J, n.1, p.56-63, Feb.
- [34] STERN, M. S. (1988). Semivectorial Polarised H Field Solutions for Dielectric Waveguides with Arbitrary Index Profiles. *IEE Proceedings*, v.135, Pt. J, n.5, p.56-63, Oct.
- [35] STERN, M. S. (1991). Rayleigh Quotient Solution of Semivectorial Field Problems for Optical Waveguides with Arbitrary Index Profiles. *IEE Proceedings*, v.138, Pt. J, n.3, p.185-90, Jun.
- [36] LIU, P. L.; LI, B. J. (1991). Study of Form Birefringence in Waveguide Devices Using the Semivectorial Beam Propagation Method. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.3, n.10, p.913-15, Oct.

- [37] LIU, P. L.; LI, B. J. (1992). Semivectorial Beam-Propagation Method for Analyzing Polarized Modes of Rib Waveguides. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.28, n.4, p.778-82, Apr.
- [38] LIU, P. L.; LI, B. J. (1993). The Semivectorial Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.29, n.4, p. 1205-11, Apr.
- [39] LIU, P. L.; LI, B. J. (1993). Semivectorial Helmholtz Beam Propagation by Lanczos Reduction. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, n.8, p. 2.385-89, Aug.
- [40] YAMAUCHI, J.; SHIBAYAMA, O. S.; UCHIYAMA, O.; NAKANO, H. (1996). Improved Finite-Difference Beam-Propagation Method Based on the Generalized Douglas Scheme and Its Application to Semivectorial Analysis. *Journal of Lightwave Technology*, v.14, n.10, p.2401-406, Oct.
- [41] WIJNANDS, F.; RASMUSSEN, T.; HOEKSTRA, H. J. W. M.; POVLSEN, J. H.; RIDER, R. M. (1997). Efficient Semivectorial Mode Solvers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v.33, n.3, p.367-74, Mar.
- [42] YAMAUCHI, J.; SEKIGUCHI, M.; UCHIYAMA, O.; SHIBAYAMA, J.; NAKANO, H. (1997) Modified Finite-Difference Formula for the Analysis of Semivectorial Modes in Step-Index Optical Waveguides. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.9, n.7, p.961-3, Jul.
- [43] DENG, H.; JIN, G. H.; HARARI, J.; VILCOT, J. P. DECOSTER, D. (1998). Investigation of 3-D Semivectorial Finite-Difference Beam Propagation Method for Bent Waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, v.16, n.5, p.915-22, May.
- [44] YAMAUCHI, J.; TAKANASHI, G.; NAKANO, H. (1998). Modified Finite-Difference formula for Semivectorial H-Field Solutions of Optical Waveguides. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.10, n.8, p.1127-29, Aug.
- [45] MITOMI, O.; KASAYA, K. (1998). A Improved Semivectorial Beam Propagation Method Using a Finite-Element Scheme. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.10, n.12, p.1754-56, Dec.

- [46] RIVERA, M. (1999). Comments on “Investigation of 3-D Semivectorial Finite-Difference Beam Propagation Method for bent waveguides”. *Journal of Lightwave Technology*, v.17, n.6, p.1103-09, Jun.
- [47] YAMAUCHI, J.; NAKAMURA, S.; NAKANO, H. (2000). Application of Modified Finite-Difference Formulas to the Analysis of z-Variant Rib Waveguides. *IEEE Photonics Technology Letters*, v.12, n.8, p.1001-03, Aug.
- [48] CUMINATO, J. A. (1999). Discretização de Equações Diferenciais Parciais, Técnicas de Diferenças Finitas. *Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo Campus de São Carlos*, p.97-100, Out.
- [49] ROACHE, P. J. Computational Fluid Dynamics. *Hermosa Publishers*, p.91-95
- [50] HADLEY, G. R. (1992). Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators. *Optics Letters*, vol.17, n.20, p. 1426-28, Oct.
- [51] HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. (1994). Simple Nonparaxial Beam-Propagation Method for Integrated Optics. *Journal of Lightwave Technology*, vol.12, n.4, p.644-49, Apr.
- [52] YEVICK, D.; GLASNER, M. (1990). Forward Wide-Angle Light Propagation in Semiconductor Rib Waveguides. *Optics Letters*, v.15, n.3, p.173-76, Feb.
- [53] SCARMOZZINO, I. I.; OSGOOD, R. M. (1996). Investigation of Padé Approximant-Based Wide-Angle Beam Propagation Method for Accurate Modeling of Waveguiding Circuits. *IEEE Journal Lightwave Technology*, v.14, n.12, p.2813-22, Dec.
- [54] LEE, P. C.; VOGES, E. (1994). Three-Dimensional Semi-Vectorial Wide-Angle Beam Propagation Method. *Journal of Lightwave Technology*, v.12, n.2, p.215-25, Feb.

- [55] PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING W. T. (1986). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. *Cambridge England: Cambridge Univ. Press*, p.660-67.
- [56] MÄRZ, R. (1994). Integrated Optics: Design and Modeling. *Artech House*, Boston London, Cap.3, p.45-47.
- [57] HUANG, W.; HAUS, H. (1990). Analysis of Buried-Channel Waveguides and Couplers: Scalar Solution and Polarization Correction. *Journal of Lightwave Technology*, vol.8, n.5, p.642-48, May.
- [58] HUANG, W.; HAUS, H. (1991). A simple Variational Approach to Optical Rib Waveguide. *Journal of Lightwave Technology*, vol.9, n.1, p.642-48, Jan.
- [59] JIMÉNEZ, D.; RAMÍREZ, C.; MURANO, F. P.; GUZMÁN, A. (1999). Implementation of Berénger layers as boundary conditions for the beam propagation method applications to integrated waveguides. *Optics Communications*, 159, p.43-48, Jan.

## Apêndice A

### DERIVAÇÃO DO MÉTODO SEMIVETORIAL - FORMULAÇÃO E<sub>x</sub>

A equação de onda semivetorial de Helmholtz é deduzida a partir das equações de Maxwell como segue:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}, \text{ como } \epsilon = n^2 \epsilon_0, \quad \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 n^2 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\text{Sabendo que } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ e } \epsilon = \epsilon_0 n^2$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 n^2 \vec{E}) = 0 \text{ assim,}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0 \text{ e } \nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \text{ tem-se:}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \tag{A.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 n^2 \vec{E} \tag{A.2}$$

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0 \tag{A.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{A.4}$$

Aplicando o operador  $\nabla \times$  em (A.1):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu_0 (\nabla \times \vec{H})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -j\omega\mu_0 (j\omega\epsilon_0 n^2 \vec{E}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n^2 \vec{E}$$

$$\text{como } k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = k^2 n^2 \vec{E} \quad (A.5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \cdot \vec{E} = k^2 n^2 \vec{E}$$

$\nabla^2 \cdot \vec{E} + k^2 n^2 \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E})$ , as componentes transversais de (A.5) reduzem-se a

$$\nabla^2 \cdot \vec{E}_t + k^2 n^2 \vec{E}_t = \nabla_t \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{E}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_z \right) \quad (A.6)$$

$$\nabla^2 \cdot \vec{E}_t + k^2 n^2 \vec{E}_t = \nabla_t \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{E}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_z \right)$$

De (A.3),  $\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0$ , logo:

$$\nabla_t (n^2 \vec{E}_t) + \frac{\partial}{\partial z} (n^2 \vec{E}_z) = 0$$

resolvendo a derivada em z.

$$\nabla_t (n^2 \vec{E}_t) + n^2 \frac{\partial}{\partial z} (\vec{E}_z) + \vec{E}_z \frac{\partial}{\partial z} (n^2) = 0 \quad (A.7)$$

Se o índice de refração varia lentamente em z, é possível desprezar o termo  $\vec{E}_z \frac{\partial}{\partial z} (n^2)$  em (A.7), o que resulta em:

$$\nabla_t (n^2 \vec{E}_t) = -n^2 \frac{\partial}{\partial z} (\vec{E}_z) \quad (A.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\vec{E}_z) = -\frac{1}{n^2} \nabla_t (n^2 \vec{E}_t)$$

Substituindo (A.8) em (A.6).

$$\nabla \cdot \vec{E}_t + k^2 n^2 \vec{E}_t = \nabla_t \cdot (\nabla_t \vec{E}_t - \frac{1}{n^2} \nabla_t (n^2 \vec{E}_t)) \quad (A.9)$$

Rescrevendo o lado direito de (A.9).

$$\begin{aligned}
LD &= \nabla_t \cdot (\nabla_t \vec{E}_t) - \nabla_t \left( \frac{1}{n^2} \nabla_t (n^2 \vec{E}_t) \right) \\
\nabla_t \cdot (\nabla_t \vec{E}_t) &= \nabla_t \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (E_x + E_y) \right] = \nabla_t \left[ \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] \\
&= \left( \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = \vec{x} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \vec{x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \\
-\nabla_t \left( \frac{1}{n^2} \nabla_t (n^2 \vec{E}_t) \right) &= -\nabla_t \left[ \frac{1}{n^2} \left( \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (n^2 E_x \vec{x} + n^2 E_y \vec{y}) \right] \\
&= -\nabla_t \left[ \left( \vec{x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (n^2 E_x \vec{x} + n^2 E_y \vec{y}) \right] \\
&= -\nabla_t \left[ \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x + \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y \right) \right] \\
&= - \left[ \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x + \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y \right]
\end{aligned}$$

Então o lado direito de (A.9), torna-se:

$$\begin{aligned}
LD &= \vec{x} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \vec{x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x - \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y - \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x \\
&\quad - \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y
\end{aligned}$$

Resolvendo o lado esquerdo de (A.9).

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \cdot \vec{E}_t + k^2 n^2 \vec{E}_t &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot (\vec{x} \vec{E}_x + \vec{y} \vec{E}_y) + k^2 n^2 (\vec{x} \vec{E}_x + \vec{y} \vec{E}_y) \\
LE &= \vec{x} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \vec{x} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \vec{x} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \vec{y} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \vec{x} k^2 n^2 E_x + \vec{y} k^2 n^2 E_y
\end{aligned}$$

Tomando-se apenas as componentes na direção  $x$  do LD e LE de (A.9), tem-se:

$$\vec{x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x + \vec{x} k^2 n^2 E_x - \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E_y + \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E_x + \vec{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y = 0$$

Separando as componentes  $E_x$  e  $E_y$  da equação acima em lados opostos, resulta:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 + k^2 n^2 \right) E_x = \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 \right) E_y \quad (\text{A.10})$$

O termo entre parêntesis do lado direito da equação (A.10) representa o acoplamento cruzado entre as componentes  $E_x$  e  $E_y$  do campo. Em geral, este acoplamento é fraco e pode ser desprezado, resultando em:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 + k^2 n^2 \right) E_x = 0 \quad (\text{A.11})$$

A equação (A.11) representa a equação semivetorial de Helmholtz. Em termos de operadores, tem-se:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + L_x + L_y + k^2 n^2 \right) E_x = 0$$

onde:

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2$$

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Suponha, agora, que o campo  $E_x$  apresenta a seguinte dependência em  $z$ :  $E_x = E e^{-jkn_0 z}$ , onde  $n_0$  é um índice de referência. Com isso, a derivada em relação a  $z$  pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (E e^{-jkn_0 z}) &= \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - jkn_0 E e^{-jkn_0 z} \\ \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - jkn_0 E e^{-jkn_0 z} &= A \\ \frac{\partial}{\partial z} (A) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} E e^{-jkn_0 z} - jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - k^2 n_0^2 E e^{-jkn_0 z} \end{aligned}$$

ou,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \frac{\partial^2}{\partial z^2} E e^{-jkn_0 z} - 2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - k^2 n_0^2 E e^{-jkn_0 z} \quad (\text{A.12})$$

Supondo variação lenta do campo na direção  $z$ , ou seja,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} E e^{-jkn_0 z} \right| \ll 2jkn_0 \left| \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} \right| \text{ resulta:}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - k^2 n_0^2 E e^{-jkn_0 z} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando (A.13) em (A.11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} E e^{-jkn_0 z} - 2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E e^{-jkn_0 z} - k^2 n_0^2 E e^{-jkn_0 z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E e^{-jkn_0 z} + k^2 n^2 E e^{-jkn_0 z} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} E - 2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E - k^2 n_0^2 E + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 E + k^2 n^2 E \right) e^{-jkn_0 z} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 + k^2 (n^2 - n_0^2) \right) E &= 0 \end{aligned}$$

Na forma de operadores:

$$2jkn_0 \frac{\partial}{\partial z} E = L_x E + L_y E + L_0 E \quad (\text{A.14})$$

onde,

$$\begin{aligned} L_y &= \frac{\partial}{\partial y} \\ L_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \\ L_0 &= (n^2 - n_0^2) k^2 \end{aligned}$$

A equação (A.14) representa a equação semivetorial de Helmholtz no limite paraxial.

A condição de contorno aplicada na fronteira da janela computacional é a de camadas perfeitamente casadas (PML) [58]. A PML é inserida dentro do formalismo por meio de sua aplicação nos operadores diferenciais transversais  $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  e  $L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}$ .

O termo  $L_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2$  representa o efeito de polarização devido à descontinuidade do índice refração nas interfaces entre os dielétricos. Aplicando a PML e expandindo estes operadores em diferenças finitas, resulta:

$$L_x = \delta \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2, \text{ onde } \delta = \left( \frac{1}{1 - \frac{j\sigma}{\omega\mu_0}} \right) \text{ sendo } \sigma \text{ o perfil de condutividade magnética.}$$

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \frac{\delta_{i+\frac{1}{2}}}{n_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_{i+\frac{1}{2}, j}^2 E_x \right)_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} - \frac{\delta_{i-\frac{1}{2}}}{n_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} n_{i-\frac{1}{2}, j}^2 E_x \right)_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)} \right]}{\Delta x} \quad (\text{A.15})$$

Os índices  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  e  $\left(i - \frac{1}{2}, j\right)$  representam a interface entre as células na direção  $x$  como pode ser observado na FIGURA A.1.

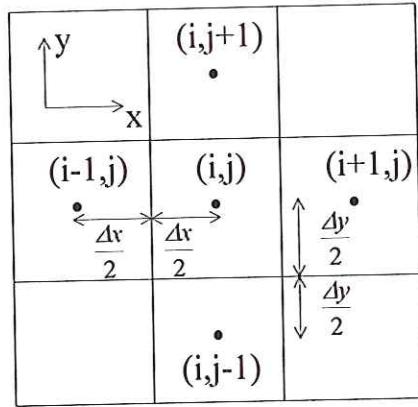


FIGURA A.1 - Diagrama de um esquema de diferenças finitas de cinco pontos em estrutura de células. O esquema de diferenças finitas de cinco pontos está centrado em  $(i,j)$  e cada célula possui índice de refração constante. A mudança no índice de refração ocorre somente na interface entre as células. Cada célula tem lados de comprimento  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

O termo  $L_x$  em (A.15) é derivado tomando meio passo antes e depois do ponto  $(i,j)$  ao longo da direção  $x$ , a fim de que a derivada esteja centrada no ponto  $(i,j)$ . A descontinuidade do índice de refração na interface dielétrica na direção  $x$  é representada por:

$$n^2_{\frac{i+1}{2},j} = \frac{n^2_{i+1,j} + n^2_{i,j}}{2} \text{ e } n^2_{\frac{i-1}{2},j} = \frac{n^2_{i,j} + n^2_{i-1,j}}{2}$$

A PML na interface dielétrica, considerando a direção  $x$ , é representada como:

$$\delta_{\frac{i+1}{2}} = \frac{\delta_{i+1} + \delta_i}{2} \text{ e } \delta_{\frac{i-1}{2}} = \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{2}.$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial x} E$ , onde  $E$  representa a componente de campo  $E_x$ ,

tem-se:

$$L_x = \delta_i \left[ \frac{\left( \delta_{i+1} + \delta_i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} n^2_{\frac{i+1}{2},j} E_x \right)_{\left( i, j \right)} - \left( \delta_i + \delta_{i-1} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} n^2_{\frac{i-1}{2},j} E_x \right)_{\left( i, j \right)}}{\Delta x} \right]$$

$$L_x = \delta_i \left[ \frac{\left( \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i) \left( n_{i+1,j}^2 E_{i+1,j} - n_{i,j}^2 E_{i,j} \right)}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} - \frac{(\delta_i + \delta_{i-1}) \left( n_{i,j}^2 E_{i,j} - n_{i-1,j}^2 E_{i-1,j} \right)}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right)}{\Delta x} \right]$$

$$L_x = \frac{\delta_i}{\Delta x^2} \left[ \left( \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i) \left( n_{i+1,j}^2 E_{i+1,j} - n_{i,j}^2 E_{i,j} \right)}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} - \frac{(\delta_i + \delta_{i-1}) \left( n_{i,j}^2 E_{i,j} - n_{i-1,j}^2 E_{i-1,j} \right)}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right) \right]$$

Expandindo a expressão acima,

$$L_x = \frac{\delta_i}{\Delta x^2} \left[ \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i) n_{i+1,j}^2}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} E_{i+1,j} - \left( \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i) n_{i,j}^2}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{(\delta_i + \delta_{i-1}) n_{i,j}^2}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right) E_{i,j} + \frac{(\delta_i + \delta_{i-1}) n_{i-1,j}^2}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} E_{i-1,j} \right]$$

Rearranjando o operador acima resulta na expressão final para o operador  $L_x$ :

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{n_{i-1,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} E_{i-1,j} - \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right) E_{i,j} \\ + \frac{n_{i+1,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} E_{i+1,j} \end{array} \right] \quad (\text{A.16})$$

onde :

$$a = \frac{n_{i-1,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} H_{i-1,j}$$

$$b = \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right)$$

$$c = \frac{n_{i+1,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)}$$

Aplicando a PML na derivada parcial na direção  $y$ .

$$L_y = \delta \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial y} E$ , onde  $E$  representa a componente de campo  $E_x$ ,

tem-se:

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \delta_{j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} E_x \right)_{\left( i, j+\frac{1}{2} \right)} - \delta_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} E_x \right)_{\left( i, j-\frac{1}{2} \right)} \right]}{\Delta y} \quad (\text{A.17})$$

Os índices  $\left( i, j+\frac{1}{2} \right)$  e  $\left( i, j-\frac{1}{2} \right)$  representam a interface entre as células na direção  $y$  como pode ser observado na FIGURA A1.

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{j+1} + \delta_j}{2} \quad \text{e} \quad \delta_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_j + \delta_{j-1}}{2}.$$

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \frac{(\delta_{j+1} + \delta_j) \left( \frac{\partial}{\partial y} H_y \right)_{\left( i, j+\frac{1}{2} \right)}}{2} - \frac{(\delta_j + \delta_{j-1}) \left( \frac{\partial}{\partial y} H_y \right)_{\left( i, j-\frac{1}{2} \right)}}{2} \right]}{\Delta y}$$

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \frac{(\delta_{j+1} + \delta_j) \left( \frac{E_{i,j+1} - E_{i,j}}{\Delta y} \right)}{2} - \frac{(\delta_j + \delta_{j-1}) \left( \frac{E_{i,j} - E_{i,j-1}}{\Delta y} \right)}{2} \right]}{\Delta y}$$

Expandindo a expressão acima,

$$L_y = \frac{\delta_j}{2\Delta y^2} \left[ (\delta_{j+1} + \delta_j) (E_{i,j+1} - E_{i,j}) - (\delta_j + \delta_{j-1}) (E_{i,j} - E_{i,j-1}) \right]$$

Rearranjando o operador acima resulta na expressão final para o operador  $L_y$ :

$$L_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{\delta_j (\delta_j + \delta_{j-1})}{2} E_{i,j-1} - \frac{\delta_j (\delta_{j+1} + 2\delta_j + \delta_{j-1})}{2} E_{i,j} + \frac{\delta_j (\delta_j + \delta_{j+1})}{2} E_{i,j+1} \right] \quad (\text{A.18})$$

onde :

$$d = \frac{\delta_j (\delta_j + \delta_{j-1})}{2}$$

$$e = \frac{\delta_j (\delta_{j+1} + 2\delta_j + \delta_{j-1})}{2}$$

$$f = \frac{\delta_j (\delta_j + \delta_{j+1})}{2}$$

## Apêndice B

### DERIVAÇÃO DO MÉTODO SEMIVETORIAL - FORMULAÇÃO $E_y$

O desenvolvimento da formulação  $E_y$  é feita analogamente ao que foi desenvolvido para a formulação  $E_x$  no apêndice A. Aplicando o operador  $\nabla \times$  em (A.1) e expandindo, resulta:

$$\nabla \cdot \vec{E}_t + k^2 n^2 = \nabla_t \cdot (\nabla_t \vec{E}_t - \frac{1}{n^2} \nabla_t (n^2 \vec{E}_t)) \quad (B.1)$$

Expandindo (B.1) da mesma forma como visto no apêndice A e tomando apenas as componentes de campo na direção  $y$ , obtém-se:

$$\vec{y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y + \vec{y} k^2 n^2 E_y - \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} E_x + \vec{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_y + \vec{y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 E_x = 0$$

Separando as componentes  $E_y$  e  $E_x$  em lados opostos da equação, resulta:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 + k^2 n^2 \right) E_y = \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 \right) E_x \quad (B.2)$$

O termo entre parêntesis no lado direito de (B.2) representa o acoplamento cruzado entre as componentes de campo. Em geral este acoplamento é fraco e pode ser desprezado, resultando em:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 + k^2 n^2 \right) E_y = 0 \quad (B.3)$$

A equação (B.3) representa a equação semivetorial de Helmholtz.

Suponha que a dependência em  $z$  para a componente  $E_y$  seja dada por:  $E_y = E e^{-jk n_0 z}$ , onde  $n_0$  é o índice de refração de referência. Expandindo (B.3) como no apêndice A , resulta:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 j k n_0 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2 + k^2 (n^2 - n_0^2) \right) E_y = 0 \quad (\text{B.4})$$

Na forma de operadores:

$$2 j k n_0 \frac{\partial}{\partial z} E_y = L_x E_y + L_y E_y + L_0 E_y \quad (\text{B.5})$$

onde,

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} n^2$$

$$L_0 = (n^2 - n_0^2) k^2$$

A equação (B.5) representa a equação semivetorial de Helmholtz no limite paraxial.

Novamente, a condição de contorno aplicada na fronteira da janela computacional é a de camadas perfeitamente casadas (PML) [58]. A PML é inserida dentro do formalismo

por meio de sua aplicação nos operadores diferenciais transversais  $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e

$$L_y = n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}. \quad \text{O termo } n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x \text{ da equação (B.5) representa o efeito de}$$

polarização devido à descontinuidade do índice de refração nas interfaces. Aplicando a PML na derivada parcial na direção  $y$  , resulta:

$$L_y = \delta n^2 \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}, \text{ onde } \delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{j\sigma}{\omega\mu_0} \end{pmatrix} \text{ sendo } \sigma \text{ o perfil de condutividade magnética.}$$

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \frac{\delta_{j+\frac{1}{2}}}{n_{\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} n_{i,j+\frac{1}{2}}^2 E_y \right)_{\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\delta_{j-\frac{1}{2}}}{n_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} n_{i,j-\frac{1}{2}}^2 E_y \right)_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} \right]}{\Delta y} \quad (\text{B.6})$$

Os índices  $\left(i, j+\frac{1}{2}\right)$  e  $\left(i, j-\frac{1}{2}\right)$  representam a interface entre as células na direção  $y$  como pode ser observado na FIGURA A 1. O termo  $L_y$  em (B.6) é obtido tomando-se meio passo antes e depois do ponto  $(i,j)$  ao longo da direção  $y$  a fim de que a derivada esteja centrada no ponto  $(i,j)$ . A descontinuidade do índice de refração na interface dielétrica nesta direção é representada por:

$$n_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2}{2} \text{ e } n_{i-\frac{1}{2},j}^2 = \frac{n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2}{2}.$$

A PML na interface dielétrica, considerando a direção  $y$  é representada como:

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{j+1} + \delta_j}{2} \text{ e } \delta_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_j + \delta_{j-1}}{2}.$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial y} E$ , onde  $E$  representa a componente de campo  $E_y$ ,

tem-se:

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \frac{(\delta_{j+1} + \delta_j)}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} \left( \frac{\partial}{\partial y} n_{i,j+\frac{1}{2}}^2 E_y \right)_{\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} - \frac{(\delta_j + \delta_{j-1})}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \left( \frac{\partial}{\partial y} n_{i,j-\frac{1}{2}}^2 E_y \right)_{\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} \right]}{\Delta y}$$

Expandindo a expressão acima, resulta:

$$L_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{n_{i,j-1}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} E_{i,j-1} - \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \right) E_{i,j} \\ + \frac{n_{i,j+1}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} E_{i,j+1} \end{array} \right] \quad (B.7)$$

onde :

$$\begin{aligned} a &= \frac{n_{i,j-1}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \\ b &= \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \right) \\ c &= \frac{n_{i,j+1}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} \end{aligned}$$

Agora, considere a aplicação da PML na derivada parcial na direção  $x$ ,  $L_x = \delta \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial}{\partial x}$ .

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial x} E$ , onde  $E$  representa a componente de campo  $E_y$ ,

resulta:

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \delta_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right)_{\left( i+\frac{1}{2}, j \right)} - \delta_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right)_{\left( i-\frac{1}{2}, j \right)} \right]}{\Delta x} \quad (B.8)$$

Os índices  $\left( i + \frac{1}{2}, j \right)$  e  $\left( i - \frac{1}{2}, j \right)$  representam a interface entre as células na direção  $x$  como pode ser observado na FIGURA A 1.

$$\delta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{i+1} + \delta_i}{2}$$

$$\delta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{2}.$$

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i) \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right)_{\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}}{2} - \frac{(\delta_i + \delta_{i-1}) \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right)_{\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}}{2} \right]}{\Delta x}$$

Expandindo a expressão acima resulta:

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \frac{\delta_i (\delta_i + \delta_{i-1})}{2} E_{i-1,j} - \frac{\delta_i (\delta_{i+1} + 2\delta_i + \delta_{i-1})}{2} E_{i,j} + \frac{\delta_i (\delta_i + \delta_{i+1})}{2} E_{i+1,j} \right] \quad (B.9)$$

onde :

$$d = \frac{\delta_i (\delta_i + \delta_{i-1})}{2}$$

$$e = \frac{\delta_i (\delta_{i+1} + 2\delta_i + \delta_{i-1})}{2}$$

$$f = \frac{\delta_i (\delta_i + \delta_{i+1})}{2}$$

## Apêndice C

### DERIVAÇÃO DO MÉTODO SEMIVETORIAL-FORMULAÇÃO H<sub>x</sub>

A equação de onda semivetorial é deduzida a partir das Equações de Maxwell como segue:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (C.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 (n^2 \vec{E}) \quad (C.2)$$

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0 \quad (C.3)$$

$$\nabla \cdot (\vec{H}) = 0 \quad (C.4)$$

Aplicando o operador  $\nabla \times$  em (C.2), tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \nabla \times (n^2 \vec{E})$$

Utilizando a identidade vetorial  $\nabla \times (\phi \vec{F}) = \phi \nabla \times \vec{F} + \nabla \phi \times \vec{F}$ , onde  $\phi$  é um escalar e  $\vec{F}$  é um vetor,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 [n^2 \nabla \times \vec{E} + \nabla n^2 \times \vec{E}]$$

Expandindo a equação acima, resulta:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 n^2 (-j\omega\mu_0 \vec{H}) + j\omega\epsilon_0 \nabla n^2 \times \vec{E}$$

Sabendo que  $\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = k_0^2$  e  $\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\epsilon_0 n^2}$ , tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = k_0^2 n^2 \vec{H} + j\omega \epsilon_0 \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega \epsilon_0 n^2} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = k_0^2 n^2 \vec{H} + \frac{j\omega \epsilon_0}{j\omega \epsilon_0} \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - k_0^2 n^2 \vec{H} - \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = 0 \quad (\text{C.5})$$

Expandindo (C.5), resulta:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - k_0^2 n^2 \vec{H} - \nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = 0$$

De (C.4) tem-se que  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ , então:

$$\nabla^2 \vec{H} + k_0^2 n^2 \vec{H} = -\nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) \quad (\text{C.6})$$

Trabalhando o lado esquerdo de (C.6),

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [\vec{x} H_x + \vec{y} H_y] + k_0^2 n^2 [\vec{x} H_x + \vec{y} H_y] = \\ & \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x + \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x + \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + \vec{x} k_0^2 n^2 H_x + \vec{y} k_0^2 n^2 H_y \end{aligned}$$

Trabalhando, agora, o lado direito de (C.6), resulta:

$$\nabla n^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} n^2 + \frac{\partial}{\partial y} n^2 + \frac{\partial}{\partial z} n^2 \right)$$

$$\frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \left[ \vec{x} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) + \vec{y} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) + \vec{z} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right]$$

Logo:

$$\nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right) \right] \\ + \vec{y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right) \right] \\ + \vec{z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right) \right] \end{array} \right\} \quad (\text{C.7})$$

Tomando as componentes de campo na direção  $x$  de (C.7):

$$\vec{x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right) - \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right) \right] \quad (\text{C.8})$$

Utilizando a seguinte identidade vetorial na expressão acima:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\phi \vec{A}) = \phi \frac{\partial}{\partial u} \vec{A} + \frac{\partial}{\partial u} \phi \vec{A}, \text{ logo: } \frac{\partial}{\partial u} \phi \vec{A} = -\phi \frac{\partial}{\partial u} \vec{A} + \frac{\partial}{\partial u}(\phi \vec{A}), \text{ onde } \phi \text{ é um escalar e } \vec{A} \text{ é um vetor.}$$

Para o primeiro termo de (C.8):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right) \right] \vec{x} = \frac{\partial}{\partial y} n^2 \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) - n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) = \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x - n^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y \right) + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x \right)$$

Para o segundo termo de (C.8):

$$-\frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right] = -\left\{ \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) - n^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right] \right\}$$

Como o formalismo é desenvolvido em termos das componentes transversais, a componente longitudinal é desprezada e a expressão acima torna-se:

$$-\frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \right] = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_x$$

Agrupando o primeiro e o segundo termos de (C.8), resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) &= \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x - n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x - n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial y} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Somando-se os lados direito e esquerdo de (C.6), e separando-se as componentes  $H_x$  e  $H_y$  em lados opostos, resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_x + k_0^2 n^2 H_x = -\frac{\partial}{\partial y} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y \quad (\text{C.10})$$

A equação (C.10) representa a equação de onda vetorial de Helmholtz. O lado direito de (C.10) representa o acoplamento cruzado entre as componentes de campo. Em geral este acoplamento é fraco e pode ser desprezado, resultando em:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_x + k_0^2 n^2 H_x = 0 \quad (\text{C.11})$$

A equação (C.11) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz.

Suponha agora que a componente  $H_x$  tenha a seguinte dependência em  $z$ :  $H_x = \psi e^{-jk_0 n_0 z}$ , onde  $n_0$  é o índice de refração de referência. Assim, a derivada em relação a  $z$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) &= n^2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} - jk_0 n_0 \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) \right] = n^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) \\ &- n^2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \left( jk_0 n_0 \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) \right] \end{aligned}$$

Com o objetivo de simplificar a notação, suponha a seguinte definição para os termos da equação acima:

$$n^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) = (A), \text{ e}$$

$$n^2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \left( jk_0 n_0 \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) \right] = (B)$$

Aplicando a regra da cadeia em  $A$  e  $B$  resulta:

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} \right) = (A) - (B) &= n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi e^{-jk_0 n_0 z} - jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} \\ &- n^2 jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \psi e^{-jk_0 n_0 z} - jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi e^{-jk_0 n_0 z} - k_0^2 n_0^2 \psi e^{-jk_0 n_0 z} \end{aligned}$$

Aplicando a expressão acima em (C.11) e sabendo que  $H_x = \psi e^{-jk_0 n_0 z}$ , resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x - 2j\zeta \frac{\partial}{\partial z} H_x + PH_x = 0 \quad (\text{C.12})$$

onde,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} - n^2 jk_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2) \\ \zeta &= \left( k + \frac{j}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \right) \text{ e } k = k_0 n_0 \end{aligned}$$

A equação (C.12) representa a equação de onda semivetorial sem a limitação paraxial. A condição de contorno aplicada na fronteira da janela computacional é a de camadas perfeitamente casadas (PML) [58]. A PML é inserida dentro do formalismo por meio de sua

aplicação nos operadores diferenciais transversais  $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e  $L_y = n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}$ . O termo

$n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x$  da equação (C.12) representa o efeito de polarização devido à

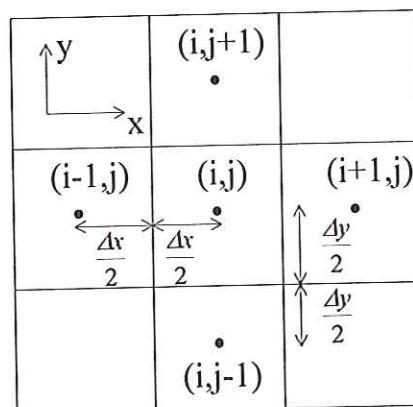
descontinuidade do índice de refração nas interfaces. Aplicando a PML e expandindo estes operadores em diferenças finitas, resulta:

$$L_y = \delta n^2 \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}, \text{ onde } \delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - j\sigma \\ \omega\mu_0 \end{pmatrix} \text{ sendo } \sigma \text{ o perfil de condutividade magnética.}$$

$$L_y = n_{i,j}^2 \delta_j \frac{\left[ \frac{\delta_{j+\frac{1}{2}}}{n_{i,j+\frac{1}{2}}^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_x \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\delta_{j-\frac{1}{2}}}{n_{i,j-\frac{1}{2}}^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_x \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right]}{\Delta y} \quad (\text{C.13})$$

Os índices  $\left(i, j + \frac{1}{2}\right)$  e  $\left(i, j - \frac{1}{2}\right)$  representam a interface entre as células na direção  $y$

como pode ser observado na FIGURA C.1.



**FIGURA C.1** - Diagrama de um esquema de diferenças finitas de cinco pontos em uma estrutura de células. O esquema de diferenças finitas de cinco pontos está centrado em  $(i,j)$  e cada célula possui índice de refração constante. A mudança no índice de refração ocorre somente na interface entre as células. Cada célula tem lados de comprimento  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

O termo  $L_y$  em (C.13) é obtido tomando-se meio passo antes e depois do ponto  $(i,j)$  ao longo da direção  $y$  a fim de que a derivada esteja centrada em  $(i,j)$ . A descontinuidade do índice de refração na interface dielétrica na direção  $y$  é representada por:

$$n^2_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{n^2_{i,j+1} + n^2_{i,j}}{2} \text{ e } n^2_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{n^2_{i,j} + n^2_{i-,j}}{2}.$$

A PML na interface dielétrica, considerando a direção y é representada como:

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{j+1} + \delta_j}{2} \text{ e } \delta_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_j + \delta_{j-1}}{2}.$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial y} H$ , onde H representa a componente de campo  $H_x$ ,

resulta:

$$L_y = n_{i,j}^2 \delta_j \left[ \frac{\left( \delta_{j+1} + \delta_j \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} H_x \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left( \delta_j + \delta_{j-1} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} H_x \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right]$$

$$L_y = n_{i,j}^2 \delta_j \left[ \frac{\left( \delta_{j+1} + \delta_j \right) \left( \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta y} \right) - \left( \delta_j + \delta_{j-1} \right) \left( \frac{H_{i,j} - H_{i,j-1}}{\Delta y} \right)}{\Delta y} \right]$$

$$L_y = \frac{n_{i,j}^2 \delta_j}{\Delta y^2} \left[ \left( \delta_{j+1} + \delta_j \right) \left( H_{i,j+1} - H_{i,j} \right) - \left( \delta_j + \delta_{j-1} \right) \left( H_{i,j} - H_{i,j-1} \right) \right]$$

Expandindo a expressão acima, tem-se:

$$L_y = \frac{n_{i,j}^2 \delta_j}{\Delta y^2} \left[ \left( \delta_{j+1} + \delta_j \right) H_{i,j+1} - \left( \left( \delta_{j+1} + \delta_j \right) + \left( \delta_j + \delta_{j-1} \right) \right) H_{i,j} + \left( \delta_j + \delta_{j-1} \right) H_{i,j-1} \right]$$

Rearranjando esta expressão resulta na seguinte forma para o operador  $L_y$ :

$$L_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \begin{array}{l} \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} H_{i,j-1} - \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \right) H_{i,j} \\ + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} H_{i,j+1} \end{array} \right] \quad (C.14)$$

onde :

$$a = \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} H_{i,j-1}$$

$$b = \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_j + \delta_{j-1}) \delta_j}{(n_{i,j}^2 + n_{i,j-1}^2)} \right)$$

$$c = \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{j+1} + \delta_j) \delta_j}{(n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2)}$$

O próximo passo consiste em aplicar a PML na derivada parcial na direção x, ou seja:

$$L_x = \delta \frac{\partial}{\partial x} \delta \frac{\partial}{\partial x}$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial x} H$ , onde H representa a componente de campo  $H_x$ ,

tem-se

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \delta_{i+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_x \right)_{\left( i+\frac{1}{2}, j \right)} - \delta_{i-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_x \right)_{\left( i-\frac{1}{2}, j \right)} \right]}{\Delta x} \quad (C.15)$$

Os índices  $\left( i + \frac{1}{2}, j \right)$  e  $\left( i - \frac{1}{2}, j \right)$  representam a interface entre as células na direção x como pode ser observado na FIGURA C1, e:

$$\delta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{i+1} + \delta_i}{2}$$

$$\delta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{2}.$$

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i)}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_x \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{(\delta_i + \delta_{i-1})}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_x \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right]}{\Delta x}$$

$$L_x = \delta_i \frac{\left[ \frac{(\delta_{i+1} + \delta_i)}{2} \left( \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\Delta x} \right) - \frac{(\delta_i + \delta_{i-1})}{2} \left( \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \right]}{\Delta x}$$

Expandindo a expressão acima, tem-se

$$L_x = \frac{\delta_i}{2\Delta x^2} [(\delta_{i+1} + \delta_i)(H_{i+1,j} - H_{i,j}) - (\delta_i + \delta_{i-1})(H_{i,j} - H_{i-1,j})]$$

Rearranjando esta expressão resulta na seguinte forma para o operador  $L_x$ :

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_{i-1})}{2} H_{i-1,j} - \frac{\delta_i(\delta_{i+1} + 2\delta_i + \delta_{i-1})}{2} H_{i,j} + \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_{i+1})}{2} H_{i+1,j} \right] \quad (C.16)$$

onde:

$$d = \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_{i-1})}{2}$$

$$e = \frac{\delta_i(\delta_{i+1} + 2\delta_i + \delta_{i-1})}{2}$$

$$f = \frac{\delta_i(\delta_i + \delta_{i+1})}{2}$$

## Apêndice D

### DERIVAÇÃO DO MÉTODO SEMIVETORIAL-FORMULAÇÃO $H_y$

O desenvolvimento da formulação  $H_y$  é feita analogamente ao que foi desenvolvido para a formulação  $H_x$ .

Aplicando o operador  $\nabla \times$  em (C.2), tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \nabla \times (n^2 \vec{E})$$

Expandindo a expressão acima de maneira análoga ao realizado no apêndice C, resulta:

$$\nabla^2 \vec{H} + k_0^2 n^2 \vec{H} = -\nabla n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) \quad (\text{D.1})$$

Trabalhando o lado esquerdo de (D.1),

$$\vec{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x + \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x + \vec{x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_x + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y + \vec{y} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + \vec{x} k_0^2 n^2 H_x + \vec{y} k^2 n^2 H_y$$

Trabalhando, agora, o lado direito de (D.1) e tomando as componentes de campo apenas na direção  $y$  resulta:

$$\vec{y} \left[ \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right) \right] \quad (\text{D.2})$$

Utilizando a seguinte identidade vetorial na expressão acima:

$$\frac{\partial}{\partial u} (\phi \vec{A}) = \phi \frac{\partial}{\partial u} \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \vec{A}, \text{ logo: } \frac{\partial}{\partial u} \phi \vec{A} = -\phi \frac{\partial}{\partial u} \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial u} (\phi \vec{A}), \text{ onde } \phi \text{ é um escalar e } \vec{A} \text{ é um vetor.}$$

Para o primeiro termo de (D.2):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} n^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right) \right] \vec{y} = \frac{\partial}{\partial z} n^2 \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) - n^2 \frac{\partial}{\partial z y} n^2 \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) = \\ - \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_y \right)$$

Como o formalismo é desenvolvido em termos das componentes transversais, a componente longitudinal é desprezada na expressão acima. Para o segundo termo de (D.2), tem-se:

$$-\frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right] = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) - n^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right] \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial x} n^2 \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \right] = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y \right) + \frac{\partial}{\partial y \partial x} H_x - n^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_x \right)$$

Agrupando o primeiro e o segundo termos de (D.2), resulta na seguinte expressão:

$$-\nabla \cdot n^2 \times \left( \frac{\nabla \times \vec{H}}{n^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y - n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y - n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_y - \frac{\partial}{\partial y \partial x} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x$$

Somando-se os lados direito e esquerdo de (D.1), e separando-se as componentes  $H_x$  e  $H_y$  em lados opostos, resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_y + k_0^2 n^2 H_y = - \frac{\partial}{\partial x \partial y} H_x + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} H_x \quad (\text{D.3})$$

A equação (D.3) representa a equação de onda vetorial de Helmholtz. O lado direito de (D.3) representa o acoplamento cruzado entre as componentes de campo na direção  $x$  e  $y$ . Em geral este acoplamento é fraco e pode ser desprezado, resultando em:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y + n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial z} H_y + k_0^2 n^2 H_y = 0 \quad (\text{D.4})$$

A equação (D.4) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz.

Suponha agora que componente  $H_y$  tenha a seguinte dependência em  $z$ :  $H_y = \psi e^{-jk_0 n_0 z}$ , onde  $n_0$  é o índice de refração de referência. Expandindo a derivada em relação a  $z$  analogamente ao apêndice C e aplicando em (D.4) resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y - 2j\zeta \frac{\partial}{\partial z} H_y + PH_y = 0 \quad (\text{D.5})$$

onde,

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} - n^2 j k_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} + k_0^2 (n^2 - n_0^2)$$

$$\zeta = \left( k + \frac{j}{2} n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \right) \text{ e } k = k_0 n_0$$

A equação (D.5) representa a equação de onda semivetorial sem a limitação paraxial. A condição de contorno aplicada na fronteira da janela computacional é a de camadas perfeitamente casadas (PML) [58]. A PML é inserida dentro do formalismo por meio de sua aplicação nos operadores diferenciais transversais  $L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  e  $L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}$ . O termo

$$n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} H_y$$

da equação (D.5) representa o efeito de polarização devido à descontinuidade do índice de refração nas interfaces. Aplicando a PML e expandindo estes operadores em diferenças finitas, resulta:

$$L_x = \delta n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}, \text{ onde } \delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{j\sigma}{\omega\mu_0} \end{pmatrix}$$

sendo  $\sigma$  o perfil de condutividade magnética.

$$L_x = n_{i,j}^2 \delta_i \frac{\left[ \frac{\delta_{i+\frac{1}{2}}}{n_{i+\frac{1}{2},j}^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\delta_{i-\frac{1}{2}}}{n_{i-\frac{1}{2},j}^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right]}{\Delta x} \quad (D.6)$$

Os índices  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  e  $\left(i - \frac{1}{2}, j\right)$  representam a interface entre as células na direção  $y$  como pode ser observado na FIGURA C.1 no apêndice C.

O termo  $L_x$  em (D.6) é obtido tomando-se meio passo antes e depois do ponto  $(i,j)$  ao longo da direção  $x$  a fim de que a derivada esteja centrada em  $(i,j)$ . A descontinuidade do índice de refração na interface dielétrica na direção  $x$  é representada por:

$$n_{i+\frac{1}{2},j}^2 = \frac{n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2}{2} \text{ e } n_{i-\frac{1}{2},j}^2 = \frac{n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2}{2}$$

A PML na interface dielétrica, considerando a direção  $x$  é representada como:

$$\delta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{i+1} + \delta_i}{2} \text{ e } \delta_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_i + \delta_{i-1}}{2}.$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial x} H_y$ , onde  $H$  representa a componente de campo  $H_y$ , e expandindo analogamente ao apêndice C resulta:

$$L_x = \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} H_{i-1,j} - \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right) H_{i,j} \right. \\ \left. + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} H_{i+1,j} \right] \quad (D.7)$$

onde :

$$a = \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} H_{i-1,j}$$

$$b = \left( \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)} + \frac{n_{i,j}^2 (\delta_i + \delta_{i-1}) \delta_i}{(n_{i,j}^2 + n_{i-1,j}^2)} \right)$$

$$c = \frac{n_{i,j}^2 (\delta_{i+1} + \delta_i) \delta_i}{(n_{i+1,j}^2 + n_{i,j}^2)}$$

O próximo passo consiste em aplicar a PML na derivada parcial na direção  $y$ , ou seja:

$$L_y = \delta \frac{\partial}{\partial y} \delta \frac{\partial}{\partial y}$$

Aplicando diferenças finitas no termo  $\frac{\partial}{\partial y} H$ , onde  $H$  representa a componente de campo  $H_y$ .

$$L_y = \delta_j \frac{\left[ \delta_{j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_y \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \delta_{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} H_y \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right]}{\Delta y} \quad (D.8)$$

Os índices  $\left( i, j+\frac{1}{2} \right)$  e  $\left( i, j-\frac{1}{2} \right)$  representam a interface entre as células na direção  $y$  como pode ser observado na FIGURA C.1, e

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{j+1} + \delta_j}{2}$$

$$\delta_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\delta_j + \delta_{j-1}}{2}.$$

Expandindo (D.8) resulta:

$$L_y = \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \frac{\delta_j(\delta_j + \delta_{j-1})}{2} H_{i,j-1} - \frac{\delta_j(\delta_{j+1} + 2\delta_j + \delta_{j-1})}{2} H_{i,j} + \frac{\delta_j(\delta_j + \delta_{j+1})}{2} H_{i,j+1} \right] \quad (\text{D.9})$$

onde :

$$d = \frac{\delta_j(\delta_j + \delta_{j-1})}{2}$$

$$e = \frac{\delta_j(\delta_{j+1} + 2\delta_j + \delta_{j-1})}{2}$$

$$f = \frac{\delta_j(\delta_j + \delta_{j+1})}{2}$$

## Apêndice E

Este apêndice trata da forma como os Aproximantes de Padé e a técnica ADI são inseridos dentro de um mesmo formalismo semivetorial, e também de sua expansão para obtenção da solução do problema por meio do BPM. A expansão do formalismo será realizada para as componentes  $H_y$  e  $H_x$  utilizando os aproximantes de Padé de ordem (1,0), ou paraxial, e ordem (1,1), de ângulo largo.

### Formulação $H_y$ Padé (1,0)

Os operadores diferenciais para a formulação  $H_y$  são representados por:

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_z = -jkn^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$$

$$L_0 = (n^2 - n_0^2)k_0^2 \text{ (termo de fase)}$$

$$\text{sendo } k = k_0 n_0 \text{ e } \frac{\partial}{\partial z} \ln \xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \xi \frac{\partial \xi}{\partial z} = n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}. \text{ Nestas expressões } \xi = n^{-2}.$$

De acordo com a técnica ADI, cada passo de propagação  $\Delta z$  deve ser subdividido em 2 passos intermediários de comprimento  $\frac{\Delta z}{2}$ , sendo que para cada um desses passos a seguinte equação semivetorial de Helmholtz deve ser resolvida:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \Psi$$

Ao se aplicar os aproximantes de Padé de ordem (1,0) na equação acima, esta resulta na equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial.

### 1º Passo

O operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_1$ . No operador  $P_1$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^z + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^z \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

Da Tabela. 2.1, para aproximação de ordem (1,0), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_1}{2\zeta} \quad (\text{E.2})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 \quad (\text{E.3})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -j \frac{P_1}{2\zeta} \Psi \quad (\text{E.4})$$

Analizando-se (E.4) pode-se notar que ela representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial. Expandindo (E.4) em diferenças finitas, resulta:

$$\begin{aligned} \left[ \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} - \Psi_{x,y}^z \right] &= -\frac{j\Delta z}{2\zeta} P_1 \Psi \\ \left[ \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} - \Psi_{x,y}^z \right] &= -\frac{j\Delta z}{4\zeta} \left[ \frac{d\Psi_{x,y-1}^z - e\Psi_{x,y}^z + f\Psi_{x,y+1}^z}{\Delta y^2} + \frac{a\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - b\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + c\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^z \right) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^z$  do lado direito, resulta:

$$\theta^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} = \gamma^- \Psi_{x,y-1}^z + \gamma \Psi_{x,y}^z + \gamma^+ \Psi_{x,y+1}^z \quad (\text{E.5})$$

onde:

$$\theta^- = \left( \frac{a}{\Delta x^2} \right), \quad \theta = \left[ \frac{4\zeta}{j\Delta z} - \frac{b}{\Delta x^2} - \frac{jk}{2\Delta z} \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) + \frac{L_0}{2} \right], \quad \theta^+ = \left( \frac{c}{\Delta x^2} \right)$$

e

$$\gamma^- = \left( -\frac{d}{\Delta y^2} \right), \quad \gamma = \left[ \frac{4\zeta}{j\Delta z} + \frac{e}{\Delta y^2} + \frac{jk}{2\Delta z} \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) - \frac{L_0}{2} \right], \quad \gamma^+ = \left( -\frac{f}{\Delta y^2} \right)$$

Os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice D.

## 2º Passo

O operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_2$ . No operador  $P_2$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^{z+1} + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^{z+1} \right) \right] \quad (\text{E.6})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,0), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_2}{2\zeta} \quad (\text{E.7})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 \quad (\text{E.8})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -j \frac{P_2}{2\zeta} \Psi \quad (\text{E.9})$$

Da mesma forma que no passo anterior, (E.9) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial. Expandindo (E.9) em diferenças finitas, resulta:

$$\begin{aligned} \left[ \Psi_{x,y}^{z+1} - \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} \right] &= -\frac{j\Delta z}{2\zeta} \frac{P_2}{2} \Psi \\ \left[ \Psi_{x,y}^{z+1} - \Psi_{x,y}^{z-\frac{1}{2}} \right] &= -\frac{j\Delta z}{4\zeta} \left[ \frac{d\Psi_{x,y-1}^{z+1} - e\Psi_{x,y}^{z+1} + f\Psi_{x,y+1}^{z+1}}{\Delta y^2} + \frac{a\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - b\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + c\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{2}L_z \right) \left( \Psi^{z+1} + \Psi^{z+\frac{1}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $\Psi^{z+1}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado direito, resulta:

$$\theta^- \Psi_{x,y-1}^{z+1} + \theta^+ \Psi_{x,y}^{z+1} + \theta^+ \Psi_{x,y+1}^{z+1} = \gamma^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma^+ \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} \quad (\text{E.10})$$

onde:

$$\theta^- = \left( \frac{d}{\Delta y^2} \right), \quad \theta = \left\{ \frac{4\zeta}{j\Delta z} - \frac{e}{\Delta y^2} - \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{z+\frac{1}{2}}} \right) \right] + \frac{L_0}{2} \right\}, \quad \theta^+ = \left( \frac{f}{\Delta y^2} \right)$$

e

$$\gamma^- = \left( -\frac{a}{\Delta x^2} \right), \quad \gamma = \left\{ \frac{4\zeta}{j\Delta z} + \frac{b}{\Delta y^2} + \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{z+\frac{1}{2}}} \right) \right] - \frac{L_0}{2} \right\}, \quad \gamma^+ = \left( -\frac{c}{\Delta x^2} \right)$$

Os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice D.

## Formulação $H_y$ Padé (1,1)

Os operadores diferenciais para a formulação  $H_y$  são representados por:

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_z = -jkn^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$$

$$L_0 = (n^2 - n_0^2)k_0^2 \text{ (termo de fase)}$$

sendo  $k = k_0 n_0$  e  $\frac{\partial}{\partial z} \ln \xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \xi \frac{\partial \xi}{\partial z} = n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$ . Nestas expressões  $\xi = n^{-2}$ .

Aqui também cada passo de propagação  $\Delta z$  será subdividido em 2 passos intermediários de comprimento  $\frac{\Delta z}{2}$ , e para cada um desses passos a seguinte equação de onda semivetorial de Helmholtz deve ser resolvida:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \psi$$

Nesta equação a derivada segunda com relação a  $z$  não é desprezada, e a condição de limite paraxial pode ser contornada.

### 1º Passo

De maneira análoga, o operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_1$ . No operador  $P_1$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^z + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^z \right) \right] \quad (\text{E.11})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,1), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_1}{2\zeta} \quad (\text{E.12})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 + \frac{P_1}{4\zeta^2} \quad (\text{E.13})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{\frac{P_1}{2\zeta}}{1 + \frac{P_1}{4\zeta^2}} \psi \quad (\text{E.14})$$

Rescrevendo a equação (E.14), tem-se

$$\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_1 \Psi = \Psi_{x,y}^z + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_1 \Psi \quad (\text{E.15})$$

Para que a equação (E.15) possa ser expandida em diferenças finitas é preciso, primeiramente, escrever os operadores diferenciais da seguinte forma:

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{d\Psi_{x,y-1}^z - e\Psi_{x,y}^z + f\Psi_{x,y+1}^z}{\Delta y^2}$$

$$L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{a\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - b\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + c\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}$$

Substituindo os operadores diferenciais discretizados na equação (E.15) e agrupando os termos em  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^z$  do lado direito da equação, obtém-se:

$$\theta^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta \Psi_x^{z+\frac{1}{2}} + \theta^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} = \gamma^- \Psi_{x,y-1}^z + \gamma \Psi_{x,y}^z + \gamma^+ \Psi_{x,y+1}^z \quad (\text{E.16})$$

onde:

$$\theta^- = \left[ \left( \frac{a}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z a}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{a}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z a}{4k \Delta x^2} \right) \right],$$

$$\theta = 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{b}{\Delta x^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\},$$

$$\theta^+ = \left[ \left( \frac{c}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z c}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{c}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z c}{4k \Delta x^2} \right) \right]$$

e

$$\gamma^- = \left[ \left( \frac{d}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z d}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{d}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z d}{4k \Delta y^2} \right) \right]$$

$$\gamma = 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{e}{\Delta y^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\}$$

$$\gamma^+ = \left[ \left( \frac{f}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z f}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{f}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z f}{4k \Delta y^2} \right) \right]$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice D.

## 2º Passo

De maneira análoga, o operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_2$ . No operador  $P_2$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^{z+1} + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^{z+1} \right) \right] \quad (\text{E.17})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,1), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_2}{2\zeta} \quad (\text{E.18})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 + \frac{P_2}{4\zeta^2} \quad (\text{E.19})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{\frac{P_2}{2\zeta}}{1 + \frac{P_2}{4\zeta^2}} \psi \quad (\text{E.20})$$

Rescrevendo a equação (E.20), tem-se

$$\Psi_{x,y}^{z+1} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_2 \Psi = \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_2 \Psi \quad (\text{E.21})$$

Para que a equação (E.21) possa ser expandida em diferenças finitas é preciso, primeiramente, escrever os operadores diferenciais da seguinte forma:

$$L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{d\Psi_{x,y-1}^{z+1} - e\Psi_{x,y}^{z+1} + f\Psi_{x,y+1}^{z+1}}{\Delta y^2}$$

$$L_x = n^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{a\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - b\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + c\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}$$

Substituindo estes operadores diferenciais discretizados em (E.21) e agrupando os termos em  $\Psi^{z+1}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado direito da equação, resulta:

$$\theta^{-}\Psi_{x,y-1}^{z+1} + \theta\Psi_{x,y}^{z+1} + \theta^{+}\Psi_{x,y+1}^{z+1} = \gamma^{-}\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma^{+}\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} \quad (\text{E.22})$$

onde:

$$\begin{aligned} \theta^{-} &= \left[ \left( \frac{d}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j\Delta z d}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{d}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j\Delta z d}{4k \Delta y^2} \right) \right] \\ \theta &= 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j\Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j\Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{e}{\Delta y^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\} \\ \theta^{+} &= \left[ \left( \frac{f}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j\Delta z f}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{f}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j\Delta z f}{4k \Delta y^2} \right) \right] \\ e & \\ \gamma^{-} &= \left[ \left( \frac{a}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j\Delta z a}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{a}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j\Delta z a}{4k \Delta x^2} \right) \right] \\ \gamma &= 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j\Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j\Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{b}{\Delta x^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\} \\ \gamma^{+} &= \left[ \left( \frac{c}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j\Delta z c}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{c}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j\Delta z c}{4k \Delta x^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice D.

### Fomulaçao $H_x$ Padé (1,0)

Os operadores diferenciais para a formulação  $H_x$  são representados por:

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_y = n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_z = -jkn^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$$

$$L_0 = (n^2 - n_0^2)k_0^2 \text{ (termo de fase)}$$

sendo  $k=k_0 n_0$  e  $\frac{\partial \ln \xi}{\partial z} = \frac{\partial \ln \xi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$ . Nestas expressões  $\xi=n^{-2}$ .

De forma análoga ao desenvolvido para a componente  $H_y$ , cada passo de propagação  $\Delta z$  é subdividido em 2 passos intermediários de comprimento  $\frac{\Delta z}{2}$ , e para cada passo a seguinte equação de onda semivetorial de Helmholtz deve ser resolvida:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \psi$$

Ao se aplicar os aproximatantes de Padé de ordem (1,0) na equação acima, esta resulta na equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial.

### 1º Passo

Novamente, o operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_1$ . No operador  $P_1$  são inseridos o esquema de Crank-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^z + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^z \right) \right] \quad (\text{E.23})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,0), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_1}{2\zeta} \quad (\text{E.24})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 \quad (\text{E.25})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{P_1}{2\zeta} \psi \quad (\text{E.26})$$

Observe que (E.26) representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial. Expandindo (E.27) em diferenças finitas, resulta:

$$\begin{aligned} \left[ \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} - \Psi_{x,y}^z \right] &= -\frac{j\Delta z}{2\zeta} P_1 \psi \\ \left[ \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} - \Psi_{x,y}^z \right] &= -\frac{j\Delta z}{4\zeta} \left[ \frac{a\Psi_{x,y-1}^z - b\Psi_{x,y}^z + c\Psi_{x,y+1}^z}{\Delta y^2} + \frac{d\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - e\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + f\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{2}L_z \right) \left( \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \Psi_{x,y}^z \right) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^z$  do lado direito da equação, resulta:

$$\theta^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} = \gamma^- \Psi_{x,y-1}^z + \gamma \Psi_{x,y}^z + \gamma^+ \Psi_{x,y+1}^z \quad (\text{E.28})$$

onde:

$$\theta^- = \left( \frac{d}{\Delta x^2} \right), \quad \theta = \left[ \frac{4\zeta}{j\Delta z} - \frac{e}{\Delta x^2} - \frac{jk}{2\Delta z} \left( \ln \left( \frac{n^z}{n^{z+\frac{1}{2}}} \right) \right) + \frac{L_0}{2} \right], \quad \theta^+ = \left( \frac{f}{\Delta x^2} \right)$$

e

$$\gamma^- = \left( -\frac{a}{\Delta y^2} \right), \quad \gamma = \left[ \frac{4\zeta}{j\Delta z} + \frac{b}{\Delta y^2} + \frac{jk}{2\Delta z} \left( \ln \left( \frac{n^z}{n^{z+\frac{1}{2}}} \right) \right) - \frac{L_0}{2} \right], \quad \gamma^+ = \left( -\frac{c}{\Delta y^2} \right)$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice C.

## 2º Passo

Mais uma vez, o operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_2$ . No operador  $P_2$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI.

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^{z+1} + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^{z+1} \right) \right] \quad (\text{E.29})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,0), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_2}{2\zeta} \quad (\text{E.30})$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 \quad (\text{E.31})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{P_2}{2\zeta} \psi \quad (\text{E.32})$$

Esta equação representa a equação de onda semivetorial de Helmholtz no limite paraxial. Expandindo (E.32) em diferenças finitas, resulta:

$$\begin{aligned} \left[ \Psi_{x,y}^{z+1} - \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} \right] &= -\frac{j\Delta z}{2\zeta} \frac{P_2}{2} \psi \\ \left[ \Psi_{x,y}^{z+1} - \Psi_{x,y}^{z-\frac{1}{2}} \right] &= -\frac{j\Delta z}{4\zeta} \left[ \frac{a\Psi_{x,y-1}^{z+1} - b\Psi_{x,y}^{z+1} + c\Psi_{x,y+1}^{z+1}}{\Delta y^2} + \frac{d\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - e\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + f\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+1} + \Psi^{z+\frac{1}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $\Psi^{z+1}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado direito da equação, resulta:

$$\theta^{-}\Psi_{x,y-1}^{z+1} + \theta\Psi_{x,y}^{z+1} + \theta^{+}\Psi_{x,y+1}^{z+1} = \gamma^{-}\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma^{+}\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} \quad (\text{E.33})$$

onde:

$$\theta^{-} = \left( \frac{a}{\Delta y^2} \right), \quad \theta = \left\{ \frac{4\zeta}{j\Delta z} - \frac{b}{\Delta y^2} - \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] + \frac{L_0}{2} \right\}, \quad \theta^{+} = \left( \frac{c}{\Delta y^2} \right)$$

e

$$\gamma^{-} = \left( -\frac{d}{\Delta x^2} \right), \quad \gamma = \left\{ \frac{4\zeta}{j\Delta z} + \frac{e}{\Delta y^2} + \frac{jk}{2\Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] - \frac{L_0}{2} \right\}, \quad \gamma^{+} = \left( -\frac{f}{\Delta x^2} \right)$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice C.



## Fomulaçāo $H_x$ Padé (1,1)

Os operadores diferenciais para a formulação  $H_x$  são representados por:

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_y = n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_z = -jkn^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2} \quad L_0 = (n^2 - n_0^2)k_0^2 \text{ (termo de fase)}$$

sendo  $k = k_0 n_0$  e  $\frac{\partial}{\partial z} \ln \xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \xi \frac{\partial \xi}{\partial z} = n^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{n^2}$ . Nestas expressões  $\xi = n^{-2}$ .

Novamente, trabalhando-se com a técnica ADI, cada passo de propagação  $\Delta z$  é subdividido em 2 passos intermediários de comprimento  $\frac{\Delta z}{2}$ , e para cada um desses passos a seguinte equação de onda semivetorial de Helmholtz deve ser resolvida:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i \left( \sqrt{P + \zeta^2} - \zeta \right) \Psi$$

Nesta equação a derivada segunda com relação a  $z$  não é desprezada, e a condição de limite paraxial pode ser contornada.

### 1º Passo

O operador  $P$  de (2.17) neste passo é também representado por  $P_1$ . No operador  $P_1$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI, ou seja

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{z+\frac{1}{2}} + L_y \Psi^z + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{z+\frac{1}{2}} + \Psi^z \right) \right] \quad (\text{E.34})$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,1), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_1}{2\zeta} \quad (E.35)$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 + \frac{P_1}{4\zeta^2} \quad (E.36)$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -j \frac{\frac{P_1}{2\zeta}}{1 + \frac{P_1}{4\zeta^2}} \psi \quad (E.37)$$

Rescrevendo a equação (E.37), tem-se

$$\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_1 \Psi = \Psi_{x,y}^z + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{j\Delta z}{2\zeta} \right] P_1 \Psi \quad (E.38)$$

Para que a equação (E.38) possa ser expandida em diferenças finitas é preciso, primeiramente, escrever os operadores diferenciais da seguinte forma:

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - e\Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + f\Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}$$

$$L_y = n^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{a\Psi_{x,y-1}^z - b\Psi_{x,y}^z + c\Psi_{x,y+1}^z}{\Delta x^2}$$

Substituindo estes operadores diferenciais discretizados em (E.38) e agrupando os termos em

$\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado esquerdo da equação e os termos  $\Psi^z$  do lado direito da equação, resulta:

$$\theta^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta^0 \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \theta^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} = \gamma^- \Psi_{x,y-1}^z + \gamma^0 \Psi_{x,y}^z + \gamma^+ \Psi_{x,y+1}^z \quad (E.39)$$

onde:

$$\begin{aligned}\theta^- &= \left[ \left( \frac{d}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z d}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{d}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z d}{4k \Delta x^2} \right) \right], \\ \theta &= 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{e}{\Delta x^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\}, \\ \theta^+ &= \left[ \left( \frac{f}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z f}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{f}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z f}{4k \Delta x^2} \right) \right] \\ e \\ \gamma^- &= \left[ \left( \frac{a}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z a}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{a}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z a}{4k \Delta y^2} \right) \right] \\ \gamma &= 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{b}{\Delta y^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\} \\ \gamma^+ &= \left[ \left( \frac{c}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z c}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{c}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z c}{4k \Delta y^2} \right) \right]\end{aligned}$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice C.

## 2º Passo

O operador  $P$  de (2.17) neste passo é representado por  $P_2$ . No operador  $P_2$  são inseridos o esquema de Cranck-Nicholson e a técnica ADI, assim

$$P_2 = \frac{1}{2} \left[ L_x \Psi^{\frac{z+1}{2}} + L_y \Psi^{z+1} + \left( \frac{1}{2} L_0 + \frac{1}{2} L_z \right) \left( \Psi^{\frac{z+1}{2}} + \Psi^{z+1} \right) \right] \quad (E.40)$$

Da Tabela 2.1, para aproximação de ordem (1,1), tem-se:

$$N_m(P) = \frac{P_2}{2\zeta} \quad (E.41)$$

para o numerador, e

$$D_n(P) = 1 + \frac{P_2}{4\zeta^2} \quad (\text{E.42})$$

para o denominador. Substituindo os termos acima na equação (2.17), obtém-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial} = - \frac{\frac{2}{2\zeta}}{1 + \frac{2}{4\zeta^2}} \psi \quad (\text{E.43})$$

Rescrevendo a equação (E.43), tem-se

$$\Psi_{x,y}^{z+1} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} + \frac{\Delta}{2\zeta} \right] {}_2\Psi = \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{4\zeta^2} - \frac{\Delta}{2\zeta} \right] {}_2\Psi \quad (\text{E.44})$$

Para que a equação (E.44) possa ser expandida em diferenças finitas é preciso, primeiramente, escrever os operadores diferenciais da seguinte forma:

$$x = \frac{\partial^2}{\partial^2} = \frac{\Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} - \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}}}{\Delta^2}$$

$$y = \frac{\partial^2}{\partial^2} = \frac{\Psi_{x,y-1}^z - \Psi_{x,y}^z + \Psi_{x,y+1}^z}{\Delta^2}$$

Substituindo os operadores diferenciais discretizados em (E.44) e agrupando os termos em  $\Psi^{z+1}$  do lado esquerdo da equação e os termos em  $\Psi^{z+\frac{1}{2}}$  do lado direito da equação, resulta:

$$\theta^- \Psi_{x,y-1}^{z+1} + \theta \Psi_{x,y}^{z+1} + \theta^+ \Psi_{x,y+1}^{z+1} = \gamma^- \Psi_{x-1,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma \Psi_{x,y}^{z+\frac{1}{2}} + \gamma^+ \Psi_{x+1,y}^{z+\frac{1}{2}} \quad (\text{E.45})$$

onde:

$$\theta^- = \left[ \left( \frac{a}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z a}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{a}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z a}{4k \Delta y^2} \right) \right]$$

$$\theta = 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{b}{\Delta y^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\}$$

$$\theta^+ = \left[ \left( \frac{c}{8k^2 \Delta y^2} + \frac{j \Delta z c}{4k \Delta y^2} \right) - \left( \frac{c}{8k^2 \Delta y^2} - \frac{j \Delta z c}{4k \Delta y^2} \right) \right]$$

e

$$\gamma^- = \left[ \left( \frac{d}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z d}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{d}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z d}{4k \Delta x^2} \right) \right]$$

$$\gamma = 1 + \left[ \left( \frac{1}{8k^2} - \frac{j \Delta z}{4k} \right) - \left( \frac{1}{8k^2} + \frac{j \Delta z}{4k} \right) \right] \cdot \left\{ -\frac{e}{\Delta x^2} + \frac{L_0}{2} - \frac{jk}{2 \Delta z} \left[ \ln \left( \frac{n^z}{n^{\frac{z+1}{2}}} \right) \right] \right\}$$

$$\gamma^+ = \left[ \left( \frac{f}{8k^2 \Delta x^2} - \frac{j \Delta z f}{4k \Delta x^2} \right) - \left( \frac{f}{8k^2 \Delta x^2} + \frac{j \Delta z f}{4k \Delta x^2} \right) \right]$$

Onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  e  $\zeta$  são derivados no Apêndice C.

## Apêndice F

### MÉTODO VARIACIONAL

O que se pretende neste apêndice é obter uma expressão variacional para o cálculo da constante de propagação longitudinal  $\beta$ . Como a distribuição de campo obtida nos formalismos apresentados neste trabalho é semivetorial, então a expressão variacional para o cálculo de  $\beta$  deve também ser semivetorial. Assim, considere a equação de onda abaixo:

$$\left[ \nabla_t^2 + k_0^2 n^2(x,y) - \beta^2 \right] \Psi = 0 \quad (\text{F.1})$$

onde  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x}$

Na forma expandida, tem-se

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 + k_0^2 n^2(x,y) - \beta^2 \right] \Psi = 0$$

Multiplicando a equação acima por  $\Psi^*$ , resulta

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi \right) \Psi^* + \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \Psi \right) \Psi^* + \left( k_0^2 n^2(x,y) \Psi \right) \Psi^* - \left( \beta^2 \Psi \right) \Psi^* = 0 \quad (\text{F.2})$$

Suponha, agora, que a distribuição de campo  $\Psi(x,y)$  pode ser escrita como:

$$\Psi(x,y) = X(x)Y(y) \quad (\text{F.3})$$

sendo:

$$X(x) = A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x} \quad (\text{F.4})$$

$$Y(y) = Ce^{ik_y y} + De^{-ik_y y} \quad (\text{F.5})$$

O que se deseja aqui é simplificar  $(\nabla_t^2 \Psi) \Psi^*$ , assim:

$$\nabla_t^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \Psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi \quad (\text{F.6})$$

Observe que a equação (F.4) é independente de  $y$  e a equação (F.5) é independente de  $x$ . Portanto, tomindo o primeiro termo de (F.6), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) \right) Y(y) \\ \frac{\partial}{\partial x} X &= ik_x A e^{ik_x x} - ik_x B e^{-ik_x x} = ik_x [A e^{ik_x x} - B e^{-ik_x x}] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} X &= ik_x [ik_x A e^{ik_x x} + ik_x B e^{-ik_x x}] = -k_x^2 [A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x}] \end{aligned}$$

De (F.4), resulta que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k_x^2 X(x) Y(y) \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi &= \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) \right) X(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= -k_y^2 X(x) Y(y) \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Logo,

$$\nabla_t^2 \Psi = -k_x^2 \Psi - k_y^2 \Psi \quad (\text{F.9})$$

$$(\nabla_t^2 \Psi) \Psi^* = -[k_x^2 \Psi + k_y^2 \Psi] \Psi^* = -\left(k_x^2 |\Psi|^2 + k_y^2 |\Psi|^2\right) \quad (\text{F.10})$$

assim,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Psi \right) \Psi^* = - \left| \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right|^2$$

uma vez que o módulo quadrado de uma quantidade complexa  $z=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$  é  $|z|^2=\alpha^2+\beta^2$ .

Integrando a equação (F.2) de  $-\infty$  a  $+\infty$ , resulta:

$$\beta^2 \int |\Psi|^2 = - \int \left| \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right|^2 + \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \Psi \right) \Psi^* + k_0^2 n^2(x,y) \int |\Psi|^2$$

Explicitando  $\beta^2$ , tem-se

$$\beta^2 = \frac{- \int \left| \frac{\partial}{\partial y} \Psi \right|^2 + \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} n^2 \Psi \right) \Psi^* + k_0^2 n^2(x,y) \int |\Psi|^2}{\int |\Psi|^2} \quad (\text{F.11})$$

A equação (F.11) é o que se chama de expressão variacional. Isto implica que o valor de  $\beta^2$  será máximo quando a solução exata da equação (F.1) for substituída em (F.11).

Qualquer outra solução que não seja a solução exata produz um valor de  $\beta^2$  menor que o valor exato.

Através da simulação FD-BPM é obtido o campo solução  $\Psi$  da equação de onda semivetorial de Helmholtz. Este campo é então aplicado em (F.11) para o cálculo do valor de  $\beta$ .

## Apêndice G

### Fluxograma do FD-BPM.

A descrição do fluxograma apresentado na FIGURA G.1 segue logo abaixo:

Entrada de dados:

- Número de pontos de discretização transversal na direção x e y;
- Dimensões da janela computacional;
- Índice de refração das camadas que compõe o guia de onda, parâmetros geométricos da estrutura (espessura, largura, altura e raio);
- Largura da gaussiana de excitação inicial;
- Passo longitudinal de propagação  $\Delta z$ ;
- Passo transversal de discretização  $\Delta x$ ;
- Passo transversal de discretização  $\Delta y$ ;
- Índice de referência  $n_0$ ;

Discretização da estrutura:

Com base nos parâmetros físicos e geométricos fornecidos na entrada de dados a discretização da estrutura é realizada, tais parâmetros são: índice de refração das camadas, espessura, largura, altura, passos transversais  $\Delta x$  e  $\Delta y$ .

Cálculo do campo inicial  $\Psi^0$ :

A distribuição inicial de campo é realizada por meio da seguinte equação:

$$\text{gaussiana} = \exp^{-\left(\frac{(X-X_0)^2}{GX^2} + \frac{(Y-Y_0)^2}{GY^2}\right)}$$

onde  $(X_0, Y_0)$  representa o ponto onde a gaussiana está centralizada, e  $GX$  e  $GY$  representam a largura da gaussiana na direção x e y, respectivamente.

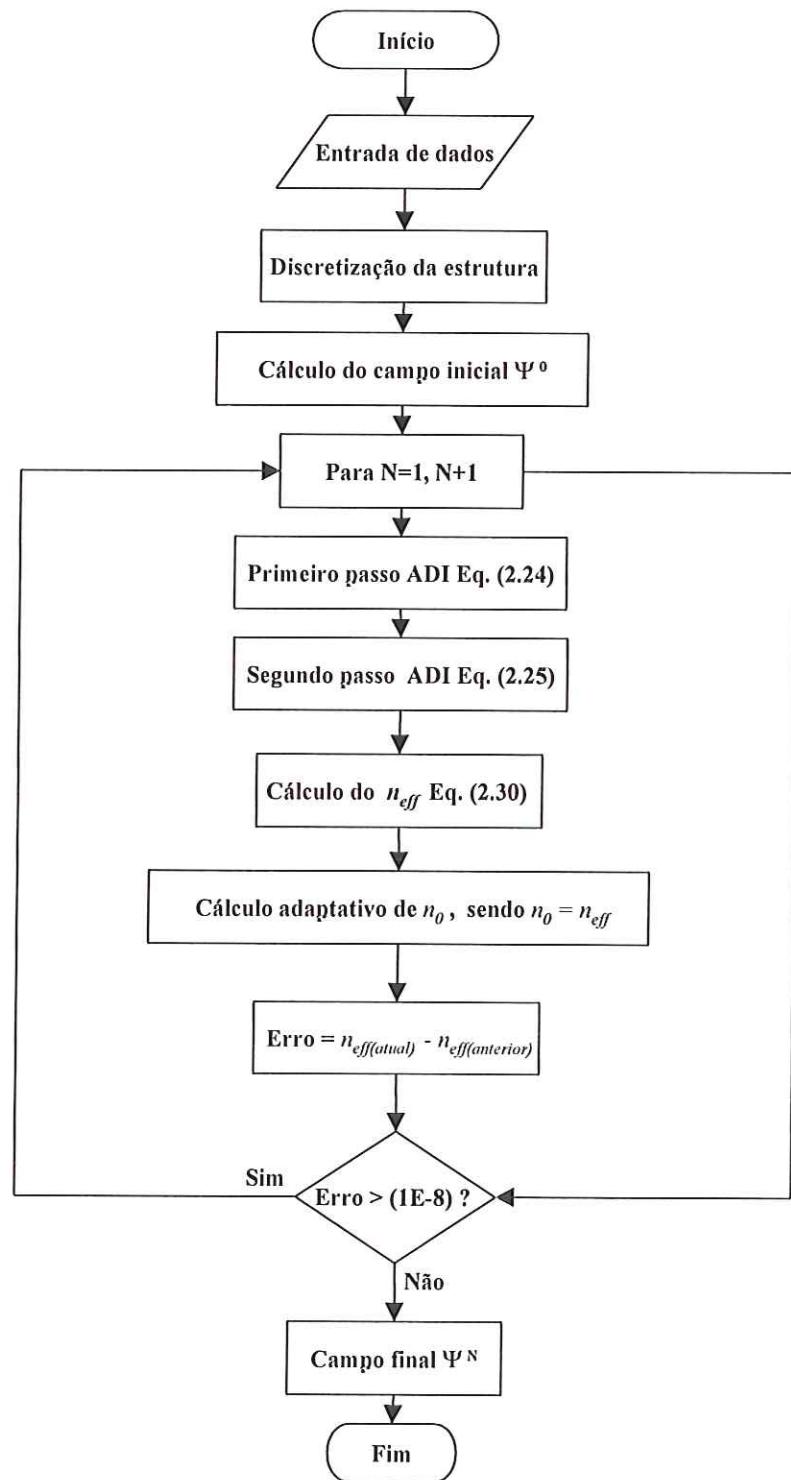


FIGURA G.1 – Fluxograma do FD-BPM.