André Christóvão Pio Martins

ESTIMATIVA DO CONJUNTO ATRATOR E DA ÁREA DE ATRAÇÃO PARA O PROBLEMA DE LURE ESTENDIDO UTILIZANDO LMI

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

DEDALUS - Acervo - EESC
31100052155

Orientador: Prof. Newton G. Bretas

São Carlos
2005

Biblioteca
DE S. CARLOS

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ANDRÉ CHRISTÓVÃO PIO MARTINS**

Tese defendida e julgada em 23-03-2005 perante a Comissão Julgadora:

APROVADO

Prof. Titular **NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Hermano de Souza Ribeiro — Aprovado.

Prof. Dr. **HERMANO DE SOUZA RIBEIRO**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **RODRIGO ANDRADE RAMOS**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **ROMEU REGINATTO**
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul/UFRGS)

APROVADO

Prof. Dr. **ALEXANDRE TROFINO NETO**
(Universidade Estadual de Santa Catarina/UFSC)

Prof. Associado **HOMERO SCHIABEL**
Vice-Coordenador em Exercício do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Aline, pelo apoio incondicional, e ao meu filho Pedro, alegria de minha vida.

Aos meus pais e minhas irmãs pelo incentivo e apoio para a realização deste trabalho.

Ao Professor Bretas pela orientação e estímulo constante.

Ao Professor Luis Fernando pela ajuda inestimável.

Aos companheiros do LACO pela colaboração e companheirismo.

Aos professores e funcionários da USP pela oportunidade de aprendizado.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

RESUMO

MARTINS, A. C. P. (2005). *Estimativa do conjunto atrator e da área de atração para o problema de Lure estendido utilizando LMI*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

A análise de estabilidade de sistemas não-lineares surge em vários campos da engenharia. Geralmente, esta análise consiste na determinação de conjuntos atratores estáveis e suas respectivas áreas de atração. Os métodos baseados no Método de Lyapunov fornecem estimativas destes conjuntos. Entretanto, estes métodos envolvem uma busca não sistemática por funções auxiliares chamadas Funções de Lyapunov. Este trabalho apresenta um procedimento sistemático, baseado no Método de Lyapunov, para estimar conjuntos atratores e as respectivas áreas de atração para uma classe de sistemas não-lineares, aqui chamado de Problema de Lure Estendido. Este problema consiste de sistemas não-lineares que podem ser escritos na forma do Problema de Lure, cuja função não-linear pode violar a condição de setor em torno da origem. O procedimento desenvolvido é baseado na Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle e usa as funções de Lyapunov genéricas do Problema de Lure para estimar o conjunto atrator e sua respectiva área de atração. Os parâmetros das Funções de Lyapunov são obtidos resolvendo um problema de otimização que pode ser colocado na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

Palavras-chave: sistemas não-lineares; métodos de Lyapunov; problema de Lure; desigualdades matriciais lineares.

ABSTRACT

MARTINS, A. C. P. (2005). *An estimate of attractor set and its associated attraction area of the extended Lure problem using LMI*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

The stability analysis of nonlinear systems is present in several engineering fields. Usually, the concern is the determination of stable attractor sets and their associated attraction areas. Methods based on the Lyapunov Method provide estimates of these sets. However, these methods involve a nonsystematic search for auxiliary functions called Lyapunov Functions. This work presents a systematic procedure, based on Lyapunov Method, to estimate attractor sets and their associated attraction areas of a class of nonlinear systems, called in this work Extended Lure Problem. The Extended Lure Problem consists of nonlinear systems like those of Lure Problem where the nonlinear functions can violate the sector conditions around the origin. The developed procedure is based on the Extension of Invariance LaSalle Principle and uses the general Lyapunov Functions of Lure Problem to estimate the attractor set and their associated attraction area. The parameters of the Lyapunov Functions are obtained solving an optimization problem write like a Linear Matrix Inequality (LMI).

Keywords: nonlinear systems; Lyapunov methods; Lure problem; linear matrix inequalities.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1: Sistema considerado no Problema de Lure 16
FIGURA 3.2: Exemplo de um SVM com as derivadas em pontos distintos .. 22
FIGURA 4.1: Características das não-linearidades consideradas 31
FIGURA 5.1: Sistema massa-mola forçado 46
FIGURA 5.2: Não-linearidade da Equação de Duffing Forçada 45
FIGURA 5.3: Região de factibilidade do procedimento: $K = 5$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$ 48
FIGURA 5.4: Região de factibilidade do procedimento: $K = 15$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$ 48
FIGURA 5.5: Região de factibilidade do procedimento: $K = 45$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$ 49
FIGURA 5.6: Região de factibilidade do procedimento: $K = 100$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$ 49
FIGURA 5.7: Região de factibilidade do procedimento: $K = 10$, $k_m\rho^2/M = 1$, $k_u/M = 5$ 50
FIGURA 5.8: Região de factibilidade do procedimento: $K = 30$, $k_m\rho^2/M = 1$, $k_u/M = 5$ 50
FIGURA 5.9: Região de factibilidade do procedimento: $K = 100$, $k_m\rho^2/M = 1$, $k_u/M = 5$ 51
FIGURA 5.10: Trajetórias da Equação de Duffing Forçada para várias condições iniciais 52
FIGURA 5.11: Estimativas do conjunto atrator e de sua área de atração para a Equação de Duffing Forçada 53
FIGURA 5.12: Ampliação da fig. 5.11 mostrando o conjunto atrator e a estimativa obtida 54
FIGURA 5.13: Circuito elétrico com resistência negativa (Sistema de Van der Pol) 54

FIGURA 5.14: Região de factibilidade do procedimento: $K = 30$ 56
FIGURA 5.15: Região de factibilidade do procedimento: $K = 100$ 57
FIGURA 5.16: Região de factibilidade do procedimento: $K = 1000$ 57
FIGURA 5.17: Região de factibilidade do procedimento: $K^{-1} = 0$ 58
FIGURA 5.18: Trajetórias do Sistema de Van der Pol para diversas condições iniciais 59
FIGURA 5.19: Estimativas do conjunto atrator do sistema de Van der Pol e de sua área de atração 60
FIGURA 5.20: Estimativa do conjunto atrator global do sistema de Van der Pol 61
FIGURA 5.21: Excitação chaveada do sistema massa-mola 62
FIGURA 5.22: SVM resultante 63
FIGURA 5.23: Região de factibilidade do procedimento: $K = 5$ 64
FIGURA 5.24: Região de factibilidade do procedimento: $K = 20$ 64
FIGURA 5.25: Região de factibilidade do procedimento: $K = 80$ 65
FIGURA 5.26: Trajetórias do sistema massa-mola com histerese para diversas condições iniciais 66
FIGURA 5.27: Estimativas do conjunto atrator do sistema massa-mola com histerese e de sua área de atração 67
FIGURA 5.28: Trajetórias do sistema massa-mola com histerese com chaveamento aleatório 68
FIGURA 5.29: Conjunto atrator e região onde $\dot{V}(x) > 0$ para o sistema massa-mola com histerese com chaveamento aleatório 69

SUMÁRIO

RESUMO ii
ABSTRACT iii
1 INTRODUÇÃO 1
2 REVISÃO DE LITERATURA 3
3 PRELIMINARES MATEMÁTICAS 9
3.1 Sistemas não-lineares 9
3.2 Problema de Lure 16
3.3 Inclusões diferenciais 20
4 PROCEDIMENTO DESENVOLVIDO 29
4.1 Sistemas não-autônomos 30
4.2 Sistemas autônomos 37
4.3 Sistemas descritos por inclusões diferenciais 43
5 EXEMPLOS NUMÉRICOS 45
5.1 Equação de Duffing Forçada 45
5.2 Sistema de Van der Pol 54
5.3 Sistema massa-mola com histerese 61
6 CONCLUSÕES 70
REFERÊNCIAS 73
APÊNDICE A - Método alternativo de cálculo da constante l no Teorema 4.2 78
APÊNDICE B – Programas utilizados nos exemplos numéricos 82

1 INTRODUÇÃO

A análise da estabilidade de sistemas não-lineares envolve a determinação, não apenas de um ponto de equilíbrio estável, mas também de sua área de atração. Porém, geralmente não é possível encontrar uma expressão analítica para a área de atração, de modo que se pode apenas fazer uma estimativa da mesma. Em determinadas situações, também pode não ser possível estimar a área de atração de um ponto de equilíbrio, mas somente de um conjunto envolvendo esse ponto. Ou então, o interesse pode ser analisar a estabilidade de conjuntos atratores mais complicados, como ciclos limites ou atratores estranhos, ao invés de pontos de equilíbrio isolados.

Estimar regiões de atração ou determinar conjuntos atratores estáveis não é uma tarefa trivial. Métodos baseados no Teorema de Lyapunov, e em suas extensões, têm se mostrado bastante convenientes para a estimativa de áreas de atração. Contudo, estes teoremas requerem a existência de uma função auxiliar, Função de Lyapunov ou Função de Lyapunov Estendida, mas, em geral, não fornecem indicativos de como encontrar tal função. Em geral, a busca por funções de Lyapunov é feita caso a caso, mediante um processo de tentativa e erro, a partir de uma função candidata, cuja escolha mais corriqueira é uma forma quadrática dos estados. Quando as variáveis de estado do sistema possuem uma interpretação física, muitas vezes é possível associar ao sistema uma função energia que pode ser uma boa candidata a Função de Lyapunov. De qualquer forma, a busca por boas Funções de Lyapunov costuma carregar uma alta dose de subjetividade.

Devido a esta dificuldade, os pesquisadores têm tentado encontrar Funções de Lyapunov genéricas que apresentem bons resultados para uma

classe de problemas. O Problema de Lure trata de uma classe de sistemas não-lineares cujo campo vetorial é formado por um termo linear mais uma combinação de funções não-lineares. Assume-se que a matriz do termo linear é Hurwitz e que as funções não-lineares satisfazem uma determinada condição de setor. O Problema de Lure consiste em verificar se a origem permanece assintoticamente estável para qualquer função não-linear que satisfaça a condição de setor dada. Nesse caso, a origem é dita ser absolutamente estável. Baseado o Método de Lyapunov, o Critério do Círculo e o Critério de Popov foram desenvolvidos para verificar a estabilidade absoluta dessa classe de sistemas. Estes critérios se baseiam em Funções de Lyapunov genéricas.

Este trabalho apresenta um procedimento sistemático para estimar o conjunto atrator e sua respectiva área de atração de uma classe de sistemas não-lineares, chamado neste trabalho Problema de Lure Estendido. O Problema de Lure Estendido consiste de sistemas não-lineares que podem ser escritos na forma do Problema de Lure convencional. Entretanto, uma das funções não-lineares pode violar a condição de setor em torno da origem. Nesse caso, o conjunto atrator pode ser mais complexo que pontos de equilíbrio isolados. O procedimento desenvolvido é baseado na Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle e usa as Funções de Lyapunov do Problema de Lure para estimar o conjunto atrator e sua respectiva área de atração. Os parâmetros da Função de Lyapunov são obtidos resolvendo um problema de otimização posto na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

2 REVISÃO DE LITERATURA

Estudos de estabilidade de sistemas não-lineares surgem em diversos campos da engenharia. Muitas vezes, a questão que se apresenta não é apenas determinar a existência de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema, ponto de operação, mas também a área de atração deste ponto, Khalil (1992) e Vidyasagar (1993). A análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência é um problema prático que envolve a busca pela área de atração de um ponto de equilíbrio estável, Anderson e Fouad (1977), Kundur (1994) e Bretas e Alberto (2000). Entretanto, quando se trata de sistemas não-lineares, geralmente não é possível determinar analiticamente a área de atração de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Além disso, não são raros os problemas nos quais o conjunto atrator de interesse é mais complicado que um ponto de equilíbrio isolado, como por exemplo, ciclos limites estáveis, que dão origem a trajetórias periódicas, ou atratores caóticos. Em Venkatasubramanian e Ji (1999) é analisado um sistema elétrico de potência que possui, simultaneamente, um ponto de equilíbrio estável, um ciclo limite estável e dois atratores estranhos.

Dellnitz e Hohmann (1997) propuseram um procedimento numérico para a determinação da área de atração de sistemas não-lineares. O algoritmo proposto é baseado em uma técnica de subdivisão do espaço de estados e tem a vantagem de tratar sistemas não-lineares em geral, desde sistemas bem comportados que possuam apenas um único ponto de equilíbrio estável até sistemas com conjuntos atratores complexos, como atratores estranhos. Este método aproxima numericamente o conjunto atrator através de uma subdivisão, em retângulos generalizados, de uma região do espaço de estados definida *a*

priori para cada sistema analisado. Através de um processo de seleção, os retângulos que não contêm nenhuma parte do conjunto atrator são descartados e os restantes são novamente subdivididos e o processo se repete. Os autores afirmam que, com um número reduzido de repetições, o atrator pode ser bem caracterizado. Entretanto, este método pode se tornar bastante lento quando a dimensão do sistema analisado aumenta. Além disso, a escolha da região inicial é fundamental para o resultado obtido, pois o processo determina conjuntos positivamente invariantes e, portanto, não diferencia a área de atração do conjunto atrator em si. Assim, para que o conjunto atrator possa ser obtido a região definida inicialmente deve estar contida na área de atração. Isso pode comprometer o uso do método quando não se tem uma estimativa inicial da área de atração ou quando se deseja diferenciar a área de atração do conjunto atrator.

Diversos métodos analíticos podem ser utilizados para se obter informações acerca de conjuntos atratores. Métodos que utilizam funções descritivas têm sido bastante utilizados para analisar ciclos limites de sistemas não-lineares, Khalil (1992), Miller et al. (1984) e Qiu e Filanovsky (1987). Esses métodos se propõem a verificar a existência e/ou a estabilidade do ciclo limite. Entretanto, esses métodos são baseados em aproximações do sistema não-linear ou da resposta periódica analisada, de modo que, em geral, os resultados obtidos são válidos apenas nas vizinhanças do ciclo limite. Desse modo, tais métodos não dão informações sobre características não-locais, como as áreas de atração. Os Expoentes de Lyapunov, Argyris et al. (1994), fornecem informações sobre conjuntos atratores de sistemas não-lineares com comportamentos mais complicados, como os atratores estranhos. Outros coeficientes, como a Dimensão Fractal ou a Dimensão Intrínseca Local, Heidari e Nikias (1993), também foram propostos para essa mesma finalidade. Esses índices podem ser bastante interessantes, pois dão uma noção da dimensão do atrator. Entretanto, além da obtenção desses índices ser uma tarefa relativamente complexa, esses índices não fornecem informações importantes como a localização do atrator ou sua área de atração. Um procedimento analítico para estimar conjuntos atratores foi utilizado por Dieudelot e Borne (2001). Esse procedimento consiste na construção de um sistema dinâmico auxiliar e na escolha de uma norma vetorial conveniente. Desse modo, a norma

do vetor de estados, calculada ao longo das trajetórias do sistema original, é limitada pelo sistema auxiliar. Se este sistema auxiliar for construído convenientemente, pode-se concluir sobre a existência de um atrator assintoticamente estável e também estimá-lo com uma boa precisão. Entretanto, os autores não dizem como encontrar tal sistema auxiliar ou uma norma adequada, nem mesmo são dados indicativos de como fazer estas escolhas para sistemas não-lineares em geral. Além disso, a área de atração também não é contemplada por esse método.

Sistemas não-lineares cujo conjunto atrator é constituído por um único ponto de equilíbrio estável, podem ser analisados por diversos métodos baseados no Método de Lyapunov. Esses métodos, além de concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, fornecem uma estimativa, ainda que conservadora, da área de atração do mesmo. Em geral, essa estimativa é feita segundo o Princípio de Invariância de LaSalle. Para sistemas específicos, como os sistemas elétricos de potência, essas idéias são utilizadas de forma intuitiva há bastante tempo, Magnusson (1947). Entretanto, mais recentemente estes métodos foram imbuídos de um melhor formalismo matemático, Chiang et al. (1987). Porém, uma dificuldade inerente aos métodos de Lyapunov é a necessidade de construção de uma função auxiliar chamada Função de Lyapunov. E uma vez que a análise não se limita a uma vizinhança de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, não se tem um procedimento geral e sistemático para a construção desta Função de Lyapunov. Além disso, mesmo a busca por funções candidatas pode não ser trivial, devido às características bastante restritivas da Função de Lyapunov e, em alguns casos, do sistema analisado, Chiang (1989), Narasimhamurthi (1984), Pai e Murthy (1973) e Pai e Murthy (1974).

Para sistemas autônomos, a dificuldade de se encontrar uma Função de Lyapunov pode ser reduzida utilizando-se a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, Rodrigues, Alberto e Bretas (2001), pois, nesse caso, a busca é por uma Função de Lyapunov Estendida que apresenta características menos restritivas que a Função de Lyapunov. Ou seja, a derivada temporal da Função de Lyapunov Estendida pode ser positiva numa região limitada. O resultado dado pela Extensão do Princípio de Invariância é, em geral, menos conclusivo que o resultado do Princípio de Invariância. Isso ocorre devido ao

fato que, em geral, as condições estabelecidas asseguram a estabilidade de um conjunto de pontos ao invés de um ponto de equilíbrio isolado. Entretanto, essa característica também permite que se analisem sistemas com comportamentos mais complicados, isto é, sistemas que possuam ciclos limites, atratores estranhos, etc. Um resultado análogo, para sistemas não-autônomos, foi proposto por Gameiro e Rodrigues (2001), embora, nesse caso não se possa falar em conjuntos invariantes.

Os métodos de Lyapunov têm se popularizado cada vez mais como um procedimento prático de análise de estabilidade. Entretanto, mesmo com a utilização da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, a busca por funções candidatas geralmente é feita mediante conhecimentos intrínsecos acerca do sistema analisado. Por exemplo, a utilização de funções energia como candidatas à função de Lyapunov. Porém, para uma classe particular de sistemas não-lineares, conhecida como Problema de Lure, existem candidatas genéricas para as Funções de Lyapunov. O Problema de Lure trata de uma classe de sistemas não-lineares cujo campo vetorial é formado por um termo linear, cuja matriz é Hurwitz, mais uma combinação de funções não-lineares, que satisfazem uma determinada condição de setor. O Problema de Lure consiste em verificar se a origem é assintoticamente estável para qualquer função não-linear que satisfaça a condição de setor dada. Nesse caso, a origem é dita ser absolutamente estável, Khalil (1994) e Vidyasagar (1993). Estas funções genéricas, ou modificações das mesmas, foram bastante utilizadas na análise da estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, Pai et al. (1970), Willens (1971), Pai e Narayana (1976), Halim e Takahashi (2000) e Oliveira et al. (2002), embora as aplicações tenham ficado restritas aos sistemas de pequena dimensão. Uma generalização do problema de Lure foi proposta por Gan e Han (2003), na qual as variáveis do vetor de saída, que são argumentos das funções não-lineares, são definidas implicitamente por meio das mesmas funções não-lineares.

Os critérios do Círculo e de Popov verificam, no domínio da freqüência, se, para sistemas com uma única função não-linear, as funções candidatas atendem às condições do Teorema de Lyapunov. Estes critérios são baseados no Lema de Kalman-Yakubovich-Popov, que se aplica a sistemas com qualquer número de funções não-lineares. Além disso, a decomposição

matricial dada nesse Lema também poderia ser utilizada para a obtenção dos parâmetros das Funções de Lyapunov para o Problema de Lure. Embora, esse não seja um procedimento sistemático de obtenção desses parâmetros, Idanmou e Tao (1987), Wen (1988), Rantzer (1996) e Ferrante e Pandolfi (2002). A estabilidade absoluta da origem no Problema de Lure também pode ser verificada mediante o uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) como alternativa ao Lema de Kalman-Yakubovich-Popov, Boyd et al. (1994), Vanantwerp e Braatz (2000), Kakutani et al. (2000) e Gapski e Geromel (2001). A utilização de LMIs, não só facilita a determinação da estabilidade absoluta da origem quando o sistema possui mais de uma função não-linear, como também torna muito mais simples o cálculo dos parâmetros das Funções de Lyapunov. Isso se deve aos algoritmos de solução de LMIs que são bastante versáteis e apresentam excelentes características de convergência, Nemirovskii e Gahinet (1994) e Miller e Smith (2000). Uma enorme variedade de problemas tem sido escrita na forma de LMIs, devido à versatilidade dos algoritmos de solução. Um exemplo bastante interessante é o procedimento proposto por Coutinho et al. (2002) para análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência.

Uma variedade enorme de sistemas não-lineares pode ser analisada mediante o Método de Lyapunov. Como é o caso dos sistemas dinâmicos chaveados, Branick (1998) e Hespanha (2004), ou sistemas dinâmicos cujos campos vetoriais são não-suaves, Tao e Kokotovic (1994) e Lee e Kim (1995). Entretanto, como estes sistemas podem envolver funções não-suaves ou *multivalued*, pode ser interessante representá-los por meio de inclusões diferenciais, Smirnov (2000). A teoria de inclusões diferenciais é relativamente recente, mas a maioria dos conceitos disponíveis para as equações diferenciais já possui seu correspondente para as inclusões diferenciais. Por exemplo, a existência de soluções para todo tempo futuro, Seah (1982) e Taniguchi (1992), a caracterização da estabilidade uniforme, Angeli et al. (2004), a definição de conjuntos invariantes e o estabelecimento de condições para a invariância, Wang e Michel (1996), Shekhar (1996) e Carja e Marques (2002). As inclusões diferenciais podem ser bastante convenientes para a análise de sistemas dinâmicos com histerese, visto que os procedimentos propostos para a análise destes sistemas podem ser difíceis de aplicar em ordens elevadas, Moreno et

al. (2003), ou necessitar de hipóteses que podem ser bastante restritivas, Paré et al. (2001). Nesse último, os autores fazem a análise da estabilidade absoluta de um sistema dinâmico com histerese utilizando um caso particular do Problema de Lure. Nesse caso, supõe-se que as inclinações das funções não-lineares do Problema de Lure satisfazem condições de setor, Haddad e Kapila (1995) e Park et al. (1998).

3 PRELIMINARES MATEMÁTICAS

O objetivo deste capítulo é apresentar de forma sucinta os principais conceitos e resultados matemáticos utilizados no trabalho. Os resultados são apresentados por meio de teoremas sem suas demonstrações. Maiores detalhes ou as demonstrações aqui omitidas podem ser encontrados nas referências indicadas.

3.1 Sistemas não-lineares

O comportamento dinâmico de diversos sistemas físicos, como os sistemas elétricos de potência, pode ser descrito por meio de equações diferenciais ordinárias (EDO). Um conjunto de equações diferenciais ordinárias de ordem total n pode ser reescrito como um sistema de n equações diferenciais de 1ª ordem. Portanto, o estudo destes sistemas pode ser estendido para todas as equações diferenciais ordinárias, Argyris et al. (1994), Khalil (1992), Vidyasagar (1993) e Wiggins (1990). Desse modo, sendo $x \in R^n$ as variáveis de estado do sistema e t o tempo, supondo que não haja uma entrada forçante e o sistema seja definido $\forall t \geq 0$, a dinâmica do sistema será dada por:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

Quando a função não-linear da eq. (3.1) for invariante no tempo, o sistema é chamado de autônomo. A eq. (3.1) juntamente com um conjunto de condições iniciais, x_0 num instante inicial $t_0 \geq 0$, configuram o chamado problema de valor inicial (PVI), que consiste em se encontrar a trajetória do sistema, que parte de x_0 no tempo t_0, para $t \geq t_0$.

Uma vez que se quer representar sistemas físicos determinísticos por meio de EDOs, deve-se garantir que a resposta do PVI seja única. O teorema abaixo estabelece condições suficientes para que a solução do PVI exista e seja única, Khalil (1992).

Teorema 3.1: Seja $f(t,x)$ contínua por partes em t, satisfazendo $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$ e $\|f(t,x_0)\| \leq m$, $\forall x, y \in R^n$ e $\forall t \in [t_0, t_1]$, onde t_1 pode ser arbitrariamente grande, L e m constantes reais. Então, o PVI $\dot{x} = f(t,x)$ com $x(t_0) = x_0$, tem uma única solução sobre $[t_0, t_1]$.

Quando $f(t,x)$ é não-linear, mesmo que a solução do PVI exista, em geral não é possível expressá-la em termos de funções elementares. Nesse caso, a solução do PVI só pode ser encontrada numericamente.

Os pontos de equilíbrio de um sistema não-linear são os estados, x, que anulam o campo vetorial, $f(t,x) = 0$, $\forall t \geq 0$. Assim, uma trajetória do sistema, com condição inicial em um ponto de equilíbrio, não varia no tempo e é formada pelo próprio ponto de equilíbrio. Desse modo, um sistema não-linear pode ter nenhum, apenas um, um número finito ou infinito de pontos de equilíbrio, podendo ser isolados ou não. Dado um ponto de equilíbrio de interesse, sempre se pode fazer uma translação nos estados do sistema de modo que a origem, nas novas variáveis, se torne o ponto de equilíbrio de interesse. Desse modo, sem perda de generalidade, pode-se definir a estabilidade da origem no sentido de Lyapunov, Khalil (1992):

Definição 3.1: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (3.1) é dito ser uniformemente estável se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existir um

$\delta(\varepsilon) > 0$, independente de t_0, tal que, para toda condição inicial x_0 satisfazendo $\|x_0\| < \delta$, a trajetória do sistema satisfaça $\|x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 3.2: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (3.1) é uniformemente assintoticamente estável se ele é uniformemente estável e existe um $\delta > 0$, independente de t_0, tal que, para todo $\|x_0\| < \delta$, $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ uniformemente em t_0.

É importante notar que, no caso de sistemas autônomos, a uniformidade em relação a t_0 é inerente ao sistema. Portanto, as definições 3.1 e 3.2 podem ser reescritas como, Khalil (1992):

Definição 3.3: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ é estável se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existir um $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que, para toda condição inicial x_0 satisfazendo $\|x_0\| < \delta$, a trajetória do sistema satisfaça $\|x(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 3.4: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável se ele é estável e existe um $\delta > 0$, tal que, para todo $\|x_0\| < \delta$, $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Dado um ponto de equilíbrio estável de um sistema não-linear, existirá um conjunto de condições iniciais x_0 que atendem as definições 3.2 a 3.4. Este conjunto de condições iniciais, chamado de área de atração, é definido formalmente como, Vidyasagar (1993):

Definição 3.5: Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável do sistema (3.1), define-se sua área de atração como o conjunto:

$$A(0) = \{x_0 \in R^n : \exists t_0 \in R_+ \ \ tal\ que\ \ x(t_0) = x_0 \ \ e\ \ x(t) \to 0 \ \ quando\ \ t \to \infty\} \tag{3.2}$$

Definição 3.6: Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$, define-se sua área de atração como o conjunto:

$$A(0) = \{x_0 \in R^n : x(t_0) = x_0 \;\; e \;\; x(t) \to 0 \;\; quando \;\; t \to \infty\} \tag{3.3}$$

Note-se que a área de atração, como o próprio nome indica, só está definida para pontos de equilíbrio atrativos. Entretanto, em alguns problemas de engenharia, este termo também é utilizado para pontos de equilíbrio estáveis, mas não assintoticamente estáveis. Geralmente, não é possível encontrar analiticamente a área de atração de um ponto de equilíbrio de um sistema não-linear. Porém, os métodos diretos, derivados do Teorema de Lyapunov, permitem, não só verificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio, como também estimar sua área de atração. Antes de apresentar o Teorema de Lyapunov para sistemas autônomos, algumas definições são necessárias.

Definição 3.7: Uma função escalar $V : R^n \to R$ é:

i) definida positiva num domínio D se e só se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ em D-{0};

ii) semidefinida positiva num domínio D se e só se $V(0) = 0$ e $V(x) \geq 0$ em D;

iii) definida negativa se $-V(x)$ for definida positiva;

iv) semidefinida negativa se $-V(x)$ for semidefinida positiva;

v) indefinida, caso contrário.

No caso de uma função escalar quadrática, isto é $V(x) = x^T P x$, $V(x)$ é definida positiva se P for definida positiva e $V(x)$ é semidefinida positiva se P for semidefinida positiva. Uma matriz P é definida positiva se a parte Hermitiana de P, ou seja $\frac{1}{2}[P + P^*]$, tiver autovalores positivos, onde o asterisco indica a transposta conjugada da matriz. A matriz é semidefinida positiva se os autovalores da parte Hermitiana de P forem não-negativos, Horn e Johnson (1996) e Leon (1999).

Definição 3.8: Um conjunto $M \subset R^n$ é dito ser invariante com relação ao sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ se todo $x_0 \in M \;\; \Rightarrow \;\; x(t) \in M \;\; \forall t$.

Teorema 3.2: Seja $x=0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x}=f(x)$. Seja $V:D\subset R^n \to R$ uma função continuamente diferenciável e definida positiva em uma vizinhança D da origem. Se $\dot{V}(x)$ for semidefinida negativa em D, então a origem é um ponto de equilíbrio estável do sistema. Além disso, se $\dot{V}(x)$ for definida negativa em D, então a origem será um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

O teorema acima fornece condições apenas suficientes, mas não necessárias, para a estabilidade, nem tampouco dá indicativos de como se encontrar a função $V(x)$, conhecida como Função de Lyapunov. Além disso, métodos sistemáticos para se construir as Funções de Lyapunov somente estão disponíveis para sistemas simples de pequena dimensão, e as condições impostas pelo teorema podem restringir bastante o universo das possíveis funções candidatas. Uma maneira de expandir este universo é dada pelo Princípio de Invariância de LaSalle, Khalil (1992) e Vidyasagar (1993).

Teorema 3.3: Sejam o sistema autônomo não linear $\dot{x}=f(x)$ e a função $V(x)$, onde $f:R^n \to R^n$ e $V:R^n \to R$ são funções de classe C^1. Seja $L\in R$ uma constante tal que o conjunto $\Omega_L=\{x\in R^n : V(x)<L\}$ é limitado. Suponha que $\dot{V}(x)\leq 0$ para todo $x\in\Omega_L$ e defina $E=\{x\in\Omega_L : \dot{V}(x)=0\}$. Seja M o maior conjunto invariante contido em E. Então toda solução do sistema começando em Ω_L converge para M quando $t\to\infty$.

Nesse caso, mesmo que $\dot{V}(x)$ seja semidefinida negativa, as trajetórias do sistema que partem do conjunto Ω_L convergirão para o conjunto invariante M. Portanto, se for possível encontrar $V(x)$ e L, de tal forma que Ω_L seja limitado e o único integrante do conjunto M seja o ponto de equilíbrio de interesse, este será assintoticamente estável. Além disso, Ω_L será uma estimativa para a área de atração.

Entretanto, as condições para a Função de Lyapunov podem ser ainda menos restritivas, conforme estabelecido pela Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, Rodrigues, Alberto e Bretas (2001).

Teorema 3.4: Sejam o sistema autônomo não linear $\dot{x} = f(x)$ e a função $V(x)$, onde $f : R^n \to R^n$ e $V : R^n \to R$ são funções de classe C^1. Seja $L \in R$ uma constante tal que o conjunto $\Omega_L = \{x \in R^n : V(x) < L\}$ é limitado. Seja o conjunto $C = \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$, suponha que $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$. Defina os conjuntos $\Omega_l = \{x \in R^n : V(x) \leq l\}$ e $E = \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \Omega_l$. Seja M o maior conjunto invariante do sistema contido em E. Então toda solução do sistema começando em Ω_L converge para M quando $t \to \infty$. Além disso, toda solução começando em Ω_l permanece em Ω_l e tende para o maior conjunto invariante contido em Ω_l.

A extensão acima permite que se avalie a estabilidade mesmo quando a função $V(x)$ gerar regiões dentro de Ω_L nas quais $\dot{V}(x)$ seja positiva, desde que estas regiões sejam limitadas. Nesse caso, se os membros do conjunto invariante M não forem conhecidos, pode-se chegar a uma conclusão em termos de conjunto melhor do que em termos de pontos de equilíbrio. Pois, se o conjunto M, ou até mesmo todo o conjunto E, estiver contido no conjunto Ω_l, pode-se dizer que Ω_l é um conjunto atrator para o sistema e o conjunto Ω_L é uma estimativa de sua área de atração. As funções que satisfazem a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle são chamadas Funções de Lyapunov Estendidas.

O Teorema de Lyapunov pode ser estendido para o caso de sistemas não-autônomos em geral. Entretanto, as aplicações de maior interesse são para os casos onde se tem estabilidade uniforme, e para esses casos, o Teorema de Lyapunov pode ser enunciado da seguinte forma, Khalil (1992) e Vidyasagar (1993):

Teorema 3.5: Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(t, x)$, onde $f : [0, \infty) \times D \subset R^n \to R^n$ satisfaz o teorema 3.1 em $[0, \infty) \times D \subset R^n$ e $D = \{x \in R^n : \|x\| < r\}$. Seja $V : [0, \infty) \times D \subset R^n \to R$ uma função de classe C^1 tal que:

$$a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -c(\|x\|) \tag{3.5}$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in D$, onde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são funções estritamente crescentes definidas em $[0,r)$ com $a(0) = b(0) = c(0) = 0$. Então, a origem é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável do sistema.

No caso de sistemas não-autônomos, não se aplica o Princípio de Invariância ou sua extensão. Entretanto, pode-se utilizar o conceito de dissipatividade para o estudo da estabilidade uniforme. O teorema abaixo estabelece condições suficientes para a dissipatividade uniforme de um sistema não-linear não-autônomo, inclusive com variação paramétrica, Gameiro e Rodrigues (2001). É importante notar que, assim como o Teorema 3.4, este também permite que existam regiões onde a derivada da Função de Lyapunov seja positiva, desde que estas regiões sejam limitadas.

Teorema 3.6: Seja E um espaço de Banach e $\Lambda \subset E$, seja um sistema $\dot{x} = f(t,x,\lambda)$ onde $f : R \times R^n \to R^n$ satisfaz o teorema 3.1 em $R \times R^n$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Seja $V : R \times R^n \times \Lambda \to R$ uma função de classe C^1 tal que:

$$a(x) \leq V(t,x,\lambda) \leq b(x) \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x,\lambda) \leq -c(x) \tag{3.7}$$

$\forall (t,x,\lambda) \in R \times R^n \times \Lambda$, onde $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são funções escalares contínuas, definidas em R^n, sendo que $a(\cdot)$ é radialmente ilimitada. Assuma que existe $\rho > 0$, tal que o conjunto $C_\rho = \{x \in R^n : c(x) \leq \rho\}$ é não-vazio e limitado. Seja r suficientemente grande tal que $r > \sup_{x \in C_\rho} b(x)$, e o conjunto $\mathrm{A}_r = \{x \in R^n : a(x) \leq r\}$.

Então:

i) Dada uma condição inicial $(t_0, x_0) \in R \times R^n$, a solução do sistema está definida para todo $t \geq t_0$ e existe $t_1 \geq t_0$ tal que a solução pertence ao conjunto A_r para todo $t \geq t_1$.

ii) As trajetórias do sistema, limitadas $\forall t \in R$, estão contidas no conjunto A_r.

É importante salientar que a exigência de que o número ρ, que define a região C_ρ, seja estritamente positivo é necessária apenas para a conclusão do item *ii*. Já o resultado do item *i* é válido mesmo para $\rho = 0$.

3.2 Problema de Lure

Todos os resultados do item anterior, baseados no teorema de Lyapunov, necessitam de que se encontre uma Função de Lyapunov, ou pelo menos uma Função de Lyapunov Estendida. Entretanto, não existe um procedimento geral para encontrar funções de Lyapunov para sistemas não-lineares. Porém, para algumas classes de sistemas não-lineares, existem formas genéricas para funções candidatas. Seja o sistema da fig. 3.1, Khalil (1992) e Vidyasagar (1993), onde matriz A é Hurwitz:

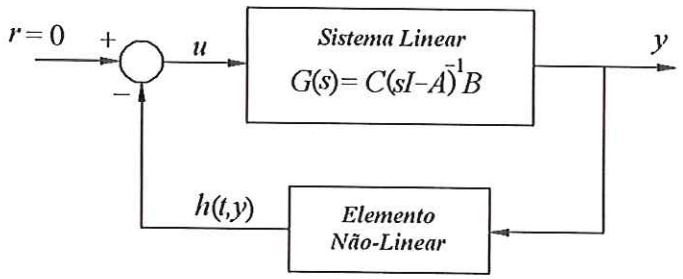


Figura 3.1: Sistema considerado no problema de Lure.

Em espaço de estados o sistema acima possui a seguinte representação, onde as matrizes A, $n \times n$, B, $n \times p$, e C, $p \times n$, são reais:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bh(t,y) \\ y = Cx \end{cases} \tag{3.8}$$

Definição 3.9: Suponha que a função não-linear $h(t,y)$ seja descentralizada, isto é, $h(t,y) = [h_1(t,y_1) \cdots h_p(t,y_p)]^T$, diz-se que a mesma satisfaz uma condição

de setor definida por $K = diag(k_i)$ numa região $\Gamma = \{y \in R^p : a_i \leq y_i \leq b_i\}$ contendo a origem, onde $k_i > 0$, se $\forall y \in \Gamma$ e $\forall t \geq t_0$:

$$h(t,y)^T[h(t,y) - Ky] \leq 0 \tag{3.9}$$

Sabendo-se que a origem da parte linear do sistema é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, o Problema de Lure consiste em determinar se a origem permanece assintoticamente estável para qualquer não-linearidade que satisfaça a condição de setor dada. Nesse caso, diz-se que a origem é absolutamente estável num domínio finito. O Problema de Lure pode ser analisado com o Método de Lyapunov, utilizando as seguintes funções candidatas:

$$V(x) = x^T P x \tag{3.10}$$

onde a matriz real P, $n \times n$, é simétrica e definida positiva, quando o sistema for não-autônomo, e:

$$V(x) = x^T P x + 2\int_0^{Cx} h(y)^T N\, dy \tag{3.11}$$

onde P, $n \times n$, é simétrica e definida positiva e $N = diag(\eta_i)$ é semidefinida positiva, quando a não-linearidade for invariante no tempo. Esta função é conhecida como Função de Lyapunov Tipo Lure.

Para $K > 0$, a condição de condição de setor da eq. (3.9) equivale a $h(t,y)^T K^{-1}[h(t,y) - Ky] \leq 0$, de modo que, $-2h(t,y)^T TK^{-1}[h(t,y) - Ky] \geq 0$ para qualquer matriz $T = diag(\tau_i)$ semidefinida positiva. Derivando as eq. (3.10) e (3.11) no tempo, pode-se somar à essas derivadas o termo não negativo acima de modo a encontrar um limitante superior para as derivadas. Reescrevendo as equações resultantes na forma matricial, tem-se, respectivamente:

$$\dot{V}(t,x) \leq \begin{bmatrix} x^T & h(t,Cx)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + C^T T \\ -B^T P + TC & -2TK^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(t,Cx) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\dot{V}(x) \leq \begin{bmatrix} x^T & h(Cx)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + A^T C^T N + C^T T \\ -B^T P + NCA + TC & -2TK^{-1} - NCB - B^T C^T N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(Cx) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Caso existam matrizes P, N e T, tais que a matriz $\begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + A^T C^T N + C^T T \\ -B^T P + NCA + TC & -2TK^{-1} - NCB - B^T C^T N \end{bmatrix}$ seja definida negativa, o Teorema 3.2 permite concluir que a origem é assintoticamente estável. Entretanto, se essa matriz for semidefinida negativa, mas possuir uma decomposição conveniente, ainda se pode concluir a cerca da estabilidade assintótica da origem. Nesse caso, e também quando o sistema for não-autônomo, eq. (3.13), pode-se utilizar o Lema de Kalmam-Yakubovich-Popov, Teorema 3.7, para verificar a estabilidade. Primeiro é preciso definir o conceito de função real positiva, Anderson e Vongpanitlerd (1973), Haddad e Kapila (1995), VanValkenburg (1960) e Wen (1988):

Definição 3.10: Uma matriz pxp de funções de transferência, $G(s)$, de uma variável complexa s é chamada real positiva se:

i) $G(s)$ é real para todo s real;

ii) os elementos de $G(s)$ são analíticos para $\mathrm{Re}\{s\} > 0$;

iii) os pólos de $G(s)$ no eixo $j\omega$ são distintos e seus resíduos são simétricos semidefinidos negativos;

iv) $G(s)^* + G(s) \geq 0$ para todo $s = j\omega$, exceto nos pólos de $G(s)$;

A função é estritamente real positiva se $G(s)$ é analítica para $\mathrm{Re}\{s\} \geq 0$ e $G(s)^* + G(s) > 0$ para todo $s = j\omega$.

Teorema 3.7: Seja $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ uma função de transferência pxp, onde A é Hurwitz, (A,B) é controlável e (A,C) é observável. $G(s)$ é estritamente real positiva se e somente se existirem uma matriz simétrica definida positiva P, matrizes W e L e um escalar positivo ε, tais que:

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon P \tag{3.14}$$

$$PB = C^T - L^T W \tag{3.15}$$

$$W^T W = D + D^T \tag{3.16}$$

O Teorema 3.7 estabelece condições para que as derivadas das funções de Lyapunov do problema de Lure, eq. (3.12) e (3.13), sejam estritamente negativas mesmo quando as formas quadráticas no lado direito das eq. (3.12) e (3.13) forem apenas semidefinidas negativas. Para isso, as funções:

$$G(s) = TK^{-1} + TC(sI - A)^{-1}B \tag{3.17}$$

$$G(s) = (TK^{-1} + NCB) + (TC + NCA)(sI - A)^{-1}B \tag{3.18}$$

devem ser estritamente reais positivas e os autovalores da matriz A não podem ser iguais a $-1/\eta_i \; \forall i$, Park, Banjerdpongchai e Kailath (1998). Nesse caso:

$$\dot{V}(t,x) \le \begin{bmatrix} x^T & h(t,Cx)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L^T L - \varepsilon P & L^T W \\ W^T L & -W^T W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(t,Cx) \end{bmatrix} \le -\varepsilon x^T P x < 0 \tag{3.19}$$

$$\dot{V}(x) \le \begin{bmatrix} x^T & h(Cx)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L^T L - \varepsilon P & L^T W \\ W^T L & -W^T W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(t,Cx) \end{bmatrix} \le -\varepsilon x^T P x < 0 \tag{3.20}$$

Assim, pode-se aplicar o Teorema 3.5, do qual se conclui que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para quaisquer não-linearidades satisfazendo a condição de setor dada.

Se o interesse for encontrar funções da forma da eq. (3.10) ou (3.11) para um sistema com uma não-linearidade específica, o problema passa a ser encontrar matrizes P, T, N e possivelmente K, de modo que a função obtida seja uma função de Lyapunov. Como os resultados obtidos são válidos para qualquer não-linearidade que satisfaz a condição de setor, é possível estender estes resultados para sistemas com campos vetoriais mais complexos, desde que também satisfaçam a condição de setor. Um exemplo são os sistemas descritos por inclusões diferenciais (DI).

3.3 Inclusões diferenciais

A teoria das inclusões diferenciais está diretamente relacionada com a teoria de conjuntos, que aparece inclusive na própria definição do problema. Os detalhes desta seção podem ser encontrados em Smirnov (2000), Kannan e Krueger (1996), Rudin (1966), Taniguchi (1992) e Seah (1982). Uma inclusão estabelece uma relação entre dois conjuntos na qual um pertence ao outro. No caso de uma inclusão diferencial, o problema é encontrar uma função cuja taxa de variação temporal pertença a um determinado conjunto:

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \; t \in [0,T] \tag{3.21}$$

onde $F(x)$ é um *set-valued map* (SVM) que associa com qualquer ponto $x \in R^n$ um conjunto $F(x) \in R^n$. Diversos sistemas podem ser descritos por meio de inclusões diferenciais, entre eles os sistemas regidos por desigualdades diferenciais, equações diferenciais implícitas, equações diferenciais ordinárias com perturbação desconhecida no campo vetorial, etc.

Antes de analisar o problema de encontrar as soluções da DI (3.21), são necessárias algumas definições importantes. Alguns conceitos básicos não serão definidos.

Definição 3.11: Sejam X e Y dois espaços normados. Um *set-valued map* $F: X \to Y$ é um mapeamento que associa com qualquer $x \in X$ um conjunto $F(x) \in Y$. F é completamente caracterizado por seu gráfico $grF = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$.

De forma similar às funções usuais, define-se o domínio, $dom\,F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$, a imagem, $im\,F = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : y \in F(x)\}$, e a imagem inversa de F, $F^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x,y) \in grF\}$. Ao longo do texto, $|\cdot|_X$ indica uma norma no espaço X, $B_Y = \{y \in Y \mid |y|_Y \leq 1\}$ a bola unitária no espaço Y e $d(x,A) = \inf\{|x-a| \mid a \in A\}$ a distância entre o ponto x e o conjunto A.

Definição 3.12: F é *upper semi-continuous* (USC) em $x_0 \in X$ se, para qualquer conjunto aberto $M \supset F(x_0)$, existe uma vizinhança $\Omega(x_0)$ tal que $F(\Omega(x_0)) \subset M$. F é dito USC se é USC $\forall\, x_0 \in X$.

Definição 3.13: F é *lower semi-continuous* (LSC) em $x_0 \in X$ se, para qualquer $y_0 \in Y$ e qualquer vizinhança $\Omega(y_0)$, existe uma vizinhança $\Omega(x_0)$ tal que $F(x) \bigcap \Omega(y_0) \neq \emptyset \;\; \forall\, x \in \Omega(x_0)$. F é dito LSC se é LSC $\forall\, x_0 \in X$.

F é contínuo em x_0 se for USC e LSC em x_0, note-se que LSC$\not\Rightarrow$USC assim como USC$\not\Rightarrow$LSC. Uma condição mais forte que a continuidade é a condição de Lipschitz, que também pode ser estabelecida para SVM.

Definição 3.14: F é Lipschitziano se existe $l \geq 0$ tal que $F(x_1) \subset F(x_2) + l|x_1 - x_2|_X B_Y \;\; \forall\, x_1, x_2 \in X$.

Definição 3.15: F é localmente Lipschitziano se, para qualquer $x \in X$, existe $\varepsilon > 0$ e $l > 0$ tal que $F(x_1) \subset F(x_2) + l|x_1 - x_2|_X B_Y \;\; \forall\, x_1, x_2 \in x + \varepsilon B_X$.

Definição 3.16: O cone tangente a um conjunto $A \subset X$ em um ponto $x \in A$ é dado por $T_+(x, A) = \left\{ v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{d(x + \lambda v, A)}{\lambda} = 0 \right\}$.

Definição 3.17: O cone contingente a um conjunto $A \subset X$ em um ponto $x \in A$ é dado por $T_-(x, A) = \left\{ v \in X \mid \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{d(x + \lambda v, A)}{\lambda} = 0 \right\}$.

Nas definições 3.16 e 3.17, é a divisão de $d(x + \lambda v, A)$ por λ que garante que, no limite, o "ângulo" entre o vetor direção v e conjunto A tenda para zero. O uso do $\lim\inf$ permite tratar conjuntos mais complicados, pois o limite do

ínfimo existe mesmo quando o limite simples não existe, por exemplo, $\liminf_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x) = -1$.

Seja uma função suave $f: R \to R$, o gráfico de sua derivada direcional em um ponto $\hat{x}$, $x \to f'(\hat{x})x$, é tangente ao gráfico de $f(\cdot)$ no ponto $(\hat{x}, f(\hat{x}))$. Essa interpretação geométrica da derivada pode ser estendida para derivada de um SVM $F(x)$, que nesse caso também é um SVM cujo gráfico é um cone que se aproxima localmente do gráfico de $F(x)$.

Definição 3.18: Sejam $F: X \to Y$ e $(\hat{x}, \hat{y}) \in grF$, a derivada de F em $(\hat{x}, \hat{y})$ é o SVM $D_+F(\hat{x}, \hat{y}): X \to Y$ definido por $grD_+F(\hat{x}, \hat{y}) = T_+((\hat{x}, \hat{y}), grF)$, isto é, $y \in D_+F(\hat{x}, \hat{y})(x) \Leftrightarrow (x, y) \in T_+((\hat{x}, \hat{y}), grF)$.

Utilizando o cone contingente, define-se a derivada contingente do SVM, $D_-F(\hat{x}, \hat{y}): X \to Y$. Do mesmo modo que o cone contingente, a derivada contingente permite tratar de SVM com características mais complicadas.

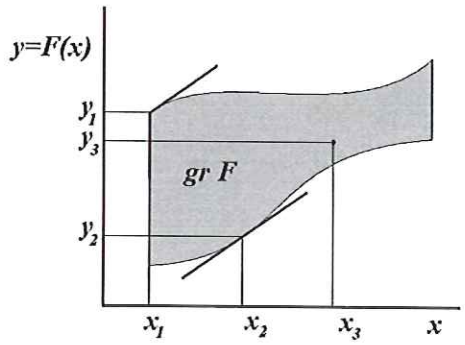


Figura 3.2: Exemplo de um SVM com as derivadas em pontos distintos.

Na fig. 3.2, $grD_+F(x_1, y_1)$ é formado por toda a região do lado direito e abaixo das semi-retas que partem do ponto (x_1, y_1), $grD_+F(x_2, y_2)$ é formado por toda a região acima da reta que passa pelo ponto (x_2, y_2) e $grD_+F(x_3, y_3)$ é formado por todo o R^2. Observe que, para $i = 1,2,3$, $y_i \in F(x_i)$ mas $\{F(x_i) - y_i\} \neq \emptyset$. Portanto, o gráfico da derivada varia de acordo com o ponto da imagem de x_i.

A noção de solução de uma inclusão diferencial requer algum conhecimento acerca da teoria da medida. Grosso modo, as medidas generalizam a idéia de comprimento no R, área no R^2, etc. Matematicamente, pode-se definir uma medida de modo arbitrário, desde que ela atenda às propriedades das medidas. Para a finalidade deste trabalho, podemos nos restringir à medida clássica de Lebesgue, da qual deriva a definição de função Lebesgue mensurável e da integral de Lebesgue.

Definição 3.19: Seja $E \subset R$ e $\{I_n\}$ uma coleção contável de intervalos abertos, (a_n, b_n), tal que $E \subset \bigcup_n I_n$, então a medida externa de Lebesgue é $m^*(E) = \inf_{E \subset \bigcup_n I_n} \sum_n |I_n|$, onde $|I_n| = b_n - a_n$. Além disso, o conjunto E é Lebesgue mensurável se, $\forall A \subset R$, $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$. A medida de Lebesgue $m(E)$ é a medida externa de Lebesgue restrita à classe de subconjuntos mensuráveis de R.

Definição 3.20: Uma função $f : E \to R^+ = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, onde E é um conjunto mensurável, é mensurável se, para qualquer conjunto aberto $A \subset R^+$, $f^{-1}(A) = \{x \mid f(x) \in A\}$ é mensurável.

Definição 3.21: A integral de Lebesgue de uma função $f : E \to R^+ = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ é dada por $\int_E f\, dm = \int_E f^+\, dm - \int_E f^-\, dm$, onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$ são funções não negativas tais que $f = f^+ - f^-$. A integral de Lebesgue de uma função não negativa é $\int_E f\, dm = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i \cap E)\right\}$, onde $0 \le \alpha_i \le f(x)$ $\forall x \in A_i$. A função f é dita ser Lebesgue integrável se $\int_E f\, dm$ está definida e é finita.

Por analogia, pode-se estender as definições acima para funções com contradomínio de dimensão maior que um aplicando-se a definição para cada componente da função. De um modo geral, os conjuntos usuais são

mensuráveis, por exemplo $\emptyset$ e R^n. Além disso, praticamente todas as funções que podem ser descritas são mensuráveis, em particular as funções que possuem a integral de Riemann são Lebesgue integráveis. A partir do conceito de medida, diz-se que uma propriedade qualquer é satisfeita em quase todo lugar (a.e., do inglês *almost everywhere*) de um conjunto E se o subconjunto $E_0 \subset E$, onde tal propriedade não é satisfeita, tem medida zero.

Definição 3.22: Uma função $x:[0,T] \to R^n$ é absolutamente contínua se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_k |x(t_k'') - x(t_k')| < \varepsilon$, para qualquer coleção contável de subintervalos disjuntos $[t_k', t_k'']$ de $[0,T]$ satisfazendo $\sum_k (t_k'' - t_k') < \delta$.

Uma função absolutamente contínua é contínua, diferenciável em quase todo lugar e sua derivada é Lebesgue integrável.

Uma DI pode ser vista como a representação de um sistema cujo campo vetorial não é único. Desse modo, $S_{[0,T]}(F, x_0)$ indica o conjunto das soluções da DI (3.21) com condição inicial x_0, isto é, o conjunto das funções $x:[0,T] \to R^n$ absolutamente contínuas com $x(0) = x_0$ satisfazendo a eq. (3.21) em quase todo lugar. Nesse caso, não faz sentido falar em unicidade, entretanto, é interessante poder garantir a existência das soluções.

Teorema 3.8: Seja a DI da eq. (3.21). Se $F(x)$ é fechado e convexo $\forall x \in R^n$ e é Lipschitziano com uma constante $l > 0$, então para qualquer $x_0 \in R^n$ existe $S_{[0,T]}(F, x_0)$ com $x(0) = x_0$. Além disso, as soluções são absolutamente contínuas com relação à condição inicial.

Teorema 3.9: Seja $R_{[0,T]}(F, x_0) = \{x(T) \mid x(\cdot) \in S(F, x_0)\}$ o *reachability set* de uma DI Lipschitziana e $\partial R_{[0,T]}(\cdot,\cdot)$ sua fronteira. Seja $x^* \in \partial R_{[0,T]}(F, x_0)$ e $x^* = \bar{x}(T)$, onde $\bar{x}(t) \in S_{[0,T]}(F, x_0)$, então $\bar{x}(t) \in \partial R_{[0,t]}(F, x_0)$ $\forall t \in [0,T]$.

Teorema 3.10: Seja a DI da eq. (3.21). Se $F(x)$ é fechado, convexo e limitado $\forall x \in R^n$ e é USC, então, para qualquer $x_0 \in R^n$, existe $S_{[0,T]}(F,x_0)$ com $x(0) = x_0$. Além disso, as soluções são contínuas com relação às condições iniciais.

Uma DI que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.8 é dita Lipschitziana e uma DI que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.10 é dita USC.

Teorema 3.11: Seja o *reachability set* de uma DI USC e $x^* \in \partial R_{[0,T]}(F,x_0)$, então existe $\bar{x}(t) \in S_{[0,T]}(F,x_0)$ tal que $\bar{x}(T) = x^*$ e $\bar{x}(t) \in \partial R_{[0,t]}(F,x_0)$ $\forall t \in [0,T]$.

A diferença entre os teoremas 3.9 e 3.11 é que, neste último, nem toda solução que pertence a $\partial R_{[0,T]}(F,x_0)$ para um certo T terá essa propriedade para todo $t \in [0,T]$.

Seah (1989) e Taniguchi (1990) propuseram teoremas que garantem a existência global do conjunto de soluções de uma DI USC variante no tempo. Sendo que o resultado do primeiro é um caso particular do segundo. Estes teoremas também podem ser usados caso a DI seja Lipschitziana.

Teorema 3.12: Seja a DI $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$, onde, para cada $t \in [0,\infty)$, $F(t,x)$ é USC em $x \in R^n$. Suponha que existe uma função $f(t,x) \in F(t,x)$ mensurável em $t \in [0,\infty)$ para cada $x \in R^n$. Suponha ainda que $F(t,x)$ é fechado, convexo, não vazio e satisfaz $|F(t,x)|_Y \leq \alpha(t) + \beta(t)|x|_X$ para cada $(t,x) \in [0,\infty) \times R^n$, onde $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são funções localmente Lebesgue integráveis em $[0,\infty)$. Então, qualquer solução da DI existe $\forall t \geq 0$.

No caso de uma DI invariante no tempo, eq. (3.21), as funções $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ podem ser escolhidas como constantes, o que implica que $F(x)$ deve ser limitado para cada x limitado. Além disso, para cada $x \in R^n$, $F(x)$ é uma constante em $t \in [0,\infty)$ e, portanto, mensurável neste intervalo.

Os conjuntos invariantes desempenham um papel muito importante no estudo do comportamento qualitativo das soluções. Da mesma forma que para os sistemas descritos por equações diferenciais, a construção de conjuntos invariantes via uma função auxiliar tem diversas vantagens práticas. Além disso, para as DI também se pode definir pontos de equilíbrio estáveis e enunciar o Teorema de Lyapunov.

Definição 3.23: Seja uma função $V:[0,T]\times R^n \to R$, uma solução $x(\cdot)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$ é monotônica com respeito a $V(t,x)$ se e só se $V(t_2,x(t_2))\le V(t_1,x(t_1))$, $\forall t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1\le t_2$.

Definição 3.24: Seja $v\in R^n$ uma dada direção, a derivada *upper* Dini de $f:R^n\to R^+$ é dada por $D^+f(x)(v)=\limsup_{\alpha\downarrow 0, v'\to v}\dfrac{f(x+\alpha v')-f(x)}{\alpha}$ e a derivada *lower* Dini é dada por $D^-f(x)(v)=\liminf_{\alpha\downarrow 0, v'\to v}\dfrac{f(x+\alpha v')-f(x)}{\alpha}$.

As derivadas Dini generalizam a idéia de derivada direcional, sendo que a direção na qual se quer calcular a taxa de variação da função pode ser atingida apenas no limite.

Teorema 3.13: Seja a DI da eq. (2.21), suponha que $F:R^n\to R^n$ é Lipschitziano com uma constante $l>0$, e é compacto e convexo para cada $x\in R^n$. Seja uma função $V:[0,T]\times R^n\to R$ Lipschitziana com uma constante $L>0$. Suponha que, para cada $(t,x)\in[0,T)\times R^n$, existe um vetor $v\in F(x)$ tal que $D^-V(t,x)(1,v)\le 0$. Então, dado $x_0\in R^n$, existe uma solução $x(\cdot)\in S_{[0,T]}(F,x_0)$ monotônica com respeito a $V(t,x)$.

Esse teorema garante que existe uma solução monotônica, mas não garante esta propriedade para todo o conjunto de soluções.

Teorema 3.14: Seja $C \subset R^n$ um conjunto fechado. Suponha que, para a DI da eq. (2.21), $F : C \to R^n$ é USC, compacto e convexo. Então, para qualquer $x_0 \in C$, existe uma solução $x(\cdot) \in S_{[0,\infty)}(F, x_0)$ satisfazendo $x(t) \in C \quad \forall t \in [0,\infty)$ se e só se, para qualquer ponto, $x \in C \quad F(x) \bigcap T_-(x, C) \neq \emptyset$.

Este teorema assegura a existência global de uma solução, entretanto, ao contrário do Teorema 3.8, esta existência não é garantida para todo o conjunto de soluções.

Definição 3.25: Um conjunto $C \subset R^n$ é invariante pela DI da eq. (3.21) se, dado $x \in C$, qualquer solução $x(\cdot) \in S_{[0,\infty)}(F, x_0)$ satisfaz $x(t) \in C \quad \forall t \in [0,\infty)$.

Teorema 3.15: Seja $C \subset R^n$ um conjunto fechado. Suponha que, para a DI da eq. (2.21), $F : R^n \to R^n$ é Lipschitziano com uma constante $l > 0$ e é compacto e convexo para cada $x \in R^n$. Então, o conjunto C é invariante pela DI se e só se, para qualquer ponto $x \in C$, $F(x) \subset T_-(x, C)$.

No caso de $F(x)$ ser USC, a condição $F(x) \subset T_-(x, C) \quad \forall x \in C$ não é necessária nem suficiente para garantir a invariância do conjunto C.

Definição 3.26: Seja a DI da eq. (2.21), suponha que $0 \in F(0)$. O ponto de equilíbrio $x = 0$ é dito ser estável se, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x_0 \in \delta B_{R^n}$, cada $x(\cdot) \in S_{[0,\infty)}(F, x_0)$ satisfaz $|x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,\infty)$.

Esta definição requer que as soluções começando próximas da origem existam para todo $t \geq 0$. Se a condição $|x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,\infty)$ é satisfeita para ao menos uma mas não para cada solução do conjunto $S_{[0,\infty)}(F, x_0)$, então $x = 0$ é dito ser fracamente estável. Se, além de ser estável (ou fracamente estável), $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ para cada (ou ao menos uma), solução então a origem é um ponto

de equilíbrio assintoticamente estável (ou fracamente assintoticamente estável). Se a origem não é pelo menos fracamente estável, então ela é instável.

O Teorema de Lyapunov garante que um ponto de equilíbrio é estável sem necessidade de encontrar o conjunto de soluções da DI. Para isso é necessário encontrar uma função auxiliar satisfazendo determinadas características, porém, assim como nos sistemas descritos por EDO, este resultado é apenas suficiente.

Teorema 3.16: Suponha que exista um número $\eta > 0$, uma função definida positiva $V : R^n \to R$ e uma função semidefinida negativa $W : R^n \to R$ tais que $D^+V(x)(v) \leq W(x)$ para todo $v \in F(x)$, $|x| \leq \eta$. Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ da DI da eq. (3.21) é estável.

Se a função $W(x)$ for definida negativa, a origem é assintoticamente estável. As demonstrações destes teoremas, dadas em Smirnov (2000), têm como idéia central, provar que toda solução da DI é monotônica com respeito à função $V(x)$.

O objetivo do trabalho é desenvolver um procedimento sistemático para estimar o conjunto atrator e sua área de atração de um sistema não-linear. São considerados tanto os sistemas autônomos quanto os não-autônomos, cujos campos vetoriais são descritos por funções suaves ou SVM. O procedimento desenvolvido é apresentado em detalhe no capítulo 4, que utilizará os conceitos apresentados neste capítulo.

4 PROCEDIMENTO DESENVOLVIDO

Os métodos baseados no Teorema de Lyapunov são largamente utilizados para a análise de estabilidade em problemas de engenharia, tanto para sistemas lineares quanto não-lineares. Estes métodos necessitam que se construa uma Função de Lyapunov para o sistema analisado. Porém, quando a região de interesse não se limita a uma vizinhança de algum ponto de equilíbrio assintoticamente estável, não existem métodos sistemáticos para a construção das Funções de Lyapunov para sistemas não-lineares em geral. Entretanto, para certas classes de sistemas não-lineares, existem funções candidatas genéricas, como é o caso dos sistemas que podem ser escritos na forma do Problema de Lure. Porém, as características das não-linearidades consideradas no Problema de Lure são bastante restritivas, o que pode limitar a sua aplicação para sistemas reais.

Neste trabalho foi desenvolvido um procedimento sistemático para a construção de uma Função de Lyapunov Estendida para uma certa classe de sistemas não-lineares. O procedimento é baseado nos teoremas 3.4 e 3.6, de modo que pode haver regiões limitadas onde a derivada da função encontrada é positiva. Assim, o procedimento é bastante conveniente para a análise de sistemas que possuam um conjunto atrator. O procedimento desenvolvido trata de sistemas que podem ser escritos na forma do Problema de Lure. Porém, as não-linearidades podem ter características menos restritivas que as do problema original.

As não-linearidades do Problema de Lure podem ser variantes ou invariantes no tempo. Portanto, as não-linearidades definem se o sistema é autônomo ou não, sendo cada caso tratado separadamente.

4.1 Sistemas não-autônomos

Seja um sistema não-linear escrito na forma do Problema de Lure, mas com apenas uma não-linearidade $h(t,y)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bh(t,y) \\ y = c^T x \end{cases} \tag{4.1}$$

onde a matriz A, $n \times n$, é Hurwitz, $x \in R^n$, $y \in R$, B e c são vetores de dimensão n. Seja $K > 0$ uma constante real e a não-linearidade $h : R \times R \to R$ uma função de classe C^1, satisfazendo condição de setor e limitação, respectivamente:

$$i) \begin{cases} 0 \le h(t,y) \le Ky & \forall t, \forall y \in R : 0 \le \beta \le y \le b \\ Ky \le h(t,y) \le 0 & \forall t, \forall y \in R : a \le y \le \alpha \le 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$ii) \ |h(t,y)| \le m \quad \forall t, \forall y \in R : \alpha \le y \le \beta \tag{4.3}$$

A condição *i*, eq. (4.2), ilustrada na fig. 4.1, é equivalente a:

$$h(t,y)K^{-1}[h(t,y) - Ky] \le 0 \tag{4.4}$$

Os intervalos $[a,\alpha]$ e $[\beta,b]$ em R definem uma região em R^n, limitada por hiperplanos, da seguinte forma:

$$\Gamma_- = \{x \in R^n : a \le c^T x \le \alpha\} \cup \{x \in R^n : \beta \le c^T x \le b\} \tag{4.5}$$

Ao contrário do Problema de Lure original, a origem deste sistema pode não ser um ponto de equilíbrio e, nesse caso, não faz sentido o estudo da estabilidade absoluta da mesma. Entretanto, como a não-linearidade $h(t,y)$ viola a condição de setor apenas numa vizinhança da origem, pode ocorrer de as trajetórias deste sistema convergirem para algum conjunto limitado. Nesse

caso, seria conveniente poder estimar este conjunto atrator e sua área de atração. Pois, se o conjunto atrator estiver suficientemente próximo do ponto de operação desejado, de modo que os estados dentro deste conjunto possam ser considerados pontos de operação aceitáveis, estará configurada, conforme LaSalle e Lefschetz (1961), a estabilidade prática para este sistema.

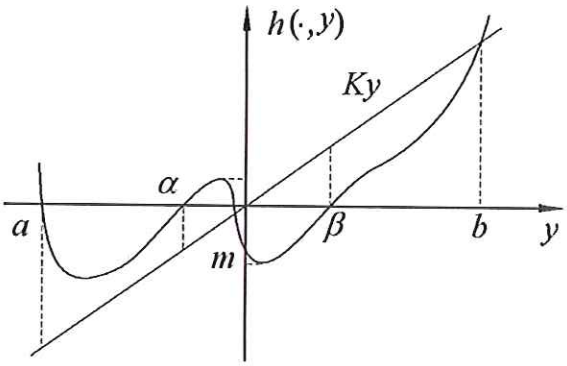


Figura 4.1: Característica das não-linearidades consideradas.

O Teorema 4.2 estabelece condições para a construção de uma estimativa para o conjunto atrator, e sua área de atração, de um sistema não-linear escrito na forma da eq. (4.1), satisfazendo as condições das eq. (4.2) e (4.3). Um resultado necessário para a demonstração do Teorema 4.2 é dado no Lema 4.1.

Lema 4.1: Seja $g(t,x):[a,b]\times D \subset R\times R^n \to R^p$ uma função de classe C^1 em $[a,b]\times D$. Seja uma função $W(t,x)=\begin{bmatrix} x^T & g(t,x)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta & \Phi \\ \Phi^T & \Sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ g(t,x) \end{bmatrix}$, onde a matriz $\begin{bmatrix} \Delta & \Phi \\ \Phi^T & \Sigma \end{bmatrix}$ é simétrica definida negativa. Então, $W(t,x)$ é uma função de classe C^1 em $[a,b]\times D$ e, $\forall t\in[a,b]$, $W(t,x)\le x^T\left[\Delta-\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T\right]x \quad \forall x\in D$, onde $\left[\Delta-\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T\right]$ é uma matriz simétrica definida negativa.

Demonstração: Utilizando o complemento de Schur, Boyd et al. (1994), pode-se afirmar que $\begin{bmatrix} \Delta & \Phi \\ \Phi^T & \Sigma \end{bmatrix}<0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\Delta & -\Phi \\ -\Phi^T & -\Sigma \end{bmatrix}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\Sigma>0 \\ -\Delta+\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T>0 \end{cases}$, portanto,

$\Sigma < 0$ e $\left[\Delta - \Phi\Sigma^{-1}\Phi^T\right] < 0$. Dado $(t,x) \in [a,b] \times D$ fixo, então $g(t,x)$ é um vetor real constante de dimensão p. Se $x \neq 0$, existe uma matriz real M de dimensão $p \times n$, não-única, tal que $g(t,x) = \Sigma^{-1}Mx$. Seja M_Φ uma matriz real de dimensão $p \times n$, tal que $M_\Phi = M + \Phi^T$. Portanto, para (t,x) dado, $g(t,x) = \left[\Sigma^{-1}M_\Phi - \Sigma^{-1}\Phi^T\right]x$ e $W(t,x) = x^T\Delta x + 2x^T\Phi g(t,x) + g(t,x)^T\Sigma g(t,x)$ pode ser reescrito como:

$$W(t,x) = x^T\Delta x + x^T\Phi\Sigma^{-1}M_\Phi x - x^T\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T x + x^T M_\Phi^T\Sigma^{-T}\Phi^T x - x^T\Phi\Sigma^{-T}\Phi^T x +$$
$$+ x^T M_\Phi^T\Sigma^{-T}\Sigma\Sigma^{-1}M_\Phi x - x^T M_\Phi^T\Sigma^{-T}\Sigma\Sigma^{-1}\Phi^T x - x^T\Phi\Sigma^{-T}\Sigma\Sigma^{-1}M_\Phi x + x^T\Phi\Sigma^{-T}\Sigma\Sigma^{-1}\Phi^T x$$

Porém, $x^T\Phi\Sigma^{-1}M_\Phi x = \left[x^T\Phi\Sigma^{-1}M_\Phi x\right]^T = x^T M_\Phi^T\Sigma^{-T}\Phi^T x$ e assim:

$$W(t,x) = x^T\Delta x + 2x^T\Phi\Sigma^{-1}M_\Phi x - 2x^T\Phi\Sigma^{-1}M_\Phi x - x^T\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T x + x^T M_\Phi^T\Sigma^{-1}M_\Phi x.$$

Sabe-se, Horn e Johnson (1996), que $\Sigma < 0 \Rightarrow \Sigma^{-1} < 0$, além disso, se $rank\{M_\Phi\} \geq rank\{\Sigma^{-1}\}$ então $x^T M_\Phi^T\Sigma^{-1}M_\Phi x < 0$, e se $rank\{M_\Phi\} < rank\{\Sigma^{-1}\}$ então $x^T M_\Phi^T\Sigma^{-1}M_\Phi x \leq 0$, portanto:

$$W(t,x) \leq x^T\Delta x - x^T\Phi\Sigma^{-1}\Phi^T x + x^T M_\Phi^T\Sigma^{-1}M_\Phi x - x^T M_\Phi^T\Sigma^{-1}M_\Phi x = x^T\left[\Delta - \Phi\Sigma^{-1}\Phi^T\right]x$$

Caso $x = 0$ mas $h(t,x) \neq 0$, então não existe uma matriz real M, tal que $h(t,x) = \Sigma^{-1}Mx$, porém, nesse caso, $W(t,x) = h(t,x)^T\Sigma h(t,x) < 0 = x^T\left[\Delta - \Phi\Sigma^{-1}\Phi^T\right]x$, uma vez que a matriz Σ é definida negativa.□

É importante salientar que, se a matriz $\begin{bmatrix} \Delta & \Phi \\ \Phi^T & \Sigma \end{bmatrix}$ for semidefinida negativa, a matriz Δ ser definida negativa não garante que $W(t,x)$ seja definida negativa. Seja $\Delta < 0$ e $\Sigma = \Phi^T\Delta^{-1}\Phi$, então $W(t,x) = x^T\Delta x + 2x^T\Phi h(t,x) + h(t,x)^T\Phi^T\Sigma^{-1}\Phi h(t,x)$. Suponha que exista um $(t,x) \in [a,b] \times D$ tal que $x \neq 0$ e $x = -\Delta^{-1}\Phi h(t,x)$, então $W(t,x) = 2h(t,x)^T\Phi^T\Delta^{-1}\Phi h(t,x) - h(t,x)^T\Phi^T\Delta^{-1}\Phi h(t,x) = 0$. Nesse caso, não se pode afirmar que $W(t,x)$ é definida negativa, a menos que $\begin{bmatrix} \Delta & \Phi \\ \Phi^T & \Sigma \end{bmatrix}$ tenha uma decomposição na forma do Teorema 3.7.

Teorema 4.2: Seja o sistema não-linear da eq. (4.1) satisfazendo a condição de setor e limitação, eq. (4.2) e (4.3) respectivamente. Suponha que exista uma matriz simétrica definida positiva P, $n \times n$, e uma constante escalar não-negativa τ, tais que a matriz $\begin{bmatrix} A^T P + PA & -PB + \tau c \\ -B^T P + \tau c^T & -2\tau K^{-1} \end{bmatrix}$ seja definida negativa. Seja $\{c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}\}$ um conjunto de vetores ortogonais ao vetor c e ortonormais entre si, λ_M o maior autovalor da matriz $A^T P + PA$, $\sigma = 2\dfrac{m\|PB\|_2}{|\lambda_M|}$, $L = \min\left(\dfrac{a^2}{c^T P^{-1} c}, \dfrac{b^2}{c^T P^{-1} c}\right)$ e $l = \max_z \left(z^T P z\right)$, onde os vetores z são as colunas da matriz $Z = \begin{bmatrix} c^T \\ c_1^T \\ \vdots \\ c_{n-1}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ +\sigma & -\sigma & \cdots & -\sigma & +\sigma & -\sigma & \cdots & -\sigma \\ +\sigma & +\sigma & \cdots & -\sigma & +\sigma & +\sigma & \cdots & -\sigma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\sigma & +\sigma & \cdots & -\sigma & +\sigma & +\sigma & \cdots & -\sigma \end{bmatrix}$. Suponha que $L > l$, então, dada um condição inicial (t_0, x_0), onde $x_0 \in \Omega_L = \{x \in R^n : x^T P x < L\}$, existirá $t_1 \geq t_0$ tal que a solução do sistema estará contida no conjunto $\Omega_l = \{x \in R^n : x^T P x \leq l\}$ para todo $t \geq t_1$.

Demonstração: Considere a função quadrática definida positiva $V(x) = x^T P x$. A derivada da função $V(x)$ é $\dot{V}(t,x) = x^T (PA + A^T P) x - 2x^T PB h(t, c^T x)$. Mas, no conjunto Γ_- definido na eq. (4.5), a condição de setor da eq. (4.2) é satisfeita, de modo que $-2h(t, c^T x) K^{-1} \left[h(t, c^T x) - K c^T x\right] \geq 0$. Usando o ***S**-procedure*, Boyd et al. (1994), para algum $\tau \geq 0$

$$\dot{V}(t,x) \leq x^T (PA + A^T P) x - 2x^T PB h(t, c^T x) - 2\tau h(t, c^T x) K^{-1} \left[h(t, c^T x) - K c^T x\right]$$

$$= \begin{bmatrix} x^T & h(t, c^T x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & -PB + \tau c \\ -B^T P + \tau c^T & -2\tau K^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(t, c^T x) \end{bmatrix}.$$ Mas, do Lema 4.1, como a matriz é definida negativa

$$\dot{V}(t,x) \leq x^T \left[(PA + A^T P) + (-PB + \tau c)(0{,}5\tau^{-1} K)(-B^T P + \tau c^T)\right] x < 0.$$

No conjunto $\Gamma_+ = \{x \in R^n : \alpha \leq c^T x \leq \beta\}$, a não-linearidade é limitada, eq. (4.3), além disso, como o maior autovalor da matriz $A^T P + PA$, λ_M, é, por hipótese,

um número real negativo, tem-se de $\dot{V}(t,x) = x^T(PA + A^TP)x - 2x^TPBh(t,c^Tx)$ que $\dot{V}(x) \le \lambda_M \|x\|_2^2 + 2m\|x\|_2 \|PB\|_2$ e o sinal da derivada será negativo para valores de $\|x\|_2 > \sigma = 2\dfrac{m\|PB\|_2}{|\lambda_M|}$. Pela definição dos vetores c_k, verifica-se que $\{x \in \Gamma_+ : \|x\|_2 \le \sigma\} \subset \bigcap_{k=1,\cdots,n-1} \{x \in \Gamma_+ : -\sigma \le c_k^T x \le +\sigma\}$, desse modo, a região contida em Γ_- na qual não é possível garantir que $\dot{V}(t,x) < 0$ estará contida no hipercubo descrito por $\bigcap_{k=1,\cdots,n-1} \{x \in \Gamma_+ : -\sigma \le c_k^T x \le \sigma\}$. Devido à convexidade deste conjunto e da função $V(x)$, o maior valor da função $V(x)$ calculada dentro deste conjunto ocorrerá nos vértices deste conjunto, isto é, as colunas da matriz Z. Além disso, utilizando os multiplicadores de Lagrange, pode-se calcular analiticamente os mínimos de $V(x)$ sobre os hiperplanos $c^Tx = a$ e $c^Tx = b$, respectivamente $a^2/c^TP^{-1}c$ e $b^2/c^TP^{-1}c$. Define-se então os conjuntos Ω_l e Ω_L. Por hipótese $L > l$, a aplicação do Teorema 3.6, observando-se que nesse caso não há variação de parâmetros e $\Omega_l = A_r$, completa a demonstração.□

Assim, os conjuntos Ω_l e Ω_L são estimativas conservadoras para o conjunto atrator e sua área de atração, respectivamente. Nesse caso, dados A, B, C, K, a, b, α, β e m, estas estimativas são válidas para quaisquer não-linearidades que satisfaçam as condições das eq. (4.2) e (4.3). Além disso, o cálculo da matriz P que satisfaz o Teorema 4.2 pode ser feito resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min \quad \lambda_M = \lambda_{\max}\{A^TP + PA\}$$
$$s.a. \quad \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^TP + PA & -PB + \tau c \\ -B^TP + \tau c^T & -2\tau K^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \tau \ge 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Este problema de otimização pode ser resolvido utilizando-se algoritmos

para solução de problemas envolvendo LMIs ou pacotes computacionais, como o LMI Toolbox do MatLab©. A solução obtida tende a reduzir o conservadorismo da estimativa do conjunto atrator, uma vez que minimizar λ_M tende a reduzir o raio σ.

Os vetores $\{c_1,\cdots,c_{n-1}\}$ podem ser obtidos aplicando-se o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt no conjunto de vetores linearmente dependentes $\{c,e_1,\cdots,e_n\}$, onde $\{e_1,\cdots,e_n\}$ é a base Euclidiana. Nesse caso, toma-se o vetor c como base para o processo de ortonormalização, isso é, o vetor e_1 é transformado num vetor ortonormal a c, o vetor e_2 é transformado num vetor ortonormal ao vetor c e ao vetor resultante do primeiro passo, e assim por diante. Ao final do processo ter-se-á o conjunto de vetores linearmente dependentes $\{c/\|c\|,c_1,\cdots,c_{n-1},0\}$, onde $\{c_1,\cdots,c_{n-1}\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, ortonormais entre si e ortogonais ao vetor c.

Uma condição necessária para que o problema (4.6) tenha solução é que a matriz A seja Hurwitz. Entretanto, se a matriz A não for Hurwitz mas existir uma constante real ξ tal que $A-B\xi c^T$ seja Hurwitz, então a equação diferencial que rege a dinâmica do sistema pode ser reescrita como $\dot{x}=\tilde{A}x-B\tilde{h}(t,y)$, onde $\tilde{A}=A-B\xi c^T$ e $\tilde{h}(t,y)=h(t,y)-\xi y$. Nessa nova forma, pode-se aplicar o Teorema 4.2 para tentar obter estimativas do conjunto atrator e de sua área de atração.

O Teorema 4.2 pode ser aplicado em sistemas escritos na forma do problema de Lure com mais de uma não-linearidade, onde apenas uma delas viola a condição de setor em torno da origem. Para isso, pequenas alterações devem ser feitas. Seja o sistema da eq. (4.1) com p não-linearidades, $h(t,y)=\left[h_1(t,y_1) \quad \cdots \quad h_p(t,y_p)\right]^T$, satisfazendo a condição de setor (4.2) e (4.4), com a_i e b_i, $i=1,\cdots,p$, e $K=\underset{i=1,\cdots,p}{diag}\{K_i\}$, onde $K_i>0$. Suponha que a primeira componente da função não-linear, $h_1(t,y_1)$, viole a condição de setor num intervalo $[\alpha,\beta]$ em torno da origem, mas satisfaça a condição (4.3). Nesse caso, o vetor c^T se torna uma matriz $p\times n$, $C=\left[C_1^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; C_p^T\right]^T$, e

$B = \lfloor B_1 \vdots \cdots \vdots B_p \rfloor$ é uma matriz $n \times p$. Seja a função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T P x$ e o conjunto definido abaixo ($X \setminus Y = X \cap Y^C$):

$$\Gamma_- = \left\{ \bigcap_{i=1,\cdots,p} \left\{ x \in R^n : a_i \le C_i x \le b_i \right\} \right\} \setminus \left\{ x \in R^n : \alpha \le C_1 x \le \beta \right\} \tag{4.7}$$

Seja $T = \underset{j=1,\cdots,p}{diag}\{\tau_j\}$, com $\tau_j \ge 0$, tal que $\begin{bmatrix} A^T P + PA & -PB + C^T T \\ -B^T P + TC & -2TK^{-1} \end{bmatrix} < 0$, onde $K = \underset{j=1,\cdots,p}{diag}\{K_j\}$. Essa condição é análoga à condição do Teorema 4.2 e garante, pelo Lema 4.1, que, no conjunto Γ_-, $\dot{V}(x) < 0$. No conjunto $\Gamma_+ = \left\{ x \in R^n : \alpha \le C_1 x \le \beta \right\} \cap \Gamma_-$, a análise do sinal de $\dot{V}(x)$ é semelhante à que foi feita no Teorema 4.2. Seja $C_+ = \lfloor C_2^T \vdots \cdots \vdots C_p^T \rfloor^T$, $B_+ = \lfloor B_2 \vdots \cdots \vdots B_p \rfloor$, $h_+(t, y_+) = \lfloor h_2(t, y_2) \quad \cdots \quad h_p(t, y_p) \rfloor^T$, onde $y_+ = C_+ x$, $K_+ = \underset{j=2,\cdots,p}{diag}\{K_j\}$ e $T_+ = \underset{j=2,\cdots,p}{diag}\{\tau_j\}$. Então, no conjunto Γ_+, $-2h_+^T(t, C_+ x) T_+ K_+^{-1} \left[h_+^T(t, C_+ x) - K_+ C_+ x \right] \ge 0$ e $|h_1(t, C_1 x)| \le m$. Portanto:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= x^T (PA + A^T P) x - 2x^T P \left[B_1 h_1(t, C_1 x) + B_+ h_+(t, C_+ x) \right] \\ &\le \lfloor x^T \quad h_+^T(t, C_+ x) \rfloor \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB_+ + C_+^T T_+ \\ -B_+^T P + T_+ C_+ & -2T_+ K_+^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h_+(t, C_+ x) \end{bmatrix} x - 2x^T P B_1 h_1(t, C_1 x) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Supondo que $\begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB_+ + C_+^T T_+ \\ -B_+^T P + T_+ C_+ & -2T_+ K_+^{-1} \end{bmatrix} < 0$, tem-se, pelo Lema 4.1, que:

$$\dot{V}(t,x) \le x^T Q_+ x - 2x^T P B_1 h_1(t, C_1 x) \le \lambda_+ \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|PB_1\|_2 m \tag{4.9}$$

Onde $Q_+ = \left\lfloor \left(PA + A^T P\right) + \frac{1}{2}\left(-PB_+ + C_+^T T_+\right)\left(T_+ K_+^{-1}\right)^{-1}\left(-B_+^T P + T_+ C_+\right) \right\rfloor$ e λ_+ é o maior autovalor da matriz Q_+. Assim, o sinal de $\dot{V}(x)$ é negativo para todo

$x \in \Gamma_+$ tal que $\|x\|_2 > \sigma_+ = 2\frac{m\|PB_1\|_2}{|\lambda_+|}$. Nesse caso, o nível l é obtido da mesma forma que no Teorema 4.2, utilizando C_1 no lugar de c^T. O nível L é obtido de modo análogo ao Teorema 4.2, mas, nesse caso:

$$L = \min_{i=1,\cdots,p}\left\{\frac{a_i}{C_i P^{-1} C_i^T}, \frac{b_i}{C_i P^{-1} C_i^T}\right\} \tag{4.10}$$

Assim, os conjuntos $\Omega_l = \{x \in R^n : x^T P x \le l\}$ e $\Omega_L = \{x \in R^n : x^T P x < L\}$ são estimativas conservadoras para o conjunto atrator e sua área de atração, respectivamente. Nesse caso, dados A, B, C, K, a_i, b_i, α, β e m, estas estimativas são válidas para quaisquer não-linearidades que satisfaçam as condições das eq. (4.2) e (4.3). Além disso, o cálculo da matriz P que satisfaz as condições acima pode ser feito resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\min \quad \lambda_+ = \lambda_{\max}\left\{\left(PA + A^T P\right) + \tfrac{1}{2}\left(-PB_+ + C_+^T T_+\right)\left(T_+ K_+^{-1}\right)^{-1}\left(-B_+^T P + T_+ C_+\right)\right\} \\ &s.a. \quad \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA & -PB + C^T T \\ -B^T P + TC & -2TK^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB_+ + C_+^T T_+ \\ -B_+^T P + T_+ C_+ & -2T_+ K_+^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ T \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2 Sistemas autônomos

Seja um sistema não-linear escrito na forma do Problema de Lure, mas com apenas uma não-linearidade $h(y)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bh(y) \\ y = c^T x \end{cases} \tag{4.12}$$

onde a matriz A, $n \times n$, é Hurwitz, $x \in R^n$, $y \in R$, B e c são vetores de dimensão n. Seja $K > 0$ uma constante real e a não-linearidade $h(y)$ uma função de classe C^1, satisfazendo condição de setor e limitação, eq. (4.2), (4.3) e (4.4).

Uma vez que a não-linearidade é invariante no tempo, pode ser interessante utilizar uma Função de Lyapunov Tipo Lure para obter melhores estimativas do conjunto atrator e de sua área de atração. O Teorema 4.3 estabelece condições para a construção de uma Função de Lyapunov Estendida do Tipo Lure.

Teorema 4.3: Seja o sistema não-linear da eq. (4.12) satisfazendo a condição de setor e limitação, eq. (4.2) e (4.3) respectivamente. Suponha que exista uma matriz simétrica definida positiva P, $n \times n$, e constantes escalares não negativas, τ e η, tais que a matriz $\begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + \eta A^T c + \tau c \\ -B^T P + \eta c^T A + \tau c^T & -2\tau K^{-1} - 2\eta c^T B \end{bmatrix}$ seja definida negativa. Seja $\sigma = m \dfrac{\left\| PB - \eta A^T c \right\|_2 + \sqrt{\left\| PB - \eta A^T c \right\|_2^2 + 2\eta \left| \lambda_M \right| \left| c^T B \right|}}{\left| \lambda_M \right|}$, onde λ_M é o maior autovalor da matriz $A^T P + PA$. Seja a função $V(x) = x^T P x + 2\eta \int_0^{c^T x} h(u)du$, e os conjuntos Γ_- e Γ_+ definidos como no Teorema 4.2. Suponha que existam constantes L e l, tais que, $L > l$, $\Omega_l = \{x \in R^n : V(x) \le l\} \supset \{x \in \Gamma_+ : \|x\|_2 \le \sigma\}$ e $\Omega_L = \{x \in R^n : V(x) < L\} \subset \{\Gamma_- \cup \Gamma_+\}$. Então, toda solução do sistema começando em Ω_L tende para o conjunto Ω_l, quando $t \to \infty$. Além disso, toda solução do sistema começando em Ω_l permanece em Ω_l, $\forall t \ge 0$.

Demonstração: Considere a Função de Lyapunov Tipo Lure $V(x) = x^T P x + 2\eta \int_0^{c^T x} h(u)du$. A derivada da função $V(x)$ é $\dot{V}(x) = x^T (PA + A^T P) x - 2x^T PB h(c^T x) + 2\eta h(c^T x) c^T \left[Ax - Bh(c^T x) \right]$. Mas, no conjunto Γ_-, a condição de setor da eq. (4.2) é satisfeita, de modo que $-2h(c^T x) K^{-1} \left[h(c^T x) - Kc^T x \right] \ge 0$ e, para algum $\tau \ge 0$:

$$\dot{V}(x) \le x^T(PA + A^T P)x - 2x^T PBh(c^T x) +$$
$$+2\eta h(c^T x)c^T\left[Ax - Bh(c^T x)\right] - 2\tau h(c^T x)K^{-1}\left[h(c^T x) - Kc^T x\right]$$
$$= \begin{bmatrix} x^T & h(c^T x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + \eta A^T c + \tau c \\ -B^T P + \eta c^T A + \tau c^T & -2\tau K^{-1} - 2\eta c^T B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h(c^T x) \end{bmatrix}$$

Mas, pelo Lema 4.1, como a matriz é definida negativa tem-se que:

$$Q = \left[(PA + A^T P) + (-PB + \eta A^T c + \tau c)(2\tau K^{-1} + 2\eta c^T B)^{-1}(-B^T P + \eta c^T A + \tau c^T)\right] < 0$$

Desse modo, $\dot{V}(x) \le x^T Q x < 0 \quad \forall x \in \Gamma_-$. Na região Γ_+, a não-linearidade é limitada, eq. (4.3), então tem-se que $\dot{V}(x) \le \lambda_M \|x\|_2^2 + 2m\|x\|_2 \|PB - \eta A^T c\|_2 + 2\eta m^2 |c^T B|$. Como o maior autovalor da matriz $A^T P + PA$, λ_M, é, por hipótese, um número real negativo, $\forall x \in \Gamma_+$, tais que $\|x\|_2 > \sigma = m\dfrac{\|PB - \eta A^T c\|_2 + \sqrt{\|PB - \eta A^T c\|_2^2 + 2\eta|\lambda_M||c^T B|}}{|\lambda_M|}$, $\dot{V}(x) < 0$. Define-se então os conjuntos Ω_l e Ω_L, onde, por hipótese, $L > l$. Nesse caso, os conjuntos Ω_l e Ω_L podem não ser convexos, mas são limitados. A aplicação do Teorema 3.4 completa a demonstração.□

Assim, os conjuntos Ω_l e Ω_L são estimativas conservadoras para o conjunto atrator e sua área de atração, respectivamente. Nesse caso, $V(x)$ depende da não-linearidade, de modo que as estimativas obtidas são válidas apenas para a não-linearidade em questão. Além disso, como as curvas de nível da função $V(x)$ podem gerar regiões não convexas, não existe uma expressão analítica para L e l, sendo necessário utilizar métodos numéricos para encontrar estas constantes. Entretanto, nesse caso o cálculo da matriz P e da constante η que satisfaz o Teorema 4.3 também pode ser feito resolvendo-se um problema de otimização da seguinte forma:

$$\min \quad \lambda_M = \lambda_{\max}\{A^T P + PA\}$$
$$s.a. \quad \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + \eta A^T c + \tau c \\ -B^T P + \eta c^T A + \tau c^T & -2\tau K^{-1} - 2\eta c^T B \end{bmatrix} < 0 \\ \eta \geq 0 \\ \tau \geq 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Em determinados problemas pode ser desnecessário incluir o termo devido à condição de setor, $-2h(c^T x)K^{-1}[h(c^T x) - Kc^T x] \geq 0$, na expressão de $\dot{V}(x)$. Pois podem-se obter conclusões análogas às do Teorema 4.3 caso, no conjunto Γ_-, $\begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + \eta A^T c \\ -B^T P + \eta c^T A & -2\eta c^T B \end{bmatrix}$ seja definida negativa. Entretanto, sistemas nos quais $2\eta c^T B = 0$ são relativamente comuns e, nesses casos, a inclusão do termo $-2h(c^T x)K^{-1}[h(c^T x) - Kc^T x] \geq 0$ torna-se fundamental para a verificação do sinal de $\dot{V}(x)$. Embora à primeira vista pareça contraditório, a soma de um termo positivo em uma função de sinal aparentemente indeterminado facilita a verificação de que esta é estritamente negativa.

A mesma idéia do Teorema 4.3 também pode ser utilizada para analisar a estabilidade de sistemas escritos na forma do problema de Lure com mais de uma não-linearidade, onde apenas uma delas viola a condição de setor em torno da origem. Seja o sistema da eq. (4.12) com p não-linearidades, $h(y) = [h_1(y_1) \quad \cdots \quad h_p(y_p)]^T$, satisfazendo a condição de setor (4.2) e (4.4), com a_i e b_i, $i = 1, \cdots, p$, e $K = \underset{i=1,\cdots,p}{diag}\{K_i\}$, onde $K_i > 0$. Suponha que a primeira componente da função não-linear, $h_1(y_1)$, viole a condição de setor num intervalo $[\alpha, \beta]$ em torno da origem, mas satisfaça a condição (4.3). Nesse caso, o vetor c^T se torna uma matriz $p \times n$, $C = [C_1^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; C_p^T]^T$, e $B = [B_1 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; B_p]$ é uma matriz $n \times p$. Seja a função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T P x$ definida positiva, $N = \underset{j=1,\cdots,p}{diag}\{\eta_j\}$ e $T = \underset{j=1,\cdots,p}{diag}\{\tau_j\}$, com $\tau_j \geq 0$, tal que $Q_1 = \begin{bmatrix} PA + A^T P & -PB + NA^T C^T + C^T T \\ -B^T P + NCA + TC & -2TK^{-1} - 2NCB \end{bmatrix} < 0$, onde $K = \underset{j=1,\cdots,p}{diag}\{K_j\}$. Essa condição é análoga à condição do Teorema 4.3 e garante, pelo Lema 4.1, que,

no conjunto Γ_-, $\dot{V}(x)<0$. No conjunto $\Gamma_+ = \{x \in R^n : \alpha \le C_1 x \le \beta\} \cap \Gamma_-$, a análise do sinal de $\dot{V}(x)$ é semelhante ao que foi feito para o caso não autônomo. Seja $C_+ = [C_2^T \vdots \cdots \vdots C_p^T]^T$, $B_+ = [B_2 \vdots \cdots \vdots B_p]$, $h_+(y_+) = [h_2(y_2) \ \cdots \ h_p(y_p)]^T$, onde $y_+ = C_+ x$, $K_+ = \underset{j=2,\cdots,p}{diag}\{K_j\}$, $N_+ = \underset{j=2,\cdots,p}{diag}\{\eta_j\}$ e $T_+ = \underset{j=2,\cdots,p}{diag}\{\tau_j\}$. Então, no conjunto Γ_+, $|h_1(C_1 x)| \le m$ e $-2h_+^T(C_+x)T_+K_+^{-1}[h_+^T(C_+x) - K_+C_+x] \ge 0$. Portanto:

$$\dot{V}(x) \le [x^T \quad h_1^T(C_1x) \quad h_+^T(C_+x)]Q_2 \begin{bmatrix} x \\ h_1(C_1x) \\ h_+(C_+x) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

onde $Q_2 = \begin{bmatrix} PA + A^TP & -PB_1 + \eta_1 A^T C_1^T & -PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+ \\ -B_1^T P + \eta_1 C_1 A & -2\eta_1 C_1 B_1 & -\eta_1 C_1 B_+ - B_1^T C_+^T N_+ \\ -B_+^T P + N_+ C_+ A + T_+ C_+ & -\eta_1 B_+^T C_1^T - N_+ C_+ B_1 & -2T_+K_+^{-1} - 2N_+C_+B_+ \end{bmatrix}$.

Note-se que, se $-2\eta_1 C_1 B_1 = 0$, a matriz Q_2 não será definida negativa. Entretanto, se existirem η_i, $i = 1, \cdots, p$, nem todos nulos, tais que $-\eta_1 C_1 B_+ - B_1^T C_+^T N_+ = 0$, então:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\le [x^T \quad h_+^T(C_+x)] \begin{bmatrix} PA + A^TP & -PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+ \\ -B_+^T P + N_+ C_+ A + T_+ C_+ & -2T_+K_+^{-1} - 2N_+C_+B_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h_+(C_+x) \end{bmatrix} + \\ &\quad -2x^T[PB_1 - \eta_1 A^T C_1^T] h_1(C_1x) - 2\eta_1 C_1 B_1 h_1^2(C_1x) \\ &\le \lambda_M \|x\|_2^2 + 2m\|PB_1 - \eta_1 A^T C_1^T\|_2 \|x\|_2 + 2m^2 \eta_1 |C_1 B_1| \end{aligned} \tag{4.15}$$

se $Q_3 = \begin{bmatrix} PA + A^TP & -PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+ \\ -B_+^T P + N_+ C_+ A + T_+ C_+ & -2T_+K_+^{-1} - 2N_+C_+B_+ \end{bmatrix} < 0$. Pelo Lema 4.1, $Q_4 = [PA + A^TP + (-PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+)(2T_+K_+^{-1} + 2N_+C_+B_+)^{-1}(-B_+^T P + N_+C_+A + T_+C_+)]$ também é definida negativa e o maior autovalor de Q_4, λ_M, é uma constante menor que zero. Portanto, $\dot{V}(x)$ é negativo $\forall x \in R^n$ tal que:

$$\|x\|_2 \ge \sigma_1 = m \frac{\|PB_1 - \eta_1 A^T C_1^T\|_2 + \sqrt{\|PB_1 - \eta_1 A^T C_1^T\|_2^2 + 2|\lambda_M| \eta_1 |C_1 B_1|}}{|\lambda_M|} \tag{4.16}$$

Por outro lado, da limitação de $h_1(C_1x)$ no conjunto Γ_+, tem-se que $2\tau_1K_1\left(m^2 - h_1^2(C_1x)\right) \geq 0$. Acrescentando-se esse termo à eq. (4.14), obtêm-se:

$$\dot{V}(x) \leq \lambda_M \|x\|_2^2 + 2m^2\tau_1K_1 \tag{4.17}$$

se $Q_5 = \begin{bmatrix} PA + A^TP & -PB_1 + \eta_1 A^T C_1^T & -PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+ \\ -B_1^T P + \eta_1 C_1 A & -2\tau_1 K_1 - 2\eta_1 C_1 B_1 & -\eta_1 C_1 B_+ - B_1^T C_+^T N_+ \\ -B_+^T P + N_+ C_+ A + T_+ C_+ & -\eta_1 B_+^T C_1^T - N_+ C_+ B_1 & -2T_+K_+^{-1} - 2N_+C_+B_+ \end{bmatrix} < 0$.

Então, pelo Lema 4.1, $Q_6 = \left[PA + A^TP + Q_7Q_8^{-1}Q_7^T\right]$ também é definida negativa, onde $Q_7 = \left[-PB_1 + \eta_1 A^T C_1^T \quad -PB_+ + A^T C_+^T N_+ + C_+^T T_+\right]$ e $Q_8 = \begin{bmatrix} 2\tau_1K_1 + 2\eta_1C_1B_1 & \eta_1C_1B_+ + B_1^TC_+^TN_+ \\ \eta_1B_+^TC_1^T + N_+C_+B_1 & 2T_+K_+^{-1} + 2N_+C_+B_+ \end{bmatrix}$. Assim, o maior autovalor de Q_6, λ_M, é uma constante menor que zero e $\dot{V}(x)$ é negativo $\forall x \in R^n$ tal que:

$$\|x\|_2 \geq \sigma_2 = m\sqrt{\frac{2\tau_1K_1}{|\lambda_M|}} \tag{4.18}$$

Caso P, K, N e T sejam tais que:

a) $Q_2 < 0$, $-\eta_1C_1B_+ - B_1^TC_+^TN_+ = 0$ e $Q_3 < 0$, então $\sigma = \sigma_1$;

b) $Q_2 < 0$ e $Q_5 < 0$, então $\sigma = \sigma_2$;

c) $Q_2 < 0$, $-\eta_1C_1B_+ - B_1^TC_+^TN_+ = 0$, $Q_3 < 0$ e $Q_5 < 0$, então $\sigma = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

O cálculo das constantes L e l precisa ser feito numericamente, uma vez que as curvas de nível da função $V(x)$ não geram necessariamente conjuntos convexos.

4.3 Sistemas descritos por inclusões diferenciais

O Teorema 4.2 também pode ser utilizado para estimar conjuntos atratores e suas áreas de atração de sistemas descritos por uma determinada classe de inclusões diferenciais. Seja um sistema escrito na forma da eq. (4.1) onde a não-linearidade, $H(y)$, é um SVM. Das restrições das eq. (4.2) e (4.3) pode-se definir um SVM, $R_H : R \to R$, da seguinte forma:

$$R_H(y) = \begin{cases} [-Ky, 0], & se \quad y \in [a, \alpha] \\ [-m, +m], & se \quad y \in [\alpha, \beta] \\ [0, +Ky], & se \quad y \in [\beta, b] \end{cases} \tag{4.19}$$

Sejam os conjuntos Ω_L e Ω_I obtidos segundo o Teorema 4.2. Suponha que $H(y)$ é Lipschitziano, por definição $gr\,H(y) \subset gr\,R_H(y)$. Suponha ainda, que $H(y)$ é compacto e convexo para cada $y \in R$. Então, pelo Teorema 3.15, o conjunto Ω_I é invariante pela inclusão diferencial $\dot{x} \in Ax - BH(c^T x)$ se e só se, para qualquer ponto $x \in \Omega_I$, $\{Ax - BH(c^T x)\} \subset T_-(x, \Omega_I)$. Nos pontos x pertencentes ao interior do conjunto Ω_I, têm-se que $T_-(x, \Omega_I) = R^n$. Portanto, resta verificar os pontos na fronteira de Ω_I, que é composta de uma curva de nível da função $V(x) = x^T P x$. Para cada ponto x na fronteira de Ω_I tem-se $T_-(x, \Omega_I) = \{v \in R^n : 2x^T P v \leq 0\}$. Entretanto, o Teorema 4.2 garante que, para qualquer valor de $H(c^T x)$, $2x^T P\{Ax - BH(c^T x)\} < 0$. Portanto, $\{Ax - BH(c^T x)\} \subset T_-(x, \Omega_I)$ e o conjunto Ω_I é invariante em relação a inclusão diferencial $\dot{x} \in Ax - BH(c^T x)$.

No conjunto Ω_L cada componente do campo vetorial, da inclusão diferencial resultante, é composto por uma combinação entre funções lineares em x e $H(c^T x)$. Portanto, a inclusão diferencial $\dot{x} \in Ax - BH(c^T x)$ satisfaz o Teorema 3.12 e todas as suas soluções, com condição inicial em Ω_L, existem para todo tempo futuro. Além disso, as suposições feitas sobre $H(c^T x)$

implicam que $Ax - BH(c^T x)$ é Lipschitziano com valores compactos e convexos, e $V(x)$ quadrática satisfaz a condição de Lipschitz (desigualdade dada no Teorema 3.1). A derivada *lower* Dini da função $V(x)$, $D^{-}V(x)(v) = \liminf_{\alpha \downarrow 0, v' \to v} \frac{V(x+\alpha v') - V(x)}{\alpha} = \liminf_{\alpha \downarrow 0, v' \to v} \left[2x^T P v' + \alpha v'^T P v'\right] = 2x^T P v$, é estritamente negativa $\forall (x, v) \in \{\Omega_L \cap \Omega_l\} \times \{Ax - BH(c^T x)\}$. Desse modo, toda solução iniciando em $\{\Omega_L \cap \Omega_l\}$ é monotônica com relação a $V(x)$, Teorema3.13. Note que os teoremas 3.16 e 3.17 são casos particulares, nos quais todas as soluções são monotônicas no conjunto Ω_L.

Embora pareça muito restritiva, a exigência de que as inclusões diferenciais sejam Lipschitzianas, com valores compactos e convexos, são usuais nos estudos de sistemas descritos por inclusões diferenciais.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos numéricos consistem na aplicação do procedimento desenvolvido, que foi apresentado no capítulo 4, em dois sistemas bastante utilizados nos estudos de sistemas não-lineares. O procedimento desenvolvido para sistemas não-autônomos, Teorema 4.2, é utilizado para analisar a Equação de Duffing Forçada e o procedimento desenvolvido para sistemas autônomos, Teorema 4.3, é utilizado para analisar o Sistema de Van der Pol. O Teorema 4.2 também pode ser utilizado, conforme detalhado no item 4.3, para analisar um sistema massa-mola cuja força apresenta histerese. Todos os programas implementados para a análise desses sistemas são fornecidos no Apêndice B.

5.1 Equação de Duffing Forçada

Seja o sistema massa-mola da fig. 5.1 sujeito a um atrito viscoso, onde a constante da mola apresenta uma característica cúbica e a força externa é periódica no tempo:

$$F_m(z) = k_m\left(1 + \rho^2 z^2\right)z \tag{5.1}$$

$$F_u(t) = k_u \cos(\omega t) \tag{5.2}$$

$$F_c(\dot{z}) = k_c \dot{z} \tag{5.3}$$

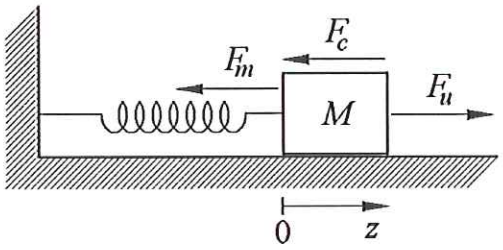


Figura 5.1: Sistema massa-mola forçado.

Das Leis de Newton, a equação que descreve o movimento unidimensional do corpo de massa M, é dada por:

$$M\ddot{z} + k_c\dot{z} + k_m z + k_m \rho^2 z^3 = k_u \cos(\omega t) \tag{5.4}$$

A eq. (5.4) pode ser reescrita na forma do Problema de Lure, eq. (4.1), fazendo-se $x_1 = z$ e $x_2 = \dot{z}$. Nesse caso, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_m/M & -k_c/M \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e a não-linearidade, $h(t,y) = \frac{k_m \rho^2}{M} y^3 - \frac{k_u}{M}\cos(\omega t)$, é variante no tempo. O termo cúbico $\frac{k_m \rho^2}{M} y^3$ se desloca senoidalmente na vertical até um valor máximo de $\frac{k_u}{M}$, gerando toda a região hachurada da fig. 5.2.

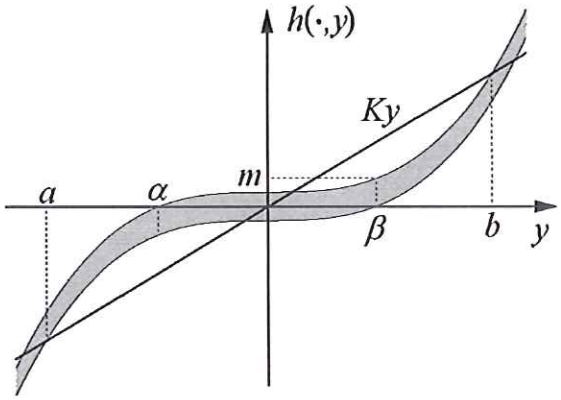


Figura 5.2: Não-linearidade da equação de Duffing forçada.

A factibilidade do problema de otimização da eq. (4.6) depende dos parâmetros do sistema, k_m, k_u, k_c, M, ρ e ω. Conforme pode ser visto na fig. 5.2, a condição de setor escolhida, constante K, além de influenciar na factibilidade do problema de otimização da eq. (4.6), define o intervalo $[a,b]$. Já o intervalo $[\alpha,\beta]$ é definido pelos parâmetros da não-linearidade, k_m, k_u, M e ρ. A factibilidade do procedimento, isto é, a existência dos conjuntos Ω_L e Ω_l, depende da factibilidade do problema de otimização da eq. (4.6) e de uma relação conveniente entre as curvas de nível de $V(x)$ e dos conjuntos Γ_- e Γ_+. As figuras 5.3 a 5.9 mostram as regiões de factibilidade do procedimento para diversos valores dos parâmetros do sistema, com $\omega = 1$. Essas regiões são compostas pelos pares $(K_c/M, K_m/M) \in [0,10] \times [0,10]$, para os quais o procedimento desenvolvido consegue obter as estimativas Ω_L e Ω_l. Para isso, o problema de otimização da eq. 4.6 tem que ser factível e $L > l$. A região cinza indica a factibilidade do procedimento e as curvas de nível são valores constantes para σ. Estas curvas indicam a qualidade da resposta obtida, ou seja, quanto maior a concentração de curvas, maior é o conservadorismo da estimativa do conjunto atrator.

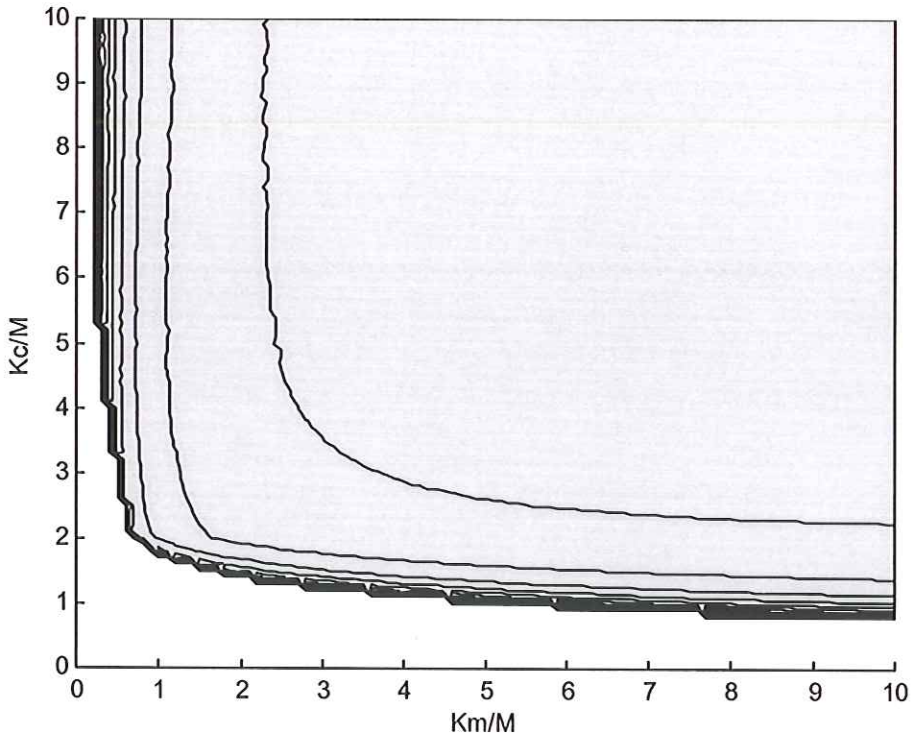


Figura 5.3: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 5$, $k_m \rho^2 / M = 0{,}1$, $k_u / M = 2$.

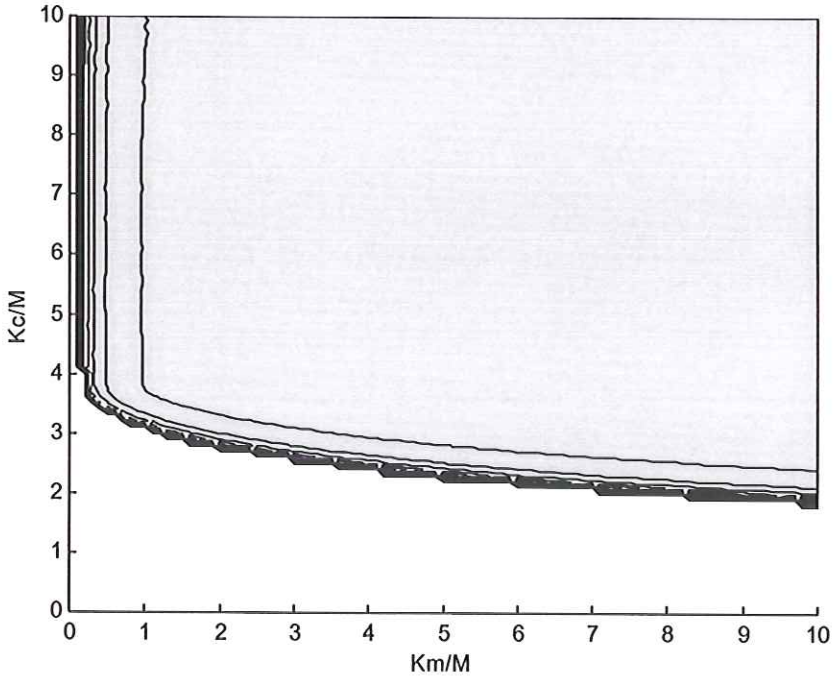


Figura 5.4: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 15$, $k_m \rho^2 / M = 0{,}1$, $k_u / M = 2$.

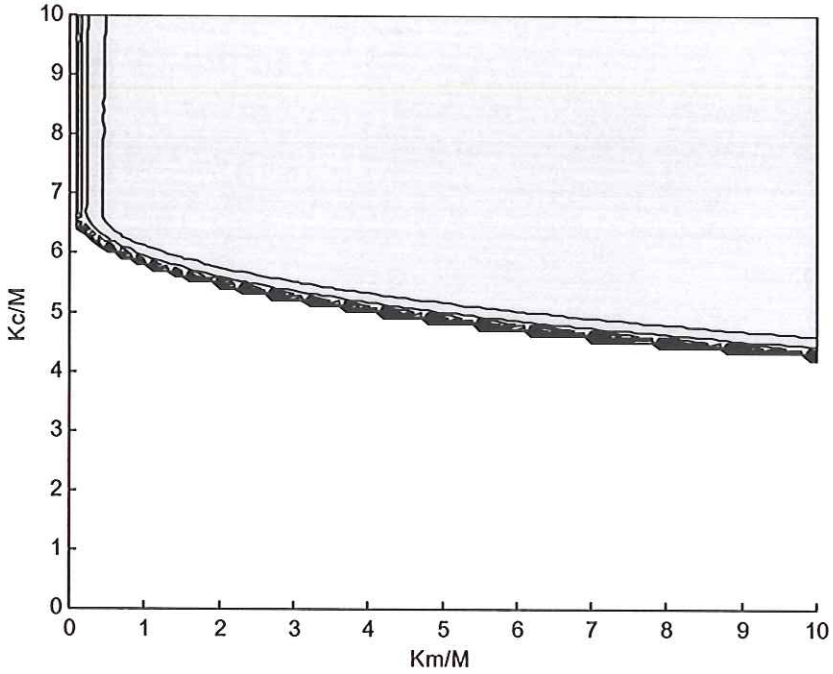


Figura 5.5: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 45$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$.

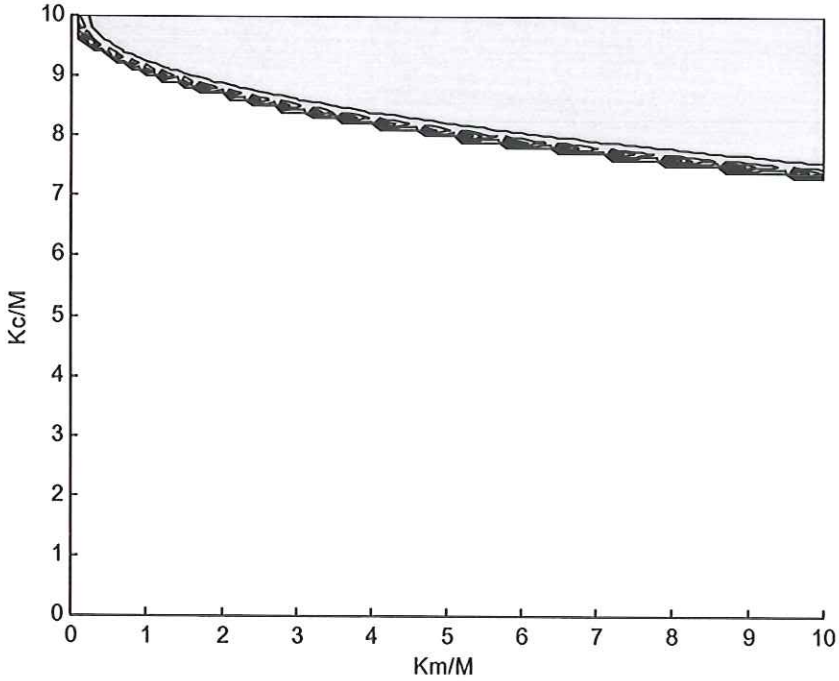


Figura 5.6: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 100$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$.

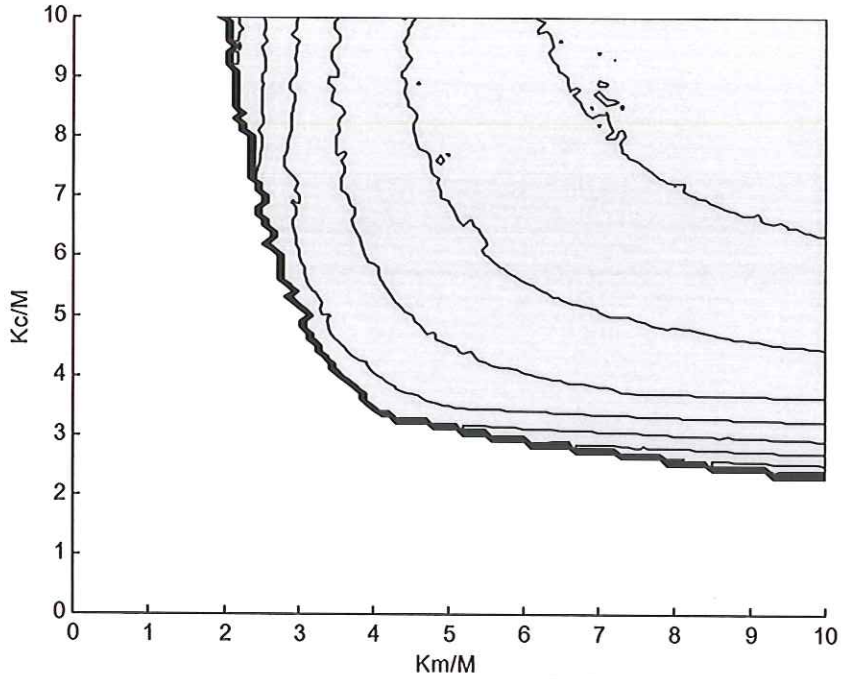


Figura 5.7: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 10$, $k_m \rho^2 / M = 1$, $k_u / M = 5$.

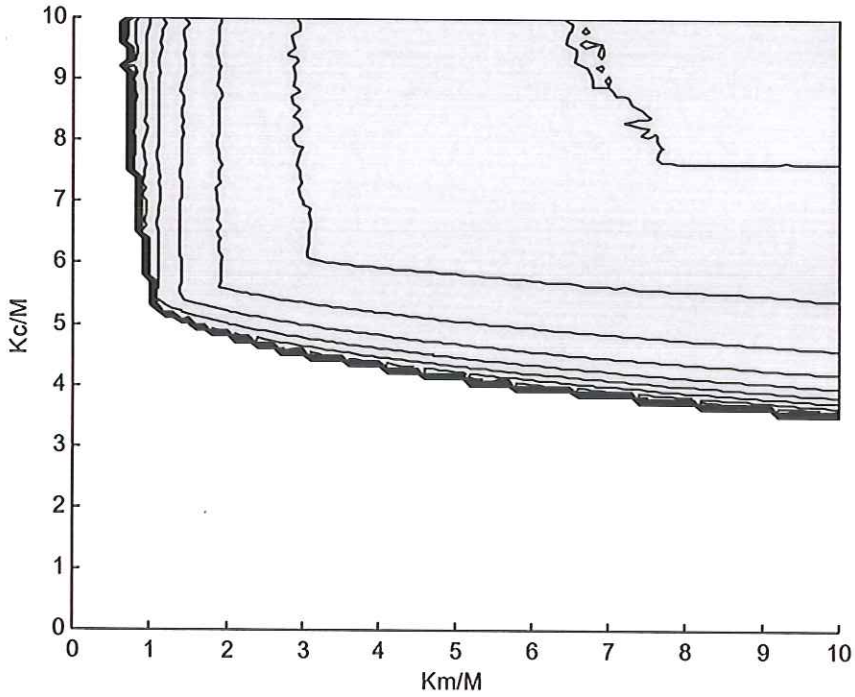


Figura 5.8: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 30$, $k_m \rho^2 / M = 1$, $k_u / M = 5$.

Biblioteca

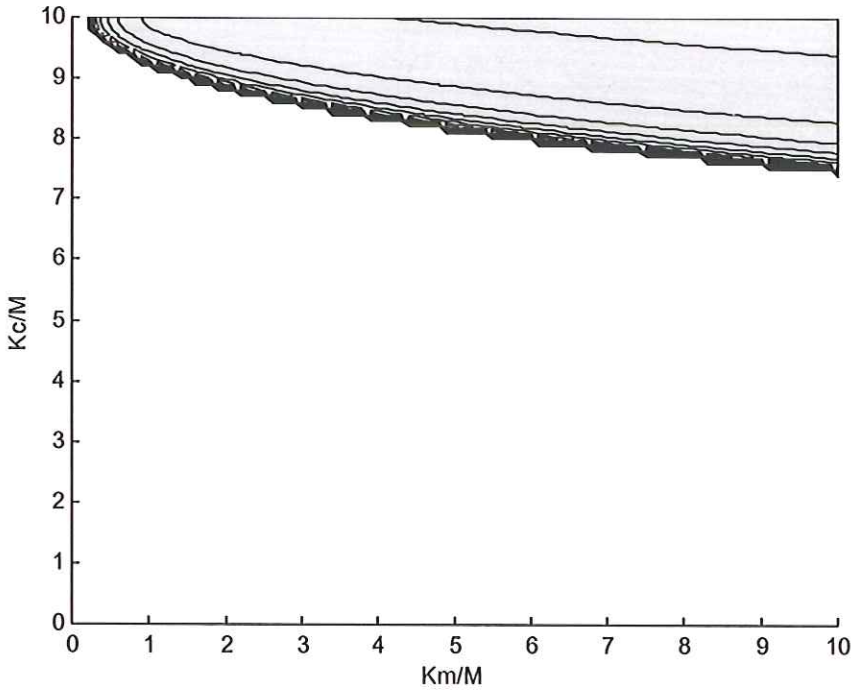


Figura 5.9: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 100$, $k_m\rho^2/M = 1$, $k_u/M = 5$.

Pode-se observar que o aumento da constante de condição de setor, K, reduz a região de factibilidade do procedimento, particularmente para sistemas pouco amortecidos. Além disso, o aumento da amplitude do termo forçante ou da não linearidade da mola piora o funcionamento do procedimento, isto é, as estimativas fornecidas são mais conservadoras.

Adotando parâmetros $k_m/M = 3$, $k_c/M = 3$, $k_m\rho^2/M = 0{,}1$, $k_u/M = 2$ e $\omega = 1$, o sistema da eq. (5.4) possui um ciclo limite estável em torno da origem, com um raio aproximado de 0,5. As trajetórias da equação de Duffing forçada, para diversas condições iniciais, são mostradas na fig. 5.10.

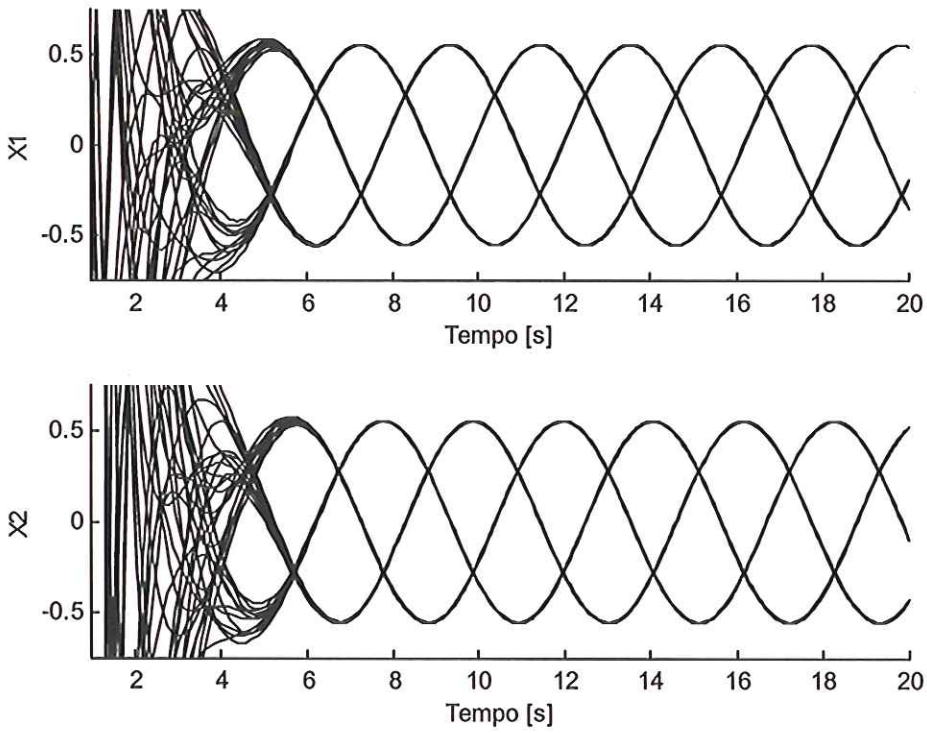


Figura 5.10: Trajetórias da Equação de Duffing Forçada para várias condições iniciais.

Escolhendo-se a constante de condição de setor como $K = 15$, calcula-se $\alpha = -\beta = -1{,}2599$, $a = -b = -12{,}1802$ e $m = 4{,}0$. Nesse caso, é fácil ver que $c_1 = [0 \quad 1]^T$. A resolução do problema da eq. (4.6) fornece $P = \begin{bmatrix} 9{,}2804.10^8 & 1{,}2604.10^8 \\ 1{,}2604.10^8 & 1{,}0069.10^8 \end{bmatrix}$, $\tau = 2{,}3608.10^8$ e $\lambda_M = -2{,}3573.10^8$. Portanto, podem-se calcular $\sigma = 5{,}4948$ e $L = 1{,}1398.10^{11}$. A matriz Z é dada por $Z = \begin{bmatrix} -1{,}2599 & -1{,}2599 & +1{,}2599 & +1{,}2599 \\ 5{,}4948 & -5{,}4948 & 5{,}4948 & -5{,}4948 \end{bmatrix}$, de modo que $l = 6{,}2697.10^9$. Portanto, pelo Teorema 4.2, podem-se construir estimativas do ciclo limite estável, Ω_l, e de sua área de atração, Ω_L. Na fig. 5.11, são mostradas:

1) as órbitas para diversas condições iniciais, curvas contínuas;

2) os hiperplanos $c^T x = a$ e $c^T x = b$, retas pontilhadas externas;

3) os hiperplanos $c^T x = \alpha$ e $c^T x = \beta$, retas pontilhadas internas;

4) a fronteira do conjunto Ω_L, $\{x \in R^n : x^T P x = L\}$, elipse contínua externa;

5) a fronteira do conjunto Ω_l, $\{x \in R^n : x^T P x = l\}$, elipse contínua interna;

6) a hiperesfera $\{x \in R^n : \|x\|_2 = \sigma\}$, círculo pontilhado.

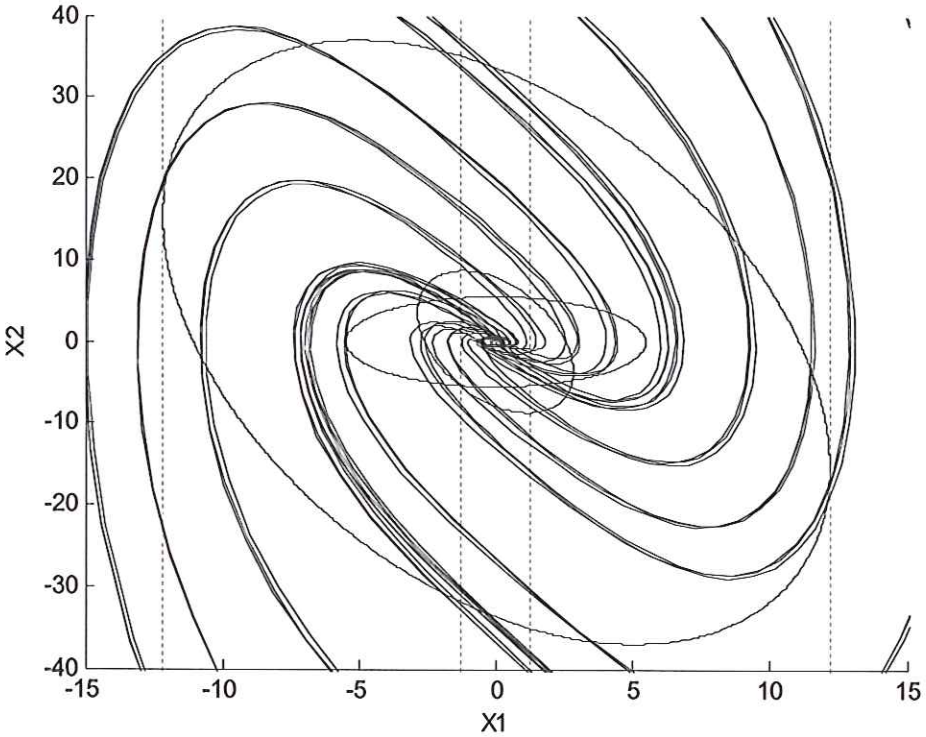


Figura 5.11: Estimativas do conjunto atrator e de sua área de atração para a Equação de Duffing Forçada.

A fig. 5.12 mostra uma ampliação do conjunto atrator e da estimativa obtida para o mesmo. Como pode ser visto, a estimativa é bastante conservadora. Isso se deve ao fato de a Função de Lyapunov Quadrática não ter complexidade suficiente para capturar o comportamento das órbitas do sistema que se aproximam da origem.

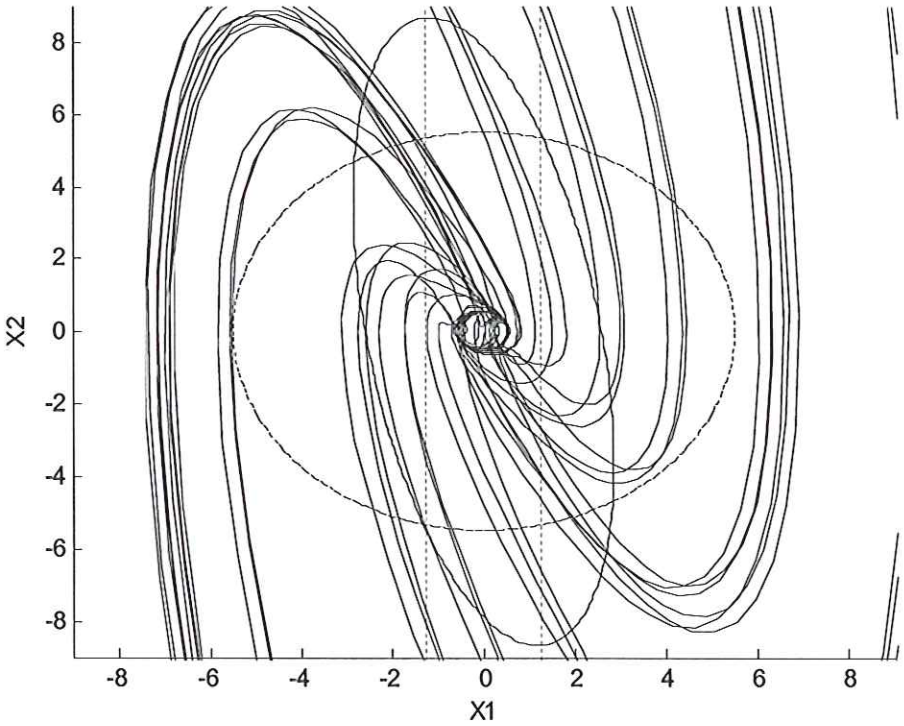
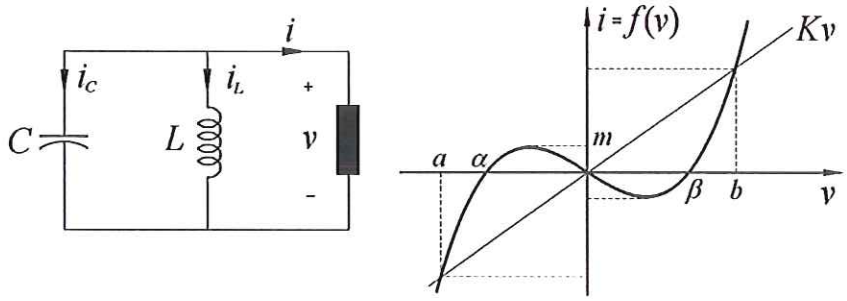


Figura 5.12: Ampliação da fig. 5.11 mostrando o conjunto atrator e a estimativa obtida.

5.2 Sistema de Van der Pol

Seja o circuito elétrico não-linear da fig. 5.13(a), cuja característica do elemento não-linear é dada fig. 5.13(b):



(a) (b)

Figura 5.13: Circuito elétrico com resistência negativa (Sistema de Van der Pol).

Este circuito corresponde a um oscilador de resistência negativa, que pode ser construído utilizando-se fontes DC e diodos túnel. A partir da tensão no elemento não-linear, podem-se calcular todas as grandezas elétricas deste circuito. Segundo as leis de Kirchhoff, essa tensão satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+L\frac{df(v)}{dv}\frac{dv}{dt}+v=0 \tag{5.5}$$

Normalizando-se o tempo pela constante de tempo $\sqrt{LC}$, $T=t/\sqrt{LC}$, pode-se reescrever a eq. (5.5) na forma usual do Sistema de Van der Pol:

$$\ddot{v}+\varepsilon f'(v)\dot{v}+v=0 \tag{5.6}$$

onde $\dot{v}=dv/dT$, $\varepsilon=\sqrt{L/C}$ e $f(v)=-v+\frac{1}{3}v^3$. Este oscilador não-linear possui um ciclo limite estável em torno da origem, e se aproxima de um oscilador linear quando $\varepsilon\to 0$. A equação de Van der Pol pode ser colocada na forma da eq. (4.12) fazendo-se uma mudança de variáveis do tipo $x_1=-\varepsilon^{-1}\dot{v}-f(v)$ e $x_2=v$. Desse modo, $A=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon^{-1}\\ -\varepsilon & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ \varepsilon\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ e $h(y)=-y+\frac{1}{3}y^3$. Nesse caso, a matriz A não é Hurwitz, de modo que o problema de otimização da eq. (4.6) não é factível. Entretanto, existe uma constante ξ tal que $\tilde{A}=\left[A-B\xi c^T\right]=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon^{-1}\\ -\varepsilon & -\varepsilon.\xi\end{bmatrix}$ é Hurwitz, portanto $\tilde{h}(y)=-(1+\xi)y+\frac{1}{3}y^3$. A factibilidade do problema de otimização da eq. (4.13) depende dos parâmetros ε, ξ e K. A não-linearidade modificada $\tilde{h}(y)$ mantém as mesmas características da fig. 5.13(b), e assim, pode-se calcular $\alpha=-\beta=-\sqrt{3(1+\xi)}$, $a=-b=-\sqrt{3(1+\xi+K)}$ e $m=\frac{2}{3}(1+\xi)^{\frac{2}{3}}$. As constantes L e l podem ser calculadas numericamente fazendo-se uma busca do menor valor de $V(x)$ na fronteira da região $\Gamma_+\cap\left\{x\in R^n:\|x\|_2\le\sigma\right\}$, que, nesse caso, é uma

curva que pode ser facilmente parametrizada. As figuras 5.14 a 5.17 mostram as regiões de factibilidade do procedimento para diversos valores de ε, ξ e K. A região cinza indica a factibilidade do procedimento e as curvas de nível indicam a qualidade da resposta obtida, ou seja, quanto maior a concentração de curvas, maior é o conservadorismo da estimativa do conjunto atrator.

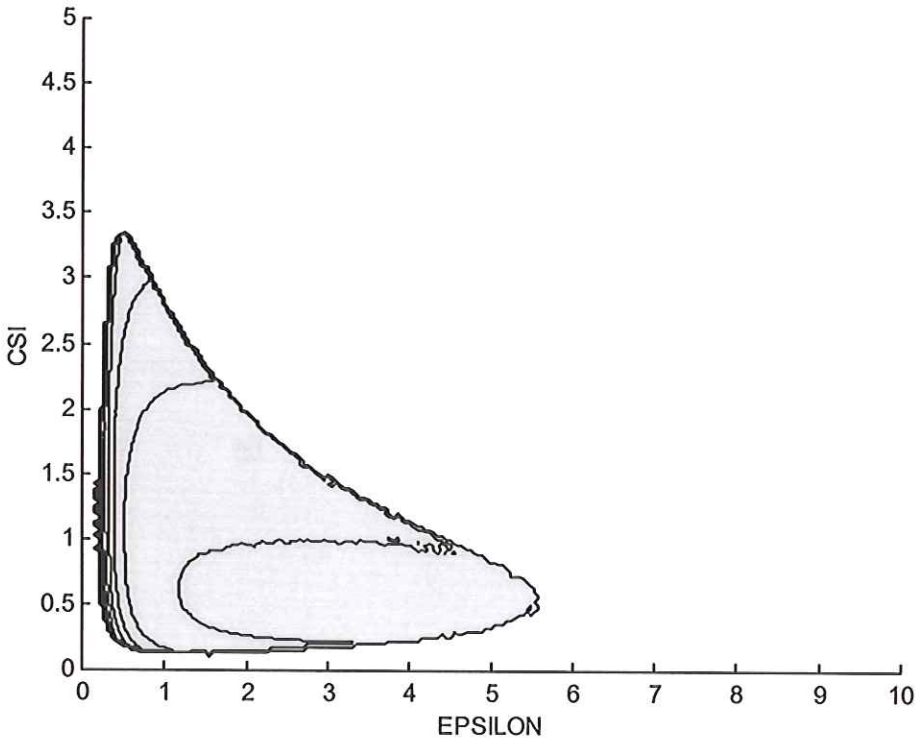


Figura 5.14: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 30$.

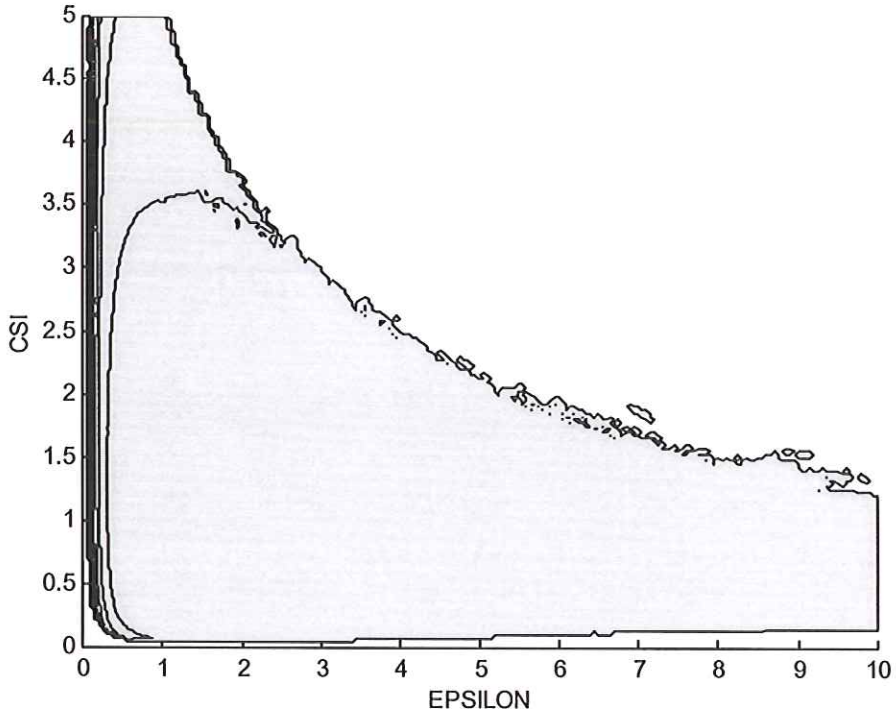


Figura 5.15: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 100$.

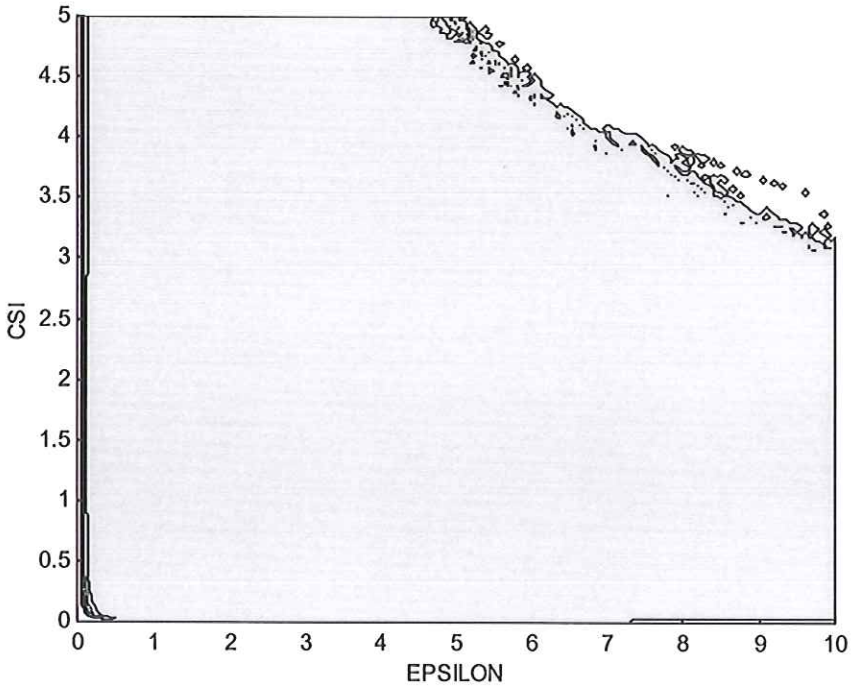


Figura 5.16: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 1000$.

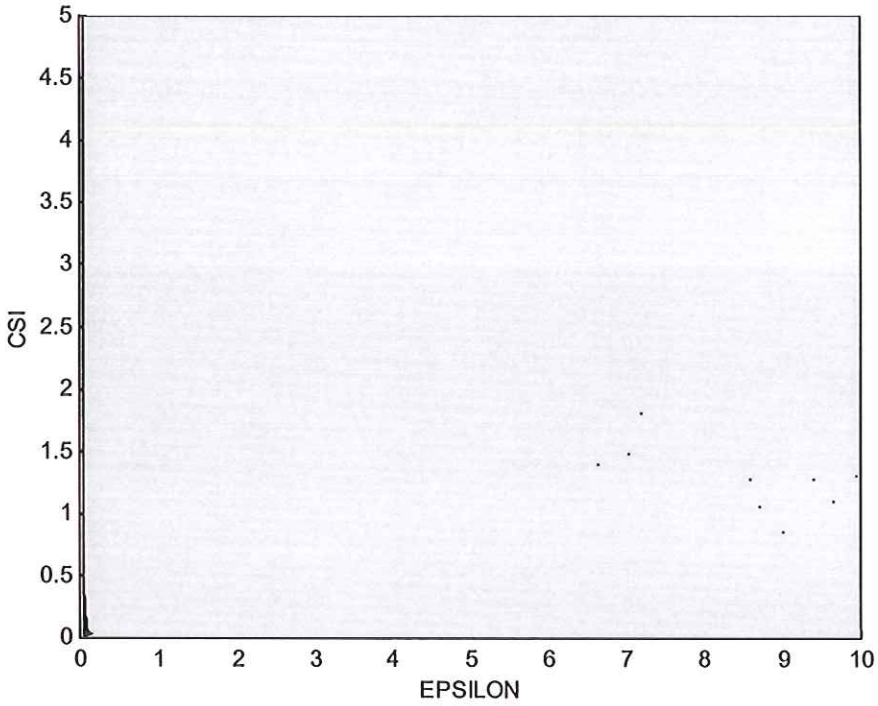


Figura 5.17: Regiões de factibilidade do procedimento: $K^{-1} = 0$.

Pode-se observar que o aumento da constante de condição de setor, K, aumenta a região de factibilidade do procedimento. Entretanto, a qualidade da resposta fornecida pelo sistema depende também de um bom distanciamento entre Ω_L e Ω_l.

Adotando-se valores de $\varepsilon = 1$, $\xi = 1$ e $K = 30$, tem-se $\alpha = -\beta = -2{,}4495$, $a = -b = -9{,}7980$ e $m = 1{,}8856$. A resolução do problema da eq. (4.13) fornece $P = \begin{bmatrix} 6{,}2117.10^8 & 2{,}0707.10^8 \\ 2{,}0707.10^8 & 4{,}1426.10^8 \end{bmatrix}$, $\tau = 4{,}6257.10^8$, $\eta = 1{,}1844.10^8$ e $\lambda_M = -4{,}1406.10^8$.

Portanto, podem-se calcular $\sigma = 6{,}0235$, $L = 1{,}9232.10^{11}$ e $l = 2{,}6168.10^{10}$. Assim, a Função de Lyapunov Tipo Lure, que nesse caso é uma Função de Lyapunov Estendida, é dada por:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6{,}2117.10^8 & 2{,}0707.10^8 \\ 2{,}0707.10^8 & 4{,}1426.10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2{,}3688.10^8 \left[-x_2^2 + \tfrac{1}{12} x_2^4 \right] \qquad (5.7)$$

As trajetórias do Sistema de Van der Pol são mostradas na fig. 5.18 e o ciclo limite do Sistema de Van der Pol é mostrado na fig. 5.19, onde também são vistos:

1) as órbitas para diversas condições iniciais, curvas contínuas;

2) os hiperplanos $c^T x = a$ e $c^T x = b$, retas pontilhadas externas;

3) os hiperplanos $c^T x = \alpha$ e $c^T x = \beta$, retas pontilhadas internas;

4) a fronteira do conjunto Ω_L, curva contínua externa;

5) a fronteira do conjunto Ω_l, curva contínua interna;

6) a hiperesfera $\{x \in R^n : \|x\|_2 = \sigma\}$, elipse pontilhada;

7) a região onde $\dot{V}(x) > 0$, região cinza.

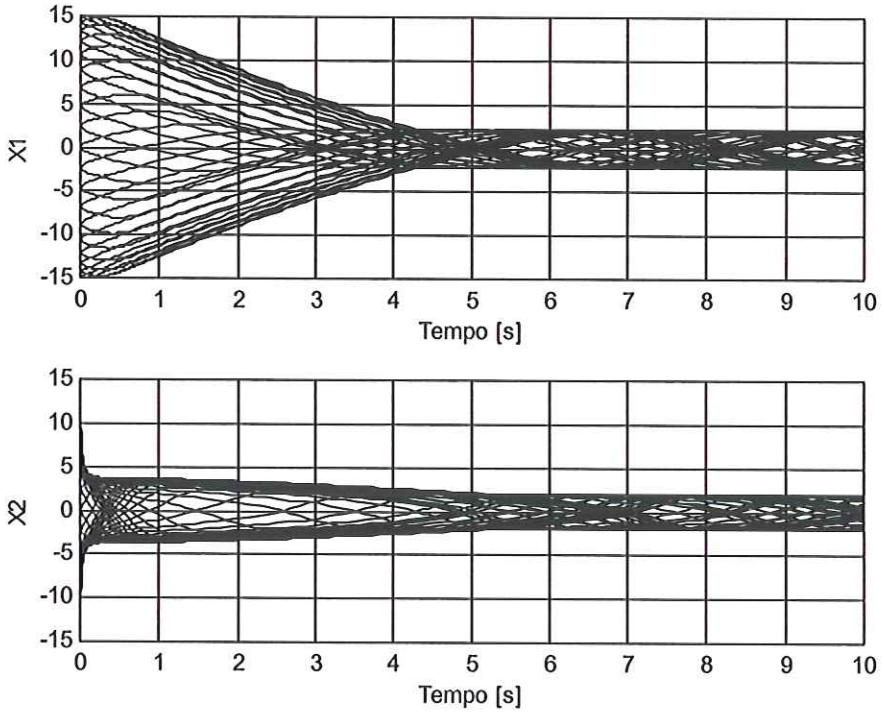


Figura 5.18: Trajetórias do Sistema de Van der Pol para diversas condições iniciais.

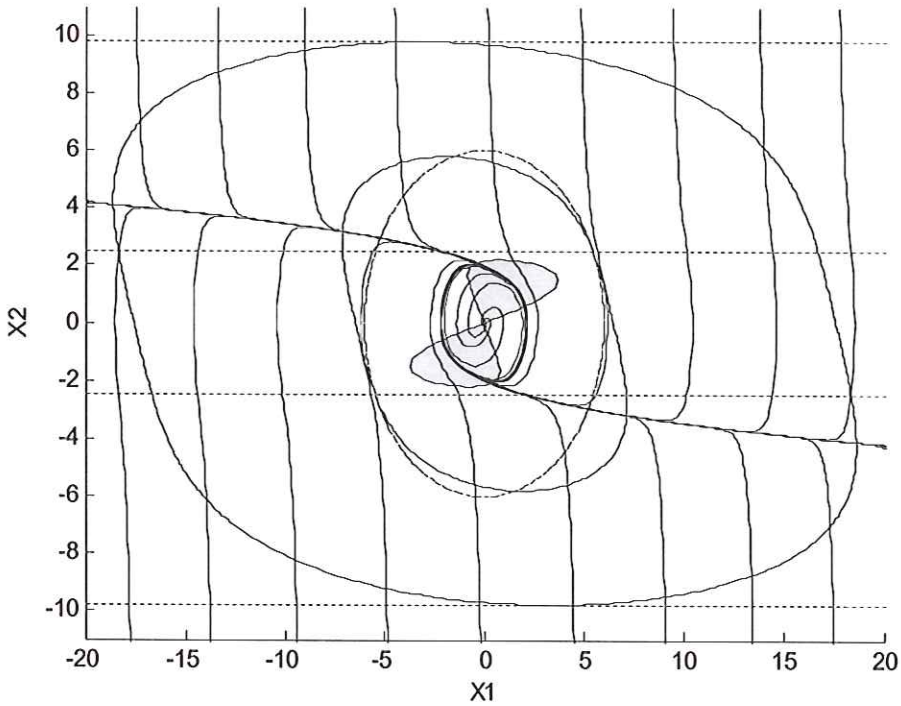


Figura 5.19: Estimativas do conjunto atrator do sistema de Van der Pol e de sua área de atração.

Nesse caso, conforme indicam as fig. 5.14 a 5.17, pode-se expandir indefinidamente a estimativa da área de atração, conjunto Ω_L, aumentando-se a constante de condição de setor, K. No limite, o setor corresponderá a todo o 1° e o 3° quadrantes da fig. 5.13(b). Porém $K \to \infty \Rightarrow K^{-1} \to 0$, desse modo, resolvendo-se o problema de minimização da eq. (4.13) com $K^{-1} = 0$, obtêm-se $P = \begin{bmatrix} 52{,}8047 & 17{,}5165 \\ 17{,}5165 & 36{,}6661 \end{bmatrix}$, $\tau = 52{,}8047$, $\eta = 17{,}5165$ e $\lambda_M = -34{,}5294$. Portanto, podem-se calcular $\sigma = 7{,}5263$ e $l = 3{,}3999.10^3$. Assim, a Função de Lyapunov Tipo Lure é dada por:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 52{,}8047 & 17{,}5165 \\ 17{,}5165 & 36{,}6661 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 35{,}0330\left[-x_2^2 + \tfrac{1}{12}x_2^4\right] \tag{5.8}$$

A fig. 5.20 mostra, para esse caso, os mesmos elementos da fig. 5.19. Pode-se ver que houve um pequeno aumento no conservadorismo da

estimativa do conjunto atrator. Entretanto, este exemplo mostra que o ciclo limite do Sistema de Van der Pol é globalmente estável.

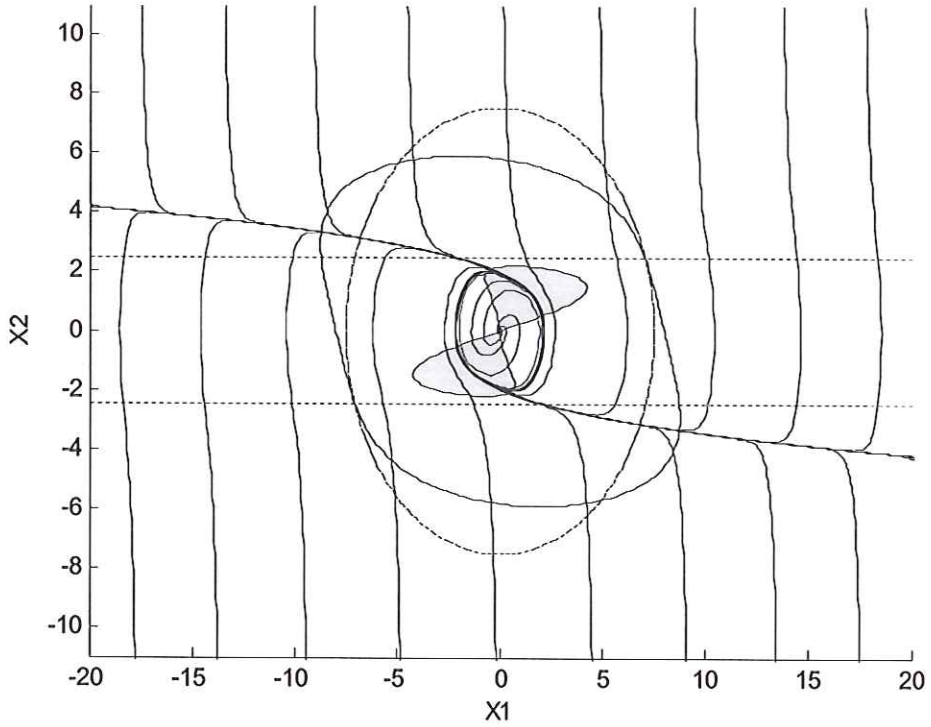


Figura 5.20: Estimativa do conjunto atrator global do sistema de Van der Pol.

5.3 Sistema massa-mola com histerese

Um exemplo numérico simples de um sistema que pode ser descrito por DI é um sistema massa-mola amortecido e excitado por uma força constante, chaveada segundo a posição da massa. Este sistema é descrito pela seguinte equação diferencial:

$$M\ddot{z} + k_c\dot{z} + k_m z + h(z) = 0 \tag{5.9}$$

A excitação $h(z)$, fig. 5.21, vale H^+ enquanto o sistema se mantém em $z \geq z_-$. Quando a posição cai abaixo de z_-, a amplitude passa a ser de H^-

enquanto o sistema não ultrapassa z_+. Para condições iniciais no intervalo $z_- \leq z \leq z_+$, foi considerado que a amplitude da excitação é H^+.

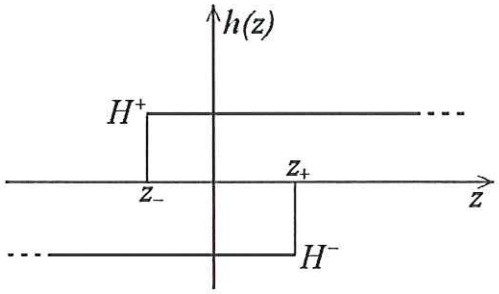


Figura 5.21: Excitação chaveada do sistema massa-mola.

Tal excitação não pode ser representada por uma função, de modo que não é possível analisar este sistema usando-se métodos de Lyapunov convencionais. Entretanto, a excitação pode ser representada por um SVM, cujo gráfico é mostrado na fig. 5.22, reescrevendo-a como:

$$H(x) = co\{h(z) + I(z)\} \tag{5.10}$$

onde $co\{\cdot\}$ indica o *convex hull* (casca convexa, embora o conjunto resultante não seja composto apenas da fronteira) e $I(z)$ é uma função nula em todos os pontos, exceto nos intervalos $[z_- - \varepsilon, z_-]$ e $[z_+, z_+ + \varepsilon]$, nos quais é constituída por dois segmentos de reta unindo os pontos $(z_- - \varepsilon, H^-)$ com (z_-, H^+) e (z_+, H^-) com $(z_+ + \varepsilon, H^+)$, respectivamente. O SVM resultante é Lipschitziano com $l \geq \frac{H_+ - H_-}{\varepsilon}$. Para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, a constante de Lipschitz pode se tornar bastante grande. Entretanto, sua amplitude não influi no resultado da análise. A representação da excitação por SVM torna desnecessária, para a estimativa da área de atração e do conjunto atrator, a escolha de um valor *default* da força para condições iniciais no intervalo $[z_- - \varepsilon, z_+ + \varepsilon]$.

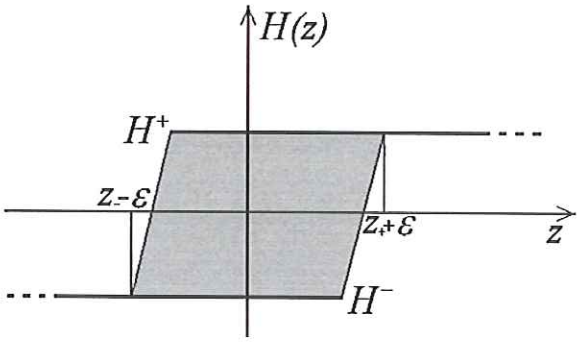


Figura 5.22: SVM resultante.

Este sistema pode ser colocado na forma de um Problema de Lure Estendido, fazendo-se $x_1 = z$ e $x_2 = \dot{z}$. Nesse caso, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_m/M & -k_c/M \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e a não-linearidade é dada pelo SVM $H(\cdot)$ em $y = c^T x = z$. Nesse caso, dada a constante de condição de setor, K, $\alpha = \min\{z_-, H^-/K\}$, $\beta = \max\{z_+, H^+/K\}$, $a = -b = -\infty$ e $m = \max\{H^+, -H^-\}$. A factibilidade do procedimento para diversos valores de k_m, k_c, M e K pode ser vista nas fig. 5.23 a 5.25, região cinza, sendo que as curvas de nível indicam a qualidade da resposta obtida, quanto maior a concentração maior o conservadorismo da estimativa. Em todos os gráficos, $H^+ = -H^- = 3$, $z_+ = -z_- = 0{,}1$ e $\varepsilon = 10^{-9}$.

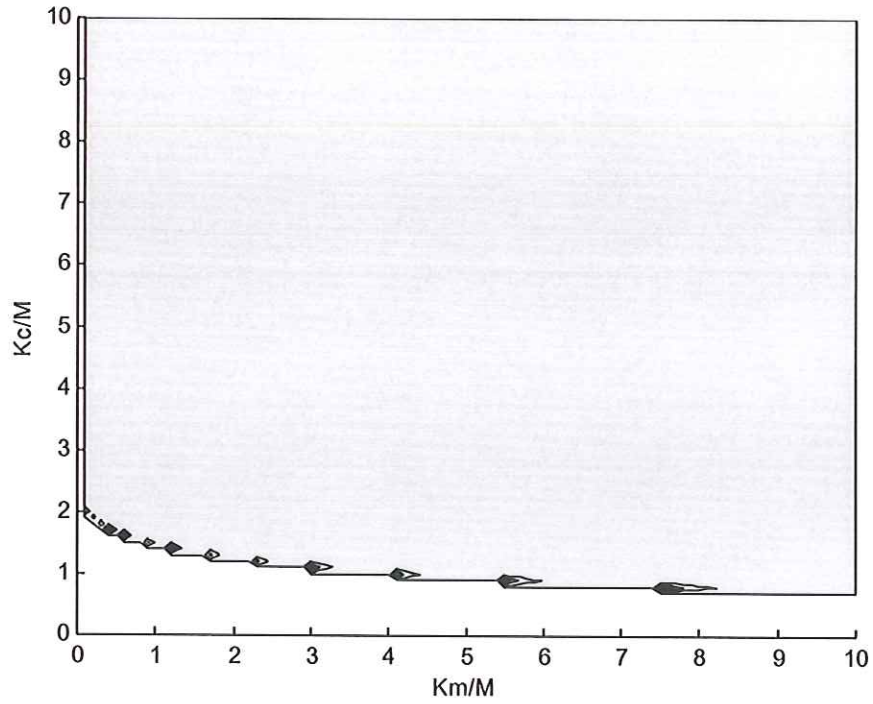


Figura 5.23: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 5$.

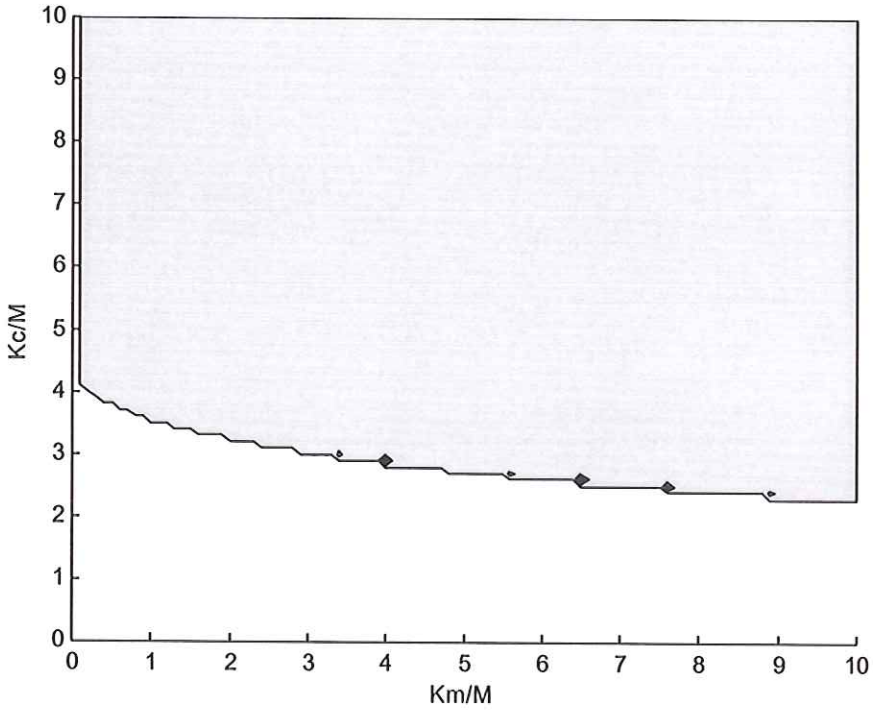


Figura 5.24: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 20$.

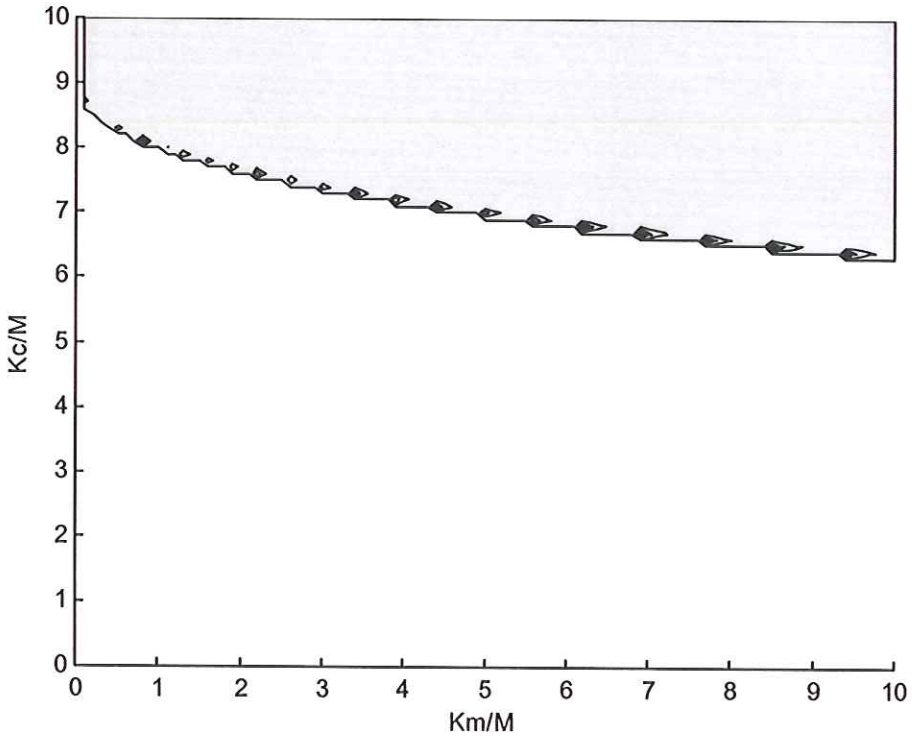


Figura 5.25: Regiões de factibilidade do procedimento: $K = 80$.

Adotando-se os parâmetros $k_m/M = 2$, $k_c/M = 2$, $H^+ = -H^- = 3$, $z_+ = -z_- = 0{,}1$, $\varepsilon = 10^{-9}$ e $K = 5$, podem-se calcular $\alpha = -\beta = -0{,}6$ e $m = 3$. Na fig. 5.26, são mostradas as trajetórias desse sistema para diversas condições iniciais:

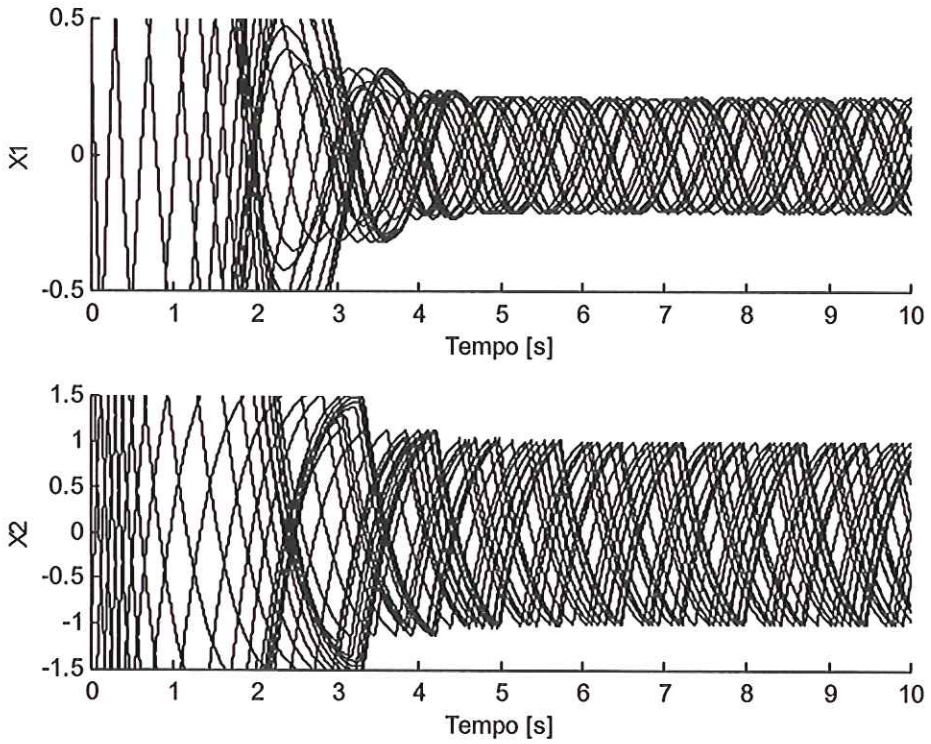


Figura 5.26: Trajetórias do sistema massa-mola com histerese para diversas condições iniciais.

Nesse caso, é fácil ver que $c_1 = [0 \quad 1]^T$. A resolução do problema da eq. (4.6) fornece $P = \begin{bmatrix} 7{,}2900.10^8 & 1{,}4571.10^8 \\ 1{,}4571.10^8 & 2{,}1766.10^8 \end{bmatrix}$, $\tau = 2{,}5400.10^8$ e $\lambda_M = -5{,}7808.10^8$. Portanto, pode-se calcular $\sigma = 2{,}7183$. A matriz Z é dada por $Z = \begin{bmatrix} -0{,}6 & -0{,}6 & +0{,}6 & +0{,}6 \\ 2{,}7183 & -2{,}7183 & 2{,}7183 & -2{,}7183 \end{bmatrix}$, de modo que $l = 2{,}3461.10^9$. Portanto, pelo Teorema 4.2, podem-se construir estimativas do ciclo limite estável, Ω_l, e de sua área de atração, Ω_L. Na fig. 5.27, são mostradas:

1) as órbitas para diversas condições iniciais, curvas contínuas;

2) os hiperplanos $c^T x = \alpha$ e $c^T x = \beta$, retas pontilhadas internas;

3) a fronteira do conjunto Ω_l, $\{x \in R^n : x^T P x = l\}$, elipse contínua interna;

4) a hiperesfera $\{x \in R^n : \|x\|_2 = \sigma\}$, círculo pontilhado;

5) a região onde $\dot{V}(x) > 0$, região cinza.

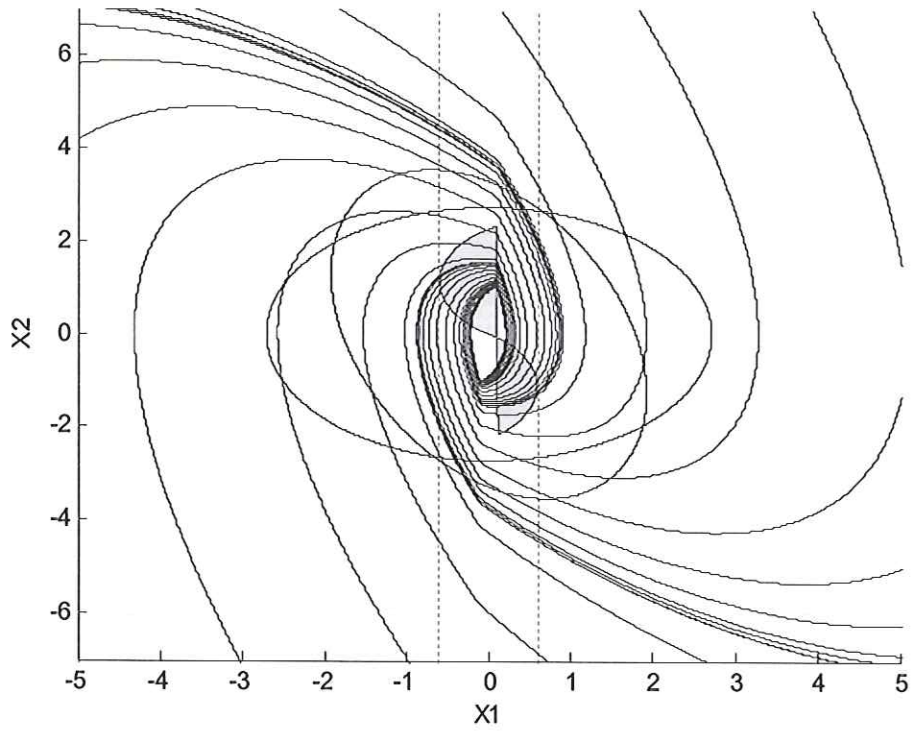


Figura 5.27: Estimativas do conjunto atrator do sistema massa-mola com histerese e de sua área de atração.

A representação da força de excitação por um SVM permite que se considere um chaveamento em qualquer ponto dentro do intervalo $[z_-, z_+]$, e não apenas na fronteira. Considerando que o chaveamento ocorre em uma posição aleatória dentro deste intervalo, foram obtidas as trajetórias da fig. 5.28. As estimativas Ω_L e Ω_l independem da forma como é feito o chaveamento. Portanto, mantendo-se os mesmos parâmetros utilizados para a obtenção da fig. 5.27, a figura obtida é a mesma, com exceção das órbitas e da região onde $\dot{V}(x) > 0$. Assim, a fig. 5.29 mostra, com um maior detalhamento, o conjunto atrator e a região onde $\dot{V}(x) > 0$ para o sistema massa-mola com a força chaveada aleatoriamente. A região na fig. 5.29 onde $\dot{V}(x) > 0$ é apenas ilustrativa, pois o valor de $\dot{V}(x)$ depende do valor da força. Como o chaveamento ocorre de forma aleatória, $\dot{V}(x)$ pode adquirir valores diferentes para um mesmo ponto no espaço de estados. Entretanto, fora do conjunto

$\Gamma_+ \cap \{x \in R^n : \|x\|_2 \leq \sigma\}$, o Teorema 4.2 garante que o sinal de $\dot{V}(x)$ é negativo qualquer que seja o valor de $h(\cdot)$.

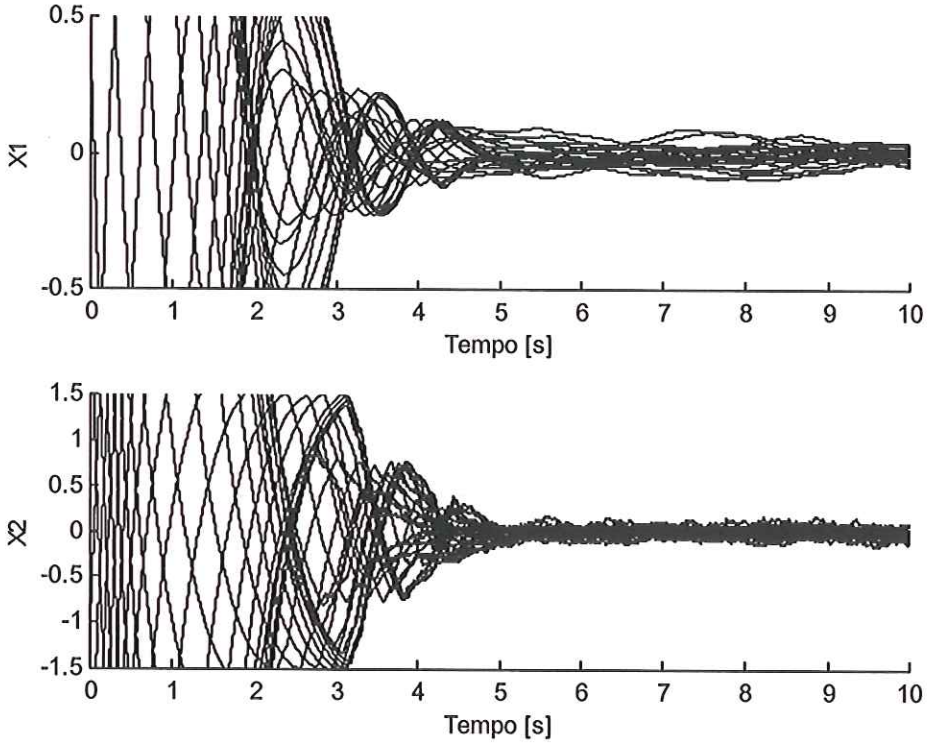


Figura 5.28: Trajetórias do sistema massa-mola com histerese com chaveamento aleatório.

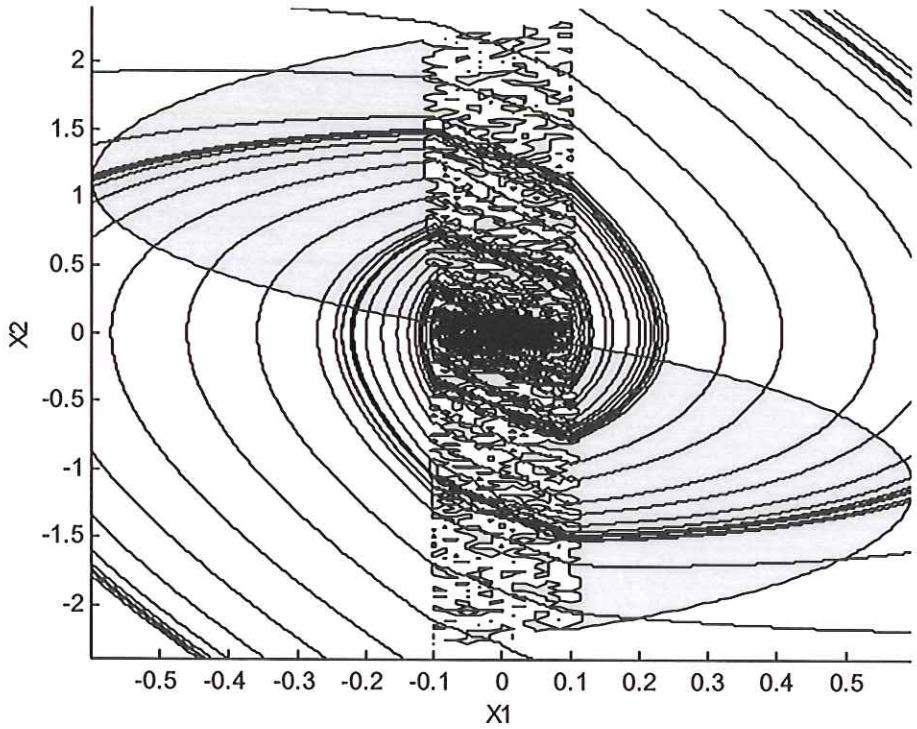


Figura 5.29: Conjunto atrator e região onde $\dot{V}(x) > 0$ para o sistema massa-mola com histerese com chaveamento aleatório.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um procedimento sistemático para a construção de Funções de Lyapunov Estendidas, para uma determinada classe de sistemas não-lineares. Esta classe de sistemas, aqui chamada de Problema de Lure Estendido, consiste de sistemas não-lineares que podem ser escritos na forma do Problema de Lure convencional. Entretanto, uma das não-linearidades pode violar a condição de setor em torno da origem, embora permaneça limitada. Para estes sistemas, o conjunto atrator pode ser mais complexo que pontos de equilíbrio isolados. O procedimento desenvolvido é baseado na Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle e fornece estimativas do conjunto atrator e de sua respectiva área de atração. Para sistemas não-autônomos, a obtenção destas estimativas é sistemática. Para sistemas autônomos o cálculo das constantes L e l, precisa ser feito numericamente caso a caso. Os parâmetros da Função de Lyapunov são obtidos resolvendo-se um problema de otimização posto na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs).

O procedimento desenvolvido foi aplicado em dois sistemas clássicos nos estudos de sistemas não lineares, a Equação de Duffing e o Sistema de Van der Pol. Os resultados mostram que o procedimento desenvolvido fornece boas estimativas, embora conservadoras, dos conjuntos atratores, que nos exemplos acima são ciclos limites estáveis. Inclusive, para o Sistema de Van der Pol foi obtida uma Função de Lyapunov que mostra que o ciclo limite é globalmente estável. Um sistema massa-mola, com características de

histerese, também foi analisado. A representação do sistema dinâmico com histerese foi realizada por meio de uma inclusão diferencial.

A factibilidade do procedimento foi verificada para vários valores de parâmetros dos sistemas. Esta análise mostrou que, para os sistemas examinados, o procedimento desenvolvido se aplica para uma larga faixa dos parâmetros destes sistemas. Entretanto, a factibilidade do procedimento pode não se manter com a elevação da ordem dos sistemas analisados. Este é o caso dos sistemas elétricos de potência multi-máquinas.

Uma limitação intrínseca do procedimento é haver a necessidade de se colocar o sistema a ser analisado na forma do Problema de Lure. Isso limita a gama de sistemas que podem ser analisados, mas essa característica é inerente aos métodos de análise de estabilidade de sistemas não-lineares. Além disso, para sistemas autônomos apenas uma não-linearidade pode violar a condição de setor. Outros aspectos do procedimento desenvolvido ainda requerem mais estudos para sua melhoria, como por exemplo:

1) Na aplicação do Teorema 4.2, a obtenção da matriz P e da constante escalar τ, tais que a matriz $\begin{bmatrix} A^T P + PA & -PB + \tau c \\ -B^T P + \tau c^T & -2\tau K^{-1} \end{bmatrix}$ seja definida negativa, é feita resolvendo-se o problema de minimização da eq. (4.6). A solução deste problema pode ser obtida através de pacotes computacionais, como o LMI Control Toolbox do MatLab©. Entretanto, até onde se sabe, não existe uma forma de verificar *a priori* a factibilidade deste problema. Uma outra forma de se obter a matriz P é encontrar uma decomposição na forma do Teorema 3.7, que nesse caso possui um critério para se verificar a existência de tal decomposição, Ferrante e Pandolfi [2001], Idannou e Tao [1987] e Wen [1988]. Entretanto, métodos numéricos que realizem convenientemente esta decomposição também têm sido pouco estudados. A mesma observação vale para o sistema autônomo, Teorema 4.3.

2) Na aplicação do Teorema 4.3 é preciso encontrar as constantes L e l numericamente. O que pode levar a resultados insatisfatórios devido à não

convexidade do problema, isto é, os pontos de máximo obtidos são locais e não globais.

Outra possibilidade de melhoria dos resultados seria utilizar não apenas uma, mas q matrizes P_i nas Funções de Lyapunov. De modo que cada função $V_i(x) = x^T P_i x$ seja válida num setor do espaço de estados, $\{x \in R^n : a_i \leq c^T x \leq a_{i+1}, b_{i+1} \leq c^T x \leq b_i\}$, onde $i = 1, \cdots, q$, $b_{q+1} = \beta$ e $a_{q+1} = \alpha$. Além disso, pode ser feita uma ampliação do procedimento para analisar sistemas com não-linearidades mais complicadas. O Teorema 3.6 trata de sistemas que possuem parâmetros que podem variar dentro de um certo conjunto. Essa idéia também pode ser utilizada no procedimento, de forma a se considerar variações paramétricas, seja na parte linear do sistema, seja na parte não-linear ou em ambas.

REFERÊNCIAS

ALBERTO, L.F.C. (2000). *O princípio de invariância de LaSalle estendido aplicado ao estudo de coerência de geradores e à análise de estabilidade transitória multi-"swing"*. 125 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2000.

ANDERSON, P.M.; FOUAD, A.A. (1977). *Power system control and stability*. New York: IEEE Press.

ANDERSON, B.D.O.; VONGPANITLERD, S. (1973). *Network analysis and synthesis: a modern approach*. New Jersey: Prentice Hall Inc.

ANGELI, D.; INGALLS, B.; SONTAG, E.D., WANG, Y. (2004). Uniform global asymptotic stability of differential inclusions. *Journal of Dynamical and Control Letters*, v.10, n.3, p.391-412, july.

ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M. (1994). *An exploration of chaos*. Amsterdam: North Holand.

BOYD, S.; GHAOUI, L.E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM.

BRANICK, M. S. (1998). Multiple Lyapunov Functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.43, n.4, april.

BRETAS, N.G.; ALBERTO, L.F.C. (2000). *Estabilidade transitória em sistemas eletroenergéticos*. São Carlos: EESC-USP.

CARJA, O.; MARQUES, M.D.P.M. (2002). Weak tangency, weak invariance, and Carathéodory mappings. *Journal of Dynamical and Control Letters*,v.8, n.4, p.445-61, oct.

CASTRUCCI, P.B.L.; CURTI, R. (1981). *Sistemas não-lineares*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda (Série controle automático de sistemas dinâmicos, v.2).

CHIANG, H-D. (1989). Study of the existence of energy functions for power systems with losses. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, v.36, n.11, p.1423-9, nov.

CHIANG, H-D.; WU, F.F.; VARAYA, P.P. (1987). Foundation of direct methods for power system transient stability analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v.CAS-34, n.2, p.160-73, fev.

COUTINHO, D.F.; BAZANELLA, A.S.; TROFINO, A.; SILVA, A.S. (2002). Polynomial Lyapunov Functions for a class of differential-algebraic systems. In: *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal-RN, set.

DELLNITZ, M.; HOHMANN, A. (1997). A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. *Numerische Mathematik*, v.75, p.293-317.

DIEUDELOT, J-Y.; BORNE, P. (2001). An estimation of the stability domain of a fuzzy controled pendulum using overlapping attractors and vector norms. *IEEE 2001 International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, v.4, p.2245-9, out.

FERRANTE, A.; PANDOLFI, L. (2002). On the solvability of the positive real lemma equations. *Systems and Control Letters*, v.47, p.211-9.

GAMEIRO, M.F.; RODRIGUES, H.M. (2001). Applications of robust synchronization to communication systems. *Applicable Analysis*, v.79, p.21-45.

GAN, Z.; HAN, J. (2003). Lyapunov Function of General Lurie Systems with multiple nonlinearities. *Applied Mathematics Letters*, v.16, p.119-26.

GAPSKI, P.B.; GEROMEL, J.C. (1994). A convex approach to the absolute stability problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.39, n.9, sep.

HADDAD, W.M.; KAPILA, V. (1995). Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.40, n.2, p.361-5, fev.

HALIM, A.; TAKAHASHI, K. (2000). An application of linear matrix inequalities method for power system transient stability analysis. In: *IEEE PES SUMMER MEETING*, Seattle, Washington, USA.

HEIDARI, S.; NIKIAS, C.L. (1993). Characterizing chaotic attractors using fourth-order off-diagonal cumulant slices. *The 27th Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers*, v.1, p.466-70.

HESPANHA, J.P. (2004). Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's Invariance Principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n.4, april.

HORN, R.A.; JOHNSON, C.R. (1996). Matrix Analysis. New York: Cambridge.

IDANNOU, P.; TAO, G. (1987). Frequency domain conditions for strictly positive real functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.AC-32, n.1, p.53-4, jan.

KAKUTANI, Y.; HAGIWARA, T.; ARAKI, M. (2000). LMI representation of the shifted Popov criterion. *Automatica*, v.36, p.765-70.

KANNAN, R.; KRUEGER, C.K. (1996). *Advanced analysis on the real line*. New York: Springer Verlag Inc.

KHALIL, H.K. (1992). *Nonlinear systems*. New York: Prentice Hall.

KUNDUR, P. (1994). *Power system stability and control*. New York: EPRI McGraw-Hill.

LASALLE, J.; LEFSCHETZ, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. New York: Academic Press.

LEE, S.-W.; KIM, J.-H. (1995). Robust adaptive stick-slip friction compesation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v.42, n.5, oct.

LEON, S.J. (1999). *Algebra linear com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC Editora.

MAGNUSSON, P.C. (1947). The transient-energy method of calculating stability. *AIEE Transactions*, v.66, p.747-55.

MILLER, R.K.; MICHEL, A.N.; KRENZ, G.S. (1984). Stability analysis of limit cycles in nonlinear feedback systems using describing functions: improved results. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, v.CAS-31, n.6, p.561-7, jun.

MILLER, S.A.; SMITH, R.S. (2000). A bundle method for efficiently solving large structured linear matrix inequalities. *Proceedings of the American Control Conference*, Chigago, june.

MORENO, U.F.; PERES, P.L.D.; BONATTI, I.S. (2003). Analysis of piecewise-linear oscillators with hysteresis. *IEEE Transactions on Circuit and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, v.50, n.8, aug.

NARASIMHAMURTHI, N. (1984). On the existence of energy functions for power systems with transmission losses. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v.CAS-31, n.2, p.199-203, fev.

NEMIROVSKII, A.; GAHINET, P. (1994). The projective method for solving linear matrix inequalities. *Proceedings of the American Control Conference*, p.840-4, jun.

OLIVEIRA, M.C.; HSU, L.; GEROMEL, J.C. (2002). Uma formulação LMI para a análise de estabilidade com funções de Lyapunov do tipo Lur'e-Persidskii. *Revista Controle & Automação*, v.13, n.1, p.25-33, jan-abr.

PAI, M.A.; MOHAN, M.A.; RAO, J.G. (1970). Power system transient stability regions using Popov's method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-80, n.5/6, p.788-94, mai/jun.

PAI, M.A.; MURTHY, P.G. (1973). On Lyapunov functions for power systems with transfer conductances. IEEE Transactions on Automatic Control, v.AC-18, p.181-83, Apr.

PAI, M.A.; MURTHY, P.G. (1974). Author's reply: Comments on: On Lyapunov functions for power systems with transfer conductances. IEEE Transactions on Automatic Control, v.AC-19, p.622-3, Oct.

PAI, M.A.; NARAYANA, C.L. (1976). Finite regions of attraction for multinonlinear systems and its applications to the power systems stability problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.AC-21, p.716-21, out.

PARÉ, T.; HASSIBI, A.; HOW, J. (2001). A KYP lemma and invariance principle for systems with multiple hysteresis non-linearities. *International Journal of Control*, v.74, n.11, p.1140-57.

PARK, P.G.; BANJERDPONGCHAI, D.; KAILATH, T. (1998). The asymptotic stability of nonlinear (Lur'e) systems with multiple slope restrictions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.43, p.978-82, jul.

QIU, S-S.; FILANOVSKY, I.M. (1987). On verification of stability of periodic oscillations in nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v.CAS-34, n.12, p.1605-7, dec.

RANTZER, A. (1996). On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma. *System and Control Letters*, v.28, p.7-10.

RODRIGUES, H.M.; ALBERTO, L.F.C, BRETAS, N.G. (2001). Uniform invariance principle and synchronization with respect to parameter variation. *Journal of Differential Equations*, v.169, p.228-54.

RUDIN, W. (1966). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York.

SEAH, S.W. (1982). Existence of solutions and asymptotic equilibrium of multivalued differential systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v.89, p.648-63.

SHEKHAR, S. (1996). Local characterization of invariant sets of an autonomous differential inclusion. *Journal of Nonlinear Science*, v.6, p.105-38.

SMIRNOV, G.V. (2000). *Introduction to the theory of differential inclusions*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

TANIGUCHI, T. (1992). Global existence of solutions of differential inclusions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.166, p.41-51.

TAO, G.; KOKOTOVIC, P. V. (1994). Adaptative control of plants with unknown dead-zones. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.39, n.1, p.59-68, jan.

VANANTWERP, J.G.; BRAATZ, R.D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, v.10, p.363-85.

VANVALKENBURG, M.E. (1960). *Introduction to modern network synthesis*. New York: John Wiley & Sons.

VENKATASUBRAMANIAN, V.; JI, W. (1999). Coexistence of four different attractors in a fundamental power system model. *IEEE Transactions on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, v.46, n.3, p.405-9, mar.

VIDYASAGAR, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs-NJ: Prentice Hall.

WANG, K.; MICHEL, A.N. (1996). Stability analysis of differential inclusions in Banach space with applications to nonlinear systems with time delays. *IEEE Transactions on Circuit and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, v.43, n.8, aug.

WEN, J.T. (1988). Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.33, n.10, p.988-92, out.

WIGGINS, S. (1990). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.* New York: Springer Verlag.

WILLEMS, J.L. (1971). Direct methods for transient stability studies in power system analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.AC-16, n.4, p.332-41, ago.

Apêndice A - Método alternativo de cálculo da constante l no Teorema 4.2

O problema consiste em se encontrar o maior nível da função $V(x) = x^T P x$ tal que sua curva de nível, $\Omega_l = \{x \in R^n : x^T P x = l\}$, englobe o conjunto $\Gamma_+ \cap \{x \in R^n : \|x\|_2 \leq \sigma\}$. Duas situações distintas podem ocorrer:

1) Supondo que o ponto de máximo esteja contido no interior do conjunto Γ_+, pode-se obter o valor de l resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \max & x^T P x \\ s.a. & \|x\|_2^2 = x^T x = \sigma^2 \end{cases} \tag{A.1}$$

Este problema pode ser resolvido utilizando-se os multiplicadores de Lagrange, onde a função Lagrangeana é dada por:

$$L(x, \lambda) = x^T P x + \lambda(\sigma^2 - x^T x) \tag{A.2}$$

Os pontos extremos são caracterizados por:

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} (P - \lambda I)x \\ \sigma^2 - x^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Desse modo, os pontos extremos são dados pelos autovetores de norma σ da matriz P. Portanto, estes pontos extremos não são únicos. Entretanto, o que se quer é calcular o valor máximo da função quadrática e não o ponto em que o máximo ocorre. Assim:

$$(P-\lambda I)x = \underline{0} \Rightarrow x^T(P-\lambda I)x = 0 \Rightarrow x^T P x = \lambda x^T x = \lambda\sigma^2 \tag{A.4}$$

$$\therefore l_1 = \lambda_{MAX}(P)\sigma^2 \tag{A.5}$$

Os demais autovalores de P dão valores de mínimo ou extremos locais. Convém observar que o ponto onde o máximo global ocorre também não é único, pois, tanto o autovetor associado ao maior autovalor de P quanto este vetor com sinal invertido fornecem o mesmo valor de máximo.

Ainda é preciso verificar a validade da suposição de que o ponto de máximo está contido em Γ_+:

a) Caso a multiplicidade algébrica do maior autovalor da matriz P seja 1, o autovetor de interesse pode ser calculado. Se este autovetor satisfizer $\alpha < c^T x < \beta$ ou $\alpha < -c^T x < \beta$, então $l = l_1$. Caso contrário, a suposição não é válida e será preciso considerar o item 2 a seguir.

b) Caso a multiplicidade algébrica do maior autovalor de P seja maior que 1, existirá um conjunto infinito de pontos de máximo. Este conjunto de pontos é composto pela intersecção da hiper-esfera $\|x\|_2 \le \sigma$, com o subespaço gerado pelos autovetores associados ao maior autovalor da matriz P. Nesse caso, pode ser bastante difícil verificar analiticamente se algum desse pontos pertence ao interior do conjunto Γ_+.

c) Caso a hiper-esfera $\|x\|_2 \le \sigma$ esteja contida no conjunto Γ_+, isto é, $\sigma < \beta/\|c\|$ e $\sigma \le |\alpha|/\|c\|$, não importa a multiplicidade do maior autovalor de P, algum ponto de máximo sempre estará contido em Γ_+. Portanto $l = l_1$.

2) Supondo que o ponto de máximo esteja contido na fronteira do conjunto Γ_+, por exemplo em $c^T x = \beta$, pode-se obter o valor de l resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} \max & x^T P x \\ s.a. & \|x\|_2^2 = x^T x = \sigma^2 \\ & c^T x = \beta \end{cases} \tag{A.6}$$

Nesse caso, a função Lagrangeana será dada por:

$$L(x, \lambda, \mu) = x^T P x + \lambda(\sigma^2 - x^T x) + \mu(\beta - c^T x) \tag{A.7}$$

Os pontos extremos são caracterizados por:

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = \begin{bmatrix} (P - \lambda I)x \\ \sigma^2 - x^T x \\ \beta - c^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5\mu c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Além disso, em cada ponto extremo tem-se que:

$$(P - \lambda I)x = 0{,}5\mu c \Rightarrow x^T (P - \lambda I)x = 0{,}5\mu x^T c \Rightarrow x^T P x = \lambda\sigma^2 + 0{,}5\mu\beta \tag{A.9}$$

Desse modo, pode-se obter o valor de máximo como:

$$l_\beta = \max_{(\lambda,\mu)\in\Psi} \{\lambda\sigma^2 + 0{,}5\mu\beta\} \tag{A.10}$$

onde $\Psi = \{(\lambda, \mu) \in R^2 : \exists x \in R^n \mid (P - \lambda I)x = 0{,}5\mu c\}$. O mesmo procedimento pode ser aplicado para a fronteira $c^T x = \alpha$ do conjunto Γ_+. Desse modo, teremos $l = \max\{l_\alpha, l_\beta\}$.

O método de cálculo da constante l proposto no Teorema 4.2 é mais sistemático que o método alternativo descrito neste apêndice. Porém, o resultado fornecido é, em geral, mais conservador, visto que o valor calculado de l pelo procedimento proposto é maior que aquele encontrado da forma descrita neste apêndice.

Apêndice B - Programas utilizados nos exemplos numéricos

Todos os programas foram implementados em MatLab©, sendo utilizado o LMI Control Toolbox para a resolução dos problemas de otimização.

B.1 Programa que determina as regiões de viabilidade do procedimento desenvolvido para a Equação de Duffing

```
% programa que gera as regioes de viabilidade do procedimento
% proposto para a eq de duffing

% vaores fixos para k3 k4 e omega
clear all
tic
k3=1;
k4=5;
omega=1.0;

% variacao dos valores de K k1 e k2
valor=[10 30 100];
for cont=1:1:length(valor)
   K=valor(cont);
   figure
   hold
   ii=0;
   for k1=.1:.1:10
      ii=ii+1;
      x(ii)=k1;
      jj=0;
      for k2=.1:.1:10
```

```
        jj=jj+1;
        y(jj)=k2;

% constantes do problema de lure
erro=0;
A=[0 1;-k1 -k2];
B=[0;1];
C=[1 0];
C1=[0 1];

% intervalos da setorialidade
roots([k3 0 -K k4]);
sort(ans);
b1=ans(3);
aux1=ans(2);
if ~isreal(ans)
   erro=1;
end
beta=max(abs(k4^(1/3)),aux1);
if b1<=beta
   erro=1;
end
alfa=-beta;
a1=-b1;
m=max(k3*aux1^3,2*k4);

% obs: qualquer erro=1 torna o problema infactivel

% resolucao do problema de otimizacao por LMI
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,inv(K));

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([Rest4 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest4 1 1 lambda],1,1);

lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end
[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi,[0.01 100 1e9 10 0]);
```

```
if ~isempty(cresp),
P=dec2mat(lmisys,xresp,P);
T=dec2mat(lmisys,xresp,T);
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda);
Q=P*A+A'*P;
setlmis([]);
sigma=2*m*norm(P*B)/abs(max(eig(Q)));

% calculo dos vertices pelo procedimento
vert1=[C;C1]\[alfa;sigma];
vert2=[C;C1]\[alfa;-sigma];
vert3=[C;C1]\[beta;sigma];
vert4=[C;C1]\[beta;-sigma];

% calculo de L (Vext) e l (Vint)
Vext=min([a1^2/(C*inv(P)*C'),b1^2/(C*inv(P)*C')]);
Vint=max([vert1'*P*vert1,vert2'*P*vert2,vert3'*P*vert3,vert4'*P*ve
rt4]);
 if Vext<=Vint
   erro=1;
end

else
   sigma=0;
end

if erro==1
   sigma=0;
end

% indica a viabilidade para cada ponto (.000001 facilita a
plotagem)
resp1(ii,jj)=sigma-.000001;
end
end

% plotagem da regiao de factibilidade
contourf(x,y,resp1',[0 0]);
colormap([.9 .9 .9])
contour(x,y,resp1',[0:max(max(resp1))/10:max(max(resp1))],'k-');
axis([0 10 0 10]);
xlabel('Km/M');
ylabel('Kc/M');
zoom
end
toc
```

B.2 Programa que aplica o procedimento desenvolvido para a Equação de Duffing

```
% aplicacao do procedimento desenvolvido para a eq de duffing
```

```
% nesse caso o atrator é um ciclo limite, valores pequenos de k1 e
k2   % geram atratores caoticos mas o problema de otimizacao se
torna não    % viável

% k1=Km/M>0 k2=Kc/M>0 k3=k1.p^2>0 k4=Ku/m

clear all

global A B C omega k3 k4 fase

% valor das constantes e setorialidade
k1=3;
k2=3;
k3=.1;
k4=2;
K=15;
omega=1;

% matrizes do problema de lure
A=[0 1;-k1 -k2];
B=[0;1];
C=[1 0];
C1=[0 1];

% intervalos da setorialidade
roots([k3 0 -K k4]);
sort(ans);
b1=ans(3);
aux1=ans(2);
beta=max(abs(k4^(1/3)),aux1);
alfa=-beta;
a1=-b1;
m=max(k3*aux1^3,2*k4);

% resolucao do problema de otimizacao por LMI

% declaracao das variaveis
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

% declaracao das restricoes
Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,inv(K));

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([Rest4 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest4 1 1 lambda],1,1);
```

```
% minimizacao do maior autovalor
lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end
[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi)

% calculo de P T lambda e sigma
if ~isempty(cresp),
P=dec2mat(lmisys,xresp,P)
eig(P)
T=dec2mat(lmisys,xresp,T)
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda)
Q=P*A+A'*P;
eig(Q)
eig([P*A+A'*P,-P*B+C'*T;-B'*P+T*C,-2*T*inv(K)])
sigma=2*m*norm(P*B)/abs(max(eig(Q)))
else
sigma=0;
end
setlmis([]);

% plotagem das trajetorias
figure
subplot(2,1,1),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X1')
subplot(2,1,2),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X2')
for fase=120*pi/180:120*pi/180:2*pi;
for teta=.5:.5:6;
   [t,x]=ode45('xpduffing1',[0 20],[30*cos(teta) 60*sin(teta)]);
   subplot(2,1,1),plot(t,x(:,1),'-k')
   subplot(2,1,2),plot(t,x(:,2),'-k')
end
end
subplot(2,1,1),axis([1 20 -.75 .75]),hold,zoom
subplot(2,1,2),axis([1 20 -.75 .75]),hold,zoom

% plotagem das orbitas
figure
hold
for fase=120*pi/180:120*pi/180:2*pi;
for teta=.5:.5:6;
   [t,x]=ode45('xpduffing1',[0 20],[30*cos(teta) 60*sin(teta)]);
   plot(x(:,1),x(:,2),'-k')
end
end

% calculo dos vertices pelo procedimento
vert1=[C;C1]\[alfa;sigma];
vert2=[C;C1]\[alfa;-sigma];
vert3=[C;C1]\[beta;sigma];
vert4=[C;C1]\[beta;-sigma];

% calculo de L (Vext) e l (Vint)
Vext=min([a1^2/(C*inv(P)*C'),b1^2/(C*inv(P)*C')]);
Vint=max([vert1'*P*vert1,vert2'*P*vert2,vert3'*P*vert3,vert4'*P*ve
rt4]);
```

```
% plotagem de OmegaL e Omegal
x1=-30:30/300:30;
x2=-60:60/300:60;
for i=1:length(x1),
   for j=1:length(x2),
      V(i,j)=[x1(i) x2(j)]*P*[x1(i);x2(j)];
      Vlim(i,j)=[x1(i) x2(j)]*eye(size(P))*[x1(i);x2(j)];
   end
end
contour(x1,x2,V',[Vint Vext],'k-')
contour(x1,x2,Vlim',[sigma^2 sigma^2],'k:')

% plotagem dos hiperplanos
setor=[-60:60/100:60];
setor1=a1*ones(1,length(setor));
setor2=b1*ones(1,length(setor));
setor3=alfa*ones(1,length(setor));
setor4=beta*ones(1,length(setor));
plot(setor1,setor,'k:',setor2,setor,'k:');
plot(setor3,setor,'k:',setor4,setor,'k:');
hold
axis([-15 15 -40 40])
xlabel('X1')
ylabel('X2')
zoom
```

B.3 Programa que determina as regiões de viabilidade do procedimento desenvolvido para o sistema com histerese

```
% programa que gera as regioes de viabilidade do procedimento
% proposto para a histerese

% a transicao pode ser feita nas bordas entre os niveis alto e
baixo
% ou aleatoriamente para qualquer valor dentro da histerese

% valores fixos para amplitude de h e ylim
clear all
close all
tic
amp=3;
ylim=.1+0.000000001;

% variacao dos valores de K k1 e k2
valor=[5 20 80];
for cont=1:1:length(valor)
   K=valor(cont);
   figure
   hold
```

```
   ii=0;
   for k1=.1:.1:10
      ii=ii+1;
      x(ii)=k1;
      jj=0;
      for k2=.1:.1:10
         jj=jj+1;
         y(jj)=k2;

% constantes do problema de lure
erro=0;
A=[0 1;-k1 -k2];
B=[0;1];
C=[1 0];
C1=[0 1];

% intervalos da setorialidade
beta=max(ylim,amp/K);
alfa=-beta;
m=amp;

% resolucao do problema de otimizacao por LMI
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,inv(K));

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([Rest4 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest4 1 1 lambda],1,1);

lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end
[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi,[0.01 100 1e9 10 0]);

if ~isempty(cresp),
P=dec2mat(lmisys,xresp,P);
T=dec2mat(lmisys,xresp,T);
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda);
Q=P*A+A'*P;
setlmis([]);
sigma=2*m*norm(P*B)/abs(max(eig(Q)));
```

```
else
sigma=0;
end

% indica a viabilidade para cada ponto (.000001 facilita a
plotagem)
resp1(ii,jj)=sigma-.000001;
end
end

% plotagem da regiao de factibilidade
contourf(x,y,resp1',[0 0]);
colormap([.9 .9 .9])
contour(x,y,resp1',[0:max(max(resp1))/10:max(max(resp1))],'k-');
axis([0 10 0 10]);
xlabel('Km/M');
ylabel('Kc/M');
zoom
end
toc
```

B.4 Programa que aplica o procedimento desenvolvido para o sistema com histerese

```
% aplicacao do procedimento desenvolvido para a histerese

% a transicao pode ser feita nas bordas entre os niveis alto e
baixo
% ou aleatoriamente para qualquer valor dentro da histerese

% nesse caso o atrator é um ciclo limite

% k1=Km/M>0 k2=Kc/M>0 amp>0 ylim>0

clear all

% valor das constantes e setorialidade
k1=2;
k2=2;
amp=3;
ylim=.1+0.000000001;
K=5;

% matrizes do problema de lure
A=[0 1;-k1 -k2];
B=[0;1];
C=[1 0];
C1=[0 1];

% intervalos da setorialidade
beta=max(ylim,amp/K);
alfa=-beta;
```

```
m=amp;

% resolucao do problema de otimizacao por LMI

% declaracao das variaveis
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

% declaracao das restricoes
Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,inv(K));

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([Rest4 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest4 1 1 lambda],1,1);

% minimizacao do maior autovalor
lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end
[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi)

% calculo de P T lambda e sigma
if ~isempty(cresp),
P=dec2mat(lmisys,xresp,P)
eig(P)
T=dec2mat(lmisys,xresp,T)
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda)
Q=P*A+A'*P;
eig(Q)
eig([P*A+A'*P,-P*B+C'*T;-B'*P+T*C,-2*T*inv(K)])
sigma=2*m*norm(P*B)/abs(max(eig(Q)))
else
sigma=0;
end
setlmis([]);

% plotagem das trajetorias
figure
subplot(2,1,1),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X1')
subplot(2,1,2),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X2')
for teta=.25:.25:6;
   cont=1;
   x=[10*cos(teta);10*sin(teta)];
```

```
   if x(1)>=-1
      h=amp;
   else
      h=-amp;
   end
   passo=0.001;
   tf=10;
   for t=passo:passo:tf
      y=C*x(:,cont);
      if y>=.1
        h=amp;
      elseif y<=-.1
        h=-amp;
      else
         if rand>=.5
            h=amp;
         else
            h=-amp;
         end
      end
      cont=cont+1;
      x(:,cont)=x(:,cont-1)+passo*(A*x(:,cont-1)-B*h);
   end
   t=0:passo:tf;
   subplot(2,1,1),plot(t,x(1,:),'-k')
   subplot(2,1,2),plot(t,x(2,:),'-k')
end
subplot(2,1,1),axis([0 10 -.5 .5]),hold,zoom
subplot(2,1,2),axis([0 10 -1.5 1.5]),hold,zoom

% calculo dos vertices pelo procedimento
vert1=[C;C1]\[alfa;sigma];
vert2=[C;C1]\[alfa;-sigma];
vert3=[C;C1]\[beta;sigma];
vert4=[C;C1]\[beta;-sigma];

% calculo de l
Vint=max([vert1'*P*vert1,vert2'*P*vert2,vert3'*P*vert3,vert4'*P*ve
rt4]);

% plotagem de OmegaL e Omegal
x1=-5:5/300:5;
x2=-7:7/300:7;
for i=1:length(x1),
   for j=1:length(x2),
      V(i,j)=[x1(i) x2(j)]*P*[x1(i);x2(j)];
      y=C*[x1(i);x2(j)];
      if y>=.1
        h=amp;
      elseif y<=-.1
        h=-amp;
      else
         if rand>=.5
            h=amp;
         else
            h=-amp;
         end
      end
      Vp(i,j)=2*[x1(i) x2(j)]*P*(A*[x1(i);x2(j)]-B*h);
```

```
      Vlim(i,j)=[x1(i) x2(j)]*eye(size(P))*[x1(i);x2(j)];
   end
end
figure
hold
contourf(x1,x2,Vp',[0 0])
colormap([.9 .9 .9])
contour(x1,x2,V',[Vint Vint],'k-')
%contour(x1,x2,V',30,'b-')
contour(x1,x2,Vlim',[sigma^2 sigma^2],'k:')

% plotagem das orbitas
for teta=.25:.25:6;
   cont=1;
   x=[10*cos(teta);10*sin(teta)];
   if x(1)>=-1
      h=amp;
   else
      h=-amp;
   end
   passo=0.001;
   tf=10;
   for t=passo:passo:tf
      y=C*x(:,cont);
      if y>=.1
        h=amp;
      elseif y<=-.1
        h=-amp;
      else
         if rand>=.5
            h=amp;
         else
            h=-amp;
         end
      end
      cont=cont+1;
      x(:,cont)=x(:,cont-1)+passo*(A*x(:,cont-1)-B*h);
   end
   plot(x(1,:),x(2,:),'-k')
end

% plotagem dos hiperplanos
setor=[-10:10/100:10];
setor3=alfa*ones(1,length(setor));
setor4=beta*ones(1,length(setor));
plot(setor3,setor,'k:',setor4,setor,'k:');
hold
axis([-5 5 -7 7])
xlabel('X1')
ylabel('X2')
zoom
```

B.5 Programa que determina as regiões de viabilidade do procedimento desenvolvido para o Sistema de Van der Pol

```
% programa que gera as regioes de viabilidade do procedimento
% proposto para a eq de duffing

% valores fixos para k3 k4 e omega
clear all
tic

% variacao dos valores de K csi e epsilon
valor=[30 100 1000 1000000000000000];
for cont=1:1:length(valor)
   Kinv=inv(valor(cont));
   figure
   hold
   ii=0;
   for epsilon=.05:.05:10
      ii=ii+1;
      x(ii)=epsilon;
      jj=0;
      for csi=0:.025:5
         jj=jj+1;
         y(jj)=csi;

% constantes do problema de lure
A=[0 1/epsilon;-epsilon -epsilon*csi];
B=[0;epsilon];
C=[0 1];
C1=[1 0];

% intervalos da setorialidade
b1=(3*(1+csi+inv(Kinv)))^.5;
a1=-b1;
beta=(3*(1+csi))^.5;
alfa=-beta;
m=(2/3)*(1+csi)^1.5;

% obs: qualquer erro=1 torna o problema infactivel

% resolucao do problema de otimizacao por LMI
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
N=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 N],A'*C',1);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,Kinv);
```

```
lmiterm([Rest1 2 2 N],-1,C*B,'s');

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([-Rest4 1 1 N],1,1);

Rest5=newlmi;
lmiterm([Rest5 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest5 1 1 lambda],1,1);

lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Nj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,N,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end

[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi);
if ~isempty(cresp),
P=dec2mat(lmisys,xresp,P);
T=dec2mat(lmisys,xresp,T);
N=dec2mat(lmisys,xresp,N);
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda);
Q=P*A+A'*P;
setlmis([]);
sigma=m*(norm(A'*C'*N-P*B)+(norm(A'*C'*N-
P*B)^2+2*abs(max(eig(Q)))*norm(N*C*B))^.5)/abs(max(eig(Q)));

% calculo de L (Vext) e l (Vint)
Vext=1000000000000000;
Vint=-Vext;
for x1=-50:.5:50;
   Vext=min([Vext,[x1 b1]*P*[x1;b1]+2*N*(-
(1+csi)*b1^2/2+b1^4/12),[x1 a1]*P*[x1;a1]+2*N*(-
(1+csi)*a1^2/2+a1^4/12)]);
end
x2=beta;
for x1=-(sigma^2-beta^2)^.5:2*(sigma^2-beta^2)^.5/25:(sigma^2-
beta^2)^.5
   Vint=max([Vint,[x1 x2]*P*[x1;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end
x2=alfa;
for x1=-(sigma^2-alfa^2)^.5:2*(sigma^2-alfa^2)^.5/25:(sigma^2-
alfa^2)^.5
   Vint=max([Vint,[x1 x2]*P*[x1;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end
for x2=alfa:(beta-alfa)/25:beta
   x11=-(sigma^2-x2^2)^.5;
   x12=(sigma^2-x2^2)^.5;
```

```
   Vint=max([Vint,[x11 x2]*P*[x11;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12),[x12 x2]*P*[x12;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end

if (Vext<=Vint)
   sigma=0;
end

else
   sigma=0;
end

% indica a viabilidade para cada ponto (.000001 facilita a
plotagem)
resp1(ii,jj)=sigma-.000001;
end
end

% plotagem da regiao de factibilidade
contourf(x,y,resp1',[0 0]);
colormap([.9 .9 .9])
contour(x,y,resp1',[0:max(max(resp1))/10:max(max(resp1))],'k-');
axis([0 10 0 5]);
xlabel('EPSILON');
ylabel('CSI');
zoom
end
toc
```

B.6 Programa que aplica o procedimento desenvolvido para o Sistema de Van der Pol

```
% programa que faz a aplicacao do procedimento proposto para o
sistema
% de van der pol

% criterio de popov
%e=1
%A=[0 1/e;-e -e];
%B=[0;e];
%C=[0 1];
%i=1;
%for cont=0:.01:100;
%w=cont^2;
%Z=C*inv(j*w*eye(size(A))-A)*B;
%lambda(i)=min(eig(Z+Z'));
%i=i+1;
%end
%plot(lambda)

clear all
```

```
global csi A B C

% constantes do problema de lure
epsilon=1;
csi=1;
A=[0 1/epsilon;-epsilon -epsilon*csi];
B=[0;epsilon];
C=[0 1];
C1=[1 0];
Kinv=0*1/30;

% intervalos da setorialidade
b1=(3*(1+csi+inv(Kinv)))^.5;
a1=-b1;
beta=(3*(1+csi))^.5;
alfa=-beta;
m=(2/3)*(1+csi)^1.5;

% resolucao do problema de otimizacao por LMI
setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1]);
T=lmivar(1,[1 0]);
N=lmivar(1,[1 0]);
lambda=lmivar(1,[1 1]);

Rest1=newlmi;
lmiterm([Rest1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([Rest1 1 2 P],-1,B);
lmiterm([Rest1 1 2 N],A'*C',1);
lmiterm([Rest1 1 2 T],C',1);
lmiterm([Rest1 2 2 T],-2,Kinv);
lmiterm([Rest1 2 2 N],-1,C*B,'s');

Rest2=newlmi;
lmiterm([-Rest2 1 1 P],1,1);

Rest3=newlmi;
lmiterm([-Rest3 1 1 T],1,1);

Rest4=newlmi;
lmiterm([-Rest4 1 1 N],1,1);

Rest5=newlmi;
lmiterm([Rest5 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([-Rest5 1 1 lambda],1,1);

lmisys=getlmis;
nvar=decnbr(lmisys);
clmi=zeros(nvar,1);
for j=1:nvar,
   [Pj,Nj,Tj,lambdaj]=defcx(lmisys,j,P,N,T,lambda);
   clmi(j)=lambdaj;
end

[cresp,xresp]=mincx(lmisys,clmi);
P=dec2mat(lmisys,xresp,P)
T=dec2mat(lmisys,xresp,T)
N=dec2mat(lmisys,xresp,N)
```

```
lambda=dec2mat(lmisys,xresp,lambda)
Q=P*A+A'*P
eig(Q)
setlmis([]);
sigma=m*(norm(A'*C'*N-P*B)+(norm(A'*C'*N-
P*B)^2+2*abs(max(eig(Q)))*norm(N*C*B))^.5)/abs(max(eig(Q)));

% calculo de L (Vext) e l (Vint)
Vext=1000000000000000;
Vint=-Vext;
for x1=-500:.1:500;
   Vext=min([Vext,[x1 b1]*P*[x1;b1]+2*N*(-
(1+csi)*b1^2/2+b1^4/12),[x1 a1]*P*[x1;a1]+2*N*(-
(1+csi)*a1^2/2+a1^4/12)]);
end
x2=beta;
for x1=-(sigma^2-beta^2)^.5:2*(sigma^2-beta^2)^.5/200:(sigma^2-
beta^2)^.5
   Vint=max([Vint,[x1 x2]*P*[x1;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end
x2=alfa;
for x1=-(sigma^2-alfa^2)^.5:2*(sigma^2-alfa^2)^.5/200:(sigma^2-
alfa^2)^.5
   Vint=max([Vint,[x1 x2]*P*[x1;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end
for x2=alfa:(beta-alfa)/200:beta
   x11=-(sigma^2-x2^2)^.5;
   x12=(sigma^2-x2^2)^.5;
   Vint=max([Vint,[x11 x2]*P*[x11;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12),[x12 x2]*P*[x12;x2]+2*N*(-
(1+csi)*x2^2/2+x2^4/12)]);
end

% plotagem dos resultados
x1max=30;
x1min=-x1max;
x2max=15;
x2min=-x2max;
npontos=201;
for i=1:npontos
   x1(i)=x1max*(i-1)/(npontos-1)+x1min*(1-(i-1)/(npontos-1));
   for j=1:npontos
      x2(j)=x2max*(j-1)/(npontos-1)+x2min*(1-(j-1)/(npontos-1));
      xi=[x1(i);x2(j)];
      h=-2*x2(j)+(x2(j)^3)/3;
      V(i,j)=xi'*P*xi+2*N*[-x2(j)^2+(x2(j)^4)/12];
      dV(i,j)=xi'*(P*A+A'*P)*xi-2*xi'*P*B*h+2*h*N*C*(A*xi-B*h);
      Vlim(i,j)=xi'*eye(size(P))*xi;
   end
end

figure
hold

contourf(x1,x2,dV',[0 0]);
colormap([.9 .9 .9])
%contour(x1,x2,V',[2.028 19.236]*10^10,'k-');
```

```
%contour(x1,x2,V',[2540 2540],'k-');
contour(x1,x2,V',[Vext Vext],'k-');
contour(x1,x2,V',[Vint Vint],'k-');
contour(x1,x2,Vlim',[sigma^2 sigma^2],'k:');

setor=2*[-15:15/100:15];
if Kinv~=0,
   setor1=((3*(inv(Kinv)+2))^.5)*ones(1,length(setor));
else
   setor1=(1000000000000)*ones(1,length(setor));
end
setor2=(6^.5)*ones(1,length(setor));
plot(setor,setor1,'k:',setor,-setor1,'k:');
plot(setor,setor2,'k:',setor,-setor2,'k:');

% plotagem das orbitas
for teta=2*pi/3:2*pi/3:2*pi;
  [t,x]=ode45('xpvanderpol1',[0 50],[0.03*cos(teta)
0.03*sin(teta)]);
  plot(x(:,1),x(:,2),'k-')
end

for teta=2*pi/40:2*pi/40:2*pi;
  [t,x]=ode45('xpvanderpol1',[0 50],[30*cos(teta) 30*sin(teta)]);
  plot(x(:,1),x(:,2),'k-')
end
hold
xlabel('X1')
ylabel('X2')
zoom
axis([-x1max x1max -x2max x2max])
axis([-20 20 -11 11])

% plotagem das trajetorias
figure
subplot(2,1,1),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X1')
subplot(2,1,2),hold,xlabel('Tempo [s]'),ylabel('X2')
for teta=2*pi/40:2*pi/40:2*pi;
   [t,x]=ode45('xpvanderpol1',[0 10],[15*cos(teta) 15*sin(teta)]);
   subplot(2,1,1),plot(t,x(:,1),'-k')
   subplot(2,1,2),plot(t,x(:,2),'-k')
end
subplot(2,1,1),axis([0 10 -15 15]),grid,hold
subplot(2,1,2),axis([0 10 -15 15]),grid,hold
zoom
```