

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica

DEDALUS - Acervo - EESC



31100013447

ANÁLISE DE UM SENSOR DE PRESSÃO EM ÓPTICA INTEGRADA

STILANTE KOCH MANFRIN

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

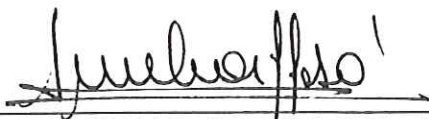
ORIENTADOR: Prof. Dr. Amílcar Careli César

São Carlos, SP
1995



FOLHA DE APROVAÇÃO

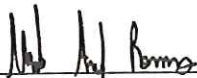
Dissertação defendida e aprovada em 27-10-1995
pela Comissão Julgadora:



Prof. Doutor AMILCAR CARELI CESAR - Orientador
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)



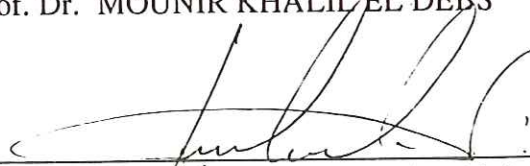
Prof. Doutor RUI FRAGASSI SOUZA
(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)



Prof. Doutor MURILO ARAÚJO ROMERO
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP - Pesquisador CNPq)



Presidente da Comissão de Pós-Graduação
Prof. Dr. MOUNIR KHALIL EL DEBS



Coordenador da Área - Engenharia Elétrica
Prof. Dr. GERALDO ROBERTO M. DA COSTA

Aos meus pais Ruth e Stilante, cujo amor e cuidado nunca
poderei retribuir totalmente.
E aos meus sobrinhos queridos: André, Marcelo e Mariana.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Amílcar Careli César pela orientação e também pela compreensão e confiança demonstradas ao longo do trabalho.

Ao Prof. Dr. Mílson Tadeu Camargo Silva pelas inestimáveis sugestões.

Aos professores do Departamento de Estruturas da EESC, Dr. Sérgio P .B. Proença e Dr. João B. de Paiva pela boa vontade nas simulações e discussões no tocante à análise estrutural do diafragma do sensor.

Aos professores do SEL, Dra. Vilma Alves de Oliveira, Dr. José Carlos Sartori e Edson Gesualdo pelo apoio e entusiasmo sempre demonstrados.

Aos Profs.: Dr. Rui Fragassi Souza (UNICAMP), Dr. Ruy Barbosa (EESC) e ao Dr. Murilo Araújo Romero (EESC- Pesquisador CNPq) pelas valiosas sugestões.

Ao professor colaborador da EESC Alfredo Américo Hamar (em memória), por dividir seus conhecimentos sobre pesquisa bibliográfica.

Ao Prof. Dr. Osório Chagas Meirelles pelo incentivo inicial e entusiasmo contagiante.

Aos funcionários das bibliotecas da EESC, do IFSC e do IQSC pelo empenho em bem servir.

Aos funcionários do SEL, em especial à Sra. Rosane, Sra. Áurea, Sr. José Carlos, Sr. Rui Berto e Sr. Jesus pelo apoio.

Aos colegas da pós-graduação do SEL, em especial ao Sergio Cruzes, Sebastião Sérgio, Paulo Roberto Lima Almeida, Alberto Calligaris Jr., Carlos Alberto De Francisco, Márcio Turchette, Edson Stradiotto e Paulo César Lucena Bentes pela amizade que sempre torna o caminho menos árduo.

Aos programas RHAE, PADCT e ao CNPq pelo financiamento de bolsas de estudo e apoio.

Às senhoras Iracema, Eulália e Alice pela colaboração.

Às minhas irmãs Maria Ruth e Fernanda e ao meu cunhado Glauco, pelo incentivo e afeto.

E, finalmente, à Kéli pelo carinho, estímulo e apoio incondicional ao longo destes anos todos, e certamente pelos muitos que ainda virão.

"Ambas, a religião e a ciência da natureza,
envolvem, em seu exercício, a afirmação de Deus."
(Max Planck, 1857-1947)

RESUMO

A análise de um sensor óptico de pressão foi realizada neste trabalho.

O sensor baseia-se no deslocamento de um diafragma composto por camadas de silício, dióxido de silício e vidro. O deslocamento do diafragma causa a alteração do índice de refração do guia óptico do ramo sensor de um interferômetro de Mach-Zehnder, formado por guias do tipo "rib" na camada de vidro. A diferença de fase entre os sinais ópticos dos ramos sensor e de referência causa variação da intensidade luminosa na saída deste interferômetro.

A simulação do deslocamento do diafragma foi feita empregando-se o Método das Diferenças Finitas, que também foi utilizado no cálculo da alteração do índice de refração no guia óptico. O diafragma de três camadas foi substituído, nos cálculos, por outro composto de uma camada equivalente.

A análise da propagação da luz no guia tipo "rib" foi feita por intermédio do Método do Índice Efetivo. Para a distribuição dos campos elétrico (para o modo TE) e magnético (para o modo TM) admitiu-se uma variação gaussiana na direção y , e a formulação clássica para um guia planar assimétrico, na direção x .

O resultado final deste trabalho apresentou melhor aproximação com os dados experimentais do trabalho realizado por OHKAWA [23] do que a própria previsão teórica daquele.

São apresentados gráficos do deslocamento do diafragma em função da pressão aplicada, da variação do índice de refração do guia do ramo sensor em função das dimensões geométricas do guia, da distribuição da componente de campo elétrico no guia óptico em função das suas dimensões geométricas, da defasagem entre os sinais dos ramos sensor e de referência em função da pressão aplicada e da pressão de meia-onda em função do comprimento do diafragma.

ABSTRACT

An integrated optical pressure sensor was analysed in this work. The sensor is based on the deflection of a multilayered diaphragm and operates as a Mach-Zehnder interferometer. A pressure difference between the upper and lower faces of the diaphragm induces a strain and produces a refractive index change in the sensor arm of the interferometer. As a consequence, a phase-shift is established between both arms of the sensor and light intensity modulation is observed at the device output.

The Finite Difference Method was used in order to calculate the diaphragm deflection and the refractive index change. In the formulation the multilayered diaphragm was replaced by a single-layered one, with an equivalent bending rigidity. The light propagation in the rib-type waveguide sensor arm was analysed by the Effective Index Method. A gaussian variation was assumed for the y -component of the electric (TE mode) and magnetic (TM mode) field distributions. In the x -direction the classical formulation was used.

Results for the diaphragm deflection dependence on the applied pressure, the refractive index change as a function of the device geometry, phase shift versus applied pressure, as well as halfwave pressure as a function of diaphragm length are presented.

The final model yield a better agreement to experimental data than the formulations previously available in the literature.

Índice

1	Introdução	7
2	Sensor Óptico Integrado de Pressão	12
2.1	Introdução	12
2.2	Estrutura do Dispositivo	13
2.3	Princípios de Operação	15
3	Modelamento do Sensor Óptico	22
3.1	Introdução	22
3.2	Cálculo do Deslocamento do Diafragma	23
3.3	Cálculo da Variação das Componentes do Índice de Refração do Guia Óptico de Vidro	30
3.4	Normalização das Componentes dos Campos Elétrico e Magnético nos Guias Ópticos	32
3.5	Cálculo da Defasagem do Sinal Óptico no Ramo Sensor e Intensidade na Saída do Interferômetro	40
4	Resultados	47
4.1	Deslocamento do Diafragma	47
4.2	Variação das Componentes do Índice de Refração da Camada de Vidro	50
4.3	Análise do Guia Óptico de Vidro	53

4.4 Defasagem no Ramo Sensor e Intensidade Luminosa na Saída do Interferômetro	54
5 Conclusões	59
A Cálculo da rigidez equivalente, D_{eq}	68
B Dedução da Eq. (3.5) pelo MDF	72
C Listagem do programa computacional DEFASAGZ.M	78
D Dedução das Eqs. (3.14) e (3.15) pelo MDF	88
E Dedução das Eqs. (3.24), (3.25) e (3.26)	90
F Dedução da expressão do "spot size" de uma distribuição gaussiana	94

Lista de Figuras

2-1	Diagrama esquemático do sensor de pressão em óptica integrada.	13
2-2	Etapas da fabricação do sensor: substrato de Si e camadas p+ e Si-epitaxial (a); obtenção da máscara de dióxido de Si (b); corrosão do substrato de Si (c), e vista da seção transversal na região do diafragma (d). .	14
2-3	Dimensões do guia "rib".	15
2-4	Junção Y monomodo (a) e representação de uma junção Y como um dispositivo de quatro portas (b) [37].	16
2-5	Mecanismos de operação do interferômetro de Mach-Zehnder [44].	17
2-6	Representação fasorial dos campos elétricos na junção Y de saída do interferômetro.	20
2-7	Intensidade luminosa de saída normalizada vs. defasagem dos sinais dos ramos sensor e de referência.	21
3-1	Composição das camadas do diafragma do ramo sensor do interferômetro.	23
3-2	Discretização do diafragma retangular para aplicação do MDF.	25
3-3	Condições de contorno nas bordas do diafragma retangular.	28
3-4	Gráfico do deslocamento do diafragma calculado com uma única passagem e com precisão de 10^{-8} m. Nota-se a assimetria dos valores do deslocamento no final da curva.	29
3-5	Gráfico do deslocamento do diafragma calculado com duas passagens e com precisões de 10^{-8} m e 10^{-10} m. Nota-se a simetria do gráfico e a correção nos valores do deslocamento no final do gráfico.	30

3-6	Posição do sistema de coordenadas utilizado na análise do guia "rib".	32
3-7	Distribuição das componentes de campo elétrico nos planos xz (a) e xy (b).	34
3-8	Seção transversal do guia "rib".	38
3-9	Índice de refração efetivo vs. espessura da camada guiante.	38
3-10	Guia óptico simétrico derivado do guia "rib" pela aplicação do método do índice efetivo.	39
3-11	Distribuição bidimensional da intensidade de campo normalizada no guia "rib".	40
3-12	Distribuição da intensidade de campo na seção transversal do guia "rib".	41
3-13	Intensidade de campo normalizada na direção x	41
3-14	Intensidade de campo normalizada na direção y	42
3-15	Perturbações num guia planar assimétrico. Guia original (a), alterações na constante dielétrica (b), alterações na superfície (c), alterações na espessura da camada guiadora (d), e introdução de um segundo guia (e) [57].	43
3-16	Opções de posicionamento do guia óptico do ramo sensor sobre o diafragma: numa das bordas (1) ou no centro (2) do diafragma.	45
3-17	Limites de integração, para a distribuição gaussiana, da componente de campo elétrico no plano xy	46
4-1	Gráfico do deslocamento da placa apresentada em CLARK [53] calculada pelo programa computacional DEFASAGZ.	49
4-2	Variação da componente do índice de refração na direção x ao longo do comprimento do diafragma.	51
4-3	Variação da componente do índice de refração na direção y ao longo do comprimento do diafragma.	52
4-4	Defasagem total do ramo sensor vs. pressão aplicada ao diafragma.	55
4-5	Intensidade normalizada de saída vs. pressão aplicada ao diafragma.	56

4-6	Pressão de meia-onda vs. comprimento do diafragma: análise proposta neste trabalho (a), pela teoria clássica de placas (b), dado experimental (c) e teórico (d) de acordo com OHKAWA [23].	58
A-1	Estrutura do diafragma composto por três camadas.	68
A-2	Composição das forças nas camadas do diafragma.	70
B-1	Aproximação de uma derivada num ponto pelo Método das Diferenças Finitas com operadores de diferenças centrais.	73
F-1	Guia planar simétrico para a determinação do "spot size" de uma distribuição gaussiana.	95

Lista de Tabelas

4.1	Constantes mecânicas dos materiais que compõem o diafragma.	47
4.2	Comparações do resultado obtido neste trabalho com os da placa apresentada por CLARK [53] e outros resultados.	50
4.3	Comparação dos índices efetivos do guia óptico calculados pelo método do índice efetivo e pelo método da rede equivalente.	54

Capítulo 1

Introdução

Desde tempos imemoriais algumas civilizações têm usado sinais luminosos (fogo e fumaça) para transmitir mensagens à distância (a vitória ou derrota numa batalha, por exemplo). Filósofos gregos, por volta de 490 a.C., já especulavam sobre a natureza da luz e eram familiarizados com fenômenos como a reflexão, a refração e a propagação retilínea da luz, embora seus estudos pudessem ser considerados mais filosóficos do que científicos. Já nos tempos de Galileu Galilei (1564-1642 d.C.), o poder do método experimental em óptica foi sendo demonstrado e a óptica clássica ganhou *status* de ciência.

Obviamente, numerosas conquistas científicas marcaram o desenvolvimento da tecnologia dos guias e dispositivos ópticos ao longo dos séculos. Porém, um feito notável para a época, de perspectivas históricas, ocorreu no ano de 1870 quando Alexander Graham Bell inventou o fonofone [1]. A.G.Bell demonstrou [2] que a fala poderia ser transmitida à distância por uma feixe de luz. Ele focalizou um estreito feixe de luz solar numa membrana fina com uma das faces espelhada. Quando as ondas sonoras causassem vibrações nesta membrana, parte da luz incidente seria desviada e esta variação seria sentida num detector de selênio colocado à distância. Este por sua vez teria sua resistência ôhmica alterada, modulando a corrente elétrica num circuito receptor, capaz de reproduzir as ondas sonoras "originais". Por meio deste aparelho simples, sinais de voz puderam ser transmitidos por distâncias de até 213 metros. Em distâncias maiores, o sinal tornava-

se ininteligível devido à atenuação atmosférica. Todavia, o fato mais importante foi a demonstração das bases de um sistema óptico de transmissão.

A moderna tecnologia em óptica, com aplicações em comunicação de dados, data da primeira demonstração do *LASER* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) em 1960 [3], seguida da demonstração, em 1962, da operação do *laser* semicondutor [4],[5]. O primeiro consistia de um feixe monocromático de radiação na região próxima do infravermelho, com comprimento de onda de 6.943 Å, cuja frequência era 10.000 vezes maior que aquelas disponíveis em sistemas de rádio-comunicação de então. Desta forma, o espectro de frequências utilizáveis foi estendido de 10 GHz para 100 THz, aumentando sobremaneira a capacidade de transmissão de informação. Todavia, mesmo com toda a capacidade potencial de transmissão de informação oferecida pelo *laser*, a forte atenuação provocada pela chuva, neve, neblina, fuligem, etc., dificultaram o uso da propagação da luz na atmosfera. Sua utilização em escala comercial foi postergada até o desenvolvimento das fibras ópticas de baixas perdas, ocorrido na década de 70 [6],[7], e de lasers semicondutores de maior eficiência.

Também na década de 60 foram lançadas as bases para o que hoje conhecemos como óptica integrada [8],[9],[10]. Óptica integrada refere-se à aplicação de filmes finos e tecnologia de microfabricação para a definição e desenvolvimento de sistemas ópticos em miniatura [11]. Os artigos de TIEN [30]; MILLER [31]; POLE [32]; KOGELNIK [33]; SUEMATSU [34] e HALL [11] oferecem interessante leitura e extenso material bibliográfico sobre o desenvolvimento da óptica integrada.

No início, as pesquisas em óptica integrada estavam voltadas para a área de comunicações. No entanto, aplicações em outras áreas tecnológicas foram logo vislumbradas. Dentre elas incluem-se: guiamento da luz, modulação, filtragem, interferometria, processamento de sinais, acoplamento de sinais, geração, detecção, sensoriamento, etc.

Passados quase trinta anos desde os trabalhos pioneiros em óptica integrada, o desenvolvimento de sensores ópticos integrados está, ainda, em sua fase inicial [12].

A utilização de sensores ópticos integrados oferece muitas vantagens sobre os sensores

convencionais, tais como: larga faixa de temperatura de operação; imunidade eletromagnética devido a altíssima frequência da luz; tomadas de medidas sem contato físico, o que possibilita sua utilização em ambientes hostis; tamanho e peso reduzidos; utilização da tecnologia de indústria microeletrônica; reprodutibilidade e baixo custo em função da potencial produção em larga escala; e possibilidade de integração de dispositivos ópticos e eletrônicos num mesmo substrato.

Vários sensores em óptica integrada têm sido propostos nos últimos anos como resultado de intensa pesquisa, principalmente no Japão, EUA, Alemanha, França, Canadá e Inglaterra. Podemos destacar o sensor de microdeslocamento (resolução de $\simeq 10$ nm) [13], analisador de espectro [14], sensor de temperatura [15],[16],[17],[18], sensor de umidade [18], leitor de disco óptico [19], sensor de fluido [20], acelerômetro [21], sensor de índice de refração de líquidos [22], sensor de deslocamento (de 0 até 100 mm) [22], e sensor de pressão [23],[24],[25],[26],[12],[27],[28],[29].

Os sensores de pressão citados acima operam com base no deslocamento de uma membrana fina construída sob um guia óptico. O índice de refração é alterado, via efeito fotoelástico, pela aplicação de pressão ao diafragma. De um modo geral, tais sensores utilizam um interferômetro de Mach-Zehnder, construído com guias ópticos do tipo "rib". BRABANDER [28] propôs um sensor que não utiliza um interferômetro, mas sim um ressonador em anel. Quanto aos materiais empregados, OHKAWA [23] utiliza guias ópticos de vidro ($n_{\text{vidro}} \cong 1,55$), com perdas da ordem de 0,1 dB/cm. Uma camada isoladora de dióxido de silício ($n_{\text{SiO}_2} \cong 1,46$) é colocada entre a camada de vidro e o substrato de silício ($n_{\text{Si}} \cong 3,50$) para evitar valores elevados das perdas no comprimento de onda usado ($\lambda_0 = 0,6328 \mu\text{m}$). Solução semelhante foi proposta por CAMARGO SILVA [29], que utiliza um ressonador DBR (Distributed Bragg Reflector). Neste caso, porém, foi introduzido um superestrato, também de dióxido de silício, propiciando o projeto de um dispositivo de comprimento muito reduzido ($\cong 1$ mm). VADEKAR [12], por sua vez, utiliza como estrutura guiadora uma camada de nitreto de silício ($n_{\text{Si}_3\text{N}_4} \cong 2,03$) entre duas camadas de dióxido de silício, cujas perdas estão em torno de 0,003

dB/cm. Finalmente, FISCHER [24], [27] e WAGNER [25],[26] utilizaram uma camada de oxinitreto de silício ($n_{\text{SiON}} \cong 1,50$), entre duas camadas de dióxido de silício, para a construção dos guias ópticos.

Os sensores ópticos integrados têm uma vasta perspectiva em termos de aplicações. Podem, por exemplo, ser utilizados numa rede de sensores, interligados por meio de fibras ópticas, para cobrir toda uma planta industrial, onde todos os parâmetros de interesse seriam monitorados centralizadamente. Uma outra aplicação de grande interesse está no campo da biomedicina, para medidas invasivas, ou seja, aquelas feitas no interior do corpo, para medidas de pressão cardiovascular, intracraniana ou urodinâmica. Nestes casos, os sensores ópticos integrados se adequam muito bem, em virtude de seu tamanho reduzido e da flexibilidade das fibras ópticas, podendo ser introduzidos no corpo humano via catéteres ou agulhas, atingindo órgãos que de outra forma seriam inacessíveis. Devido à sua intrínseca isolamento elétrica e imunidade à interferência eletromagnética, evita-se o risco de choques elétricos nos pacientes, permitindo sua utilização naqueles submetidos à alta tensão, necessária nos casos de desfibrilação, ou a campos de RF ou microondas intensos, como em tratamentos de radioterapia. A adequação dos sensores ópticos integrados para este tipo de aplicação depende, todavia, do estudo aprofundado da biocompatibilidade dos materiais utilizados em sua fabricação. Adicionalmente, os sensores de pressão para aplicações médicas devem operar na faixa de 9 a 300 mmHg (0,0012 a 0,04 MPa) e ter repetibilidade melhor que 0,5% [35]. Deste modo são necessárias ferramentas de análise do desempenho destes sensores, tão precisas quanto possível, para que suas características estejam dentro das especificações de cada aplicação.

A análise do deslocamento do diafragma, que geralmente é composto por mais de uma camada de materiais diferentes, foi feita por OHKAWA [23] e BRABANDER [28] levando-se em conta somente uma única camada. VADEKAR [12] aproximou um diafragma retangular, similar ao empregado pelos outros autores, por um diafragma circular, cuja solução é mais simples. Estas aproximações tendem a provocar um erro excessivo na predição do desempenho dos sensores.

Com o intuito de possibilitar um melhor modelamento dos sensores ópticos integrados de pressão foi realizada neste trabalho a análise da estrutura proposta em [23], utilizando-se métodos numéricos (Método das Diferenças Finitas) e soluções analíticas aproximadas nas várias etapas da formulação. Os resultados de várias etapas do modelamento foram comparados com resultados obtidos pela teoria clássica e outros encontrados na literatura. Finalmente, os resultados finais da análise aqui proposta foram comparados com aqueles obtidos em [23].

A apresentação do trabalho será feita da seguinte forma: no Capítulo 2 o sensor óptico integrado de pressão é discutido, tanto sua estrutura, como seus princípios de funcionamento. O Capítulo 3 apresentará todo o modelamento proposto, tanto mecânico (deformação do diafragma) como óptico (distribuição dos campos elétrico e magnético, constante de propagação), bem como o interrelacionamento entre eles (fenômeno fotoelástico). Em seguida, no Capítulo 4, comparar-se-á os resultados do modelo proposto com outros métodos de análise e resultados publicados na literatura. No Capítulo 5 serão apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Sensor Óptico Integrado de Pressão

2.1 Introdução

O sensor óptico integrado de pressão analisado neste trabalho é aquele proposto por OHKAWA [23] e mostrado na Fig. 2-1. O funcionamento do sensor baseia-se nas propriedades de propagação de luz em um interferômetro de Mach-Zehnder, e no deslocamento de um diafragma. O interferômetro é formado por dois guias ópticos tipo "rib" e duas junções do tipo Y. A junção de entrada separa o sinal luminoso em duas partes iguais. Os sinais propagam-se pelos dois guias (ramo sensor e ramo referência) e são combinados em uma saída comum pela junção Y de saída. O diafragma é formado por camadas de materiais diferentes, colocado sob o braço sensor do interferômetro e submetido a uma pressão diferencial. A diferença de pressão entre as faces inferior e superior do diafragma produz um deslocamento em todas as camadas, inclusive no guia óptico de vidro, causando, por intermédio do efeito fotoelástico, alteração no índice de refração do vidro. Esta alteração provocará uma mudança na fase da luz que se propaga no ramo sobre o diafragma. A fase da luz que se propaga no ramo de referência não sofre alteração. Há, então, uma diferença de fase entre os sinais que propagam nos dois ramos. Na saída do interferômetro ocorrerá recombinação dos sinais luminosos desses dois ramos, que depende da defasagem. Assim, uma relação entre a pressão aplicada ao

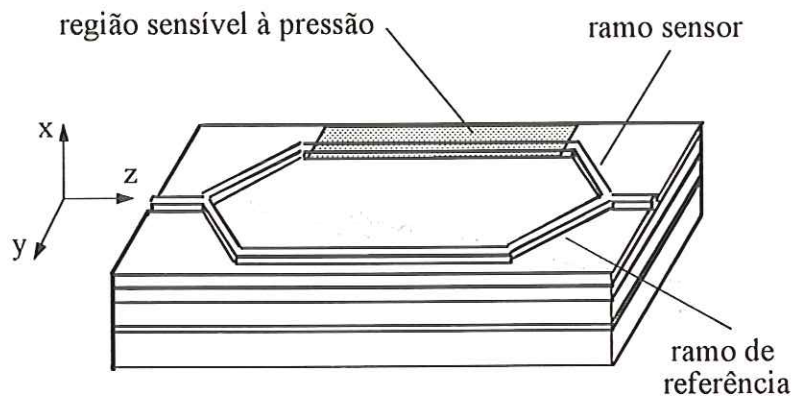


Figura 2-1: Diagrama esquemático do sensor de pressão em óptica integrada.

diafragma e a intensidade luminosa observada na saída do dispositivo é estabelecida.

2.2 Estrutura do Dispositivo

O sensor analisado neste trabalho foi construído por OHKAWA [23] sobre um substrato de silício de orientação (100), do tipo n, o qual teve sua face superior convertida em p^+ , provavelmente por difusão de boro. Sobre esta face foi crescida uma camada epitaxial de silício com $5 \mu\text{m}$ de espessura (Fig. 2-2(a)). Em seguida, ambas as faces do substrato foram oxidadas termicamente, obtendo-se uma camada de $0,3 \mu\text{m}$ de SiO_2 . A máscara para a construção da cavidade do diafragma foi conseguida pela erosão desta camada na face inferior do substrato com uma solução de HF (ácido fluorídrico), enquanto a face superior foi protegida por uma camada de Cr evaporada, com cerca de $0,1 \mu\text{m}$ de espessura (Fig. 2-2(b)). O passo seguinte é a erosão anisotrópica do silício pela face inferior do substrato, utilizando-se uma solução de etilenodiamina, pirocatecol e água.

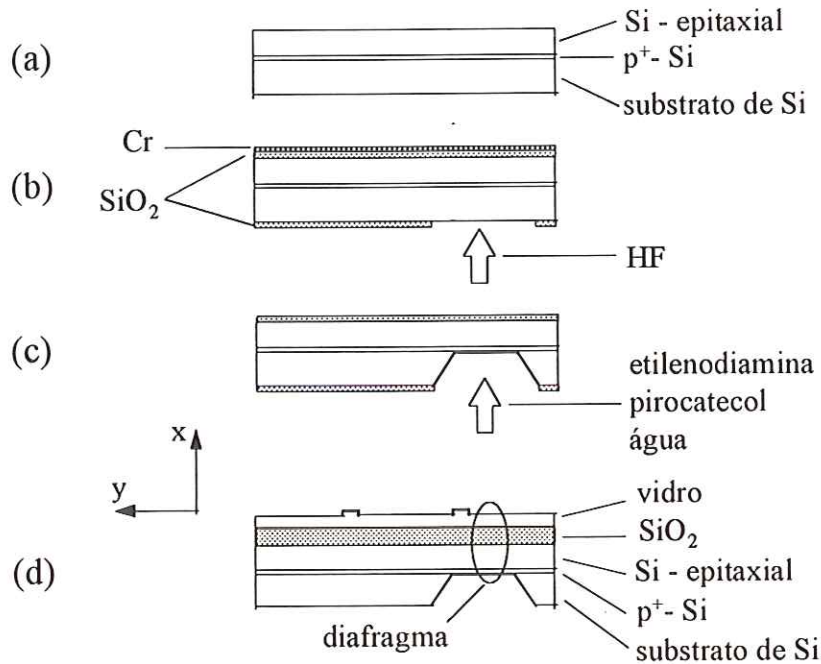


Figura 2-2: Etapas da fabricação do sensor: substrato de Si e camadas p⁺ e Si-epitaxial (a); obtenção da máscara de dióxido de Si (b); corrosão do substrato de Si (c), e vista da seção transversal na região do diafragma (d).

Uma vez que a erosão anisotrópica do silício cessa na camada p⁺, a espessura do diafragma pode ser precisamente controlada (Fig. 2-2(c)). Tanto as camadas de SiO₂, de 0,3 μm de espessura, como a camada de Cr são retiradas após a formação da cavidade do diafragma. A largura e o comprimento de cada diafragma são de 220 μm e 1000 μm, respectivamente, e no total foram fabricados sete diafragmas alinhados em série.

Após a formação da cavidade do diafragma foi construído o interferômetro de Mach-Zehnder na face superior do substrato. Primeiramente, por intermédio do processo de "sputtering" (sublimação catódica), foi depositada uma camada de dióxido de silício de 1,8 μm para isolar os guias ópticos de vidro do substrato de silício, pois no comprimento de onda de operação ($\lambda_0 = 0,6328 \mu\text{m}$) o silício apresenta perdas (por absorção) muito elevadas, da ordem de $1,5 \times 10^4 \text{ dB/cm}$ [36]. Em seguida, pelo mesmo processo, foi

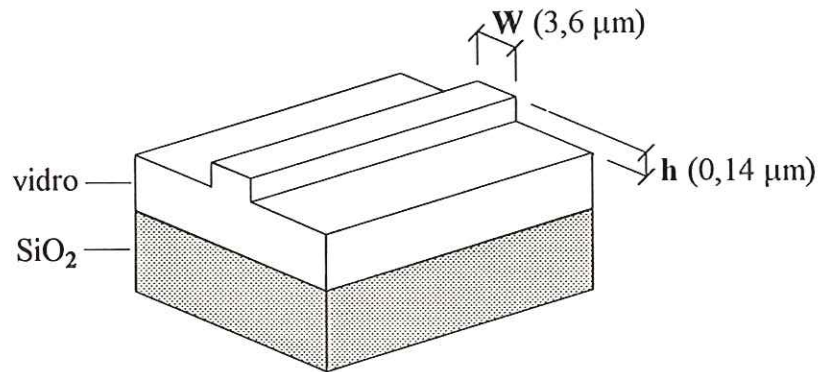


Figura 2-3: Dimensões do guia "rib".

depositada uma camada de vidro (Corning 7059) de $1,2 \mu\text{m}$ de espessura para a formação dos guias ópticos através de processo fotolitográfico, seguido do processo de erosão por reação iônica ("reactive ion etching") utilizando-se gás CHF_3 (trifluoreto de metila). A seção transversal do sensor, na região do diafragma, está mostrada esquematicamente na Fig. 2-2(d). Deste modo, a altura, h , e a largura, W , dos guias ópticos do tipo "rib" são de $0,14 \mu\text{m}$ e $3,6 \mu\text{m}$, respectivamente, como está mostrado na Fig. 2-3. O interferômetro foi construído com o comprimento dos braços e a separação entre eles de, aproximadamente, 11 mm e $60 \mu\text{m}$, respectivamente. O ângulo das junções Y de entrada e saída é de $\frac{1}{100}$ rad.

2.3 Princípios de Operação

O sensor óptico integrado de pressão baseia-se no deslocamento de um diafragma retangular submetido à uma pressão diferencial entre suas duas faces, a superior e a inferior.

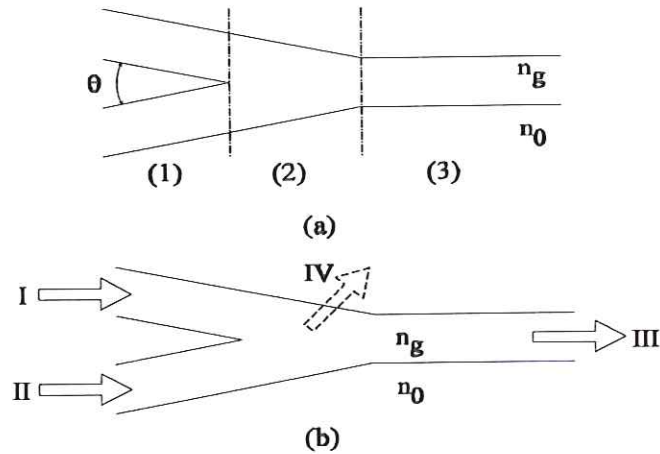


Figura 2-4: Junção Y monomodo (a) e representação de uma junção Y como um dispositivo de quatro portas (b) [37].

Na saída do interferômetro os sinais luminosos do ramo de referência, que está fora da influência do diafragma, e do ramo sensor são combinados, e a intensidade resultante é função da pressão aplicada ao diafragma.

Para uma melhor compreensão do mecanismo de alteração da intensidade luminosa na junção Y de saída do interferômetro de Mach-Zehnder, pode-se inicialmente dividir a junção Y simétrica em três partes: a dos braços inclinados, a do afunilamento e a do guia reto de saída, conforme é mostrado na Fig. 2-4(a) [37].

Na seção dos braços inclinados, a separação entre os guias ópticos diminui na medida em que se "caminha" para o seu final, quando os guias finalmente se juntam. Numa junção simétrica monomodo cada braço deve ter suas dimensões adequadas para suportar somente o modo fundamental de propagação da luz. Na seção seguinte, a do afunilamento, há somente um guia óptico, o qual tem sua largura reduzida à medida que se "caminha" para o seu final. Este guia suporta modos de ordem superior além do modo fundamental, mesmo em se tratando de uma junção Y monomodo. A última seção é a do guia reto de saída, cuja largura se mantém constante até o seu final. Este guia suporta somente o

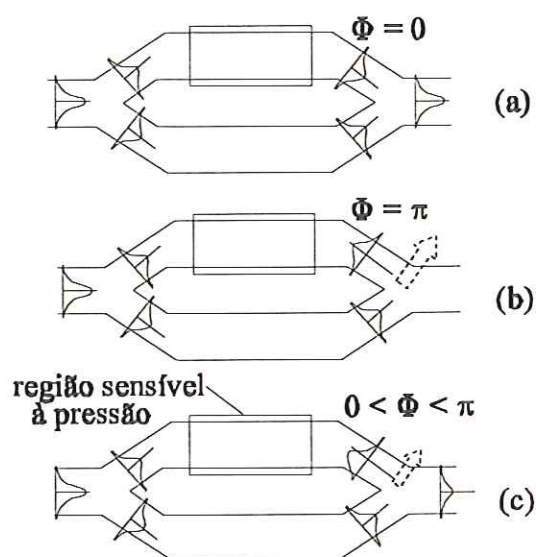


Figura 2-5: Mecanismos de operação do interferômetro de Mach-Zehnder [44].

modo fundamental de propagação do sinal luminoso. Outra característica importante das junções Y é o ângulo formado pelos braços inclinados cujo valor, geralmente, não excede 0,5 graus, pois acima disto as perdas de potência óptica se tornam consideráveis [38], [39]. Recentemente foram propostas junções Y com ângulos de valores muito maiores que este (da ordem de 10 graus), e que praticamente não apresentam perdas de potência óptica [40], [41], [42], pela utilização de micropismas e de materiais de diferentes índices de refração nas diferentes seções da junção.

Uma junção Y de saída pode ser vista como um dispositivo de quatro portas, com duas portas de entrada, constituídas pelos guias ópticos inclinados, e duas portas de saída, constituídas pelo guia óptico da seção reta, e uma porta equivalente aos modos radiados na seção de afunilamento, conforme mostrado na Fig. 2-4(b) [43].

No caso do sensor óptico integrado de pressão pode-se verificar, na junção Y de saída, três casos possíveis de combinação dos sinais luminosos. Se não houver diferença de

fase ($\Phi = 0$) entre o sinal luminoso do ramo sensor e o do ramo de referência, haverá recombinação construtiva desses sinais, não ocorrendo alteração na intensidade luminosa de entrada (Fig. 2-5(a)) [44], a não ser que haja perdas intrínsecas nos respectivos guias. Por outro lado, se existir uma inversão de fase entre estes sinais ($\Phi = \pi$ rad), ocorrerá recombinação destrutiva, anulando o sinal óptico na saída, pois toda a potência óptica será radiada na seção afunilada da junção Y (Fig. 2-5(b)). Nos casos intermediários ($0 < \Phi < \pi$ rad), parte da potência óptica será radiada na seção afunilada e parte irá para a saída da junção Y (Fig. 2-5(c)).

Os interferômetros permitem detectar alterações de fase extremamente pequenas nos sinais (campo elétrico ou magnético) dos guias ópticos. O atraso de fase (em radianos) na luz que se propaga num guia óptico é dado por [45]:

$$\phi = n_{ef}k_0l = \beta l \quad (2.1)$$

onde n_{ef} é o índice de refração efetivo da estrutura guiante, k_0 é o número de onda no vácuo da luz guiada ($k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$) e l é o comprimento do guia óptico na direção de propagação. Pequenas variações na fase podem ser analisadas pela diferenciação da Eq. (2.1):

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n_{ef}}dn_{ef} + \frac{\partial\phi}{\partial k_0}dk_0 + \frac{\partial\phi}{\partial l}dl = k_0l dn_{ef} + n_{ef}l dk_0 + n_{ef}k_0 dl = n_{ef}k_0l \left(\frac{dn_{ef}}{n_{ef}} + \frac{dk_0}{k_0} + \frac{dl}{l} \right) \quad (2.2)$$

Pelas equações (2.1) e (2.2) pode-se escrever:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dn_{ef}}{n_{ef}} + \frac{dk_0}{k_0} + \frac{dl}{l} \quad (2.3)$$

O primeiro e o último termo do lado direito da Eq. (2.3) estão relacionados com alterações físicas do guia óptico causado pela perturbação a ser medida. Por consequência, descrevem o mecanismo de transdução pelo qual o guia óptico age como sensor. Em geral, alterações na pressão, temperatura, campo elétrico, etc., produzem diferentes con-

tribuições em $d\phi$ por meio dos termos dn_{ef} e dl . O segundo termo do lado direito da Eq. (2.3) leva em conta qualquer variação do comprimento de onda (ou frequência) associada a fonte óptica (laser ou led).

Para se estabelecer uma relação entre as intensidades luminosas de entrada e saída em função da defasagem dos sinais dos dois ramos do interferômetro, admite-se que a intensidade do campo elétrico na entrada ($z = 0$) possa ser expressa por:

$$E(x, y, z, t) = E(x, y)\cos(\omega t) \quad (2.4)$$

Uma vez que na junção Y (simétrica) de entrada a amplitude do campo é dividida em duas partes iguais [46] (semelhante a um divisor de feixe 50%-50%), admite-se que na junção Y de saída (também simétrica), após percorrerem os braços do interferômetro, os sinais ópticos de cada ramo possam ser expressos como:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E(x, y)}{2}\cos(\omega t - \phi_1) \\ E_2 &= \frac{E(x, y)}{2}\cos(\omega t - \phi_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde ϕ_1 é a defasagem do sinal óptico promovida pelo ramo de referência e ϕ_2 é a defasagem promovida pelo ramo sensor.

Na saída do interferômetro tem-se a recombinação dos sinais destes dois ramos dada por:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \frac{E(x, y)}{2}\cos(\omega t - \phi_1) + \frac{E(x, y)}{2}\cos(\omega t - \phi_2) \\ &= \cos(\omega t) \left[\frac{E(x, y)}{2}\cos(\phi_1) + \frac{E(x, y)}{2}\cos(\phi_2) \right] - \sin(\omega t) \left[\frac{E(x, y)}{2}\sin(\phi_1) + \frac{E(x, y)}{2}\sin(\phi_2) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pode-se reescrever a expressão acima como:

$$E_1 + E_2 = E_0\cos(\omega t - \Phi) \quad (2.7)$$

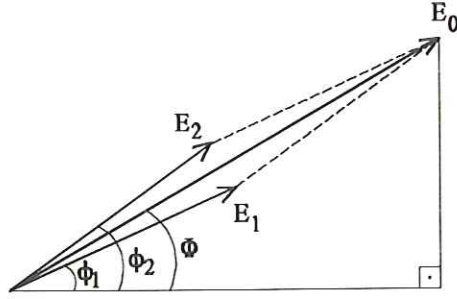


Figura 2-6: Representação fasorial dos campos elétricos na junção Y de saída do interferômetro.

onde:

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\phi_2 - \phi_1)} = \sqrt{\frac{E^2(x, y)}{2} + \frac{E^2(x, y)}{2}\cos(\phi_2 - \phi_1)} \quad (2.8)$$

e

$$\Phi = \arctan \left[\frac{\frac{E(x, y)}{2}\sin(\phi_1) + \frac{E(x, y)}{2}\sin(\phi_2)}{\frac{E(x, y)}{2}\cos(\phi_1) + \frac{E(x, y)}{2}\cos(\phi_2)} \right] = \arctan \left[\frac{\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)}{\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2)} \right] \quad (2.9)$$

como mostrado graficamente na Fig. 2-6.

Se $\Delta\Phi = \phi_2 - \phi_1$, pode-se reescrever a Eq. (2.8), como:

$$E_0^2 = E^2(x, y) \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(\Delta\Phi)}{2} \right] \quad (2.10)$$

Deste modo, percebe-se que a intensidade luminosa de saída do dispositivo (que é proporcional ao quadrado do campo elétrico), em função da pressão aplicada ao diafragma, tem um comportamento periódico, alternando máximos e mínimos (zeros). Utilizando-se

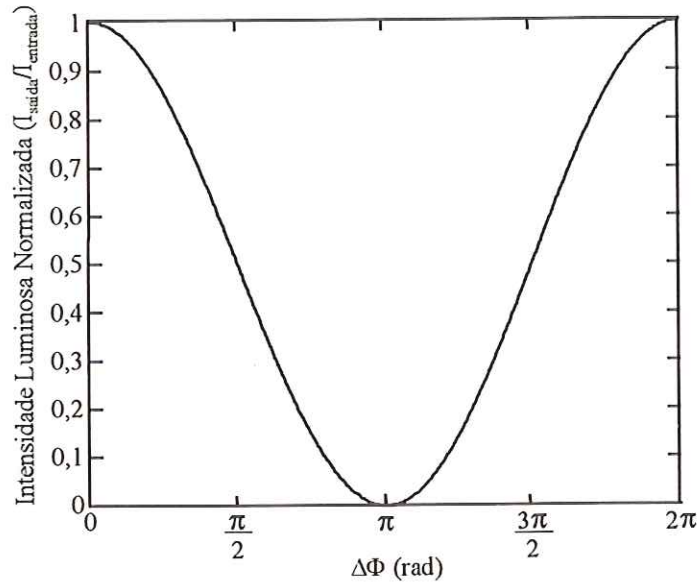


Figura 2-7: Intensidade luminosa de saída normalizada vs. defasagem dos sinais dos ramos sensor e de referência.

a identidade trigonométrica [47]:

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$$

obtem-se [46],[48]:

$$I_{saída} = I_{entrada}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \quad (2.11)$$

onde $I_{entrada}$ e $I_{saída}$ são as intensidades do sinal óptico de entrada e de saída do interferômetro, respectivamente.

O gráfico da variação da intensidade do sinal óptico de saída normalizado ($\frac{I_{saída}}{I_{entrada}}$) do interferômetro em função da defasagem $\Delta\Phi$, é mostrado na Fig. 2-7.

Capítulo 3

Modelamento do Sensor Óptico

3.1 Introdução

A análise do sensor óptico integrado de pressão [23] estudada neste trabalho pode ser dividida em três partes: cálculo do deslocamento do diafragma retangular de três camadas, determinação da distribuição dos campos elétrico e magnético nos guias ópticos, e análise do efeito fotoelástico, para o cálculo da defasagem entre o sinal óptico do ramo sensor e o do ramo de referência.

Na primeira parte, propõe-se uma solução numérica simples, utilizando-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), gerando um programa computacional, cujos resultados foram comparados com os da teoria clássica do deslocamento de placas e com resultados difundidos na literatura. Na segunda parte, optou-se pelo método do índice efetivo para a análise dos guias ópticos e adotou-se uma solução analítica, embora aproximada, para a distribuição dos campos elétrico e magnético na seção transversal dos guias. Os resultados foram, então, comparados com aqueles conseguidos por intermédio de um programa computacional que utiliza o método de rede equivalente [49]. Na terceira parte do modelamento, utilizou-se novamente o MDF para o cálculo da variação das componentes $n_x(y, z)$ e $n_y(y, z)$ do índice de refração do vidro dos guias ópticos, assim como métodos numéricos para a solução das integrais que calculam a diferença de fase total entre os

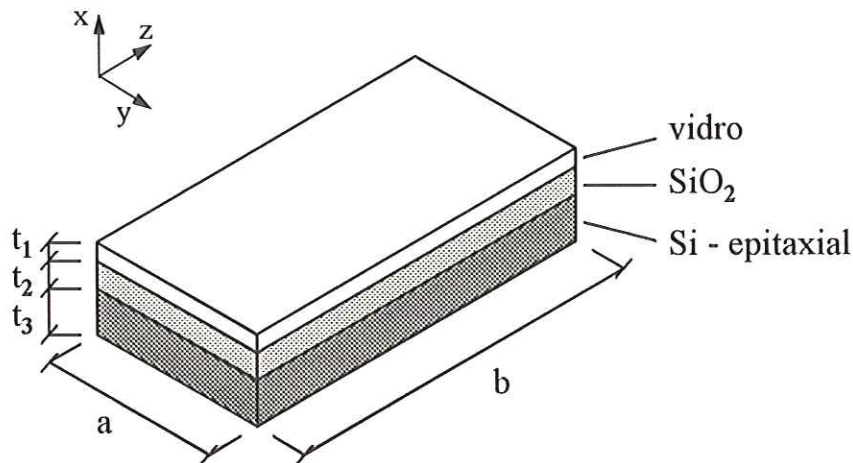


Figura 3-1: Composição das camadas do diafragma do ramo sensor do interferômetro.

ramos do interferômetro. Os resultados finais puderam, então, ser comparados com os resultados do trabalho original [23].

3.2 Cálculo do Deslocamento do Diafragma

Como descrito no Cap. 2, o sensor opera baseado no deslocamento de um diafragma retangular submetido à aplicação de uma pressão diferencial entre suas faces superior e inferior. Considera-se, para efeito de cálculo, que as camadas que compõem o diafragma têm espessura constante ao longo do plano yz (ver Fig. 3-1), que, no ponto central do diafragma, não há escorregamento entre as camadas, ou seja, elas estariam perfeitamente "coladas" umas às outras, e que a deformação máxima do diafragma é pequena se comparada à sua espessura total ($w_{m\acute{a}x} \ll t_1 + t_2 + t_3$).

Para um diafragma retangular de largura a e comprimento b , o deslocamento, $w(y, z)$,

é dado por [50]:

$$\frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial z^4} = \frac{p}{D_{eq}} \quad (3.1)$$

onde p é a pressão diferencial entre as faces superior e inferior do diafragma e D_{eq} é a rigidez à flexão equivalente às camadas que compõem o diafragma.

Em outros trabalhos [23], [28], o cálculo do deslocamento do diafragma foi feito levando-se em conta apenas uma única camada daquelas que compõem o diafragma. Neste trabalho considerar-se-á as três camadas que compõem o diafragma por intermédio de um parâmetro equivalente, D_{eq} , dado por:¹

$$D_{eq} = \frac{Y_1 t_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} + \frac{Y_2 t_2^3}{12(1 - \nu_2^2)} + \frac{Y_3 t_3^3}{12(1 - \nu_3^2)} \quad (3.2)$$

onde Y_1 , Y_2 e Y_3 são os módulos de Young; ν_1 , ν_2 e ν_3 são as razões de Poisson, e t_1 , t_2 e t_3 são as espessuras das camadas de vidro, dióxido de silício e de silício epitaxial, respectivamente.

O cálculo do deslocamento, por intermédio da Eq. (3.1), será feito por meio do MDF. Para tanto, torna-se necessário discretizar o diafragma retangular, como está mostrado na Fig. 3-2, através de pontos espaçados entre si de uma distância, Δ_y , na direção y e, Δ_z , na direção z . Aqui será considerado que $\Delta_y = \Delta_z = \Delta$ para efeito de simplificação mas, contudo, sem perda de generalização.

Pelo MDF com operadores de diferenças centrais, as seguintes aproximações são feitas [51]:

$$\left. \frac{\partial w(y, z)}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} \simeq \frac{w(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0) - w(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0)}{\Delta} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial w(y, z)}{\partial z} \right|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} \simeq \frac{w(y_0, z_0 + \frac{\Delta}{2}) - w(y_0, z_0 - \frac{\Delta}{2})}{\Delta}$$

onde y_0 e z_0 são as coordenadas do ponto onde se deseja a diferencial.

¹A dedução da Eq. (3.2) está mostrada no Apêndice A.

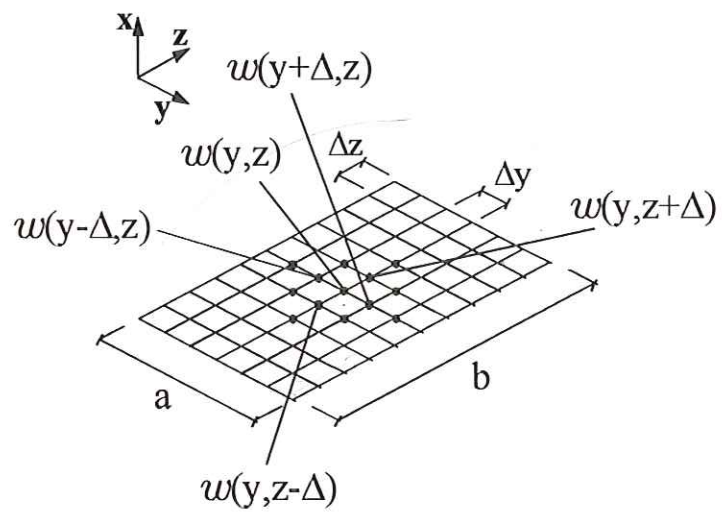


Figura 3-2: Discretização do diafragma retangular para aplicação do MDF.

Então, a Eq. (3.1) torna-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0 + 2\Delta, z_0) - 4w(y_0 + \Delta, z_0) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0)] \\
& + \frac{2}{\Delta^4} [w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0 + \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) - 2w(y_0, z_0 + \Delta) \\
& + 4w(y_0, z_0) - 2w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] \\
& + \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0, z_0 + 2\Delta) - 4w(y_0, z_0 + \Delta) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)] \\
& = \frac{p}{D_{eq}} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Agrupando-se os termos comuns e explicitando-se $w(y_0, z_0)$, pode-se reescrever a Eq. (3.4) como²:

$$\begin{aligned}
w(y_0, z_0) = \frac{1}{20} \left\{ \frac{p\Delta^4}{D_{eq}} + 8 [w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0)] \right. \\
- 2 [w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] \\
\left. - [w(y_0 + 2\Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0) + w(y_0, z_0 + 2\Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)] \right\} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

É possível, então, por intermédio de um processo iterativo³, calcular o deslocamento de todos os pontos discretos do diafragma. Inicialmente admite-se um valor arbitrário, diferente de zero, do deslocamento para todos os pontos discretos do diafragma, $w(y_0, z_0)_0$, e, então, calcula-se o deslocamento para cada ponto utilizando-se a Eq. (3.5). De posse deste valor atualizado para o deslocamento, $w(y_0, z_0)_1$, faz-se a comparação deste com o valor anterior, repete-se todo o processo até que a diferença entre o valor atual e o valor anterior esteja dentro de uma certa tolerância fixada *a priori*.

As condições de contorno do diafragma retangular devem ser levadas em conta no cálculo do deslocamento. Para o caso presente, em que o diafragma tem suas bordas

²A dedução completa da Eq. (3.5) está mostrada no Apêndice B.

³O programa computacional desenvolvido em MATLAB versão 4.0 que faz o cálculo do deslocamento do diafragma em função da pressão aplicada, tem sua listagem apresentada no Apêndice C.

engastadas, implica que para os pontos das bordas tem-se [12], [52]:

$$w(y, z) = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial w(y, z)}{\partial y} = \frac{\partial w(y, z)}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Isto significa que nos pontos correspondentes às bordas do diafragma não há deslocamento nem flexão dos mesmos. As condições de contorno podem, então, ser escritas pelo MDF como:

$$\left. \frac{\partial w(y, z)}{\partial y} \right|_{y_0=0,a} = 0 \implies \begin{cases} \frac{w(0-\Delta, z) - w(0+\Delta, z)}{2\Delta} = 0 \\ \frac{w(a-\Delta, z) - w(a+\Delta, z)}{2\Delta} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$\left. \frac{\partial w(y, z)}{\partial z} \right|_{z_0=0,b} = 0 \implies \begin{cases} \frac{w(y, 0-\Delta) - w(y, 0+\Delta)}{2\Delta} = 0 \\ \frac{w(y, b-\Delta) - w(y, b+\Delta)}{2\Delta} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

o que implica em:

$$\begin{aligned} w(-\Delta, z) &= w(\Delta, z) & (3.10) \\ w(a - \Delta, z) &= w(a + \Delta, z) \\ w(y, -\Delta) &= w(y, \Delta) \\ w(y, b - \Delta) &= w(y, b + \Delta) \end{aligned}$$

Também, de acordo com a condição dada pela Eq. (3.6), tem-se que:

$$w(0, z) = w(a, z) = w(y, 0) = w(y, b) = 0 \quad (3.11)$$

As condições de contorno descritas acima são mostradas na Fig. 3-3.

O gráfico do deslocamento ao longo do diafragma retangular é mostrado na Fig. 3-4. Nota-se que há uma pequena distorção dos valores do deslocamento, quando o esperado era uma perfeita simetria dos dados em relação às linhas que passam pelos pontos médios

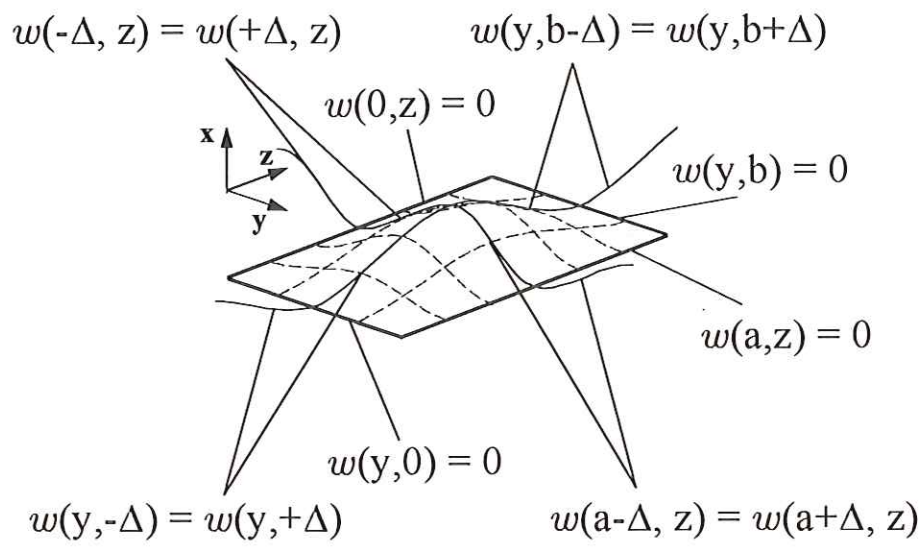


Figura 3-3: Condições de contorno nas bordas do diafragma retangular.

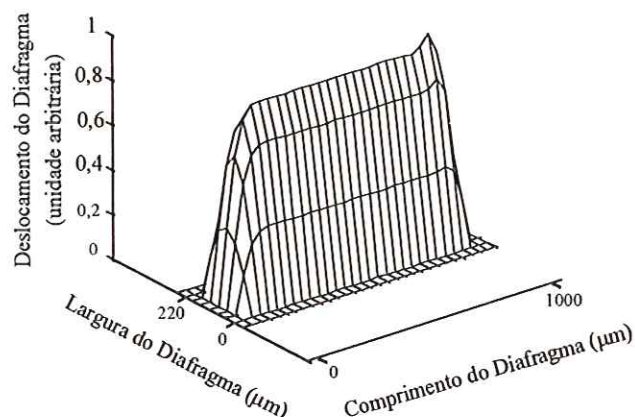


Figura 3-4: Gráfico do deslocamento do diafragma calculado com uma única passagem e com precisão de 10^{-8} m. Nota-se a assimetria dos valores do deslocamento no final da curva.

da largura e do comprimento do diafragma. Para reduzir esta distorção faz-se todo o cálculo varrendo-se os pontos da grade no sentido crescente das dimensões do diafragma com uma certa precisão e, posteriormente, calcula-se novamente, desta vez varrendo-se os pontos da grade no sentido decrescente das dimensões do diafragma, com precisão maior. O novo gráfico do deslocamento do diafragma é apresentado na Fig. 3-5, onde a precisão da primeira passagem dos cálculos foi de 10^{-8} m e a precisão da segunda passagem dos cálculos foi de 10^{-10} m. Nota-se a diferença no aspecto do gráfico, principalmente nos pontos próximos ao final do diafragma. Os cálculos são interrompidos quando a diferença entre o valor calculado e o valor anterior para o deslocamento $w(y, z)$, num dado ponto (y_0, z_0) , do diafragma, fica abaixo de uma dada precisão, ou seja, aceita-se como erro, entre o valor real do deslocamento e o valor calculado pelo método, este valor estipulado inicialmente.

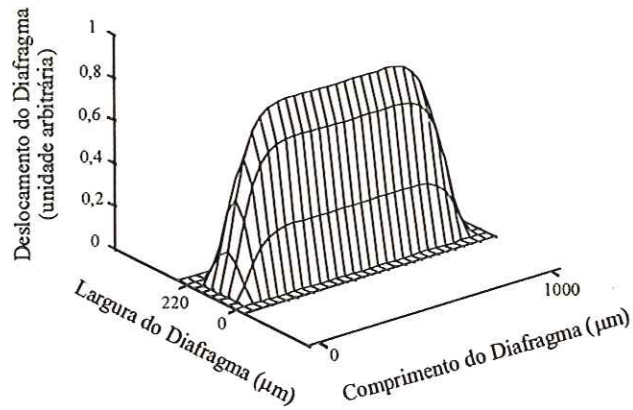


Figura 3-5: Gráfico do deslocamento do diafragma calculado com duas passagens e com precisões de 10^{-8} m e 10^{-10} m. Nota-se a simetria do gráfico e a correção nos valores do deslocamento no final do gráfico.

3.3 Cálculo da Variação das Componentes do Índice de Refração do Guia Óptico de Vidro

A variação das componentes do índice de refração, $\Delta n_x(y, z)$ e $\Delta n_y(y, z)$, do guia óptico de vidro do ramo sensor, devido ao deslocamento do diafragma provocado pela pressão, é dada por [27]:

$$\Delta n_x(y, z) = n_x(y, z) - n_0 = C_2[\sigma_y(y, z) + \sigma_z(y, z)] \quad (3.12)$$

$$\Delta n_y(y, z) = n_y(y, z) - n_0 = C_1\sigma_y(y, z) + C_2\sigma_z(y, z)$$

onde $n_x(y, z)$ e $n_y(y, z)$ são os valores das componentes do índice de refração do material que compõe o guia óptico (vidro Corning 7059) submetido à pressão, nas direções x e y , respectivamente, e que variam no plano yz ; n_0 é o índice de refração do material do guia

óptico na ausência de pressão, C_1 e C_2 são os coeficientes elastoópticos do material do guia óptico, e $\sigma_y(y, z)$ e $\sigma_z(y, z)$ são as componentes da tensão mecânica ("stress") no material do guia óptico nas direções y e z , respectivamente. $\sigma_y(y, z)$ e $\sigma_z(y, z)$ são dadas por [53]:

$$\begin{aligned}\sigma_y(y, z) &= -\frac{t}{2(1-\nu^2)} \left[Y_y \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial y^2} + Y_z \nu \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial z^2} \right] \\ \sigma_z(y, z) &= -\frac{t}{2(1-\nu^2)} \left[Y_z \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial z^2} + Y_y \nu \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial y^2} \right]\end{aligned}\quad (3.13)$$

onde Y_y e Y_z são os módulos de Young do material do guia óptico nas direções y e z , respectivamente. No caso do vidro, Y_y e Y_z são iguais, por se tratar de um material isotrópico, e t é a espessura do guia "rib".

O cálculo de $\sigma_y(y, z)$ e $\sigma_z(y, z)$ é feito pelo MDF, utilizando-se as aproximações dadas pela Eq. (3.3). Para um dado ponto da grade pode-se escrever:⁴

$$\begin{aligned}\sigma_y(y_0, z_0) &= \frac{Y_1 t}{2\Delta^2(1-\nu^2)} \{w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0) \\ &\quad + \nu_1 [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)]\}\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z(y_0, z_0) &= -\frac{Y_1 t}{2\Delta^2(1-\nu^2)} \{w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta) \\ &\quad + \nu_1 [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)]\}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Utilizando-se os valores dos deslocamentos ponto a ponto, calculadas anteriormente pelo programa computacional, pode-se obter as componentes da tensão mecânica para todos os pontos do diafragma, para cada valor de pressão aplicada.

⁴A dedução das Eqs. (3.14) e (3.15) está mostrada no Apêndice D.

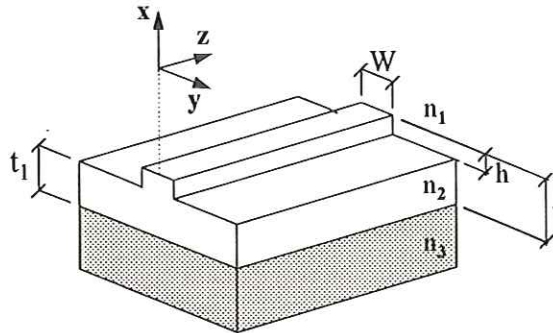


Figura 3-6: Posição do sistema de coordenadas utilizado na análise do guia "rib".

3.4 Normalização das Componentes dos Campos Elétrico e Magnético nos Guias Ópticos

Para o cálculo da defasagem do sinal óptico do ramo sensor em relação ao ramo de referência, necessita-se das componentes de campo eletromagnético normalizadas, $E_y(x, y)$, para o modo TE, e $H_y(x, y)$, para o modo TM. Para efetuar-se este cálculo, considera-se o sistema de coordenadas retangulares mostrado na Fig. 3-6, onde n_1 , n_2 e n_3 são os índices de refração da cobertura (ar), do núcleo (vidro) e do substrato (óxido de silício), respectivamente. W , h e t são a largura, altura e espessura do guia "rib", respectivamente. A determinação da distribuição dos campos elétrico e magnético tem como base a aproximação do guia "rib" por um guia planar assimétrico, no plano xz . A limitação do campo na direção y será feita admitindo-se que o campo nesta direção possui uma distribuição gaussiana [54], como mostrado na Fig. 3-7.

Admite-se, então, que há somente uma componente do campo elétrico (modo TE), e

uma componente do campo magnético (modo TM) no sentido $+y$, e que as mesmas são dadas pelo produto de duas funções da distribuição do campo: uma na direção x , e outra na direção y , para cada região do guia. Estas componentes são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} E_{yi}(x, y)_{TE} \\ H_{yi}(x, y)_{TM} \end{array} \right\} = F_{im}(x)F_m(y) \quad (3.16)$$

onde $i = 1, 2$ ou 3 representa as regiões da cobertura, do guia e do substrato, respectivamente, e $m = TE, TM$.

Da teoria clássica dos guias dielétricos planares assimétricos, expressa-se $F_{im}(x)$ como [55]:

$$F_{im}(x) = A_m \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\alpha_{1m}x), i = 1 \text{ ou } x \geq 0 \\ [\cos(k_{2m}x) + B_{2m}\text{sen}(k_{2m}x)], i = 2 \text{ ou } -t \leq x \leq 0 \\ A_{3m}\exp[\alpha_{3m}(x+t)], i = 3 \text{ ou } x \leq -t \end{array} \right. \quad (3.17)$$

onde, para o modo TE, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{1TE} &= k_0 \sqrt{n_{ef2TE}^2 - n_1^2} \\ k_{2TE} &= k_0 \sqrt{n_2^2 - n_{ef2TE}^2} \\ \alpha_{3TE} &= k_0 \sqrt{n_{ef2TE}^2 - n_3^2} \\ B_{2TE} &= -\frac{\alpha_{1TE}}{k_{2TE}} \\ A_{3TE} &= \cos(k_{2TE}t) - B_{2TE} \text{sen}(k_{2TE}t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

e, para o modo TM:

$$\begin{aligned} \alpha_{1TM} &= k_0 \sqrt{n_{ef2TM}^2 - n_1^2} \\ k_{2TM} &= k_0 \sqrt{n_2^2 - n_{ef2TM}^2} \\ \alpha_{3TM} &= k_0 \sqrt{n_{ef2TM}^2 - n_3^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

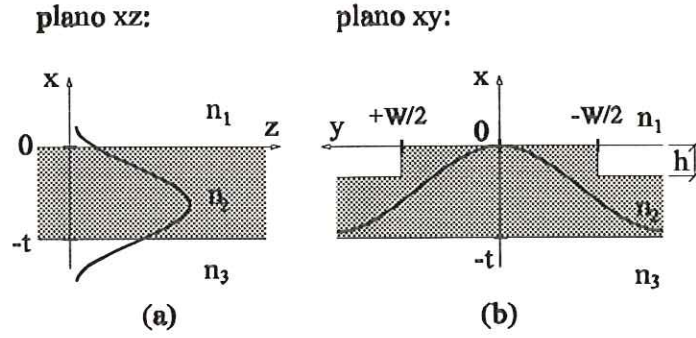


Figura 3-7: Distribuição das componentes de campo elétrico nos planos xz (a) e xy (b).

$$B_{2_{TM}} = - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{\alpha_{1_{TM}}}{k_{2_{TM}}}$$

$$A_{3_{TM}} = \cos(k_{2_{TM}} t) - B_{2_{TM}} \text{sen}(k_{2_{TM}} t)$$

onde

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (3.20)$$

sendo que λ_0 é o comprimento de onda, no espaço livre, do sinal óptico que se propaga no guia.

A expressão para $F_m(y)$, utilizada nas três regiões do guia, é dada por [54]:

$$F_m(y) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_{0m}} \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

onde $m = TE, TM$, e y_{0m} é o "spot size" da distribuição gaussiana de campo (elétrico e

magnético)⁵.

Desta forma, as componentes $E_y(x, y)_{TE}$ e $H_y(x, y)_{TM}$ são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} E_y(x, y)_{TE} \\ H_y(x, y)_{TM} \end{array} \right\} = A_m \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_{0m}} \right)^2 \right] \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\alpha_{1m}x) \\ [\cos(k_{2m}x) + B_{2m}\text{sen}(k_{2m}x)] \\ A_{3m}\exp[\alpha_{3m}(x+t)] \end{array} \right. \quad (3.22)$$

nas regiões:

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow x \geq 0 \text{ e } -\infty \leq y \leq +\infty \\ 2 &\longrightarrow -t \leq x \leq 0 \text{ e } -\infty \leq y \leq +\infty \\ 3 &\longrightarrow x \leq -t \text{ e } -\infty \leq y \leq +\infty \end{aligned}$$

respectivamente.

Pode-se, agora, determinar a constante de normalização das componentes dos campos elétrico ($m = TE$) e magnético ($m = TM$), A_m . Para isso, supõe-se que a potência total transmitida pelo modo fundamental através da estrutura é unitária. Para o modo TE pode-se escrever:

$$P_{Total_{TE}} = P_{1_{TE}} + P_{2_{TE}} + P_{3_{TE}} = 1 \quad (3.23)$$

onde

$$P_{1_{TE}} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} E_y(x, y)_{TE} H_x^*(x, y)_{TE} dx dy \quad (3.24)$$

é a potência transportada pelo modo fundamental na região 1,

$$P_{2_{TE}} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-t}^0 E_y(x, y)_{TE} H_x^*(x, y)_{TE} dx dy \quad (3.25)$$

⁵A expressão do "spot size" para o modo TE é dada na pág. 37.

é a potência transportada pelo modo fundamental na região 2, e

$$P_{3TE} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-t} E_y(x, y)_{TE} H_x^*(x, y)_{TE} dx dy \quad (3.26)$$

é a potência transportada pelo modo fundamental na região 3. $H_x^*(x, y)_{TE}$ é o complexo conjugado da componente de campo magnético na direção x , para o modo TE. A componente $H_x(x, y)_{TE}$ é dada por:

$$H_x(x, y)_{TE} = -\frac{\beta_{TE}}{\omega \mu_0} E_y(x, y)_{TE} \quad (3.27)$$

onde ω é a frequência angular do sinal óptico, μ_0 é a permeabilidade magnética do espaço livre ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m), e β_{TE} é a constante de propagação da luz no sentido $+z$, dada por:

$$\beta_{TE} = k_0 n_{ef2TE} \quad (3.28)$$

Deste modo pode-se escrever a expressão final para $P_{TotalTE}$ ⁶:

$$P_{TotalTE} = \frac{\beta_{TE} A_{TE}^2 y_{0TE} \sqrt{\pi}}{4\omega \mu_0} \left\{ \frac{A_{3TE}^2}{\alpha_{3TE}} + t + \frac{\text{sen}(2k_{2TE} t)}{2k_{2TE}} + \frac{B_{2TE}}{k_{2TE}} [\cos(2k_{2TE} t) - 1] + \right. \\ \left. + B_{2TE}^2 \left[t - \frac{\text{sen}(2k_{2TE} t)}{2k_{2TE}} \right] + \frac{1}{\alpha_{1TE}} \right\} \quad (3.29)$$

Fazendo-se, então, $P_{TotalTE} = 1$, obtém-se:

$$A_{TE}^2 = \frac{4\omega \mu_0}{\beta_{TE} y_{0TE} \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{A_{3TE}^2}{\alpha_{3TE}} + t + \frac{\text{sen}(2k_{2TE} t)}{2k_{2TE}} + \frac{B_{2TE}}{k_{2TE}} [\cos(2k_{2TE} t) - 1] + \right. \\ \left. + B_{2TE}^2 \left[t - \frac{\text{sen}(2k_{2TE} t)}{2k_{2TE}} \right] + \frac{1}{\alpha_{1TE}} \right\}^{-1} \quad (3.30)$$

⁶A dedução das Eqs. (3.24), (3.25) e (3.26) está mostrada no Apêndice E.

onde $y_{0_{TE}}$ ("spot size") é dado por⁷:

$$y_{0_{TE}} = \frac{W}{2} \sqrt{\frac{1}{\ln(v_{TE}^2)}} \quad (3.31)$$

A frequência normalizada, v_{TE} , para a estrutura guiadora simétrica "vista" no plano yz , é dada por:

$$v_{TE} = k_0 \frac{W}{2} \sqrt{n_{ef2_{TE}}^2 - n_{ef1_{TE}}^2} \quad (3.32)$$

Analogamente, obtém-se a expressão de A_{TM}^2 , para os modos TM, dada por:

$$A_{TM}^2 = \frac{4\omega\mu_0}{\beta_{TM} y_{0_{TM}} \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{A_{3_{TM}}^2}{n_3^2 \alpha_{3_{TM}}} + \frac{t}{n_2^2} + \frac{\text{sen}(2k_{2_{TM}} t)}{2n_2^2 k_{2_{TE}}} + \frac{B_{2_{TM}}}{n_2^2 k_{2_{TM}}} [\cos(2k_{2_{TM}} t) - 1] + \frac{B_{2_{TM}}^2}{n_2^2} \left[t - \frac{\text{sen}(2k_{2_{TM}} t)}{2k_{2_{TM}}} \right] + \frac{1}{n_1^2 \alpha_{1_{TM}}} \right\}^{-1} \quad (3.33)$$

Os índices efetivos $n_{ef1_{TE}}$ e $n_{ef2_{TE}}$ são obtidos pelo método do índice efetivo [58], de acordo com o seguinte procedimento e com base na Fig. 3-8.

A equação transcendental para o guia planar assimétrico, para os modos TE, é dada por [55]:

$$t_i = \frac{1}{k_{2_{TE}}} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\alpha_{1_{TE}}}{k_{2_{TE}}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_{3_{TE}}}{k_{2_{TE}}} \right) \pm q\pi \right] \quad (3.34)$$

onde $q = 0, 1, 2, \dots$ indica o modo propagante e t_i é espessura da camada guiante ($t_i = t_1$, seção 1 ou $t_i = t$, seção 2).

A partir da solução da equação característica, obtém-se as curvas que relacionam o índice efetivo com a espessura do núcleo do guia planar assimétrico, como aquelas mostradas na Fig. 3-9. Determina-se, para as duas seções distintas do guia, os seus respectivos índices efetivos. Obtém-se, desta forma, a estrutura mostrada na Fig. 3-10, que consiste de um guia planar simétrico com altura do núcleo igual a W , se observado no plano yz , onde, segundo a hipótese anterior, a intensidade da componente de campo

⁷A dedução completa da Eq. (3.31) está mostrada no Apêndice F. Para o modo TM basta alterar o índice TE por TM nesta expressão.

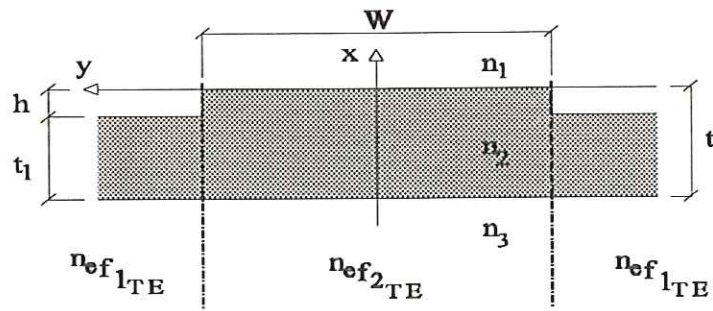


Figura 3-8: Seção transversal do guia "rib".

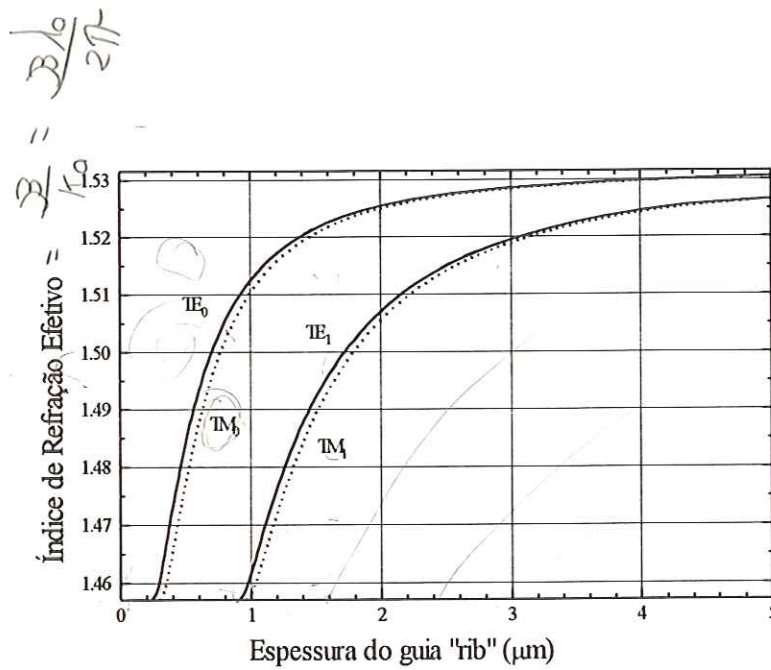


Figura 3-9: Índice de refração efetivo vs. espessura da camada guiante.

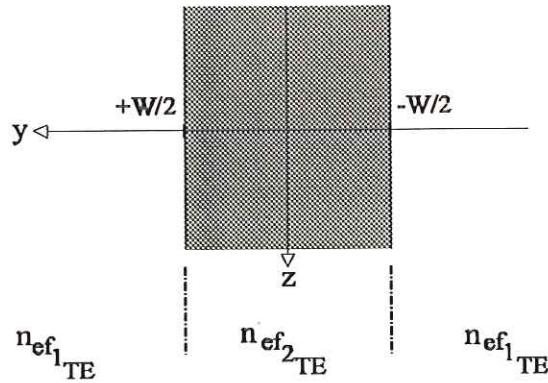


Figura 3-10: Guia óptico simétrico derivado do guia "rib" pela aplicação do método do índice efetivo.

elétrico obedece a uma variação gaussiana.

Por intermédio do gráfico, mostrado na Fig. 3-9, nota-se que quanto maior fôr a altura h do guia "rib", até o limite para a operação monomodo, tanto maior será a diferença entre os índices de refração das seções do guia. Deste modo, por inspeção das Eqs. (3.31) e (3.32), observa-se que o "spot size", $y_{0_{TE}}$, tende a ter o seu valor cada vez menor, o que significa dizer que a distribuição da componente do campo elétrico concentra-se cada vez mais nas imediações do guia "rib". A distribuição bidimensional das componentes do campo elétrico $E_y(x, y)_{TE}$, para o modo TE_0 , são mostradas nos gráficos das Figs. 3-11 a 3-14.

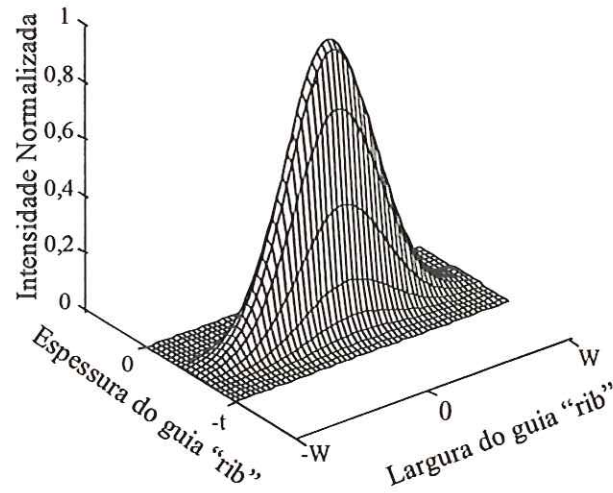


Figura 3-11: Distribuição bidimensional da intensidade de campo normalizada no guia "rib".

3.5 Cálculo da Defasagem do Sinal Óptico no Ramo Sensor e Intensidade na Saída do Interferômetro

A defasagem do sinal óptico no ramo sensor do interferômetro, devido ao deslocamento do diafragma, é calculada pela integração, ao longo de todo o comprimento do diafragma, da taxa de variação da fase do sinal óptico do ramo sensor em função da direção z , dada por [23]:

$$\Phi_m = \int_0^b \Delta\phi_m(z) dz \quad (3.35)$$

onde $m = TE, TM$, e $\Delta\phi_{TE}(z)$ e $\Delta\phi_{TM}(z)$ são as taxas de variação na fase do sinal óptico no ramo sensor do interferômetro para os modos TE e TM, respectivamente, ao longo da direção z .

A taxa de variação de fase no guia óptico do ramo sensor na direção z pode ser encon-

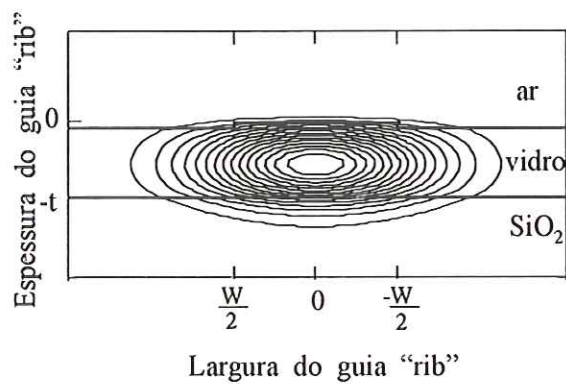


Figura 3-12: Distribuição da intensidade de campo na seção transversal do guia "rib".

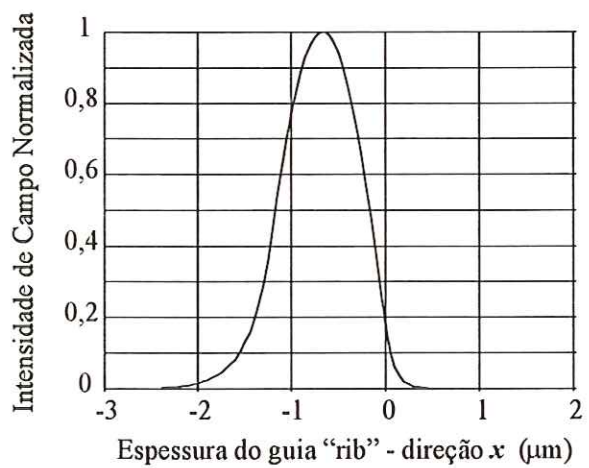


Figura 3-13: Intensidade de campo normalizada na direção x .

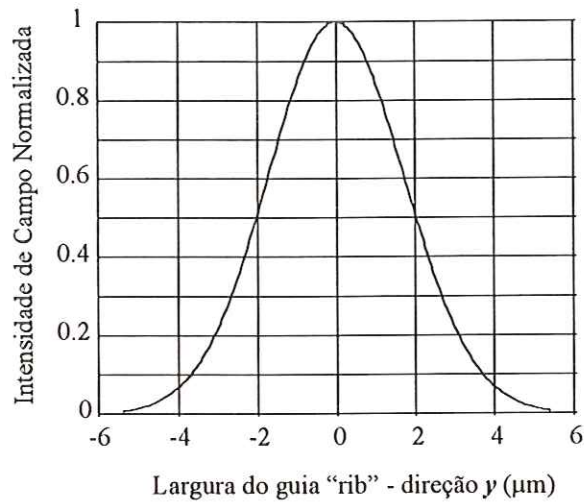


Figura 3-14: Intensidade de campo normalizada na direção y .

trada aplicando-se o método das perturbações, utilizado na teoria dos modos acoplados.

Muitas vezes, a análise das propriedades ópticas de guias dielétricos torna-se extremamente complexa pela aplicação direta das equações de Maxwell e as respectivas condições de contorno. Tais estruturas podem ser decompostas em partes mais simples, das quais as soluções sejam conhecidas e, então, pela superposição destas soluções chega-se à solução do problema inicial.

No caso de um guia planar assimétrico (Fig. 3-15(a)), por exemplo, pode-se ter diversos tipos de perturbações do guia original: alterações na constante dielétrica do guia (Fig. 3-15(b)), alterações na superfície do guia (3-15(c)), alterações na espessura da camada guiadora (Fig. 3-15(d)), ou a introdução de um segundo guia nas proximidades (Fig. 3-15(e)).

Baseando-se neste tipo de análise, as taxas de variação da fase do sinal do ramo sensor, ao longo da direção z , ocasionadas pela variação da constante dielétrica da camada

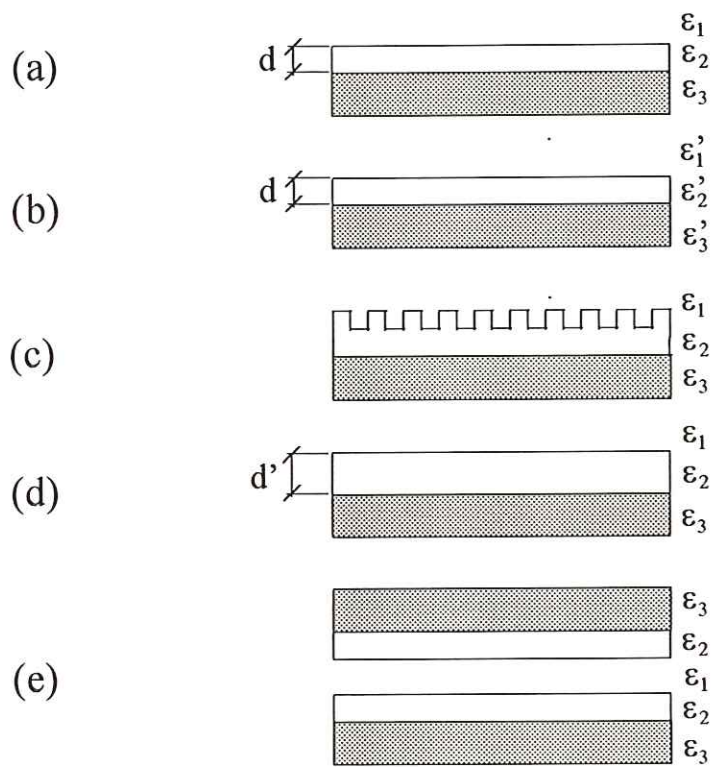


Figura 3-15: Perturbações num guia planar assimétrico. Guia original (a), alterações na constante dielétrica (b), alterações na superfície (c), alterações na espessura da camada guiadora (d), e introdução de um segundo guia (e) [57].

guiadora, são dadas por [56], [57]:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{TE}(z) &= \frac{\omega}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-t}^0 E_y^*(x, y, z) E_y(x, y, z) \Delta\varepsilon_y(y, z) dx dy \\ \Delta\phi_{TM}(z) &= \frac{\omega}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-t}^0 E_x^*(x, y, z) E_x(x, y, z) \Delta\varepsilon_x(y, z) dx dy\end{aligned}\quad (3.36)$$

onde $E_y(x, y, z)$ e $E_x(x, y, z)$ são as componentes normalizadas do campo elétrico para o modo TE e TM, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}E_y(x, y, z) &= E_y(x, y) \exp(j\beta_{TE}z) \\ E_x(x, y, z) &= E_x(x, y) \exp(j\beta_{TM}z)\end{aligned}\quad (3.37)$$

$E_y^*(x, y, z)$ e $E_x^*(x, y, z)$ são os complexos conjugados destas componentes de campo. $\Delta\varepsilon_y(y, z)$ e $\Delta\varepsilon_x(y, z)$ são as alterações nas componentes da constante dielétrica provocadas pelo deslocamento do diafragma, dadas por:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x(y, z) &= \varepsilon_0 n_x^2(y, z) - \varepsilon_0 n_0^2 = \varepsilon_0 (n_x^2(y, z) - n_0^2) \\ \Delta\varepsilon_y(y, z) &= \varepsilon_0 n_y^2(y, z) - \varepsilon_0 n_0^2 = \varepsilon_0 (n_y^2(y, z) - n_0^2)\end{aligned}\quad (3.38)$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica do espaço livre ($\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m) e n_0 é o índice de refração do guia óptico de vidro na ausência de pressão.

OHKAWA [23] analisou duas posições diferentes para o guia óptico do ramo sensor sobre o diafragma: na borda de um dos lados de maior dimensão (posição 1), e no centro do diafragma (posição 2), conforme mostra a Fig. 3-16.

Neste trabalho foram feitos os cálculos para as duas possibilidades citadas acima e, como no trabalho de OHKAWA [23], foi verificada que, na posição 1, há a maior alteração na fase do sinal do ramo sensor.

Efetuada os cálculos para as componentes de esforço ("stress"), $\sigma_x(y, z)$ e $\sigma_y(y, z)$, e conseqüentemente para $n_x(y, z)$ e $n_y(y, z)$, para pontos discretos do diafragma espaçados

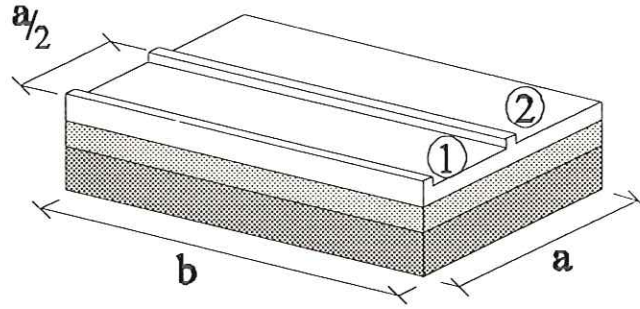


Figura 3-16: Opções de posicionamento do guia óptico do ramo sensor sobre o diafragma: numa das bordas (1) ou no centro (2) do diafragma.

entre si de Δ ($\Delta \gg W$), verifica-se que $\Delta\varepsilon_y(y, z)$ e $\Delta\varepsilon_x(y, z)$ não apresentam variação em relação à direção y , nos limites da largura W do guia óptico de vidro, dependendo somente de z . Pode-se, então, reescrever $\Delta\phi_{TE}(z)$ e $\Delta\phi_{TM}(z)$ como:

$$\Delta\phi_{TE}(z) = \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \Delta\varepsilon_y(z) A_{TE}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_{TE}^2(y) dy \int_{-t}^0 F_{2TE}^2(x) dx \quad (3.39)$$

$$\Delta\phi_{TM}(z) = \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \Delta\varepsilon_x(z) A_{TM}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_{TM}^2(y) dy \int_{-t}^0 F_{2TM}^2(x) dx$$

A segunda integral nas Eqs. (3.39) tem seus limites de integração bem definidos, dados pelas interfaces do núcleo do guia "rib" de vidro com a cobertura de ar ($x = 0$) e com o substrato de óxido de silício ($x = -t$). O mesmo, porém, não ocorre com a primeira integral destas mesmas equações, cujos limites de integração não estão limitados por qualquer interface física. Contudo, como deseja-se comparar os resultados aqui obtidos com os dados experimentais do trabalho de OHKAWA, 1989b, estes limites foram fixados arbitrariamente em uma vez a largura W do guia "rib", para cada lado do eixo de simetria, como mostrado na Fig. 3-17. A diferença, para os valores da pressão de

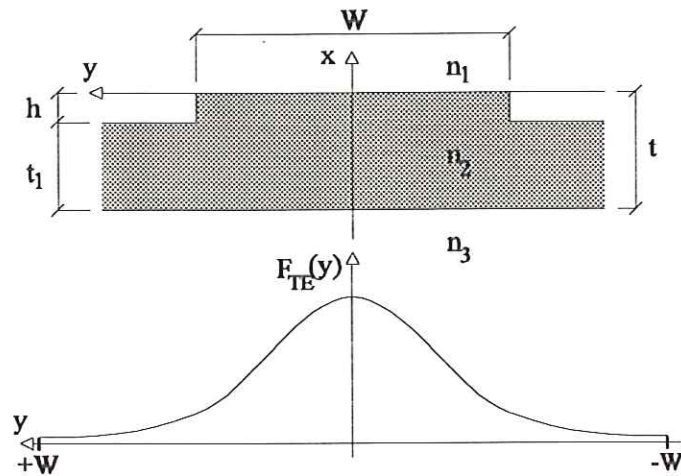


Figura 3-17: Limites de integração, para a distribuição gaussiana, da componente de campo elétrico no plano xy .

meia onda calculados neste trabalho e comparados com os do trabalho de OHKAWA [23], aumentando-se os limites de integração além deste valor, não apresenta alteração significativa.

Uma vez calculada a defasagem do sinal óptico do ramo sensor em relação ao do ramo de referência, Φ_m ($m = TE, TM$), pode-se obter a intensidade luminosa relativa na saída do interferômetro, devida à pressão aplicada ao diafragma⁸, dada por [46],[48]:

$$\frac{I_{saída}}{I_{entrada}} = \cos^2 \left(\frac{\Phi_m}{2} \right) \longrightarrow m = TE, TM \quad (3.40)$$

onde $I_{entrada}$ e $I_{saída}$ são as intensidades do sinal óptico na entrada e na saída do interferômetro de Mach-Zehnder, respectivamente.

⁸O programa DEFASAGZ.M, apresentado no Apêndice C, tem como resultado final este valor.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Deslocamento do Diafragma

Como descrito na Seção 3.2 do Capítulo anterior, os cálculos para a determinação do deslocamento do diafragma retangular, composto por três camadas de materiais diferentes (vidro, SiO₂ e silício), foram realizados por meio de um programa computacional¹ que utiliza o Método das Diferenças Finitas (MDF).

As constantes mecânicas dos materiais que compõem o diafragma e utilizadas nos cálculos, são dadas na Tabela 4.1.

	Módulo de Young [N/m ²]	Razão de Poisson	Referência
vidro	$6,75 \times 10^{10}$	0,28	[59]
SiO ₂	$7,00 \times 10^{10}$	0,17	[60]
silício	$1,69 \times 10^{11}$	0,066	[53]

Tabela 4.1: Constantes mecânicas dos materiais que compõem o diafragma.

O programa computacional DEFASAGZ.M foi testado, quanto à sua precisão, fazendo-se algumas comparações com resultados encontrados em CLARK [53] e pela tabela do

¹A listagem do programa computacional DEFASAGZ.M é mostrada no Apêndice B.

texto clássico de placas e cascas de TIMOSHENKO [50]. Na primeira, encontram-se os dados referentes à uma placa quadrada de silício com 1000 μm de lado e 10 μm de espessura, submetida à uma pressão de 100 mmHg (ou $1,3333 \times 10^4 \text{ N/m}^2$), que tem o deslocamento máximo calculado utilizando-se o MDF de 1,278 μm . Em TIMOSHENKO [50] (Tabela 35, da página 202), são dadas as fórmulas para o cálculo do deslocamento máximo, aqui designadas por $\omega_{m\acute{a}x}$, para placas retangulares com as quatro bordas engastadas, em função da razão de aspecto $\frac{b}{a}$, que é a razão entre o comprimento e a largura da placa. Para uma razão de aspecto igual a 1, $\omega_{m\acute{a}x}$ é dado por:

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{0,00126pa^4}{D} \quad (4.1)$$

onde p é a pressão aplicada à placa, a é a largura e D é a rigidez à flexão da placa, respectivamente.

Através destes cálculos o deslocamento máximo da placa citada anteriormente seria de 1,1821 μm , ou seja, 7,5% menor do que o resultado predito naquele trabalho. Esta mesma placa calculada através do Método dos Elementos Finitos (MEF) [61] resulta num deslocamento máximo de 1,1915 μm , 6,8% menor do que o resultado do trabalho original. Através do programa computacional DEFASAGZ.M, utilizado aqui, este deslocamento máximo calculado seria de 1,285 μm , 0,55% maior do que o resultado dado por CLARK [53], e 8,7% maior do que o valor encontrado pela teoria clássica de TIMOSHENKO [50] e 7,8% maior do que o valor calculado pelo Método dos Elementos Finitos. O gráfico da Fig. 4-1 mostra o deslocamento da placa citada anteriormente e a Tabela 4.2 apresenta um resumo do resultado obtido e as comparações feitas acima.

Com relação à diferença entre os valores apresentados aqui e em CLARK [53] com relação aos obtidos através da teoria clássica, deve-se levar em conta o erro de truncamento das séries que geraram os coeficientes numéricos dados naquela tabela², muito embora esteja-se utilizando um caso previsto naquele trabalho ($\frac{b}{a} = 1$). Com relação ao

²Prof. Dr. Sérgio B. Proença (Depto. de Estruturas da EESC-USP). Comunicação pessoal, 1994.

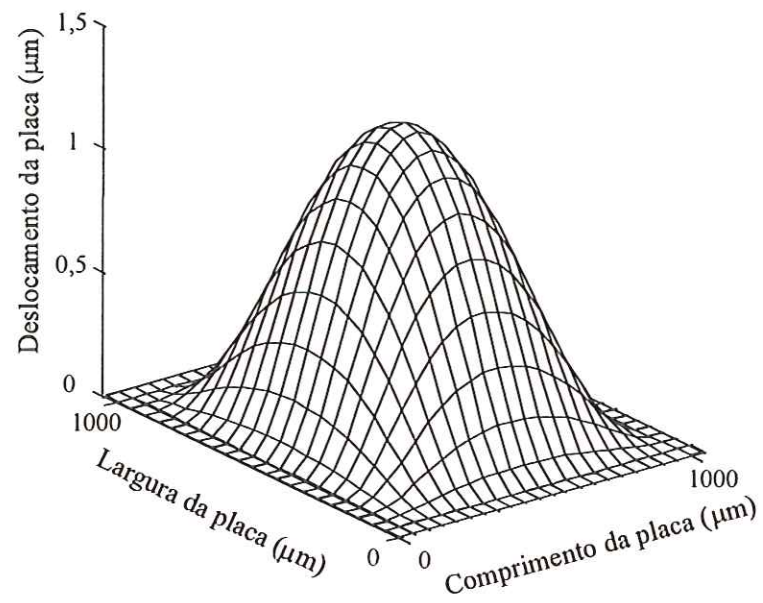


Figura 4-1: Gráfico do deslocamento da placa apresentada em CLARK [53] calculada pelo programa computacional DEFASAGZ.

	$w_{m\acute{a}x}$ (μm)	$\Delta\%$
Clark, 1979 [53] (ref.)	1,2780	-
Timoshenko [50]	1,1821	-7,5
MEF [61]	1,1915	-6,8
Resultado deste trabalho	1,2850	+0.55

Tabela 4.2: Comparações do resultado obtido neste trabalho com os da placa apresentada por CLARK [53] e outros resultados.

valor calculado pelo MEF deve-se tê-lo como mais aceitável de todos pela comprovada eficácia do método.

Para o diafragma retangular do sensor analisado aqui, de 220 μm de largura por 7000 μm de comprimento (correspondente a sete diafragmas de 220 μm de largura por 1000 μm de comprimento alinhados em série [23]), composto por três camadas de materiais e espessuras diferentes, para uma pressão de 0,094 MPa, o deslocamento máximo calculado aqui é de 0,3783 μm , e o valor calculado pela teoria clássica é de 0,3140 μm , 17% menor do que o valor predito aqui. Na comparação destes dados deve-se levar em conta que na Tabela 35 de TIMOSHENKO [50], para razões de aspecto maiores que 2, todos os cálculos serão feitos considerando-se uma razão de aspecto infinita, uma vez que nesta tabela não são previstos valores intermediários.

4.2 Variação das Componentes do Índice de Refração da Camada de Vidro

Os gráficos da variação das componentes do índice de refração Δn_x e Δn_y da camada de vidro quando o guia óptico do ramo sensor está posicionado no centro e na borda do diafragma, para diferentes razões de aspecto ($\frac{b}{a} = 1$ e 2), estão mostrados nas Figs. 4-2 e 4-3, respectivamente, e apresentam boa aproximação dos resultados quando comparados com aqueles encontrados em OHKAWA [23].



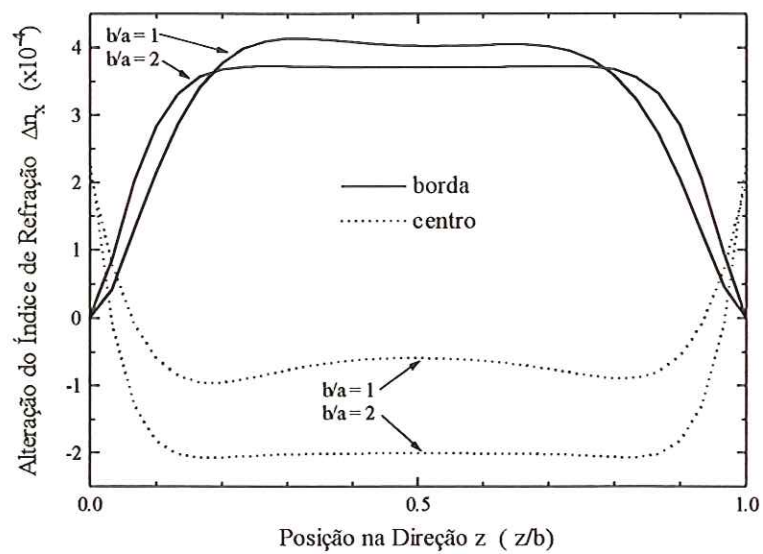


Figura 4-2: Variação da componente do índice de refração na direção x ao longo do comprimento do diafragma.

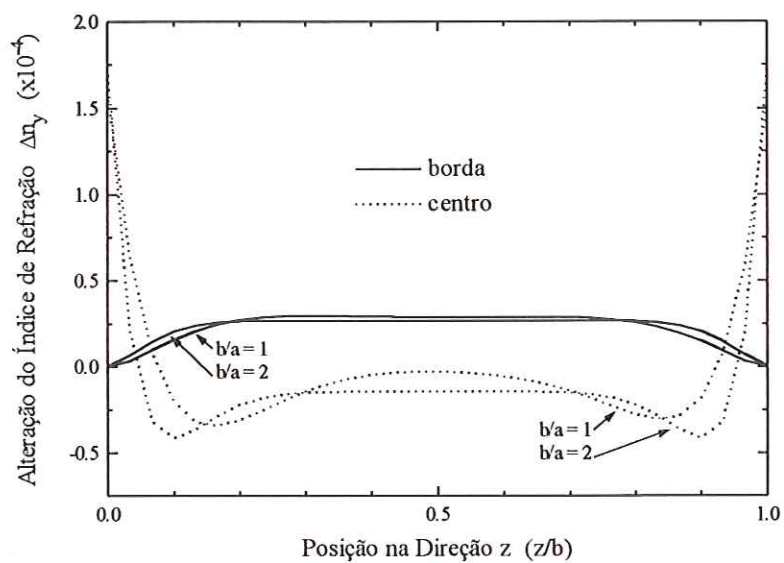


Figura 4-3: Variação da componente do índice de refração na direção y ao longo do comprimento do diafragma.

Estes gráficos foram obtidos a partir das Eqs. (3.12) da Seção 3.3 do Capítulo 3. Os coeficientes fotoelásticos, C_1 e C_2 , utilizados para o vidro são:

$$C_1 = 0,8373 \times 10^{-12} \left[\frac{m^2}{N} \right]$$

$$C_2 = -4,4504 \times 10^{-12} \left[\frac{m^2}{N} \right]$$

e foram determinados a partir das seguintes fórmulas [27]:

$$C_1 = -\frac{n^3}{2Y} (p_{11} - 2\nu p_{12}) \quad (4.2)$$

$$C_2 = -\frac{n^3}{2Y} (p_{12} - \nu p_{11} - \nu p_{12})$$

onde n é o índice de refração, Y é o módulo de Young; ν é a razão de Poisson do vidro, e p_{11} e p_{12} são os coeficientes elastoópticos de deformação ("strain-elasto-optical coefficients"), dados por BRABANDER [28]. Para a sílica:

$$p_{11} = 0,121$$

$$p_{12} = 0,270$$

4.3 Análise do Guia Óptico de Vidro

A análise do guia óptico de vidro do tipo "rib" baseou-se no método do índice efetivo conforme descrição realizada no Capítulo 3, na Seção 3.4. Os índices de refração do vidro e do dióxido de silício, no comprimento de onda de operação ($\lambda_0 = 0,6328 \mu m$), utilizados nos cálculos foram: $n_{\text{vidro}} = 1,5315$ [59] e $n_{\text{SiO}_2} = 1,4571$ [60]. Os valores encontrados para os índices efetivos para os modos TE_0 e TM_0 foram de 1,5161 e 1,5147, respectivamente. Estes resultados foram comparados com os obtidos por intermédio do método da rede equivalente, utilizado no programa computacional para o projeto de guias tipo "rib" em BORGES [49]. Por este programa, os resultados obtidos foram de 1,51611 para

o modo TE_0 e 1,51464 para o modo TM_0 , ou seja aqueles obtidos pelo método do índice efetivo são 0,0007% menor e 0,004% maior do que estes últimos, respectivamente. A proximidade destes valores deve-se, principalmente, ao fato do guia estar operando longe do corte dos respectivos modos. Estes resultados são apresentados de forma resumida na Tabela 4.3.

Índice de refração efetivo			
	Método da rede equivalente (ref.)	Método do índice efetivo	$\Delta\%$
TE_0	1,51611	1,51610	-0,0007
TM_0	1,51464	1,51470	+0,004

Tabela 4.3: Comparação dos índices efetivos do guia óptico calculados pelo método do índice efetivo e pelo método da rede equivalente.

4.4 Defasagem no Ramo Sensor e Intensidade Lumínosa na Saída do Interferômetro

O cálculo da defasagem do sinal óptico do ramo sensor em função da pressão aplicada ao diafragma passa por todas as etapas descritas nas seções anteriores deste trabalho. Primeiramente, calcula-se por intermédio da Eq. (3.5) o deslocamento sofrido pelo diafragma devido a uma dada pressão aplicada ao mesmo. Em seguida, relaciona-se este deslocamento com as componentes da tensão mecânica ("stress") da camada de vidro, de acordo com a Eq. (3.14). Posteriormente, faz-se por intermédio da Eq. (3.12) o cálculo da variação do índice de refração da camada de vidro. Utilizando-se primeiramente a Eq. (3.36), e em seguida a Eq. (3.35), calcula-se a defasagem total do sinal do ramo sensor em relação ao ramo de referência, que está fora da influência do diafragma. O gráfico que apresenta a relação entre a pressão aplicada e a defasagem total, Φ_m ($m = TE, TM$), está mostrado na Fig. 4-4.

Para calcular a intensidade de saída normalizada do interferômetro em função da

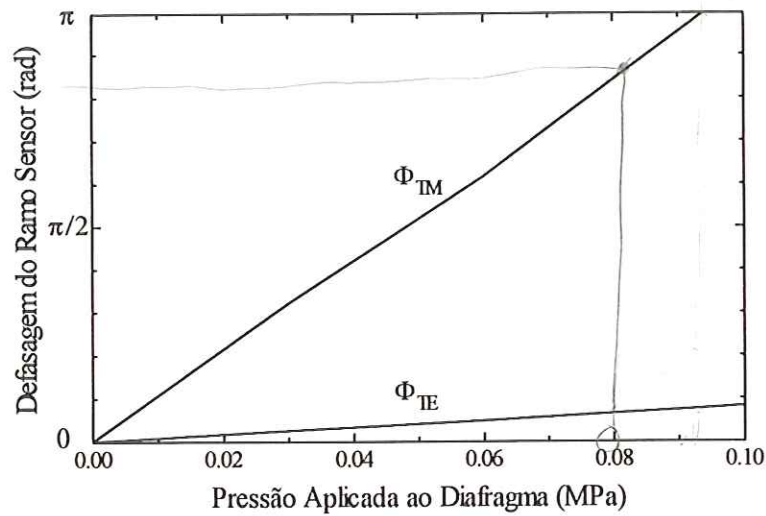


Figura 4-4: Defasagem total do ramo sensor vs. pressão aplicada ao diafragma.

pressão aplicada, basta utilizar-se os valores da defasagem calculados anteriormente, para cada valor aplicado de pressão na Eq. (3.40), o gráfico que representa esta relação está mostrado na Fig. 4-5.

Convém ressaltar que o valor aqui obtido de 0,094 MPa ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ N/m}^2 = 9,869 \text{ atm}$) para a pressão de meia-onda, aquela necessária para fazer variar a intensidade luminosa de saída de um valor máximo até um mínimo, é 17,5% maior que o valor experimental obtido por OHKAWA [23], de 0,080 MPa. O valor teórico calculado naquele trabalho apresenta o resultado de 0,029 MPa, 63,75% menor que o seu próprio resultado experimental. Efetuando-se o cálculo através dos resultados tabelados para a deformação de uma placa submetida à uma pressão uniforme, encontrados em TIMOSHENKO [50], chega-se a 0,113 MPa para a pressão de meia-onda, um valor 41,25% maior que o resultado experimental.

O gráfico da Fig. 4-6 é semelhante ao apresentado por VADEKAR [12], e mostra a variação da pressão de meia-onda com a alteração do comprimento do diafragma do

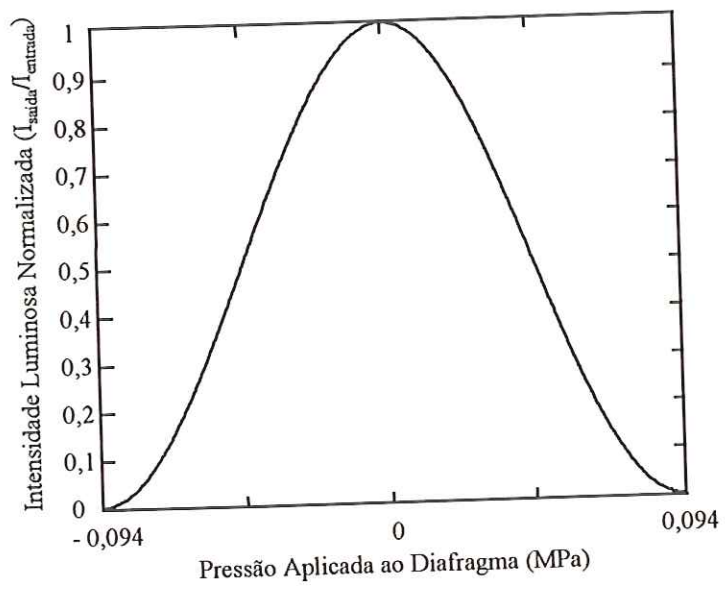


Figura 4-5: Intensidade normalizada de saída vs. pressão aplicada ao diafragma.

sensor analisado aqui, mantendo-se fixos os demais parâmetros (espessuras das camadas, largura do diafragma, etc.). Para o comprimento do diafragma igual a 7 mm, pode-se fazer a comparação do resultado encontrado neste trabalho com aqueles citados no parágrafo anterior.

As diferenças entre os resultados experimental e teórico do trabalho original devem-se ao fato de que para a obtenção do resultado teórico OHKAWA [23], considerou um diafragma composto por apenas uma camada, de dióxido de silício, que não é o material mais rígido e nem compõe a camada mais espessa do diafragma. A diferença entre os resultados experimental e aqueles obtidos a partir da teoria clássica de deslocamentos de placas deve-se, provavelmente, ao fato de que naquelas tabelas não são previstos valores para a razão de aspecto ($\frac{b}{a}$) maiores que 2, considerando-se todos os valores acima deste como sendo infinito ($\frac{b}{a} = \infty$). Há também erro devido ao truncamento das séries que geraram os coeficientes numéricos desta tabelas. Não se pode descartar a possibilidade de erros nas medidas, não mencionadas no trabalho de OHKAWA [23].

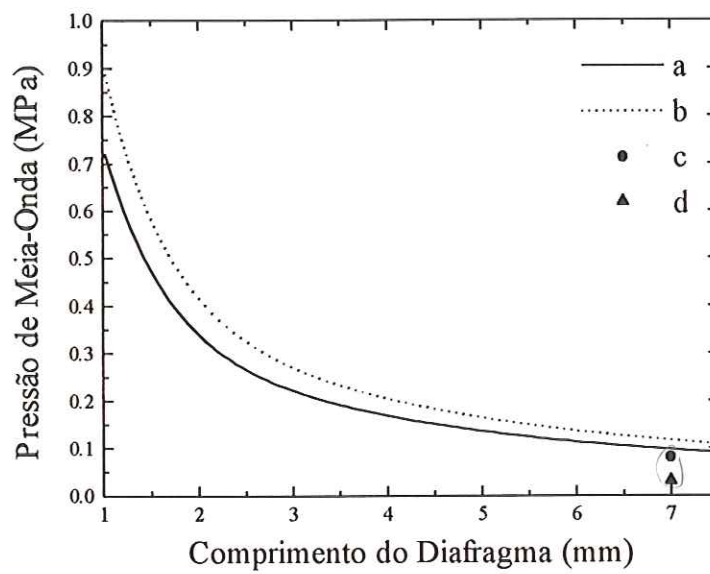


Figura 4-6: Pressão de meia-onda vs. comprimento do diafragma: análise proposta neste trabalho (a), pela teoria clássica de placas (b), dado experimental (c) e teórico (d) de acordo com OHKAWA [23].

Capítulo 5

Conclusões

A análise do sensor óptico integrado de pressão, proposto por OHKAWA [23] foi realizada neste trabalho. Para tanto, foram empregados em cada etapa da análise, métodos e soluções os mais simples possíveis, desejando-se obter uma boa concordância com os resultados apresentados no trabalho de OHKAWA [23].

O Método das Diferenças Finitas (MDF) foi utilizado no cálculo do deslocamento sofrido pelo diafragma, onde foi considerada uma rigidez equivalente (D_{eq}) àquela apresentada pelo diafragma multicamadas. O MDF também foi usado no cálculo das componentes da tensão no vidro do qual é feito o guia óptico. A alteração do índice de refração deste guia pode então ser obtida. Gráficos que mostram os valores do deslocamento ao longo do diafragma para um dado valor da pressão aplicada, como também da variação do índice de refração no guia óptico, foram apresentados.

A análise do guia óptico de vidro tipo "rib" foi feita utilizando-se o Método do Índice Efetivo e admitindo-se a variação gaussiana, na direção y , da componente de campo elétrico (modo TE) ou magnético (modo TM). Na direção x adotou-se a formulação clássica apresentada na literatura.

Na determinação da defasagem total entre os sinais ópticos do ramo sensor e de referência, para os modos TE e TM, foram utilizados processos numéricos no cálculo das respectivas equações integrais.

O resultado final obtido neste trabalho para a pressão de meia-onda, mostrou uma diferença de 17,5% em relação ao resultado experimental do trabalho original, enquanto que o valor teórico previsto naquele trabalho apresenta uma diferença de -63,75%, o que mostra, num primeiro momento, que o objetivo inicial foi alcançado.

Uma síntese dos resultados obtidos neste trabalho foi apresentada no "1995 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference" [63].

Para a continuação futura deste trabalho sugere-se a construção de um protótipo do dispositivo e sua posterior caracterização, podendo-se comparar os resultados obtidos experimentalmente com os da análise aqui proposta.

Posteriormente, também seria apropriado um refinamento da análise deste dispositivo com o emprego, por exemplo, do Método dos Elementos Finitos (MEF) para o cálculo do deslocamento do diafragma. E, finalmente, pesquisar a eventual alteração que os processos de fabricação do dispositivo causam nos materiais empregados em sua construção quanto aos seus parâmetros físicos (mecânicos e ópticos).

Referências Bibliográficas

- [1] KOMPFNER, R. Optics at Bell Laboratories - Optical Communications. *Appl. Opt.*, v.11, n.11, p.2412-25, 1972.
- [2] BREGUET, A. Sur le photophone de MM. Graham Bell et Summer Tainter. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de L'Académie des Sciences*. v.91, p.652-54, Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, julho-dezembro 1880.
- [3] MAIMAN, T.H. Stimulated optical radiation in ruby. *Nature*, v.187, n.4736, p.493-494, 1960.
- [4] HALL, R.N.; FENNER, G.E.; KINGSLEY, J.D.; SOLTYS, T.J.; CARLSON, R.O. Coherent light emission from GaAs junctions. *Physical Review Letters*, v.9, n.9, p.366-68, 1962.
- [5] NATHAN, M. I.; DUMKE, W. P.; BURNS, G. Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions. *Appl. Phys. Lett.*, v.1, n.3, p.62-4, 1962.
- [6] KAPRON, F.P.; KECK, D.B.; MAURER, R.D. Radiation losses in glass optical waveguides. *Appl. Phys. Lett.*, v.17, n.10, p.423-25, 1970.
- [7] MIYA, T.; TERUNUMA, Y.; HOSAKA, T.; MIYASHITA, T. Ultimate low-loss single-mode fibre at 1.55 μm . *Electron. Lett.*, v.15, n.4, p.106-8, 1979.
- [8] OSTERBERG, H.; SMITH, L. W. Transmission of optical energy along surfaces: Parts I and II. *J. Opt. Soc. Amer.*, v.54, n.9, p.1073-84, 1964.

- [9] SHUBERT, R.; HARRIS, J. H. Optical surface waves on thin films and their applications to integrated data processors. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.MTT-16, n.12, p.1048-54, 1968.
- [10] MILLER, S. Integrated optics: an introduction. *Bell Syst. Tech. J.*, v.48, n.7, p.2059-69, 1969.
- [11] HALL, D.G. Survey of silicon-based integrated optics. *Computer*, p.25-32, December 1987.
- [12] VADEKAR, A.; NATHAN, A.; HUANG, W.P. Analysis and design of an integrated silicon ARROW Mach-Zehnder micromechanical interferometer. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.12, n.1, p.157-62, 1994.
- [13] IZUTSU, M.; ENOKIHARA, A.; SUETA, T. Optical-waveguide microdisplacement sensor. *Electron. Lett.*, v.18, n.20, p. 867-68, 1982.
- [14] VALETTE, S.; LIZET, J.; MOTTIER, P.; JADOT, J. P.; RENARD, S.; FOURNIER, A.; GROUILLET, A. M.; GIDON, P.; DENIS, H. Integrated optical spectrum analyser using planar technology on oxidised silicon substrate. *Electron. Lett.*, v.19, n.21, p.883-5, 1983.
- [15] JOHNSON, L.M.; LEONBERGER, F.J. Integrated optical temperature sensor. *Appl. Phys. Lett.*, v.41, n.2, p.134-36, 1982.
- [16] SYMS, R. R. A. Resonant cavity sensor for integrated optics. *IEEE J. Quantum Electron.*, v.QE-21, n. 4, p.322-28, 1985.
- [17] HARUNA, M.; NAKAJIMA, H.; NISHIHARA, H. Optical π -arc waveguide interferometer in proton-exchanged LiNbO₃ for temperature sensing. *Appl. Opt.*, v.24, n. 16, p. 2483-84, 1985.
- [18] IZUTSU, M.; ENOKIHARA, A.; SUETA, T. Integrated optic temperature and humidity sensors. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.LT-4, n.7, p.833-36, 1986.

- [19] URA, S.; SUHARA, T.; NISHIHARA, H.; KOYAMA, J. An integrated-optic disk pickup device. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.LT-4, n.7, p.913-18, 1986.
- [20] ENOKIHARA, A.; IZUTSU, M.; SUETA, T. Integrated-optic fluid sensor using heat transfer. *Appl. Opt.*, v. 27, n.1, p. 109-13, 1988.
- [21] OHKAWA, M.; IZUTSU, M.; SUETA, T. Integrated optic accelerometer employing a cantilever on a silicon substrate. *Japanese Journal of Applied Physics*, v.28, n.2, p.287-8, 1989.
- [22] VALETTE, S.; RENARD, S.; JADOT, J.P.; GIDON, P.; ERBEIA, C. Silicon-based integrated optics technology for optical sensors applications. *Sensors and Actuators*, A21-A23, p. 1087-1091, 1990.
- [23] OHKAWA, M.; IZUTSU, M.; SUETA, T. Integrated optic pressure sensor on silicon substrate. *Appl. Opt.*, v.28, n.23, p. 5153-57, 1989.
- [24] FISCHER, K.; MÜLLER, J. Sensor application of SiON integrated optical waveguides on silicon. *Sensors and Actuators B*, v.9, n.3, p.209-13, 1992.
- [25] WAGNER, C.; FRANKENBERGER, J.; DEIMEL, P.P. Optical pressure sensor based on a Mach-Zehnder interferometer integrated with a lateral a-Si:H p-i-n photodiode. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, v.5, n.10, p. 1257-59, 1993.
- [26] WAGNER, C.; DEIMEL, P.P. Optical radiation from tapered rib-waveguides. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.11, n.11, p.1769-73, 1993.
- [27] FISCHER, K.; MÜLLER, J.; HOFFMANN, R.; WASSE, F.; SALLE, D. Elastooptical properties of SiON layers in an integrated optical interferometer used as a pressure sensor. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.12, n.1, p.163-69,1994.
- [28] BRABANDER, G.N.D.;BOYD, J.T.;BEHEIN, G. Integrated optical ring resonator with micromechanical diaphragm for pressure sensing. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, v.6, n.5, p. 671-73, 1994.

- [29] CAMARGO SILVA, M.T.; MANFRIN, S. K. Silicon integrated optical pressure sensor based on distributed Bragg reflector structure. Proceedings of the SPIE's International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation, The International Society for Optical Engineering, San Diego, 1995.
- [30] TIEN, P.K. Light waves in thin films and integrated optics. *Appl. Opt.*, v.10, n.11, p.2395-2413, 1971.
- [31] MILLER, S. A survey of integrated optics. *IEEE J. Quantum Electron.*, v.QE-8, n.2, p.199-205, 1972.
- [32] POLE, R. V.; MILLER, S. E.; HARRIS, J. H.; TIEN, P. K. Integrated optics and guided waves - a report of the topical meeting. *Appl. Opt.*, v.11, n.8, p.1675-85, 1972.
- [33] KOGELNIK, H. An introduction to integrated optics. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.MTT-23, n.1, p.2-16, 1975.
- [34] SUEMATSU, Y. The progress of integrated optics in Japan. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, v.MTT-23, n.1, p.16-20, 1975.
- [35] CULSHAW, B.; DAKIN, J. (ed.) *Optical Fibers Sensors: systems and applications*. v.2, Norwood: Artech House 1989.
- [36] MILLER, S.E.; MARCATILI, A.J.; LI, T. Research toward optical-fiber transmission systems. *Proc. IEEE*, v.61, n.12, p.1703-51, 1973.
- [37] IZUTSU, M.; NAKAI, Y.; SUETA, T. Operation mechanism of the single-mode optical-waveguide Y junction. *Opt. Lett.*, v.7, n.3, p.136-38, 1982.
- [38] SASAKI, H.; ANDERSON, I. Theoretical and experimental studies on active Y-junction in optical waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, v.QE-14, n.11, p.883-92, 1978.

- [39] SASAKI, H.; MIKOSHIBA, N. Normalised power transmission in single mode optical branching waveguides. *Electron. Lett.*, v.17, n.3, p.136-38, 1981.
- [40] SAFAVI-NAEINI, S.; CHOW, Y.L.; CHAUDHURI, S.K.; GOSS, A. Wide angle phase-corrected Y-junction of dielectric waveguides for low loss applications. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.11, n.4, p.567-76, 1993.
- [41] HATAMI-HANZA, H.; LEDERER, M.J.; CHU, P.L.; SKINNER, I.M. A novel wide-angle low-loss dielectric slab waveguide Y-branch. *IEEE J. Lightwave Technol.*, v.12, n.2, p.208-14, 1994.
- [42] LIN, H.; CHENG, R.; WANG, W. Wide-angle low-loss single-mode symmetric Y-junctions. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, v.6, n.7, p.825-27, 1994.
- [43] REDIKER, R.H.; LEONBERGER, F. J. Analysis of integrated-optics near 3 dB coupler and Mach-Zehnder interferometric modulator using four-port scattering matrix. *IEEE J. Quantum Electron.*, v.QE-18, n.10, p.1813-16, 1982.
- [44] YAJIMA, H. Coupled mode analysis of dielectric planar branching waveguides. *IEEE J. Quantum Electron.*, v.QE-14, n.10, p.749-55, 1978.
- [45] LIN, C. (ed.) *Optoelectronic Technology and Lightwave Communications Systems*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1989.
- [46] LEONBERGER, F. J. Applications of guided-wave interferometers. *Fiberoptic Technology*, p.125-129, March 1982.
- [47] SPIEGEL, M. R. *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática*. tradução Roberto Chioccarello; revisão e ampliação José Maria Lemes da Silva 2.ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1992.
- [48] DAKIN, J.; CULSHAW, B. (ed.) *Optical Fibers Sensors: systems and applications*. v.1, Norwood: Artech House, 1988.

- [49] BORGES, B. V. Cálculo das perdas de propagação em guias de onda ópticos tipo "rib" pela análise de rede equivalente. São Carlos, 1992. 216 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [50] TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of Plates and Shells. New York, McGraw-Hill, 1965.
- [51] SCHWARZ, S. E. Electromagnetics for Engineers. Philadelphia, Saunders College Publishing, 1990.
- [52] SCHELLIN, R.; HESS, G.; KÜHNEL, W.; THIELEMANN, C.; TROST, D.; WACKER, J. Measurements of the mechanical behavior of micromachined silicon and silicon-nitride membranes for microphones, pressure sensors and gas flow meters. Sensors and Actuators A, v.41-42, p.287-92, 1994.
- [53] CLARK, S.K.; WISE, K.D. Pressure sensitivity in anisotropically etched thin-diaphragm pressure sensors. IEEE Trans. Electron Devices, v. ED-26, n.12, p.1887-96, 1979.
- [54] IZUTSU, M.; SUETA, T. Coupled mode analysis of light modulation in dielectric waveguides. Appl. Phys., v.5, p.307-15, 1975.
- [55] YARIV, A. Coupled-mode theory for guided-wave optics. IEEE J. Quantum Electron., v.QE-9, n.9, p.919-33, 1973.
- [56] YARIV, A.; YEH, P. Optical Waves in Crystals. New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [57] LEE, D. Electromagnetic Principles of Integrated Optics. New York, John Wiley & Sons, 1986.
- [58] ALFERNESS, R. C.; BURNS, W. K.; DONNELLY, J. F.; KAMINOW, I. P.; KOGELNIK, H.; LEONBERGER, F. J.; MILTON, A. F.; TAMIR, T.; TUCKER,

R. S. in TAMIR, T. (ed.) Guided-Wave Optoelectronics. v.26, ch.2, p.69-73, Berlin: Springer-Verlag, 1988.

- [59] Corning 7059 glass - material informations, Corning Incorporated Publication # MI-7059-91, 1991.
- [60] Synthetic fused silica - material informations, Heraeus Quarzschmelze Publication # Q-A1/112.2, 1985.
- [61] REZENDE, M. N.; PAIVA, J. B. A quadrilateral discrete Kirchhoff finite element for buildings slab analysis. II International Conference on Computacional Structures Technology, Atenas - Grécia, 30/08 a 01/09, 1994.
- [62] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965.
- [63] MANFRIN, S.K.; CÉSAR, A.C.; CAMARGO SILVA, M.T., "An improved model to design integrated optical pressure sensors.", Proceedings of the 1995 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronic Conference, v.1, p.87-90, Sociedade Brasileira de Microondas e Optoeletrônica, Rio de Janeiro, July 24-27, 1995.

Apêndice A

Cálculo da rigidez equivalente, D_{eq}

O desenvolvimento da Eq. (3.2) está baseado nas Figs. A-1 e A-2.

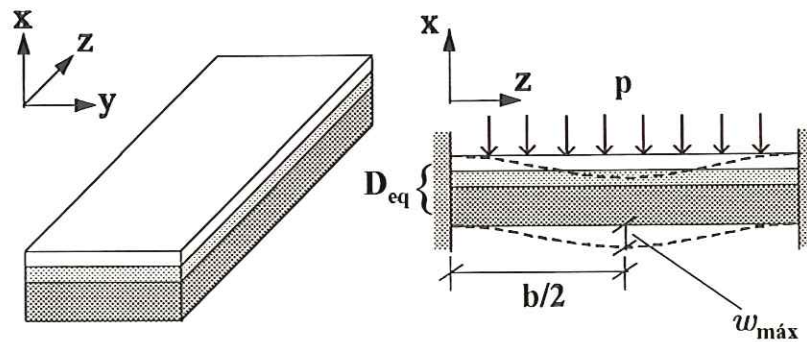


Figura A-1: Estrutura do diafragma composto por três camadas.

O cálculo do deslocamento máximo pode ser feito através de [50]:

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{\alpha p a^4}{D_{eq}} \quad (A.1)$$

onde α é um fator numérico que depende da razão de aspecto $\frac{b}{a}$ (b e a são o comprimento e a largura da placa retangular, respectivamente) e das condições de contorno nas bordas da placa; p é a pressão aplicada, aqui admitida como uniforme, ou seja, distribuída uniformemente sobre a área da placa, e D_{eq} é a rigidez à flexão da placa composta por três camadas de materias diferentes. Quando se trata de uma placa simples, composta por um único material, pode-se escrever a rigidez à flexão como:

$$D = \frac{Y t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (A.2)$$

onde Y é o módulo de Young, ν é a razão de Poisson e t é a espessura da placa.

A Fig. A-2 mostra, esquematicamente, a pressão aplicada à placa e as reações nas camadas intermediárias que compõe a placa composta. Nesta figura $\omega_{m\acute{a}x1}$, $\omega_{m\acute{a}x2}$ e $\omega_{m\acute{a}x3}$ são os deslocamentos máximos de cada camada, e que de acordo com a Eq. (A.1), são dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_{m\acute{a}x1} &= \frac{\alpha(p - R_1)a^4}{D_1} \\ \omega_{m\acute{a}x2} &= \frac{\alpha(R_1 - R_2)a^4}{D_2} \\ \omega_{m\acute{a}x3} &= \frac{\alpha R_2 a^4}{D_3} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Como $\omega_{m\acute{a}x1} = \omega_{m\acute{a}x2} = \omega_{m\acute{a}x3} = \omega_{m\acute{a}x}$, pode-se encontrar R_1 e R_2 :

$$\omega_{m\acute{a}x1} = \omega_{m\acute{a}x2} \implies \frac{\alpha(p - R_1)a^4}{D_1} = \frac{\alpha(R_1 - R_2)a^4}{D_2} \implies R_1 = \frac{D_2 p + D_1 R_2}{D_1 + D_2} \quad (A.4)$$

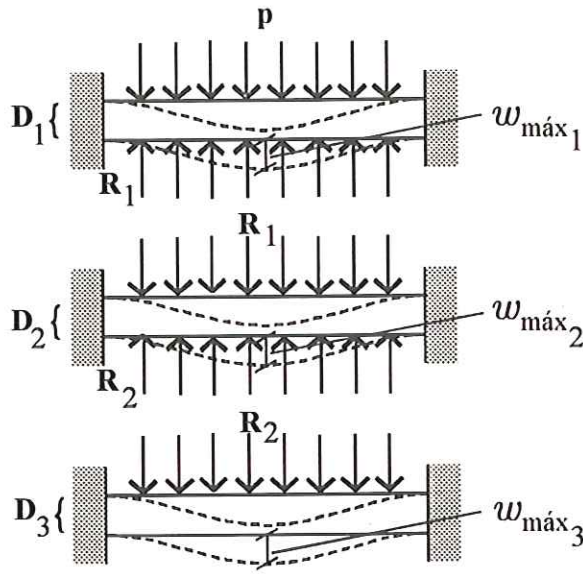


Figura A-2: Composição das forças nas camadas do diafragma.

e

$$\omega_{m\acute{a}x2} = \omega_{m\acute{a}x3} \implies \frac{\alpha(R_1 - R_2)a^4}{D_2} = \frac{\alpha R_2 a^4}{D_3} \implies R_1 = \frac{R_2(D_2 + D_3)}{D_3} \quad (\text{A.5})$$

Igualando-se as Eqs. (A.4) e (A.5), tem-se:

$$\frac{D_2 p + D_1 R_2}{D_1 + D_2} = \frac{R_2(D_2 + D_3)}{D_3} \implies R_2 = \frac{D_3 p}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo-se a Eq. (A.6) na Eq. (A.5), tem-se:

$$R_1 = p \left(\frac{D_1 + D_2}{D_1 + D_2 + D_3} \right) \quad (\text{A.7})$$

Pode-se, então, calcular $\omega_{m\acute{a}x}$ através da Eq. (A.3):

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{\alpha(p - R_1)a^4}{D_1} = \frac{\alpha(R_1 - R_2)a^4}{D_2} = \frac{\alpha R_2 a^4}{D_3} = \frac{\alpha p a^4}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (\text{A.8})$$

Comparando-se a Eq. (A.1) com a Eq. (A.8), tem-se:

$$\frac{\alpha p a^4}{D_{eq}} = \frac{\alpha p a^4}{D_1 + D_2 + D_3} \quad (\text{A.9})$$

Portanto, pode-se escrever:

$$D_{eq} = D_1 + D_2 + D_3 = \frac{Y_1 t_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} + \frac{Y_2 t_2^3}{12(1 - \nu_2^2)} + \frac{Y_3 t_3^3}{12(1 - \nu_3^2)} \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

Dedução da Eq. (3.5) pelo MDF

Pelo Método das Diferenças Finitas (MDF), com operadores de diferenças centrais, as derivadas são substituídas por aproximações dadas por:

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cong \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \quad (\text{B.1})$$

como mostrada na Fig. B-1.

Para o caso de uma função de duas variáveis pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} &= \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right] \right|_{y=y_0} \\ &\cong \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0\right)}{\Delta} \right] \right|_{y=y_0} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\left. \frac{\partial f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0\right)}{\partial y} \right|_{y=y_0} - \left. \frac{\partial f\left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0\right)}{\partial y} \right|_{y=y_0} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - f\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0 - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{f\left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0 - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

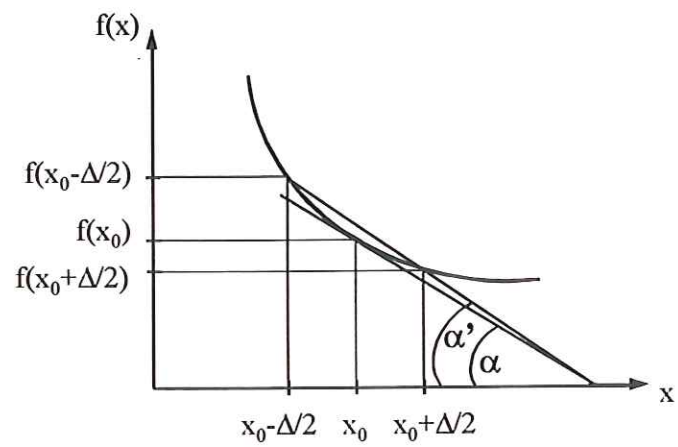


Figura B-1: Aproximação de uma derivada num ponto pelo Método das Diferenças Finitas com operadores de diferenças centrais.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[f \left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0 + \frac{\Delta}{2} \right) - f \left(x_0 + \frac{\Delta}{2}, y_0 - \frac{\Delta}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. - f \left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0 + \frac{\Delta}{2} \right) + f \left(x_0 - \frac{\Delta}{2}, y_0 - \frac{\Delta}{2} \right) \right] \quad (B.2)
\end{aligned}$$

Para o caso da Eq. (3.1), repetida aqui por comodidade, pode-se desenvolvê-la por partes.

$$\frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial z^4} = \frac{p}{D_{eq}} \quad (B.3)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (B.3) torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^4} &\simeq \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w \left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} \right] \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\frac{\Delta}{2}} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0-\frac{\Delta}{2}} \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w \left((y_0 + \frac{\Delta}{2}) + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left((y_0 + \frac{\Delta}{2}) - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{w \left((y_0 - \frac{\Delta}{2}) + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left((y_0 - \frac{\Delta}{2}) - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\Delta} - 2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0-\Delta} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w \left((y_0 + \Delta) + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left((y_0 + \Delta) - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} + \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{w \left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} + \frac{w \left((y_0 - \Delta) + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left((y_0 - \Delta) - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right)}{\Delta} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^3} \frac{\partial}{\partial y} \left[w \left(y_0 + \frac{3\Delta}{2}, z_0 \right) - 3w \left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) + 3w \left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 \right) - w \left(y_0 - \frac{3\Delta}{2}, z_0 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta^3} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\frac{3\Delta}{2}} - 3 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\frac{\Delta}{2}} + 3 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0-\frac{\Delta}{2}} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=y_0-\frac{3\Delta}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^3} \left[\frac{w\left(\left(y_0 + \frac{3\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 + \frac{3\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} + \right. \\
&\quad - 3 \frac{w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} + 3 \frac{w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} \\
&\quad \left. - \frac{w\left(\left(y_0 - \frac{3\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 - \frac{3\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0 + 2\Delta, z_0) - 4w(y_0 + \Delta, z_0) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0)] \\
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Analogamente, pode-se desenvolver o terceiro termo do lado esquerdo da Eq. (B.3), resultando em:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial z^4} &\simeq \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{w\left(y_0, z_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - w\left(y_0, z_0 - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \right] \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0, z_0 + 2\Delta) - 4w(y_0, z_0 + \Delta) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)] \\
\end{aligned} \tag{B.5}$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq. (B.3) pode ser desenvolvido como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w(y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} &\simeq \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{w\left(y_0, z_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - w\left(y_0, z_0 - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \right] \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=z_0+\frac{\Delta}{2}} - \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=z_0-\frac{\Delta}{2}} \right] \right] \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w\left(y_0, \left(z_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\right) - w\left(y_0, \left(z_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{w\left(y_0, \left(z_0 - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\right) - w\left(y_0, \left(z_0 - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta} \right] \right] \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0+\Delta}^{y=y_0} - 2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0}^{y=y_0} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0-\Delta}^{y=y_0} \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right) - w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right)}{\Delta} + \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} + \frac{w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right) - w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right)}{\Delta} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^3} \frac{\partial}{\partial y} \left[w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right) - w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right) - 2w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) + \right. \\
&\quad \left. + 2w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0\right) + w\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right) - w\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right) \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^3} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0+\Delta}^{y=y_0+\frac{\Delta}{2}} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0+\Delta}^{y=y_0-\frac{\Delta}{2}} - 2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0}^{y=y_0+\frac{\Delta}{2}} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0}^{y=y_0-\frac{\Delta}{2}} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0-\Delta}^{y=y_0+\frac{\Delta}{2}} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{z=z_0-\Delta}^{y=y_0-\frac{\Delta}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^3} \left[\frac{w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right) - w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right)}{\Delta} + \right. \\
&\quad - \frac{w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right) - w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0 + \Delta\right)}{\Delta} + \\
&\quad - 2 \frac{w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} + \\
&\quad + 2 \frac{w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0\right) - w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0\right)}{\Delta} + \\
&\quad + \frac{w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right) - w\left(\left(y_0 + \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right)}{\Delta} + \\
&\quad \left. - \frac{w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right) - w\left(\left(y_0 - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}, z_0 - \Delta\right)}{\Delta} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0 + \Delta, z_0) + 4w(y_0, z_0) + \\
&\quad - 2w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) - 2w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Pode-se então reescrever a Eq. (B.3), através das Eqs. (B.4),(B.5) e (B.6), como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0 + 2\Delta, z_0) - 4w(y_0 + \Delta, z_0) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0)] + \\
& + \frac{2}{\Delta^4} [w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) - 2w(y_0 + \Delta, z_0) + \\
& + 4w(y_0, z_0) - 2w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) - 2w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] + \\
& + \frac{1}{\Delta^4} [w(y_0, z_0 + 2\Delta) - 4w(y_0, z_0 + \Delta) + 6w(y_0, z_0) - 4w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)] \\
& = \frac{p}{D_{eq}}
\end{aligned}$$

que é a forma da Eq. (3.4).

Agrupando-se os termos semelhantes obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta^4} \{20w(y_0, z_0) - 8[w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0)] + \\
& + 2[w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] + \\
& + w(y_0 + 2\Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0) + w(y_0, z_0 + 2\Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)\} \\
& = \frac{p}{D_{eq}} \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Pode-se, então, explicitar o termo $w(y_0, z_0)$, deixando-se a Eq. (B.7) na mesma forma da Eq. (3.5):

$$\begin{aligned}
w(y_0, z_0) = & \frac{1}{20} \left\{ \frac{p\Delta^4}{D_{eq}} + 8[w(y_0, z_0 - \Delta) + w(y_0, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0) + w(y_0 + \Delta, z_0)] + \right. \\
& - 2[w(y_0 + \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 + \Delta, z_0 - \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 + \Delta) + w(y_0 - \Delta, z_0 - \Delta)] + \\
& \left. - [w(y_0 + 2\Delta, z_0) + w(y_0 - 2\Delta, z_0) + w(y_0, z_0 + 2\Delta) + w(y_0, z_0 - 2\Delta)] \right\}
\end{aligned}$$

Apêndice C

Listagem do programa computacional DEFASAGZ.M

Este programa foi escrito para o aplicativo matemático MATLAB ¹, versão 4.0, para microcomputadores padrão IBM -PC.

```
clear;
m=5;
n=27;
p=input(' Pressão Aplicada ao Diafragma [MPa] = ');
p=p*1e6;
h=36.67e-6;
t1=1.06e-6;
t2=1.8e-6;
t3=5.0e-6;
W=3.6e-6;
t=1.2e-6;
E1=6.75e10;
E2=7.00e10;
```

¹MATLAB é uma marca registrada de propriedade da The Math Works, Inc..

```

E3=1.69e11;
N1=0.28;
N2=0.17;
N3=0.066;
Deq=((E1*t13)/(12*(1-N12)))+((E2*t23)/(12*(1-N22)))+((E3*t33)/(12*(1-N32)));
A=p*(h4)/(20*Deq);
Ta=-(E1*t)/(2*(h2)*(1-N12));
C1=0.8373e-12;
C2=-4.4504e-12;
l0=0.6328e-6;
nc=1.0;
nf=1.5315;
ns=1.4571;
nef1=1.5171;
nef2=1.5157;
y01=1.7169e-6;
y02=1.6300e-6;
k0=2*pi/l0;
kf1=k0*sqrt(nf2-nef12);
kf2=k0*sqrt(nf2-nef22);
aAs1=k0*sqrt(nef12-ns2);
aAs2=k0*sqrt(nef22-ns2);
aAc1=k0*sqrt(nef12-nc2);
aAc2=k0*sqrt(nef22-nc2);
Bf1=-(aAc1/kf1);
Bf2=-((nf2)*aAc2)/((nc2)*kf2);
As1=cos(kf1*t)-Bf1*sin(kf1*t);
As2=cos(kf2*t)-Bf2*sin(kf2*t);

```

```

for i=1:n
x(i)=(i-1)*(-t/(n-1));
X1(i)=(cos(kf1*x(i))+Bf1*sin(kf1*x(i)))^2;
X2(i)=(cos(kf2*x(i))+Bf2*sin(kf2*x(i)))^2;
end
a1=0;
a2=0;
for j=2:2:n-1
a1=a1+X1(j);
a2=a2+X2(j);
end
b1=0;
b2=0;
for j=3:2:n-2
b1=b1+X1(j);
b2=b2+X2(j);
end
IntX1=(t/(3*(n-1)))*(X1(1)+X1(n)+4*a1+2*b1);
IntX2=(t/(3*(n-1)))*(X2(1)+X2(n)+4*a2+2*b2);
for i=1:n
y(i)=(i-1)*((W)/(n-1));
Y1(i)=exp(-(y(i)/y01)^2);
Y2(i)=exp(-(y(i)/y02)^2);
end
c1=0;
c2=0;
for j=2:2:n-1
c1=c1+Y1(j);

```

```

c2=c2+Y2(j);
end
d1=0;
d2=0;
for j=3:2:n-2
d1=d1+Y1(j);
d2=d2+Y2(j);
end
IntY1=2*((W)/(3*(n-1)))*(Y1(1)+Y1(n)+4*c1+2*d1);
IntY2=2*((W)/(3*(n-1)))*(Y2(1)+Y2(n)+4*c2+2*d2);
for i=1:m+4
for j=1:n+4
if i==2 | i==m+3 | j==2 | j==n+3 w(i,j)=0;
else w(i,j)=1e-7;
end
end
end
w(1,1)=0;w(1,n+4)=0;w(m+4,1)=0;w(m+4,n+4)=0;
for i=1:m+4
for j=1:n+4 r(i,j)=1;
end
end
for i=3:m+2
for j=3:n+2
while r(i,j)>1e-8
for i=3:m+2
for j=3:n+2

```



```

a(i,j)=A+0.4*(w(i,j-1)+w(i,j+1)+w(i-1,j)+w(i+1,j))-0.1*(w(i+1,j+1)+w(i+1,j-1)+
+w(i-1,j+1)+w(i-1,j-1))-0.05*(w(i+2,j)+w(i-2,j)+w(i,j+2)+w(i,j-2));
r(i,j)=abs(a(i,j)-w(i,j)); w(i,j)=a(i,j);
if i==3 w(1,j)=w(3,j);w(3,1)=w(3,j);
elseif j==3 w(i,1)=w(i,3);
end
if i==m+2 w(m+4,j)=w(m+2,j);w(m+2,n+4)=w(m+2,j);
elseif j==n+2 w(i,n+4)=w(i,n+2);
end
end
end
end
end
end
end
for i=m+2:-1:3
for j=n+2:-1:3
while r(i,j)>1e-10
for i=m+2:-1:3
for j=n+2:-1:3
a(i,j)=A+0.4*(w(i,j-1)+w(i,j+1)+w(i-1,j)+w(i+1,j))-0.1*(w(i+1,j+1)+w(i+1,j-1)+
+w(i-1,j+1)+w(i-1,j-1))-0.05*(w(i+2,j)+w(i-2,j)+w(i,j+2)+w(i,j-2));
r(i,j)=abs(a(i,j)-w(i,j)); w(i,j)=a(i,j);
if i==m+2 w(m+4,j)=w(m+2,j);w(m+2,n+4)=w(m+2,j);
elseif j==n+2 w(i,n+4)=w(i,n+2);
end
if i==3 w(1,j)=w(3,j);w(3,1)=w(3,j);
elseif j==3 w(i,1)=w(i,3);
end

```

```

end
end
end
end
end
Wmax=w((m+5)/2,(n+5)/2)
for i=1:m+4
for j=1:n+4
tj(i,j)=0;
end
end
for i=2:m+3
for j=2:n+3
tj(i,j)=Ta*(w(i+1,j)-2*w(i,j)+w(i-1,j))+N1*(w(i,j+1)-2*w(i,j)+w(i,j-1)));
end
end
for i=1:m+4
for j=1:n+4
tk(i,j)=0;
end
end
for i=2:m+3
for j=2:n+3
tk(i,j)=Ta*(w(i,j+1)-2*w(i,j)+w(i,j-1))+N1*(w(i+1,j)-2*w(i,j)+w(i-1,j)));
end
end
for i=1:m+4
for j=1:n+4

```

```

ni(i,j)=nf+C2*(tj(i,j)+tk(i,j));
nj(i,j)=nf+C1*tj(i,j)+C2*tk(i,j);
dni(i,j)=ni(i,j)-nf;
dnj(i,j)=nj(i,j)-nf;
dExx(i,j)=(ni(i,j)2-nf2);
dEyy(i,j)=(nj(i,j)2-nf2);
end
end
D1=(2*sqrt(pi)/(10*nf1*y01))*(1/(As12/aAs1+t+sin(2*kf1*t)/(2*kf1)+
+(Bf1/kf1)*(cos(2*kf1*t)-1)+(Bf12)*(t-sin(2*kf1*t)/(2*kf1))+1/aAc1));
D2=(2*sqrt(pi)*nef2/(10*y02*(nf4)))*(1/((As22/(aAs2*ns2))+t/nf2+sin(2*kf2*t)/(2*kf2*nf
+(Bf2/kf2*nf2)*(cos(2*kf2*t)-1)+(Bf22/nf2)*(t-sin(2*kf2*t)/(2*kf2))+1/aAc2*nc2));
g=2;
for j=1:n+4
dfTEz(j)=D1*dEyy(g,j)*IntY1*IntX1;
dfTMz(j)=D2*dExx(g,j)*IntY2*IntX2;
end
q1=0;
q2=0;
for j=3:2:n+2
q1=q1+dfTEz(j);
q2=q2+dfTMz(j);
end
u1=0;
u2=0;
for j=4:2:n+1
u1=u1+dfTEz(j);
u2=u2+dfTMz(j);

```

```

end
IdfTEz=(h/3)*(dfTEz(2)+dfTEz(n+3)+4*q1+2*u1)
IoutTE=(cos(IdfTEz/2))^2;
IdfTMz=(h/3)*(dfTMz(2)+dfTMz(n+3)+4*q2+2*u2)
IoutTM=(cos(IdfTMz/2))^2;
figure(1)
mesh(w), title('Deslocamento de uma Placa de Três Camadas'), xlabel('Comprimento
do Diafragma'),label('Largura do Diafragma'), zlabel('Deslocamento (m)')
axis('equal')
pause
figure(2)
mesh(tj),title('Variação das Componentes da Tensão ("Stress") - tj')
axis('equal')
pause
figure(3)
mesh(tk),title('Variação das Componentes da Tensão ( "Stress") - tk')
axis('equal')
pause
figure(4)
mesh(dni),title('Variação do Índice de Refração nxx')
axis('equal')
pause
figure(5)
mesh(dnj),title('Variação do Índice de Refração nyj')
axis('equal')
pause
figure(6)
mesh(dExx),title('Variação da Constante Dielétrica - Exx')

```

```

axis('equal')
pause
figure(7)
mesh(dEyy),title('Variação da Constante Dielétrica - Eyy')
axis('equal')
pause
figure(8)
j=1:n+4;
plot(j*h,dfTEz),title('Variação de Fase na Direção z - TE')
grid
pause
figure(9)
j=1:n+4;
plot(j*h,dfTMz),title('Variação de Fase na Direção z - TM')
grid
pause
figure(10)
j=1:n+4;
plot(j*h,dEyy(g,j)),title('dEyy')
grid
pause
figure(11)
j=1:n+4;
plot(j*h,dExx(g,j)),title('dExx')
grid
figure(12)
i=1:n;

```

```
plot(x(i),X1(i),x(i),X2(i)),title('Distribuição do Campo Elétrico na Direção x (modos  
TEo e TMo)')  
grid  
pause  
figure(13)  
i=1:n;  
plot(y(i),Y1(i),y(i),Y2(i)),title('Distribuição do Campo Elétrico na Direção y (modos  
TEo e TMo)')  
grid  
end
```

Apêndice D

Dedução das Eqs. (3.14) e (3.15) pelo MDF

As Eqs. (3.14) e (3.15) podem ser desenvolvidas pelo MDF a partir das seguintes aproximações:

$$\left. \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial y^2} \right|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} \simeq \frac{1}{\Delta^2} [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \quad (\text{D.1})$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 w(y, z)}{\partial z^2} \right|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} \simeq \frac{1}{\Delta^2} [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \quad (\text{D.2})$$

Deste modo pode-se reescrever as Eqs. (3.13) como:

$$\begin{aligned} \sigma_y(y_0, z_0) = & -\frac{t}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{Y_y}{\Delta^2} [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \right. \\ & \left. + \frac{Y_z \nu}{\Delta^2} [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \right\} \quad (\text{D.3}) \end{aligned}$$

e

$$\sigma_z(y_0, z_0) = -\frac{t}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{Y_z}{\Delta^2} [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \right.$$

$$+\frac{Y_y\nu}{\Delta^2} [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \} \quad (D.4)$$

Como para os materiais isotrópicos, como é o caso do vidro, Y_y e Y_z são iguais, pode-se, desta forma, reescrever as Eqs. (D.3) e (D.4), como aparecem nas Eqs. (3.14) e (3.15):

$$\begin{aligned} \sigma_y(y_0, z_0) = & -\frac{Yt}{2\Delta^2(1-\nu^2)} \{ [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \\ & +\nu [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \} \end{aligned} \quad (D.5)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_z(y_0, z_0) = & -\frac{Yt}{2\Delta^2(1-\nu^2)} \{ [w(y_0, z_0 + \Delta) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0, z_0 - \Delta)] \\ & +\nu [w(y_0 + \Delta, z_0) - 2w(y_0, z_0) + w(y_0 - \Delta, z_0)] \} \end{aligned} \quad (D.6)$$

Apêndice E

Dedução das Eqs. (3.24), (3.25) e (3.26)

As Eqs. (3.16), (3.17) e (3.21) são repetidas aqui por comodidade:

$$\left. \begin{array}{l} E_{yi}(x, y)_{TE} \\ H_{yi}(x, y)_{TM} \end{array} \right\} = F_{im}(x)F_m(y) \quad (\text{E.1})$$

$$F_{im}(x) = A_m \begin{cases} \exp(-\alpha_{1m}x), i = 1 \text{ ou } x \geq 0 \\ [\cos(k_{2m}x) + B_{2m}\text{sen}(k_{2m}x)], i = 2 \text{ ou } -t \leq x \leq 0 \\ A_{3m}\exp[\alpha_{3m}(x+t)], i = 3 \text{ ou } x \leq -t \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

$$F_m(y) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_{0m}} \right)^2 \right] \quad (\text{E.3})$$

onde $m = TE, TM$, e todas constantes numéricas α_{1m} , k_{2m} , B_{2m} , A_{3m} , α_{3m} e y_{0m} são definidas no Capítulo 3 nas Eqs. (3.18), (3.19) e (3.31).

Deseja-se desenvolver a Eq. (3.23), repetida abaixo, para se determinar a constante de normalização A_{TE} da componente de campo $E_y(x, y)_{TE}$ para o modo TE_0 (fundamental) e, por analogia, obter-se a constante de normalização, A_{TM} , para o modo TM_0 . O subscrito TE será omitido por comodidade.

$$P_{Total} = P_1 + P_2 + P_3 \quad (\text{E.4})$$

Da Eq. (3.24) pode-se escrever:

$$P_1 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} E_{y1}(x, y) H_{x1}^*(x, y) dx dy \quad (E.5)$$

Das equações de Maxwell obtém-se:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x$$

Como $\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$ e as componentes de campo na direção z são proporcionais a $\exp(-j\beta z)$, tem-se:

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \quad (E.6)$$

Deste modo pode-se escrever:

$$H_{x1}(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{y1}(x, y) = -\frac{\beta A}{\omega\mu_0} \exp(-\alpha_1 x) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]$$

Então a Eq. (E.5) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} A \exp(-\alpha_1 x) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \left\{ -\frac{\beta A}{\omega\mu_0} \exp(-\alpha_1 x) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \right\} dx dy = \\ &= \frac{\beta A^2}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] dy \int_0^{+\infty} \exp(-2\alpha_1 x) dx = \frac{\beta A^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0 \alpha_1} \quad (E.7) \end{aligned}$$

Para a região 2, utilizando-se a Eq. (E.6), pode-se escrever:

$$H_{x2}(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{y2}(x, y) = -\frac{\beta A}{\omega\mu_0} [\cos(k_2 x) + B_2 \text{sen}(k_2 x)] \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]$$

Deste modo a Eq. (3.25) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
P_2 &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-t}^0 E_{y2}(x, y) H_{x2}^*(x, y) dx dy \\
&= \frac{\beta A^2}{2\omega\mu_0} \int_{-t}^0 [\cos(k_2 x) + B_2 \text{sen}(k_2 x)]^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] dy \\
&= \frac{\beta A^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0} \left\{ t + \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} + \frac{B_2}{k_2} [\cos(2k_2 t) - 1] + B_2^2 \left[t - \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} \right] \right\} \quad (E.8)
\end{aligned}$$

Para a região 3, utilizando-se a Eq. (E.6), pode-se escrever:

$$H_{x3}(x, y) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_{y3}(x, y) = -\frac{\beta A A_3}{\omega\mu_0} \exp[\alpha_3(x+t)] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]$$

Assim a Eq. (3.26) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
P_3 &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-t} E_{y3}(x, y) H_{x3}^*(x, y) dx dy \\
&= \frac{\beta A^2 A_3^2}{2\omega\mu_0} \exp(2\alpha_3 t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] dy \int_{-\infty}^{-t} \exp(2\alpha_3 x) dx = \frac{\beta A^2 A_3^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0 \alpha_3} \quad (E.9)
\end{aligned}$$

Das Eqs. (E.7), (E.8) e (E.9) na Eq. (E.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
P_T &= \frac{\beta A^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0 \alpha_1} + \quad (E.10) \\
&+ \frac{\beta A^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0} \left\{ t + \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} + \frac{B_2}{k_2} [\cos(2k_2 t) - 1] + B_2^2 \left[t - \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} \right] \right\} + \\
&+ \frac{\beta A^2 A_3^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0 \alpha_3} \\
&= \frac{\beta A^2 y_0 \sqrt{\pi}}{4\omega\mu_0} \left\{ \frac{1}{\alpha_1} + t + \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} + \frac{B_2}{k_2} [\cos(2k_2 t) - 1] + B_2^2 \left[t - \frac{\text{sen}(2k_2 t)}{2k_2} \right] + \frac{A_3^2}{\alpha_3} \right\}
\end{aligned}$$

Para os modos TM o desenvolvimento da Eq. (3.23), do Capítulo 3, é análogo ao

anterior, lembrando-se somente que:

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} H_{y1}(x, y) E_{x1}^*(x, y) dx dy \quad (\text{E.11})$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-t}^0 H_{y2}(x, y) E_{x2}^*(x, y) dx dy \quad (\text{E.12})$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-t} H_{y3}(x, y) E_{x3}^*(x, y) dx dy \quad (\text{E.13})$$

e que, das equações de Maxwell:

$$E_x = \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 n^2} H_y \quad (\text{E.14})$$

Apêndice F

Dedução da expressão do "spot size" de uma distribuição gaussiana

A determinação do "spot size" para a distribuição gaussiana, $F(y)$, que descreve a variação das componentes de campo (elétrico para o modo TE e magnético para o modo TM) na direção y , transversal à direção de propagação no guia planar simétrico mostrado na Fig. F-1, é obtida a partir da aplicação do método do índice efetivo no guia "rib" original. Está baseada numa formulação estacionária, descrita por LEE [57], que é um método matemático para a obtenção de uma estimativa aproximada de um parâmetro escalar, no presente caso β , baseado na escolha da forma funcional aproximada de alguma quantidade relacionada com este parâmetro, no caso, a variação da componente de campo na direção y .

Parte-se, então, da equação de onda escalar, que relaciona a componente de campo com a constante de propagação, dada por:

$$\nabla^2 F(y)\exp(-j\beta z) + k^2(y)F(y)\exp(-j\beta z) = 0 \quad (\text{F.1})$$

onde:

$$k^2(y) = n^2(y)\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = n^2(y)k_0^2 \quad (\text{F.2})$$

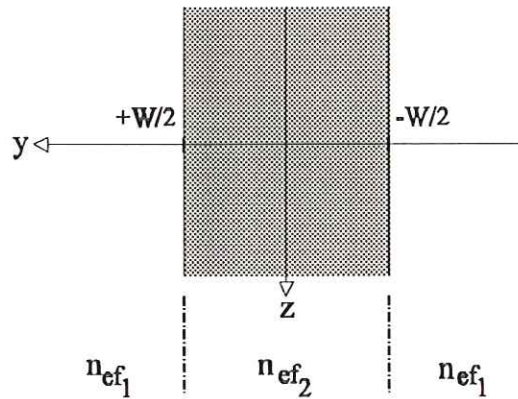


Figura F-1: Guia planar simétrico para a determinação do "spot size" de uma distribuição gaussiana.

Desta forma, vem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F(y) \exp(-j\beta z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(y) \exp(-j\beta z) + k^2(y) F(y) \exp(-j\beta z) = 0$$

o que leva a:

$$\nabla_t^2 F(y) - \beta^2 F(y) + k^2(y) F(y) = 0 \quad (\text{F.3})$$

Para o cálculo de β multiplica-se a Eq. (F.3) por $F(y)$ e faz-se a integração na seção transversal do guia da Fig. F-1:

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(y) \nabla_t^2 F(y) + k^2(y) F^2(y)] dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(y) dx dy} \quad (\text{F.4})$$

Aplicando-se o teorema de Green:

$$\int \int (\Psi \nabla_t^2 \Phi) dA = - \int \int (\nabla_t \Psi) (\nabla_t \Phi) dA$$

pode-se reescrever a Eq. (F.4) como:

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [- (\nabla_t F(y))^2 + k^2(y) F^2(y)] dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(y) dx dy} \quad (F.5)$$

Pode-se, ainda, multiplicar o numerador e o denominador do lado direito da Eq. (F.5) por y e, uma vez que não há variação em x , tem-se:

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-y \left(\frac{\partial}{\partial y} F(y) \right)^2 + y k^2(y) F^2(y) \right] dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y F^2(y) dx dy}$$

sendo:

$$F(y) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \quad (F.6)$$

onde y_0 é o "spot size"; então, vem:

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} -y \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y k^2(y) \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} y \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy} \quad (F.7)$$

Pode-se resolver cada termo da Eq. (F.7) separadamente. O primeiro termo do numerador é:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} y \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy \\ & = -2 \int_0^{+\infty} y \left\{ -\frac{y}{y_0^2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{y_0^2} \int_0^{+\infty} y \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] dy \quad (\text{F.8})$$

Fazendo-se a seguinte mudança de variável:

$$t = \frac{y}{y_0} \implies dt = \frac{dy}{y_0} \quad (\text{F.9})$$

tem-se [62]:

$$-\frac{2}{y_0^2} \int_0^{+\infty} y_0^2 t^3 \exp(-t^2) dt = -2 \int_0^{+\infty} t^3 \exp(-t^2) dt = -1$$

O segundo termo do numerador torna-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} y k^2(y) \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \right\}^2 dy \\ &= 2 \left\{ k_2^2 \int_0^{+\frac{W}{2}} y \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \right\}^2 dy + k_1^2 \int_{+\frac{W}{2}}^{+\infty} y \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] \right\}^2 dy \right\} \quad (\text{F.10}) \end{aligned}$$

As integrais da Eq. (F.10) podem ser resolvidas fazendo-se a seguinte mudança de variável:

$$t = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \implies dt = \frac{2y dy}{y_0^2} \quad (\text{F.11})$$

Da primeira tem-se:

$$\begin{aligned} & 2k_2^2 \int_0^{+\frac{W}{2}} y \exp\left[-\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right] dy = 2k_2^2 \int_0^{\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2} y \exp(-t) \frac{y_0^2}{2y} dt \\ &= \frac{2k_2^2 y_0^2}{2} \left[-\exp(-t)\right]_0^{\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2} = k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2\right] \right\} \end{aligned}$$

e da segunda:

$$\begin{aligned}
2k_1^2 \int_{+\frac{W}{2}}^{+\infty} y \exp \left[- \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] dy &= 2k_1^2 \int_{\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2}^{+\infty} y \exp(-t) \frac{y_0^2}{2y} dt = \frac{2k_1^2 y_0^2}{2} [-\exp(-t)]_{\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2}^{+\infty} \\
&= \frac{2k_1^2 y_0^2}{2} [-\exp(-t)]_{\left(\frac{W}{2y_0}\right)^2}^{+\infty} = k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

O termo do denominador da Eq. (F.7), fazendo-se a mesma mudança de variável das integrais anteriores, torna-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} y \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] \right\}^2 dy &= 2 \int_0^{+\infty} y \exp \left[- \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 \right] dy \\
&= 2 \int_0^{+\infty} y \exp(-t) \frac{y_0^2}{2y} dt = y_0^2 [-\exp(-t)]_0^{+\infty} = y_0^2
\end{aligned} \tag{F.12}$$

Finalmente a Eq.(F.4) pode ser escrita como:

$$\beta^2 = \frac{-1 + k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} + k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right]}{y_0^2}$$

O "spot size" pode ser encontrado fazendo-se [57]:

$$\frac{\partial \beta^2}{\partial y_0} = 0$$

Deste modo tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta^2}{\partial y_0} &= \frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ \frac{-1 + k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} + k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right]}{y_0^2} \right\} \\
&= \frac{1}{y_0^4} \left\{ y_0^2 \left\{ 2k_2^2 y_0 - k_2^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{2y_0} + 2y_0 \right] + k_1^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{2y_0} + 2y_0 \right] \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ -1 + k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} + k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} 2y_0 \left. \right\} \\
= & \frac{1}{y_0^4} \left\{ 2y_0^2 \left\{ k_2^2 y_0 - k_2^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{4y_0} + y_0 \right] + k_1^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{4y_0} + y_0 \right] \right\} \right. \\
& \left. - 2y_0 \left\{ -1 + k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} + k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} \right\} = 0 \\
& k_2^2 y_0^2 - k_2^2 y_0 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{4} + y_0^2 \right] + k_1^2 y_0 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{4} + y_0^2 \right] + 1 \\
& - k_2^2 y_0^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} - k_1^2 y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] = 0 \\
& - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left[\frac{W^2}{4} + y_0^2 \right] (k_2^2 - k_1^2) + y_0^2 \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] (k_2^2 - k_1^2) + 1 = 0 \\
& - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] (k_2^2 - k_1^2) \left[\frac{W^2}{4} + y_0^2 - y_0^2 \right] + 1 = 0 \\
& - \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \left(\frac{W}{2} \right)^2 (k_2^2 - k_1^2) + 1 = 0 \tag{F.13}
\end{aligned}$$

Sabendo-se que:

$$k_2^2 - k_1^2 = k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \tag{F.14}$$

e que:

$$v^2 = \left(\frac{W}{2} \right)^2 k_0^2 (n_2^2 - n_1^2) \tag{F.15}$$

tem-se:

$$\exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{v^2} \tag{F.16}$$

Então, aplicando-se o logaritmo natural em ambos os lados da Eq. (F.16), obtém-se:

$$\ln \left\{ \exp \left[- \left(\frac{W}{2y_0} \right)^2 \right] \right\} = \ln \left(\frac{1}{v^2} \right) \Rightarrow - \frac{W^2}{4y_0^2} = - \ln (v^2) \tag{F.17}$$

Portanto:

$$y_0 = \sqrt{\frac{\left(\frac{W}{2}\right)^2}{\ln(v^2)}} = \frac{W}{2} \sqrt{\frac{1}{\ln(v^2)}} \quad (\text{F.18})$$

donde conclui-se que a frequência normalizada, v , deve ser maior que 1.