Campus de São Carlos

**MÉTODOS DE CÁLCULO DE AUTOVALORES
APLICADOS AO ESTUDO DE ESTABILIDADE
A PEQUENAS PERTURBAÇÕES EM SISTEMAS
DE POTÊNCIA**

RODRIGO ANDRADE RAMOS

Orientador: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ESCOLA DE ENGENHARIA
DE SÃO CARLOS**

MÉTODOS DE CÁLCULO DE AUTOVALORES APLICADOS AO ESTUDO DE ESTABILIDADE A PEQUENAS PERTURBAÇÕES EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

Rodrigo Andrade Ramos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Newton Geraldo Bretas

São Carlos

1999

Class.	TFSE-EESC
Cutt.	14678
Tombo	241/99

S/5 1064032

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

R175m Ramos, Rodrigo Andrade
Métodos de cálculo de autovalores aplicados ao estudo de estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de potência / Rodrigo Andrade Ramos. -- São Carlos, 1999.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 1999.

Área: Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Newton Geraldo Bretas.

1. Estabilidade dinâmica. 2. Cálculo de autovalores. 3. Modelagem de máquinas síncronas.
I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **RODRIGO ANDRADE RAMOS**

Dissertação defendida e aprovada em 02-07-1999
pela Comissão Julgadora:

Prof. Titular **NEWTON GERALDO BRETAS (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

Prof. Doutor **ANTONIO CARLOS ZAMBRONI DE SOUZA**
(Escola Federal de Engenharia de Itajubá)

Prof. Doutor **GERALDO CAIXETA GUIMARÃES**
(UFU - Universidade Federal de Uberlândia)

p/ Prof. Doutor **DENIS VINICIUS COURY**
Coordenador da Área de Engenharia Elétrica

JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

*Para Alana Martins,
inesquecível.*

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pela bolsa concedida;

Ao professor Bretas, pela orientação, apoio e incentivo dados no decorrer do trabalho;

Aos companheiros do LACO, pela grande competência e pelo espírito de grupo que caracterizam este laboratório;

Aos amigos de hoje e sempre: Bilok, Trovão, Paulo Forcina, Luciano Giló, Cláudia Aquilino, Paulão Romanelli, Andressa e Luciana Mazzocco;

Ao Iván, profundo conhecedor das futilidades contemporâneas, pelos conhecimentos trocados e pela amizade firmada ao longo destes anos;

À Elaine, por tudo de bom que ficou do longo tempo que passamos juntos (deu certo sim, quem disse que não?);

Ao Julio, com a certeza de que tudo valeu a pena;

E, acima de tudo, aos meus três melhores amigos (que, por coincidência ou muita sorte, vieram a ser a minha família): Ana Paula, Maria Inês e Nivaldo.

Conteúdo

Resumo	x
Abstract	xi
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 O estudo da estabilidade de sistemas de potência	1
1.2 Objetivos e organização do trabalho	4
2 MODELO DE ESTADOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA	5
2.1 Resposta do sistema a pequenos impactos de potência	5
2.2 Equações diferenciais da máquina síncrona	6
2.2.1 Transformação de Park	6
2.2.2 Equações elétricas da máquina síncrona	8
2.2.3 Equações mecânicas da máquina síncrona	12
2.2.4 Indutâncias transitórias e constantes de tempo	13
2.2.5 Modelo de dois eixos	15
2.3 Equação diferencial do sistema de excitação	20
2.4 Equações algébricas do sistema de transmissão e das cargas . .	22
2.5 Modelo de estados do sistema de potência	23
3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES	26

3.1	Relação entre os autovalores e a resposta do sistema	26
3.2	Estabilidade da resposta	28
3.3	Autovetores à esquerda e as condições iniciais	29
3.4	Fatores de participação	32
4	MÉTODOS DE CÁLCULO DE AUTOVALORES	34
4.1	O polinômio característico	34
4.2	O algoritmo QR	35
4.3	Métodos iterativos	37
4.3.1	O método de potências	38
4.3.2	Deslocamentos	40
4.3.3	O método de iterações de potência inversa (IPI)	40
4.3.4	Subespaços invariantes	41
4.3.5	Iterações em subespaços no método de potências	42
4.3.6	Convergência das iterações de subespaço	43
4.3.7	O método de iterações de subespaço (IS)	44
5	IMPLEMENTAÇÃO DOS MÉTODOS	46
5.1	Formulação aumentada	46
5.2	Verificação da convergência	48
5.3	Deflação implícita	50
5.3.1	Deflação implícita por ortonormalização	50
5.3.2	Multiplicação por $(A - \lambda_i I)$	50
5.4	Congelamento	51
5.5	Transformação de Cayley	52
5.6	Cálculo dos autovetores	53
6	RESULTADOS OBTIDOS	55
6.1	Autovalores do sistema teste	56

	iii
6.2 Programas desenvolvidos	57
6.2.1 Técnicas de deflação	59
6.2.2 Transformação de Cayley	60
6.2.3 Abordagem em bloco versus abordagem seqüencial . .	62
7 CONCLUSÃO	65
APÊNDICE A	73
APÊNDICE B	76
APÊNDICE C	80

Lista de Figuras

2.1	Máquina síncrona de dois pólos	7
2.2	Circuito equivalente da máquina (referência abc)	9
2.3	Circuito equivalente da máquina (referência $0dq$).	11
2.4	Circuito equivalente do eixo d	12
2.5	Circuito equivalente do eixo q	13
2.6	Diagrama vetorial da condição transitória da máquina.	18
2.7	Circuito equivalente do modelo de dois eixos.	19
2.8	Circuito equivalente do sistema de excitação	21
5.1	Transformação de Cayley.	52
5.2	Transformação de Cayley semi-complexa.	53
6.1	Autovalores do sistema teste	55
6.2	Modos de resposta pouco atenuados	57
6.3	Eixo de simetria da transformação de Cayley	60
1	Diagrama unifilar do sistema teste	76

Lista de Tabelas

6.1	Modos de interesse do sistema teste	56
6.2	Resultados do programa IPIO	58
6.3	Resultados do programa IPIM	59
6.4	Resultados do programa IPCO	61
6.5	Resultados do programa IPCM	61
6.6	Resultados do programa ISO	63
6.7	Resultados do programa ISCO	63
1	Dados de barras para o sistema teste	77
2	Dados de linhas para o sistema teste	78
3	Dados de geradores e reguladores de tensão para o sistema teste	79
4	Variáveis de estado associadas aos modos de oscilação	80
5	Valores absolutos dos fatores de participação	81

Lista de abreviaturas e siglas

IPI	- Método de Iterações de Potência Inversa
IS	- Método de Iterações de Subespaços
SMA	- <i>Selective Modal Analysis</i>
MSP	- Modelo de Sensibilidade de Potência
AVR	- <i>Automatic Voltage Regulator</i>
PSS	- <i>Power System Stabilizer</i>
AESOPS	- <i>Analysis of Essentially Spontaneous Oscillations in Power Systems</i>
STEPS	- <i>Sequential Two-stage Eigenanalysis for Power Systems</i>
DPSE	- <i>Dominant Pole Spectrum Eigensolver</i>
IPIO	- Método IPI com deflação por ortonormalização
IPIM	- Método IPI com deflação através de multiplicação por $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$
IPCO	- Método IPI com transformação de Cayley e deflação por ortonormalização
IPCM	- Método IPI com transformação de Cayley e deflação através de multiplicação por $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

- ISO - Método IS com deflação por ortonormalização
- ISCO - Método IS com transformação de Cayley e deflação por ortonormalização

Lista de símbolos

λ_i	- i-ésimo autovalor de uma matriz
$\mathbf{v}_i$	- autovetor à direita associado a λ_i
$\mathbf{w}_i$	- autovetor à esquerda associado a λ_i
$\mathbf{x}$	- vetor de estados de um sistema
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$	- matrizes do modelo de estados do sistema de potência
s	- deslocamento nos métodos de potências e de subespaços
s_1, s_2	- deslocamentos nos métodos com transformação de Cayley
$\mathbf{u}_j$	- vetor obtido por um dos métodos durante o passo j
$\mathbf{u}^j$	- j-ésimo elemento do vetor $\mathbf{u}$
$\mathbf{u}^{(j)}$	- j-ésimo vetor componente de uma base
$\mathbf{u}^H$	- vetor transposto conjugado complexo do vetor $\mathbf{u}$
δ_i	- ângulo do rotor do gerador i , [rad]
ω_i	- velocidade angular do rotor do gerador i , [rad/s]
E'_{qi}	- componente da tensão transitória ao longo do eixo em quadratura do gerador i , [p.u.]
E'_{di}	- componente da tensão transitória ao longo do eixo direto do gerador i , [p.u.]
E_{fdi}	- tensão de campo do gerador i , [p.u.]

- θ_{ti} - ângulo da tensão no barramento terminal do gerador i , [rad]
- V_{ti} - módulo da tensão no barramento terminal do gerador i , [p.u.]
- θ_i - ângulo da tensão no barramento i , [rad]
- V_i - ângulo da tensão no barramento i , [p.u.]

Resumo

O objetivo deste trabalho é comparar duas metodologias distintas de cálculo de autovalores aplicadas na análise da estabilidade a pequenas perturbações em sistemas elétricos de potência. Um estudo detalhado para a determinação de um modelo para esta análise foi realizado, chegando-se a um modelo de dois eixos para o gerador e um modelo de regulador de tensão com um tempo de atraso para o sistema de excitação estático. Para aproveitar a esparsidade característica desta modelagem, o método de iterações de potência inversa (representando a abordagem seqüencial) e o método de iterações de subespaço (representando a abordagem em bloco) foram implementados. O primeiro método calcula estimativas convergentes para um autovalor em cada passo. No segundo método, estimativas para um bloco de autovalores são geradas simultaneamente. Técnicas de aceleração e pré-condicionamento foram utilizadas para aumentar a eficiência dos métodos. Ao final, uma comparação entre os resultados dos diferentes algoritmos resultantes da incorporação destas técnicas é apresentada.

Abstract

The objective of this work is to compare two distinct methodologies applied to the analysis of small-signal stability of electric power systems. A detailed study aiming the determination of a model for this analysis was done, and then the two-axis model for the generator and the voltage regulator with one time lag model for the static excitation system were chosen. To take advantage of the sparsity in this model, the inverse power iterations method (representing the sequential approach) and the subspace iterations method (representing the block approach) were implemented. The first method calculates convergent estimations for only one eigenvalue in each step. In the second method, estimations for an eigenvalue block are generated simultaneously. Acceleration and preconditioning techniques were used to improve the efficiency of these methods. In the end, a comparison among the results of the different algorithms resulting from the incorporation of these techniques is presented.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 O estudo da estabilidade de sistemas de potência

Já nos primeiros sistemas elétricos industriais, surgidos no final do século passado, os problemas de instabilidade ocorridos motivaram uma intensa pesquisa sobre a estabilidade em sistemas de potência.

No início da pesquisa, um modelo de gerador constituído por uma fonte de tensão em série com uma reatância (conhecido atualmente como **modelo clássico**) era utilizado. Duas abordagens dividiam esta pesquisa. Uma delas tratava do sistema sujeito a perturbações de grande magnitude (perda de uma linha de transmissão, por exemplo), e era chamada de estudo de **Estabilidade Transitória**. A outra analisava as variações ocorridas durante a operação normal do sistema, buscando essencialmente definir limites para a operação do mesmo, e sendo denominada estudo de **Estabilidade de Regime Permanente**. As instabilidades então verificadas caracterizavam-se por um crescimento constante de ângulos dos geradores, e manifestavam-se já na primeira oscilação dos rotores.

O desenvolvimento industrial, em meados da década de 1950, impulsionou a interligação dos sistemas elétricos. Essa operação interligada passou então a exibir comportamentos bastante diferentes dos observados nos sistemas primordiais. Foram relatados casos de instabilidade ocorridos após várias oscilações do rotor.

A classificação dos estudos de estabilidade foi então reestruturada, passando a estabilidade transitória a tratar de problemas referentes apenas aos primeiros segundos após a ocorrência de uma perturbação severa, nos quais os elementos de dinâmica lenta podem ser omitidos. A análise de períodos mais longos (da ordem de minutos ou até horas) depois de um distúrbio no sistema passou a ser chamada de estudo de **Estabilidade Dinâmica**.

Os sistemas de controle de excitação começaram então a ser incluídos na modelagem dos sistemas de potência, e estudados mais detalhadamente. DEMELLO & CONCORDIA (1969) mostraram que o uso do regulador automático de tensão, apesar de melhorar a estabilidade de regime permanente, tem um efeito contrário em relação à estabilidade dinâmica. Demonstraram, então, a necessidade da inclusão de um sinal estabilizante, proporcional à frequência da máquina, fornecido por um dispositivo conhecido atualmente como Estabilizador de Sistema de Potência, ou PSS (*Power System Stabilizer*).

Após a disseminação do uso dos reguladores de tensão, as oscilações de baixa frequência surgidas nos sistemas interligados tornaram-se um dos principais focos de atenção para os pesquisadores da área de estabilidade. Com os sistemas operando próximos a condições críticas, essas oscilações aparecem mesmo em função de pequenas perturbações, tais como as variações normais diárias de carga.

Quando o sistema é submetido a uma pequena perturbação, podem-se linearizar as equações que o descrevem em torno de um estado quiescente para analisar seu comportamento, e esta análise é denominada estudo de **Estabilidade a Pequenas Perturbações** ou de **Estabilidade a Pequenos**

Sinais. O uso da modelagem linearizada torna a análise muito mais simples e fornece, neste caso, resultados condizentes com a prática.

O espaço de estados resultante dessa linearização é composto por um conjunto de equações do tipo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Os autovalores e autovetores desta representação de estados contêm informações sobre os modos de oscilação estáveis e instáveis do sistema. Calculá-los, entretanto, não é uma tarefa trivial, devido à grande dimensão das matrizes no modelo (1.1). Por esta razão, PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982) e PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982b) elaboraram um método para a obtenção de um modelo reduzido que preserva as dinâmicas de interesse do sistema original, chamado de **Análise Modal Seletiva**.

Como as matrizes do modelo (1.1) são altamente esparsas, a pesquisa tem caminhado no sentido de desenvolver algoritmos eficientes de cálculo de autovalores que permitam explorar esta esparsidade. O algoritmo **AE-SOPS** (*Analysis of Essentially Spontaneous Oscillations in Power Systems*) [BYERLY ET AL. (1979b)] foi um dos pioneiros nesta área, calculando os modos dominantes de oscilação dos rotores com uma abordagem no domínio da frequência.

Posteriormente, novas metodologias foram propostas enfocando o cálculo de um conjunto de autovalores de interesse, relacionados aos modos de oscilação pouco atenuados do sistema. O método de **Iterações de Potência Inversa (IPI)** foi utilizado por MARTINS (1986) para o cálculo destes autovalores. SEMLYEN & WANG (1988) apresentaram um programa chamado **STEPS** (*Sequential Two-stage Eigenanalysis for Power Systems*), que realizava o mesmo cálculo utilizando o algoritmo QR para a obtenção de estimativas iniciais dos autovalores, e refinando posteriormente estas estimativas através do método de Newton.

Mais recentemente, ANGELIDIS & SEMLYEN (1996) desenvolveram novas metodologias baseadas no algoritmo de potência inversa e no algoritmo de Iterações de Subespaço (IS), e MARTINS (1997) desenvolveu um programa chamado DPSE (*Dominant Pole-Spectrum Eigensolver*) para calcular os pólos dominantes de funções de transferência em malha fechada de ordem elevada, aplicando-o ao cálculo de autovalores em sistemas de potência.

1.2 Objetivos e organização do trabalho

Este trabalho pretende realizar uma comparação entre as abordagens sequencial (usada no método IPI) e em bloco (usada no método IS) para o cálculo de autovalores, aplicadas ao estudo de estabilidade a pequenas perturbações em sistemas elétricos de potência.

O capítulo 2 apresenta um resumo dos estudos realizados com o intuito de determinar uma modelagem adequada para a análise da estabilidade a pequenas perturbações. Depois de apresentada a modelagem do sistema na forma de um sistema linear invariante no tempo, alguns conceitos fundamentais sobre a estabilidade deste tipo de sistema são lembrados no capítulo 3.

O capítulo 4 apresenta o embasamento matemático dos principais métodos de cálculo de autovalores existentes, e justifica a escolha de implementação dos métodos IPI e IS feita neste trabalho. No capítulo 5, aspectos práticos da implementação e técnicas para aumentar a eficiência dos dois métodos são descritos e discutidos. Os resultados obtidos com os programas implementados e a comparação das duas abordagens são dados no capítulo 6, e o capítulo 7 traz as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

MODELO DE ESTADOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA

Este capítulo apresenta o modelo de estados utilizado neste trabalho, explicando a origem e o significado de cada uma de suas equações. Todas as equações apresentadas estão em p.u.

2.1 Resposta do sistema a pequenos impactos de potência

Se um sistema de potência for perturbado, poderá adquirir um novo estado operativo. Caso esta perturbação seja pequena, o novo estado não deverá diferir apreciavelmente do inicial, ou seja, a operação do sistema permanecerá na vizinhança de um determinado estado quiescente. Por este motivo, podemos descrever o comportamento do sistema (não-linear) de potência nesta faixa de operação por um conjunto de equações linearizadas.

Admitindo pequenas variações nos valores das variáveis de estado (tais como ângulos, velocidades angulares e tensões), podemos obter uma expansão de Taylor das equações do sistema e desprezar os termos de maior ordem para

obter um conjunto de equações lineares do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.1)$$

composto pelas equações dinâmicas que descrevem o comportamento das máquinas síncronas do sistema. Este conjunto de equações é chamado de **modelo de estados** do sistema, e sua resposta mostrará o comportamento deste sistema após a perturbação.

2.2 Equações diferenciais da máquina síncrona

A estabilidade de um sistema de potência está intimamente ligada com o comportamento dinâmico das máquinas síncronas que o compõem. Nesta seção, são apresentadas as equações utilizadas neste trabalho para a modelagem das máquinas.

2.2.1 Transformação de Park

Por simplicidade, considera-se inicialmente uma máquina de dois pólos salientes com três enrolamentos no estator, correspondentes às fases a , b e c , e um enrolamento de campo. O efeito do enrolamento amortecedor será modelado por dois enrolamentos equivalentes, sendo que no primeiro o eixo magnético é paralelo ao do enrolamento de campo e no segundo este eixo está defasado de 90° em relação ao do enrolamento de campo (admitindo como positivo o sentido de rotação da máquina). A figura 2.1 mostra uma representação desta máquina.

Quando adotamos uma referência estacionária para medir as grandezas relacionadas aos enrolamentos do estator, estas grandezas apresentam uma variação no tempo, devido ao movimento do rotor. Se tomarmos, por exemplo, o eixo magnético da fase a como referência, as tensões, correntes e indutâncias próprias e mútuas do estator serão funções do ângulo θ , como mostrado na figura 2.1.

Figura 2.1: Máquina síncrona de dois pólos

Uma grande simplificação é obtida se adotamos uma referência girante que acompanha o movimento do rotor, criando para o estator novas variáveis que são independentes do tempo. Isso pode ser feito com uma mudança de variáveis chamada **Transformação de Park**.

A Transformação de Park é definida por

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

sendo i_a , i_b e i_c as correntes nos enrolamentos das fases a , b e c , respectivamente, e a matriz $\mathbf{P}$ dada por

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo θ o ângulo mostrado na figura 2.1. Esta transformação é também usada em ANDERSON & FOUAD (1994) e é diferente da transformação originalmente introduzida por Park, tendo sido escolhida pela característica de ortogonalidade, que proporciona invariância de potência.

Com a Transformação de Park criam-se três novas correntes i_0 , i_d e i_q , sendo que i_d corresponde à “projeção” das correntes de fase ao longo de um eixo paralelo ao eixo magnético do enrolamento de campo, chamado de **eixo direto**, e i_q corresponde a essa mesma “projeção” ao longo de um eixo atrasado de 90° deste último, chamado de **eixo em quadratura**. A variável i_0 é uma corrente estacionária, proporcional à corrente de sequência zero. É como se os enrolamentos a , b e c do estator fossem substituídos por dois enrolamentos fictícios nos eixos d e q , e as correntes i_0 , i_d e i_q seriam as correntes que, circulando nestes enrolamentos fictícios, produziriam o mesmo efeito das correntes i_a , i_b e i_c .

Pode-se fazer o mesmo com tensões e fluxos concatenados, definindo-se três circuitos equivalentes para o estator, chamados de circuito de **sequência zero**, circuito de **eixo direto** e circuito de **eixo em quadratura**.

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

As variáveis v_0 , λ_0 , v_d , λ_d , v_q e λ_q representam as tensões e os fluxos concatenados equivalentes nestes circuitos, respectivamente.

2.2.2 Equações elétricas da máquina síncrona

O comportamento das grandezas elétricas da máquina mostrada na figura 2.1 pode ser descrito em termos do circuito equivalente da figura 2.2, onde as indutâncias mútuas foram omitidas para preservar a clareza do desenho.

Figura 2.2: Circuito equivalente da máquina (referência abc)

Para este circuito, podemos escrever a equação matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abc} \\ \mathbf{v}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{abc} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sendo $\mathbf{v}_{abc}$, $\mathbf{i}_{abc}$ e λ_{abc} vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nas fases a , b e c , respectivamente, $\mathbf{v}_{FDQ}$, $\mathbf{i}_{FDQ}$ e λ_{FDQ} vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nos circuitos F , D e Q , respectivamente, $\mathbf{R}_{abc}$ e $\mathbf{R}_{FDQ}$ matrizes diagonais com as resistências dos circuitos a , b , c , F , D e Q , respectivamente, e $\mathbf{v}_n$ um vetor com a tensão de neutro. A eq. (2.5) é bastante complicada, devido à presença de indutâncias variantes no tempo nos termos $\dot{\lambda}$. Aplicando a transformação de Park na eq. (2.5),

podemos simplificá-la, obtendo [ANDERSON & FOUAD (1994)]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{0dq} \\ \mathbf{v}_{FDQ} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0dq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0dq} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{0dq} \\ \dot{\lambda}_{FDQ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\lambda_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{0dq} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

sendo $\mathbf{R}_{0dq}$ uma matriz diagonal com as resistências equivalentes e $\mathbf{v}_{0dq}$, $\mathbf{i}_{0dq}$ e λ_{0dq} vetores com as tensões, correntes e fluxos concatenados nos enrolamentos fictícios 0, d e q , respectivamente.

Se admitimos condições balanceadas, a eq. (2.6) pode ser escrita sem a equação de seqüência zero (esta equação é desacoplada das demais, e pode ser resolvida separadamente no caso de condições não balanceadas).

Como as indutâncias são agora constantes, podemos escrever os termos $\dot{\lambda}$ em função das correntes. Rearranjando as equações, obtêm-se um bloco para as equações de eixo direto e outro para as de eixo em quadratura:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ -v_F \\ v_D = 0 \\ v_q \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & \omega L_q & \omega k M_q \\ 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_D & 0 & 0 \\ -\omega L_d & -\omega k M_F & -\omega k M_D & r_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_F \\ i_D \\ i_q \\ i_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_d & k M_F & k M_D & 0 & 0 \\ k M_F & L_F & M_R & 0 & 0 \\ k M_D & M_R & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_q & k M_Q \\ 0 & 0 & 0 & k M_Q & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo v_i , i_i , r_i e L_i a tensão, corrente, resistência e indutância própria do enrolamento i , M_F a indutância mútua entre os enrolamentos F e d , M_D a indutância mútua entre os enrolamentos D e d , M_Q a indutância mútua entre os enrolamentos Q e q e ω a velocidade angular do rotor.

Esta equação pode ser representada por um circuito equivalente, mostrado na figura 2.3. Comparando este circuito com o da figura 2.2, vemos que a transformação de Park possibilita uma nova representação na qual os circuitos do estator (d e q) são desacoplados.

Figura 2.3: Circuito equivalente da máquina (referência 0dq).

Com uma escolha adequada dos valores de base para a máquina, as indutâncias mútuas do circuito da figura 2.3 podem, em p.u., ser modeladas através de um circuito T, e dessa forma chega-se a uma nova representação composta por apenas dois circuitos equivalentes (mostrados nas figuras 2.4 e 2.5).

Figura 2.4: Circuito equivalente do eixo d.

2.2.3 Equações mecânicas da máquina síncrona

Resta agora relacionar o balanço de potência na máquina com a variação de sua velocidade angular para obter a modelagem final. Escrevendo a potência de saída das máquinas nas variáveis d e q , obteremos para o caso balanceado [ANDERSON & FOUAD (1994)]

$$T_e = \lambda_d i_q - \lambda_q i_d \quad (2.8)$$

sendo T_e o torque elétrico resultante da transferência de potência através do entreferro do gerador. Escrevendo os fluxos em termos de correntes (através das respectivas indutâncias), a eq. (2.8) torna-se [ANDERSON & FOUAD (1994)]

$$T_e = L_d i_q i_d + k M_F i_q i_F + k M_D i_q i_D - L_q i_d i_q - k M_Q i_d i_Q \quad (2.9)$$

Substituindo este termo na equação de oscilação

$$2H\omega_B \frac{d\omega}{dt} = T_m - T_e - T_d \quad (2.10)$$

Figura 2.5: Circuito equivalente do eixo q.

sendo H a constante de inércia da máquina, ω_B a velocidade síncrona, T_m o torque mecânico exercido no rotor e T_d um torque de amortecimento, obtemos

$$3\tau_j \dot{\omega} = 3T_m + L_d i_q i_d + kM_F i_q i_F + kM_D i_q i_D - L_q i_d i_q - kM_Q i_d i_Q - D\omega \quad (2.11)$$

na qual $\tau_j = 2H\omega_b$, D é uma constante de amortecimento [IEEE (1999)], e a constante 3 aparece devido à base de potência ser diferente nas eq. (2.9) e (2.10). A equação de ângulo

$$\dot{\delta} = \omega - 1 \quad (2.12)$$

na qual δ é o ângulo do eixo q em relação à referência estacionária, juntamente com as eq. (2.7) e (2.11), compõe um modelo de espaço de estados para a máquina síncrona da figura 2.1.

2.2.4 Indutâncias transitórias e constantes de tempo

As eq. (2.7), (2.11) e (2.12) fornecem um modelo bastante complexo para uma máquina síncrona. Entretanto, a obtenção de alguns de seus parâmetros

(particularmente as indutâncias dos circuitos) através de testes ou experimentos é bastante complicada. Nesta seção, parâmetros com um significado físico mais importante (caracterizando melhor a máquina) são apresentados. As hipóteses feitas para a obtenção destes parâmetros são coerentes com as que serão feitas na construção do modelo. Em particular, será admitido que a máquina em questão é de rotor cilíndrico e portanto não possui enrolamentos amortecedores. No entanto, será admitida a existência de um circuito amortecedor equivalente no eixo em quadratura para modelar as correntes de Foucault através das lâminas do rotor.

Se aplicamos instantaneamente ao estator tensões trifásicas balanceadas de forma que o eixo do campo magnético produzido por estas coincida com o eixo direto, podemos medir a indutância vista pelo circuito de eixo direto durante o período transitório. Como o fluxo no enrolamento de campo não pode variar instantaneamente após a aplicação das tensões, temos

$$\lambda_F = 0 = kM_F i_d + L_F i_F \Rightarrow i_F = -\frac{kM_F}{L_F} i_d \quad (2.13)$$

$$\lambda_d = L_d i_d + kM_F i_F \Rightarrow \lambda_d = \left[L_d - \frac{(kM_F)^2}{L_F} \right] i_d \quad (2.14)$$

e, com isso, definimos a **indutância transitória de eixo direto** por

$$L'_d = L_d - \frac{(kM_F)^2}{L_F} \quad (2.15)$$

Se deslocamos a fase das tensões aplicadas de 90° , podemos fazer uma análise similar no eixo em quadratura e definir a **indutância transitória de eixo em quadratura** por

$$L'_q = L_q - \frac{(kM_Q)^2}{L_Q} \quad (2.16)$$

Outros parâmetros importantes para o modelo seguinte são as constantes de tempo τ'_{do} e τ'_{qo} . Com o estator em aberto, aplicamos uma força eletromotriz ao enrolamento de campo, e este irá então exibir um comportamento dinâmico dado por

$$r_F i_F + L_F \dot{i}_F = V_F u(t) \quad (2.17)$$

sendo $u(t)$ a função degrau unitário. Medindo então a taxa de decaimento da corrente de campo, obtemos a **constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo direto**, dada por

$$\tau'_{do} = \frac{L_F}{r_F} \quad (2.18)$$

Novamente, uma análise similar no circuito do eixo em quadratura irá fornecer a **constante de tempo de circuito aberto transitória de eixo em quadratura**

$$\tau'_{qo} = \frac{L_Q}{r_Q} \quad (2.19)$$

2.2.5 Modelo de dois eixos

Além da dificuldade com relação aos parâmetros, o modelo dado pelas eq. (2.7), (2.11) e (2.12) possui um número relativamente grande de equações diferenciais. Dependendo da aplicação a que o modelo se destina, podem ser feitas simplificações para reduzir a complexidade do mesmo. Por essa razão, adotou-se neste trabalho uma modelagem simplificada adequada ao estudo de estabilidade a pequenas perturbações, chamada de **modelo de dois eixos**.

Este modelo despreza os efeitos subtransitórios e leva em conta apenas os efeitos transitórios decorrentes de uma perturbação [PRABASHANKAR & JANISCHEWSYJ (1968)]. Nele, o rotor é admitido como cilíndrico e modelado por dois circuitos: o circuito de campo no eixo d e um circuito equivalente no eixo q formado através das lâminas do mesmo. Além disso, os termos $\dot{\lambda}_d$ e $\dot{\lambda}_q$ são desprezados, por serem pequenos em comparação com as tensões rotacionais, reduzindo dessa forma a ordem do modelo. Para tornar o modelo linear, é também admitido que $\omega \simeq \omega_R = 1p.u.$ Nesta seção, um diagrama vetorial da condição transitória da máquina é construído e a partir dele é obtido um modelo de circuito para esta condição.

Quando a variação da corrente de campo é lenta (comparada com as constantes de tempo transitórias), esta pode ser considerada constante e

com isso definimos as forças eletromotrizes equivalentes E_d e E_q por

$$\begin{aligned}\sqrt{3}E_q &= \omega k M_F i_F \\ \sqrt{3}E_d &= \omega k M_Q i_Q\end{aligned}\quad (2.20)$$

Se decompos a tensão terminal V em duas parcelas V_d e V_q (“projeções” nos eixos d e q , respectivamente), podemos relacioná-las a E_d e E_q por [KIMBARK (1956)]

$$V_d = E_d - rI_d - x_d I_d \quad (2.21)$$

$$V_q = E_q - rI_q - x_q I_q \quad (2.22)$$

Se consideramos agora uma variação mais rápida da corrente de campo, definimos outras duas forças eletromotrizes, E'_d e E'_q , admitindo que o fluxo concatenado no enrolamento de campo permanece constante.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}E'_q &= \omega k M_F \frac{\lambda_F}{L_F} \\ \sqrt{3}E'_d &= \omega k M_Q \frac{\lambda_Q}{L_Q}\end{aligned}\quad (2.23)$$

A diferença entre E_q e E'_q é, então,

$$\sqrt{3}(E_q - E'_q) = \omega k M_F i_F - \omega k M_F \frac{\lambda_F}{L_F} \quad (2.24)$$

Lembrando que

$$\lambda_F = L_F i_F + k M_F i_d \quad (2.25)$$

pode-se obter

$$E'_q - x'_d I_d = E_q - x_d I_d \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.22), obtemos

$$E'_q = V_q + rI_q + x'_d I_d \quad (2.27)$$

Para poder representar este modelo de máquina através de um circuito equivalente definem-se, então,

$$E'_d = V_d + r I_d + x'_d I_q \quad (2.28)$$

e

$$\vec{E}' = E'_d + (x'_q - x'_d) I_q + j E'_q \quad (2.29)$$

Notando-se que, no rotor cilíndrico, as reatâncias x'_q e x'_d são praticamente iguais, pode-se ver que

$$\vec{E}' \approx E'_d + j E'_q \quad (2.30)$$

Definindo as tensões

$$\vec{E} = E_d + j E_q \quad (2.31)$$

$$\vec{V} = V_d + j V_q \quad (2.32)$$

e a corrente

$$\vec{I} = I_d + j I_q \quad (2.33)$$

podemos, a partir das eq. (2.22), (2.21), (2.28) a (2.29) e (2.31) a (2.33), construir o diagrama vetorial da figura 2.6.

Olhando para (2.30), pode-se considerar $\vec{E}' = E'_d + j E'_q$ e, com isso, obtem-se o modelo de circuito da figura 2.7.

Definindo agora a tensão E_{FD} (equivalente no estator a uma tensão v_F aplicada no enrolamento de campo) por

$$\sqrt{3} E_{FD} = \omega_R \frac{k M_F v_F}{r_F} \quad (2.34)$$

e utilizando a equação de tensão no enrolamento de campo

$$r_F i_F + \dot{\lambda}_F = v_F \quad (2.35)$$

Figura 2.6: Diagrama vetorial da condição transitória da máquina.

podemos obter a primeira equação diferencial do modelo de dois eixos [ANDERSON & FOUAD (1994)]:

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{\tau'_{do}} [E_{FD} - E'_q - (x_d - x'_d)I_d] \quad (2.36)$$

Análise semelhante pode ser feita no circuito equivalente Q, partindo da equação

$$r_Q i_Q + \dot{\lambda}_Q = 0 \quad (2.37)$$

e obtendo

$$\dot{E}'_d = \frac{1}{\tau'_{qo}} [-E'_d - (x_q - x'_q)I_q] \quad (2.38)$$

Partindo de (2.8) e substituindo os fluxos de acordo com o equacionamento anterior, tem-se

$$T_e = E'_d I_d + E'_q I_q - (L'_q - L'_d) I_d I_q \quad (2.39)$$

e, dessa forma, a equação diferencial para a variação da velocidade angular neste modelo é

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau_j} [T_m - D\omega - E'_d I_d - E'_q I_q + (L'_q - L'_d) I_d I_q] \quad (2.40)$$

Figura 2.7: Circuito equivalente do modelo de dois eixos.

Para o estudo da estabilidade a pequenas perturbações é conveniente reescrever esta equação em termos das potências elétrica e mecânica no gerador (que, em p.u., são iguais aos respectivos torques).

Ignorando as perdas ôhmicas, as potências ativa (P_g) e reativa (Q_g) injetadas na barra terminal do gerador podem ser escritas como [DECKMANN & DA COSTA (1994)]:

$$P_g = \left[\frac{V_t E'_q \sin(\delta - \theta_t)}{x'_d} \right] - \left[\frac{E'_d V_t \cos(\delta - \theta_t)}{x'_q} \right] + \frac{V_t^2}{2} \sin 2(\delta - \theta_t) \left[\frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x'_d} \right] \quad (2.41)$$

$$Q_g = \left[\frac{V_t E'_q \cos(\delta - \theta_t)}{x'_d} \right] + \left[\frac{E'_d V_t \sin(\delta - \theta_t)}{x'_q} \right] - \frac{V_t^2}{x'_d} - \frac{V_t^2}{2} [1 - \cos 2(\delta - \theta_t)] \left[\frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x'_d} \right] \quad (2.42)$$

sendo θ_t o ângulo da tensão na barra terminal do gerador em relação à referência do fluxo de carga.

Dessa forma, a eq. (2.40), agora expressa em termos de potência, torna-se

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\tau_j} [P_m - D\omega - P_g] \quad (2.43)$$

com P_g dado por (2.41) e P_m numericamente igual a T_m (em p.u.).

A equação de ângulo

$$\dot{\delta} = \omega - 1 \quad (2.44)$$

completa o modelo de dois eixos. Temos, então, um modelo de ordem quatro adequado para o estudo de estabilidade a pequenas perturbações.

2.3 Equação diferencial do sistema de excitação

Numa unidade geradora, o sistema de excitação é responsável pelo suprimento de corrente contínua ao circuito de campo. Este sistema atua como um controlador, medindo a tensão terminal, comparando-a com um valor pré-determinado e alterando a corrente de campo de modo a manter a tensão terminal constante. Por esta razão, este sistema é comumente denominado **Regulador Automático de Tensão** (ou AVR, do inglês *Automatic Voltage Regulator*).

O uso dos reguladores de tensão ajuda a melhorar a estabilidade do ponto de operação do sistema de potência. No entanto, em condições transitórias estes reguladores reduzem a margem de estabilidade, sendo necessário um sinal adicional, proporcional à frequência da máquina, para estabilizar o sistema [DEMELLO & CONCORDIA (1969)]. O dispositivo que fornece este sinal é chamado de **Estabilizador de Sistema de Potência** (ou PSS, de *Power System Stabilizer*).

Por questão de simplicidade, optou-se por não incluir o PSS e utilizar um regulador de tensão similar ao encontrado em DECKMANN & DA COSTA (1994), modelado por uma função de transferência de primeira ordem. A figura 2.8 mostra um circuito equivalente para este regulador [KUNDUR (1993)]. A partir deste circuito, podemos escrever

$$V_r - V_t = R_e I_e + \dot{\psi}_e \quad (2.45)$$

Figura 2.8: Circuito equivalente do sistema de excitação

na qual V_r é uma tensão de referência (a qual se deseja manter constante no barramento terminal), V_t é a tensão terminal medida e R_e , I_e e ψ_e são a resistência, a corrente e o fluxo no circuito de campo da excitatriz, respectivamente.

Desprezando as perdas magnéticas, podemos dizer que a tensão de saída do regulador E_{fd} varia com o fluxo ψ_e de acordo com [KUNDUR (1993)]:

$$E_{fd} = K_x \psi_e \quad (2.46)$$

A corrente I_e é, por sua vez, uma função não-linear da tensão de saída E_{fd} . Desprezando efeitos de saturação, podemos linearizar a equação que descreve I_e em função de E_{fd} e, com isso, reescrever a eq. (2.45) da seguinte maneira:

$$\dot{E}_{fd} = \frac{1}{\tau_e} [K_e (V_r - V_t) - E_{fd}] \quad (2.47)$$

O modelo de estados para uma unidade geradora utilizado neste trabalho é formado pelas quatro equações diferenciais do modelo de dois eixos, juntamente com a eq. (2.47).

2.4 Equações algébricas do sistema de transmissão e das cargas

Num sistema de potência, as variações transitórias que ocorrem nas grandezas da rede de transmissão são muito mais rápidas que as que acontecem nas máquinas síncronas. Por isso, podemos modelar esta rede como um circuito passivo, obtendo equações algébricas para descrever seu comportamento.

Por outro lado, o comportamento dinâmico das cargas é bastante complicado, devido a um grande número de elementos não-lineares presentes nas mesmas. A modelagem dessas cargas é um assunto que vem sendo muito discutido nos últimos anos. Neste trabalho, porém, será utilizado um modelo de impedância constante para evitar o aumento da complexidade da modelagem de estados do sistema (e por não haver informações suficientes que permitam uma modelagem melhor).

Dessa forma, a rede de transmissão e as cargas podem ser descritas por um conjunto de equações de balanço de potência ativa e reativa em cada uma das barras do sistema. As equações para a barra k são:

$$P_{gk} - \sum_{i \in k} P_{tki} - P_{ck} = 0 \quad (2.48)$$

$$Q_{gk} - \sum_{i \in k} Q_{tki} - Q_{ck} = 0 \quad (2.49)$$

nas quais P_g e Q_g são dados pelas eq. (2.41) e (2.42), respectivamente, e $\sum_{i \in k} P_{tki}$ e $\sum_{i \in k} Q_{tki}$ denotam as somatórias das potências ativas e reativas, respectivamente, transmitidas pela barra k a todas as barras conectadas a ela. Desprezando as perdas ativas, estas potências são dadas por

$$P_{tki} = \frac{V_k V_i \sin(\theta_k - \theta_i)}{x_{ki}} \quad (2.50)$$

$$Q_{tki} = \frac{V_k^2 - V_k V_i \cos(\theta_k - \theta_i)}{x_{ki}} \quad (2.51)$$

sendo V_k , V_i , θ_k e θ_i as tensões e os ângulos nas barras k e i , respectivamente, e x_{ki} a reatância conectando as barras k e i . Por fim, as potências

das cargas são equacionadas da seguinte forma:

$$P_{ck} = P_{0k} V_k^2 \quad (2.52)$$

$$Q_{ck} = Q_{0k} V_k^2 \quad (2.53)$$

Linearizando-se as equações (2.48) e (2.49) (ver apêndice A), chega-se a uma equação matricial que descreve o comportamento do sistema de transmissão e das cargas. Esta equação tem a forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}' \mathbf{V} \quad (2.54)$$

na qual $\mathbf{S}$ é um vetor com as potências ativa e reativa injetadas em cada uma das barras do sistema, $\mathbf{V}$ um vetor com as tensões e ângulos em cada um destes barramentos e $\mathbf{J}'$ é a matriz jacobiana do fluxo de carga do sistema, já com as parcelas referentes às cargas incluídas em seus elementos diagonais.

2.5 Modelo de estados do sistema de potência

As equações desenvolvidas nas seções anteriores fornecem um modelo não-linear para um sistema elétrico de potência. Para cada unidade geradora tem-se um conjunto de equações do tipo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{V}_k) \\ 0 &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{V}_k) \end{aligned} \quad (2.55)$$

composto pelas eq. (2.44), (2.43), (2.36), (2.38), (2.47) e (2.54), sendo $\mathbf{x}_k$ as variáveis de estado e $\mathbf{V}_k$ as tensões (fasoriais) terminais.

A linearização do conjunto anterior fornece, para cada gerador k , o siste-

ma de equações

$$\Delta \dot{\delta}_k = \omega_0 \Delta \omega_k \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\omega}_k = & -\frac{A1_{gk}}{M_k} \Delta \delta_k - \frac{D_k}{M_k} \Delta \omega_k - \frac{A2_{gk}}{M_k} \Delta E'_{qk} - \frac{A4_{gk}}{M_k} \Delta E'_{dk} \\ & + \frac{A1_{gk}}{M_k} \Delta \theta_k - \frac{A3_{gk}}{M_k} \Delta V_k \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{E}'_{qk} = & -\frac{K_{ak}}{\tau'_{dok}} \Delta \delta_k - \frac{x_{dk}}{x'_{dk} \tau'_{dok}} \Delta E'_{qk} + \frac{1}{\tau'_{dok}} \Delta E_{fdk} + \frac{K_{ak}}{\tau'_{dok}} \Delta \theta_k \\ & + \frac{K_{vk}}{\tau'_{dok}} \Delta V_k \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\Delta \dot{E}'_{dk} = \frac{K'_{ak}}{\tau'_{qok}} \Delta \delta_k - \frac{x_{qk}}{x'_{qk} \tau'_{qok}} \Delta E'_{dk} - \frac{K'_{ak}}{\tau'_{qok}} \Delta \theta_k + \frac{K'_{vk}}{\tau'_{qok}} \Delta V_k \quad (2.59)$$

$$\Delta \dot{E}_{fdk} = -\frac{1}{\tau_{ek}} \Delta E_{fdk} - \frac{K_{ek}}{\tau_{ek}} \Delta V_k \quad (2.60)$$

no qual as variáveis $\Delta \delta_k$, $\Delta \omega_k$, $\Delta E'_{qk}$, $\Delta E'_{dk}$, ΔE_{fdk} , $\Delta \theta_k$ e ΔV_k representam incrementos em torno de um ponto de operação fixo. A linearização fornece também, para cada barra de geração j ; as equações

$$\begin{aligned} 0 = & A1_{gj} \Delta \delta_j + A2_{gj} \Delta E'_{qj} + A4_{gj} \Delta E'_{dj} \\ & + (-A1_{gj} - \sum_{i \in j} A1_{tji}) \Delta \theta_j + (A3_{gj} - A1_{cj} - \sum_{i \in j} A3_{tji}) \Delta V_j \\ & + \sum_{i \in j} A1_{tji} \Delta \theta_i + \sum_{i \in j} -A2_{tji} \Delta V_i \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} 0 = & R1_{gj} \Delta \delta_j + R2_{gj} \Delta E'_{qj} + R4_{gj} \Delta E'_{dj} \\ & + (-R1_{gj} - \sum_{i \in j} R1_{tji}) \Delta \theta_j + (R3_{gj} - R1_{cj} - \sum_{i \in j} R3_{tji}) \Delta V_j \\ & + \sum_{i \in j} R1_{tji} \Delta \theta_i + \sum_{i \in j} -R2_{tji} \Delta V_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

Por fim, em cada barra de carga l , as equações obtidas serão

$$\begin{aligned} 0 = & (-A1_{gl} - \sum_{i \in l} A1_{tli}) \Delta \theta_l + (A3_{gl} - A1_{cl} - \sum_{i \in l} A3_{tli}) \Delta V_l \\ & + \sum_{i \in l} A1_{tli} \Delta \theta_i + \sum_{i \in l} -A2_{tli} \Delta V_i \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} 0 = & (-R1_{gl} - \sum_{i \in l} R1_{tli}) \Delta \theta_l + (R3_{gl} - R1_{cl} - \sum_{i \in l} R3_{tli}) \Delta V_l \\ & + \sum_{i \in l} R1_{tli} \Delta \theta_i + \sum_{i \in l} -R2_{tli} \Delta V_i \end{aligned} \quad (2.64)$$

Nas equações anteriores, a notação $\sum_{i \in k}$ indica a somatória dos termos referentes a todas as barras i que estão conectadas à barra ou ao gerador k . Todos os novos parâmetros contidos nestas equações, provenientes da linearização, estão discriminados no Apêndice A. As equações acima compõem um **Modelo de Sensibilidade de Potência** [VIVALDO (1992)] para o estudo de estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de potência.

Estas equações podem ser representadas na forma de uma notação matricial simplificada:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ 0 &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{2.65}$$

Este texto se refere à representação acima, daqui para a frente, como **formulação aumentada**. Entretanto, o sistema (2.65) pode ser reduzido eliminando-se a variável $\mathbf{u}$, o que leva a

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x}\tag{2.66}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{x}\tag{2.67}$$

A formulação (2.67), ou **formulação reduzida**, leva a um problema convencional de cálculo de autovalores. Esta formulação é equivalente a (2.65), e será usada nos capítulos 3 e 4, por questão de simplicidade. A implementação feita neste trabalho, no entanto, utiliza a formulação aumentada, pois esta preserva a esparsidade das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$.

Capítulo 3

ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES

Este capítulo recorda algumas noções fundamentais sobre os **sistemas lineares invariantes no tempo**, evidenciando a relação entre seus autovalores e autovetores e suas respostas temporais.

3.1 Relação entre os autovalores e a resposta do sistema

Quando representamos um sistema dinâmico linear na forma de um espaço de estados do tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.1)$$

pode-se notar que a matriz $\mathbf{A}$ é matriz de uma transformação linear $A(\mathbf{x})$ que descreve a variação do estado $\mathbf{x}$ do sistema no tempo.

Olhamos agora para (3.1) como um conjunto de equações diferenciais. Para tentar resolvê-las, ou seja, achar um vetor $\mathbf{v}$ que satisfaça (3.1), supomos que a solução seja da forma

$$\mathbf{x} = c\mathbf{v}e^{\lambda t} \quad (3.2)$$

na qual c e λ são escalares constantes, $\mathbf{v}$ é um vetor de constantes e t representa o tempo. Assim,

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda c \mathbf{v} e^{\lambda t} \quad (3.3)$$

Combinando as eq. (3.1), (3.2) e (3.3), obtemos

$$\lambda c \mathbf{v} e^{\lambda t} = \mathbf{A} c \mathbf{v} e^{\lambda t} \quad (3.4)$$

Como c e λ são constantes, o problema se reduz a

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (3.5)$$

A equação acima é um problema convencional encontrado em matemática, no qual λ é dito um **autovalor** da matriz $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}$ o seu respectivo **autovetor**. Dessa forma, vemos que (3.2) satisfaz a equação diferencial (3.1) desde que λ seja um autovalor de $\mathbf{A}$, e $\mathbf{v}$ o autovetor correspondente.

Do ponto de vista algébrico, temos então um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ e uma transformação linear $A \in L(\mathbb{C}^n)$, e estamos procurando por um subespaço S de dimensão apropriada, tal que $A(\mathbf{v})$ está em S sempre que $\mathbf{v}$ estiver em S . A eq. (3.5) mostra o caso em que o subespaço S tem dimensão um.

A maneira pela qual este subespaço é obtido diferencia as abordagens sequencial e em bloco propostas neste trabalho. Quando utilizamos métodos iterativos, a abordagem sequencial fornece uma base para S calculando seus vetores componentes um de cada vez. Já na abordagem em bloco, os vetores que formam esta base são calculados simultaneamente.

Estamos, com isso, realizando um estudo do auto-sistema (ou seja, conjunto de pares de autovalores e autovetores) de uma matriz, relacionado com os subespaços invariantes de uma transformação linear, e este estudo é denominado **auto-análise**.

3.2 Estabilidade da resposta

Suponha que um determinado sistema de ordem quatro, descrito por (3.1), tenha o seguinte auto-sistema:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -5 & ; \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 100 & 0 & 50 & 10 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_2 &= -8 & ; \quad \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_3 &= -5 - j4 & ; \quad \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 10 + j5 & 0 & 3 - j4 & 2 + j1 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_4 &= -5 + j4 & ; \quad \mathbf{v}_4 &= \begin{bmatrix} 10 - j5 & 0 & 3 + j4 & 2 - j1 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\tag{3.6}$$

Como a solução do sistema é da forma (3.2) para cada um dos autovalores acima, e devido à linearidade da operação de derivação, a soma das quatro soluções é a resposta completa do sistema.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= 10 \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 50 \\ 10 \end{bmatrix} e^{-5t} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} e^{-8t} \\ &+ (6 + j5) \begin{bmatrix} 10 + j5 \\ 0 \\ 3 - j4 \\ 2 + j1 \end{bmatrix} e^{-(5+j4)t} + (6 - j5) \begin{bmatrix} 10 - j5 \\ 0 \\ 3 + j4 \\ 2 - j1 \end{bmatrix} e^{-(5-j4)t}\end{aligned}\tag{3.7}$$

A primeira parcela da resposta apresenta um decaimento exponencial e^{-5t} , que está presente nas variáveis x_1 , x_3 e x_4 , e não existe na variável x_2 , como pode ser visto nas componentes do autovetor desta parcela. Nota-se ainda que a amplitude dessa parcela é dez vezes maior em x_1 do que em x_4 , e cinco vezes maior em x_3 do que em x_4 .

A quarta parcela exibe um comportamento um pouco diferente da primeira. Ela mostra que existe uma resposta cuja amplitude decai exponencialmente de acordo com e^{-5t} e oscila com frequência de 4 unidades (rad/s, por exemplo). Da mesma forma que na primeira parcela, no entanto, os

módulos dos elementos dos autovetores mostram a distribuição desse modo de resposta pelas variáveis de estado, enquanto que os ângulos apresentam a distribuição de fase. Este é um conceito muito importante no estudo de estabilidade : num sistema descrito por um espaço de estados do tipo (3.1), os autovalores da matriz A representam os modos de resposta deste sistema, e seus respectivos autovetores mostram a distribuição destes modos pelas variáveis de estado.

A resposta de um sistema do tipo (3.1) é, então, uma soma de parcelas do tipo (3.2), e cada uma dessas parcelas possui um termo exponencial $e^{\lambda t}$, onde λ é um autovalor da matriz A . De uma maneira um pouco grosseira, dizemos que o sistema é estável se nenhuma destas parcelas cresce ilimitadamente quando t tende para o infinito. Então, se algum dos autovalores do sistema (3.1) estiver localizado no semi-plano direito do plano complexo (ou seja, tiver parte real positiva), o sistema será instável, pois o termo $e^{\lambda t}$ irá tender ao infinito. Dessa forma, para que o sistema (3.1) seja estável, a matriz A deve possuir apenas autovalores no semi-plano esquerdo do plano complexo.

3.3 Autovetores à esquerda e as condições iniciais

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ os autovetores de uma matriz A em um sistema do tipo (3.1), obtidos através de (3.5). Estes autovetores são denominados **autovetores à direita** da matriz A , e uma definição similar pode ser feita para os vetores obtidos com a resolução do problema

$$v'A = \lambda v' \quad (3.8)$$

Tais vetores são denominados **autovetores à esquerda** da matriz A .

Assumindo que não haja dois ou mais autovalores iguais, podemos rees-

crever a eq. (3.5) numa notação matricial expandida:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

na qual $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ denota uma matriz que possui um autovetor de $\mathbf{A}$ em cada coluna. Seja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H & \vdots & \mathbf{w}_2^H & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{w}_n^H \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.10)$$

na qual a notação $[.]^H$ indica a transposta hermitiana da matriz ou vetor $[.]$. Pré-multiplicando e pós-multiplicando (3.9) pela matriz acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H & \vdots & \mathbf{w}_2^H & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{w}_n^H \end{bmatrix}^H \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H & \vdots & \mathbf{w}_2^H & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{w}_n^H \end{bmatrix}^H \quad (3.11)$$

ou seja, o problema (3.8) escrito em notação particionada. Entretanto, transpondo ambos os membros, (3.11) torna-se

$$\mathbf{A}^H \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H & \vdots & \mathbf{w}_2^H & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{w}_n^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H & \vdots & \mathbf{w}_2^H & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{w}_n^H \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Pode-se ver então que os autovetores à esquerda de uma matriz $\mathbf{A}$ são iguais aos autovetores à direita, transpostos, da matriz $\mathbf{A}^H$.

Como dito anteriormente, a resposta completa de um sistema do tipo (3.1) é uma soma de parcelas do tipo (3.2), ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \quad (3.13)$$

Expandindo novamente a notação, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^{-1}$ e fazendo $t = 0$, a eq. (3.14) torna-se:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \vdots & \mathbf{v}_2 & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Combinando (3.15) e (3.10), chega-se a

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \dots \\ \mathbf{w}_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

na qual pode-se ver que os autovetores à esquerda de $\mathbf{A}$ mostram o efeito relativo das diferentes condições iniciais nos modos de resposta.

3.4 Fatores de participação

Os autovetores à direita e à esquerda da matriz A nos fornecem, então, uma medida da relação entre os modos de resposta e as variáveis de estado do sistema (3.1). Podemos usar esta informação, por exemplo, para identificar as dinâmicas relevantes neste sistema e, com isso, obter um modelo de ordem reduzida que descreva o mesmo sistema de maneira satisfatória. Entretanto, quando usamos os autovetores à direita e à esquerda individualmente para a identificação dessas dinâmicas, vemos que eles são dependentes das unidades adotadas para medir as grandezas do sistema. Dessa forma, é necessário comparar valores medidos em unidades diferentes. Uma maneira de evitar este problema, proposta em PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982) e PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982b), é usar uma matriz chamada **matriz de participação** P , que combina os autovetores à direita e à esquerda da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

com

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} & p_{2i} & \dots & p_{ni} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} w_{i1}v_{1i} & w_{i2}v_{2i} & \dots & w_{in}v_{ni} \end{bmatrix}^T \quad (3.18)$$

onde v_{ki} é o k -ésimo elemento do autovetor à direita i e w_{ik} é o k -ésimo elemento do autovetor à esquerda i , e estes autovetores são normalizados de tal forma que

$$\langle w_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \quad (3.19)$$

Os elementos $p_{ki} = w_{ik}v_{ki}$ são chamados de **fatores de participação**, e fornecem uma medida da participação relativa do i -ésimo modo de resposta na k -ésima variável de estado, e vice-versa. A vantagem deste procedimento é que os fatores de participação são adimensionais. Além disso, devido à normalização efetuada, a soma dos elementos de uma linha ou coluna da

matriz de participação é sempre igual a 1, sendo possível identificar facilmente as dinâmicas relevantes e construir um modelo de ordem reduzida através de um processo chamado **Análise Modal Seletiva** (ou **SMA**, de *Selective Modal Analysis*) [PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982)].

Capítulo 4

MÉTODOS DE CÁLCULO DE AUTOVALORES

Neste capítulo, os fundamentos matemáticos dos métodos mais utilizados atualmente para o cálculo de autovalores de sistemas de grande dimensão são apresentados. São também explicadas as razões para a escolha dos dois métodos implementados no trabalho. Antes, porém, faz-se um breve comentário sobre o método clássico do polinômio característico.

4.1 O polinômio característico

A eq. (3.5) pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Para que se tenha uma solução não-trivial de (4.1), ou seja, para que algum $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ seja solução de (4.1), é necessário que o determinante da matriz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ seja igual a zero. Dessa forma, define-se uma função f tal que

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Essa função é um polinômio de grau n em λ , chamada de polinômio característico da matriz A . Achando as raízes deste polinômio, estamos determinando os valores de λ que satisfazem (4.1), ou seja, os autovalores do sistema. Substituindo cada um destes valores encontrados em (4.1), determinamos os autovetores resolvendo o sistema de equações resultante. Este processo é trivial para sistemas de dimensão pequena. Entretanto, as desvantagens deste método para o estudo de estabilidade em sistemas de potência são óbvias, pois ele implica em :

1. Expansão de um determinante de grau elevado;
2. Cálculo das raízes de um polinômio de grau elevado;
3. Resolução de um sistema de equações de ordem elevada.

Dadas as dimensões das matrizes que equacionam os sistemas de potência, a aplicação deste método torna-se inviável, mesmo com o auxílio do computador. Deve-se então procurar por métodos alternativos de auto-análise que requeiram um esforço computacional menor.

4.2 O algoritmo QR

O algoritmo QR é um método de auto-análise de grande eficiência, bastante robusto e de rápida convergência, e por isso tem sido usado na maioria das aplicações que exigem o cálculo de autovalores. Antes de estudá-lo, porém, é interessante rever um conceito fundamental para este método: a **transformação de similaridade**.

Esta transformação permite, a partir de uma matriz original, encontrar outra que possua o mesmo auto-sistema. Assim, podem-se achar matrizes que tenham características que facilitem a auto-análise e utilizá-las para obter o auto-sistema da matriz original de maneira mais simples.

Definição : Se existe uma matriz não-singular P tal que $P^{-1}AP = B$, então dizemos que a matriz B é similar (ou semelhante) a A , e que B

foi obtida de A por meio de uma *transformação de similaridade* (ou *de semelhança*).

Duas matrizes similares têm a mesma equação característica e, consequentemente, os mesmos autovalores, pois

$$\begin{aligned}\det[(B - \lambda I)] &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \\ \det[P^{-1}] \det[(A - \lambda I)] \det[P] &= \det[(A - \lambda I)]\end{aligned}\quad (4.3)$$

Além disso, se v é um autovetor de A , então

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}v) = \lambda(P^{-1}v) \Rightarrow B(P^{-1}v) = \lambda(P^{-1}v) \quad (4.4)$$

Logo, $P^{-1}v$ é um autovetor de B correspondente a λ .

O algoritmo QR utiliza este conceito e é baseado numa decomposição matricial similar à decomposição LU. Neste caso, a matriz em questão é decomposta em uma matriz triangular superior e outra matriz ortogonal.

O primeiro passo deste algoritmo é fazer

$$A_1 = Q_1 R_1 \quad (4.5)$$

onde Q_1 é ortogonal e R_1 é triangular superior. Esta decomposição é conhecida como **decomposição QR** e pode ser feita, por exemplo, utilizando-se matrizes de rotação plana (matrizes de Givens) ou matrizes de reflexão (matrizes de Householder). No passo seguinte, uma nova matriz A_2 é formada multiplicando-se Q_1 e R_1 na ordem reversa:

$$A_2 = R_1 Q_1 \quad (4.6)$$

O processo se repete para a matriz A_2 e assim sucessivamente, de acordo com as equações

$$\begin{aligned}A_k &= Q_k R_k \\ A_{k+1} &= R_k Q_k\end{aligned}\quad (4.7)$$

É fácil verificar que cada passo completo é uma transformação de similaridade, pois

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k \quad (4.8)$$

e portanto todas as matrizes $\mathbf{A}_k$ têm os mesmos autovalores. WILKINSON (1965) mostra que, se $\mathbf{A}_1$ tem autovalores λ_i tais que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| \quad (4.9)$$

então $\mathbf{A}_k$ irá convergir, sob certas condições, para uma matriz triangular superior, de acordo com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_k^{12} & \dots & a_k^{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a_k^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Com isso, os autovalores são obtidos dos elementos da diagonal (ou pela auto-análise de um bloco 2x2, no caso de autovalores complexos na forma real) da matriz $\mathbf{A}_k$ após um número suficiente de iterações.

Apesar de ser um método bastante difundido, este algoritmo apresenta uma grande desvantagem em aplicações relacionadas a sistemas de potência de grande porte, que envolvem matrizes esparsas: a multiplicação reversa das matrizes $\mathbf{R}_k$ e $\mathbf{Q}_k$ pode destruir a esparsidade da matriz original, impossibilitando a aplicação de técnicas de esparsidade. Por essa razão, métodos alternativos que permitam a incorporação dessas técnicas devem ser utilizados nestes estudos de estabilidade.

4.3 Métodos iterativos

Os métodos apresentados a seguir pertencem a uma classe de métodos chamados iterativos, que partem de uma determinada aproximação do autovalor a ser calculado e vão refinando esta aproximação até uma precisão desejada. Dentro desta classe encontram-se as duas abordagens (sequencial e em bloco) envolvidas neste trabalho.

4.3.1 O método de potências

Na sua forma mais simples, o método de potências começa com um vetor arbitrário $\mathbf{u}_0$ e produz uma sequência de vetores $\mathbf{u}_k$ definida por

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

com $\mathbf{u}_k \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Suponha que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores $\lambda_i \in \mathbb{C}$ e autovetores $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$ linearmente independentes tais que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (4.12)$$

Pode-se, então, tomar um vetor arbitrário $\mathbf{u}_0$ tal que

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (4.13)$$

para escalares α_i quaisquer e, a partir deste, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{u}_0 = \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) = \\ &= \alpha_1 \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{A} \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{A} \mathbf{v}_n = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (4.14)$$

usando a definição de autovetor em (3.5). Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}(\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n) = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A} \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A} \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A} \mathbf{v}_n = \\ &= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (4.15)$$

Continuando este processo, iremos obter

$$\mathbf{u}_k = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{v}_n \quad (4.16)$$

que pode ser escrito como

$$\mathbf{u}_k = \lambda_1^k \left[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n \right] \quad (4.17)$$

Como λ_1 é o autovalor de maior módulo, todos os quocientes dentro dos parênteses em (4.17) terão módulo menor do que a unidade, e dessa forma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = \lambda_1^k \alpha_1 \mathbf{v}_1 \quad (4.18)$$

O autovalor λ_1 e o autovetor $\mathbf{v}_1$ são chamados de dominantes em relação à matriz $\mathbf{A}$. Aqui fica evidenciado um problema de instabilidade numérica pois, se λ_1 tem módulo diferente de um, $\mathbf{u}_k$ crescerá ilimitadamente ou tenderá para o vetor nulo. Para contornar este problema, redefine-se (4.11) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|_\infty}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

sendo $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{y}_{k+1}\|_\infty = \max_{1 \leq p \leq n} |y_{k+1}^p|$ e y_{k+1}^p a p-ésima coordenada do vetor $\mathbf{y}_{k+1}$. Com essa modificação, o vetor $\mathbf{u}_k$ pode agora ser escrito como

$$\mathbf{u}_k = q_k \lambda_1^k \left[\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n \right] \quad (4.20)$$

com $q_k = [\|\mathbf{y}_1\|_\infty \|\mathbf{y}_2\|_\infty \dots \|\mathbf{y}_k\|_\infty]^{-1}$. Pode-se ver então que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = q_k \lambda_1^k \alpha_1 \mathbf{v}_1 \quad (4.21)$$

ou seja, $\mathbf{u}_k$ tende para um múltiplo de $\mathbf{v}_1$. Dessa forma, $\mathbf{A}\mathbf{u}_k$ tenderá para $\lambda_1 \mathbf{u}_k$. Olhando para (4.19), pode-se dizer que $\mathbf{y}_{k+1}$ tende para $\lambda_1 \mathbf{u}_k$ e segue que

$$\|\mathbf{y}_{k+1}\|_\infty \rightarrow |\lambda_1| \quad (4.22)$$

pois o maior elemento de $\mathbf{u}_k$ tem módulo igual a um. Nota-se também, através de (4.20), que a convergência do método é governada por $(\lambda_2/\lambda_1)^k$, e pode ser lenta caso estes dois autovalores estejam próximos.

Devido à equivalência de normas em $\mathbb{C}^n$ podemos, por questão de simplicidade, substituir a norma infinito pela norma quadrática e calcular uma aproximação para o autovalor λ_1 por

$$\lambda_1 = \mathbf{u}_k^H \mathbf{A} \mathbf{u}_k \quad (4.23)$$

pois, lembrando que $\|\mathbf{y}\|_2 = (\mathbf{y}^H \mathbf{y})^{1/2}$, observa-se que

$$\mathbf{u}_k^H \mathbf{A} \mathbf{u}_k \simeq \mathbf{u}_k^H \lambda_1 \mathbf{u}_k = \lambda_1 \frac{\mathbf{y}_k^H}{(\mathbf{y}_k^H \mathbf{y}_k)^{1/2}} \frac{\mathbf{y}_k}{(\mathbf{y}_k^H \mathbf{y}_k)^{1/2}} = \lambda_1 \quad (4.24)$$

4.3.2 Deslocamentos

Mesmo com a normalização introduzida para evitar a instabilidade numérica, o método de potências ainda apresenta um problema: apenas o autovalor dominante da matriz pode ser calculado.

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}$ com autovalores reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tais que

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (4.25)$$

Nesse caso, λ_1 pode ser calculado pelo método de potências. Entretanto, se há interesse em conhecer o intervalo que contém os autovalores, é necessário calcular o autovalor λ_n . Para isso, forma-se a seqüência de vetores a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Estas equações definem o método de potências com deslocamento, pois $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ tem autovalores $(\lambda_i - s)$, ou seja, os autovalores de $\mathbf{A}$ são deslocados de s unidades no eixo real. Para ver isto, note apenas que

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{v}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i - s\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i - s\mathbf{v}_i = (\lambda_i - s)\mathbf{v}_i \quad (4.27)$$

Analogamente ao método de potências, o algoritmo definido por (4.26) irá convergir para o autovalor que maximizar $|\lambda_i - s|$. Dessa forma, escolhendo s tal que $s > (\lambda_1 + \lambda_n)/2$, garante-se a convergência do algoritmo para $|\lambda_n - s|$, e pode-se então calcular o autovalor λ_n . Além disso, a utilização de um deslocamento faz com que a convergência do método seja governada por

$$\left(\frac{\lambda_i - s}{\lambda_1 - s} \right)^k \quad (4.28)$$

e uma escolha adequada de s pode acelerar esta convergência.

4.3.3 O método de iterações de potência inversa (IPI)

Suponha agora que seja necessário calcular todo o auto-sistema (ou um determinado conjunto de autovalores de interesse) de uma certa matriz. Obviamente, os métodos iterativos apresentados até agora não permitem este

cálculo. Mas, olhando para o segundo método, vê-se que este consiste em uma mudança na matriz $\mathbf{A}$, gerando um novo autovalor dominante $\lambda_n - s$ que permite o cálculo de λ_n .

Define-se, então, uma nova sequência de vetores, calculada pelas equações

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

A grande vantagem desta modificação introduzida é o fato de que a matriz $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}$ tem autovalores $(\lambda_i - s)^{-1}$, e dessa forma o autovalor dominante será aquele que estiver mais próximo de s . Escolhas adequadas de s permitirão o cálculo de todos os autovalores desejados, e poderão também acelerar a convergência.

Entretanto, na forma (4.29), a aplicação deste algoritmo ao problema de estabilidade em questão ainda não é viável, pois a inversão da matriz $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ é complicada, devido à sua elevada dimensão. Além disso, a esparsidade dessa matriz será perdida com esta inversão. Pode-se, no entanto, utilizar (4.29) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \frac{\mathbf{y}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Esse conjunto de equações define o **método de iterações de potência inversa (IPI)**, e agora a primeira equação pode ser resolvida para $\mathbf{v}_{k+1}$ por um método de resolução de sistemas lineares como, por exemplo, a decomposição LU. Este artifício, além de contornar o problema da inversão, possibilita que técnicas de esparsidade sejam incorporadas ao algoritmo, tornando sua aplicação viável para o estudo de grandes sistemas.

4.3.4 Subespaços invariantes

Os métodos apresentados nas seções 4.3.1 a 4.3.3 utilizam a abordagem sequencial. Antes de passar ao estudo dos métodos que utilizam a abordagem

em bloco, é interessante rever um conceito comum a todos estes métodos.

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a matriz de uma determinada transformação linear. Um subespaço V de $\mathbb{C}^n$ é dito **invariante por A** se $Au \in V$ sempre que $u \in V$. Os espaços $\{0\}$ e $\mathbb{C}^n$ são exemplos triviais de subespaços invariantes por qualquer $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Sejam $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{C}^n$ e

$$\text{span}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i u_i \mid c_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2, \dots, m, m \leq n \right\} \quad (4.31)$$

ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares geradas por $u_1, u_2, \dots, u_m$. Se estes vetores são linearmente independentes, formam uma base para o espaço $\text{span}(u_1, u_2, \dots, u_m)$, que é um subespaço de $\mathbb{C}^n$. Para determinar a invariância deste subespaço, vamos olhar inicialmente para o caso unidimensional.

Se o vetor v_1 é um autovetor da matriz A , o subespaço $\text{span}(v_1)$ será invariante por A . Note que $Ac_i v_1 = \lambda_1 c_i v_1$ com $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, o que significa que a transformação linear $A(u)$ leva qualquer vetor $c_i v_1 \in \text{span}(v_1)$ em um múltiplo dele mesmo, consequentemente pertencente a $\text{span}(v_1)$. Pode-se generalizar este resultado para o caso n -dimensional, dizendo que se $v_1, v_2, \dots, v_m$ são autovetores de uma certa matriz A , o espaço $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ gerado por estes vetores é um subespaço invariante de A .

4.3.5 Iterações em subespaços no método de potências

Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com um autovalor dominante λ_1 , podemos usar o método de potências para calcular o autovetor dominante v_1 ou um múltiplo deste. Não existe problema em se calcular um múltiplo de v_1 , pois qualquer múltiplo deste também será um autovetor de A . Na verdade, cada múltiplo de v_1 é apenas um representante do subespaço $\text{span}(v_1)$, que é o verdadeiro objeto de interesse.

No método de potências, cada uma das iterações Au_k pode ser vista como um representante do subespaço $\text{span}(Au_k)$. A operação de normalização apenas substitui Au_k por outro representante do subespaço gerado por este.

Dessa forma, o método de potências pode ser visto como um processo de iterações de subespaços. Inicialmente, um subespaço unidimensional $U = \text{span}(\mathbf{u}_0)$ é escolhido e então as iterações

$$U, AU, A^2U, \dots, A^kU \quad (4.32)$$

são feitas. Esta sequência converge para o auto-espaço $V = \text{span}(\mathbf{v}_1)$ pois o ângulo entre A^kU e V (que são unidimensionais, podendo-se neste caso imaginar este ângulo como sendo o ângulo entre dois vetores) converge para zero quando $k \rightarrow \infty$.

É natural pensar em uma generalização deste processo para dimensão maior do que um. Pode-se escolher um subespaço de dimensão apropriada e formar a sequência (4.32), esperando que ela convirja da mesma forma que no caso unidimensional. A seguir, apresenta-se um teorema que assegura esta convergência.

4.3.6 Convergência das iterações de subespaço

Para poder-se falar sobre convergência de seqüências de subespaços, é necessário, inicialmente, definir a distância entre dois subespaços. Sejam U_1 e U_2 dois subespaços de $\mathbb{C}^n$ de mesma dimensão. Dado $\mathbf{u}_1 \in U_1$, a distância de $\mathbf{u}_1$ a U_2 é definida por

$$d(\mathbf{u}_1, U_2) = \min \{ \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\| \mid \mathbf{u}_2 \in U_2 \} \quad (4.33)$$

que é um problema de mínimos quadrados. Assim, definimos a distância entre U_1 e U_2 por

$$d(U_1, U_2) = \max_{\substack{\|\mathbf{u}_1\| = 1 \\ \mathbf{u}_1 \in U_1}} \{ d(\mathbf{u}_1, U_2) \} \quad (4.34)$$

Com isso, dada uma sequência de subespaços U_k e um subespaço V , todos de mesma dimensão, diz-se que U_k converge para V quando $d(U_k, V) \rightarrow 0$

para $k \rightarrow \infty$. Pode-se, agora, estabelecer o teorema que garante a convergência das iterações de subespaço. A prova deste teorema pode ser vista em WATKINS & ELSNER (1991).

Teorema: *Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ com autovetores linearmente independentes $v_1, v_2, \dots, v_n$ e respectivos autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ satisfazendo*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (4.35)$$

Suponha que $|\lambda_m| > |\lambda_{m+1}|$ para algum m . Sejam $V = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ e $W = \text{span}(v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n)$. Seja U um subespaço m -dimensional qualquer de $\mathbb{C}^n$ tal que $U \cap W = \{0\}$. Então existe uma constante C tal que

$$d(A^k U, V) \leq C \left| \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} \right|^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

4.3.7 O método de iterações de subespaço (IS)

Pode-se agora construir um algoritmo para por em prática o método de iterações de subespaço. Seja $\{u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \dots, u_0^{(m)}\}$ uma base de U . É possível mostrar [WATKINS (1991)] que, nas condições do teorema anterior, os vetores $A^k u_0^{(1)}, A^k u_0^{(2)}, \dots, A^k u_0^{(m)}$ formam uma base para o subespaço $A^k U$.

A conclusão acima faz surgir a idéia de que pode-se simplesmente realizar iterações em uma base de U para obterem-se bases para AU, A^2U, A^3U e assim por diante. Infelizmente a obtenção dessas bases não é tão simples, por duas razões :

1. Os vetores da base precisam ser normalizados para evitar-se a instabilidade do método ;
2. Cada uma das sequências $A^k u_0^{(1)}, A^k u_0^{(2)}, \dots, A^k u_0^{(m)}$ converge independentemente para o auto-espaço dominante $\text{span}(v_1)$ (assumindo que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$), e dessa forma todos os vetores da base irão apontar praticamente na mesma direção, formando uma base mal condicionada para V .

Bases mal condicionadas podem ser evitadas por uma substituição da base obtida após cada iteração por outra base bem condicionada, e esta operação pode incorporar a normalização necessária. Chega-se, então, ao algoritmo de **iterações de subespaço** (também chamado de **iterações simultâneas**):

1. Calcular $\mathbf{y}_k^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$;
2. Ortonormalizar $\mathbf{y}_k^{(i)}$ para obter $\mathbf{u}_{k+1}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Podem ser empregados os algoritmos de Gram-Schmidt ou decomposição QR, por exemplo, para efetuar a ortonormalização [WATKINS (1991)]. Uma das vantagens deste método é que subespaços de dimensão menor do que n podem ser utilizados, permitindo o cálculo de um número arbitrário de autovetores.

A grande maioria das pesquisas em estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de potência procura calcular autovalores com parte imaginária diferente de zero (representando modos oscilatórios) e próximos do eixo imaginário, identificando tais autovalores como modos críticos do sistema. Sendo assim, é necessário um deslocamento para tornar estes autovalores dominantes. Realizando as iterações, então, com $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}$ e ortonormalizando os vetores a cada passo, podemos calcular os autovalores da mesma forma que no método de potências. O algoritmo final é o seguinte:

1. Calcular $\mathbf{y}_k^{(i)}$ a partir de $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y}_k^{(i)} = \mathbf{u}_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$;
2. Ortonormalizar $\mathbf{y}_k^{(i)}$ para obter $\mathbf{u}_{k+1}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Tanto no método de iterações de subespaço quanto no método de iterações de potência inversa, podem-se calcular os autovalores através de (4.23), após um número suficiente de iterações. Podem-se, também, definir critérios de convergência de acordo com a precisão requerida. Esta e outras questões referentes a implementação dos métodos serão discutidas no capítulo seguinte.

Capítulo 5

IMPLEMENTAÇÃO DOS MÉTODOS

Os fundamentos matemáticos das duas abordagens em estudo, bem como suas diferenças conceituais, foram explicados no capítulo anterior. Este capítulo apresenta agora alguns procedimentos necessários para a implementação computacional dos métodos descritos. Apresenta também algumas técnicas que, utilizadas em conjunto com estes métodos, podem melhorar o desempenho dos mesmos.

5.1 Formulação aumentada

Como citado anteriormente, a principal razão para a utilização dos métodos IPI e IS no cálculo de autovalores de sistemas de potência é o fato de ambos não modificarem a matriz original. Se esta matriz for bastante esparsa, pode-se explorar esta característica, tornando os algoritmos mais eficientes que as abordagens convencionais, baseadas no algoritmo QR. As matrizes da representação de estados do sistema de potência dadas no capítulo 2 possuem um alto grau de esparsidade quando o sistema descrito é relativamente grande. Quando utilizamos a formulação reduzida da eq. (2.67), esta esparsidade se perde na inversão da matriz D . Portanto, é imprescindível que os algoritmos

implementados operem na formulação aumentada.

Observa-se que a operação básica comum a ambos os métodos (IPI e IS) é a multiplicação

$$\mathbf{y}_{k+1} = (\mathbf{A}' - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_k \quad (5.1)$$

que pode ser reescrita na formulação aumentada:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}) - s\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{u}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{y}_{k+1} &= [(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{u}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{u}_k &= (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{y}_{k+1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Definindo $\mathbf{z}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{y}_{k+1}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= (\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{z}_{k+1} \\ 0 &= \mathbf{C}\mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Queremos então encontrar $\mathbf{y}_{k+1}$ em função de $\mathbf{u}_k$, de acordo com o sistema acima. Isso pode ser feito notando-se que

$$\mathbf{y}_{k+1} = (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_k - (\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{z}_{k+1} \quad (5.4)$$

Substituindo (5.4) na segunda equação de (5.3):

$$0 = \mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_k - \mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{D}\mathbf{z}_{k+1} \quad (5.5)$$

Com isso, podemos resolver o sistema (5.3) da seguinte forma:

- i) Calcula-se $\mathbf{D}_{eq} = \mathbf{D} - \mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}$;
- ii) Resolve-se o sistema $\mathbf{D}_{eq}\mathbf{z}_{k+1} = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{u}_k$;
- iii) Resolve-se o sistema $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \mathbf{B}\mathbf{z}_{k+1}$.

Alguns comentários se fazem necessários a respeito deste processo de resolução:

1. A matriz $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})$ é bloco-diagonal. Com isso, a inversão desta matriz consiste na inversão de $nger$ (sendo $nger$ o número de geradores do sistema) blocos 5×5 , e este é um processo relativamente rápido;
2. Como as matrizes $\mathbf{C}$, $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}$ e $\mathbf{B}$ são bloco-diagonais, a matriz $\mathbf{D}_{eq}$ terá um grau de esparsidade muito próximo ao de $\mathbf{D}$. Além disso, para métodos que utilizam um deslocamento fixo (como é o caso de IPI e IS), o cálculo e a fatoração de $\mathbf{D}_{eq}$ precisa ser feito apenas uma vez, antes do início do processo iterativo;
3. Uma vez obtidos os fatores de $(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}$, o passo iii) consiste em duas multiplicações de matriz bloco-diagonal por vetor e uma subtração de vetores, tendo portanto um custo computacional baixo.

Com estes três passos conseguimos, então, resolver (5.3) explorando a esparsidade da formulação aumentada.

5.2 Verificação da convergência

Uma das maneiras de se verificar a convergência nos métodos IPI e IS seria calcular, a cada passo, uma aproximação do autovalor (dada por $\mathbf{u}_{k+1}^H \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1}$) e compará-la com a do passo anterior. Na formulação aumentada, no entanto, essa estratégia implica em mais uma resolução de sistema linear esparsa a cada passo, pois

$$\mathbf{u}_{k+1}^H \mathbf{A}' \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1}^H (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}) \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1}^H \mathbf{A} \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_{k+1}^H \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{u}_{k+1} \quad (5.6)$$

Precisamos, nesse caso, utilizar um algoritmo semelhante ao fornecido na seção anterior para encontrar a segunda parcela.

Uma alternativa encontrada foi a verificação da convergência diretamente no vetor obtido ao final de um passo. Essa verificação, entretanto, não é trivial.

Quando tratamos com vetores reais, existem apenas dois vetores ($\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$) com $\|\cdot\|_2 = 1$ que definem uma direção no $\mathbb{R}^n$. No caso unidimensional, por exemplo, apenas os vetores (1) e (-1) possuem essas características.

Comparando então os módulos de cada um dos elementos de dois vetores obtidos em passos subseqüentes, ou seja, verificando se

$$\frac{|u_{k+1}^i| - |u_k^i|}{|u_{k+1}^i|} < \epsilon, i = 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

podemos concluir sobre a convergência do vetor $\mathbf{u}^{k+1}$.

Em espaços definidos sobre o corpo $\mathbb{C}$ isso não é mais possível. Tomando novamente o caso unidimensional, é fácil ver que todos os vetores que vão da origem até um ponto da bola unitária possuem $\|\cdot\|_2 = 1$ e definem a mesma direção.

Por essa razão, o critério de convergência (5.7) não pode ser aplicado neste caso. Um exemplo bidimensional simples ilustra o erro que pode ocorrer: suponha que $\mathbf{u}_k = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $\mathbf{u}_{k+1} = (1/2 + j/2, 1/2 - j/2)$. Se aplicarmos (5.7), concluiremos que $\mathbf{u}_{k+1}$ convergiu, quando na verdade os dois vetores fornecem direções bastante diferentes (pois $\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_k \rangle / \|\mathbf{u}_{k+1}\|_2 \|\mathbf{u}_k\|_2$ não é próximo de 1).

A solução encontrada para este problema foi fazer com que, a cada passo, o primeiro componente do vetor obtido tenha apenas parte real positiva. Além disso, a modificação feita não deve alterar a norma do vetor.

Se o primeiro elemento do vetor for $a + jb$, a multiplicação deste vetor por

$$\gamma = \frac{a - jb}{|a + jb|} \quad (5.8)$$

garante as duas condições acima. Com isso, quando dois vetores subseqüentes (gerados pelos métodos IPI ou IS) apontarem para direções bastante próximas, as partes reais e imaginárias de seus componentes estarão também próximas, e então o teste (5.7) pode ser aplicado para verificar a convergência.

5.3 Deflação implícita

O método IPI, da maneira como foi descrito no capítulo 5, calcula apenas o autovalor mais próximo do deslocamento utilizado. Se quisermos calcular outro autovalor, teremos que alterar o deslocamento. Entretanto, além dessa alteração implicar numa fatoração matricial adicional, corremos o risco de obter novamente o autovalor já calculado, se nenhuma informação sobre a posição dos demais autovalores está disponível *a priori*.

Sem alterar o deslocamento, podemos inibir a convergência dos métodos IPI e IS para autovalores já calculados retirando do vetor obtido ao final de um passo os componentes nas direções dos autovetores conhecidos. Esse processo é chamado de **deflação implícita**.

5.3.1 Deflação implícita por ortonormalização

No método IS, um processo de ortonormalização era aplicado ao conjunto de vetores obtidos em cada passo de modo a obter uma base para o subespaço gerado pelos autovetores dominantes. Esta mesma base pode ser gerada com o método IPI, ortonormalizando o vetor obtido ao final de cada passo com relação aos vetores já calculados.

5.3.2 Multiplicação por $(A - \lambda_i I)$

Outra estratégia para inibir a direção de um determinado autovetor é multiplicar o vetor obtido, a cada passo, por $(A - \lambda_i I)$, sendo λ_i o autovalor para o qual a convergência deve ser inibida. Suponha que o método IPI tenha sido aplicado a uma determinada matriz, obtendo-se com isso seu par dominante λ_1 e v_1 . Iremos agora aplicá-lo novamente, sem alterar o deslocamento, mas ao final de cada passo o vetor obtido será multiplicado por $(A - \lambda_1 I)$. Sendo $v_1, v_2, \dots, v_n$ os autovetores desta matriz e u_k o vetor obtido ao término do

passo k , vemos que

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^k \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{v}_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) \mathbf{v}_i \quad (5.9)$$

e pode-se ver que esta seqüência irá convergir para o autovalor λ_2 . Obtido este autovalor, o processo pode ser reiniciado para obter λ_3 e assim por diante.

Ao contrário da deflação por ortonormalização, que fornece uma base para o auto-espaço da matriz $\mathbf{A}$, este tipo de deflação permite a obtenção direta dos autovetores.

Apesar de envolver um conceito bastante simples, essa técnica aumenta o custo computacional do método pela incorporação de um número de multiplicações de matriz por vetor que aumenta conforme os autovetores vão sendo calculados. Para contornar este problema, pode-se redefinir o algoritmo IPI da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{u}_k = \\ &= [\mathbf{I} + (s - \lambda_i)(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}] \mathbf{u}_k = \\ &= \mathbf{u}_k + (s - \lambda_i)(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (5.10)$$

Com isso, o custo computacional adicionado ao método IPI por esse processo de deflação se reduz a uma multiplicação de um vetor por um escalar e uma soma de vetores.

5.4 Congelamento

Uma técnica simples que pode acelerar a convergência no método IS é o **congelamento**. Como foi visto no capítulo anterior, estimativas para todos os vetores da base do auto-espaço procurado são obtidas simultaneamente neste método. No entanto, os autovetores associados aos autovalores mais próximos de s irão convergir mais rapidamente. A técnica consiste, então, em verificar a convergência a cada passo e “congelar” os autovetores que a tenham atingido, ou seja, deixar de refinar suas estimativas e utilizá-los apenas no processo de ortogonalização.

5.5 Transformação de Cayley

O capítulo 3 mostrava que a técnica de deslocamento e a iteração com a matriz inversa podiam ser utilizadas para melhorar a eficiência dos métodos. Ambas podem ser encaradas como técnicas de pré-condicionamento da matriz A .

Outra técnica de pré-condicionamento que tem obtido bastante sucesso é a **transformação de Cayley**. Esta é uma transformação linear fracional dada por

$$S = (A - s_1 I)^{-1}(A - s_2 I) = I + (s_1 - s_2)(A - s_1 I)^{-1} \quad (5.11)$$

Com ela, o semiplano à direita do eixo de simetria definido por s_1 e s_2 é mapeado fora do círculo de raio unitário no plano complexo, como mostra a figura 5.1 (o eixo de simetria é identificado por L).

Figura 5.1: Transformação de Cayley.

Dessa forma, uma escolha adequada de s_1 e s_2 faz com que os autovalores críticos (com maior parte real) de A sejam transformados nos autovalores dominantes de S . Uma das vantagens da transformação de Cayley é que, se trabalharmos com s_1 real, a fatorização matricial em (5.11) pode ser feita com aritmética real. Usando então um s_2 conveniente, o eixo de simetria pode ser inclinado de forma a tornar dominantes autovalores que representam modos

pouco atenuados, tal como na figura 5.2. Além disso, pode-se observar que esta escolha de s_1 e s_2 ajuda a inibir a convergência para os conjugados complexos de autovalores já calculados.

Figura 5.2: Transformação de Cayley semi-complexa.

5.6 Cálculo dos autovetores

No método IS, bem como no método IPI com deflação por ortonormalização, os autovalores são calculados a partir de vetores ortonormais que formam uma base para o auto-espço da matriz em análise. Estes vetores são denominados **vetores de Schur**. Para obter a resposta completa do sistema, é necessário conhecer também os autovetores da matriz. Para isso, pode-se montar uma matriz Q , composta pelos vetores de Schur calculados, dispostos em suas colunas. Com esta matriz, pode-se aplicar uma transformação de similaridade em A , obtendo

$$R = Q^H A Q \quad (5.12)$$

A matriz R será triangular superior, e portanto terá os autovalores de A em seus elementos diagonais. Devido à estrutura de R , seus autovetores são facilmente obtidos pela resolução de um sistema triangular [STEWART (1973)]. Formando então uma matriz V' , com os autovetores de R dispostos

em suas colunas, e retornando à base original por

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{V}' \quad (5.13)$$

obtemos os autovetores de $\mathbf{A}$ nas colunas da matriz $\mathbf{V}$.

Capítulo 6

RESULTADOS OBTIDOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação dos programas desenvolvidos no sistema *New England* de 39 barras e 10 geradores [ATHAY ET AL. (1979)]. A partir destes resultados, faz-se uma comparação entre as abordagens e técnicas estudadas neste trabalho.

Figura 6.1: Autovalores do sistema teste

6.1 Autovalores do sistema teste

O sistema utilizado nos testes dos programas implementados foi o sistema *New England* de 39 barras e 10 geradores mostrado em ATHAY ET AL. (1979). Para todos os geradores foi utilizado $D = 0$ (os dados deste sistema estão mostrados no Apêndice B). Utilizando o modelo dado no capítulo 2, este sistema possui 50 autovalores, dos quais 48 estão mostrados na figura 6.1. Há ainda dois modos $\lambda = -85,0641$ e $\lambda = -100,0011$, que não aparecem na figura, pois a escala foi escolhida para possibilitar uma boa visualização do espectro do sistema. Dentre os 50 modos de resposta, 8 apresentam baixa atenuação e 1 é instável. Estes nove modos de interesse estão listados na tabela 6.1, e os fatores de participação referentes a esses modos são apresentados no Apêndice C.

Modos de Interesse	
1	$-2,2441 + j9,4548$
2	$-1,6335 + j8,5987$
3	$-0,8605 + j7,6009$
4	$-1,6979 + j6,9469$
5	$-0,6605 + j3,9916$
6	$-0,3562 + j3,3590$
7	$-0,6429 + j3,3382$
8	$-0,3148 + j1,4591$
9	9,0935

Tabela 6.1: Modos de interesse do sistema teste

Por tratar-se de um sistema ainda relativamente pequeno, o algoritmo QR apresenta uma boa eficiência no cálculo de seus autovalores. Cálculos efetuados com a função `eig.m` do software MATLAB (que utiliza o algoritmo QR) tomaram aproximadamente 16 segundos, num computador equipado

com processador Intel Pentium 100 MHz e 64 MBytes de memória RAM, para obter o espectro deste sistema. Todos os programas implementados foram testados no mesmo computador, e a maioria deles forneceu, para o mesmo sistema teste, tempos da mesma ordem de grandeza. Espera-se que, para sistemas maiores (com maior número de geradores), os programas implementados sejam bem mais rápidos que o MATLAB.

Figura 6.2: Modos de resposta pouco atenuados

6.2 Programas desenvolvidos

Seis programas diferentes foram desenvolvidos e implementados, combinando as abordagens e as técnicas descritas nos capítulos 4 e 5. O compilador utilizado foi o *Microsoft Fortran Power Station 4.0* do pacote *Microsoft Developer's Studio*. Os programas desenvolvidos, bem como as abreviaturas usadas para designá-los no restante do texto, são os seguintes:

- **IPIO** - Método de Iterações de Potência Inversa com deflação por Ortonormalização;

- **IPIM** - Método de Iterações de Potência Inversa com deflação através de Multiplicação por $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$;
- **IPCO** - Método de Iterações de Potência Inversa com transformação de Cayley e deflação por Ortonormalização;
- **IPCM** - Método de Iterações de Potência Inversa com transformação de Cayley e deflação através de Multiplicação por $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$;
- **ISO** - Método de Iterações de Subespaço com deflação por Ortonormalização;
- **ISCO** - Método de Iterações de Subespaço com transformação de Cayley e deflação por Ortonormalização.

Todos os programas utilizam o critério de convergência dado na seção 5.2, com $\epsilon = 0.000001$.

Programa IPIO		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_1 = -2,2440863752 + j9,4548448234$	15	0,22
$\lambda_2 = -1,6334796694 + j8,5987050253$	26	0,61
$\lambda_3 = -0,8604841156 + j7,6008673769$	142	2,59
$\lambda_4 = -1,6979489481 + j6,9468969960$	23	2,97
$\lambda_5 = -0,6604979225 + j3,9915846810$	149	4,84
$\lambda_7 = -0,6429005295 + j3,3381537907$	1077	17,86
$\lambda_6 = -0,3562526585 + j3,3589989388$	56	18,62
$\lambda_8 = -0,3147860725 + j1,4590822018$	134	20,38

Tabela 6.2: Resultados do programa IPIO

Programa IPIM		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_1 = -2,2440863752 + j9,4548448234$	15	0,77
$\lambda_2 = -1,6334795534 + j8,5987048302$	54	2,58
$\lambda_{10} = -85,0641133794 + j0,0000017516$	813	27,14
$\lambda_3 = -0,8604857139 + j7,6008681736$	1420	70,09
$\lambda_4 = -1,6979456836 + j6,9468930239$	130	74,15
$\lambda_{12} = -7,2699029590 + j0,0000101241$	264	82,23
$\lambda_9 = 9,0934789892 + j0,0000000026$	1218	119,03
$\lambda_1 = -2,2440864790 + j9,4548449941$	160	123,91

Tabela 6.3: Resultados do programa IPIM

6.2.1 Técnicas de deflação

As duas técnicas de deflação estudadas podem ser comparadas através da análise dos resultados dos programas IPIO e IPIM. Estes resultados estão mostrados nas tabelas 6.2 e 6.3 (os tempos mostrados em todas as tabelas seguintes são contados a partir do início do processamento iterativo). O deslocamento utilizado nestes dois testes foi $s = -2,5 + j10,0$.

Os autovalores são mostrados nas tabelas 6.2 e 6.3 na mesma seqüência em que foram calculados pelos programas. Olhando para a figura 6.2, observa-se que o programa IPIO calcula os autovalores na seqüência crescente de distância do deslocamento, como mostrado anteriormente no capítulo 4. Vê-se também que IPIO calcula todos os modos críticos com $\text{Re} < 0$ e é mais rápido que o programa IPIM.

O programa IPIM, no entanto, não calcula os autovalores na mesma seqüência que IPIO. Dois fatores influem neste comportamento diferente de IPIM:

1. A convergência dos métodos depende também do vetor inicial. Se este tem um componente forte na direção de um determinado autovetor, a

qual não foi devidamente inibida, pode-se atingir a convergência para este autovetor;

2. Em **IPIM**, a deflação é feita para apenas um autovetor por passo. A convergência é verificada apenas quando as direções de todos os autovetores já calculados tenha sido inibida. O erro numérico resultante deste procedimento também pode gerar este padrão diferente de convergência.

Pode-se ver que, devido a estas razões citadas acima, **IPIM** obtém o mesmo autovalor λ_1 duas vezes. Apesar disso, uma das vantagens de **IPIM** é que este foi capaz de calcular o modo instável com o mesmo deslocamento utilizado em **IPIO**. Este último precisaria de um deslocamento diferente para obter o mesmo modo.

Figura 6.3: Eixo de simetria da transformação de Cayley

6.2.2 Transformação de Cayley

Os resultados obtidos com os métodos de potências que utilizam a transformação de Cayley para pré-condicionamento estão mostrados nas tabelas 6.4

Programa IPCO		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_6 = -0,3562481674 + j3,3589953328$	35	0,72
$\lambda_7 = -0,6429046996 + j3,3381576127$	36	1,38
$\lambda_5 = -0,6604979585 + j3,9915848745$	27	1,93
$\lambda_8 = -0,3147863105 + j1,4590818365$	129	3,79
$\lambda_3 = -0,8604938431 + j7,6008718291$	457	10,38
$\lambda_4 = -1,6979393033 + j6,9468929184$	106	11,98
$\lambda_2 = -1,6334800349 + j8,5987048252$	180	14,67
$\lambda_1 = -2,2440860369 + j9,4548446216$	163	17,20

Tabela 6.4: Resultados do programa IPCO

Programa IPCM		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_6 = -0,3562481153 + j3,3589952366$	40	1,81
$\lambda_5 = -0,6604976328 + j3,9915854187$	320	12,36
$\lambda_8 = -0,3147863339 + j1,4590818409$	348	23,89
$\lambda_7 = -0,6429047323 + j3,3381576457$	76	26,48
$\lambda_3 = -0,8604875351 + j7,6008712846$	1040	60,69
$\lambda_9 = 9,0934789787 + j0,0000000042$	282	70,09
$\lambda_{13} = -2,8359532804 + j0,0000017045$	17801	653,73
$\lambda_4 = -1,6979457320 + j6,9468930419$	488	669,82

Tabela 6.5: Resultados do programa IPCM

e 6.5. Os deslocamentos utilizados nestes exemplos foram $s_1 = 3,0 + j0,0$ e $s_2 = 0,0 - j3,0$, e o eixo de simetria definido por estes é mostrado na figura 6.3.

Comparando as tabelas 6.4 e 6.2, pode-se ver que o programa **IPCO** calcula todos os modos críticos com $\text{Re} < 0$ e é ainda mais rápido do que **IPIO**. Entretanto, **IPCO** também não calcula o modo instável com este deslocamento.

O programa **IPCM** calcula o modo instável, mas é extremamente lento (mais de 11 minutos para calcular um conjunto de oito autovalores). Os problemas citados anteriormente decorrentes da implementação da deflação através de multiplicação por $(A - \lambda I)$, associados ao fato de que a transformação de Cayley reduz as distâncias relativas entre os modos transformados, explica essa lentidão.

6.2.3 Abordagem em bloco versus abordagem seqüencial

As tabelas 6.6 e 6.7 mostram os resultados obtidos pelos métodos de subespaço com deflação por ortonormalização. Como mencionado anteriormente, não é possível realizar iterações de subespaços com deflação através de multiplicação por $(A - \lambda I)$, pois neste caso os autovalores não são obtidos seqüencialmente. Os deslocamentos utilizados nestes testes foram os mesmos usados para a abordagem seqüencial, ou seja, $s = -2,5 + j10,0$ para a iteração inversa e $s_1 = 3,0 + j0,0$ e $s_2 = 0,0 - j3,0$ para a transformação de Cayley.

Comparando as tabelas 6.6 e 6.7 com as tabelas 6.2 e 6.4, respectivamente, vemos que ambas as abordagens exibem o mesmo padrão de convergência. A diferença, no entanto, está nos tempos de obtenção dos autovalores.

Comparando os tempos de convergência dos autovalores λ_3 , λ_4 e λ_5 com os tempos dos autovalores λ_6 e λ_7 na tabela 6.6, nota-se o efeito da técnica

Programa ISO		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_1 = -2,2440863752 + j9,4548448234$	15	1,92
$\lambda_2 = -1,6334796691 + j8,5987050265$	27	2,91
$\lambda_3 = -0,8604874144 + j7,6008679205$	159	12,08
$\lambda_4 = -1,6979456499 + j6,9468964030$	160	12,19
$\lambda_5 = -0,6604978913 + j3,9915847067$	158	12,03
$\lambda_7 = -0,6428994216 + j3,3381527712$	920	30,81
$\lambda_6 = -0,3562535189 + j3,3590003337$	921	30,81
$\lambda_8 = -0,3147868648 + j1,4590816927$	125	9,94

Tabela 6.6: Resultados do programa ISO

Programa ISCO		
Autovalor	Iterações	Tempo [s]
$\lambda_6 = -0,3562481674 + j3,3589953328$	35	4,39
$\lambda_7 = -0,6429046992 + j3,3381576161$	38	4,78
$\lambda_5 = -0,6604979652 + j3,9915848627$	39	4,89
$\lambda_8 = -0,3147863084 + j1,4590818654$	115	10,44
$\lambda_3 = -0,8604831104 + j7,6008732460$	482	23,18
$\lambda_4 = -1,6979481600 + j6,9468882808$	477	23,07
$\lambda_2 = -1,6334793064 + j8,5987038940$	155	12,85
$\lambda_1 = -2,2440863998 + j9,4548449581$	218	15,65

Tabela 6.7: Resultados do programa ISCO

de congelamento no programa ISO.

Contudo, tanto em ISO quanto no programa ISCO, a abordagem em bloco mostrou-se mais lenta que a abordagem seqüencial (comparando os anteriores com os programas IPIO e IPCO, respectivamente). Apesar de a abordagem em bloco obter estimativas convergentes para um bloco de autovalores em cada uma das iterações (o que aumenta a eficiência do processo de deflação), essas iterações são sensivelmente mais lentas que as da abordagem seqüencial, que envolve apenas um vetor a cada passo (isso pode ser constatado comparando os tempos de obtenção do primeiro autovalor em ambos os casos).

No exemplo em questão, portanto, a abordagem seqüencial mostrou-se mais eficaz do que a abordagem em bloco.

Capítulo 7

CONCLUSÃO

Neste trabalho, um modelo de sistema elétrico de potência foi estudado e aplicado à análise da estabilidade a pequenas perturbações. Seis programas computacionais de cálculo de autovalores foram desenvolvidos para realizar esta análise. Os estudos realizados e os programas implementados permitiram, ao final do trabalho, uma comparação de duas diferentes abordagens para o cálculo de autovalores, associadas a técnicas de aceleração de convergência.

Os resultados obtidos mostraram que, sujeitas ao mesmo critério de convergência, as abordagens seqüencial e em bloco fornecem os autovalores com a mesma precisão. Entretanto, no que se refere ao tempo de processamento, estes resultados apontaram para uma maior eficiência da abordagem seqüencial. Dentre as duas técnicas de deflação estudadas, a ortonormalização mostrou-se mais eficiente. Apesar de ser necessário um cálculo adicional para a obtenção dos autovetores a partir dos vetores de Schur conseguidos com a aplicação dessa técnica, este cálculo é trivial e precisa ser feito apenas uma vez, ao final do processamento iterativo. Foi verificado que o aumento de tempo de processamento decorrente deste cálculo é desprezível.

O uso da multiplicação por $(A - \lambda I)$ como técnica de deflação trouxe, no exemplo mostrado, a vantagem de calcular um modo instável, não calculado com a deflação por ortonormalização (utilizando o mesmo deslocamento).

Entretanto, não se deve esperar que isso aconteça para qualquer deslocamento e para qualquer outro sistema que apresente um ou mais modos instáveis.

Verificou-se, também, que a transformação de Cayley reduz o tempo de processamento, tendo o programa **IPCO** (que utiliza transformação de Cayley e deflação por ortonormalização) apresentado os melhores resultados em termos de tempo.

Outras técnicas de aceleração da convergência podem ser posteriormente incorporadas a este programa e comparadas com os resultados obtidos no final deste trabalho. Como exemplo destas técnicas, sugere-se o uso de um deslocamento móvel, calculado por $\mathbf{u}_{k+1}^H \mathbf{A}' \mathbf{u}_{k+1}$ e atualizado a cada iteração. Isso implicaria em uma nova fatorização matricial a cada passo, mas reduziria a distância entre o autovalor e o deslocamento, tornando a convergência mais rápida [ANGELIDIS & SEMLYEN (1996)].

Espera-se que o trabalho tenha contribuído para o entendimento do processo de análise da estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de potência e para o cálculo de autovalores de sistemas dinâmicos lineares de grande dimensão em geral.

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON & FOUAD (1994) Anderson, P. M. e Fouad, A. A. - *Power System Control and Stability*. IEEE Press, New York, 1994.
- ANGELIDIS & SEMLYEN (1995) Angelidis, G. e Semlyen, A. - Efficient Calculation of Critical Eigenvalue Clusters in the Small Signal Stability Analysis of Large Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.10, n.1:p.427–32, Feb., 1995.
- ANGELIDIS & SEMLYEN (1996) Angelidis, G. e Semlyen, A. - Improved Methodologies for the Calculation of Critical Eigenvalue Clusters in Small Signal Stability Analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.11, n.3:p.1209–17, Aug., 1996.
- ATHAY ET AL. (1979) Athay, T., Podmore, R., e Virmani, S. - A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-98, n.2:p.573–84, Mar., 1979.
- BRETAS & ALBERTO (1998) Bretas, N. G. e Alberto, L. F. C. - Damping Estimation for Multi-Swing Transient Stability Analysis: The OMIB Case. *International Conference on Power System Technology Proceedings*, v.2:p.1383–87, Aug., 1998.
- BYERLY ET AL. (1979) Byerly, R. T., Bennon, R. J., e Sherman, D. E. - Eigenvalue Analysis of Synchronizing Power Flow Oscillations in Large Electric Power Systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-101, n.1, 1979.

- BYERLY ET AL. (1979b) Byerly, R. T., Sherman, D. E., e Bennon, R. J. - Frequency Domain Analysis of Low-Frequency Oscillations in Large Electric Power Systems. *EPRI EL-726 Project 744-1, Final Report, Part I*, 1979.
- CAMPAGNOLO ET AL. (1996) Campagnolo, J. M., Martins, N., e Falcão, D. M. - Refactored Bi-Iteration: A High Performance Eigensolution Method for Large Power System Matrices. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.11, n.3:p.1228-35, Aug., 1996.
- CHIANG ET AL. (1991) Chiang, H. D., Wu, F. F., e Varaya, P. - A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. *IEEE Power Systems Society Summer Meeting*, 1991.
- DECKMANN & DA COSTA (1994) Deckmann, S. M. e da Costa, V. F. - A Power Sensitivity Model for Electromechanical Oscillation Studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.9, n.2:p.965-971, May, 1994.
- DEMELLO & CONCORDIA (1969) deMello, F. P. e Concordia, C. - Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-88, n.4:p.316-29, Apr., 1969.
- FISCHMAN ET AL. (1997) Fischman, A., Bazanella, A. S., Silva, A. S., Dion, J. M., e Dugard, L. - Applications of Linear Matrix Inequalities Techniques to the Design of Robust Coordinated Controllers for Power Systems. *Invited Paper on 3rd IFAC Conference on System Structure and Control*, 1997.
- GOLUB & VAN LOAN (1990) Golub, G. H. e Van Loan, C. F. - *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1990.
- IEEE (1999) IEEE. Power System Damping Ad Hoc Task Force - Damping Representation for Power System Stability Studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.14, n.1:p.151-7, Feb., 1999.

- JACQUES & JUDD (1987) Jacques, I. e Judd, C. - *Numerical Analysis*. Chapman and Hall, New York, 1987.
- KIMBARK (1956) Kimbark, E. W. - *Power System Stability - Volume III: Synchronous Machines*. IEEE Press, New York, 1956.
- KUNDUR (1993) Kundur, P. - *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, Toronto, 1993.
- LARN ET AL. (1994) Larn, D. M., Yee, H., e Campbell, B. - An Efficient Improvement to the AESOPS Algorithm for Power System Eigenvalue Calculation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.9, n.4:p.1880-5, Nov., 1994.
- LIMA ET AL. (1995) Lima, L. T. G., Bezerra, L. H., Tomei, C., e Martins, N. - New Methods for Fast Small-Signal Stability Assessment of Large Scale Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.10, n.4:p.1979-85, Nov., 1995.
- MARTINS (1986) Martins, N. - Efficient Eigenvalue and Frequency Response Methods Applied to Power Systems Small-Signal Stability Studies. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.1, n.1, 1986.
- MARTINS (1997) Martins, N. - The Dominant Pole-Spectrum Eigensolver. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.12, n.1:p.245-53, Feb., 1997.
- MARTINS & LIMA (1990) Martins, N. e Lima, L. T. G. - Determination of Suitable Locations for Power System Stabilizers and Static VAR Compensators for Damping Electromechanical Oscillations in Large Scale Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.5, n.4:p.1455-69, Nov., 1990.
- MARTINS ET AL. (1996) Martins, N., Lima, L. T. G., e Pinto, H. C. J. P. - Computing Dominant Poles of Power System Transfer Functions. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.11, n.1:p.162-70, Feb., 1996.

- MORI ET AL. (1993) Mori, H., Kanno, J., e Tsuzuki, S. - A Sparsity-Oriented Technique for Power System Small Signal Stability Analysis with a Pre-condition Conjugate Residual Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.8, n.3:p.1150-8, Aug., 1993.
- PAI (1981) Pai, M. A. - *Power System Stability: Analysis by the Direct Method of Lyapunov*. North Holland Publishing Company, 1981.
- PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982) Pérez-Arriaga, J. I., Verghese, G. C., e Schweppe, F. C. - Selective Modal Analysis with Applications to Electric Power Systems, Part I: Heuristic Introduction. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-101, n.9:p.3117-25, Sep., 1982.
- PÉREZ-ARRIAGA ET AL. (1982b) Pérez-Arriaga, J. I., Verghese, G. C., e Schweppe, F. C. - Selective Modal Analysis with Applications to Electric Power Systems, Part II: The Dynamic Stability Problem. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-101, n.9:p.3126-34, Sep., 1982.
- PRABASHANKAR & JANISCHEWSYJ (1968) Prabashankar, K. e Janischewsyj, W. - Digital Simulation of Multimachine Power Systems for Stability Studies. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v.PAS-87, n.1:p.73-80, Jan., 1968.
- SCAVONE ET AL. (1998) Scavone, F. S., Silva, A. S., Trofino, A., e Campagnolo, J. - Projeto Robusto de Controladores para Sistemas de Potência Utilizando Técnicas LMI. *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*, v.4:p.1537-42, Sep., 1998.
- SEMLYEN & WANG (1988) Semlyen, A. e Wang, L. - Sequential Computation of the Complete Eigensystem for the Study Zone in Small Signal Stability Analysis of Large Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.3, n.2:p.715-25, May, 1988.

- STADNICKI & VAN NESS (1993) Stadnicki, D. J. e Van Ness, J. E. - Invariant Subspace Method for Eigenvalue Computation. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.8, n.2:p.572-80, May, 1993.
- STEWART (1973) Stewart, G. W. - *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York, 1973.
- TERRA ET AL. (1998) Terra, M. H., Ramos, R. A., e Bretas, N. G. - Sistemas de Controle Automático de Carga e Frequência Utilizando as Metodologias LQG/LTR e Desigualdades Matriciais Lineares. *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática*, v.4:p.1499-504, Sep., 1998.
- VIVALDO (1992) Vivaldo, F. C. - Modelo de Sensibilidade de Potência para Análise de Oscilações de Baixa Frequência em Sistemas de Energia Elétrica. *Tese de Doutorado*, 1992.
- WANG & SEMLYEN (1989) Wang, L. e Semlyen, A. - Application of Sparse Eigenvalue Techniques to the Small Signal Stability Analysis of Large Power Systems. *IEEE Power Industry Computer Applications Conference*, pages p.635-42, May, 1989.
- WATKINS (1991) Watkins, D. S. - *Fundamentals of Matrix Computations*. John Wiley and Sons, Toronto, 1991.
- WATKINS & ELSNER (1991) Watkins, D. S. e Elsner, L. - Convergence of Algorithms of Decomposition Type for the Eigenvalue Problem. *Linear Algebra Applications*, 1991.
- WILKINSON (1965) Wilkinson, J. H. - *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, London, 1965.
- ZOLLENKOPF (1971) Zollenkopf, K. - *Bi-Factorisation - Basic Computational Algorithm and Programming Techniques*. In: *Large Sparse Sets of Linear Equations*. J. K. Reid, Academic Press, 1971.

APÊNDICE A

Coeficientes de Sensibilidade de Potência

Este apêndice apresenta as equações para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade de potência do MSP, presentes no equacionamento (2.56) a (2.60). Mais detalhes sobre estes coeficientes e sobre o MSP podem ser obtidos em VIVALDO (1992).

Coeficientes para o gerador i :

$$A1_{gi} = \frac{\partial P_{gi}}{\partial(\delta_i - \theta_{ti})} = \frac{V_{ti}E'_{qi}\cos(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{di}} + \frac{E'_{di}V_{ti}\sin(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{qi}} + V_{ti}^2\cos 2(\delta_i - \theta_{ti}) \left[\frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right]$$

$$A2_{gi} = \frac{\partial P_{gi}}{\partial E'_{qi}} = \frac{V_{ti}}{x'_{di}}\sin(\delta_i - \theta_{ti})$$

$$A3_{gi} = \frac{\partial P_{gi}}{\partial V_{ti}} = \frac{E'_{qi}\sin(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{di}} - \frac{E'_{di}\cos(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{qi}} + V_{ti}\sin 2(\delta_i - \theta_{ti}) \left[\frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right]$$

$$A4_{gi} = \frac{\partial P_{gi}}{\partial E'_{di}} = -\frac{V_{ti}}{x'_{qi}}\cos(\delta_i - \theta_{ti})$$

$$R1_{gi} = \frac{\partial Q_{gi}}{\partial(\delta_i - \theta_{ti})} = -\frac{V_{ti}E'_{qi}\sin(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{di}} + \frac{E'_{di}V_{ti}\cos(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{qi}} + V_{ti}^2\sin 2(\delta_i - \theta_{ti}) \left[\frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right]$$

$$R2_{gi} = -\frac{\partial Q_{gi}}{\partial E'_{qi}} = -\frac{V_{ti}}{x'_{di}}\cos(\delta_i - \theta_{ti})$$

$$\begin{aligned}
 R3_{gi} &= \frac{\partial Q_{gi}}{\partial V_{ti}} = \frac{E'_{qi} \cos(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{di}} + \\
 &\quad \frac{E'_{di} \sin(\delta_i - \theta_{ti})}{x'_{qi}} - \frac{2V_{ti}}{x'_{di}} - V_{ti}[1 - \cos 2(\delta_i - \theta_{ti})] \left[\frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right] \\
 R4_{gi} &= \frac{\partial Q_{gi}}{\partial E'_{di}} = \frac{V_{ti}}{x'_{qi}} \sin(\delta_i - \theta_{ti})
 \end{aligned}$$

Coeficientes para a linha de transmissão entre os barramentos i e j :

$$\begin{aligned}
 A1_{tij} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial(\theta_i - \theta_j)} = \frac{V_i V_j}{x_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) \\
 A2_{tij} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} = \frac{V_i}{x_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \\
 A3_{tij} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} = \frac{V_j}{x_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \\
 R1_{tij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial(\theta_i - \theta_j)} = \frac{V_i V_j}{x_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) \\
 R2_{tij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} = -\frac{V_i}{x_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) \\
 R3_{tij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} = \frac{2V_i}{x_{ij}} - \frac{V_j}{x_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j)
 \end{aligned}$$

Coeficientes para a carga i :

$$\begin{aligned}
 A1_{ci} &= \frac{\partial P_{ci}}{\partial V_i} = 2P_{ci} V_i \\
 R1_{ci} &= \frac{\partial Q_{ci}}{\partial V_i} = 2Q_{ci} V_i
 \end{aligned}$$

Coeficientes de reação da armadura para o gerador i :

$$\begin{aligned}
 K_{vi} &= \frac{x_{di} - x'_{di}}{x'_{di}} \cos(\delta_i - \theta_{ti}) \\
 K_{ai} &= \frac{x_{di} - x'_{di}}{x'_{di}} V_{ti} \sin(\delta_i - \theta_{ti}) \\
 K'_{vi} &= \frac{x_{qi} - x'_{qi}}{x'_{qi}} \sin(\delta_i - \theta_{ti}) \\
 K'_{ai} &= \frac{x_{qi} - x'_{qi}}{x'_{qi}} V_{ti} \cos(\delta_i - \theta_{ti})
 \end{aligned}$$

APÊNDICE B

Dados do sistema teste

Neste apêndice são mostrados o diagrama unifilar e os dados de barras, linhas e geradores (juntamente com os respectivos reguladores de tensão) para o sistema *New England* de 39 barras e 10 geradores utilizado nos testes dos programas implementados.

Figura 1: Diagrama unifilar do sistema teste

Dados de barras

Barra	Tipo	Módulo Tensão [p.u.]	Ângulo Tensão [rad]	Geração Ativa [MW]	Geração Reativa [MVar]	Carga Ativa [MW]	Carga Reativa [MVar]
1	PQ	1.016	-9.6	0.0	0.0	0.0	0.0
2	PQ	0.998	-6.6	0.0	0.0	0.0	0.0
3	PQ	0.961	-9.7	0.0	0.0	322.0	2.4
4	PQ	0.927	-11.0	0.0	0.0	500.0	184.0
5	PQ	0.930	-9.4	0.0	0.0	0.0	0.0
6	PQ	0.933	-8.6	0.0	0.0	0.0	0.0
7	PQ	0.922	-11.0	0.0	0.0	233.8	84.0
8	PQ	0.922	-12.0	0.0	0.0	522.0	176.0
9	PQ	0.986	-12.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	PQ	0.942	-5.7	0.0	0.0	0.0	0.0
11	PQ	0.937	-6.7	0.0	0.0	0.0	0.0
12	PQ	0.917	-6.7	0.0	0.0	7.5	88.0
13	PQ	0.938	-6.5	0.0	0.0	0.0	0.0
14	PQ	0.933	-8.4	0.0	0.0	0.0	0.0
15	PQ	0.939	-8.8	0.0	0.0	320.0	153.0
16	PQ	0.960	-7.1	0.0	0.0	329.0	32.3
17	PQ	0.958	-8.3	0.0	0.0	0.0	0.0
18	PQ	0.957	-9.3	0.0	0.0	158.0	30.0
19	PQ	0.979	-1.2	0.0	0.0	0.0	0.0
20	PQ	0.981	-2.2	0.0	0.0	628.0	103.0
21	PQ	0.972	-4.5	0.0	0.0	274.0	115.0
22	PQ	1.007	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0
23	PQ	1.005	-0.1	0.0	0.0	274.5	84.6
24	PQ	0.969	-7.0	0.0	0.0	308.6	-92.2
25	PQ	1.006	-5.0	0.0	0.0	224.0	47.2
26	PQ	0.973	-6.2	0.0	0.0	139.0	17.0
27	PQ	0.957	-8.5	0.0	0.0	281.0	75.5
28	PQ	0.982	-2.2	0.0	0.0	206.0	27.6
29	PQ	0.994	0.8	0.0	0.0	283.5	26.9
30	PV	1.047	-4.1	250.0	291.0	0.0	0.0
31	PV	0.982	0.0	555.0	239.0	9.2	4.6
32	PV	0.983	2.4	650.0	246.0	0.0	0.0
33	PV	0.997	4.1	632.0	122.0	0.0	0.0
34	PV	1.012	3.0	508.0	172.0	0.0	0.0
35	PV	1.049	5.2	650.0	333.0	0.0	0.0
36	PV	1.064	8.0	560.0	258.0	0.0	0.0
37	PV	1.028	1.9	540.0	116.0	0.0	0.0
38	PV	1.027	8.0	830.0	223.0	0.0	0.0
39	PV	1.030	-11.0	1000.0	494.0	1104.0	250.0

Dados de linhas

Da Barra	Para a Barra	Resistência [p.u.]	Reatância [p.u.]
1	2	0.0035	0.0411
1	39	0.0010	0.0250
2	3	0.0013	0.0151
2	25	0.0070	0.0086
3	4	0.0013	0.0213
3	18	0.0011	0.0133
4	5	0.0008	0.0128
4	14	0.0008	0.0129
5	6	0.0002	0.0026
5	8	0.0008	0.0112
6	7	0.0006	0.0092
6	11	0.0007	0.0082
7	8	0.0004	0.0046
8	9	0.0023	0.0363
9	39	0.0010	0.0250
10	11	0.0004	0.0043
10	13	0.0004	0.0043
13	14	0.0009	0.0101
14	15	0.0018	0.0217
15	16	0.0009	0.0094
16	17	0.0007	0.0089
16	19	0.0016	0.0195
16	21	0.0008	0.0135
16	24	0.0003	0.0059
17	18	0.0007	0.0082
17	27	0.0013	0.0173
21	22	0.0008	0.0140
22	23	0.0006	0.0096
23	24	0.0022	0.0350
25	26	0.0032	0.0323
26	27	0.0014	0.0147
26	28	0.0043	0.0474
26	29	0.0057	0.0625
28	29	0.0014	0.0151
12	11	0.0016	0.0435
12	13	0.0016	0.0435
6	31	0.0000	0.0250
10	32	0.0000	0.0200
19	33	0.0007	0.0142
20	34	0.0009	0.0180
22	35	0.0000	0.0143
23	36	0.0005	0.0272
25	37	0.0006	0.0232
2	30	0.0000	0.0181
29	38	0.0008	0.0156
19	20	0.0007	0.0138

Dados de geradores e reguladores de tensão associados

Unidade	H [s]	X _d [p.u.]	X _q [p.u.]	X' _d [p.u.]	X' _q [p.u.]	T' _{do} [s]	T' _{qo} [s]	K _e	T _e [s]
1	42.0	0.1000	0.0690	0.0310	0.0080	10.20	0.01	5.0	0.250
2	30.3	0.2950	0.2820	0.0697	0.1700	6.56	1.50	6.2	0.405
3	35.8	0.2495	0.2370	0.0531	0.0876	5.70	1.50	5.0	0.500
4	28.6	0.2620	0.2580	0.0436	0.1660	5.69	1.50	5.0	0.500
5	26.0	0.6700	0.6200	0.1320	0.1660	5.40	0.44	40.0	0.785
6	34.8	0.2540	0.2410	0.0500	0.0814	7.30	0.40	5.0	0.471
7	26.4	0.2950	0.2920	0.0490	0.1860	5.66	1.50	40.0	0.730
8	24.3	0.2900	0.2800	0.0570	0.0911	6.70	0.41	5.0	0.528
9	34.5	0.2106	0.2050	0.0570	0.0587	4.79	1.96	40.0	1.400
10	500.0	0.0200	0.0190	0.0060	0.0080	7.00	0.70	1.0	0.001

Obs: Na modelagem de todos os geradores foi utilizado $D = 0$.

APÊNDICE C

Fatores de participação do sistema teste

Foram calculados os fatores de participação correspondentes aos nove modos de interesse do sistema teste, e o resultado deste cálculo é mostrado na tabela 5. Os dados desta tabela correspondem aos valores absolutos dos fatores de participação.

Modo de oscilação	Variáveis de estado
λ_1	δ_6, ω_6
λ_2	$\delta_1, \omega_1, \delta_8, \omega_8$
λ_3	$\delta_2, \omega_2, \delta_3, \omega_3$
λ_4	$\delta_2, \omega_2, \delta_3, \omega_3, \delta_4, \omega_4, \delta_5, \omega_5, E'_{d5}$
λ_5	$\delta_2, \omega_2, \delta_4, \omega_4, \delta_5, \omega_5, E'_{d5}$
λ_6	$\delta_4, \omega_4, \delta_5, \omega_5$
λ_7	$\delta_9, \omega_9, E'_{q9}$
λ_8	$\delta_6, \omega_6, E'_{q6}, \delta_7, \omega_7$
λ_9	δ_1, ω_1

Tabela 4: Variáveis de estado associadas aos modos de oscilação

Os valores em negrito indicam as variáveis de estado nas quais o modo de oscilação (associado ao respectivo autovalor) está presente com maior intensidade. Foram destacadas as variáveis que possuem $\|p_{ki}\| \geq 0.10$. Estes resultados foram condensados na tabela 4, e podem ser usados para orientar procedimentos e estratégias de controle visando melhorar a estabilidade a pequenas perturbações do sistema.

Variável de estado	Modos de oscilação								
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
δ_1	0.0029	0.1760	0.0015	0.0022	0.0009	0.0031	0.0043	0.0102	0.3192
ω_1	0.0029	0.1760	0.0015	0.0022	0.0009	0.0031	0.0043	0.0102	0.3192
E'_{q1}	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
E'_{d1}	0.0003	0.0150	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0250
E_{fd1}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
δ_2	0.0046	0.0003	0.2496	0.2439	0.1361	0.0214	0.0028	0.0072	0.0019
ω_2	0.0046	0.0003	0.2496	0.2439	0.1361	0.0214	0.0028	0.0072	0.0019
E'_{q2}	0.0000	0.0000	0.0004	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
E'_{d2}	0.0006	0.0000	0.0241	0.0225	0.0070	0.0009	0.0001	0.0001	0.0002
E_{fd2}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
δ_3	0.0373	0.0043	0.4807	0.2505	0.0799	0.0133	0.0017	0.0055	0.0036
ω_3	0.0373	0.0043	0.4807	0.2505	0.0799	0.0133	0.0017	0.0055	0.0036
E'_{q3}	0.0003	0.0000	0.0021	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000
E'_{d3}	0.0073	0.0008	0.0729	0.0364	0.0065	0.0009	0.0001	0.0002	0.0006
E_{fd3}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
δ_4	0.0015	0.0010	0.0352	0.1576	0.1054	0.4616	0.0110	0.0033	0.0018
ω_4	0.0015	0.0010	0.0352	0.1576	0.1054	0.4616	0.0110	0.0033	0.0018
E'_{q4}	0.0001	0.0000	0.0015	0.0087	0.0173	0.0466	0.0025	0.0089	0.0000
E'_{d4}	0.0001	0.0001	0.0025	0.0109	0.0041	0.0146	0.0004	0.0000	0.0001
E_{fd4}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0000
δ_5	0.0018	0.0015	0.0833	0.4233	0.4090	0.1412	0.0189	0.0053	0.0001
ω_5	0.0018	0.0015	0.0833	0.4233	0.4090	0.1412	0.0189	0.0053	0.0001
E'_{q5}	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0031	0.0157	0.0006	0.0066	0.0001
E'_{d5}	0.0025	0.0019	0.0867	0.4427	0.2031	0.0506	0.0075	0.0004	0.0000
E_{fd5}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0013	0.0001	0.0010	0.0000
δ_6	0.3355	0.0004	0.0070	0.0070	0.0043	0.0014	0.0008	0.2013	0.0131
ω_6	0.3355	0.0004	0.0070	0.0070	0.0043	0.0014	0.0008	0.2013	0.0131
E'_{q6}	0.0080	0.0000	0.0000	0.0003	0.0039	0.0009	0.0002	0.1706	0.0000
E'_{d6}	0.2304	0.0002	0.0035	0.0035	0.0010	0.0002	0.0001	0.0065	0.0049
E_{fd6}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0000
δ_7	0.1958	0.0008	0.0176	0.0329	0.0387	0.0055	0.0019	0.2737	0.0069
ω_7	0.1958	0.0008	0.0176	0.0329	0.0387	0.0055	0.0019	0.2737	0.0069
E'_{q7}	0.0006	0.0000	0.0001	0.0003	0.0011	0.0002	0.0001	0.0289	0.0000
E'_{d7}	0.0171	0.0001	0.0012	0.0021	0.0014	0.0002	0.0001	0.0035	0.0005
E_{fd7}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0036	0.0000
δ_8	0.0017	0.3776	0.0023	0.0086	0.0008	0.0024	0.0026	0.0067	0.0949
ω_8	0.0017	0.3776	0.0023	0.0086	0.0008	0.0024	0.0026	0.0067	0.0949
E'_{q8}	0.0000	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0008	0.0000
E'_{d8}	0.0010	0.1908	0.0010	0.0036	0.0002	0.0003	0.0004	0.0002	0.0301
E_{fd8}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
δ_9	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0323	0.0244	0.4843	0.0002	0.0026
ω_9	0.0000	0.0001	0.0001	0.0004	0.0323	0.0244	0.4843	0.0002	0.0026
E'_{q9}	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0128	0.0084	0.1667	0.0000	0.0031
E'_{d9}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0017	0.0011	0.0221	0.0000	0.0003
E_{fd9}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008	0.0007	0.0132	0.0000	0.0001
δ_0	0.0002	0.0002	0.0030	0.0045	0.0407	0.0307	0.0095	0.0333	0.0165
ω_0	0.0002	0.0002	0.0030	0.0045	0.0407	0.0307	0.0095	0.0333	0.0165
E'_{q0}	0.0001	0.0002	0.0007	0.0010	0.0049	0.0038	0.0014	0.0048	0.0091
E'_{d0}	0.0001	0.0001	0.0009	0.0013	0.0064	0.0037	0.0012	0.0013	0.0044
E_{fd0}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 5: Valores absolutos dos fatores de participação