O PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA DE LASALLE ESTENDIDO APLICADO AO ESTUDO DE COERÊNCIA DE GERADORES E À ANÁLISE DE ESTABILIDADE TRANSITÓRIA MULTI-”SWING”

Luís Fernando Costa Alberto

Tese apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Elétrica

ORIENTADOR: Prof. Newton G. Bretas

COORIENTADOR: Prof. Hildebrando M. Rodrigues

São Carlos

2000

Aos meus pais.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Newton G. Bretas, pela confiança que deposita em meu trabalho.

Ao meu coorientador, Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues, pelos ensinamentos, críticas e sugestões.

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo concedida.

Aos meus colegas do LACO (Laboratório de Análise Computacional em Sistemas de Potência) pelas discussões que direta ou indiretamente contribuíram para melhorar a qualidade deste trabalho.

Aos meus colegas do ICMC que estiveram juntos comigo durante os estudos que desenvolvi neste instituto.

Ao Departamento de Engenharia Elétrica.

Conteúdo

Agradecimentos	v
Lista de Abreviaturas e Siglas	xv
Lista de Símbolos	xvii
Resumo	xxi
Abstract	xxiii
1 Introdução	1
2 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle	5
2.1 Introdução	5
2.2 Revisão	6
2.3 Princípio de Invariância de LaSalle	8
2.4 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle	11
2.5 Exemplos	16
3 Princípio de Invariância Uniforme. Robustez com Relação à Variação de Parâmetros	25
4 Princípio de Invariância de LaSalle em Variedades Compactas e Suaves	37
5 Princípio de Invariância de LaSalle Aplicado à Análise de Sincronismo	41

5.1	Introdução	41
5.2	Sincronismo	42
5.3	Exemplos	42
6	Função Energia para Sistemas de Potência com Perdas na Trans- missão	63
6.1	Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito	65
6.2	Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito	69
6.3	Sistemas Multimáquinas	74
7	Análise de Coerência em Sistemas de Potência	77
7.1	Coerência	79
7.2	Coerência Fraca em um Sistema de duas Máquinas versus Barra- mento Infinito	81
7.3	ε -Coerência-Fraca em um Sistema de Duas Máquinas versus Bar- ramento Infinito	90
7.4	Coerência Fraca em um Sistema Multimáquinas	94
7.5	ε -coerência fraca em um sistema multimáquinas	102
8	Análise de Estabilidade “Multi-Swing”	109
8.1	Introdução	109
8.2	Revisão do Método BCU	110
8.3	A Condição de Transversalidade em Sistemas de Uma Máquina versus Barramento Infinito	112
8.4	A condição de transversalidade em sistemas multi-máquinas . . .	114
8.5	Proposta de uma Metodologia de Análise de Estabilidade Multi- ”Swing”	116
9	Conclusões e Propostas para Pesquisas Futuras	121

Lista de Figuras

2.1	Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle	9
2.2	Interpretação geométrica da extensão do Princípio de Invariância	13
2.3	Órbitas e Funções de Liapunov do sistema (2.3)	17
2.4	Estimativa do Atrator de (2.8)	20
2.5	Sistema de Lorenz	23
3.1	Funções a, b e c do Teorema 3.1	28
3.2	Interpretação geométrica do Princípio de Invariância Uniforme	29
3.3	Ilustração dos conjuntos $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{B}_L$, A_l e B_l	30
3.4	Estimativa Uniforme do Atrator de Lorenz. Condições Iniciais: $(x(0), y(0), z(0)) = (20, -70, 40)$	36
5.1	Sistemas Unidimensionais acoplados	45
5.2	Sistema de Lorenz. (a)Projeção da Estimativa do Atrator na diagonal x-z. (b) Norma da diferença entre os sistemas. $k = 250$, condição Inicial $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (-60, 0, -60, 60, 0, 60)$	50
5.3	Sistema de Lorenz acoplado II. (a)Projeção da Estimativa do Atra- tor na diagonal x-z. (b) Norma da diferença entre os sistemas. $k = 5000$, Condição inicial $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (5, 4, 10, 7, 2, -7)$	55
5.4	Atrator de Lorenz	61
6.1	Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito	66
6.2	Curvas de Nível da Função W - Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito	68
6.3	Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito	69

6.4	Curvas de nível da Função W - Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito	73
6.5	Curvas de nível da Função W - Sistema de Duas Máquinas fortemente acopladas versus Barramento Infinito	73
6.6	Curvas de nível da Função W - Sistema de Duas Máquinas fortemente acopladas versus Barramento Infinito	74
7.1	Sistema de duas máquinas versus barramento infinito	81
7.2	Curvas de Nível da Energia Potencial do sistema de duas máquinas versus barramento infinito	84
7.3	Faixas no toro contendo os conjuntos onde a derivada de W é positiva para o sistema de duas máquinas versus barramento infinito, $P_1 = 0.8, P_2 = 1.5, C_1 = 1.7, C_2 = 2.0, C_{12} = 2.0$	92
7.4	Órbitas do sistema gradiente reduzido associado ao sistema de duas máquinas versus barramento infinito, $P_1 = 0.8, P_2 = 1.5, C_1 = 1.7, C_2 = 2.0, C_{12} = 2.0$	93
7.5	Faixas no toro contendo os conjuntos onde a derivada de W é positiva para o sistema de duas máquinas versus barramento infinito, $P_1 = 1.5, P_2 = 2.3, C_1 = 1.7, C_2 = 2.0, C_{12} = 2.0$	94
7.6	Órbitas do sistema gradiente reduzido associado ao sistema de duas máquinas versus barramento infinito, $P_1 = 1.5, P_2 = 2.3, C_1 = 1.7, C_2 = 2.0, C_{12} = 2.0$	95
7.7	Sistema teste de 7 geradores e 10 barras do CIGRE	104
7.8	Ângulo dos Rotores das Máquinas do Sistema Teste do CIGRE de 7 Geradores e 10 Barras. Um Curto Trifásico Sólido ocorre nas vizinhanças da barra 6 e o defeito é isolado em 0.5s pela remoção da linha 4-6	107
8.1	Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito	112
8.2	Sistema de Uma Máquina versus Barramento Infinito: (a)Energia Potencial, (b)Retrato de Fase - $D=0.05$, (c)Retrato de Fase - $D=0.28113$	
8.3	Sistema de Três Geradores	115

8.4	Ângulos dos rotores do sistema de três geradores. Curto na barra 2 foi isolado pela eliminação da linha 1-2 no tempo de 0.197s . . .	116
8.5	Projeção da órbita do sistema de três geradores no retrato de fase do sistema reduzido.	117

Lista de Tabelas

7.1	Dados de Gerador e condições pré-falta	105
7.2	Matrizes C_{ij} e D_{ij}	105

Lista de Abreviaturas e Siglas

BCU	<u>B</u> oundary <u>C</u> ontrolling <u>U</u> nstable Equilibrium Point Ponto de Equilíbrio Instável Fronteiriço de Controle.
PEBS	<u>P</u> otential <u>E</u> nergy <u>B</u> oundary <u>S</u> urface - Superfície Fronteiriça de Energia Potencial.

Lista de Símbolos

α Parâmetro auxiliar.

β Parâmetro auxiliar.

γ Parâmetro auxiliar.

δ Ângulo do rotor dos geradores síncronos.

ε Precisão do sincronismo.

Λ Conjunto no qual variam os parâmetros do sistema.

λ Multiplicador de Lagrange ou vetor de parâmetro do sistema.

μ Parâmetro auxiliar ou multiplicador de Lagrange.

ξ Variável auxiliar.

ρ Parâmetro auxiliar.

σ Parâmetro do sistema de Lorenz.

σ_M Valor máximo do parâmetro σ .

σ_m Valor mínimo do parâmetro σ .

σ_N Valor nominal do parâmetro σ .

$\varphi(t, x_o)$ Solução da equação diferencial com condição inicial x_o .

Ω_L Estimativa da bacia de atração na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.

Ω_l Componente da estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original.

$\bar{\Omega}_l$ Fecho do conjunto Ω_l .

ω Velocidade do rotor dos geradores síncronos.

∂C Fronteira do conjunto C .

A Conjunto auxiliar.

a Estimativa uniforme inferior da Função de Liapunov ou parâmetro auxiliar.

A_l Componente da estimativa do atrator no Princípio de Invariância Uniforme.

$\mathcal{A}_L$ Conjunto que contém a bacia de atração no Princípio de Invariância Uniforme.

B Maior conjunto invariante contido em E ou susceptâncias do sistema elétrico.

b Parâmetro do sistema de Lorenz.

$b()$ Estimativa uniforme superior da Função de Liapunov.

B_l Conjunto auxiliar no Princípio de Invariância Uniforme.

$\mathcal{B}_L$ Estimativa da bacia de atração no Princípio de Invariância Uniforme.

b_M Valor máximo do parâmetro b .

b_m Valor mínimo do parâmetro b .

b_N Valor nominal do parâmetro b .

C Conjunto no qual a derivada da Função de Liapunov é maior que zero, ou conjunto no qual a função c é menor que zero ou parâmetro do sistema elétrico.

c Estimativa uniforme da derivada da função de Liapunov.

$\bar{C}$ Fecho do conjunto C .

C^1 Conjunto das funções contínuas cujas derivadas primeiras também são contínuas.

D Conjunto auxiliar ou coeficiente de amortecimento das máquinas síncronas ou parâmetro do sistema elétrico.

E Estimativa do atrator na extensão do Princípio de Invariância e no Princípio de Invariância Original ou Módulo da força eletromotriz do gerador.

E_L Estimativa do atrator no Princípio de Invariância Uniforme.

F Conjunto auxiliar.

f Campo vetorial.

G Condutâncias do sistema elétrico.

g Função auxiliar.

H Conjunto auxiliar.

h Função auxiliar.

K Faixas no toro contendo os atratores do sistema de potência.

K_s Faixa no toro contendo o atrator estável do sistema de potência.

K_u Faixa no toro contendo o atrator instável do sistema de potência.

k Parâmetro de acoplamento.

L Valor da Função de Liapunov que define os conjuntos Ω_L , $\mathcal{A}_L$ e $\mathcal{B}_L$.

l Valor da Função de Liapunov que define os conjuntos Ω_l , A_l e B_l .

$\mathcal{L}$ Função Lagrangiana.

M Coeficiente de Inércia das máquinas síncronas.

$\mathbb{M}$ Variedade compacta e suave.

P Potência mecânica líquida aplicada à máquina síncrona.

xx

R Parâmetro auxiliar.

r Parâmetro do sistema de Lorenz.

r_M Valor máximo do parâmetro r .

r_m Valor mínimo do parâmetro r .

r_N Valor nominal do parâmetro r .

$\mathbb{R}$ Espaço dos números reais.

S Homeomorfismos auxiliares.

t Tempo.

TM fibrado tangente da variedade M .

T^{2n} Toro 2n-dimensional.

u Variável de estado.

V Função de Liapunov.

V_p Energia Potencial.

v Variável de estado.

W Função de Liapunov. Utilizada em alguns exemplos para diferenciar de V .

w Variável de estado ou variável auxiliar.

x Vetor de variáveis de estado.

x_s Ponto de equilíbrio estável.

y Variável de estado.

z Variável de estado.

Resumo

As técnicas de análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência desenvolveram-se significativamente nas últimas duas décadas. Atualmente, o principal desafio dos pesquisadores é a obtenção de técnicas que sejam adequadas a análises em tempo real. Neste sentido, as idéias de Liapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle têm sido utilizadas para estimar a bacia de atração dos sistemas de potência. Embora esta filosofia seja bastante adequada a análises de estabilidade em tempo real, existem ainda alguns obstáculos que impedem a aplicação da mesma à análise de sistemas reais. Dentre estes obstáculos poder-se-ia destacar a impossibilidade de utilização de modelos mais realísticos e a limitação da análise ao primeiro "swing". Em verdade, estes obstáculos estão intimamente relacionados com as limitações do Princípio de Invariância de LaSalle. Para superar estes problemas, propõe-se, neste trabalho, uma extensão deste Princípio que é mais geral e portanto mais flexível do que o original. Aproveitando esta maior flexibilidade, duas aplicações em análise de estabilidade transitória são abordadas, ambas com o objetivo de reduzir os obstáculos anteriormente mencionados. Na primeira, propõe-se uma nova função energia para sistemas de potência com perdas nas linhas de transmissão. Mostra-se que esta é uma Função de Liapunov no senso mais geral da extensão do Princípio de Invariância de LaSalle, podendo portanto ser empregada para estudos de estabilidade. Na segunda, uma metodologia de análise de estabilidade multi-"swing" é proposta com base em uma análise de coerência de geradores.

Palavras-Chaves: Estabilidade, Sistemas de Potência, BCU, Coerência, Sincronismo, Princípio de Invariância de LaSalle

Abstract

The transient stability analysis in power systems have significantly evolved in the last two decades. Nowadays, the developing of techniques suitable for real time applications is the main challenge of researchers. In this way, the Lyapunov ideas associated to the LaSalle's Invariance Principle have been used to estimate the attraction area of power systems. Although this analysis approach is very suitable for real time applications, there are some obstacles that still make these techniques improper to the assessment of transient stability in real power systems. Among these obstacles, one could mention the impossibility of using more realistic models and the limitation of the analysis to the first swing. In fact, these obstacles are closely related to the limitations of the LaSalle's Invariance Principle. In order to avoid these problems, an extension of this Principle, which is more general and consequently more flexible than the original one, is proposed in this work. Using this extension as a new tool of analysis, two problems in transient stability analysis are solved. In the first one, a new energy function for power systems with transmission losses is proposed. It has been proved that this function is a Lyapunov Function in a more general sense, i.e., in the sense of the extension of the Invariance Principle. Therefore it can be used to transient stability studies. In the second one, a methodology of transient stability analysis suitable for multi-swing assessment is proposed based on a coherency analysis between generators.

Key-words: Stability, Power Systems, BCU, Coherency, Synchronism, Invariance Principle

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, com o crescimento da demanda de energia elétrica, vários fatores contribuíram para tornar a operação dos sistemas de potência mais complexa. O aumento no número de interligações entre os sistemas, embora tenha trazido uma série de vantagens, fez com que os problemas de proteção e estabilidade transitória ficassem ainda mais complicados. Devido principalmente à escassez de recursos, aliada a fatores ambientais, os sistemas passaram a operar mais próximos dos seus limites. Com isto, as não-linearidades, inerentes ao sistema, tornaram-se mais evidentes e efeitos nunca antes observados passaram a se manifestar.

Associada a estes fatores, a exigência, cada vez maior, de um fornecimento de energia de maior confiabilidade vem requerendo procedimentos de análise e controle dos sistemas cada vez mais precisos e adequados a aplicações em tempo real. Dentre estas análises, o estudo de estabilidade transitória é fundamental para que, na presença de anomalias ou defeitos, ações emergenciais possam ser tomadas de maneira a evitar-se a interrupção de fornecimento de energia.

Classicamente, nas análises de estabilidade transitória, realiza-se uma série de simulações do sistema de potência em estudo nas mais variadas situações emergenciais. Selecionam-se as contingências mais severas e integram-se numericamente as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema de potência para cada uma destas contingências. Obviamente, estas análises são adequadas apenas para estudos “off-line” pois requerem um grande esforço computacional.

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, com o crescimento da demanda de energia elétrica, vários fatores contribuíram para tornar a operação dos sistemas de potência mais complexa. O aumento no número de interligações entre os sistemas, embora tenha trazido uma série de vantagens, fez com que os problemas de proteção e estabilidade transitória ficassem ainda mais complicados. Devido principalmente à escassez de recursos, aliada a fatores ambientais, os sistemas passaram a operar mais próximos dos seus limites. Com isto, as não-linearidades, inerentes ao sistema, tornaram-se mais evidentes e efeitos nunca antes observados passaram a se manifestar.

Associada a estes fatores, a exigência, cada vez maior, de um fornecimento de energia de maior confiabilidade vem requerendo procedimentos de análise e controle dos sistemas cada vez mais precisos e adequados a aplicações em tempo real. Dentre estas análises, o estudo de estabilidade transitória é fundamental para que, na presença de anomalias ou defeitos, ações emergenciais possam ser tomadas de maneira a evitar-se a interrupção de fornecimento de energia.

Classicamente, nas análises de estabilidade transitória, realiza-se uma série de simulações do sistema de potência em estudo nas mais variadas situações emergenciais. Selecionam-se as contingências mais severas e integram-se numericamente as equações diferenciais que representam a dinâmica do sistema de potência para cada uma destas contingências. Obviamente, estas análises são adequadas apenas para estudos “off-line” pois requerem um grande esforço computacional.

Com o intuito de acelerar os estudos de estabilidade transitória, objetivando a obtenção de técnicas adequadas a aplicações em tempo real, estuda-se, neste trabalho, a aplicação de métodos diretos à análise de estabilidade transitória. Os métodos diretos são adequados a aplicações em tempo real, pois fornecem informações a respeito da estabilidade diretamente, ou seja, sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais.

O critério das áreas iguais foi o primeiro método direto proposto na literatura para o estudo da estabilidade de sistemas de uma máquina versus barramento infinito. Posteriormente, várias metodologias de análise foram propostas para sistemas multimáquinas gerais. Inicialmente as idéias de Liapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle eram utilizadas para estimar a bacia de atração dos sistemas de potência. Tomava-se, dentre todos os pontos de equilíbrio instáveis na fronteira da bacia de energia potencial, aquele que possuía a menor energia. Este valor de energia era então utilizado para obter uma estimativa da área de atração. Logo percebeu-se que esta técnica levava a resultados muito conservadores, ou seja, estimava-se um tempo crítico de abertura que era muito inferior ao tempo crítico verdadeiro. Este conservadorismo é uma consequência natural do Princípio de Invariância de LaSalle o qual fornece condições suficientes de estabilidade, porém não necessárias.

Para melhorar a estimativa do tempo crítico de abertura, criou-se o conceito do ponto de equilíbrio de controle. Com este conceito, em vez de utilizar-se o ponto de equilíbrio instável de menor energia, passa-se a utilizar o ponto de equilíbrio que está mais “próximo” da trajetória do sistema em falta. Muitas técnicas de determinação do ponto de equilíbrio de controle foram propostas e os estudos, nesta direção, culminaram com o desenvolvimento do método BCU.

O método BCU surgiu após vários estudos teóricos que foram feitos por Chiang et al. (1988; 1994). Fundamentado em conceitos matemáticos, o método BCU mostrou-se muito eficiente, determinando corretamente o ponto de equilíbrio de controle nas mais diversas situações.

Embora os avanços obtidos na aplicação de métodos diretos à análise de esta-

bilidade transitória tenham sido significativos, existem ainda muitos obstáculos que impedem a aplicação destes a análises de sistemas reais. Em verdade, estes obstáculos estão intimamente relacionados com as limitações do Princípio de Invariância de LaSalle.

Com o objetivo de reduzir estes obstáculos, uma extensão do Princípio de Invariância de LaSalle é proposta neste trabalho. Esta é mais flexível que o Princípio de Invariância original permitindo que problemas mais gerais possam ser tratados. Aproveitando-se desta maior flexibilidade, abordam-se dois problemas existentes na aplicação de métodos diretos ao estudo de estabilidade transitória.

O primeiro problema é que os métodos diretos ainda são impróprios para incorporar modelos mais realísticos. Neste trabalho estuda-se, em particular, o problema da existência de uma Função de Liapunov para sistemas de potência com perdas nas linhas de transmissão. Propõe-se uma nova função energia para estes sistemas e demonstra-se que esta é uma Função de Liapunov no senso mais geral da extensão do Princípio de Invariância de LaSalle quando as condutâncias de transferência são suficientemente pequenas.

A motivação para o segundo problema surgiu quando recentemente verificou-se que o método BCU, assim como todos os outros métodos baseados no conceito de ponto de equilíbrio de controle, pode falhar. Llamas et al. (1995) mostraram que este problema ocorre quando a condição de transversalidade não é satisfeita. Nestes casos, o sistema, ainda que garantidamente estável para o primeiro “swing”, perde o sincronismo em swings subsequentes ao primeiro.

Um dos objetivos deste trabalho é a proposição de uma metodologia de análise de estabilidade através de métodos diretos que garanta a estabilidade em “swings” subsequentes ao primeiro e que não seja tão conservadora quanto àquelas metodologias baseadas no ponto de equilíbrio de menor energia. A grande dificuldade desta análise seria a determinação de um novo ponto de equilíbrio de controle que garantisse a estabilidade para “swings” subsequentes ao primeiro.

Na metodologia proposta neste trabalho, esta dificuldade é superada através de uma análise de coerência entre os geradores do sistema. O principal objetivo

desta análise de coerência é a identificação dos modos de instabilidade existentes no sistema pós-falta. Desta forma, pode-se prever, de antemão, a localização aproximada dos pontos de equilíbrio instáveis, os quais passam a ser mais facilmente calculados mesmo em “swings” subsequentes ao primeiro.

Capítulo 2

Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

2.1 Introdução

O Princípio de Invariância de LaSalle é uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. Este resultado foi primeiramente estabelecido e provado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita por LaSalle (1960a; 1960b). Depois disto, foi estendido para equações diferenciais definidas em espaços de dimensão infinita, ver Hale (1969), Slemrod (1970) incluindo equações diferenciais funcionais, veja Hale e Lunel (1993). Este também foi estendido para equações diferenciais não autônomas periódicas por LaSalle (1962), quase-periódicas por Miller (1965) e para equações diferenciais ordinárias mais gerais por Sell (1967). Rodrigues (1970) obteve uma extensão para equações não autônomas retardadas e LaSalle (1977) para equações de diferença.

A grande virtude do Princípio de Invariância de LaSalle é que ele fornece um meio de estudar a estabilidade de um sistema sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais. Para isto, utiliza-se uma função auxiliar denominada *Função de Liapunov*. Ainda que o Princípio de Invariância de LaSalle venha sendo utilizado com sucesso em inúmeras aplicações, ele apresenta alguns problemas. Um dos principais é que ele não fornece nenhuma maneira sistemática de encon-

trar a Função de Liapunov. A condição mais restritiva para encontrar tal função é que se exige que a derivada da Função de Liapunov, ao longo das trajetórias do sistema, seja semi-definida negativa. Em sistemas complexos, tais como sistemas caóticos, dificilmente encontram-se Funções de Liapunov satisfazendo estas condições. Neste trabalho, propõe-se uma versão mais geral do Princípio de Invariância de LaSalle na qual não exige-se que a derivada da Função de Liapunov¹ seja sempre semi-definida negativa. Com isto, a obtenção de Funções de Liapunov torna-se mais simples e muitos problemas físicos e de engenharia, que antes não podiam ser tratados com a teoria convencional, passam a ser tratados através da extensão do Princípio de Invariância. A generalização do Princípio de Invariância de LaSalle proposta neste trabalho é útil para encontrar estimativas de atratores de sistemas não-lineares.

2.2 Revisão

Considere a seguinte equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 . Um ponto $y \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio de (2.1) se $f(y) = 0$. Denota-se por $\varphi(t, x_o)$ a solução de (2.1) com condição inicial em x_o , ou seja, $\varphi(0, x_o) = x_o$.

Definição 2.1 *Um ponto de equilíbrio x_s é um ponto de equilíbrio estável no sentido de Liapunov se dado $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno), existir um $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(t, x_o) - x_s\| \leq \varepsilon$ para $t \geq 0$ sempre que $\|x_o - x_s\| \leq \delta$.*

Definição 2.2 *Um ponto de equilíbrio é instável se não for estável.*

Definição 2.3 *Um ponto de equilíbrio x_s é assintoticamente estável se for estável e $\varphi(t, x_o) \rightarrow x_s$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $\|x_o - x_s\| \leq \delta$.*

¹A expressão *Função de Liapunov* neste trabalho é utilizada com um significado mais amplo do que o usual, pois permite-se que a derivada da Função de Liapunov assuma valores positivos em certas regiões do espaço de estados.

O conceito de estabilidade no sentido de Liapunov é uma característica local do campo vetorial nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. Embora esta informação seja importante, muitas vezes deseja-se estudar o comportamento global do sistema. Neste caso tem-se:

Definição 2.4 *A bacia de atração ou área de atração $A(x_s)$ de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável x_s é o conjunto de todas as condições iniciais cujas órbitas tendem para x_s quando $t \rightarrow +\infty$. Em linguagem de conjunto tem-se:*

$$A(x_s) := \{x_o \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x_o) \rightarrow x_s \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}.$$

Definição 2.5 *Um ponto de equilíbrio x_s é globalmente assintoticamente estável se for estável e $A(x_s) = \mathbb{R}^n$.*

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável se todas as órbitas tendem para ele quando $t \rightarrow +\infty$.

Definição 2.6 *Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é invariante com relação à (2.1) se, para todo $x_o \in B$, $\varphi(t, x_o) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Um ponto de equilíbrio é um conjunto invariante, órbitas periódicas também são exemplos de conjuntos invariantes.

Definição 2.7 *Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é positivamente invariante (negativamente invariante) com relação à (2.1) se, para todo $x_o \in B$, $\varphi(t, x_o) \in B$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ ($t \in \mathbb{R}_-$).*

Definição 2.8 *Um ponto p pertence ao conjunto ω -limite de x_o , $\omega(x_o)$, se existir uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\varphi(t_n, x_o) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Definição 2.9 *Um ponto p pertence ao conjunto α -limite de x_o , $\alpha(x_o)$, se existir uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$ tal que $\varphi(t_n, x_o) \rightarrow p$ quando $t \rightarrow -\infty$.*

Os conjuntos α -limite e ω -limite são conjuntos invariantes.

2.3 Princípio de Invariância de LaSalle

Antes de se apresentarem os resultados obtidos neste trabalho, é interessante rever a versão original do Princípio de Invariância de LaSalle (1960a; 1960b).

Seja a seguinte equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.2)$$

Teorema 2.10 : *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja L uma constante real tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Admita que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_L$ e defina $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então, toda solução de (2.2) iniciando em Ω_L converge para B quando $t \rightarrow \infty$.*

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez por LaSalle (1960b). A demonstração do teorema anterior é apresentada a seguir para que o leitor possa comparar com outras demonstrações que aparecerão ao longo do texto. Maiores detalhes podem ser encontrados também em Brauer e Nohel (1969).

Demonstração: Sejam $x_o \in \Omega_L$ e $\varphi(t, x_o)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_o em $t = 0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Então, $\dot{V}(\varphi(t, x_o)) \leq 0$ neste intervalo e $V(\varphi(t, x_o))$ é decrescente. Consequentemente $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite $\omega(x_o)$ de $\varphi(t, x_o)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : V(x) \leq V(x_o)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(t, x_o))$ é decrescente e inferiormente limitada, $V(\varphi(t, x_o)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_o)$ é um conjunto invariante de (2.2), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_o)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_o)$. Conclui-se portanto que $\varphi(t, x_o) \rightarrow \omega(x_o) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$. ■

A função V utilizada no Teorema 2.10 é conhecida por *Função de Liapunov*. Observe que o Teorema admite a existência desta função mas não diz nada a respeito de como encontrá-la. Em verdade, não existem métodos sistemáticos

para encontrar uma Função de Liapunov e encontrá-la é, sem sombra de dúvida, uma tarefa não trivial.

Outro problema do Teorema 2.10 é que ele apresenta condições suficientes de estabilidade, porém, estas condições não são necessárias. Portanto, se as condições do Teorema 2.10 não são satisfeitas, nada se pode afirmar a respeito do comportamento das soluções de (2.2).

Figura 2.1: Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle

É interessante interpretar geometricamente o teorema anterior. Para isto utilizar-se-á a Figura 2.1 na qual se apresenta um caso simples da aplicação do teorema de LaSalle. Como exigido pelo Teorema 2.10, Ω_L é um conjunto limitado nesta figura. A linha tracejada representa o conjunto E no qual $\dot{V} = 0$. Suponha que o maior conjunto invariante contido em E seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável x_s . Considere agora a curva de nível $\Omega_l := \{x \in \Omega_L : V(x) = l < L\}$ e seja p um ponto nesta curva de nível. Como dentro de Ω_L , a derivada de V é menor ou igual a zero, obtém-se pela regra da cadeia a seguinte estimativa:

$$\dot{V} = \langle \text{grad}(V), \dot{x} \rangle = \langle \text{grad}(V), f \rangle \leq 0.$$

Em particular, esta desigualdade é verdadeira para o ponto p . Desta desigualdade verifica-se que o produto escalar do vetor gradiente de V , o qual é perpendicular às curvas de nível, com o vetor velocidade f , o qual é tangente às órbitas do sistema, deve ser menor ou igual a zero. Isto significa que o ângulo entre estes vetores deve ser maior ou igual a 90° , como mostra a Figura 2.1. Esta relação entre estes vetores existe para todos os pontos da curva de nível Ω_l da função V , logo as soluções estão necessariamente entrando na região delimitada pela curva de nível Ω_l . Isto vale para todas as curvas de nível internas a Ω_L , logo toda solução iniciando em Ω_L deverá convergir para o ponto de equilíbrio x_s . Esta observação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle dá origem aos métodos de estimativa da área de atração de pontos de equilíbrio estáveis de sistemas não-lineares.

Uma versão global deste teorema também foi proposta por LaSalle (1960b). Esta versão é muito similar ao seguinte teorema:

Teorema 2.11 : *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Admita que $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e defina $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então toda solução limitada para $t \geq 0$ de (2.2) converge para B quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Seja $\varphi(t, x_o)$ uma solução limitada para $t \geq 0$ e seja $\omega(x_o)$ seu conjunto ω -limite. Desde que $V(\varphi(t, x_o))$ é uma função limitada decrescente para $t \geq 0$, tome $v := \lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t, x_o))$. O conjunto $\omega(x_o)$ é compacto, não vazio e invariante. Isto implica que $V \equiv v$ em $\omega(x_o)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_o)$. Então, $\omega(x_o) \subset B$. Desde que $\varphi(t, x_o) \rightarrow \omega(x_o)$, quando $t \rightarrow \infty$, pode-se concluir que $\varphi(t, x_o) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$. ■

Observação 2.12 : *Observe que neste caso, a compacidade das órbitas positivas é garantida pois as soluções são limitadas por hipótese, ao passo que no primeiro teorema, a compacidade era garantida pela limitação de Ω_L .*

2.4 Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

Neste trabalho, apresentam-se resultados mais gerais do que aqueles que foram apresentados na seção anterior. Estes requerem condições menos restritivas do que aquelas exigidas na versão original, possibilitando o tratamento de problemas mais gerais. Basicamente, permite-se que a derivada de V seja positiva em algumas regiões. Com estas condições menos restritivas, torna-se mais fácil encontrar a função V e alguns problemas bastante complicados, tais como sistemas caóticos, podem ser tratados.

O teorema a seguir foi proposto e demonstrado pela primeira vez por Rodrigues, Alberto e Bretas em 1998 (Rodrigues et al., 2000).

Teorema 2.13 : (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle).

Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$, e admita que $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : V(x) \leq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (2.2) contido em E . Então, toda solução de (2.2) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B quando $t \rightarrow \infty$.

Além disto, se $x_o \in \bar{\Omega}_l$, então $\varphi(t, x_o) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$ e $\varphi(t, x_o)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.2) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Demonstração: Suponha que $x_o \in \Omega_L$ e $x_o \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\varphi(t, x_o)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_o em $t = 0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Admita inicialmente que a solução $\varphi(t, x_o)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \in [0, t_+)$. Como $C \subset \bar{\Omega}_l$, então, $\dot{V}(\varphi(t, x_o)) \leq 0$ neste intervalo. Portanto $V(\varphi(t, x_o))$ é decrescente e conseqüentemente $V(\varphi(t, x_o)) \leq V(x_o) < L$. Isto implica que $t_+ = \infty$ e o ω -limite $\omega(x_o)$ de $\varphi(t, x_o)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : V(x) \leq V(x_o)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como

$V(\varphi(t, x_o))$ é decrescente e inferiormente limitada, $V(\varphi(t, x_o)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Uma vez que $\omega(x_o)$ é um conjunto invariante de (2.2), tem-se que $V \equiv v$ em $\omega(x_o)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\omega(x_o)$. Portanto, $\omega(x_o) \subset \Omega_L - C$, logo conclui-se que $\varphi(t, x_o) \rightarrow \omega(x_o) \subset B$, quando $t \rightarrow \infty$.

Admita agora que $x_o \in \bar{\Omega}_l$. Então $V(x_o) \leq l$. Afirma-se que a solução $\varphi(t, x_o)$ permanece em $\bar{\Omega}_l$ para todo $t \in [0, t_+)$. Para provar esta afirmação, admita que exista um tempo $t^* > 0$ tal que $V(\varphi(t^*, x_o)) > l$. Então existe um $s \in [0, t^*)$ tal que $V(\varphi(s, x_o)) = l$ e $V(\varphi(t, x_o)) > l$ para $t \in (s, t^*)$. Portanto, existe $\tilde{t} \in (s, t^*)$, tal que $\dot{V}(\tilde{t}) > 0$, o que contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\bar{\Omega}_l \supset C$. Como antes, $t_+ = \infty$ e a solução permanece dentro de Ω_l , para $t \geq 0$. Portanto o conjunto ω -limite é não vazio e a solução aproxima-se dele quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, o conjunto $\omega(x_o)$ é um subconjunto invariante que está contido em $\bar{\Omega}_l$. Portanto a solução aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow \infty$. ■

Para interpretar geometricamente este teorema, observe a Figura 2.2. O conjunto Ω_L é limitado em acordo com as hipóteses do Teorema 2.13. Dentro de Ω_L , a derivada de V , ao longo das soluções, é não positiva exceto dentro do conjunto C o qual aparece em tom de cinza. Por hipótese, este conjunto nunca atinge a fronteira de Ω_L , uma vez que $l < L$. O Teorema 2.13 garante que todas as soluções de (2.2) iniciando dentro de Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em E . Se, em particular, o maior conjunto invariante contido em E estiver contido em $\bar{\Omega}_l$, então todas as soluções com condição inicial em Ω_L tendem para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. Uma vez dentro de $\bar{\Omega}_l$, as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de $\bar{\Omega}_l$, duas coisas podem ocorrer, ou as soluções tendem para o conjunto $\{x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$, ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto C indefinidamente. Estas duas situações serão ilustradas na seção de exemplos.

Na aplicação deste teorema alguns problemas técnicos podem surgir. Um deles é o cálculo do $\sup_{x \in C} V(x)$. A seguinte observação pode ser muito útil em diversas aplicações para o cálculo de l .

Figura 2.2: Interpretação geométrica da extensão do Princípio de Invariância

Observação 2.14 : *O $\sup_{x \in C} V(x)$ é sempre atingido em ∂C .*

Para provar esta afirmação basta verificar que se o supremo fosse atingido em algum ponto interior do conjunto C então o gradiente da função V seria nulo neste ponto. Logo $\dot{V}$ seria igual a zero neste ponto uma vez que $\dot{V}(x) = \langle \text{grad}(V(x)), f(x) \rangle$. Isto nos leva a uma contradição pois dentro do conjunto C tem-se que $\dot{V}(x) > 0$.

Observação 2.15 : *Se $\dot{V}(x) < 0$ para $x \notin \bar{C}$, então toda solução $\varphi(t, x_0)$ de (2.2) tende para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. Na maioria das vezes, a condição exigida anteriormente não é satisfeita, no entanto se para todo $x_0 \in E - \bar{\Omega}_l$ a solução $\varphi(t, x_0)$ abandonar o conjunto E para qualquer $t > 0$, suficientemente pequeno, então $\varphi(t, x_0)$ tende para o maior conjunto invariante contido em Ω_l .*

Observação 2.16 : *No teorema anterior, admite-se que o conjunto $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$ seja limitado. Em verdade, se apenas uma componente conexa de Ω_L é limitada, então o teorema permanece válido para esta componente. Isto segue do fato de que soluções com condições iniciais dentro de uma componente conexa não podem sair desta componente.*

Uma versão global do teorema anterior também foi proposta e demonstrada pela primeira vez por Rodrigues, Alberto e Bretas em 1998 (Rodrigues et al., 2000).

Teorema 2.17 : (Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}$. Admita que $l := \sup_{x \in C} V(x) \in \mathbb{R}$ e que $\bar{\Omega}_l := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}$ seja limitado. Seja $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ e seja B o maior conjunto invariante contido em E . Então toda solução, $\varphi(t, x_o)$, de (2.2), que é limitada para $t \geq 0$, converge para o conjunto invariante B quando $t \rightarrow \infty$.*

Além disto, se $x_o \in \bar{\Omega}_l$ então $\varphi(t, x_o)$ é definido para todo $t \geq 0$, $\varphi(t, x_o) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$, e $\varphi(t, x_o)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.2) contido em $\bar{\Omega}_l$.

Demonstração: Admita que $x_o \notin \bar{\Omega}_l$ e suponha que a solução $\varphi(t, x_o)$ de (2.2) seja limitada para $t \geq 0$. Admitindo-se que a solução $\varphi(t, x_o)$ permaneça fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \geq 0$, então $\dot{V}(\varphi(t, x_o)) \leq 0$ para $t \geq 0$. Como $V(\varphi(t, x_o))$ é uma função decrescente e limitada inferiormente para $t \geq 0$, existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $v := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$. O conjunto ω -limite, $\omega(x_o)$, é compacto, não-vazio e invariante. Isto implica que $V \equiv v$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$, em $\omega(x_o)$. Então $\omega(x_o) \subset B$. Desde que $x(t) \rightarrow \omega(x_o)$, quando $t \rightarrow \infty$, conclui-se que $\varphi(t, x_o) \rightarrow B$ quando $t \rightarrow \infty$.

Admita agora que $x_o \in \bar{\Omega}_l$. Então $V(x_o) \leq l$. Afirma-se que a solução $\varphi(t, x_o)$ permanece em $\bar{\Omega}_l$ para todo $t \geq 0$. Para provar isto, suponha que exista um tempo $t^* > 0$ tal que $V(\varphi(t^*, x_o)) > l$. Então existe $s \in (0, t^*)$ tal que $V(\varphi(s, x_o)) = l$ e $V(\varphi(t, x_o)) > l$ para $t \in (s, t^*)$. Isto contradiz o fato de que $\dot{V} \leq 0$ fora de $\Omega_l \supset C$. Como antes, a solução permanece dentro de Ω_l , para $t \geq 0$ e portanto, o conjunto ω -limite, $\omega(x_o)$, é não-vazio e a solução tende para ele quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, $\omega(x_o)$ é um conjunto invariante de (2.2) e $\omega(x_o) \subset \bar{\Omega}_l$. Portanto, a solução aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. ■

As Observações 2.14 e 2.15 feitas para o Teorema 2.13 podem ser adaptadas ao Teorema 2.17. Do ponto de vista de aplicações, a seguinte observação é bastante importante.

Observação 2.18 : *Admitindo-se, no teorema acima, que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada radialmente, i.e., $V(x) \rightarrow \infty$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, então toda solução é limitada para $t \geq 0$ e as conclusões do teorema acima são válidas para todas as soluções.*

O Teorema 2.17 apresentado anteriormente associado à Observação 2.18 é muito útil para a obtenção de estimativas de atratores globais. Existem sistemas entretanto em que a estabilidade do atrator não é global. Nestes casos, a identificação de atratores instáveis pode ser importante. O teorema a seguir apresenta uma versão instável do Princípio de Invariância, a qual é útil para localizar atratores instáveis. Esta versão foi demonstrada por Rodrigues, Alberto e Bretas em 1999.

Teorema 2.19 : (Versão Instável da Extensão do Princípio de Invariância) *Sejam $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 . Seja $L \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > L\}$ seja limitado. Seja $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$ e suponha que $\inf_{x \in C} V(x) = l > L$. Defina $\bar{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \geq l\}$ e $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$. Seja B o maior conjunto invariante de (2.2) contido em E . Então toda solução de (2.2) iniciando em Ω_L converge para o conjunto invariante B , quando $t \rightarrow -\infty$.*

Além disso se $x_o \in \bar{\Omega}_l$, então $\varphi(t, x_o) \in \bar{\Omega}_l$ para todo $t \leq 0$ e $\varphi(t, x_o)$ tende para o maior conjunto invariante de (2.2) contido em $\bar{\Omega}_l$ quando $t \rightarrow -\infty$.

Demonstração: Seja $x_o \in \Omega_L$ e $x_o \notin \bar{\Omega}_l$. Seja $\varphi(-t, x_o)$ a solução da equação diferencial com condição inicial x_o em $t = 0$. Seja $[0, t_+)$ o máximo intervalo de existência desta solução enquanto esta permanece dentro de Ω_L . Suponha primeiramente que a solução $\varphi(-t, x_o)$ permanece fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$ para $t \in [0, t_+)$. Então, $\dot{V}(\varphi(t, x_o)) \leq 0$ neste intervalo. Consequentemente $V(\varphi(-t, x_o))$ é

crescente e portanto $V(\varphi(-t, x_o)) \geq V(x_o) > L$. Isto significa que $t_+ = \infty$ e o α -limite $\alpha(x_o)$ de $\varphi(t, x_o)$ está contido no conjunto $\{x \in \Omega_L : V(x) \geq V(x_o)\}$, o qual é um subconjunto compacto de Ω_L . Como $V(\varphi(-t, x_o))$ é crescente e limitada superiormente, $V(\varphi(-t, x_o)) \rightarrow v \in \mathbb{R}$, quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente $V \equiv v$ em $\alpha(x_o)$ e portanto $\dot{V} \equiv 0$ em $\alpha(x_o)$, uma vez que este é um conjunto invariante de (2.2). Então conclui-se que $\alpha(x_o) \subset \bar{\Omega}_L - C$ e portanto $\varphi(t, x_o) \rightarrow \alpha(x_o) \subset B$, quando $t \rightarrow -\infty$.

Suponha agora que $x_o \in \bar{\Omega}_l$. Então $V(x_o) \geq l$. Afirma-se que a solução $\varphi(-t, x_o)$ permanece em $\bar{\Omega}_l$ para todo $t \in [0, t_+)$. Para provar esta afirmativa, suponha que exista um tempo $t^* > 0$ tal que $V(\varphi(-t^*, x_o)) < l$. Então existe $s \in [0, t^*)$ tal que $V(\varphi(-s, x_o)) = l$ e $V(\varphi(-t, x_o)) < l$ para $t \in (s, t^*)$, o que contradiz o fato de $\dot{V} \leq 0$ fora do conjunto $\bar{\Omega}_l$. Como antes, $t_+ = \infty$ e a solução $\varphi(-t, x_o)$ permanece dentro de $\bar{\Omega}_l$, para $t \geq 0$. Portanto o conjunto α -limite, $\alpha(x_o)$, é não-vazio e a solução $\varphi(t, x_o)$ tende para ele quando $t \rightarrow -\infty$. Por outro lado, $\alpha(x_o)$ é um subconjunto invariante que está contido em $\bar{\Omega}_l$. Portanto a solução $\varphi(t, x_o)$ tende para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$, quando $t \rightarrow -\infty$. ■

2.5 Exemplos

Exemplo 2.20 : Este exemplo não é uma aplicação na qual obtêm-se vantagens com a aplicação da extensão do Princípio de Invariância, entretanto, sua simplicidade é muito útil para mostrar, de forma didática, a funcionalidade da extensão. Considere o sistema linear unidimensional descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = -x. \quad (2.3)$$

A origem é um ponto de equilíbrio estável e suas órbitas estão representadas através de setas na Figura 2.3(a). A função

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (2.4)$$

é uma Função de Liapunov no sentido usual associada ao sistema (2.3). A derivada de (2.4) ao longo das soluções do sistema é dada por:

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -x^2. \quad (2.5)$$

Observe que a Função de Liapunov é sempre decrescente ao longo das soluções exceto na origem, a qual é um ponto de equilíbrio do sistema. A Figura 2.3(c) mostra esta derivada. Como V é uma função definida positiva e radialmente

Figura 2.3: Órbitas e Funções de Liapunov do sistema (2.3)

ilimitada, e $\dot{V}$ é uma função definida negativa, conclui-se, do Princípio de Invariância original (Teorema 2.11), que todas as soluções tendem para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

Agora imagine a seguinte situação hipotética na qual, por alguma razão, houvesse dificuldades em encontrar-se uma Função de Liapunov para este sistema e a seguinte função fosse uma candidata a Função de Liapunov:

$$W(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2. \quad (2.6)$$

O gráfico desta função é apresentado na Figura 2.3(b). A derivada de W é dada por:

$$\dot{W}(x) = (x - 1)\dot{x} = -x^2 + x \quad (2.7)$$

e está mostrada na Figura 2.3(d). Observe que a energia ao longo das trajetórias não é mais sempre decrescente. No intervalo $(0,1)$, as soluções movem-se para a esquerda enquanto a Função de Liapunov cresce. Portanto, esta não é uma Função de Liapunov no sentido usual e o Princípio de Invariância usual não pode ser utilizado para estudar a estabilidade deste sistema com o auxílio da função W .

Embora esta Função de Liapunov não seja muito boa para este sistema, pode-se utilizar a extensão do Princípio de Invariância proposto neste trabalho para extrair-se alguma informação a respeito da estabilidade deste sistema.

O conjunto C , onde a derivada de W é maior do que zero, é dado por:

$$C := \{x \in \mathbb{R} : -(x - 1)x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}.$$

Calculando-se o sup de W em C obtém-se:

$$l = \sup_{x \in C} W(x) = \frac{1}{2}.$$

Seja o conjunto:

$$\bar{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R} : W(x) \leq l\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}.$$

Então

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \dot{W} = 0\} \cup \bar{\Omega}_l = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$$

e, do Teorema 2.17 em conjunto com a Observação 2.18, conclui-se que toda solução de (2.3) converge para o maior conjunto invariante contido em E quando

$t \rightarrow \infty$. Neste caso é fácil ver que o único conjunto invariante contido em E é a origem. Logo, todas as soluções convergem para a origem quando $t \rightarrow \infty$.

Observe que embora a Função de Liapunov escolhida não seja uma boa função para o sistema, ela pode fornecer informações importantes a respeito da estabilidade do sistema através da extensão do Princípio de Invariância. Mesmo que não fosse possível determinar quais são os conjuntos invariantes dentro do conjunto E , concluir-se-ia que todas as soluções deste sistema convergiriam para o intervalo $[0,2]$, o qual é uma estimativa do atrator deste sistema.

Exemplo 2.21 :

Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - f(x, y)y \end{cases} \quad (2.8)$$

e seja

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \quad (2.9)$$

uma Função de Liapunov associada a este sistema. A função V satisfaz as hipóteses do Teorema 2.17 e da Observação 2.18. Sua derivada é dada por:

$$\dot{V}(x, y) = -f(x, y)y^2. \quad (2.10)$$

Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)$. O conjunto C é limitado e é dado por:

$$C := \{(x, y) \in \Omega_L : (x^2 + y^2 - 1) < 0; y \neq 0\}.$$

O conjunto C é um disco aberto de raio unitário com centro na origem excluindo o segmento no qual $y = 0$. Calculando-se l obtém-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x) = \sup_{x \in C} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Então,

$$\bar{\Omega}_l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq \frac{1}{2}\}.$$

Em acordo com a versão global da extensão do Princípio de Invariância, toda solução limitada com condição inicial em $\mathbb{R}^2$ converge para o maior conjunto

Figura 2.4: Estimativa do Atrator de (2.8)

invariante contido no conjunto E , o qual é composto pelo disco fechado de raio unitário centrado na origem união com o eixo $y = 0$ (ver Figura 2.4). Como as condições da Observação 2.18 são satisfeitas, conclui-se que todas as soluções com condição inicial em $\mathbb{R}^2$ convergem para o maior conjunto invariante contido em E . Neste caso em particular, mais informações podem ser obtidas a respeito do atrator analisando-se o campo vetorial.

Seja um ponto qualquer pertencendo ao eixo $y = 0$ fora do disco de raio unitário. É fácil ver da equação diferencial (2.8) que o campo vetorial aponta para fora do eixo $y = 0$. Portanto, utilizando os argumentos da Observação 2.15, conclui-se que toda solução converge para o maior conjunto invariante contido no disco fechado de raio unitário e centrado na origem. Veja Figura 2.4.

É importante observar neste exemplo, que seria muito difícil encontrar uma Função de Liapunov satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.10. Com a extensão do Princípio de Invariância, foi possível, com uma Função de Liapunov muito

simples, encontrar um conjunto limitado que contém o atrator, que neste caso é formado pelo ponto de equilíbrio instável na origem e pelo ciclo limite formado pela circunferência de raio unitário e centrada na origem. A Figura 2.4 mostra o retrato de fase deste sistema.

Exemplo 2.22 : Sistema de Lorenz. Considere o sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -y - xz + rx \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{cases}$$

onde, $\sigma = 10, r = 28$ and $b = 8/3$. Estes valores foram escolhidos de forma a obter-se comportamentos caóticos. A seguir, mostra-se como a extensão do Princípio de Invariância pode ser facilmente utilizada para estimar-se o atrator de Lorenz.

Seja

$$V(x, y, z) = rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - 5/4r)^2 \quad (2.11)$$

uma Função de Liapunov associada ao sistema de Lorenz. Pode-se verificar que esta função satisfaz as condições da Observação 2.18, logo utilizar-se-á o Teorema 2.17 para obter-se uma estimativa do atrator de Lorenz. A derivada de V é dada por:

$$\dot{V}(x, y, z) = -2\sigma(rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz).$$

O conjunto C é dado por $C := \{x \in R^3 : rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz < 0\}$ e é fácil verificar que a fronteira de C é um elipsóide centrado em $(x = 0, y = 0, z = 5/8r)$. Como C é um conjunto convexo e a Função de Liapunov V é uma função convexa, o $\sup_{x \in C} V(x)$ ocorre na fronteira do conjunto C . Para calcular o sup de V no conjunto C , a técnica dos multiplicadores de Lagrange será utilizada. A equação do elipsóide será tratada como uma equação de restrição.

Usando a função Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y, z) = rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - \frac{5}{4}r)^2 + \lambda(rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz)$$

obtêm-se as seguintes condições de extremo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2rx(1 + \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 8y(\sigma + \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 8(\sigma + b\lambda)z - (10\sigma + 5b\lambda)r = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior obtêm-se $\lambda = -\sigma$, $x = 0$, $z = \frac{5r(2-b)}{8(1-b)}$ e $y^2 = \frac{25b^2r^2(b-2)}{64(b-1)^2}$. Substituindo estes valores na expressão de V , obtém-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x) = \frac{25b^2r^2\sigma}{16(b-1)} = \frac{156800}{3} < 52267.$$

O conjunto $\bar{\Omega}_l$ é o elipsóide: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - \frac{5}{4}r)^2 \leq \frac{156800}{3}\}$.

O conjunto no qual $\dot{V} = 0$ está contido em $\bar{\Omega}_l$ e portanto toda solução com condição inicial em $\mathbb{R}^3$ converge para o maior conjunto invariante contido em $\bar{\Omega}_l$. O conjunto $\bar{\Omega}_l$ é uma estimativa do atrator. A Figura 2.5a mostra esta estimativa. Neste caso, é importante salientar que a derivada de V permanece intercambiando de sinal depois que a solução entra em $\bar{\Omega}_l$. Um gráfico de $\dot{V}(x(t), y(t), z(t))$ é mostrado na Figura 2.5b.

Até onde se sabe, a Função de Liapunov apresentada acima é a melhor apresentada até hoje para estimar-se o atrator de Lorenz por um elipsóide positivamente invariante. Maiores detalhes a respeito deste sistema podem ser encontrados em Sparrow (1982).

(a) Estimativa do Atrator

(b) Derivada da Função de Liapunov

Figura 2.5: Sistema de Lorenz