Erros não Detectáveis no Processo de Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência

Lizandra Castilho Fabio

Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Bosco Augusto London Jr.

EESC-USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

São Carlos

2006

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço 02/10/2006
Ass.:

DEDALUS - Acervo - EESC
31100104342

TESE
1340
T 212/06
1552839

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

F119e

Fabio, Lizandra Castilho
Erros não detectáveis no processo de estimação de estado em sistemas elétricos de potência / Lizandra Castilho Fabio ; orientador João Bosco Augusto London Jr. -- São Carlos, 2006.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Sistemas Elétricos de Potência) - - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Estimação de estado em sistemas elétricos de potência. 2. Modelo de regressão linear. 3. Análise de erros grosseiros. 4. Pontos de alavancamento. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **LIZANDRA CASTILHO FABIO**

Dissertação defendida e julgada em 28-07-2006 perante a Comissão Julgadora:

Aprovado

Prof. Dr. **JOÃO BOSCO AUGUSTO LONDON JUNIOR (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **LUIS FERNANDO COSTA ALBERTO**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **MÁRIO DE CASTRO ANDRADE FILHO**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

Prof. Associado **HOMERO SCHIABEL**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
em Engenharia Elétrica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

Agradecimentos

A Deus por me conceder saúde, paciência e perseverança durante a elaboração desta dissertação de mestrado.

Ao meu marido, Ricardo Jardim, meus pais, Maria Helena Castilho e Angelo Fabio Filho, a minha avó, Maria Júlia Rimoldi Castilho a minha tia, Marilda Aparecida Castilho, aos meus irmãos, Gustavo Castilho Fabio e Andréia Castilho Fabio e a minha sogra, Mafalda Ártico, por terem vivenciado de forma amorosa, otimista e solidária a concretização de uma etapa tão importante de minha vida: aquisição do título mestre.

Ao Prof. Newton Bretas, pela oportunidade de pertencer a família LACO.

Ao Prof. João Bosco, por me orientar com muita dedicação e paciência.

Ao amigo e Prof. Mário de Castro, pela sua colaboração no desenvolvimento desta disseratação de mestrado.

Aos amigos, Raphael, Eduardo e Saulo que participaram na elaboração deste trabalho.

Aos amigos Ana Paula, Carolina, Ricardo, Elmer, Augusto, Roman, Marcelo, pelo companheirismo, carinho, confiança e aprendizado que contribuíram significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu primo Célio Franco e ao Prof. Wagner Nunes que sempre me incentivaram na concretização deste sonho.

Sumário

1 Introdução **12**

1.1 Objetivos 15

1.2 Organização da Dissertação 16

2 Modelo de Regressão Linear **19**

2.1 Modelo Estatístico 19

2.1.1 Estimador de Mínimos Quadrados 20

2.1.2 Estimador de Mínimo Valor Absoluto dos Resíduos - LAV . . 23

2.1.3 Estimador que Minimiza a Mediana dos Quadrados dos Resíduos - LMS 31

2.2 Ponto de Alavancamento e Ponto Aberrante 36

2.2.1 Comportamento do estimador LAV na presença de pontos de alavancamento e pontos aberrantes 37

2.2.2 Comportamento do estimador LMS na presença dos pontos de alavancamento e pontos aberrantes 41

2.2.3 Comportamento do estimador LS na presença dos pontos de alavancamento e pontos aberrantes 43

3 Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência **58**

3.1 Introdução 58

3.2 Estimação Estática de Estado 61

3.2.1 Estimador de Estado Baseado no Método dos Mínimos Quadrados 62
3.3 Detecção e Identificação de Medidas com Erros Grosseiros 66
3.3.1 Detecção de Medidas com Erros Grosseiros 67
3.3.2 Identificação de Medidas com Erros Grosseiros 67
3.4 Medidas Críticas 70
3.5 Conjuntos Críticos de Medidas 71
3.6 Estimador de Estado WLAV em SEP 72
3.7 Estimador de Estado WLMS em SEP 72
3.8 Pontos de Alavancamento no Processo de Estimação de Estado em SEP 74
3.9 Efeito dos Maus Pontos de Alavancamento no estimador WLS associado à análise do resíduo normalizado 76
3.10 Aplicações das Técnicas Estatísticas no Processo de EESEP 79
3.10.1 Resultados das técnicas estatísticas, em SEP, via o estimador de estado WLS não linear 85
3.11 Tratamento dado às medidas pontos de alavancamento em EESEP . . 88

4 Técnicas para Identificação de Pontos de Alavancamento em SEP 94
4.1 Conceitos Básicos de Análise Multivariada 94
4.1.1 Amostra Multivariada 94
4.1.2 Distribuição Normal ou Gaussiana Multivariada 95
4.2 Identificação de Pontos de Alavancamento usando Técnicas de Análise Multivarivada 97
4.2.1 Propriedade de Robustez 98
4.2.2 Métodos de Identificação de Pontos de Alavancamento 99
4.3 Estatística de Projeção em Sistemas Elétricos de Potência 105
4.3.1 Estrutura do Espaço de Fatores 105
4.3.2 Algoritmo de Projeção em Sistemas Elétricos de Potência . . . 106

4.4 Identificação de Pontos de Alavancamento através da Estatística de Projeção 109

4.4.1 O Valor Crítico do Algoritmo de Projeção 109

4.4.2 Distância Robusta 110

5 Análise Algébrica da Formulação do Processo de Estimação de Estado em SEP 116

5.1 Análise algébrica do estimador WLS 116

5.2 Medidas com Erros não Detectáveis 119

5.3 Exemplos de Erros Não Detectáveis 122

5.4 Medidas Pontos de Alavancamento 124

5.5 Exemplos de ENDs, em Medidas Pontos de Alavancamento 125

5.6 Identificação de Medidas com Erros não Detectáveis 130

5.6.1 Propriedade da Matriz de Sensibilidade dos Resíduos 131

5.7 Método para Identificação de Medidas com ENDs 133

5.7.1 Algoritmo para Identificação de Medidas Pontos de Alavancamento 136

5.7.2 Testes Numéricos - Identificação de Medidas Pontos de Alavancamento 136

5.7.3 Demonstração da Equação (5.11) 141

6 Análise da Influência da Matriz de Ponderação no Processo de EE-SEP 142

6.1 Processamento de EGs através da Análise do Resíduo Normalizado, utilizando a Matriz de Ponderação Correta 143

6.1.1 Obtenção da Matriz de Ponderação Correta 143

6.1.2 Teste do Resíduo Normalizado utilizando a Matriz de Ponderação Correta 144

6.1.3 Análise Algébrica dos Efeitos de utilizar a Matriz de Ponderação Correta 145

6.1.4 Utilizando como Matriz de Ponderação a Matriz de Rotação . 150

6.1.5 Utilizando, como Matriz de Ponderação, a Matriz de Escalonamento 154

7 Conclusões e Perspectivas Futuras **156**

7.0.6 Principais Contribuições do Trabalho 158

7.1 Sugestões para Novas Pesquisas 159

Referências Bibliográficas **159**

Lista de Figuras

2.1 Função T_i 24

2.2 Gráfico da função T 24

2.3 Estimadores de locação LS, LAV e LMS relativos ao conjunto de dados em (2.25). 32

2.4 Gráficos das funções LS e LMS 33

2.5 Ajuste da função de regressão LMS para o caso III 36

2.6 Função de regressão LAV ajustada na presença de um único ponto aberrante (a) e um único ponto de alavamcamento (b) 38

2.7 Função de regressão LMS ajustada na presença de um único ponto aberrantes (a) e um único ponto de alavancamento (b) 42

2.8 Funções de regressão LS ajustadas na presença de um único ponto aberrante e um único ponto de alavancamento 43

2.9 Conjunto de pontos no R^2 44

2.10 Ajustes das funções de regressão LS 45

2.11 Distâncias dos elementos $p(i,i)$ de $\mathbf{P}$ até o centróide $\square$ 48

3.1 Fluxograma do algoritmo acoplado 65

3.2 Fluxograma do algoritmo desacoplado 65

3.3 Sistema de 6 barras 82

4.1 Elipsóides MD_i e RD_i 102

4.2 Sistema de 14 barras do IEEE 107

4.3 Sistema de 3 barras 111

4.4 Elipsóides MD_i e RD_i 112

5.1 Interpretação geométrica 120

5.2 Sistema Elétrico de 2 barras 122

5.3 Exemplo de erro não detectável 123

5.4 Erro grosseiro na medida z_2 126

5.5 Erro grosseiro na medida z_1 127

5.6 Sistema Elétrico 3 barras 128

5.7 sistema de 5 barras 129

5.8 Propriedade 5.1 (Interpretação para duas medidas) 132

6.1 Sistema de 2 barras com 3 medidas de fluxo de potência ativa 143

6.2 Sistema de 2 barras com 2 medidas de fluxo de potência ativa 150

Lista de Tabelas

2.1 Dados para o exemplo 2.1 26

2.2 Dados para o exemplo 2.2 (Ponto de referência:3) 29

2.3 Dados referente a figura 2.6(b) (Ponto de referência: 3) 39

2.4 Dados referente a figura 2.6(b) (Ponto de referência:1) 40

3.1 Dados de Linhas do Sistema 6 Barras 82

3.2 Dados de Linha do Sistema de 6 Barras 83

3.3 Dados de Linhas do Sistema 6 Barras 83

3.4 Teste 2 - Iteração 1 89

3.5 Teste 2 - Iteração 2 90

3.6 Teste 2 - Iteração 3 91

4.1 Distâncias clássicas e robustas 113

6.1 Tabela dos desvios padrão das medidas associadas ao sistema da figura 6.1 144

6.2 Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ (sistema da figura 6.1) 145

6.3 Estimação de estado com a matriz de ponderação correta (sistema da figura 6.1) 146

6.4 Ângulos entre os eixos das medidas z_i e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$ e entre os eixos das medidas $\tilde{z}_i$ e a $\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{H}})$. 148

6.5 Análise das componentes do vetor de erros 149

6.6 Estimação de estado com a matriz de ponderação correta (sistema da figura 6.2) 151
6.7 Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ (sistema da figura 6.2) 151
6.8 Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Rot}$ (sistema da figura 6.2 153
6.9 Análise das componentes do vetor de erros 153
6.10 Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Esc}$ 155
6.11 Análise das componentes do vetor de erros 155

RESUMO

Fabio, L.C.(2006). Erros não Detectáveis no Processo de Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2006.

Na tentativa de contornar os problemas ainda existentes para a detecção e identificação de Erros Grosseiros (EGs) no processo de Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência (EESEP), realiza-se, neste trabalho, uma análise da formulação dos estimadores aplicados a Sistemas Elétricos de Potência, em especial, o de mínimos quadrados ponderados, tendo em vista evidenciar as limitações dos mesmos para o tratamento de EGs. Em razão da dificuldade de detectar EGs em medidas pontos de alavancamento, foram também analisadas as metodologias desenvolvidas para identificação de medidas pontos de alavancamento. Através da formulação do processo de EESEP como um problema de álgebra linear, demonstra-se o porquê da impossibilidade de detectar EGs em determinadas medidas redundantes, sendo proposto, na seqüência, um método para identificação de medidas pontos de alavancamento. Para reduzir os efeitos maléficos dessas medidas no processo de EESEP verifica-se a possibilidade de aplicar outras técnicas estatísticas para o processamento de EGs, bem como técnicas para obtenção de uma matriz de ponderação adequada.

Palavras-chave: Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência, Modelo de Regressão Linear, Análise de Erros Grosseiros, Projeção Ortogonal, Múltiplos Erros Grosseiros, Pontos de Alavancamento.

Abstract

Fabio, L.C. (2006). Undetectable Errors in Power System State Estimation. Dissertation - Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos 2006.

ABSTRACT

To overcome the problems still existent for Gross Errors (GEs) detection and identification in the process of Power System State Estimation (PSSE), the formulations of the estimators applied to Power Systems are analyzed, specially, the formulation of the Weighted Least Squares Estimator. These analyses were performed to show the limitations of these estimators for GEs processing. As Leverage Points (LP) represent a problem for GEs processing, methodologies for LP identification were also verified. By means of the linear formulation of the PSSE process, the reason for the impossibility of GEs detection in some redundant measurements is shown and a method for LP identification is proposed. To minimize the bad effects of the LP to the PSSE process, the possibility of applying other statistic techniques for GEs processing, as well as techniques to estimate an weighting matrix are also analyzed

Key-words: Power System State Estimation, Linear Regression Model, Gross Errors Analysis, Orthogonal Projection, Multiple Gross Errors, Leverage Points.

Capítulo 1

Introdução

A operação em tempo real requer uma grande quantidade de informações. Dentre estas, as variáveis de estado do sistema, que são as tensões complexas nas barras, são fundamentais. Devido à grande dimensão dos Sistemas Elétricos de Potência (SEP), tais informações são obtidas através dos sistemas de telemedições, isto é, medições feitas a distância, que estão sujeitas a uma série de erros. Assim, para a obtenção de um banco de dados confiável, é necessário que as medidas sejam filtradas. A ferramenta utilizada nos modernos centros de operação, para realizar essa filtragem, é o estimador de estado. O estimador de estado tem por objetivo a obtenção, em tempo real, das variáveis de estado de um SEP, através do processamento de um conjunto redundante de medidas analógicas com ruído, constituído usualmente de fluxo de potência ativa e reativa nas linhas, injeção de potência ativa e reativa e algumas magnitudes de tensão nos barramentos.

A estimação de estado consiste no cálculo de estados desconhecidos, através de um conjunto de medidas inexatas. Destarte, a estimação obtida para as variáveis de estado desconhecidas também não será exata. Pode-se dizer então que o problema de estimação consiste em encontrar uma forma de atingir a melhor estimativa das variáveis de estado desconhecidas e, para isto, dos muitos critérios estatísticos existentes, o que vem sendo mais utilizado, para a estimação de estado em SEP, é o

dos mínimos quadrados ponderados (Weighted Least Squares - WLS) (Schweppe, 1970).[1]

Quando os erros nas medidas são gaussianos, o estimador WLS funciona muito bem, mas falha na ocorrência de um ou mais erros grosseiros (EGs).[2]

Na tentativa de superar esta limitação, métodos para a detecção e identificação de EGs foram desenvolvidos, entre os quais os mais utilizados são aqueles baseados na análise estatística dos resíduos das medidas,[3] ou numa função dos mesmos. Isto porque os resíduos fornecem informações úteis sobre eventuais violações das suposições feitas em relação ao modelo de medição.

Na ocorrência de EG simples, isto é, quando apenas uma medida possui EG, os métodos para detecção e identificação de EGs apresentam um bom desempenho, para diversas situações, mas possuem algumas limitações, como, por exemplo, o fato de não detectarem EGs em medidas críticas[4] (Clements *et al.*, 1981; London Jr, 2005) e não identificarem EGs em conjuntos críticos de medidas[5] (Mili *et al.*, 1984). Isto em razão de as medidas críticas apresentarem resíduos nulos e as medidas de um conjunto crítico possuírem resíduos normalizados idênticos. Para contornar essas limitações, foram desenvolvidos métodos que permitem a obtenção de planos de medição insentos de medidas críticas e de conjuntos críticos de medidas (Korres & Contaxis, 1994; Abur & Magnago, 1999).

No caso de EGs múltiplos não sujeitos à interação, quando estes não ocorrem em medidas críticas e conjuntos críticos de medidas, uma generalização da análise

[1]Isto em razão da simplicidade da sua formulação, bem como da facilidade da sua implementação computacional.

[2]Em geral dizemos que uma medida é portadora de erro grosseiro, quando a mesma desvia do seu valor verdadeiro de, no mínimo, três vezes o seu desvio padrão (Mili *et al.* (1984)).

[3]Resíduo das medidas é a diferença entre o seu valor medido e o estimado das mesmas.

[4]Medida crítica é a medida que, quando perdida, faz um sistema observável tornar-se não observável.

[5]Conjunto crítico de medidas é o conjunto de medidas formado por medidas não críticas, em que a eliminação de uma qualquer, a ele pertencente, torna as demais críticas.

dos resíduos pode, na maioria das situações, ser suficiente para detectar e identificar corretamente sa medidas portadoras de EGs. Entretanto, tal generalização não pode ser realizada para o processamento de EGs sujeitos à interação. Porquanto, nesta situação, as medidas portadoras de EGs são redundantes entre si e, sendo os resíduos combinações lineares dos erros de medição, nem sempre as medidas com EGs são aquelas com resíduos normalizados de maior magnitude (Mili *et al.*, 1984).

Paralelamente ao desenvolvimento do estimador WLS, os pesquisadores vêm tentando desenvolver estimadores estatisticamente mais robustos para SEP, isto é, com capacidade de obter-se uma boa estimativa mesmo na presença de EGs.

O método do mínimo valor absoluto ponderado (Weighted Least Absolute Value - WLAV) foi então desenvolvido e aplicado a SEP (Irving *et al.*, 1978; Kotiuga & Vidyasagar, 1982), mostrando-se mais robusto que o WLS na presença de erros grosseiros múltiplos. Entretanto, o WLAV falha na ocorrência de EG em uma ou mais medidas redundantes, que possuam a característica de serem altamente "influentes", atraindo a convergência do processo de estimação de estado. Essas medidas são chamadas de pontos de alavancamento [discussão das referências (Falcão & Assis, 1988; Monticelli, 2000)].[6]

Devido à característica de atrairem a convergência do processo de estimação de estado, as medidas pontos de alavancamento, isentas de EG, melhoram a precisão do estimador de estado, sendo por isso chamadas de bons pontos de alavancamento, enquanto que as portadoras de EGs denominam-se maus pontos de alavancamento.

Dizemos então que o estimador WLAV perde a robustez na presença de medidas maus pontos de alavancamento. Eis a razão de se tentar identificar as medidas pontos de alavancamento, bem como por que se tornou tema de várias pesquisas a redução ao mínimo dos efeitos de alavanca das mesmas (Abur *et al.*, 1997; Jabr & Pal, 2003).

[6]Vale destacar que o WLS também falha na ocorrência de EGs em medidas pontos de alavancamento.

Buscando um outro caminho, para contornar os problemas causados pelas medidas pontos de alavancamento com EGs, em Mili *et al.* (1991) foi proposto o estimador de mínima mediana do resíduo ao quadrado (Least Median of Square - LMS), para SEP. Entretanto, tal estimador exige um elevado custo computacional, tornando-o inviável para aplicação em tempo real (Falcão & Arias, 1994; Monticelli, 2000).

1.1 Objetivos

Conforme mostrado na seção anterior, a tentativa de filtrar medidas portadoras de EGs, durante o processo de estimação de estado em SEP, não é recente, mas continua sendo de interesse de diversos pesquisadores. Isto porque em muitas aplicações práticas os EGs ainda não são detectados e/ou identificados corretamente, devido principalmente à baixa redundância das medidas analógicas fornecidas ao estimador de estado, bem como ao efeito de espalhamento dos resíduos e aos pontos de alavancamento.

Daí o porquê da proposição deste trabalho, cuja motivação principal foi o trabalho prosposto por London Jr. *et al.* (2004), onde se demonstrou que a existência de medidas pontos de alavancamento é um problema estrutural do processo de estimação de estado em sistemas elétricos de potência.

Para chegar a esta conclusão, em London Jr. *et al.* (2004) formulou-se o processo de estimação de estado como um problema de álgebra linear, ao invés da formulação estatística clássica. A vantagem de utilizar-se a álgebra linear está no fato de os problemas estruturais do processo de estimação de estado tornarem-se mais evidentes.

Os objetivos deste trabalho são os seguintes:

1. Estudar e apresentar a formulação dos estimadores aplicados a SEP, em especial o WLS, tendo em vista evidenciar as limitações dos mesmos para o tratamento de EGs;

2. Estudar e apresentar as metodologias desenvolvidas para identificação de medidas pontos de alavancamento;

3. Estudar a formulação do processo de estimação de estado como um problema de álgebra linear (London *et al.*, 2004);

4. Tomando como base o trabalho proposto por London *et al.* (2004), desenvolver uma metodologia que possibilite determinar o porquê da impossibilidade de detectar, através da análise dos resíduos, EGs em determinadas medidas redundantes;

5. Desenvolver um método para identificação de medidas pontos de alavancamento, bem como para tornar mínimos os efeitos maléficos causados por essas medidas, no processo de estimação de estado, quando as mesmas são portadoras de EGs.

1.2 Organização da Dissertação

Os próximos capítulos desta dissertação estão organizados da seguinte forma:

Capítulo 2: Modelo de Regressão Linear

Refere-se à realização de uma análise matemática da formulação dos estimadores já utilizados em SEP, com mais detalhes para a formulação do estimador de mínimos quadrados (Least-Squares - LS). Além disso, definem-se pontos de alavancamento e aberrantes, mostrando o comportamento de cada estimador na presença dos mesmos. Nas últimas seções deste capítulo são apresentados ainda alguns métodos para identificação de pontos de alavancamento e aberrantes em análise de regressão linear.

Capítulo 3: Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência

Inicialmente apresentamos um pequeno histórico, salientando algumas pesquisas desenvolvidas para o tratamento do processo de estimação de estado em SEP. Os próximos tópicos a serem expostos neste capítulo são os seguintes:

- As formulações dos estimadores de estado aplicados em SEP, utilizando uma terminologia mais própria da "engenharia", em relação àquela utilizada no capítulo anterior. Será dada maior ênfase ao estimador de mínimos quadrados ponderados (Weighted Least Square-WLS);
- Método para deteção e identificação de EGs, baseado na análise dos resíduos das medidas;
- Ponto de alavancamento no processo de estimação de estado em SEP;
- Tratamento dado aos pontos de alavancamento em SEP.
- Aplicação das técnicas estatísticas, apresentadas no capítulo 2, no processo de Estimação de Estado em SEP.

Capítulo 4: Técnicas para identificação de pontos de alavancamento em SEP

Tomando como base o trabalho desenvolvido por Mili *et al.* (1996), neste capítulo serão apresentados e analisados os métodos para identificação de pontos de alavancamento em SEP.

Capítulo 5: Análise algébrica da formulação do processo de estimação de estado em SEP

Apresenta-se-nos a formulação do processo de estimação de estado como um problema da álgebra linear (conforme desenvolvido em (London *et al.*, 2004)); em seguida mostra-se o porquê da impossibilidade de dectectar EGs em determinadas medidas redundantes, propondo-se finalmente um método para identificação de pontos de alavancamento.

Capítulo 6: Análise da Influência da Matriz de Ponderação no Processo de EESEP

Verifica-se, neste capítulo, se é possível, através da utilização da matriz de ponderação correta, detectar e identificar EGs em medidas pontos de alavancamento,

utilizando a análise dos resíduos normalizados. Em seguida, serão apresentados os estudos aqui realizados, na tentativa de estimar -se uma matriz de ponderação adequada.

Capítulo 7: Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste capítulo estão as conclusões do trabalho, destacando as suas principais contribuições, bem como sugestões para trabalhos futuros .

Capítulo 2

Modelo de Regressão Linear

2.1 Modelo Estatístico

O modelo de regressão linear múltipla (ou geral) é dado pela expressão

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + e_i, \tag{2.1}$$

para $i = 1, \ldots, n$, sendo n o número de observações, onde

Y_i é uma variável aleatória observável (variável resposta);

x_{ij} é uma variável explicativa não aleatória para $j = 1, \cdots, k$;

β_j é um parâmetro a ser estimado, para $j = 0, 1, \ldots, k$;

e_i é o erro aleatório não observável, com $E(e_i) = 0$ e $\text{cov}(e_i, e_l) = \sigma_{il}$, para $i, l = 1, \ldots, n$.

A forma matricial do modelo é dada por

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}, \tag{2.2}$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

A matriz de covariâncias dos erros é representada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{var}(e_1) & \text{cov}(e_1, e_2) & \cdots & \text{cov}(e_1, e_n) \\ \text{cov}(e_2, e_1) & \text{var}(e_2) & \cdots & \text{cov}(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{cov}(e_n, e_1) & \text{cov}(e_n, e_2) & \cdots & \text{var}(e_n) \end{bmatrix}.$$

Podemos classificar o modelo de regressão linear geral em (2.2) como um modelo sem intercepto ou com intercepto.

No modelo com intercepto, o termo independente β_0 não é nulo. Neste caso, na matriz $\mathbf{X}$, em (2.2), existirá uma coluna constituída por elementos iguais a 1.

No modelo sem intercepto, o termo independente β_0 é nulo. Sendo assim, na matriz $\mathbf{X}$, em (2.2), não existirá a coluna de uns associada a β_0.

Além disso, se no modelo de regressão linear geral, os parâmetros β_j, para $j = 2, \cdots, k$ forem todos nulos, a expressão resultante deste modelo será

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \tag{2.3}$$

para $i = 1, \cdots, n$, que denominamos de modelo de regressão linear simples.

O vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ pode ser estimado utilizando vários métodos de estimação. É de nosso interesse compreender a formulação e propriedades dos seguintes estimadores: LS, que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos; LAV, que minimiza a soma dos valores absolutos dos resíduos; e LMS, que minimiza a mediana dos quadrados dos resíduos. Neste estudo, consideraremos que os erros sejam gaussianos, independentes e identicamente distribuídos, ou seja, $\mathbf{e} \sim N(0, \Sigma)$, onde $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$.

2.1.1 Estimador de Mínimos Quadrados

O estimador de mínimos quadrados é obtido pela minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os elementos dos vetores $\mathbf{Y}$ e $\widehat{\mathbf{Y}}$, onde $\widehat{\mathbf{Y}}$ é o estimador de $E(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ e $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é o estimador de $\boldsymbol{\beta}$.

Do modelo de regressão linear (2.1) podemos escrever

$$e_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{ki}),$$

para $i = 1, \cdots, n$. Como

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta},$$

então

$$\widehat{E(Y_i)} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \widehat{\beta}_k x_{ki} = \mathbf{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{Y}_i,$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_k)^t$ e $\mathbf{X}_i = (1, x_{i1}, \cdots, x_{ik})$ é a i-ésima linha de $\mathbf{X}$.

Portanto, podemos dizer que o estimador de mínimos quadrados minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre Y_i e $\widehat{E(Y_i)}$, para $i = 1, \cdots, n$. O vetor dos resíduos será definido por

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}. \tag{2.4}$$

Formulação do Estimador de Mínimos Quadrados

O método de mínimos quadrados consiste em estimar $\boldsymbol{\beta}$ através da minimização da função S_q, definida como

$$S_q = \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 = \mathbf{r}^t\mathbf{r} = (\mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}})^t(\mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}}). \tag{2.5}$$

Logo,

$$S_q = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})^t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Aplicando propriedades matriciais,

$$S_q = \mathbf{Y}^t\mathbf{Y} - 2\widehat{\boldsymbol{\beta}}^t\mathbf{X}^t\mathbf{Y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Derivando S em relação a $\boldsymbol{\beta}$ e igualando a 0, encontramos a expressão do ponto que minimiza S:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t\,\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}^t\,\mathbf{Y}, \tag{2.6}$$

pois como $\mathbf{X}$ é uma matriz de posto completo, $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$ é uma matriz definida positiva, e portanto, $\frac{\partial^2 S}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^t} = 2.\mathbf{X}^t\mathbf{X} > 0$ (Searle, 1982).

Analisaremos agora alguns casos especiais referentes ao modelo de regressão linear simples.

Caso I - Modelo de locação

Tomamos $\beta_1 = 0$. Então,

$$Y_i = \beta_0 + e_i, \tag{2.7}$$

para $i = 1, \cdots, n$. O estimador de mínimos quadrados de β_0, neste modelo, é

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{2.8}$$

Este estimador é chamado de estimador de locação do método LS.

Caso II - Modelo sem intercepto

Sejam $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Então,

$$Y_i = \beta_1\, x_i + e_i, \tag{2.9}$$

para $i = 1, \cdots, n$.

O estimador de mínimos quadrados de β_1 é

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Caso III - Modelo de regressão linear simples

Sejam $\beta_0 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. O modelo de regressão é dado pela expressão (2.3). O estimador de mínimos quadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é (Franklin, 1988)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \widehat{\beta}_1\, \bar{x} \\ S_{xy}/S_{xx} \end{bmatrix},$$

onde

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

e

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}).$$

O método dos mínimos quadrados tem dominado a literatura estatística há muito tempo. Este fato pode ser parcialmente explicado pela simplicidade da sua teoria, por ser bem desenvolvida, documentada e de fácil implementação computacional (Narula & Stangenhaus, 1988). Mas as deficiências deste estimador, que apresentaremos na seção 2.3, motivaram a formulação de outros estimadores. O estimador LAV foi a primeira alternativa ao método de estimação LS. Apresentaremos a seguir a formulação e as propriedades desse estimador. O material está fundamentado em Narula & Stangenhaus (1988) e Arthanari & Dodge (1993).

2.1.2 Estimador de Mínimo Valor Absoluto dos Resíduos - LAV

O estimador LAV é obtido pela minimização da soma dos valores absolutos dos resíduos, ou seja,

$$\min \sum_{i=1}^{n} |r_i| = \min \sum_{i=1}^{n} |Y_i - \widehat{Y}_i|. \tag{2.10}$$

Vejamos a formulação deste estimador para os modelos de regressão linear simples e múltipla.

Caso I - Modelo de Locação

Se $\beta_1 = 0$, o modelo de regressão linear é representado pela equação (2.7). Logo, o estimador $\widehat{\beta}_0$, que minimiza a função T, onde $T = \sum_{i=1}^{n} |Y_i - \widehat{\beta}_0|$, tem a seguinte expressão (Rousseeuw & Leroy, 1987):

$$\widehat{\beta}_0 = \text{mediana}\{Y_i\}, \text{ para } i = 1, \cdots, n. \tag{2.11}$$

Este estimador é chamado de estimador de locação do método LAV.

Caso II - Modelo de regressão sem intercepto

Se $\beta_0 = 0$ e $\beta_1 \neq 0$ o modelo de regressão linear é representado pela equação (2.9). Então, precisamos encontrar o estimador $\widehat{\beta}_1$, que minimiza a função T, dada

por

$$T = \sum_{i=1}^{n} |Y_i - \widehat{\beta}_1 x_i|. \tag{2.12}$$

Com este propósito, compreenderemos os conceitos e as propriedades relacionados à função T em (2.12).

Consideramos inicialmente o mínimo de cada termo de T, $T_i = |Y_i - \widehat{\beta}_1 x_i|$. A função T_i consiste de dois segmentos de reta com mínimo em $(\frac{Y_i}{x_i}, 0)$, onde $x_i \neq 0$, e inclinações $-|x_i|$ e $|x_i|$, como mostra a figura 2.1. Tomando como exemplo o

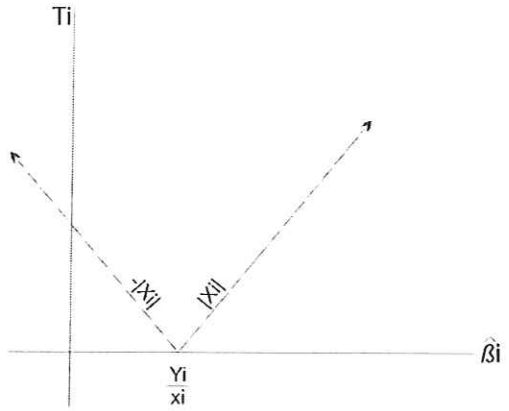


Figura 2.1: Função T_i

problema com três observações (x_i, Y_i); $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,6)$, os gráficos de $T_i = |Y_i - \widehat{\beta}_1 x_i|$ e $T = \sum_{i=1}^{3} T_i$ são apresentados na figura 2.2. A funcão T é linear por

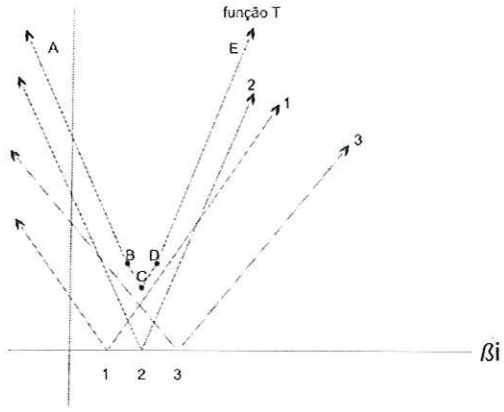


Figura 2.2: Gráfico da função T

partes e convexa, com as seguintes propridades (Narula & Stangenhaus, 1988):

1. O coeficiente angular do segmento de reta mais à esquerda é $-\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ e o mais à direita é $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

2. Os vértices de T estão posicionados exatamente sobre os pontos de mínimo $(\frac{Y_i}{x_i}, 0)$, das funções T_i. Os valores $\frac{Y_i}{x_i}$ estão ordenados sobre o eixo $\widehat{\beta}_1$, da seguinte forma:
$$\frac{Y_{i_1}}{x_{i_1}} \leq \frac{Y_{i_2}}{x_{i_2}} \leq \cdots \leq \frac{Y_{i_n}}{x_{i_n}}. \tag{2.13}$$

3. O coeficiente angular de T aumenta em $2|x_{i_k}|$ a cada vértice, da esquerda para direita, onde i_k é obtido pela ordenação do ponto (x_{ik}, Y_{i_k}) em (2.13).

Utilizando as propriedades citadas, podemos determinar o mínimo de T através do seguinte algoritmo:

Passo 1: Dispor os pontos (x_i, Y_i), como em (2.13).

Passo 2: Adicionar $2|x_{i_k}|$, sucessivamente, a $-\sum_{i=1}^{n} |x_i|$, na ordem obtida no Passo 1, e encontrar r tal que
$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{r-1} |x_{i_k}| < 0 \tag{2.14}$$
e
$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{r} |x_{i_k}| \geq 0, \tag{2.15}$$
onde i_k é obtido pela ordenação do ponto (x_{ik}, Y_{i_k}), ordenado no passo anterior.

Passo 3: Escrever a função de regressão
$$\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_1 x_i,$$
onde
$$\widehat{\beta}_1 = \left(\frac{Y_{i_r}}{x_{i_r}}\right).$$
Em particular, se
$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{r} |x_{i_k}| = 0,$$

Tabela 2.1: Dados para o exemplo 2.1

i	x_i	Y_i	$\frac{Y_i}{x_i}$	Posição(i_k)
1	4.0	33	8.25	1
2	4.5	42	9.33	6
3	5.0	45	9.00	4
4	5.5	51	9.27	5
5	6.0	53	8.83	2
6	6.5	61	9.38	7
7	7.0	62	8.86	3

todos os valores $\widehat{\beta}_1$ tais que $\widehat{\beta}_1(r) \leq \widehat{\beta}_1 \leq \widehat{\beta}_1(r+1)$, minimizam T, onde $\widehat{\beta}_1(r) = \frac{Y_{i_r}}{x_{i_r}}$.

É importante enfatizar que o fato de a função T ser convexa e linear por partes garante a existência de um ponto de mínimo global em T. Apresentaremos agora uma aplicação do método LAV referente ao problema (2.12).

EXEMPLO 2.1

Encontremos a reta de regressão LAV, minimizando a função T em (2.12), para a seguinte amostra:

$$\{(4.0, 33); (4.5, 42); (5.0, 45); (5.5, 51); (6.0, 53); (6.5, 61); (7.0, 62)\}.$$

Para facilitar as nossas análises, os valores das razões $\frac{Y_i}{x_i}$ e seus respectivos índices de ordenação i_k, são apresentados na tabela 2.1.

Então, segundo a coluna 5 desta tabela temos que $i_1 = 1$, $i_2 = 5$, $i_3 = 7$, $i_4 = 3$, $i_5 = 4$, $i_6 = 2$ e $i_7 = 6$.

Seguindo a ordenação obtida acima, encontremos r tal que as condicões (2.14) e (2.15), no passo 2, sejam satisfeitas.

Para $r = 1$:

$$-\sum_{i=1}^{7} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{1} |x_{i_k}| = -38.5 + 8 = -30.5,$$

Para $r = 2$:

$$-\sum_{i=1}^{7} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{2} |x_{i_k}| = -38.5 + 8 + 12 = -18.5,$$

Para $r = 3$:

$$-\sum_{i=1}^{7} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{3} |x_{i_k}| = -38.5 + 8 + 12 + 14 = -4.5,$$

e para $r = 4$:

$$-\sum_{i=1}^{7} |x_i| + 2\sum_{k=1}^{4} |x_{i_k}| = -38.5 + 8 + 12 + 14 + 10 = 5.5.$$

Logo, o estimador de T é $\widehat{\beta}_1 = \frac{Y_{i_4}}{x_{i_4}} = 9$ com $r = 4$.

E, portanto, a função de regressão LAV é

$$\widehat{Y}_i = 9\, x_i. \tag{2.16}$$

Caso III - Modelo de regressão linear simples

Se $\beta_0 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$, o modelo de regressão linear é representado pela equação (2.3). Então, precisamos encontrar os estimadores $\widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_1$, que minimizam a função T, dada por

$$T = \sum_{i=1}^{n} |Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1\, x_i|, \tag{2.17}$$

para $i = 1, \cdots, n$.

Observemos que, no EXEMPLO 2.1, a função de regressão LAV (2.16) passa pelo ponto $(5.0, 45)$ e também pela origem. Podemos utilizar este fato de tal forma que a reta de regressão LAV, referente à (2.17), passe por uma das observações (x_i, Y_i), para $i = 1, \cdots, n$. Assim, o algoritmo apresentado para o **Caso II**, pode ser reformulado como segue:

Passo 1: Escolha um ponto de referência no conjunto de dados e denote este ponto por (x_s, Y_s).

Passo 2: Ordene os valores de $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$, para $i = 1, \cdots, n$ da seguinte forma:

$$\frac{Y_{i_1} - Y_s}{x_{i_1} - x_s} \leq \frac{Y_{i_2} - Y_s}{x_{i_2} - x_s} \leq \cdots \leq \frac{Y_{i_n} - Y_s}{x_{i_n} - x_s}. \tag{2.18}$$

Passo 3: Adicionar $2|x_{i_k} - x_s|$, sucessivamente, a $-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_s|$, na ordem obtida no Passo 2, até encontrar r tal que

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_s| + 2\sum_{k=1}^{r-1} |x_{i_k} - x_s| < 0 \tag{2.19}$$

e

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_s| + 2\sum_{k=1}^{r} |x_{i_k} - x_s| \geq 0, \tag{2.20}$$

onde i_k é obtido pela ordenação dos pontos em (2.18).

Passo 4: Encontrar a função de regressão LAV, do modelo linear simples, que passa pelo ponto (x_s, Y_s), dada por

$$\widehat{Y}_i^{(1)} = \widehat{\beta}_0^{(1)} + \widehat{\beta}_1^{(1)} x_i, \tag{2.21}$$

sendo $\widehat{\beta}_1^{(1)} = \frac{Y_{i_r} - Y_s}{x_{i_r} - x_s}$.

Passo 5: Repita os passos 1,2, 3 e 4, considerando como próximo ponto de referência o ponto (x_{i_r}, Y_{i_r}), e obtenha $\widehat{Y}_i^{(2)}$ tal que

$$\widehat{Y}_i^{(2)} = \widehat{\beta}_0^{(2)} + \widehat{\beta}_1^{(2)} x_i. \tag{2.22}$$

Passo 6: Se $\widehat{Y}_i^{(1)} = \widehat{Y}_i^{(2)}$, então $\widehat{Y}_i^{(1)}$ é a função de regressão LAV de todos os dados da amostra. Caso contrário, repita os passos 1, 2, 3 e 4 novamente, tomando como ponto de referência $(x_{i_r}, Y_{i_r}) \in \widehat{Y}_i^{(2)}$.

Passo 7: Pare quando $\widehat{Y}_i^{(j+1)} = \widehat{Y}_i^{(j)}$, onde j é o índice de ordenação das retas de regressão LAV que foram encontradas.

EXEMPLO 2.2

Considerando o mesmo conjunto de dados do EXEMPLO 2.1, encontraremos a solução para o problema (2.17).

Passo 1: Seja $(5.0, 45)$ o ponto de referência $(s = 3)$.

Então, $x_3 = 5.0$ e $Y_3 = 45$.

Passo 2: Ordenar os valores $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$, onde $s = 3$ e $i = 1, \cdots, 7$.

Então, segundo a coluna 7 da tabela 2.2 temos que $i_1 = 2$, $i_2 = 5$, $i_3 = 7$, $i_4 = 6$, $i_5 = 1$ e $i_6 = 4$.

Tabela 2.2: Dados para o exemplo 2.2 (Ponto de referência:3)

i	x_i	Y_i	$x_i - x_3$	$Y_i - Y_3$	$\frac{Y_i - Y_3}{x_i - x_3}$	Posição (i_k)
1	4.0	33	-1.0	-12	12.00	5
2	4.5	42	-0.5	-3	6.00	1
3	5.0	45	0.0	0	-	-
4	5.5	51	0.5	6.0	12.00	6
5	6.0	53	1.0	8.0	8.00	2
6	6.5	61	1.5	16	10.67	4
7	7.0	62	2.0	17	8.5	3

Passo 3: Encontar r tal que as condições (2.19) e (2.20) sejam satisfeitas para $s = 3$:

Sendo $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_s| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_3| = 0.5 + 1.0 + 2.0 + 1.5 + 1.0 + 0.5 = 6.5$. Assim, para $r = 1$:

$$-6.5 + 2|x_{i_k} - x_3| = -6.5 + 2|4.5 - 5| = -6.5 + 1 = -5.5,$$

para $r = 2$:

$$-6.5 + 2|x_{i_k} - x_3| + 2|x_{i_k} - x_3| = -6.5 + 1 + 2 = -3.5,$$

e para $r = 3$:

$$-6.5 + 2|x_{i_k} - x_3| + 2|x_{i_k} - x_3| + 2|x_{i_k} - x_3| = -6.5 + 1 + 2 + 4 = 0.5.$$

Passo 4: Logo, o estimador é $\widehat{\beta}_1^{(1)} = \frac{Y_{i_3} - Y_3}{x_{i_3} - x_3}$ e a função de regressão LAV $\widehat{Y}_i^{(1)}$ é dada por

$$\widehat{Y}_i^{(1)} = 8.5\, x_i + \widehat{\beta}_0^{(1)}.$$

Como a função de regressão $\widehat{Y}_i^{(1)}$ passa pelo ponto $(5.0; 45)$, $\widehat{\beta}_0^{(1)} = 2.5.$, temos

$$\widehat{Y}_i^{(1)} = 8.5\, x_i + 2.5.$$

Passo 5: Devemos repetir o procedimento acima, tomando $(7.0, 62)$ como ponto de referência. Este ponto refere-se ao coeficiente angular $\frac{Y_{i_3}-Y_3}{x_{i_3}-x_3}$, onde $i_3 = 7$.

Refazendo os **Passos** 1, 2, 3 e 4 acima, obtemos $i_1 = 6$, $i_2 = 4$, $i_3 = 2$, $i_4 = 3$, $i_5 = 5$ e $i_6 = 1$.

As condições (2.19) e (2.20) são satisfeitas quando $r = 4$, onde $i_4 = 3$. O coeficiente angular $\widehat{\beta}_1^{(2)}$, da reta de regressão LAV $\widehat{Y}_i^{(2)}$, é igual ao estimador $\widehat{\beta}_1^{(1)}$ de $\widehat{Y}_i^{(1)}$. O mesmo podemos dizer sobre os coeficientes lineares $\widehat{\beta}_0^{(1)}$ e $\widehat{\beta}_0^{(2)}$, pois os pontos $(5.0, 45)$ e $(7.0, 62)$ também pertencem à reta $\widehat{Y}_i^{(2)}$. Logo, $\widehat{Y}_i^{(1)} = \widehat{Y}_i^{(2)}$ e, portanto, a função de regressão dos dados da amostra é $\widehat{Y}_i^{(1)}$.

Vejamos agora a formulação do estimador LAV para o modelo de regressão linear múltipla.

Modelo de Regressão Linear Geral

Lembremos que o modelo de regressão linear geral é representado pela equação (2.1). O estimador de mínimos valores absolutos $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |Y_i - \mathbf{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}}| \tag{2.23}$$

é mínima.

Uma maneira de encontrar o estimador LAV em (2.23) consiste em aplicar o método simplex, ao seguinte problema (Arthanari & Dodge, 1993):

$$\min \sum_{i=i}^{n} |r_i|$$

$$\text{sujeito a} \quad \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r} = \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{r}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} \text{ com sinal irrestrito,}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor de resíduos.

Mostraremos, na seção 2.1, que o estimador LAV supera algumas deficiências do método LS. Mas Peter & Rousseeuw (1984) desenvolveram um método de estimação, chamado de LMS, cujas estimativas propiciam um ajuste mais apropriado da função de regressão.

2.1.3 Estimador que Minimiza a Mediana dos Quadrados dos Resíduos - LMS

O método de estimação LMS é mais complexo que os métodos de estimação LS e LAV. Dependendo do modelo de regressão linear em análise, a obtenção do estimador LMS requer a aplicação de conceitos e propriedades de estatística avançada, cuja análise foge ao escopo deste trabalho. Face ao exposto, nesta seção serão apresentados:

- O estimador LMS para o modelo de regressão (2.7) (Rousseeuw & Leroy, 1987) e
- Uma interpretação geométrica do estimador LMS para o modelo (2.3) (Mili *et al.*, 1991).

Caso I - Modelo de Locação

A formulação do estimador LMS, referente ao modelo (2.7), é

$$\min_{\widehat{\beta_0}} \text{mediana}_i \, r_i^2, \tag{2.24}$$

onde $r_i = Y_i - \widehat{\beta_0}$ e $\widehat{\beta_0}$ é o estimador LMS.

Antes de mostrarmos como $\widehat{\beta_0}$ é obtido, analisaremos as estimativas de locação dos métodos LS, LAV e LMS, ilustrados na figura 2.3.

O gráfico desta figura representa uma possível função densidade de probabilidade do conjunto de dados reais

$$\{90, 93, 86, 92, 95, 83, 75, 40, 88, 80\}, \tag{2.25}$$

referente às medidas de pressão sanguínea, diagnosticadas no período de 10 meses (Rousseeuw & Leroy, 1987).

Precisamente, as estimativas de locação dos métodos de estimação LS, LAV e LMS são, respectivamente, $\bar{Y} = 82.2$, mediana$\{Y_i\} = 87.0$ e $\widehat{\beta_0} = 90.5$. Observando

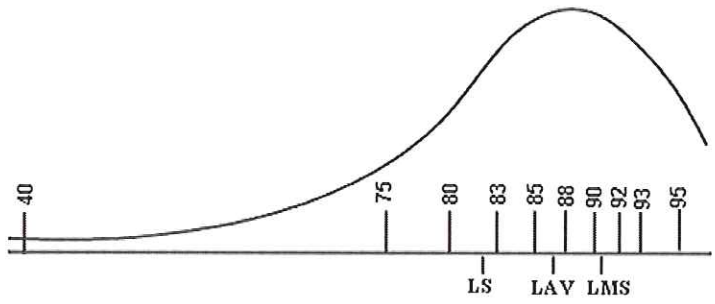


Figura 2.3: Estimadores de locação LS, LAV e LMS relativos ao conjunto de dados em (2.25).

a figura 2.3, notamos que os dados da amostra seguem uma distribuição assimétrica. Sabendo-se que a média aritmética é uma estimativa de locação apropriada a distribuições simétricas, verificamos que, neste gráfico, o estimador de locação LS foi atraído pela observação afastada (40), ficando distante das estimativas de locação dos métodos LAV e LMS. Por outro lado, o estimador de locação LMS se encontra num intervalo onde as observações da amostra tendem a ficar muito próximas. Dizemos que este estimador é apropriado para distribuições assimétricas, não sendo influenciado pelos pontos mais afastados, como ocorre com a média aritmética.

Apresentaremos agora os resultados que garantem a existência de $\widehat{\beta}_0$ em (2.24) e como encontrá-lo.

Lema I Para qualquer amostra $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$ existe uma solução em (2.24). (Rousseeuw & Leroy, 1987)

Este Lema garante a existência de $\widehat{\beta}_0$ sabendo que na função (2.24) sempre existirá um ponto de mínimo global.

Teorema I Seja $m^2_{\widehat{\beta}_0} = \text{mediana}(Y_i - \widehat{\beta}_0)^2$. Então, $m_{\widehat{\beta}_0} - \widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_0 + m_{\widehat{\beta}_0}$ são observações da amostra (Rousseeuw & Leroy, 1987).

Procuremos entender estes resultados analisando os gráficos da figura 2.4, sendo

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta}_0)^2 \text{ e mediana}\,(Y_i - \widehat{\beta}_0)^2,\ i = 1, \cdots, n. \tag{2.26}$$

referentes aos métodos LS e LMS como funções de $\widehat{\beta}_0$.

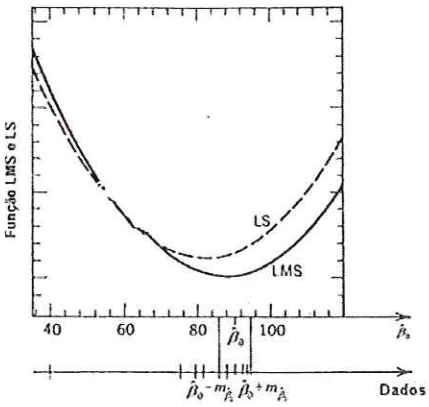


Figura 2.4: Gráficos das funções LS e LMS

O dados da amostra (2.25) estão sobre o eixo Dados. Observemos que o mínimo da função LS está um pouco afastado (à esquerda) do mínimo da função LMS, onde neste último $\widehat{\beta}_0$ encontra-se no centro do intervalo $[\widehat{\beta}_0 - m_{\widehat{\beta}_0}, \widehat{\beta}_0 + m_{\widehat{\beta}_0}]$.

Sabendo-se que $\widehat{\beta}_0 = 90.5$, encontremos $m^2_{\widehat{\beta}}$ e o intervalo $[\widehat{\beta}_0 - m_{\widehat{\beta}_0}, \widehat{\beta}_0 + m_{\widehat{\beta}_0}]$.

Liste o conjunto de dados em (2.25) da seguinte maneira:

$$(Y_1 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_4 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_2 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_9 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_3 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_5 - \widehat{\beta}_0)^2$$
$$\leq (Y_6 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_{10} - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_7 - \widehat{\beta}_0)^2 \leq (Y_8 - \widehat{\beta}_0)^2,$$

então,

$$0.25 \leq 2.25 \leq 6.25 \leq 6.25 \leq 20.25 \leq 20.25 \leq 56.25 \leq 110.25 \leq 240.25 \leq 1250. \tag{2.27}$$

Como a amostra em (2.25) é constituída por um número par de elementos $m^2_{\widehat{\beta}_0} = 20.25$ e $m_{\widehat{\beta}_0} = 4.5$.

Portanto, segundo o **Teorema I**, o estimador LMS representado por $\widehat{\beta}_0$ na figura 2.4 é o centro do intervalo $[86, 95]$ de menor amplitude $(2.m_{\widehat{\beta}_0})$ onde seus extremos são observações da amostra (Rousseeuw & Leroy, 1987).

Mostraremos os passos do método LMS, aplicando o **Teorema** I e posteriormente encontraremos a estimativa LMS para a amostra em (2.25), utilizando esses passos.

Seja uma amostra $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$.

Passo 1: Dispor as n observações da amostra em ordem crescente.

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)},$$

Passo 2: Obtenha as subamostras:

$$Y_{(j)} \leq Y_{(j+1)} \leq \cdots \leq Y_{(j+h+1)}, \tag{2.28}$$

com $j = 1, 2, \cdots, h$, se n é ímpar e $j = 1, 2, \cdots, h-1$, se n é par, onde

$$h = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

onde [.] denota a parte inteira do resultado da operação.

É importante esclarecer que em qualquer sub-amostra de (2.28) se tomarmos $\widehat{\beta}_0^* = \frac{1}{2}(Y_{(j)} + Y_{j+h-1})$, e definirmos $r_i^* = Y_i - \widehat{\beta}_0^*$, os elementos em (2.28) garantem que todas os elementos ${r_{(i)}^*}^2$ sejam inferiores ou iguais à mediana.

Portanto, como nosso objetivo é encontrar $\widehat{\beta}_0$ que minimize mediana$_i r_i^2$, basta pesquisar a subamostra em (2.28) com amplitude mínima.

Passo 3: O estimador LMS $\widehat{\beta}_0$ é o ponto central do intervalo de menor amplitude em (2.28).

EXEMPLO 2.3

Queremos encontrar uma solução para o problema (2.24) aplicando os passos acima à amostra (2.25), listada abaixo (já ordenada):

$$\{40, 75, 80, 83, 86, 88, 90, 92, 93, 95\},$$

com $n = 10$.

1. **Passo** 1:

$$40 \leq 75 \leq 80 \leq 83 \leq 86 \leq 88 \leq 90 \leq 92 \leq 93 \leq 95.$$

2. **Passo** 2: n é par,

$$h = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 = 6,$$

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq Y_{(3)} \leq Y_{(4)} \leq Y_{(5)} \leq Y_{(6)},$$

$$Y_{(2)} \leq Y_{(3)} \leq Y_{(4)} \leq Y_{(5)} \leq Y_{(6)} \leq Y_{(7)},$$

$$Y_{(3)} \leq Y_{(4)} \leq Y_{(5)} \leq Y_{(6)} \leq Y_{(7)} \leq Y_{(8)},$$

$$Y_{(4)} \leq Y_{(5)} \leq Y_{(6)} \leq Y_{(7)} \leq Y_{(8)} \leq Y_{(9)},$$

e

$$Y_{(5)} \leq Y_{(6)} \leq Y_{(7)} \leq Y_{(8)} \leq Y_{(9)} \leq Y_{(10)}.$$

3. **Passo** 3:

$$Y_{(6)} - Y_{(1)} = 88 - 40 = 48,$$

$$Y_{(7)} - Y_{(2)} = 90 - 75 = 15,$$

$$Y_{(8)} - Y_{(3)} = 92 - 80 = 12,$$

$$Y_{(9)} - Y_{(4)} = 93 - 83 = 10,$$

e

$$Y_{(10)} - Y_{(5)} = 95 - 86 = 9.$$

A menor diferença no **Passo** 2 corresponde à distância entre 86 e 95. Logo,

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{86 + 95}{2} = 90.5,$$

sendo que $m_{\widehat{\beta}} = 4.5$.

Caso III - Modelo com intercepto

A formulação do estimador LMS referente ao modelo (2.3) é

$$\min_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \text{mediana}_i \, r_i^2, \tag{2.29}$$

para $i = 1, \cdots, n$, onde $r_i = Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_i$ e $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)^t$ é o estimador LMS. Estendendo os conceitos apresentados no modelo de locação ao problema (2.29)

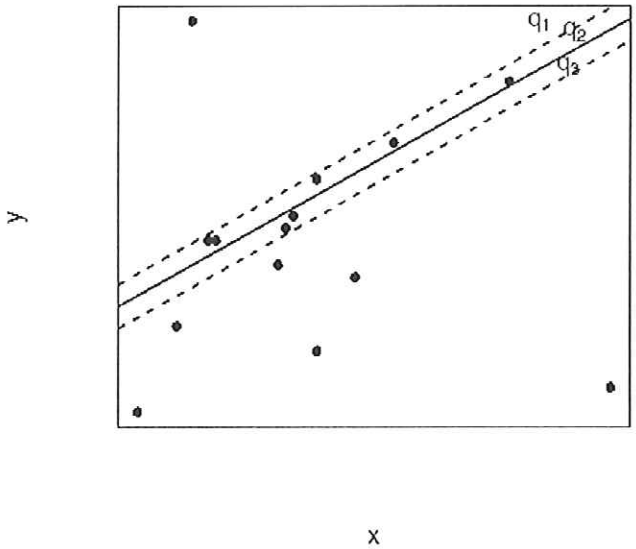


Figura 2.5: Ajuste da função de regressão LMS para o caso III

temos que geometricamente os estimadores $\widehat{\beta}_0$ e $\widehat{\beta}_1$ correspondem, respectivamente, ao coeficiente linear e angular da reta q_2 que passa exatamente pelo centro da faixa mais estreita determinada por q_1 e q_3 cobrindo metade dos pontos no exemplo, assim como ilustrado na figura 2.5.

A complexidade do algoritmo LMS referente aos modelos de regressão simples (2.3),(2.9) e geral (2.1), deve-se aos procedimentos combinatoriais utilizados na seleção de amostras para obtenção dos parâmetros $\widehat{\beta}$ ((Rousseeuw & Leroy, 1987); (Mili *et al.*, 1991)).

2.2 Ponto de Alavancamento e Ponto Aberrante

Dado o modelo de regressão matricial em (2.2), nosso objetivo é analisar as observações Y_i do vetor $\mathbf{Y}$ e as linhas $\mathbf{X}_i$ de $\mathbf{X}$ a fim de identificar as observações que estão afastadas das demais.

Dizemos que uma observação Y_i é uma observação aberrante se está afastada da função de regressão ajustada.

Cada linha $\mathbf{X}_i$ da matriz $\mathbf{X}$ (excluindo a primeira coluna do modelo com intercepto) define as coordenadas de um ponto em R^k, onde $k-1$ é o número de colunas de $\mathbf{X}$. Dizemos que o ponto $\mathbf{X}_i \in R^k$ é um ponto de alavancamento se está afastado dos demais pontos.

Observemos que estes conceitos estão relacionados à dispersão dos pontos $\mathbf{X}_i \in R^k$ e com os valores da variável resposta Y_i em relação à função $\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\,\widehat{\beta}$. Os pontos de alavancamento e aberrantes podem influenciar o ajuste da função de regressão, principalmente se ocorrerem simultaneamente. Mostraremos o comportamento dos estimadores LS, LAV e LMS na presença dos casos de afastamento relatando as vantagens e desvantagens de cada um deles.

2.2.1 Comportamento do estimador LAV na presença de pontos de alavancamento e pontos aberrantes

Nas figuras 2.6(a) e 2.6(b) estão ilustrados o comportamento do estimador LAV na presença de um único ponto aberrante e alavanca, respectivamente (Rousseeuw & Leroy, 1987). A figura 2.6(a) mostra que a função de regressão LAV não foi afetada quando o ponto 4 tornou-se aberrante. Sendo as coordenadas do ponto 4 iguais a $(4.0, 1.3)$ ou $(4.0, 4.3)$ as estimativas LAV foram as mesmas, de modo que o ajuste da função de regressão LAV permaneceu adequado.

Analisando a figura 2.6(b), percebemos que o ponto 1, ao tornar-se um ponto de alavancamento, influenciou drasticamente o ajuste da função de regressão LAV.

Aplicaremos o método de estimação LAV para o conjunto de pontos da figura 2.6(b), apontando a deficiência deste método na presença de pontos de alavancamento.

Conjunto de pontos : $\{(5.0, 1.0); (0.95, 1.8); (1.1, 2.6), (1.4, 2.9); (1.7, 4.0)\}$.

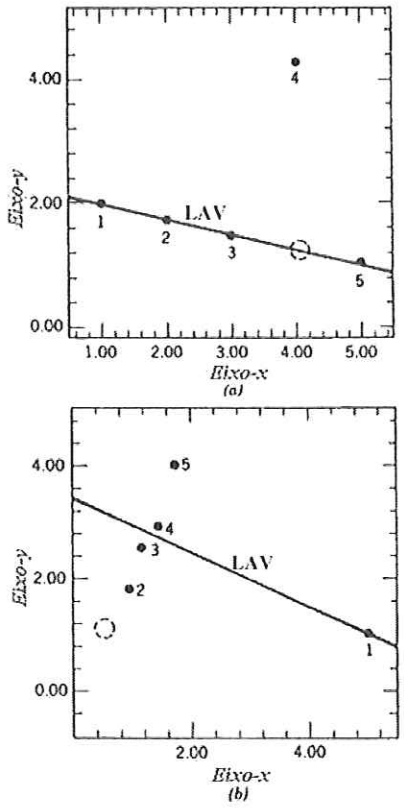


Figura 2.6: Função de regressão LAV ajustada na presença de um único ponto aberrante (a) e um único ponto de alavamcamento (b)

Tabela 2.3: Dados referente a figura 2.6(b) (Ponto de referência: 3)

i	x_i	Y_i	$x_i - x_3$	$Y_i - Y_3$	$\frac{Y_i - Y_3}{x_i - x_3}$	Posição
1	5.00	1.0	3.90	-1.6	-0.41	1
2	0.95	1.8	-0.15	-0.8	5.30	4
3	1.10	2.6	0.00	0.0	-	-
4	1.40	2.9	0.30	0.30	1.00	2
5	1.70	4.0	0.60	1.40	2.3	3

Aplicação do algoritmo LAV - Modelo com intercepto.

$P_1 = (5.0, 1.0)$ é ponto de alavancamento.

Passo 1 : $P_3 = (1.1, 2.6)$ é o ponto de referência.

Passo 2 : Ordenar os valores $\frac{Y_i - Y_3}{x_i - x_3}$, onde $s = 3$ e $i = 1, \cdots, n$. Então, segundo a coluna 7 da tabela 2.3 temos que $i_i = 1$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$, e $i_4 = 2$.

Passo 3 : Encontrar r até que as condições (2.19) e (2.20) sejam satisfeitas.

Para $r = 1$,

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_3| + 2|x_{1_1} - x_3| = -4.95 + 7.8 = 2.85.$$

Passo 4 : Assim, $\widehat{\beta}_1^{(1)} = \frac{Y_{1_1} - Y_3}{x_{1_1} - x_3} = -0.41$, com $r = 1$ é o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto $(1.1, 2.6)$.

Logo, a função de regressão LAV $\widehat{Y}_i^{(1)}$ é dada por

$$\widehat{Y}_i^{(1)} = -0.41x_i + 3.051,$$

onde $\widehat{\beta}_0^{(1)} = 3.051$ e $\widehat{\beta}_1^{(1)} = -0.41$.

Passo 5 : Calculemos $\widehat{Y}_i^{(2)}$, repetindo os passos 1, 2, 3 e 4 acima, tomando $P_1 = (5.0, 1.0)$ como ponto de referência.

Passo 2: Segundo a coluna 7 da tabela 2.4 temos que $i_1 = 5$, $i_2 = 4$, $i_3 = 3$, e $i_4 = 2$.

Passo 3:

Tabela 2.4: Dados referente a figura 2.6(b) (Ponto de referência:1)

i	x_i	Y_i	$x_i - x_1$	$Y_i - Y_1$	$\frac{Y_i - Y_1}{x_i - x_1}$	Posição
1	5.00	1.0	0.0	0.0	-	-
2	0.95	1.8	-4.05	0.8	-0.2	4
3	1.10	2.6	-3.9	1.6	-0.41	3
4	1.40	2.9	-3.6	1.9	-0.53	2
5	1.70	4.0	-3.3	3.0	-0.9	1

Para $r = 1$,

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_1| + 2|x_{5_1} - x_1| = -14.85 + 6.6 = -8.25,$$

para $r = 2$,

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_1| + 2|x_{5_1} - x_1| + 2|x_{4_2} - x_1| = -8.25 + 7.2 = -1.05,$$

e para $r = 3$,

$$-\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_1| + 2|x_{5_1} - x_1| + 2|x_{4_2} - x_1| + 2|x_{3_3} - x_1| = -1.05 + 7.8 = 6.75,$$

Passo 4 :

Logo, a função de regressão LAV $\widehat{Y}_i^{(2)}$ é dada por

$$\widehat{Y}_i^{(2)} = -0.41x_i + 3.051,$$

onde $\widehat{\beta}_0^{(2)} = 3.051$ e $\widehat{\beta}_1^{(2)} = -0.41$.

Passo 6 :

Como $\widehat{Y}_i^{(2)} = \widehat{Y}_i^{(1)}$, então, segundo o critério de convergência do algorítmo LAV do modelo de regressão simples, $\widehat{Y}_i^{(1)}$ é a função de regressão LAV ajustada. A função $\widehat{Y}_i^{(1)}$ é inadequada aos dados da figura 2.6 (b).

A idéia que norteia o método LAV é a ordenação dos coeficientes angulares $\frac{Y_i}{x_i}$ e $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$, referentes aos modelos sem e com intercepto, respectivamente. Quanto maior

o valor de Y_i, em relação ao valor da abcissa x_i, mais elevados serão os valores dos respectivos coeficientes angulares. Neste caso $\frac{Y_i}{x_i}$, ou $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$, ocuparão as últimas posições nas ordenações (2.13) e (2.18), respectivamente. Por outro lado, quanto maior o valor de x_i, em relação ao valor da ordenada Y_i, mais baixo serão os valores dos respectivos coeficientes angulares. Assim, diferentemente do caso anterior, $\frac{Y_i}{x_i}$ ou $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$ ocuparão as primeiras posições em (2.13) e (2.18).

Estes dois casos extremos de posicionamento dos coeficientes angulares em (2.13) e (2.18) revelam que o estimador LAV é robusto somente na presença de múltiplos pontos aberrantes, mas falha na presença de um único ponto de alavancamento. Como os pontos aberrantes têm valores Y_i elevados (ou baixos), seus respectivos coeficientes angulares ($\frac{Y_i}{x_i}$ e $\frac{Y_i - Y_s}{x_i - x_s}$) ocuparão as últimas posições em (2.13) e (2.18), não influenciando o ajuste de regressão LAV. Já os pontos de alavancamento têm como característica valores x_i elevados (ou baixos). Os coeficientes angulares relativos a estes pontos serão pequenos, ocupando as primeiras posições em (2.13) e (2.18), influenciando o ajuste da função de regressão LAV, assim como verificamos no exemplo acima. Portanto, o estimador LAV não é um método de estimação robusto, pois falha na presença de um único ponto de alavancamento.

2.2.2 Comportamento do estimador LMS na presença dos pontos de alavancamento e pontos aberrantes

Analisando as figuras 2.7(a) e 2.7(b), respectivamente, percebemos que o ponto de alavancamento, bem como o ponto aberrante, não influenciaram no ajuste da função de regressão LMS[1]. Este comportamento deve-se ao fato de que o estimador LMS é insensível a uma grande porcentagem de pontos aberrantes e pontos de alavancamento e, portanto é considerado um estimador robusto.

[1]Nos capítulos 3 e 4 apresentamos uma justificativa para esse comportamento da função de regressão LMS.

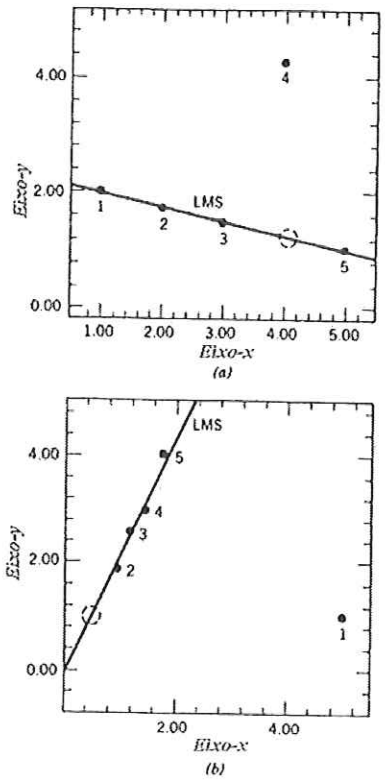


Figura 2.7: Função de regressão LMS ajustada na presença de um único ponto aberrantes (a) e um único ponto de alavancamento (b)

2.2.3 Comportamento do estimador LS na presença dos pontos de alavancamento e pontos aberrantes

Ao contrário do método de estimação LMS, o estimador LS não é robusto, de modo que um único ponto aberrante ou alavanca pode influenciar drasticamente o ajuste da função de regressão LS. Este fato é ilustrado na figura 2.8. As figuras 2.8(a)

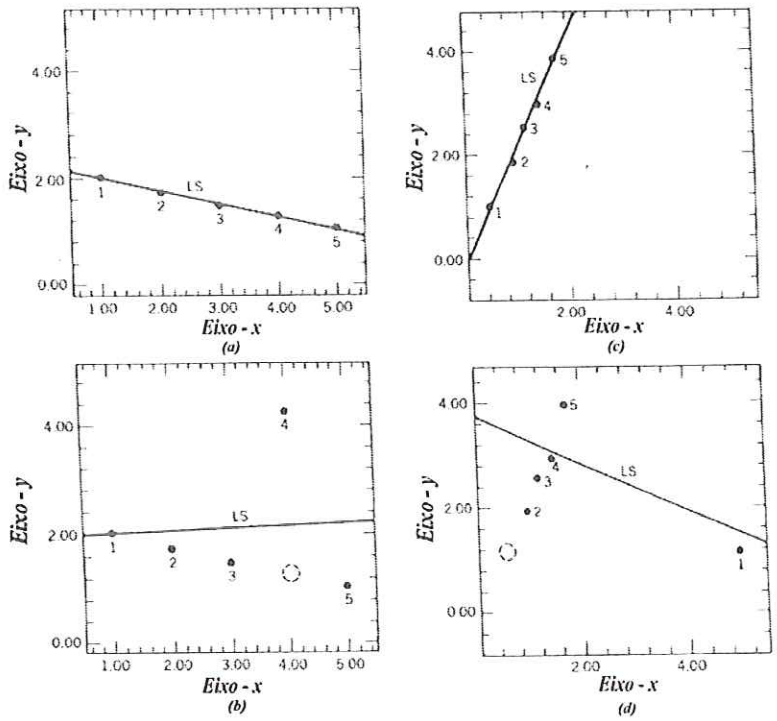


Figura 2.8: Funções de regressão LS ajustadas na presença de um único ponto aberrante e um único ponto de alavancamento

e 2.8(c) ilustram os ajustes das funções de regressão LS relativos a um conjunto de dados sem a presença de pontos de alavancamento e aberrantes. As figuras 2.8(b) e 2.8(d) ilustram os ajustes da função de regressão LS na presença de um único ponto de aberrante e de alavancamento, respectivamente. Comparando as figuras 2.8(a) com 2.8(b), bem como 2.8(c) com 2.8(d), verifica-se a influência do ponto de alavancamento e aberrante no ajuste da função LS.

Mas devido ao fato de o estimador LS apresentar uma formulação simples e

de fácil implementação, este continua sendo o método de estimação mais utilizado. Então, apresentaremos detalhadamente o comportamento do método de estimação LS na presença de pontos de alavancamento e aberrante, bem como técnicas de diagnóstico para o modelo de regressão linear propostas em Neter & Wasserman (1983).

Inicialmente, faremos uma interpretação geométrica dos pontos de alavancamento e aberrantes em um modelo de regressão linear simples, procurando compreender a sua influência no ajuste da função de regressão de mínimos quadrados. Consideraremos, para isso, o gráfico apresentado na figura 2.9. Analisando este

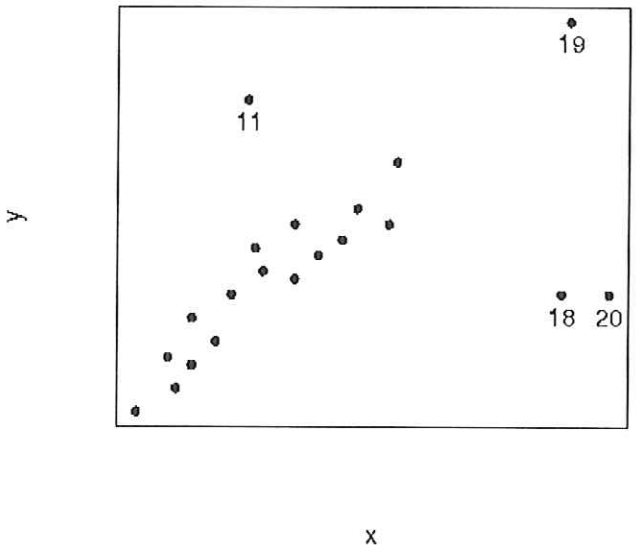


Figura 2.9: Conjunto de pontos no R^2

gráfico, concluímos que a matriz X possui uma única coluna (além da coluna de uns), ou seja, $X_i \in R^k$ com $k = 1$. Logo, o conjunto de pontos $(X_i, Y_i) \in R^2$ e a função de regressão de mínimos quadrados será uma reta. É possível perceber que os pontos 11, 19, 18 e 20 estão afastados dos demais. Encontremos os pontos

de alavancamento e aberrantes deste modelo, sabendo que, na figura 2.10, a linha pontilhada representa o ajuste da função de regressão LS obtido sem os 4 casos de afastamentos.

O ponto 11 representa uma observação aberrante. Observemos, na figura 2.10, que a ordenada Y_{11} está afastada do ajuste pontilhado da função de regressão de mínimos quadrados.

O ponto 19 representa um ponto de alavancamento. Observemos que a abscissa X_{19} está afastada das demais abcissas, mas sua respectiva ordenada Y_{19} não está afastada do ajuste pontilhado da função de regressão LS.

Os pontos 18 e 20 configuram casos de afastamento em relação às duas variáveis $(\mathbf{X}_i, Y_i)$. Analisando a dispersão destes pontos com relação a linha pontilhada, na figura 2.10, notamos que X_{18} e X_{20} são pontos de alavancamento e suas respectivas ordenadas Y_{18} e Y_{20} são pontos aberrantes.

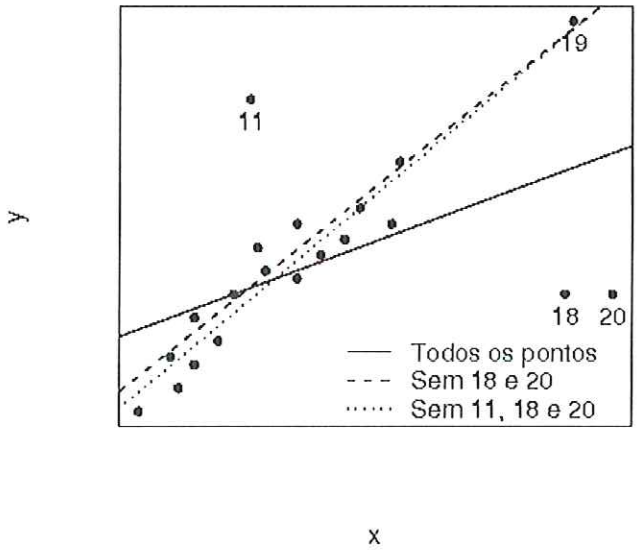


Figura 2.10: Ajustes das funções de regressão LS

Analisando os três ajustes do modelo de regressão da figura 2.10, podemos afirmar que os pontos 11 e 19 não afetam substancialmente o ajuste do modelo de regressão pelo método de mínimos quadradros. Este fato torna-se evidente quando observamos as linhas tracejada e pontilhada. Já o ponto 19, mesmo estando afastado das demais abscissas, segue o comportamento destas retas (pontilhada ou tracejada). Deste modo dizemos que o ponto 19 pertence ao conjunto de pontos que tendem a formar estas retas. Então, denominamos o ponto 19 de consistente ou bom ponto de alavancamento. Este ponto contribui para que o ajuste da função de regressão LS seja mais adequado.

Comparando a reta de regressão LS contínua com a pontilhada concluímos que os pontos 18 e 20 são pontos de alavancamento e aberrantes que afetaram o ajuste do modelo de regressão LS. Isto porque ao minimizar o resíduo das medidas 18 e 20, elas atraíram o ajuste da função de regressão. Portanto, os pontos 18 e 20 exerceram o efeito alavanca na função de regressão LS. Deste modo, os pontos 18 e 20 são chamados de maus pontos de alavancamento. É importante esclarecer que todo ponto de alavancamento aberrante é um mau ponto de alavancamento, e que nem todo ponto de alavancamento ou aberrante influenciará as estimativas do vetor β (por exemplo, os ponto 11 e 19).

Portanto, precisamos diferenciar um bom de um mau ponto de alavancamento e identificar os pontos aberrantes.

Identificação dos Pontos de Alavancamento

No ajuste de um modelo de regressão pelo método LS identificamos os pontos de alavancamento antes de obter o estimador LS. Para definirmos o método de identificação destes pontos, precisamos conhecer as propriedades da matriz de projeção ortogonal dos vetores do R^n no subespaço gerado pelas coluna de $\mathbf{X}$, conhecida como matriz chapéu ($\mathbf{P}$), dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t, \tag{2.30}$$

onde $0 \leq p_{ii} \leq 1$ para $i = 1, \cdots, n$, é o i- ésimo elemento da diagonal da matriz $\mathbf{P}$.

A matriz $\mathbf{P}$ é simétrica e idempotente. Assim, seus elementos obedecem às seguintes relações:

$$\sum_{j \neq i} {p_{ij}}^2 = p_{ii}(1 - p_{ii}),$$

onde

$$p_{ii} = \mathbf{X}_i^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_i,$$

para $i = 1, \cdots, n$. Além disso, o traço de $\mathbf{P}$ é dado por

$$tr(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = k,$$

onde k é o número de parâmetros a ser estimado. Como $\mathbf{P}$ é idempotente, o posto de $\mathbf{P}$ é igual ao traço de $\mathbf{P}$.

Os elementos da diagonal da matriz chapéu, informam as distâncias de cada ponto $\mathbf{X}_i \in R^k$ até o centróide C. O centróide C é um ponto em R^{k-1} cujas coordenadas são dadas pelas médias das colunas da matriz $\mathbf{X}$. Os maiores valores de p_{ii} correspondem às maiores distâncias entre um ponto $\mathbf{X}_i$ e o centróide, revelando que o ponto $\mathbf{X}_i$ está afastado.

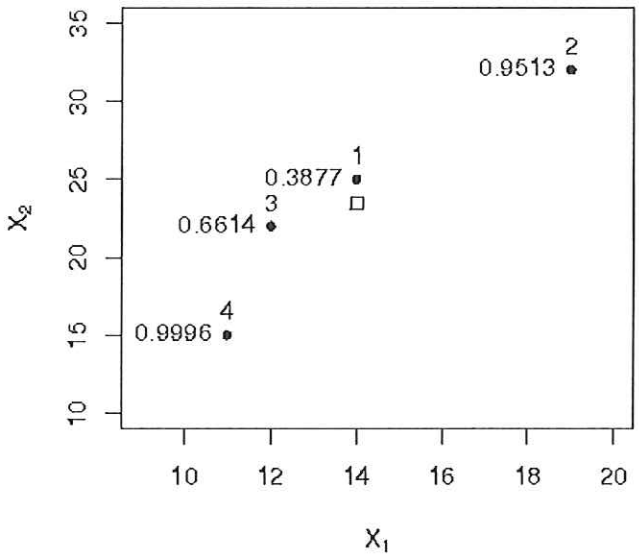
A partir destes conceitos definiremos como pontos de alavancamento os pontos $\mathbf{X}_i$ ou $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ correspondentes aos maiores valores p_{ii} da matriz chapéu.

Analisemos a figura 2.11, onde estes conceitos estão bem ilustrados em R^2.

As matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{P}$ referentes aos dados desta figura são

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 25 \\ 1 & 19 & 32 \\ 1 & 12 & 22 \\ 1 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$

e



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3877 & 0.1727 & 0.4553 & -0.0157 \\ 0.1727 & 0.9513 & -0.1284 & 0.0044 \\ 0.4553 & -0.1284 & 0.6614 & 0.0117 \\ -0.0157 & 0.0044 & 0.0117 & 0.9926 \end{bmatrix}.$$

O quadrado na figura 2.11 representa o centróide C. Observemos que os menores valores de p_{ii} referem-se aos pontos $\mathbf{X}_i$ que estão mais próximos ao centróide, como é o caso dos pontos 1 e 3. Por outro lado, os maiores valores de p_{ii} referem-se aos pontos $\mathbf{X}_i \in R^2$ que estão mais afastados do centróide, que denominamos de pontos de alavancamento.

Existem alguns resultados heurísticos que classificam um ponto $\mathbf{X}_i$ como ponto de alavancamento se (Neter & Wasserman, 1983)

1. $p_{ii} > 2\frac{k}{n}$ ou

2. $p_{ii} > \frac{k}{n}$ ou

3. $p_{ii} > 0.5$ (indica um alto ponto de alavancamento) ou

4. $0.2 < p_{ii} < 0.5$ (indica um ponto de alavancamento moderado).

Estes critérios devem ser utilizados com cautela na identificação dos pontos de alavancamento, pois podem mascarar a presença de múltiplos pontos de alavancamento no modelo de regressão linear.

O objetivo da análise de diagnóstico, em regressão LS, é apontar os possíveis pontos de alavancamento, através da matriz chapéu, e revelar aqueles que influenciam o ajuste da função de regressão LS pelo estudo de influência. E para identificar os possíveis pontos de alavancamento, basta dispor os elementos p_{ii} da matriz $\mathbf{P}$, em ordem decrescente, analisando se os maiores valores de p_{ii}, diferem acentuadamente dos demais. Em caso afirmativo, as coordenadas $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ relativas aos maiores elementos da diagonal da matriz $\mathbf{P}$, deverão receber atenção em um estudo de influência.

Através da álgebra linear podemos interpretar como um ponto de alavancamento afeta o ajuste da função de regressão de mínimos quadrados, sendo esta determinada pela expressão (?)

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}\,\mathbf{Y},$$

onde cada valor ajustado $\widehat{Y}_i$ é dado por

$$\widehat{Y}_i = p_{ii}\,Y_i + \sum_{i \neq j} p_{ji}\,Y_j. \tag{2.31}$$

Observemos que o valor ajustado $\widehat{Y}_i$ é uma combinação linear das observações da variável resposta. O elemento p_{ii} é o peso da observação Y_i e o elemento p_{ij} é o peso de cada variável resposta Y_j, com $i \neq j$. Concluímos, pela expressão (2.31), que para valores altos de p_{ii} predomina a influência de Y_i sobre o correspondente valor ajustado. Devido a este fato, considerou-se muito razoável utilizar p_{ii} para identificar os possíveis pontos de alvancamento. Assim, um ponto de alavancamento

$\mathbf{X}_i$ é caracterizado por um alto peso p_{ii}, que atrairá o valor ajustado $\widehat{Y}_i$ próximo ao valor observado Y_i.

Se $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ é um ponto de alavancamento, p_{ii} assumirá valores próximos de 1,e o termo $\sum_{i \neq j} p_{ji} Y_j$ em (2.31) tenderá zero. Consequentemente, o vetor $\widehat{Y}_i$ sofrerá intensamente o efeito alavanca.

Mas, se $p_{ii} = 1$, $\sum_{i \neq j} p_{ji} Y_j = 0$ e a equação (2.31) passa a ser

$$\widehat{Y}_i = Y_i. \tag{2.32}$$

Por outro lado, $\widehat{Y}_i = Y_i$ não implica que $p_{ii} = 1$, pois nem todo ponto $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ com $r_i = 0$ é um ponto de alavancamento.

Vejamos agora o método de identificação dos pontos aberrantes no modelo de regressão linear.

Identificação dos Pontos Aberrantes

Ao aplicarmos o método de mínimos quadrados a um conjunto de dados com pontos aberrantes, estes poderão atrair o ajuste da função de regressão.

A identificação de pontos aberrantes é feita através do resíduo estudentizado deletado. Este resíduo resulta da combinação de dois tipos de resíduos, denominados de resíduo estudentizado e resíduo deletado. Estes resíduos são refinamentos distintos do resíduo ordinário (2.33), buscando tornar a detecção dos possíveis pontos aberrantes mais efetiva. O resíduo $\mathbf{r}$ equivale à predição do erro $\mathbf{e}$, deste modo, podemos escrever que

$$\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{r},$$

onde

$$\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}}, \tag{2.33}$$

ou

$$\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y}. \tag{2.34}$$

Observemos através da equação (2.34) que o resíduo, r_i é expresso como combinações lineares das variáveis resposta Y_i.

A matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos, de ordem $n \times n$, é

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{r}) = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{P}), \tag{2.35}$$

onde os elementos da diagonal relativos às variâncias dos resíduos são obtidos pela expressão

$$\mathrm{var}(r_i) = \sigma^2(1 - p_{ii}), \tag{2.36}$$

e os elementos $\mathrm{cov}(r_i, r_j)$, são obtidos por

$$\mathrm{cov}(r_i, r_j) = -p_{ij}\,\sigma^2. \tag{2.37}$$

Da expressão (2.36) podemos afirmar que os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{P}$ interferem no cálculo da variância de cada resíduo r_i. Isto é ainda mais visível quando no conjunto de dados existem pontos de alavancamento, fazendo com que a variância do resíduo $\mathrm{var}(r_i)$ assuma valores próximos de zero, omitindo que estes pontos não estão bem ajustados. Levando em consideração estes fatos, apresentaremos, a seguir, as análises residuais derivadas do resíduo ordinário, cujos refinamentos requerem o uso da matriz chapéu $\mathbf{P}$.

Resíduo Estudentizado

O resíduo estudentizado foi o primeiro aprimoramento do resíduo ordinário dado na expressão (2.34), na tentativa de identificar os possíveis pontos aberrantes. Para a realização deste refinamento residual levou-se em conta o fato de que o resíduo r_i pode apresentar variâncias $\mathrm{var}(r_i)$ substancialmente diferentes, sendo assim, apropriado considerar a magnitude de cada r_i, relativa ao desvio padrão.

Como a variância é desconhecida, podemos estimá-la através da expressão

$$\widehat{\mathrm{var}}(r_i) = MSE(1 - p_{ii}) \tag{2.38}$$

e as covariâncias estimadas por

$$\widehat{\mathrm{cov}}(r_i, r_j) = -p_{ij}MSE, \tag{2.39}$$

onde MSE é o erro quadrático médio, um estimador de σ^2, cuja expressão é

$$MSE = \frac{\mathbf{Y}^t\mathbf{Y} - \widehat{\beta}^t\mathbf{X}^t\mathbf{Y}}{n-k},$$

para o modelo de regressão linear sem intercepto e

$$MSE = \frac{\mathbf{Y}^t\mathbf{Y} - \widehat{\beta}^t\mathbf{X}^t\mathbf{Y}}{n-k-1},$$

para o modelo de regressão linear com intercepto.

A expressão do resíduo estudentizado é

$$re_i = \frac{r_i}{\widehat{\sigma}(r_i)}, \tag{2.40}$$

para $i = 1, \cdots, n$, onde $\widehat{\sigma}(r_i)$ é o estimador do desvio padrão de r_i dado por

$$\widehat{\sigma}(r_i) = \sqrt{MSE(1 - p_{ii})}. \tag{2.41}$$

A desvantagem do resíduo estudentizado é que os resultados obtidos em (2.40), seguem, a distribuição t de Student, apenas aproximadamente, pois o numerador e o denomindor em (2.40) não são independentes. Deste modo, a identificação dos pontos aberrantes através deste resíduo pode ser inadequada. Devido a este fato, outros resíduos foram propostos.

Resíduo Deletado

Este resíduo foi formulado considerando as possíveis variações na função de regressão LS, com a retirada do i-ésimo caso $(\mathbf{X}_i, Y_i)$, associado a um ponto aberrante, antes que esta função seja reajustada. Pois, com a presença de um ponto aberrante Y_i, o ajuste da função de regressão LS, incluindo todos os casos $(\mathbf{X}_i, Y_i)$, pode ser influenciada ficando próxima de Y_i, de modo que o valor ajustado $\widehat{Y}_i$ atinja valores próximos a Y_i. Assim, com a retirada do i-ésimo caso assoaciado ao ponto aberrante, a diferença entre o valor observado e ajustado será grande, e conseqüentemente o resíduo deletado revelará o possível ponto aberrante.

O cálculo do resíduo deletado é um processo constituído das seguintes etapas:

1. Antes de estimar os parâmetros β retiramos a observação Y_i e a respectiva linha da matriz $\mathbf{X}$ que representa um ponto $\mathbf{X}_i \in R^k$.

2. A partir do novo modelo de regressão matricial, com o número de observações igual a $n-1$, sendo o posto de $\mathbf{X}$ igual a k, estimaremos os parâmetros $\beta_{(i)}$.

3. Agora, tomaremos para o cálculo de $\widehat{\mathbf{Y}_{(i)}}$ a matriz $\mathbf{X}$ com dimensão $n \times (k+1)$ e o vetor dos parâmetros β estimado no passo 2. O vetor ajustado $\widehat{\mathbf{Y}_{(i)}}$ terá dimensão $n \times 1$.

$$\widehat{\beta_{(i)}} = (\mathbf{X}_{(i)}^t \mathbf{X}_{(i)})^{-1} \mathbf{X}_{(i)}^t \mathbf{Y}_{(i)},$$

$$\widehat{\mathbf{Y}_{(i)}} = \mathbf{X}\widehat{\beta_{(i)}},$$

para $i = 1, \cdots, n$.

Chamamos a diferença entre os elementos dos vetores $\mathbf{Y}$ e $\widehat{\mathbf{Y}_{(i)}}$ de resíduo deletado (d_i), cuja expressão é (Neter & Wasserman, 1983)

$$d_i = Y_i - \widehat{Y_{(i)}}. \tag{2.42}$$

Reformulando a expressão (2.42) encontramos

$$d_i = \frac{r_i}{1 - p_{ii}}, \tag{2.43}$$

onde $1 - p_{ii}$ representa o elemento geral da diagonal principal da matriz de sensibilidade

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{P}.$$

Observemos, na expressão (2.43), que os altos valores de p_{ii} produzirão resíduos deletados d_i muito maiores que r_i se o i- ésimo caso $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ for um ponto de alavancamento. Mas, como os valores d_i, em (2.43), têm uma distribuição com parâmetro desconhecido, pois depende de um parâmetro desconhecido σ^2, o resíduo deletado não é totalmente apropriado como técnica de diagnóstico.

Resíduo Deletado Estudentizado

Da combinação destes dois resíduos obtivemos o resíduo deletado estudentizado. A variância de d_i pode ser estimada por

$$\widehat{var}(d_i) = \frac{MSE_{(i)}}{1 - p_{ii}};$$

logo,

$$\widehat{\sigma}(d_i) = \sqrt{\frac{MSE_{(i)}}{1 - p_{ii}}}, \tag{2.44}$$

onde $MSE_{(i)}$ é o erro quadrático médio calculado a cada retirada do i-ésimo caso (Neter & Wasserman, 1983).

Aplicando a expressão do resíduo estudentizado (2.40), utilizando d_i e $\sigma(d_i)$ definidos respectivamente em (2.42) e (2.44), obtemos o resíduo deletado estudentizado

$$t_i = \frac{d_i}{\widehat{\sigma}(d_i)}, \tag{2.45}$$

podendo ser provado que $t_i \sim t(n - k - 1)$, se os erros e_i são gaussianos (Neter & Wasserman, 1983).

Desenvolvendo algebricamente a expressão (2.45) (Neter & Wasserman, 1983), obtemos

$$t_i = \frac{r_i}{\sqrt{MSE_{(i)}(1 - p_{ii})}}. \tag{2.46}$$

O resíduo t_i pode ser obtido por uma expressão equivalente à (2.46), sem que a função de regressão LS seja ajustada a cada vez que o i-ésimo caso é deletado,

$$t_i = r_i \sqrt{\frac{n - p - 1}{SSE(1 - p_{ii}) - r_i^2}}, \tag{2.47}$$

onde SSE é a soma dos quadrados dos resíduos,

$$SSE = \mathbf{Y}^t\mathbf{Y} - \widehat{\beta}^t\mathbf{X}^t\mathbf{Y}.$$

Analisando os resutados acima concluímos que o resíduo deletado estudentizado é o mais apropriado para identificar os possíveis pontos aberrantes, pois nos permite verificar se t_i, para $i = 1, \cdots, n$, seguem a distribuição t de Student. Identificados os possíveis pontos de alavancamento, pela matriz chapéu, e os pontos aberrantes, pelo resíduo deletado estudentizado, faremos o estudo de influência nestas observações apontando aquelas que afetam o ajuste da função LS.

Estudo de Influência

O estudo de influência aplicado aos possíveis pontos aberrantes e de alavancamento, do modelo de regressão LS, é constituído pelas estatísticas DFFITS, distância de Cook e DFBETAS. Utilizando critérios distintos, estas estatísticas revelarão os pontos aberrantes e de alavancamento que influenciam no ajuste da função de regressão LS. Isto porque os resultados destas estatísticas, com relação aos possíveis pontos aberrantes e de alavancamento, informarão a variação do ajuste da função de regressão de mínimos quadrados com a retirada destas observações sob diferentes aspectos.

Denotaremos o vetor predito de $\widehat{\mathbf{Y}}$, e cada elemento deste vetor de $\widehat{Y}_i$. O vetor predito com a exclusão do i-ésimo caso será denotado por $\widehat{\mathbf{Y}}_{(i)}$, e cada elemento deste vetor de $\widehat{Y}_{j(i)}$. Cada elemento do vetor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ será denotado por $\widehat{\beta}_k$ e cada elemento do vetor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, com a retirada do i- ésimo caso, por $\widehat{\beta}_{k(i)}$

1.DFFITS

Esta estatística identifica os pontos aberrantes e/ou pontos de alavancamento que influenciam o ajuste da função de regressão LS analisando as variações entre os elementos preditos dos vetores $\widehat{Y}_i$ e $\widehat{Y}_{i(i)}$ através da expressão

$$DFFITS_i = \frac{\widehat{Y}_i - \widehat{Y}_{i(i)}}{\sqrt{MSE_{(i)} p_{ii}}}, \tag{2.48}$$

onde o denominador desta equação é um estimador do desvio padrão do numerador.

Reformulando a expressão (2.48) (Neter & Wasserman, 1983), $DFFITS_i$ poderá ser calculado sem que a nova função de regressão LS seja ajustada cada vez que o i-ésimo caso é excluído. O resultado desta reformulação é

$$DFFITS_i = t_i \left(\frac{p_{ii}}{1 - p_{ii}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A estatística DFFITS identifica pontos aberrantes e/ou pontos de alavancamento que influenciam o ajuste da função LS (Paula, 2004), se

$$|DFFITS|_i > 2 \left(\frac{k}{n-k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.DISTÂNCIA DE COOK

A distância de Cook identifica pontos aberrantes e de alavancamento que influenciam o ajuste da função de regressão LS. Esta influência é quantificada analisando o comportamento do vetor $\widehat{\mathbf{Y}}$, após a retirada do i-ésimo caso. Denotamos esta estatística por D_i, sendo calculada pela expressão

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \widehat{Y}_{j(i)})^2}{nMSE}. \tag{2.49}$$

A distância de Cook pode ser calculada por uma expressão equivalente à (2.49), onde não será necessário determinar a nova função de regressão LS a cada retirada do i-ésimo caso (Neter & Wasserman, 1983). Sua formulação é

$$D_i = \frac{r_i^2}{nMSE} \left[\frac{p_{ii}}{(1 - p_{ii})^2} \right],$$

A distância de Cook revelará se o i-ésimo caso $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ é um possível ponto de alavancamento que influência o ajuste da função LS caso o valor de D_i ultrapasse o valor crítico obtido de uma distribuição de probabilidade F ($D_i \sim F(k, n-k)$).

3. DFBETAS

Esta estatística aponta a variação nos elementos de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ provocada pela retirada do i-ésimo caso através da seguinte expressão:

$$DFBETAS_{k(i)} = \frac{\widehat{\beta}_k - \widehat{\beta}_{k(i)}}{\sqrt{MSE_{(i)} c_{kk}}},$$

onde c_{kk} é o k-ésimo elemento da diagonal de $(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}$.

Segundo a estatística DFBETAS, o i-ésimo caso é um ponto de alavancamento e/ou aberrante se (Neter & Wasserman, 1983)

$$|DFBETAS| > 1.$$

Os métodos de identificação dos possíveis casos de afastamento, bem como o estudo de influência destes pontos, têm suas vantagens e desvantagens. Se os erros são gaussianos, $N(0, \sigma^2\mathrm{I})$, na presença de um único ponto de alavancamento ambas as etapas serão realizadas com sucesso, caso contrário, os resultados da análise

de diagnóstico poderão não revelar os pontos de alavancamento e aberrantes que influenciam o ajuste da função LS. A deficiência do método LS está associada à presença dos múltiplos pontos de alavancamento, pois o centróide C é calculado através da média aritmética de cada coluna da matriz $\mathbf{X}$. Como esta é uma estimativa de locação apropriada para conjuntos de pontos que seguem uma distribuição simétrica, um único ponto de alavancamento poderá atrair o centróide em sua direção. Assim, os elementos da diagonal da matriz $\mathbf{P}$ irão mascarar alguns pontos de alavancamento, comprometendo o estudo de influência. Os pontos aberrantes também atraem o ajuste da função de regressão LS, de modo que um único ponto aberrante pode influenciar o ajuste da função de regressão LS. Lembremos que esta afirmação foi justificada ao analisarmos a equação (2.31). A vantagem do processo de identificação dos possíveis pontos de alavancamento, pela matriz chapéu, é que este independe da estimação do vetor $\widehat{\beta}$.

Portanto, como a matriz chapéu $\mathbf{P}$ mascara os múltiplos pontos de alavancamento, o estudo de influência também não revelará os maus pontos de alavancamento.

Na seção 3.10 apresentaremos os resultados das estatísticas da análise de diagnóstico no processo de EESEP.

Capítulo 3

Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência

3.1 Introdução

A estimação de estado em sistemas elétricos de potência (EESEP) combina dois campos, o fluxo de potência e a estatística.

O estimador busca uma análise do fluxo de potência do sistema através de um conjunto redundante de medidas imperfeitas. Em razão da redundância e imperfeição dessas medidas, a estimação se baseia em processos estatísticos, onde se tenta minimizar ou maximizar critérios estabelecidos determinando assim o valor mais provável das variáveis de estado.

A EESEP vem sendo alvo de várias pesquisas, desde o final da década de 60: [Schweppe (1970); Schweppe & Douglas (1970); Schweppe & Wildes (1970); Coutto Filho *et al.* (1990) e Monticelli (1999)].

Tradicionalmente são quatro as etapas envolvidas no processo de EESEP (Monticelli, 1999):

1ª Etapa: Obtenção da topologia do sistema, no modelo barra linha

A partir das medidas lógicas, que consistem em estados de chave e disjuntores,

bem como de informações quanto ao tipo e à localização dos estimadores instalados no sistema, o configurador de sistemas permite determinar a topologia e a correspondente configuração de medidores, no modelo barra linha.

2ª Etapa: Análise e Restauração da Observabilidade do Sistema

Através do modelo barra linha, obtido pelo configurador do sistema, verifica-se a possibilidade de, através das medidas analógicas e virtuais [1] disponíveis, determinar as variáveis de estado em todas as barras do sistema. Em caso afirmativo, o sistema é dito observável. Caso contrário, esta falta de medidas pode ser suprida, em algumas situações, por pseudo-medidas [2] através das quais o sistema se torna observável como um todo.

Uma alternativa para essa situação é determinar as partes observáveis do sistema, isto é, as "ilhas observáveis".

Os métodos desenvolvidos para análise de observabilidade podem ser divididos em dois grupos: os métodos topológicos e os numéricos.

Os métodos do primeiro grupo caracterizam-se pela criação de rotinas específicas, que não exigem cálculos, mas que são de natureza combinatória e complexa ((Krumpholz *et al.*, 1980); (Quintana *et al.*, 1982); (Nucera & Gilles, 1991)). Já os do segundo grupo são mais simples, visando à utilização de rotinas já disponíveis nos programas de estimadores de estado. Entretanto, estão sujeitos a erros numéricos ((Montecelli & Wu, 1985b); (Montecelli & Wu, 1985a); (Monticelli & Wu, 1986)).

Verificando a possibilidade de diminuir a quantidade de cálculos necessária para a análise de observabilidade, Bretas (1996) desenvolveu um novo método baseado na fatoração triangular da matriz ganho e nos conceitos contidos nos caminhos de grafo.

3ª Etapa: Estimação de Estado

[1] São medidas de injeção zero em barras passivas do sistema.

[2] Dados de precisão de carga, previsão de geração, dados históricos, etc, que fazem parte do banco de dados do centro de operação.

Considerando a topologia do sistema, obtida pelo configurador de sistemas, e através dos seus parâmetros armazenados no banco de dados, bem como do conjunto disponível de medidas, o estimador de estado permite determinar as variáveis de estado, isto é, as tensões complexas em todas as barras do sistema.

Dos muitos estimadores desenvolvidos, os mais difundidos e pesquisados são os estimadores estáticos por mínimos quadrados ponderados, originalmente propostos por Schweppe (1970).

Na tentativa de melhorar a confiabilidade do processo de estimação de estado foram criados os estimadores desacoplados ((Garcia *et al.*, 1979); (Monticelli *et al.*, 1990); (Roy & Mohamed, 1997)), bem assim os estimadores com técnicas mais robustas numericamente, que evitam os problemas numéricos ((Monteceli & Wu, 1985b); (Mili *et al.*, 1996); (Gouvêa & Simões Costa, 1998)).

Considerando a dinâmica do vetor de estado, algumas pesquisas buscaram algoritmos para a estimação dinâmica de estado. Algumas dessas pesquisas acompanham as mudanças das variáveis de estado com o tempo, valendo-se do chamado estimador "tracking"((Masiello & Schweppe, 1971); (Falcão *et al.*, 1982)). Outras adicionaram aos estimadores "tracking "a teoria do filtro de Kalman ((Debs & Larson, 1970); (Leite da Silvia *et al.*, 1987); (Bretas, 1992)).

4ª Etapa: Processamento de Erros Grosseiros em Medidas Analógicas

Como mencionado no capítulo 1, as medidas analógicas, fornecidas ao estimador de estado, estão sujeitas aos EGs. Na prática, esses erros são causados, por exemplo, por problemas nos canais de comunicação, instrumentos de medição defeituosos e erros na modelagem de pseudo-medidas.

Devido a essa fragilidade do conjunto de medidas, o estimador de estado deve ser robusto o suficiente para detectar e identificar a ocorrência de EGs. Em seguida, as medidas identificadas como portadoras de EGs são eliminadas e as variáveis de estado são estimadas novamente.

Como foi descrito acima, as etapas 2, 3 e 4 baseiam-se na topologia obtida na

1ª Etapa. Em razão disto, caso ocorra algum erro topológico e este não tenha sido detectado pelo configurador de sistemas, tal erro pode causar um aumento nos resíduos das medidas analógicas, localizadas nas vizinhanças dos elementos erroneamente configurados do sistema. Assim, na 4ª Etapa, as medidas analógicas, com resíduos elevados, são identificadas como portadoras de EGs. Nessa situação, dar-se-á início a um processo de eliminação de medidas analógicas, e, eventualmente, o processo poderá reduzir a zero o nível de redundância local. Logo, não será mais detectado erro grosseiro em medida analógica, mas o erro topológico permanece. Conseqüentemente, o modelo do sistema não representará corretamente a sua atual situação.

Análise similar pode realizar-se, considerando erros nos parâmetros do sistema, pois, as etapas 3 e 4 baseiam-se nos parâmetros fornecidos ao estimador na 3ª etapa. Assim, caso a informação de algum parâmetro do sistema tenha sido erroneamente fornecida ao estimador de estado, tal erro causará um aumento nos resíduos das medidas analógicas localizadas nas vizinhanças do elemento.

É drástico o efeito de um erro topológico e de um erro de parâmetro para o processo de estimação de estado, normalmente intolerável. Diante disto, vários autores realizaram trabalhos em busca de métodos para a análise de erros topológicos e de parâmetros ((Monticelli, 1999); (Zarco & Expósito, 2000)).

3.2 Estimação Estática de Estado

O estimador de estado pode ser dinâmico ou estático. Nesta seção será dada uma introdução ao conceito de estimador estático de estado, o que pode ser considerado como uma generalização do problema clássico de fluxo de carga (Handschin *et al.*, 1975).

O termo estático refere-se ao fato de o modelo de rede utilizado ser estático, não se considerando as variações entre as grandezas e a variável tempo. Desta forma,

serão usadas apenas equações algébricas, sem o emprego de equações diferenciais, assim como é feito no estudo de fluxo de carga.

A estimação de estado consiste no cálculo de variáveis de estado desconhecidas, através de um conjunto de medidas inexatas. Destarte, a estimação obtida para as variáveis de estado desconhecidas também não será exata.

Assim, o problema de estimação consiste em encontrar uma forma de atingir-se a melhor estimativa das variáveis de estado desconhecidas e, para isto, dos muitos critérios estatísticos existentes, o que vem sendo mais utilizado, para EESEP, é o dos mínimos quadrados.

3.2.1 Estimador de Estado Baseado no Método dos Mínimos Quadrados

A estimação de estado, através dos mínimos quadrados, é formulada da seguinte maneira[3]:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_\nu) + \mathbf{w}, \tag{3.1}$$

onde

$\mathbf{z}$: vetor de medidas $(m \times 1)$;

$\mathbf{h}(.)$: vetor de funções não lineares, relacionando as medidas com as variáveis de estado $(m \times 1)$;

$\mathbf{x}_\nu$: vetor de estado verdadeiro $(n \times 1)$, isto é, das variáveis de estado verdadeiras;

$\mathbf{w}$: vetor de erros $(m \times 1)$

m: número de medidas;

n: número de variáveis de estado.

A melhor estimativa do vetor $\mathbf{x}_\nu$, designada por $\widehat{\mathbf{x}}$, é o valor de $\mathbf{x}$ que torna mínimo o índice de $J(\mathbf{x})$, que é dado por:

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w} \tag{3.2}$$

[3]Para o desenvolvimento desta seção utilizou-se a referência London Jr. (2000).

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{W}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \tag{3.3}$$

onde $\mathbf{W}^{-1}$ é a matriz de ponderação para as medidas; é o inverso da matriz de covariâncias das mesmas. É uma matriz diagonal, cujos valores diferentes de zero são os inversos das variâncias de cada medida (σ_{ii}^{-2}) ((Handschin *et al.*, 1975), (Horisberger *et al.*, 1976)). Através dessa matriz as medidas são ponderadas conforme as suas qualidades e o estimador passa a ser chamado de estimador de mínimos quadrados ponderados (WLS - Weighted Least Squares).

Da equação (3.3) deduz-se que $J(\mathbf{x})$ é uma função quadrática em relação a x. Considerando que $\mathbf{x}_\nu$ torna mínimo $J(\mathbf{x})$, podemos dizer que $J(\mathbf{x})$ é convexo nas proximidades de $\mathbf{x}_\nu$. Desta forma, para obter $\widehat{\mathbf{x}}$, que torne $J(\mathbf{x})$ mínimo, fazemos

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

resultando em

$$2\,\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})^t\,\mathbf{W}^{-1}\,[\mathbf{z} - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}})] = \mathbf{0}, \tag{3.4}$$

onde $\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})$ é o jacobiano, dado por

$$\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}|_{\widehat{\mathbf{x}}}.$$

A equação (3.4) relaciona o vetor de estado estimado $\widehat{\mathbf{x}}$, mas para determinar-se-lhe a solução, temos que recorrer a técnicas iterativas, porquanto, devido à não linearidade de $\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})$ e $\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}})$, a solução direta daquela equação não é, via de regra, possível. Tendo em vista o fato de $J(\mathbf{x})$ ser convexo nas proximidades de $\mathbf{x}_\nu$, é usado o método de Newton-Raphson, para obter-se o valor de $\widehat{\mathbf{x}}$ que minimiza $J(\mathbf{x})$.

Linearizando $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, em torno de um ponto de operação $\mathbf{x}^0$, tem-se

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{h}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^0).\triangle\mathbf{x}^0,$$

sendo

$$\triangle\mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$$

e

$$H(x^0) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}|_{x=x^0}.$$

De (3.1) obtém-se

$$z = h(x^0) + H(x^0).\triangle x^0 + w,$$

Definindo

$$\triangle z(x^0) = z - h(x^0),$$

onde $\triangle z$ é o erro de estimação, obtemos

$$\triangle z(x^0) = H(x^0).\triangle x^0 + w.$$

Assim, a função objetivo passa a ser

$$J(x) = [\triangle z(x^0) - H(x^0).\triangle x^0]^t W^{-1}[\triangle z(x^0) - H(x^0).\triangle x^0],$$

e o mínimo é encontrado fazendo

$$H(x^0)^t.W^{-1}.[\triangle z(x^0) - H(x^0).\triangle x^0] = 0.$$

Portanto, a equação normal de Gauss é

$$\triangle x^0 = [H(x^0)^t.W^{-1}.H(x^0)]^{-1}[H(x^0)^t.W^{-1}.\triangle z(x^0)]$$

onde a matriz ganho é dada por

$$G = H(x^0)^t.W^{-1}.H(x^0)$$

e

$$x^1 = x^0 + \triangle x^0.$$

Assim, a estimativa de x_ν corresponde ao valor de x de uma determinada iteração em que se verifique um índice de convergência pré-fixado.

O processo iterativo descrito acima permite o desacoplamento do algoritmo, para o processo de estimação de estado por mínimos quadrados ponderados, gerando

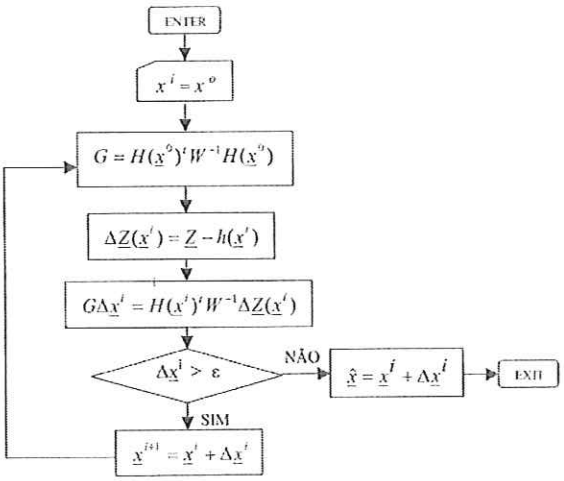


Figura 3.1: Fluxograma do algoritmo acoplado

dois algoritmos distintos: o algoritmo acoplado (figura 3.1) e o desacoplado (figura 3.2). A diferença entre ambos é que, no algoritmo acoplado, a matriz ganho ($\mathbf{G}^0$) é atualizada em cada iteração; já no algoritmo desacoplado, aquela matriz é calculada apenas na primeira iteração e depois é mantida constante.

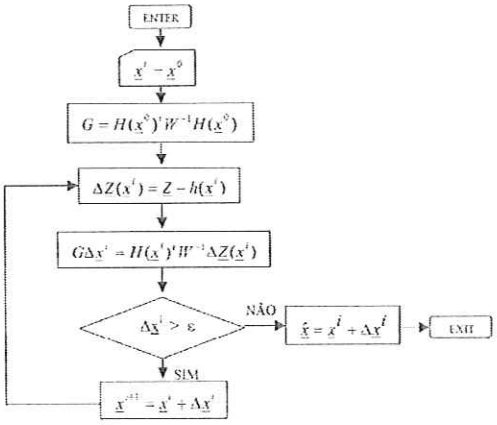


Figura 3.2: Fluxograma do algoritmo desacoplado

Quando os erros das medidas são gaussianos, o estimador WLS funciona muito bem, mas falha na ocorrência EGs. Assim, foram desenvolvidos métodos para detecção e identificação de EGs.

3.3 Detecção e Identificação de Medidas com Erros Grosseiros

Os algoritmos desenvolvidos, para detecção e identificação de medidas com erros grosseiros, podem ser divididos, em sua maioria, em dois grupos (Korres & Contaxis, 1991):

1. os baseados na análise dos resíduos de estimação;

2. os baseados em critérios não quadráticos.

A principal diferença entre eles está no fato de os algoritmos do primeiro grupo eliminarem as medidas identificadas como portadoras de erros grosseiros; já os algoritmos do segundo grupo, ao invés de eliminarem essas medidas, atribuem a elas pesos menores, na matriz de ponderação das medidas (Mili *et al.* (1985)).

O ponto em comum, dos algoritmos desses dois grupos, é que ambos são dependentes dos resíduos de cada medida.

Existem alguns trabalhos em que se propõem a análise das medidas, antes do processo de estimação de estado, através de testes estatísticos das inovações (diferenças entre os valores medidos e os previstos) ((Leite da Silvia *et al.*, 1987), Coutto Filho *et al.* (1989), (Souza *et al.*, 1996)). São os chamados estimadores com capacidade de previsão (FASE).

A vantagem desses estimadores resulta de a detecção e identificação de medidas com erros grosseiros realizar-se sem a necessidade de se analisarem os resíduos das medidas. Contudo, os mesmos estimadores apresentam dificuldades na determinação da matriz de transição de estado.

Como a maioria dos estimadores de estado são dependentes da análise dos resíduos, são apresentados nesta seção os processos de detecção e identificação das medidas com erros grosseiros utilizando os resíduos de estimação.

3.3.1 Detecção de Medidas com Erros Grosseiros

Através dos algoritmos baseados na análise dos resíduos, a detecção de erros grosseiros em medidas é realizada através do índice $J(\widehat{\mathbf{x}})$, por intermédio de um teste de hipótese.

Considerando a hipótese de que não haja erro grosseiro, o valor do índice $J(\widehat{\mathbf{x}})$, calculado para $\widehat{\mathbf{x}}$ obtido após a convergência do processo de estimação de estado, é comparado com o parâmetro λ. O valor de λ é previamente determinado, supondo uma distribuição χ^2 com $(m-n)$ graus de liberdade para o índice $J(\widehat{\mathbf{x}})$ e fixando uma certa probabilidade ρ de se tomar a decisão errada, rejeitando-se a hipótese quando ela é verdadeira [a suposição de que o índice $J(\widehat{\mathbf{x}})$ apresente uma distribuição χ^2, com $(m-n)$ graus de liberdade, foi demostrada por Handschin *et al.* (1975)].

Se $J(\widehat{\mathbf{x}}) > \lambda$, rejeita-se a hipótese de que não haja erro grosseiro e se $J(\widehat{\mathbf{x}}) \leq \lambda$ aceita-se a mesma.

Se a hipótese de que não haja erro grosseiro for aceita, consideram-se confiáveis os resultados obtidos pelo estimador de estado. Mas se essa hipótese for rejeitada, importa identificar e eliminar as medidas que estejam com erros grosseiros.

3.3.2 Identificação de Medidas com Erros Grosseiros

O processo de identificação de medidas com erros grosseiros realiza-se por meio da análise dos resíduos de estimação normalizados. O vetor de resíduos de estimação pode ser defido como

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{x}}), \tag{3.5}$$

que pode ser representado também da seguinte forma (Handschin *et al.*, 1975):

$$\mathbf{r} = \Gamma \mathbf{z},$$

onde $\mathbf{w}$ é o vetor aleatório dos erros das medidas e Γ é a matriz sensibilidade do resíduo, dada por

$$\Gamma = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}}).[\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})^t\mathbf{W}^{-1}.\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})]^{-1}\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})^t.\mathbf{W}^{-1}, \tag{3.6}$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade.

Logo, a matriz de covariâncias do vetor $\mathbf{r}$ é a matriz $\mathbf{R}$, dada por

$$\mathbf{R} = \Gamma\mathbf{W}\Gamma^t = \mathbf{W} - \mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}}).[\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})^t\mathbf{W}^{-1}.\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})]^{-1}\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{x}})^t. \tag{3.7}$$

Considerando ρ_{ii} o elemento (i, i) da matriz $\mathbf{R}$, os resíduos normalizados r^N são definidos como

$$r^N = \frac{r_i}{\sqrt{\rho_{ii}}}, \tag{3.8}$$

com $i = 1, \cdots, m$, sendo que r^N segue aproximadamente uma distribuição normal de média $\bar{r_N}$, dada por

$$\bar{r^N} = \frac{\bar{r_i}}{\sqrt{\rho_{ii}}}, \tag{3.9}$$

e desvio padrão unitário.

Quando for detectada a presença de medidas com erros grosseiros, é acrescentada à equação (3.1) um vetor determinístico $\mathbf{b}$ para representar os erros grosseiros. Assim, a equação (3.1) toma a seguinte forma:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_\nu) + \mathbf{w} + \mathbf{b}.$$

Considerando que apenas a medida j possua erro grosseiro, o vetor $\mathbf{b}$ será dado por

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo b_j o erro grosseiro da medida j.

Assim, a média do resíduo de estimação é

$$\bar{\mathbf{r}} = \Gamma \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \gamma_{1j} \\ \vdots \\ \gamma_{ij} \\ \vdots \\ \gamma_{mj} \end{bmatrix} .b_j.$$

Então, $\bar{r_i} = b_j \gamma ij$, para $i = 1, \cdots, m$, onde γ_{ij} é o elemento (i, j) da matriz Γ, que é obtida pela equação (3.6).

Partindo da equação (3.9) chegamos à expressão

$$\bar{r^N}_i = \frac{b_j . \gamma_{ij}}{\sqrt{\rho_{ii}}},$$

para $i = 1, \cdots, m$.

Entretanto, para cada medida, somente um ρ_{ii} é encontrado. Desta forma, as médias dos resíduos normalizados de cada medida são diferentes, mas com variâncias iguais e unitárias. Portanto, as distribuições de probabilidade dos resíduos normalizados, de cada medida, diferem apenas no que se refere às médias. Conseqüentemente, para a identificação de medidas com EGs, basta examinar as médias dos resíduos normalizados de cada medida. A medida que tiver $\bar{r_N}$ mais distante das demais, ou seja, a medida que tiver o maior resíduo normalizado corresponderá à medida com EG ((Schweppe, 1970), (Handschin *et al.*, 1975)).

Quando uma medida com EG é identificada, a mesma é eliminada do conjunto de medidas, sendo necessário proceder-se novamente à estimação de estado. O método de identificação de medidas, descrito acima, permite identificar uma medida de cada vez; assim, para situações em que ocorram EGs múltiplos, esse processo torna-se mais pesado, pois, para cada medida com EG que se elimine, realizar-se-á uma nova estimação de estado, até que todas as medidas com EGs sejam eliminadas.

Existem métodos que propiciam a eliminação de mais de uma medida de cada vez, reduzindo assim o tempo de processamento para detectar e identificar medidas

com EGs (Mili *et al.*, 1984).

Como mencionado no capítulo 1, na ocorrência de EG simples, isto é, quando apenas uma medida possui EG, os métodos para detecção e identificação de EGs baseado na análise dos resíduos apresentam um bom desempenho, para diversas situações, mas possuem algumas limitações, como, por exemplo, o fato de não detectarem EGs em medidas críticas e não identificarem EGs em conjuntos críticos de medidas.

Apresentam-se, a seguir, as definições de medidas críticas e conjuntos críticos de medidas, bem como a formulação dos estimadores WLAV (Weighted Least Absolute Value) e WLMS (Weighted Least Median of Squares).

3.4 Medidas Críticas

Recordando a definição apresentada na introdução deste trabalho, medida crítica é a medida que, se retirada do conjunto de medidas de um sistema observável, torna o mesmo não observável. Isto acontece porque a medida crítica é a única medida dando a informação de uma determinada variável de estado.

Analisando a estrutura da matriz jacobiana, cujas linhas correspondem às equações de medidas e as colunas às variàveis de estado a serem estimadas, verifica-se que as medidas críticas estão associadas às linhas linearmente independentes dessa matriz. Como conseqüência, a retirada de uma dessas linhas causaria a diminuição do posto dessa matriz.

Outra importante característica das medidas críticas, decorrente do fato de essas medidas estarem associadas às linhas linearmente independentes da matriz jacobiana, é que são nulos os elementos da diagonal principal da matriz sensibilidade de resíduo, dada pela equação (3.6), associados às medidas críticas (Clements *et al.*, 1981).

Devido ao fato de as medidas críticas representarem um risco para a observa-

bilidade de um sistema de potência, independentemente da sua quantidade, assim também por não se permitir a detecção de erros em tais medidas, é de vital importância que o operador de um sistema saiba, durante a operação, da existência das mesmas e possa identificá-las, a fim de permitir-se-lhe a operação de uma forma mais confiável.

Igualmente, a identificação de medidas críticas é também importante para a supervisão de um conjunto de medidas já existente, porquanto, identificando-as, torna-se possível ao projetista determinar onde e que tipo de medidor deve ser instalado no sistema, para garantir-se a não presença, no mesmo, de medidas críticas.

3.5 Conjuntos Críticos de Medidas

Conjunto crítico de medidas, também conhecido na literatura como "minimally dependent sets of measurements", ou "bad data groups", pode ser definido, segundo Ayres & Haley (1986), de duas formas:

Definição numérica: os conjuntos críticos de medidas são aqueles correspondentes às submatrizes da matriz de covariâncias dos resíduos, com posto igual a 1;

Definição topológica: conjunto crítico de medidas é o conjunto de medidas formado por medidas não críticas, em que a eliminação de uma medida qualquer, a ele pertencente, torna críticas as demais medidas.

A identificação dos conjuntos críticos de medidas é importante para um desempenho confiável do estimador de estado (London *et al.*, 2004). Isto porque, além de esses conjuntos representarem um risco para a observabilidade de um sistema de potência,[4] os resíduos normalizados das medidas de um conjunto crítico são iguais (Mili *et al.*, 1984). Assim, embora seja possível detectar a existência de erro grosseiro, em uma das medidas pertencentes a um conjunto crítico, é impossível

[4]A eliminação de quaisquer duas medidas, pertencentes a um conjunto crítico de medidas, associado a um sistema de potência observável, torna tal sistema não observável.

identificar qual, dentre essas medidas, é aquela com erro grosseiro.

3.6 Estimador de Estado WLAV em SEP

O estimador de estado WLAV foi proposto originalmente por Irving *et al.* (1978) e desenvolvido por Kotiuga & Vidyasagar (1982) e Falcão & Assis (1988). A função objetivo do estimador de estado WLAV é

$$J(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^{-2} |r_j|, \tag{3.10}$$

sendo σ_j^2 e r_j a variância e o resíduo da medida j, respectivamente.

Após uma mudança de variáveis, este problema pode ser transformado em um problema de programação linear com restrições, cuja solução é obtida através de n medidas básicas que ajustam perfeitamente a estimação de estado [(Falcão & Assis, 1988)]. As medidas básicas têm resíduo igual a zero, enquanto que as $m-n$ medidas não básicas podem apresentar resíduos não nulos.

A desvantagem deste estimador é que em sistemas de grande porte sua implementação computacional é desfavorável (Monticelli, 2000).

3.7 Estimador de Estado WLMS em SEP

A função objetivo do estimador WLMS não é a soma dos resíduos ao quadrado ou o valor absoluto dos resíduos, mas uma única relação residual. Este estimador de estado tem a seguinte formulação:

$$\min_{\widehat{\mathrm{x}}} \text{mediana}_j \, \mathrm{r}_{wj}^2, \tag{3.11}$$

onde o vetor de estado estimado $\widehat{\mathrm{x}}$ é aquele respectivo ao i-ésimo vetor de resíduos ao quadrado ponderados (r_{iw}^2), para $i = 1, \cdots, n$, com mínima mediana. Denotaremos de r_{wj}^2, o vetor de resíduo ao quadrado ponderado com mínima mediana.

Em sistemas elétricos de potência a solução da função objetivo (3.11) é obtida, segundo Mili *et al.* (1991), da seguinte maneira:

Passo 1: Através de procedimentos combinatoriais sorteia-se uma série de amostras com n medidas, de modo que o sistema elétrico seja observável.

Passo 2: Para cada amostra selecionada no **Passo** 1 estima-se as variáveis de estado do sistema elétrico (modelo DC), aplicando o método de Newton-Raphson.

Passo 3: Calcula-se os vetores de resíduos ao quadrado ponderados, $\mathbf{r}_{i_w}^2$, para $i = 1, \cdots, n$. Em seguida, coloca-se os elementos de cada $\mathbf{r}_{i_w}^2$ em ordem crescente.

Passo 4: Obtêm-se a mediana em cada sequência residual ordenada no **Passo** 3, através da seguinte relação

$$md = [m/2] + [(n+1)/2],$$

sendo [.] a parte inteira do resultado da operação.

Passo 5: Procura-se entre os $\mathbf{r}_{i_w}^2$, para $i = 1, \cdots, n$, o vetor de resíduo ao quadrado ponderado com mínima mediana ($\mathbf{r}_{wj}^2$).

Passo 6: Indica-se, como o estimador de estado LMS, o vetor $\widehat{x}$ correspondente a $\mathbf{r}_{wj}^2$, selecionado no **Passo** 5.

O estimador WLMS é considerado robusto se até metade das medidas redundantes estiverem associadas a erros grosseiros, independentemente se estas medidas são pontos de alavancamento ou não.

O elevado custo computacional, que esse estimador exige, inviabiliza a sua aplicação em SEP de grande porte (Falcão & Arias, 1994). Os motivos desse elevado custo computacional são os seguintes: (i) o cálculo das variáveis de estado, para cada amostra de medidas, deve ser precedido de uma análise de observabilidade; (ii) o tempo gasto para o cálculo das variáveis de estado, para cada uma das amostras selecionadas; (iii) a determinação do número de amostras a serem consideradas, durante o processo de estimação, pois de "n" medidas, pertencente ao conjunto completo contendo "m" medidas disponíveis, isto é, C_n^m, torna o problema impraticável,

para aplicação direta em SEP de grande porte.[5]

3.8 Pontos de Alavancamento no Processo de Estimação de Estado em SEP

Certas medidas chamadas de pontos de alavancamento podem ter uma influência altamente anormal na estimação de estado. Em Mili *et al.* (1991) os pontos de alavancamento são definidos como pontos de uma regressão que estão distantes da maioria dos pontos no espaço de fatores (ver seção 2.3). No processo de EESEP, o espaço de fatores é n-dimensional, gerado pelas linhas $\mathbf{l}_i^t$ da matriz jacobiana ponderada. O ponto de alavancamento de um modelo linear é um ponto (z_i, l_i) afastado dos demais no espaço de fatores. A classificação destes pontos como um bom ou mau ponto de alavancamento dependerá do valor medido z_i, ou seja, se este é um ponto aberrante (veja seção 2.2), então (z_i, l_i) é um mau ponto de alavancamento, caso contrário é um bom ponto de alavancamento. Utilizando a terminologia de EESEP, uma medida ponto aberrante é uma medida com EG, e um mau (bom) ponto de alavancamento é uma medida ponto de alavancamento com (sem) EG.

Em EESEP as seguintes situações tendem a gerar medidas pontos de alavancamento (Mili *et al.*, 1991):

- medidas de fluxos e injeções de potência adjacentes às linhas que são relativamente curtas, quando comparadas com as demais linhas do sistema;
- medidas de injeções e fluxos de potência adjacentes às associadas a barras que apresentam elevado número de linhas incidentes.

[5]Vale lembrar que em Mili *et al.* (1991) sugere-se uma forma de limitar o número de amostras necessárias, sem inviabilizar a escolha de pelo menos uma amostra de medidas isenta de erros.

Comportamento dos estimadores de estado WLS, WLAV e WLMS em SEP na presença dos pontos de alavancamento

A representação gráfica do comportamento dos estimadores WLS, WLAV e WLMS na presença de pontos de alavancamento e aberrantes foi ilustrada nos gráficos das funções de regressão destes estimadores apresentados nas seções 2.2.3, 2.2.1 e 2.2.2, respectivamente. Vejamos como estas análises gráficas são caracterizadas em EESEP.

Como mencionado no capítulo 1, na presença de pontos aberrantes (medidas com EGs) o estimador WLS falha, mas o WLAV não, pois este último é insensível aos pontos aberrantes. O estimador WLS, associado à análise dos resíduos normalizados, é capaz de identificar uma única medida aberrante.

Quando os pontos aberrantes estão associados aos pontos de alavancamento (maus pontos de alavancamento), o estimador WLAV também é drasticamente afetado. Isto porque o mesmo pode considerar os maus pontos de alavancamento como medidas básicas, produzindo estimativas incorretas (seção 2.2.1).

Na presença dos maus pontos de alavancamento, o teste do resíduo normalizado, associado ao estimador WLS, falha. Isto se justifica pelo fato de a magnitude do resíduo r_i, bem como a variância residual ρ_{ii}, ser pequeno, em consequência do efeito alavanca.

Em razão de o estimador WLS, associado à análise dos resíduos normalizados, ser o estimador mais utilizado em SEP, a deficiência da análise residual para o processamento de maus pontos de alavancamento será apresentada detalhadamente na próxima seção, através da formulação linear do WLS.

Finalmente vale destacar que o estimador de estados WLMS é insensível aos pontos aberrantes (medidas com EGs), mesmo quando estes estão associados aos pontos de alavancamento (maus pontos de alavancamento). Entretanto, como mencionado na seção 3.5, o mesmo é inviável para aplicar em SEP de grande porte.

3.9 Efeito dos Maus Pontos de Alavancamento no estimador WLS associado à análise do resíduo normalizado

Para simplificar os nossos estudos em relação aos efeitos dos maus pontos de alavancamento no estimador WLS, vamos utilizar a sua formulação linear. Tal formulação baseia-se nas equações de fluxo de carga linear, onde as perdas são desprezadas e todas as magnitudes de tensão são consideradas iguais a 1 p.u. Em função dessas aproximações, o fluxo de potência ativa entre as barras k e l e a injeção de potência ativa na barra k são calculados pelas seguintes expressões (Monticelli, 1983):

$$P_{kl} = \frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}} \tag{3.12}$$

e

$$P_k = \sum_{m \in \Omega_k} \left(\frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}} \right), \tag{3.13}$$

sendo θ_K e θ_l os ângulos da tensão nas barras k e l, respectivamente, x_{kl} a reatância da linha de transmissão que liga as barras k e l, e Ω_k o conjunto das barras vizinhas da barra k.

Observação 3.1: A equação do fluxo de carga de potência ativa escrita desta forma permite analogias com a lei de Ohm para um circuito de corrente contínua (CC). Em razão disto, o fluxo de potência linear é conhecido como fluxo de carga CC.

Na formulação linear o modelo de medição, apresentado na seção 3.2.1, se torna (Monticelli, 1999):

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_\nu) + \tilde{\mathbf{w}}, \tag{3.14}$$

sendo

$\mathbf{x}_\nu$: vetor das variáveis de estado verdadeiro ($n \times 1$), que na formulação linear corresponde aos ângulos de tensão das barras do sistema;

$\tilde{\mathbf{z}}$: vetor de medidas de potência ativa ($m \times 1$);

$\tilde{\mathbf{H}}$: matriz jacobiana $(m \times n)$, tal que $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{h}}}{\partial \mathbf{x}}$;

$\tilde{\mathbf{w}}$: vetor de erros das medidas $(m \times 1)$, com $E[\tilde{\mathbf{w}}] = \mathbf{0}$ e $E[\tilde{\mathbf{w}}.\tilde{\mathbf{w}}^t] = \mathbf{W}$;

m e n: números de medidas e das variáveis de estado, respectivamente.

Observação 3.2: Vale destacar que no caso não linear a equação denominada de equação normal de Gauss, representa o sistema linear a ser resolvido a cada iteração para a determinação do vetor incremento $\Delta\mathbf{x}$. *Pode-se dizer então que, em cada iteração associada à solução do estimador não linear, um estimador linear é resolvido.* O estimador do vetor de estado $\mathbf{x}_\nu$, designado por $\widehat{\mathbf{x}}$, é o valor de $\mathbf{x}$ que minimiza o índice $J(\mathbf{x})$, dado por

$$J(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{w}}^t \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}]^t \mathbf{W}^{-1} [\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}]. \tag{3.15}$$

Logo,

$$\widehat{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{H}}^t \, \mathbf{W}^{-1} \, \tilde{\mathbf{H}})^{-1} \, \tilde{\mathbf{H}}^t \, \mathbf{W}^{-1} \, \tilde{\mathbf{z}}. \tag{3.16}$$

Para analisar a influência dos maus pontos de alavancamento no estimador WLS, associado à análise dos resíduos normalizados, consideramos a transformação do modelo de medição proposta por Abur & Celik (1992a).

Fazendo

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{z}}$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}},$$

onde $\mathbf{H}$ é a matriz jacobiana ponderada, e

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{w}},$$

obtemos

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{3.17}$$

onde $E[\mathbf{w}] = \mathbf{0}$ e $E[\mathbf{w}.(\mathbf{w})^t] = \mathbf{I}$, sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade $(m \times m)$, isto é, o vetor de erros de medidas $\mathbf{w}$ tem variância unitária.

Assim, para o novo modelo de medição temos

$$\widehat{x} = (H^t H)^{-1} H^t z, \tag{3.18}$$

pois a matriz de ponderação agora é o inverso da matriz identidade I.

Logo, o vetor de medidas estimadas é

$$\widehat{z} = H\widehat{x}, \tag{3.19}$$

ou

$$\widehat{z} = H(H^t H)^{-1} H^t z, \tag{3.20}$$

equivalente a

$$z = Pz, \tag{3.21}$$

onde P é denominada matriz chapéu (seção 2.2.3).

Na secção 2.2.3 apresentamos, em termos de análise de regressão, as propriedades da matriz chapéu P e o teste de identificação de pontos de alavanvancamento baseado nesta matriz. A aplicação deste teste no processo de estimação de estado em SEP será apresentada no capítulo 4.

O resíduo dado pela equação (3.5), também pode ser expresso em função dos elementos da matriz chapéu P:

$$r = z - \widehat{z} = z - Pz = (I - P)z. \tag{3.22}$$

Analisando esta expressão, concluímos que o resíduo de uma medida correspondente a um ponto de alavancamento será muito pequeno, mesmo quando esta estiver contaminada por um EG.

Em razão de apresentar um resíduo muito pequeno, a medida ponto de alavancamento tem um comportamento semelhante ao de uma medida crítica, pois esta apresenta resíduo nulo (Abur *et al.*, 1997); (Celik & Abur, 1992). Assim, em termos de processamento de EGs através da análise dos resíduos, podemos classificar as medidas pontos de alavancamento como medidas "quase críticas". Entretanto,

devemos lembrar que existe uma diferença fundamental entre a medida crítica e a medida ponto de alavancamento, que é o fato de o sistema perder a observabilidade na perda de uma medida crítica, mas não na perda de uma medida ponto de alavancamento.

Como a matriz $\mathbf{P}$ é idempotente, a matriz de covariâncias dos resíduos pode ser escrita como

$$\mathbf{cov}(\mathbf{r}) = \mathbf{I} - \mathbf{P},$$

donde conclui-se que a variância do i-ésimo resíduo $(1 - p_{ii})$ será próxima de zero, se a medida z_i é um ponto de alavancamento ($p_{ii} \approx 1$). Assim, no caso de um único ponto de alavancamento, o resíduo normalizado, dado por

$$r_i^N = \frac{r_i}{\sqrt{1 - p_{ii}}} \tag{3.23}$$

será grande devido ao pequeno valor de $(1-p_{ii})$. Logo, quando temos apenas um mau ponto de alavancamento, o teste dos resíduos normalizados conseguirá identificar o erro grosseiro associado a esta medida, mesmo sendo pequeno o valor de "r_i" ((Mili *et al.*, 1991); (Abur & Celik, 1992a)).

Entretanto, quando existem múltiplos pontos de alavancamento, a influência entre eles é tal que produz pequenos "p_{ii_s}". Assim, o teste dos resíduos normalizado falha para identificar EGs nessas medidas.

3.10 Aplicações das Técnicas Estatísticas no Processo de EESEP

Apresentaremos, nesta seção, as relações entre o modelo estatístico (seção 2.1) e o modelo de medição (seção 3.7), bem como as aplicações das técnicas estatísticas em SEP, na identificação de medidas pontos de alavancamento e no processamento de erros grosseiros (EGs).

No modelo estatístico consideramos $\mathbf{e} \sim N(0, \Sigma)$, onde $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, sendo que o desvio padrão σ é desconhecido.

No modelo de medição supõe-se que $\mathbf{w} \sim N(0, \Sigma)$, onde $\Sigma = \sigma^2\mathbf{I}$, sendo que o desvio padrão é considerado conhecido. Em SEP, o valor de σ é estimado através de uma análise da confiabilidade de todos os equipamentos envolvidos no processo de medição.

No processo de EESEP considera-se que os erros das medidas, incorporados ao modelo de medição apresentado na seção 3.2.1, apresentam uma distribuição gaussiana, isto é , os valores das componentes do vetor de erros aleatórios de medição, $\mathbf{w}$, se enquadram na faixa de ± 3 desvios-padrão (Kogling *et al.*, 1990). Os erros que se apresentam no intervalo de $[-3\sigma; +3\sigma]$ são satisfatoriamente filtrados pelo estimador de estado WLS, quando se possui uma redundância de medidas adequada. Erros Grosseiros são aqueles que estão fora da faixa de $\pm 3\sigma$ e, como apresentado no capítulo 3, devem ser identificados e eliminados do conjunto de medidas para não comprometerem o processo de estimação de estado. Os EGs superiores a 20σ costumam ser identificados por algoritmos de pré-filtragem (Wu, 1990), diminuindo consideravelmente o esforço computacional exigido pelo estimador, na etapa de processamento de EGs.

Neste trabalho, consideramos que a estimativa do desvio padrão das medidas seja $\widehat{\sigma} = 0.0333$ (Garcia, 1977). Estimar o valor de σ em SEP é necessário para a obtenção da matriz de ponderação das medidas $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\mathbf{I}$, necessária para a estimação de estado via o estimador WLS.

Para realizar as aplicações das técnicas estatísticas em SEP, os testes foram construídos de tal forma a representar o que ocorre na prática. Para isso, os valores das medidas de potência, ativa e reativa, que serão utilizadas nos testes, foram obtidos adicionando-se aos valores exatos determinados por um programa de fluxo de carga [6], erros aleatórios com distribuição normal, média zero e desvio padrão

[6]Para isto utilizou-se o programa ANAREDE desenvolvido pelo CEPEL (Programa de Análises

$\widehat{\sigma} = 0.0333$. Em todos os testes que serão apresentados, considerou-se apenas uma medida de magnitude de tensão com valor correto, isto é, sem ruído. Para simular medidas portadoras de EGs, adicionou-se $20\widehat{\sigma}$ aos valores corretos das mesmas.

Apesar das diferenças existentes entre estes dois modelos, foi possível investigar as aplicações das técnicas estatísticas, tais como o resíduo estudentizado deletado e as estatísticas do estudo de influência em SEP, considerando duas possibilidades:

1) σ desconhecido. Como o desvio padrão no modelo de medição é um valor estimado, em função de um experimento no SEP, é importante investigar os resultados da análise residual e do estudo de influência sem a interferência deste valor, utilizando apenas a estimação estatística do desvio padrão (MSE)(subseção 2.2.3).

2)σ conhecido. Neste caso, antes da aplicação das técnicas estatísticas, o modelo de medição deve ser transformado, de modo que a matriz de covariâncias das medidas seja igual à matriz identidade, ou seja, $\widehat{\sigma} = 1$ (seção 5.4). Assim, a equação do resíduo estudentizado deletado (t_i), bem como as expressões do estudo de influência, foram reformuladas da seguinte maneira:

$$t_i = \frac{r_i}{\sqrt{1 - p_{ii}}},$$

$$DFFITS = \frac{\widehat{z}_i - \widehat{z}_{i(j)}}{\sqrt{p_{ii}}},$$

$$DFEBTAS_{k(i)} = \frac{\widehat{x}_k - \widehat{x}_{k(i)}}{(h_{ii}^T h_{ii})^{-1}},$$

e a distância de Cook

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} (\widehat{z}_i - \widehat{z}_{i(j)})^2}{m}.$$

As técnicas estatísticas referentes a estes dois casos foram implementadas em linguagem C++, para analisar os resultados obtidos por um estimador de estado não linear, desenvolvido no Laboratório de Análises Computacionais em SEP. O sistema de potência utilizado para a realização destes testes foi o de seis barras do IEEE apresentado na figura 3.3.

de Rede - ANAREDE, Manual do usuário - CEPEL).

Tabela 3.1: Dados de Linhas do Sistema 6 Barras

Linha K - M	Resistência Série (em %)	Reatância Série (em %)	Susceptância Shunt Total(em %)	Valor do TAP (em p.u.)
1 - 2	1.938	5.917	5.28	-
1 - 3	5.403	22.304	4.92	-
2 - 3	4.699	19.797	4.38	-
3 - 4	1.335	4.211	0.00	-
4 - 5	0.000	25.200	0.00	0.932
4 - 6	6.701	17.103	1.28	-

Considerando, inicialmente, a inexistência de medidas pontos de alavancamento realizamos um teste, associando ruídos aleatórios com distribuição $N(0, \widehat{\sigma}^2)$ a todas as medidas e atribuimos um erro grosseiro de $20\widehat{\sigma}$, sendo $\widehat{\sigma} = 0.0333$ às medidas de fluxo de potência ativa e reativa 8 e 14. Na figura 3.3 está ilustrado o sistema de 6 barras e, nas tabelas 3.1 e 3.2 estão, respectivamente, os dados de linhas e os valores da medidas deste sistema.

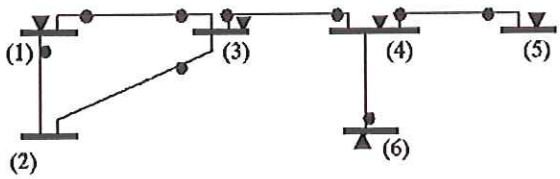


Figura 3.3: Sistema de 6 barras

As associações de ruídos aleatórios e de erros grosseiros às medidas encontradas pelo ANAREDE são uma forma de simular dados de diversos planos de medição, possibilitando o estudo de várias técnicas aplicadas ao processamento de erros grosseiros no processo de EESEP. Portanto, realizando os testes acima foi possível analisar o

Tabela 3.2: Dados de Linha do Sistema de 6 Barras

Medidas de	Barra	Ativos (em p.u.)		Reativos (em p.u.)	
Injeção		Exato	Medido	Exato	Medido
1	1	1.6150	1.6020	0.0660	0.0740
2	3	-0.0760	-0.0532	-0.0160	-0.0123
3	4	-0.4780	-0.4510	0.0390	0.0410
4	5	-0.1120	-0.9100	-0.0410	-0.0410
5	6	-0.9420	-0.9420	0.4920	0.4790
Medida de	Origem	Ativos		Retivos	
Fluxo	Destino	Exato	Medido	Exato	medido
1	1 - 2	0.6730	0.6700	0.0300	0.0302
2	1 - 3	0.9420	0.9612	0.0360	0.0310
3	3 - 1	-0.8990	-0.9386	0.0880	0.0780
4	3 - 2	-0.8160	-0.8166	0.0960	0.0978
5	3 - 4	1.6380	1.6327	-0.1990	-0.1890
6	4 - 3	-1.6030	-1.6360	0.3100	0.3080
7	4 - 5	0.1120	0.1204	0.0440	0.0445
8	5 - 4	-0.1120	-0.1030	-0.0410	-0.0411
9	4 - 6	1.0150	1.0617	-0.3150	-0.3236
10	6 - 4	-0.9675	-0.9675	0.4920	0.5123

Tabela 3.3: Dados de Linhas do Sistema 6 Barras

Medida de	Barra	Exato	Medido (em p.u.)
de Tensão	k	(em %)	(em p.u.)
1	1	1.06	1.06

comportamento das técnicas estatísticas em SEP, considerando que estas simulações representam algumas das possibilidades reais referentes ao sistema elétrico de 6 barras.

Como sugerido no capítulo 2, o estudo de influência deve ser realizado naquelas medidas suspeitas de estarem associadas a erros grosseiros e/ou de serem medidas pontos de alavancamento detectadas, respectivamente, através da estatística do resíduo estudentizado deletado e pelo teste baseado na matriz chapéu. Como também estamos interessados em analisar a influência das demais medidas no processo de estimação de estado, realizaremos o estudo de influência em todas as medidas do SEP. Recordemos também, do capítulo 2 que, sendo σ desconhecido, as estatísticas do estudo de influência são representadas por equações simplificadas, sem a necessidade de realizar o processo iterativo da retirada de um caso de cada vez. Por outro lado, no teste referente a σ conhecido, utilizaremos as equações das estatísticas definidas anteriormente, neste capítulo, realizando o processo iterativo da retirada de um caso de cada vez.

Inicialmente, aplicamos as técnicas estatísticas considerando o desvio padrão σ conhecido. Neste caso, observamos que o teste do resíduo estudentizado deletado equivale ao teste do resíduo normalizado com $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. Durante a implementação das estatísticas do estudo de influência, para σ conhecido, concluimos que a aplicação das mesmas em SEP inviabilizariam a operação em tempo real. Isto porque, além da análise de observabilidade, que deve ser realizada a cada vez que um caso é retirado, é necessário recorrer ao estimador de estado não linear, para a obtenção das n varáveis de estados. Desta forma, a implementação das técnicas estatísticas foram interrompidas, pois o processamento da análise de erros grosseiros e identificação de pontos de alavancamento seria muito lento. Começamos então as análises considerando σ desconhecido.

Diferentemente do caso anterior, na implementação do resíduo estudentizado deletado e das estatísticas de influência, considerando σ desconhecido, não verificamos

nada que inviabilizasse a operação em tempo real, mas as limitações e a impossibilidade da aplicação destes testes, em SEP, foram diagnosticadas realizando o teste referente ao sistema de 6 barras, na ausência de medidas pontos de alavancamento. Vejamos, a seguir, os procedimentos e os resultados das simulações destes testes e as limitações das técnicas estatísticas em cada um deles.

Primeiramente, recordemos que os resultados do resíduo estudentizado deletado t_i seguem a distribuição t de Student, desta forma, esta análise residual detectará as medidas associadas a erros grosseiros se $|t_i| > t_\alpha(m-n-1)$, sendo $\alpha = 0.025$ o nível de significância. As estatísticas DFFITS e distância de Cook D_i, detectarão, respectivamente, a influência da i-ésima medida com a retirada de um caso se $|DFFITS| \geq 2\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{2}}$ e se $D_i > F(n, m-n, \alpha)$ com $\alpha = 0.025$.

As técnicas estatísticas foram aplicadas com o propósito de detectar as medidas portadoras de erros grosseiros, pelo teste do resíduo estudentizado deletado t_i, e identificar, entre estas medidas, aquela com o maior valor em módulo de $|t_i|$. Através das estatísticas DFFITS e distância de Cook D_i verificaremos as medidas que influênciam o processo de EESEP. Realizada esta análise, considerando todas as medidas do sistema de seis barras, eliminaremos a medida identificada como portadora de erro grosseiro, em t_i, repetindo estes procedimentos até que as medidas de fluxo de potência ativa e reativa 8 e 14, associadas a um erro grosseiro de $20\widehat{\sigma}$, com $\widehat{\sigma} = 0.0333$, sejam excluídas.

3.10.1 Resultados das técnicas estatísticas, em SEP, via o estimador de estado WLS não linear

Antes de aplicarmos as estatísticas, t_i, DFFITS e distância de Cook no processamento de EGs em estimação de estado, devemos verificar se os dados referentes ao sistema de 6 barras da figura 3.3 define um modelo de medição bem ajustado. Isto é possível realizando o teste do ajuste global do modelo de medição, que consiste

em comparar o resultado do quociente $\frac{MSR}{MSE}$ com a distribuição F, onde

$$MSE = \frac{\mathbf{z}' * \mathbf{z} - \mathbf{x}' * \mathbf{H}' * \mathbf{z}}{m - n},$$

é a expressão da média da soma dos quadrados do resíduo, e

$$MSR = \frac{\mathbf{z}' * \mathbf{z} - m * (\bar{\mathbf{z}})^2}{m - n},$$

é a média da soma do quadrado da regressão, sendo m o número de medidas e $\bar{z}$ a média dos elementos do vetor z. Se $\frac{MSR}{MSE} > F(n, m - n, 0.025)$ o modelo é bem ajustado.

Como o valor crítico correspondente a distribuição $F(11, 20, 0.975) = 2.721$, e o resultado do quociente entre MSR e MSE, referente ao sistema de 6 barras da figura 3.3 é 12.612, concluímos que o modelo de medição está bem ajustado. Desta forma as técnicas estatísticas podem ser aplicadas no processamento de EGs em EESEP.

Como pode ser visto na figura 3.3, o sistema de 6 barras que será utilizado nas nossas análises possui 31 medidas e 11 variáveis de estado a serem estimadas. Assim, os valores críticos de t_i, DFFITS e D_i são, respectivamente, iguais a 2.093, 1.483 e 2.721. Observando a tabela 3.3, verificamos que através do resíduo estudentizado deletado t_i, os erros grosseiros nas medidas de fluxo de potência ativas e reativas 8 e 14 foram detectados, e a medida de fluxo ativa e reativa 8 foi identificada como portadora de erro grosseiro. A estatística DFFITS detectou a influência das medidas de fluxo de potência reativa 8 e ativa e reativa 14 e na medida de tensão 16 no processo de EESEP. A distância de Cook apontou a influência da medida de fluxo de potência reativa 11 e da medida de tensão 14 no processo de EESEP.

Verifiquemos agora os resultados das técnicas estatísticas do estudo de influência, com a retirada da medida portadora de erro grosseiro, identificada pela estatística t_i, na iteração 1 (medida de fluxo de potência ativa e reativa 8). Nesta iteração, com 30 medidas e 11 variáveis de estado a serem estimadas, os valores críticos dos

teste t_i, DFFITS e D_i são respectivamente 2.101, 1.522 e 2.765. Analisando a tabela 3.4, verificamos que pela estatística t_i, apenas a medida de fluxo de potência ativa e reativa 13 (medida 14 da iteração 1), foi detectada e identificada como portadora de erro grosseiro. A estatística DFFITS detectou a influência da medida de fluxo de potência ativa e reativa 13 (medida 14 da iteração 1), no processo de EESEP. A distância de Cook apontou a influência da medida de fluxo de potência ativa 6 (medida 7 da iteração) 1 na estimação do estado.

Agora, retirando a medida portadora de erro grosseiro, identificada na iteração 2 (medida de fluxo de potência ativa e reativa 13), pela estatística t_i, ficamos com 29 medidas e 11 variáveis de estado a estimar. Assim, os valores críticos referentes a t_i, DFFTIS e D_i serão, respectivamente, 2.110, 1.563 e 2.814. Como apenas as medidas ativas e reativas 8 e 14 estavam associadas a erros grosseiros, esperávamos que nesta terceira iteração a análise residual, bem como as estatísticas do estudo de influência, não ultrapassassem seus respectivos valores críticos. Mas, analisando a tabela 3.5 percebemos que a medida de fluxo de potência 13 reativa (medida 15 da iteração) foi apontanda, pela estatística t_i, como sendo um possível caso de afastadamento. A estatística DFFITS registrou influência das medidas de fluxo reativa 5 e 13 (medidas 7 e 15 da iteração 1, respectivamente) no processo de EESEP. A distância de Cook não registrou a influência de nenhuma medida no processo de estimação de estado.

Conclusões

Aplicando as técnicas estatísticas ao sistema de potência de seis barras, ilustrado na figura 3.3, observamos que, após a eliminação das medidas portadoras de erros grosseiros (medidas de fluxo de potência ativas e reativas 8 e 14), o resíduo estudentizado deletado e as estatísticas DFFITS e D_i diagnosticaram casos de afastamento referentes às medidas que não estavam com a EGs. Isto significa que existem medidas que provocam variações no ajuste do modelo de medição sem serem medidas aberrantes ou de alavancamento. Estas medidas são denominadas, segundo a literatura estatística (Paula, 2004) de medidas influentes. Mas como o propósito deste

trabalho é o tratamento de medidas pontos de alavancamento associadas a EGs, concluímos que a aplicação destas estatísticas são impróprias ao processamento de EGs em EESEP.

3.11 Tratamento dado às medidas pontos de alavancamento em EESEP

Em razão dos efeitos maléficos que as medidas pontos de alavancamento podem trazer ao processo de EESEP, conforme visto neste capítulo, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas para o tratamento daquelas medidas.

Analogamente ao processamento de EGs, medidas pontos de alavancamento são processadas em duas etapas (Abur & Exposito, 1997):

1ª Etapa: Identificação

Conforme se apresentará no próximo capítulo, diversos métodos foram desenvolvidos para identificação de medidas pontos de alavancamento em EESEP, um dos quais se baseia na matriz chapéu, apresentado na seção anterior. Dentre esses métodos se destaca o proposto por Mili *et al.* (1996), baseado na estatística de projeção, indicando o "grau de alavancamento"de uma medida em relação às demais, o que seria um indicativo da capacidade da medida em atrair a convergência do processo de EESEP.

2ª Etapa: Uma vez identificadas as medidas pontos de alavancamento, diversas ações corretivas vêm sendo propostas para a redução ao mínimo do efeito alavanca dessas medidas, dentre as quais destacam-se quatro:

(1) Eliminam-se do conjunto de medidas aquelas identificadas como pontos de alavancamento, uma de cada vez, até não ser mais identificada medida alguma ponto de alavancamento. A desvantagem desta ação corretiva é a possibilidade de levar a redundância das medidas a níveis críticos, inviabilizando o processamento de EGs.

(2) As medidas identificadas como pontos de alavancamento são ponderadas de

Tabela 3.4: Teste 2 - Iteração 1

i	t_i Ativo	t_i Reativo	DFFITS Ativo	DFFITS Reativo	D_i Ativo	D_i Reativo
1	0.4028	0.5048	0.4680	0.5870	0.0129	0.0210
2	-0.9382	-1.0233	-1.2039	-1.3115	0.0799	0.0973
3	-0.7966	-0.8883	-0.8263	-0.9502	0.0385	0.0523
4	-0.1495	-0.2430	-0.09317	-0.1380	0.0005	0.0011
5	0.9001	0.6023	0.5611	0.3766	0.0175	0.0086
6	0.0018	-0.0686	0.0017	-0.06420	1.7262	0.0003
7	0.3968	0.3535	0.1552	0.1423	0.0014	0.0013
8	3.4469	3.9292	1.3482	1.5417	0.0498	0.0584
9	-0.3698	-0.3592	-0.1973	-0.1904	0.0023	0.0022
10	-0.0755	0.0217	-0.05280	0.0153	0.0002	1.4590
11	-0.1006	0.0047	-0.0703	0.0033	0.0003	6.8715
12	0.2776	0.2703	0.1730	0.1883	0.0018	0.0022
13	-0.2017	-0.2430	-0.1257	-0.1380	0.0009	0.0012
14	2.9978	2.6275	1.8686	1.6482	0.0110	0.1005
15	0.6936	0.193	0.4324	0.7639	0.0107	0.0135
16	0	0.9817	0	9.0746	0	4.6944

Tabela 3.5: Teste 2 - Iteração 2

i	t_i Ativo	t_i Reativo	DFFITS Ativo	DFFITS Reativo	D_i Ativo	D_i Reativo
1	-0.1548	-0.0505	-0.1863	-0.0607	0.0022	0.0002
2	-0.1089	-0.2589	-0.1556	-0.3695	0.0015	0.0090
3	-0.9007	-1.1558	-0.9393	-1.2426	0.0514	0.0896
4	-0.1487	-0.3055	-0.9277	-0.1736	0.0005	0.0020
5	1.4064	0.9958	0.8773	0.6230	0.0400	0.0233
6	0.0326	0.0608	0.0302	0.0570	5.8016	0.0002
7	0.0306	-0.1653	0.0130	-0.720	1.0702	0.0003
8	0.1004	0.1374	0.060	0.0786	0.0002	0.0004
9	-0.4553	-0.3706	-0.3239	-0.2654	0.0065	0.0046
10	0.1880	0.3618	0.1338	0.2591	0.0011	0.0044
11	0.3295	0.3416	0.2055	0.2381	0.0026	0.0037
12	-0.2222	-0.3055	-0.1386	-0.1736	0.0012	0.0020
13	36.2249	26.3742	22.5961	16.5554	0.2208	0.2334
14	1.0709	1.2762	0.6680	0.7985	0.0251	0.0360
15	0	0.0626	0	0.6126	0	0.0250

Tabela 3.6: Teste 2 - Iteração 3

i	t_i Ativo	t_i Reativo	DFFITS Ativo	DFFITS Reativo	D_i Ativo	D_i Reativo
1	-1.1035	0.6992	-1.3288	0.8415	0.1031	0.0476
2	0.7868	-0.3220	1.1265	-0.4605	0.0792	0.0150
3	0.5259	0.3201	0.589091	0.3683	0.0226	0.0096
4	1.0852	0.1155	0.6835	0.0664	0.0274	0.0003
5	2.0758	0.1155	1.6567	-2.7831	0.1200	0.2211
6	-0.2470	-0.5081	-0.2288	-0.4759	0.0035	0.0157
7	1.2710	-0.6967	0.5412	-0.3041	0.0164	0.0062
8	-0.09358	0.1968	-0.05390	0.1128	0.0002	0.0009
9	-1.3946	0.6742	-1.0060	0.4893	0.0548	0.0162
10	-1.4484	0.2294	-1.0448	0.1665	0.0582	0.0020
11	0.8603	-0.0577	0.5419	-0.0407	0.0180	0.0001
12	02648	0.1155	0.1668	0.0664	0.0018	0.0003
13	-1.4181	5.7993	-1.1317	4.6561	0.0689	0.2976
14	0	-0.0599	0	-0.5886	0	0.0247

acordo com o seu resíduo e os seus " graus de alavancamento", estes indicados pelas correspondetes estatísticas de projeções. Através desse processo, os bons (maus) pontos de alavancamento recebem ponderação alta (baixa) e, conseqüentemente, não se eliminam os bons pontos de alavancamento, que ajudam a convergência do processo de estimação de estado, sendo minimizados os efeitos maléficos dos maus pontos de alavancamento.

Tal procedimento foi aplicado em Mili *et al.* (1996) para o estimador WLMS; para o estimador WLS, em Pires *et al.* (1999). O estimador por mínimo valor absoluto ponderado, proposto por Jabr & Pal (2003), pondera as medidas pontos de alavancamento de forma a forçar para zero os resíduos das mesmas.

(3) Através de uma transformação linear, as equações correspondentes às medidas pontos de alavancamento são modificadas, de forma a eliminar o efeito alavanca das mesmas da formulação do estimador. Nos métodos que utilizam esse procedimento, as medidas pontos de alavancamento não são eliminadas, nem mesmo reponderadas.

Dentre os métodos baseados em algum tipo de transformação linear, podemos citar os seguintes:

- Abur & Celik (1992a): faz uso do estimador WLAV e com procedimentos heurísticos determina o ângulo de rotação que será utilizado na transformação linear;

- Abur & Celik (1992b): faz uso do estimador WLAV e realiza escalonamento na matriz jacobiana, para eliminar o efeito alavanca das medidas pontos de alavancamento;

- Abur *et al.* (1997): aplica uma técnica destinada à ortogonolização de matrizes esparsas ("Stretching Technique") na matriz jacobiana da formulação do estimador LAV.

(4) Celik & Edwin Liu (1995) desenvolveram um método para projeto de planos de medição, que através de procedimentos heurísticos, evita a locação de medidas

candidatas a pontos de alavancamento.

Importa destacar que, independentemente das vantagens e desvantagens de cada uma das ações corretivas propostas, todas exigem a identificação dos pontos de alavancamento.

Capítulo 4

Técnicas para Identificação de Pontos de Alavancamento em SEP

Como mencionado no capítulo 1, tomando como base o trabalho desenvolvido por Mili *et al.* (1996), neste capítulo serão apresentados e analisados os métodos para identificação de pontos de alavancamento em EESEP.

Em razão de esses métodos basearem-se em estatística multivariada, a primeira seção deste capítulo apresenta conceitos básicos de análise multivariada, necessários ao entendimento dos métodos desenvolvidos para identificação de pontos de alavancamento em EESEP.

4.1 Conceitos Básicos de Análise Multivariada

O conteúdo de Análise Multivariada, apresentada nesta seção, encontra-se em Johnson & Wichern (1988).

4.1.1 Amostra Multivariada

Um dado multivariado é uma coleção de observações de m diferentes medidas, relacionadas a n variáveis. Podemos organizar o conjunto de observações em uma

matriz L de dimensão $m \times n$. Nesta matriz, cada linha representa uma medida e cada coluna uma variável, conforme abaixo:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que cada linha de uma amostra multivariada é um vetor aleatório. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_1^t \\ \boldsymbol{l}_2^t \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_m^t \end{bmatrix},$$

tal que $\boldsymbol{l}_i$ para $i = 1, \ldots, m$, são vetores aleatórios n-dimensionais.

Se os vetores $\boldsymbol{l}_i$ são mutuamente independentes, para $i = 1, \cdots, m$, definimos L como uma amostra aleatória multivariada.

Outro conceito importante em Análise Multivariada é o da distribuição normal multivariada, que apresentaremos a seguir.

4.1.2 Distribuição Normal ou Gaussiana Multivariada

A distribuição normal multivariada é uma generalização da distribuição normal univariada. Recordemos que esta última tem função densidade

$$f(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \tag{4.1}$$

onde $l \in R$ e os parâmetros μ e σ^2 são iguais à média e à variância da distribuição, respectivamente.

Observemos que nesta expressão encontramos

$$\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)^2,$$

que representa uma distância padronizada entre l e μ, elevada ao quadrado. Este termo também pode ser escrito na forma

$$(l-\mu)^t\,(\sigma^2)^{-1}(l-\mu),$$

que pode ser generalizado para um vetor $\boldsymbol{l}$, com dimensão $m\times 1$, da seguinte maneira:

$$(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu}), \tag{4.2}$$

sendo $\boldsymbol{\mu}$ de dimensão $m\times 1$, o valor esperado do vetor aleatório $\boldsymbol{l}$, e a matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ $m\times m$ é sua matriz de covariâncias, simétrica e definida positiva. Essa expressão representa o quadrado da distância generalizada entre $\boldsymbol{l}$ e $\boldsymbol{\mu}$, também conhecida por distância de Mahalanobis.

Substituindo a expressão (4.2) em (4.1), e a constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ em (4.1), por $(2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$, obtemos a função de densidade normal multivariada, dada por

$$f(\boldsymbol{l}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \tag{4.3}$$

onde a constante $(2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$ é uma constante normalizadora, para que $\int_{R^m} f(\boldsymbol{l})d\boldsymbol{l} = 1$ e $|\boldsymbol{\Sigma}|$ denota o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$.

As superfícies de nível da função densidade normal multivariada são elipsóides definidos por

$$(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\,(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\mu}) \leq b^2, \tag{4.4}$$

onde $0 < b \leq (2\pi)^{-\frac{m}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$ é uma constante. Estes elipsóides são centrados em $\boldsymbol{\mu}$ e têm eixos $-\mathrm{b}_i\sqrt{\lambda_i}$, e $\mathrm{b}_i\sqrt{\lambda_i}$, onde λ_i são os autovalores associados aos autovetores b_i de $\boldsymbol{\Sigma}$, para $i = 1,\cdots,n$.

Função de Verossimilhança

Consideremos uma amostra aleatória $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \ldots, \boldsymbol{l}_m$ de vetores $m\times 1$, de uma população normal multivariada, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$. Uma vez que todos estes vetores são mutuamente independentes e cada um tem distribuição $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, a densidade conjunta de todas as medidas é resultante do

produto das densidades marginais, ou seja,

$$f(l_1, \ldots, l_m) = (2\pi)^{-\frac{nm}{2}} |\Sigma|^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (l_i - \mu)^t \, \Sigma^{-1} (l_i - \mu) \right\}. \tag{4.5}$$

Quando os valores numéricos das observações tornam-se disponíveis, substituímos os dados na expressão (4.5) obtendo uma função dos parâmetros μ e Σ, chamada de função verossimilhança. Em outras palavras, a função verossimilhança é a função densidade conjunta das observações interpretada como função dos parâmetros μ e Σ. De acordo com o método de máxima verossimilhança, os estimadores de μ e Σ são obtidos pela maximização da função de verossimilhança.

Em Análise Multivariada os estimadores de máxima verossimilhança são utilizados nas técnicas de diagnóstico. Estas técnicas, assim como outras, serão apresentadas na seção 4.2.

4.2 Identificação de Pontos de Alavancamento usando Técnicas de Análise Multivarivada

Ao analisar um conjunto de medidas do SEP como uma amostra aleatória multivariada, podemos considerar cada linha da matriz jacobiana ponderada um vetor aleatório e definir $\mathrm{L}_w = \mathrm{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{H}}$ como o conjunto de todos os vetores aleatórios associados ao sistema elétrico dado por

$$\mathrm{L}_w = \begin{bmatrix} l_1^t \\ \mathrm{l}_2^t \\ \vdots \\ \mathrm{l}_m^t \end{bmatrix},$$

tal que l_i para $i = 1, \ldots, m$ são vetores n-dimensionais relacionados às n variáveis de estado.

Geometricamente, cada elemento de L_w determina um ponto no espaço n-di-

mensional, e o conjunto $\mathbf{L}_w$ constitui uma nuvem de pontos. O conjunto $\mathbf{L}_w$ é denominado de espaço de fatores. Este espaço é gerado pelas linhas da matriz jacobiana ponderada $\boldsymbol{l}_i$ para $i = 1, \ldots, m$. (Mili *et al.*, 1991).

Os vetores aleatórios $\boldsymbol{l}_i \in \mathbf{L}_w$ que estão afastados dos demais pontos não seguem a tendência da maioria dos pontos no espaço de fatores. Estes pontos são chamados de pontos de alavancamento. Existem dois tipos de pontos de alavancamento: os maus pontos de alavancamento, que estão associados aos erros grosseiros e influenciam as estimativas do estado em EESEP (exceto as estimativas LMS), e os bons pontos de alavancamento, que não estão associados aos erros grosseiros, e portanto, tornam as estimativas do estado em EESEP mais adequadas.

Identificar os pontos de alavancamento em Análise Multivariada requer o uso de métodos associados às técnicas de estimação que determinam o centro e a dispersão do conjunto de medidas multivariadas. Tais técnicas requerem estimadores de locação e covariâncias multivariados. Alguns deles são munidos de uma propriedade essencial para o sucesso da identificação, conhecida como robustez do estimador.

4.2.1 Propriedade de Robustez

Um estimador robusto é caracterizado por estimar parâmetros a partir de dados contaminados, com uma certa porcentagem de afastamentos, sem afetar o ajuste do modelo. Hampel, em 1971, foi o primeiro a estruturar matematicamente este conceito denominando-o de ponto de quebra (ε). Apresentaremos agora uma versão mais simples deste conceito desenlvolvida por Donoho e Huber em 1983 (Rousseeuw & Leroy, 1987).

Seja $\mathbf{L}$ uma amostra aleatória e $\mathbf{T}$ um estimador de um certo parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ tal que

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}).$$

Consideremos todas as possibilidades de amostras contaminadas $\mathbf{L}'$, que são ob-

tidas substituindo k observações originais por valores arbitrários. Denotamos por viés$(k; \mathrm{T}, \mathrm{L})$ a máxima alteração causada pelas k contaminações, quantificadas por

$$\text{viés}(k; \mathrm{T}, \mathrm{L}) = \sup_{\mathrm{L}'} ||\mathrm{T}(\mathrm{L}') - \mathrm{T}(\mathrm{L})||, \tag{4.6}$$

onde $||.||$ corresponde à norma euclidiana, equivalente à expressão

$$\text{viés}(k; \mathrm{T}, \mathrm{L}) = \sup_{\mathrm{L}'} \{||\mathrm{T}(\mathrm{L}_1') - \mathrm{T}(\mathrm{L})||, ..., ||\mathrm{T}(\mathrm{L}_k') - \mathrm{T}(\mathrm{L})||\},$$

onde $\mathrm{L}' = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{L}_i'$. Se viés$(k; \mathrm{T}, \mathrm{L})$ é infinito, isto significa que os k afastamentos podem ter efeitos arbitrariamente grandes sobre T. Neste caso, dizemos que o estimador T tem um baixo ponto de quebra. Portanto, o ponto de quebra de um estimador T em uma amostra finita L é definido como

$$\varepsilon_m^*(\mathrm{T}, \mathrm{L}) = \min \left\{ \frac{k}{m}; \text{vies}(k; \mathrm{T}, \mathrm{L}) = \infty \right\}. \tag{4.7}$$

Em outras palavras, ε é a menor fração de contaminação que pode levar o estimador T a tomar valores arbitrariamente distantes de $\mathrm{T}(\mathrm{L})$.

Apresentaremos agora os métodos para identificação dos pontos de alavancamento que se utilizam de estimadores de locação e covariâncias, munidos de uma propriedade denominada de equivariância afim.

4.2.2 Métodos de Identificação de Pontos de Alavancamento

Dizemos que um estimador de locação T é equivariante afim se, e somente se,

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}l_1 + \mathrm{b}, \cdots, \mathrm{A}l_m + \mathrm{b}) = \mathrm{A}\mathrm{T}(l_1, \cdots, l_m) + \mathrm{b},$$

para todo vetor b n-dimensional e toda matriz A $n \times n$ não singular.

Dizemos que um estimador de dispersão C é equivariante afim se, e somente se,

$$\mathrm{C}(\mathrm{A}l_1 + \mathrm{b}, \ldots, \mathrm{A}l_m + \mathrm{b}) = \mathrm{A}\mathrm{C}(l_1, \ldots, l_m)\mathrm{A}^t.$$

Isto significa que, se os dados observados passarem por uma transformação afim as estimativas podem ser facilmente obtidas.

Se as observações seguem uma distribuição elíptica, então existem estimadores de locação e escala com a propriedade de equivariância afim. A família de distribuições elípticas tem a seguinte função densidade:

$$f_{\mu,\Sigma}(l) = ||\Sigma)||^{-\frac{1}{2}} g([(l-\mu)^t \Sigma^{-1}(l-\mu)]^{\frac{1}{2}}), \tag{4.8}$$

onde g é uma função não negativa conhecida como gerador da densidade elíptica. Se os erros são gaussianos a função g é

$$g(u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}.$$

Analisemos alguns estimadores de locacão e covariâncias multivariados relativos à família de distribuição em (4.8), comentando a robustez de cada um deles (Mili *et al.*, 1996) e (Rousseeuw & Leroy, 1987).

Distribuição normal multivariada - Estimadores Clássicos

Seja o conjunto $\mathrm{L} = \{l_1, \cdots, l_m\}$ de vetores n-dimensionais seguindo cada um uma distribuição normal multivariada (4.3), com um vetor de médias μ e matriz de covariâncias Σ. As estimativas de μ e Σ obtidas pelo método de máxima verossimilhança são dadas por

$$\bar{l} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} l_j \tag{4.9}$$

e

$$\mathrm{C} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} (l_j - \bar{l})(l_j - \bar{l})^t, \tag{4.10}$$

sendo que ambos os estimadores são equivariantes afim. Como a média multivariada é atraída por uma única observação afastada l_i, seu ponto de quebra é $\varepsilon = \frac{1}{m}$, sendo este igual a zero quando $m \to \infty$. Logo, $\bar{l}$ não é um estimador de locação robusto, e portanto, C também não é um estimador de covariâncias robusto, podendo seus elementos assumir valores arbitrariamente grandes.

Um método de identificação de pontos de alavancamento que utiliza estes estimadores de locação e dispersão para estimar o centro e a dispersão do conjunto de pontos é baseado na distância de Mahalanobis.

EESC-USP Biblioteca CAMPUS DE S. CARLOS

Distância de Mahalanobis

O quadrado da distância de Mahalanobis é definida em uma amostra como

$$MD_i^2 = (\boldsymbol{l}_i - \bar{\boldsymbol{l}})^t \mathrm{C}^{-1} (\boldsymbol{l}_i - \bar{\boldsymbol{l}}), \tag{4.11}$$

para $i = 1, \cdots, m$, onde o conjunto de pontos $\boldsymbol{l}_i \in \mathrm{L}$ satisfazendo $MD_i^2 \leq b$ define um elipsóide centrado em $\bar{\boldsymbol{l}}$, conforme (4.4). Se os vetores $\boldsymbol{l}_i$ são gaussianos, MD_i^2 tem aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade (χ_m^2). Assim, a distância de Mahalanobis identificará os afastamentos m-dimensionais quando MD_i^2 assumir valores maiores do que o valor crítico $\chi^2_{m,(1-\alpha)}$, onde α é o nível de significância adotado. Mas como MD_i^2 utiliza as estimativas de locação e covariâncias não robustas, o elipsóide (4.11) terá grande dimensão na presença de múltiplos pontos de alavancamento, em consequência de C^{-1} ser afetada. Neste caso, a distância de Mahalanobis irá mascarar os múltiplos pontos de alavancamento.

A figura 4.1 ilustra o elipsóide relativo à distância de Mahalanobis MD_i juntamente com o elipsóide correspondente à distância RD_i. A seguir estudaremos o método de identificação dos pontos de alavancamento baseado na distância RD_i, mas no momento, queremos apenas enfatizar como a distância de Mahalanobis é afetada pelos múltiplos pontos de alavancamento. Observando o elipsóide MD_i notamos que os pontos 16, 6 e 25 estão afastados dos demais, mas apenas o ponto 25 não satisfaz o limite de tolerância do mesmo (Rousseeuw & Zomeren, 1990).

A Matriz Chapéu

Um método bastante difundido para diagnosticar pontos de alavancamento (seção 2.3.1) baseia-se na análise dos elementos da diagonal principal p_{ii} da matriz chapéu, P, dada por

$$\mathrm{P} = \mathrm{H}(\mathrm{H}^t\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^t, \tag{4.12}$$

onde H é uma matriz jacobiana ponderada calculada pela expressão $\mathrm{H} = \mathrm{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{H}} = [\boldsymbol{l}_1, \cdots, \boldsymbol{l}_m]^t = \mathrm{L}_w$, sendo que W^{-1} é uma matriz diagonal de ponderação.

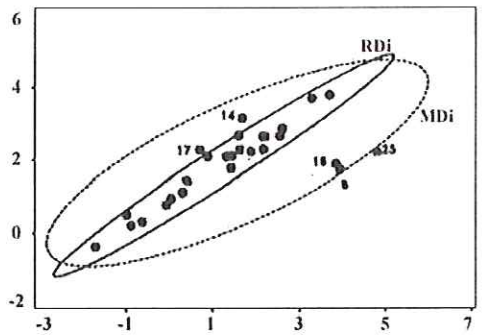


Figura 4.1: Elipsóides MD_i e RD_i

Considerando que a média do i- ésimo elemento da diagonal de $\mathbf{P}$ é dado por

$$E[p_{ii}] = \bar{p_{ii}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_{ii} = \frac{n}{m}, \tag{4.13}$$

se algum dos p_{ii} diferem de $\bar{p_{ii}}$, a correspondente medida z_i é suspeita de ser um ponto de alavancamento.

Precisamente, se

$$p_{ii} > 2\frac{n}{m}.$$

a medida z_i é suspeita de ser ponto de alavancamento (Celik & Abur, 1992).

Vejamos a demostração do resultado em (4.13):

$tr[\mathrm{P}] = tr[\mathrm{H}(\mathrm{H}^t\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^t] = tr[(\mathrm{H}^t\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^t\mathrm{H}] = tr[\mathrm{I}_n] = n$; então

$\bar{\mathrm{P}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} p_{ii} = \frac{n}{m}$.

Tomando o valor limite de $p_{ii} > 2\frac{n}{m}$ concluiu-se em Celik & Abur (1992) que o teste baseado na matriz $\mathbf{P}$ falha na identificação de múltiplos pontos de alavancamento. O mesmo verificou-se em Mili *et al.* (1991).

Geometricamente, esta afirmação é justificada pelo fato de que p_{ii} informa a distância de uma medida (l_i, z) até o centróide C do conjunto de medidas (seção 2.3.1). Como C é um ponto cujas coordenadas resultam do cálculo da média aritmética das colunas da matriz $\mathbf{H}$, ele será atraído pelas medidas afastadas, mascarando os múltiplos pontos de alavancamento. Este fato revela a deficiência do método de identificação dos pontos de alavancamento através da matriz chapéu,

herdada da distância de Mahalanobis. Esta afirmação é justificada, pois

$$p_{ii} = \frac{MD_i^2}{m-1} + \frac{1}{m},$$

se o modelo de regressão tem intercepto e

$$p_{ii} = \frac{MD_i^2}{m},$$

caso contrário, como em EESEP.

Estatística de Projeção

O método de identificação de pontos de alavancamento baseado na estatística de projeção foi elaborado a partir de uma expressão equivalente à distância de Mahalanobis (Rousseeuw & Leroy, 1987), dada por

$$MD_i = \max_{||\mathbf{v}||=1} \frac{|l_i^t\mathbf{v} - Q(l_1^t\mathbf{v}, \ldots, l_m^t\mathbf{v})|}{S(l_1^t\mathbf{v}, \ldots, l_m^t\mathbf{v})}, \tag{4.14}$$

onde Q e S são a média e o desvio padrão amostrais das projeções dos dados $l_i \in \mathbf{L}_w$, no vetor unitário $\mathbf{v}$.

Na tentativa de eliminar as deficiências da distância MD_i na identificação dos pontos de alavancamento, de acordo com Mili *et al.* (1996), Stahel e Donoho adotaram estimadores de locação e dispersão robustos para Q e S, dados, respectivamente, pela mediana da amostra e pelo desvio absoluto da mediana (DAM), dado por

$$DAM = a\,\text{mediana}_i|l_i^t\mathbf{v} - \text{mediana}_j(l_j^t\mathbf{v})|,$$

onde a é uma constante corretiva para que DAM seja um estimador consistente do parâmetro de escala σ da distribuição dos erros, ou seja, $\widehat{\sigma} = DAM \rightarrow \sigma$. Se os erros são gaussianos, $a = 1.4826$.

O estimador de escala DAM é robusto ($\varepsilon = 50\%$) somente quando aplicado a distribuições simétricas, com exceção da distribuição gaussiana (em que a eficiência é baixa, $\varepsilon = 37\%$) (Rousseeuw & Croux, 1993). Neste último caso, o desvio padrão amostral é ainda mais eficiente que o estimador DAM. Como uma alternativa

ao estimador DAM, Rousseeuw & Croux (1993) propuseram um outro estimador de escala, também robusto ($\varepsilon = 50\%$), e apropriado quando os erros seguem uma distribuição assimétrica . Este estimador de escala, foi denotado por S_m, onde

$$S_m = c\,\text{lomed}_i\,\text{lomed}_{j\neq i}|\boldsymbol{l}_i^t\mathbf{v} - \boldsymbol{l}_j^t\mathbf{v}|, \tag{4.15}$$

sendo que "lomed"denota a baixa mediana, definida pela [(m + 1)/2] - ésima estatística de ordem em uma amostra com m observações, sendo $[x]$ a parte inteira de um número real x (Rousseeuw & Croux, 1993). A constante c também é utilizada para que S_m seja um estimador consistente do parâmetro de escala σ da distribuição dos erros, ou seja, $\widehat{\sigma} = S_m \to \sigma$. Se os erros são gaussinaos, $c = 1.1926$. Diferentemente do estimador de dispersão DAM, as estimativas S_m são obtidas calculando as distâncias entre as observações sem utilizar uma estimativa de locação. Além destas últimas alterações, Gasko e Donoho propuseram explorar somente aquelas direções com origem no ponto $\mathbf{M}$, determinado pelas medianas de cada coluna da matriz jacobiana ponderada e que passa através de cada ponto $\boldsymbol{l}_i$ (isto porque na prática nem todas as direções unitárias poderiam ser investigadas) Mili *et al.* (1996). Formalmente, temos que

$$\mathbf{v} \in \{\boldsymbol{l}_i - \mathbf{M}\}, \tag{4.16}$$

para $i = 1, \cdots, m$, e

$$\mathbf{M} = [M_1 \;\; M_2 \cdots M_n]^t, \tag{4.17}$$

onde M_i, para $i = 1, \cdots, n$, corresponde à mediana da i-iésima coluna da matriz jacobiana ponderada.

Assim, a distância MD_i calculada com a estimativa de escala S_m na direção $\mathbf{v}$ em (4.16) será chamada estatística de projeção, denotada por PS_i.

A distância PS_i baseada na estatística de projeção foi o primeiro método de identificação de pontos de alavancamento, cujas estimativas de locação e dispersão são equivariantes afim com alto ponto de quebra. Segundo Donoho e Gasko, podemos dizer que a estatística de projeção de um ponto $\boldsymbol{l}_i$ indica o quão distante este

ponto está dos demais dados, na pior projeção unidimensional (Mili *et al.*, 1996).

A vantagem deste método em relação aos outros é a rapidez do processamento computacional, até mesmo em grandes dimensões. Contudo, com a adaptação da formulação da estatística de projeção em EESEP, esta estatística perde a propriedade equivariante afim. Mas, segundo Mili *et al.* (1996) isto não é uma desvantagem em EESEP, pois em EESEP essa distância será usada como uma ferramenta de diagnóstico para identificar os pontos de alavancamento, a partir da matriz $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}}$, ou para limitar a influência desses pontos no processo de EESEP.

4.3 Estatística de Projeção em Sistemas Elétricos de Potência

4.3.1 Estrutura do Espaço de Fatores

Na seção 4.2 interpretamos, geometricamente, as informações do sistema elétrico de potência através da matriz jacobiana ponderada $\mathbf{H}$. Nesta subseção analisaremos o espaço de fatores e o espaço dos estados R^n considerando a esparsidade da matriz $\mathbf{H}$.

Cada elemento $\boldsymbol{l}_i$ da matriz jacobiana ponderada $\mathbf{H}$, é um ponto no espaço de fatores e tem suas projeções sob os eixos coodenados no R^n, onde estes definem uma correspondência com suas respectivas variáveis de estado. Mas $\mathbf{H}$ é uma matriz esparsa de modo que cada $\boldsymbol{l}_i$ tem poucos elementos não nulos[1]. Em razão disto, cada $\boldsymbol{l}_i$ pertence a um subespaço vetorial, chamado de subespaço relevante. A dimensão de cada subespaço relevante é muito menor do que n, sendo especificada pelo número de elementos não nulos em $\boldsymbol{l}_i$.

Deste modo, para cada ponto da nuvem, a quantidade de variáveis de estado associadas aos eixos coordenados do R^n é também muito pequena. Independente do

[1]Quanto maior a dimensão do SEP, mais esparsa será a matriz $\mathbf{H}$.

tamanho do SEP, a dimensão do subespaço relevante é igual a 4, para medidas de fluxo de potência, e, usualmente, não excede 14 para medidas de injeção, enquanto n pode assumir valores muito maiores, pois corresponde ao número de barras do SEP. Quando é considerado o modelo desacoplado, estas dimensões são reduzidas pela metade. Neste caso, os vetores $\boldsymbol{l}_i$ associados às medidas de fluxo de potência determinam planos que passam pela origem. Cada um destes planos contém os eixos associados aos ângulos de fase das barras adjacentes ao ramo no qual está localizada a medida de fluxo.

4.3.2 Algoritmo de Projeção em Sistemas Elétricos de Potência

Antes de aplicar a estatística de projeção PS_i em SEP, foi necessário adaptá-la, levando em conta duas características do modelo de EESEP: (i) o modelo de regressão tem intercepto nulo e (ii) a matriz jacobiana ponderada é esparsa.

A condição (i) implica na restrição de que os elipsóides (4.4) devem ter centro na origem. Deste modo, as projeções estatísticas são definidas como

$$PS_i = \max_{\mathbf{v}} \frac{|\boldsymbol{l}_i^t \mathbf{v}|}{S_m}, \ \mathbf{v} \in \{\mathbf{l}_i, \cdots, \mathbf{l}_m\}. \tag{4.18}$$

Como o estimador S_m, em (4.15), não estima a dispersão de $\boldsymbol{l}_i^t \mathbf{v}$ em relação à origem, utilizaremos o estimador $S_m^{'}$, dado por:

$$S_m^{'} = 1.1926 \, \text{lomed}_i \, \text{lomed}_{j \neq i} \, |\boldsymbol{l}_i^t \mathbf{v} + \boldsymbol{l}_j^t \mathbf{v}|, \tag{4.19}$$

pois $S_m^{'}$ tem as mesmas propriedades que S_m quando os elipsóides estão centrados na origem.

Devido à condição (ii) já sabemos que o subespaço relevante de um ponto $\boldsymbol{l}_i$ tem dimensão muito pequena. Deste modo, uma grande quantidade de pontos da nuvem são projetados na origem sob alguma direção $\mathbf{v} = \boldsymbol{l}_i$ produzindo uma estimativa de escala $S_m^{'}$ nula, impossibilitando o cálculo da estatística de projeção. Um modo de

contornar este problema é considerar irrelevante as direções $\mathbf{v} = \boldsymbol{l}_i$, cujas projeções resultam na origem. Assim, os vetores $\boldsymbol{l}_j$, que têm projeções não nulas ao longo de uma direção $\mathbf{v}$, determinarão o conjunto relevante nesta direção. O conjunto relevante é a união dos conjuntos fundamentais das variáveis de estado relacionadas por $\boldsymbol{l}_i$. Recordemos que o conjunto fundamental de variáveis de estado x_i inclui todas as medidas que observam "x_i," isto é, que são funções de "x_i".

Exemplo - Sistema 14 barras IEEE

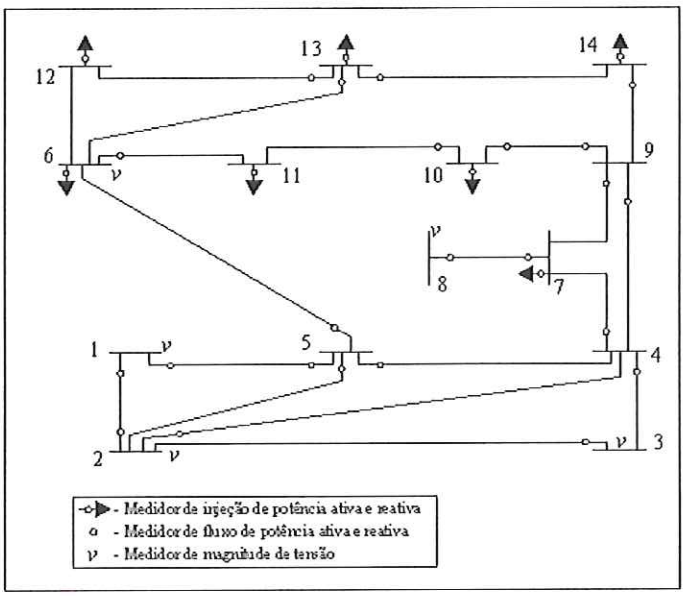


Figura 4.2: Sistema de 14 barras do IEEE

Para ilustrar os conceitos de subespaço relevante e conjunto relevante, utilizaremos o sistema de 14 barras do IEEE, apresentado na figura 4.2 (Mili *et al.*, 1996). Este sistema contém 34 pares de medidas de potência ativa e reativa e 5 medidas de magnitude de tensão. Lembremos que nesta análise do sistema estamos levando em conta que o processo de E.E. é linear e, portanto, desprezaremos as medidas de potência reativa e de magnitude de tensão. Utilizaremos a seguinte notação: FL_{i-j} indica medida de fluxo de potência ativa da barra "i" para barra "j" e IN_i representa a medida de injeção de potência ativa na barra "i".

Seja a medida de fluxo de potência ativa FL_{1-2}. Esta medida de fluxo equivale a linha l_{1-2} da matriz jacobiana ponderada. Existem dois elementos não nulos nessa linha, que correspondem às variáveis x_1 e x_2. Logo, o subespaço relevante é um plano formado pelos eixos coordenados associados às variáveis de estado x_1 e x_2, referentes às barras 1 e 2, respectivamente. Portanto, a dimensão deste subespaço relevante é igual a 2.

O conjunto relevante de FL_{1-2} é constituído por todas as l_i, correspondentes às medidas de fluxo em linhas incidentes às barras 1 ou 2, bem como medidas de injeção nas barras 1 e 2, e nas barras vizinhas de 1 e 2. Analisando a figura 4.2 concluímos que o conjunto relevante de l_{1-2} é FL_{1-2}, FL_{2-1}, FL_{1-5}, FL_{5-2},FL_{2-4}, FL_{3-2} e IN_1, IN_2 e IN_4.

Façamos agora a mesma análise para a medida de injeção IN_2. Na matriz jacobiana ponderada, a linha referente a IN_2 tem cinco elementos não nulos, correspondentes às variáveis de estado x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. Logo, o subespaço relevante correspondente tem dimensão igual a 5. O conjunto relevante de IN_2 é constituído por todas as linhas l_i correspondentes às medidas incidentes às barras 1, 2, 3, 4 e 5. Analisando a figura 4.2 concluímos que o conjunto relevante de IN_2 é constituído pelas seguintes medidas: FL_{1-2}, FL_{2-1},FL_{5-2}, FL_{2-4}, FL_{3-2}, FL_{4-3}, FL_{5-4}, FL_{1-5}, FL_{5-1}, FL_{5-6}, FL_{9-4}, FL_{4-7}, IN_1, IN_2, IN_4, IN_6 e IN_7.

Como podemos notar, as estatísticas de projeção são calculadas nos conjuntos de medidas que fornecem informação sobre determinadas variáveis de estado. Para que possamos identificar quais destas medidas dos conjuntos relevantes são medidas pontos de alavancamento, precisamos comparar os valores de PS_i com um valor crítico (ou valor de corte). Veremos a seguir como obter este valor crítico.

4.4 Identificação de Pontos de Alavancamento através da Estatística de Projeção

4.4.1 O Valor Crítico do Algoritmo de Projeção

Após o cálculo das estatísticas de projeção é necessário determinar um valor crítico, com o qual essas estatísticas devem ser comparadas, para a identificação dos pontos de alavancamento. Esse valor crítico foi determinado através de simulações Monte Carlos, levando em conta os parâmetros das linhas do sistema de 14 barras do IEEE.

Essas simulações foram realizadas tomando por base o trabalho de Rousseeuw & Zomeren (1990), onde se define como um ponto afastado, no espaço de fatores, aquele que não segue uma distribuição normal. Assim nas simulações Monte Carlos foram atribuídos aos parâmetros verdadeiros da linha do sistema 14 barras do IEEE, ruiídos aleatórios com distribuição gaussiana. Vale lembrar que são esses parâmetros que definem os pontos no fator de espaço, isto é, eles definem os elementos das linhas da matriz jacobiana.

Tendo em vista os resultados obtidos verifica-se que a estatística de projeção segue, aproximadamente, uma distribuição qui-quadrado com v_i graus de liberdade, onde v_i é o número de elementos não nulos na linha correspondente da matriz jacobiana ponderada, sendo este muito menor do que n. Portanto, o critério b_i que apontará os pontos de alavancamento é

$$PS_i > b_i = \chi^2_{v_i,(1-\alpha)}, \tag{4.20}$$

para $i = 1, \cdots, n$, sendo α o nível de significância. Usualmente assumimos que $\alpha = 0.025$.

4.4.2 Distância Robusta

Utilizando os resultados da estatística de projeção PS_i, Mili *et al.* (1996) elaboraram uma estatística ainda mais eficiente na identificação de pontos de alavancamento em EESEP, denominada de RD_i, expressa por

$$RD_i = \sqrt{\boldsymbol{l}_i^t \, \mathbf{C_R}^{-1} \, \boldsymbol{l}_i}, \tag{4.21}$$

onde

$$\mathbf{C}_R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \sum_{i=1}^{m} w_i \, \boldsymbol{l}_i \, \boldsymbol{l}_i^t, \tag{4.22}$$

com

$$w_i = \min \left\{ 1, \left(\frac{b_i}{PS_i} \right)^2 \right\}, \tag{4.23}$$

onde b_i é o valor crítico escolhido em (4.20).

Comparando as expressões de MD_i^2 em (4.11) e da distância robusta RD_i em (4.21), observamos que esta última é a robustificação da distância de Mahalanobis em SEP, onde $\bar{\boldsymbol{l}} = \mathbf{0}$.

Analisando a equação (4.23), observamos que as menores ponderação estarão associadas as medidas pontos de alavancamento. Em função deste procedimento, que diminuirá o efeito das medidas pontos de alavancamento, o estimador da matriz de covariâncias, dado em (4.21), será robusto, bem como a distância RD_i na identificação destas medidas.

Outra maneira de se calcular a distância RD_i é associando ponderação $w_i = 0$ as medidas pontos de alavancamento, uma de cada vez, identificadas em PS_i. A estatística de projeção PS_i, bem como a distância RD_i, devem ser recalculadas cada vez que a ponderação nula estiver associada a uma medida ponto de alavancamento.

EXEMPLO

Neste exemplo será considerado o sistema de 3 barras ilustrado na figura 4.3. Assume-se que todas as linhas têm resistência nula e reatância de 1 p.u, exceto a linha $1-2$, cuja reatância é 0.1 p.u. Em razão disto, as medidas 1 e 6, são pontos

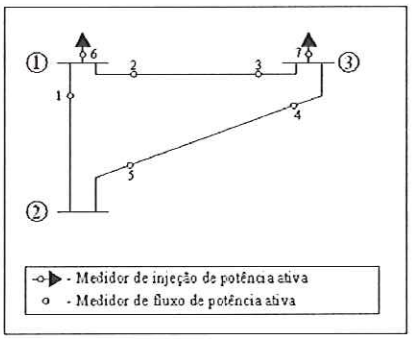


Figura 4.3: Sistema de 3 barras

de alavancamento, pois, são adjacentes às linhas com impedância bem menor que as outras duas linhas.

Considera-se que as 7 medidas de potência realizadas no sistema têm variâncias iguais a 1, ($\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$), e que a barra 3 é a barra de referência. Assim, a matriz jacobiana ponderada deste sistema é:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 11 & -10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O espaço de fatores associado a esta matriz é um plano que contém 7 pontos, onde suas coordenadas são as linhas da matriz $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}}$. A representação dos conjuntos relevantes no espaço de fator é mostrado na figura 4.4.

O elipsóide maior foi obtido através da expressão MD_i^2 (4.11). Analisando este elipsóide, percebemos que os pontos 1 e 6, que estão afastados dos demais pontos no espaço de fatores, pertencem ao elipsóide. Portanto, a distância MD_i não identificou os pontos de alavancamento. O elipsóide menor foi obtido calculando a distância RD_i atribuindo $w_i = 0$, às medidas identificadas como pontos de alavancamento por

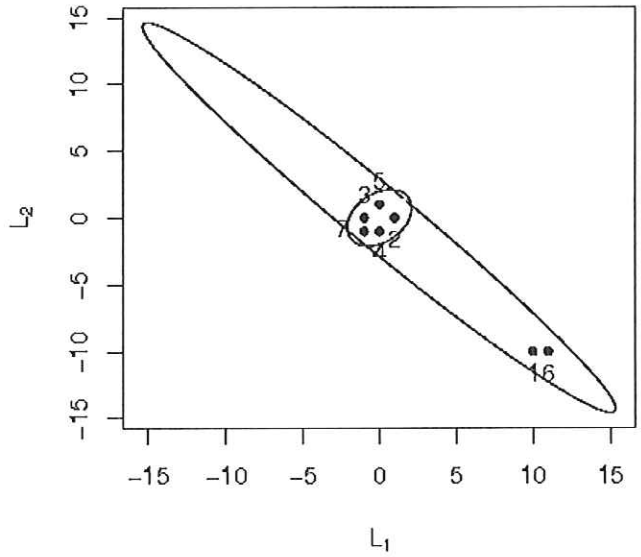


Figura 4.4: Elipsóides MD_i e RD_i

PS_i. Como ilustrado na figura 4.4, os pontos 1 e 6 não pertencem a este elipsóide.

Os cálculos das distâncias p_{ii}, MD_i, PS_i e RD_i encontradas em Mili *et al.* (1996) estão na tabela 4.1. Analisando esta tabela, sabendo-se que as medidas 1 e 6 são pontos de alavancamento, conforme a figura 4.4, sendo que o valor crítico relativo a estatística baseada nos elementos da diagonal da matriz $\mathbf{P}$ é 0.5714, à distância de Mahalanobis $\sqrt{\chi^2_{2,0.975}} = 2.72$, e à estatística de projeção é $\chi^2_{2,0.975} = 7.38$, verificamos que apenas a distância PS_i e RD_i identificaram os pontos de alavancamentos. Os resultados da distância RD_i, na tabela 4.1, foram obtidos a partir da expressão (4.21).

Façamos os cálculos da estatística de projeção relativo ao sistema de 3 barras dado na figura 4.3, sendo que a expressão utilizada para calcular $S_m{}'(i)$, é diferente da equação (4.19) proposta em Mili *et al.* (1996), dada por:

$$S_m{}'(i) = 1.1926\text{lomed}_{\{i \neq j\}} |\mathbf{l}_j \mathbf{v} + \mathbf{l}_i \mathbf{v}|,$$

Tabela 4.1: Distâncias clássicas e robustas

Medidas	$\mathbf{P}_{ii}$	MD_i	PS_i	RD_i
1	0.50	1.88	8.39	10.00
2	0,11	0.89	0.84	0.61
3	0,11	0.89	0.84	0.61
4	0,12	0.94	0.84	0.61
5	0,12	0.94	0.84	0.61
6	0,55	1.96	8.82	10.51
7	0,47	1.98	1.68	0.71

para $i = 1, \cdots, 7$ tomando $\mathbf{v} = l_i$, sabendo-se que a baixa mediana equivalente a parte inteira da expressão $[(m+1)]$ é igual a 3. Através desta expressão conseguimos obter os mesmos valores de PS_i apresentados em Mili *et al.* (1996) com exceção da estatística de projeção referente à medida IN_6 (injeção ativa na barra 1).

1) Calculemos $(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H})^t(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H})$, onde

$$(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H})^t(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^t\mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_1^t\mathbf{l}_2 & \dots & \mathbf{l}_1^t\mathbf{l}_7 \\ \mathbf{l}_2^t\mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2^t\mathbf{l}_2 & \dots & \mathbf{l}_2^t\mathbf{l}_7 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{l}_7^t\mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_7^t\mathbf{l}_2 & \dots & \mathbf{l}_7^t\mathbf{l}_7 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H})^t(\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 200 & 10 & -10 & 10 & -10 & 210 & 0 \\ 10 & 1 & -1 & 0 & 0 & 11 & -1 \\ -10 & -1 & 1 & 0 & 0 & -11 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10 & -1 \\ 210 & 11 & -11 & 10 & -10 & 221 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) Calculemos o $S_m{}'(i)$, onde ressaltando que a expressão $S_m{}'(i)$ utilizada nos cálculos a seguir é diferente da equação (4.19) proposta em Mili *et al.* (1996).

Para $i = 1$, calculemos $|\mathbf{l}_1^t\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_1|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$190 \leq 190 \leq 200 \leq 210 \leq 210 \leq 410.$$

$$S_m^{'}(1) = 1.1926 * 200 = 238.52.$$

Para $i = 2$, calculemos $|\mathbf{l}_2^t\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_2|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$0 \leq 0 \leq 1 \leq 1 \leq 11 \leq 12.$$

$$S_m^{'}(2) = 1.1926 * 1 = 1.1926.$$

Para $i = 3$, calculemos $|\mathbf{l}_3^t\mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_3|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$0 \leq 1 \leq 1 \leq 2 \leq 9 \leq 10.$$

$$S_m^{'}(3) = 1.1926 * 1 = 1.926.$$

Para $i = 4$, calculemos $|\mathbf{l}_4^t\mathbf{l}_4 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_4|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$0 \leq 1 \leq 1 \leq 2 \leq 11 \leq 11.$$

$$S_m^{'}(4) = 1.1926 * 1 = 1.1926.$$

Para $i = 5$, calculemos $|\mathbf{l}_5^t\mathbf{l}_5 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_5|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$0 \leq 0 \leq 1 \leq 1 \leq 9 \leq 9.$$

$$S_m^{'}(5) = 1.1926 * 1 = 1.1926.$$

Para $i = 6$, calculemos $|\mathbf{l}_6^t\mathbf{l}_6 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_6|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$210 \leq 211 \leq 220 \leq 231 \leq 232 \leq 431.$$

$$S_m^{'}(6) = 1.1926 * 220 = 262.37.$$

Para $i = 7$, calculemos $|\mathbf{l}_7^t\mathbf{l}_7 + \mathbf{l}_j^t\mathbf{l}_7|$, sendo $j \neq i$. Os valores ordenados obtidos na expressão acima são

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 3.$$

$$S_m^{'}(7) = 1.1926 * 200 = 238.52.$$

Então,

$$S_m^{'}(i) = [238.52, 1.1926, 1.1916, 1.1926, 1.1926, 262.37, 1.1926]^t.$$

3) Calcular PS_i tomando $\mathbf{v} = \mathbf{l}_j$, onde

$$PS_i = \max_{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{l}_i^t\mathbf{l}_j}{S_m^{'}(j)},$$

sendo $j = 1, \cdots, 7$ para cada $i = 1, \cdots, 7$. Assim,

$$PS_1 = \max\{0.8385, 8.385, 8.385, 8.385, 8.385, 0.80\} = 8.385,$$

$$PS_2 = \max\{0.04, 0.8385, 0.8385, 0, 0, 0.041, 0.8385\} = 0.8385,$$

$$PS_3 = \max\{0.04, 0.8385, 0.8385, 0, 0, 0.041, 0.8385\} = 0.8385,$$

$$PS_4 = \max\{0.04, 0, 0, 0.8385, 0.8385, 0.038, 0.8385\} = 0.8385,$$

$$PS_5 = \max\{0.04, 0, 0, 0.8385, 0.8385, 0.038, 0.8385\} = 0.8385,$$

$$PS_6 = \max\{0.88, 9.2235, 9.2235, 8.385, 8.385, 0.842, 0.8385\} = 9.2235,$$

$$PS_7 = \max\{0, 0.8385, 0.8385, 0.8385, 0.8385, 0.00038, 1.677\} = 1.677.$$

Note que o valor $PS_6 = 9.2235$ é distinto do valor PS_6 apresentado na tabela 4.1.

Capítulo 5

Análise Algébrica da Formulação do Processo de Estimação de Estado em SEP

Demonstrar-se-á o porquê da impossibilidade de detectar erros grosseiros em determinadas medidas redundantes para, em seguida, propor-se um método para identificação de medidas pontos de alavancamento. Para isto, na primeira seção deste capítulo será formulado o processo de estimação de estado em SEP, como um problema da álgebra linear, ao invés da formulação estatística clássica (conforme desenvolvida em (London Jr. *et al.*, 2004)).

5.1 Análise algébrica do estimador WLS

Para simplificar a nossa análise, consideraremos o estimador WLS linear, como apresentado na seção 3.9.

Para o estimador linear, temos o seguinte modelo de medição:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_v) + \tilde{\mathbf{w}}, \tag{5.1}$$

onde $\tilde{\mathbf{z}} \in R^m$ é o vetor de medidas; $\mathbf{x}_v \in R^n$ é o vetor de variáveis de estado

verdadeiras; $\tilde{\mathbf{H}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \in L(R^n, R^m)$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ é o vetor dos erros das medidas $(m \times 1)$, com $E\{\tilde{\mathbf{w}}\} = \mathbf{0}$ e $E\{\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}^t\} = \mathbf{W}$, sendo n e m o número de variáveis de estado e o número de medidas, respectivamente, do correspondente SEP.

Como o número de medidas (m) é, em geral, maior que o número de variáveis de estado (n), existem mais equações do que variáveis de estado a serem estimadas. Assim, a solução de (5.1) existe, se e somente se, $\tilde{\mathbf{z}}$ pertence à imagem de $\tilde{\mathbf{H}}$ $(\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}}))$. Sendo $m > n$, o subespaço $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ é um conjunto muito pequeno em R^m e, devido aos erros das medidas, raramente o vetor de medidas $\tilde{\mathbf{z}}$ pertencerá à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$. Assim, a solução de (5.1) é obtida através do seguinte processo de minimização:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} ||\tilde{\mathbf{r}}||^2 = \min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} ||\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*||^2, \tag{5.2}$$

onde $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*$ é o vetor dos resíduos e $\tilde{\mathbf{z}}^* = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}^*$, para algum $\mathbf{x}^* \in R^n$.

Suponhamos que o R^m, espaço vetorial das medidas, seja munido de um produto interno $< .,. >: R^m \times R^m \rightarrow R$. Suponhamos também que a norma $||.||$ em R^m é induzida por esse produto interno. Então (5.2) pode ser escrita como:

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} < \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}} > = \min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} < \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*, \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^* > . \tag{5.3}$$

Assim, tomando uma base para o R^m, o produto interno torna-se

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = \mathbf{x}^t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}, \tag{5.4}$$

onde $\mathbf{W}^{-1}$ é uma matriz real simétrica e definida positiva (inverso da matriz de covariâncias das medidas). Neste caso, a equação (5.3) torna-se

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} \tilde{\mathbf{r}}^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{r}} = \min_{\tilde{\mathbf{z}}^* \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})} (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*)^t \mathbf{W}^{-1} (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*). \tag{5.5}$$

Observemos que na expressão (5.5) a minimização depende da escolha do produto interno, que, por sua vez, depende da escolha da matriz $\mathbf{W}^{-1}$.

Se $\tilde{\mathbf{H}}$ é um isomorfismo entre R^n e $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, isto é, posto$(\tilde{\mathbf{H}}) = n$, o conjunto de medidas é algebricamente observável e a solução do processo de estimação, $\hat{\mathbf{x}}$, existe

e é única. Neste caso, (5.5) é equivalente ao seguinte problema de minimização:

$$\min_{\mathbf{x}^* \in R^n} \tilde{\mathbf{r}}^t \mathbf{W} \tilde{\mathbf{r}} = \min_{\mathbf{x}^* \in R^n} (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}^*)^t \mathbf{W}^{-1} (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}^*).$$

(5.6)

A solução do problema (5.3) pode ser caracterizada geometricamente pela seguinte proposição:

Proposição 5.1: Seja SB um subespaço vetorial do R^m e $\tilde{\mathbf{z}}$ um vetor qualquer do R^m. Suponha também que R^m seja munido do produto interno $< .,. >$. Então o vetor $\tilde{\mathbf{z}}^*$ em SB, que minimiza a distância induzida:

$$d(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}^*) = ||\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*|| = \sqrt{< (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*), (\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^*) >}$$

é a projeção ortogonal de $\tilde{\mathbf{z}}$ em SB, com respeito ao produto interno $< .,. >$.

A demonstração dessa proposição será omitida por ser elementar (Bazaraa *et al.*, 1990).

Assim, baseando-se nos conceitos apresentados até o momento, podemos dividir o processo de estimação de estado em dois passos:

Passo 1: O vetor de medidas $\tilde{\mathbf{z}}$ é projetado ortogonalmente em $SB = \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$;

Passo 2: O vetor das variáveis de estado estimadas, $\widehat{\mathbf{x}}$, é obtido via isomorfismo, entre o espaço das variáveis de estado R^n e $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}}) \subset R^m$.

Seja $\mathbf{P}$ o operador linear que projeta ortogonalmente o vetor $\tilde{\mathbf{z}}$ em $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$. Então, o vetor de medidas estimadas é

$$\widehat{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{z}}.$$

Se o sistema é observável, existe um único vetor $\widehat{\mathbf{x}} \in R^n$, tal que

$$\widehat{\tilde{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}. \tag{5.7}$$

A figura 5.1 ilustra o operador $\mathbf{P}$ agindo sobre o vetor $\tilde{\mathbf{z}}$. Embora o processo de estimação de estado esteja bem estabelecido pelos passos 1 e 2, apresentados

anteriormente, ainda se faz necessário uma expressão para o operador $\mathbf{P}$, que permita a estimação numérica do vetor $\widehat{\mathbf{x}}$. Para isto, lembrando de que o vetor das medidas $\widehat{\tilde{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}$ é ortogonal ao vetor de resíduos $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}$. Temos

$$< \widehat{\tilde{\mathbf{z}}}, \tilde{\mathbf{r}} >= (\tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}})^t \mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Esta equação pode ser re-escrita como

$$\widehat{\mathbf{x}}^t(\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}) = 0. \tag{5.8}$$

A equação (5.8) será satisfeita se, e somente se,

$$(\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}\widehat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Resolvendo essa equação para $\widehat{\mathbf{x}}$ temos

$$\widehat{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t\tilde{\mathbf{z}};$$

consequentemente,

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}.$$

A matriz $\mathbf{P}$ é usualmente chamada de matriz chapéu (subseção 4.2.2).

Deve-se destacar que a matriz $\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}$ é inversível, pois estamos considerando que o sistema é observável, isto é, que a matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ tem posto completo.

Logo, o vetor resíduo é obtido por

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{z}} - \widehat{\tilde{\mathbf{z}}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}} = \{\mathbf{I} - [\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{H}})^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t\mathbf{W}^{-1}]\tilde{\mathbf{z}}\}. \tag{5.9}$$

A matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ é usualmente conhecida como matriz de sensibilidade do resíduo.

5.2 Medidas com Erros não Detectáveis

Considerando a formulação do problema de estimação de estado em SEP, como apresentado na seção 5.1, caracterizaremos os erros que não podem ser detectados

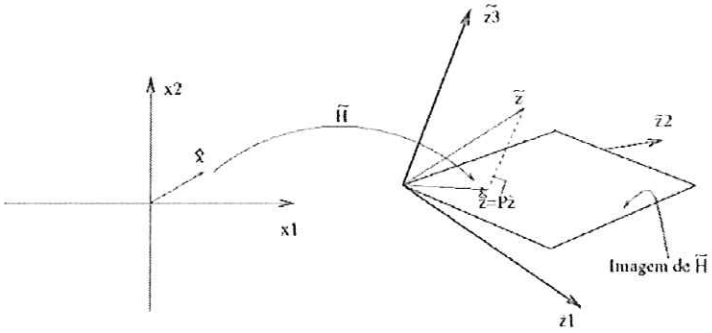


Figura 5.1: Interpretação geométrica

através do método baseado na análise dos resíduos normalizados[1] (seção 3.3).

Seja $\mathbf{x}_v$ o vetor das variáveis de estado verdadeiras, então $\tilde{\mathbf{z}}_v = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{x}_v$ será o correspondente vetor de medidas verdadeiras, isto é sem erros. O vetor dos erros é $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}_v$, sendo $\tilde{\mathbf{z}}$ o vetor de medidas, podendo ser apresentado da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}}.$$

Define-se então

$$\tilde{\mathbf{w}}_u = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{w}}$$

e

$$\tilde{\mathbf{w}}_D = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}},$$

de modo que,

$$\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}_u + \tilde{\mathbf{w}}_D,$$

com $\tilde{\mathbf{w}}_u \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ e $\tilde{\mathbf{w}}_D$ ortogonal à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

Proposição 5.2: O resíduo não é afetado por nenhum vetor $\tilde{\mathbf{w}}_u$ que corresponda à parcela de qualquer vetor de erros, pertencente à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

Demonstração: O vetor de medidas é dado por:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}_v + \tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{z}}_v + \tilde{\mathbf{w}}_u + \tilde{\mathbf{w}}_D.$$

[1]Nas análises do resíduo estudentizado deletado t_i realizadas na seção 3.9, verificamos as limitações da aplicação desta estatística no processo de EESEP

Multiplicando ambos os lados por $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ obtemos

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}}_v + (\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}}_u + (\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}}_D.$$

Como $\tilde{\mathbf{z}}_v \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ e $\tilde{\mathbf{w}}_u \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, temos

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}}_v = \mathbf{0} \text{ e } (\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}}_u = \mathbf{0},$$

logo,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{I}-\mathbf{P})\tilde{\mathbf{w}}_D.$$

cqd.

Em particular, se $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, então $\tilde{\mathbf{w}}_D = \mathbf{0}$ e o resíduo não é afetado por qualquer erro de medida.

Considerando a proposição 5.2, existem dois casos particulares de erros não detectáveis (ENDs):

1. Erros em medidas críticas;

2. Erros em medidas redundantes, cuja composição resulta em um vetor que pertence à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ (EGs múltiplos interativos).

Utilizando os conceitos definidos nesta seção, pode-se afirmar que os erros de medidas críticas não podem ser detectados, porque as mesmas pertencem à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ (Clements *et al.*, 1981)[2].

Generalizando essa conclusão, considerando a proposição 5.2 pode-se dizer que erros em medidas críticas e erros em medidas redundantes, cuja composição resulte em um vetor pertencente à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, não são detectáveis, porque tais erros resultam em um vetor de erros pertencente à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

[2]Isto foi demonstrado algebricamente em London *et al.* (2004)

5.3 Exemplos de Erros Não Detectáveis

O principal objetivo desta seção é mostrar, através de exemplos, a existência de ENDs. Em razão de ser bem conhecido que os erros em medidas críticas não são detectáveis, mostraremos a existência de medidas redundantes, cujos erros não são detectáveis através da análise dos resíduos.

Exemplo 5.1: Considere o sistema de duas barras, associado ao conjunto de medidas ilustrado na figura 5.2.

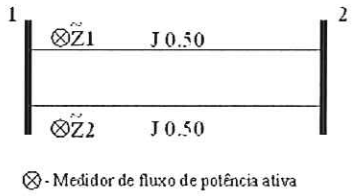


Figura 5.2: Sistema Elétrico de 2 barras

Tomando a barra 2 como referência ($\delta_2 = 0$), a matriz jacobiana deste sistema é

$$\tilde{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando que os desvios padrão de $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ são iguais a ($\sigma_{\tilde{z}_1} = \sigma_{\tilde{z}_2} = 1$), temos $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ e a matriz de projeção $\mathbf{P}$ será

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $x_v = 0.175$, então $\tilde{\mathbf{z}}_v = \tilde{\mathbf{H}} x_v = [0.35, 0.35]^t$ representa o vetor de medidas verdadeiras em $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$, associado à x_v. Suponha a existência de um erro grosseiro de $7\sigma_{\tilde{z}_1}$. para a medida $\tilde{z}_1$ e de $7\sigma_{\tilde{z}_2}$ para a medida $\tilde{z}_2$. Então,

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}_v + \tilde{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 7.35, & 7.35 \end{bmatrix}^t.$$

Aplicando o estimador WLS linear para o sistema da figura 5.2, obtêm-se a variável de estado estimada, $\widehat{\mathbf{x}}$, e o vetor de resíduos $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\widehat{x} = 3.675$$

e

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esta situação é ilustrada na figura 5.3. Sendo os resíduos iguais a **0**, a análise do resíduo acusará erroneamente que não existem medidas com erros grosseiros. Isto porque a combinação dos erros é tal que o vetor de medidas pertence à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$. É importante enfatizar que as medidas $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ não pertencem à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, pois elas não são medidas críticas, embora a sua composição resulte em um vetor pertencente à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

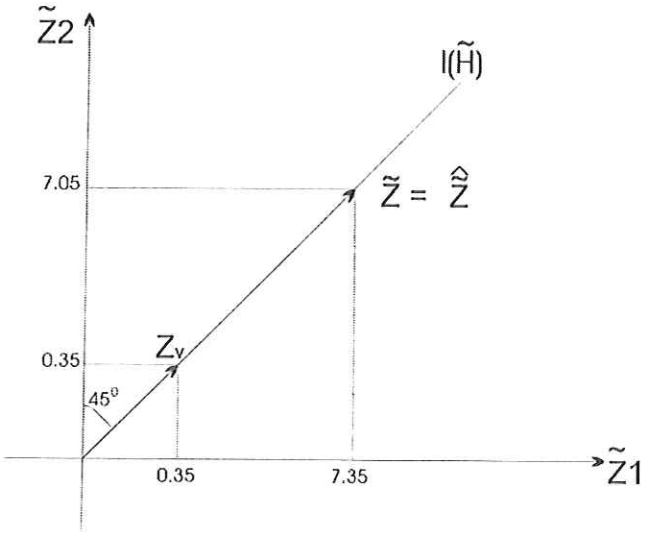


Figura 5.3: Exemplo de erro não detectável

Exemplo 5.2: Consideremos novamente o sistema de 2 barras, mostrado na figura 5.2. Mas, agora, atribuiremos à linha associada à medida $\tilde{z}_2$ uma reatância igual a 0.10p.u. Tomando a barra 2 como referência ($\delta_2 = 0$), a matriz jacobiana do sistema torna-se

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Considerando novamente os desvios padrão de $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ iguais a 1 p.u. ($\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$), a

matriz de projeção $\mathbf{P}$ será

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.038 & 0.192 \\ 0.192 & 0.961 \end{bmatrix}.$$

Suponha que $x_v = 0.175$, então $\tilde{\mathbf{z}}_v = \tilde{\mathbf{H}}x_v = [0.35, 1.75]^t$ representa o vetor de medidas verdadeiras em $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, associado à x_v. Suponhamos erros grosseiros de $2.1\sigma_{\tilde{z}_1}$ na medida $\tilde{z}_1$ e de $10.5\sigma_{\tilde{z}_2}$ na medida $\tilde{z}_2$. Então, $\tilde{\mathbf{z}} = [2.45, 12.25]^t$. Aplicando o estimador de estado WLS linear, obtemos $\widehat{x} = 1.225$ e o vetor de resíduos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Neste exemplo, assim como no anterior, o vetor de medidas $\tilde{\mathbf{z}}$ pertence à $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$. Mas observemos que neste último exemplo, diferente do anterior, os erros e as reatâncias associados às medidas $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ são distintos.

5.4 Medidas Pontos de Alavancamento

Como já mencionado diversas vezes neste trabalho, não é possível identificar, pela análise dos resíduos, EGs em medidas pontos de alavancamento. Assim, tais erros representam um outro tipo de END.

Em termos da proposição 5.2, a impossibilidade de detectar EGs, em medidas pontos de alavancamento, deve-se ao fato de as mesmas estarem "muito próximas" de $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$, tendo em vista que a projeção ortogonal em $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ de um vetor unitário, pertencente ao eixo de uma medida ponto de alavancamento, é muito maior que a projeção ortogonal em $\mathrm{I}(\tilde{\mathbf{H}})$ de um vetor unitário, pertencente ao eixo de qualquer medida redundante àquela medida ponto de alavancamento. Em razão disto, mesmo com EG, uma medida ponto de alavancamento pode apresentar um resíduo pequeno.

Observação 5.1: Na seção 3.9, destacou-se o fato de a medida ponto de alavancamento ter comportamento semelhante ao de uma medida crítica, em razão de a medida ponto de alavancamento apresentar resíduo muito pequeno e a medida crítica resíduo nulo. Em termos de projeção ortogonal, verifica-se também tal semelhança

pois, como já apresentado neste capítulo, a medida crítica pertence á $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$, *e a medida ponto de alavancamento, "ou quase crítica,"está muito próxima da* $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$.

Para analisar a influência das medidas pontos de alavancamento no estimador WLS linear, consideraremos a transformação do modelo de medição proposta por Abur & Celik (1992a), apresentada na seção 3.9, onde obtemos o modelo de medição:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(x_v) + \mathbf{w},$$

sendo

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{z}};$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}},$$

e

$$\mathbf{w} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{w}}.$$

A a matriz $\mathbf{H}$ passa a ser chamada de matriz jacobiana ponderada

Para o novo modelo temos $E\{\mathbf{w}\} = 0$ e $E\{\mathbf{w}.\mathbf{w}^t\} = \mathbf{I}$. Conseqüentemente, a matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, apresentada na seção 5.1, será dada por

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^t\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^t. \tag{5.10}$$

5.5 Exemplos de ENDs, em Medidas Pontos de Alavancamento

Para realizar o processamento de EGs, será considerado um nível de significância "$\rho = 2.5\%$." Assim, dependendo dos graus de liberdade, determinar-se-à "λ," parâmetro utilizado para verificar a existência de EGs, através do índice $J(x)$, conforme apresentado na seção 3.3.1.

Exemplo 5.3: Consideremos novamente o sistema da figura 5.2 (com $x_v = 0.175$ e $\tilde{\mathbf{z}}_v = [0.35, 1.75]^t$), mas supondo a existência de um erro grosseiro de $9\sigma_{\tilde{z}_2}$, ($\sigma_{\tilde{z}_2} = 1$)

na medida $\tilde{z}_2$. Então $\tilde{\mathbf{z}} = [0.35, 10.75]^t$. Aplicando o método de estimação WLS linear obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -1.73 \\ 0.346 \end{bmatrix} \quad , \quad |\tilde{\mathbf{r}}^N| = \begin{bmatrix} 1.765 \\ 1.765 \end{bmatrix}$$

e $J(X) = 3.11$ ($\lambda = 5.024$). Logo o erro na medida $\tilde{z}_2$ não foi detectado. (veja figura 5.4).

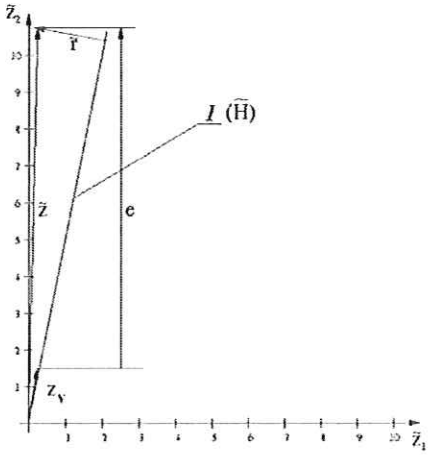


Figura 5.4: Erro grosseiro na medida z_2

Exemplo 5.4: Supondo agora que a medida $\tilde{z}_2$ seja perfeita, mas que a medida $\tilde{z}_1$ tenha um erro de $9\sigma_{\tilde{z}_1}$, $\sigma_{\tilde{z}_1} = 1$. Então, $\tilde{\mathbf{z}} = [9.35, 1.75]^t$. Estimando o estado obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 8.65 \\ -1.73 \end{bmatrix} \quad , \quad |\tilde{\mathbf{r}}^N| = \begin{bmatrix} 8.825 \\ 8.825 \end{bmatrix}$$

e $J(X) = 77.88$ ($\lambda = 5.024$). Agora foi possível detectar o erro, mas é impossível identificar a medida com erro, pois as duas medidas apresentam resíduos normalizados idênticos [3]. Esta situação está ilustrada na figura 5.5. Para este exemplo temos a seguinte matrix chapéu:

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}(\mathbf{H}^t\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^t = \begin{bmatrix} 0.0385 & -0.1923 \\ -0.1923 & 0.9615 \end{bmatrix},$$

[3] $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ constituem um conjunto crítico de medidas

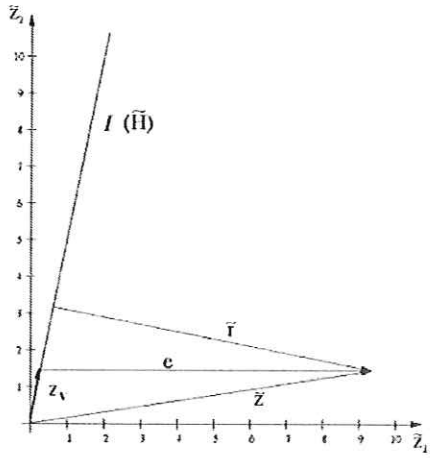


Figura 5.5: Erro grosseiro na medida z_1

lembrando que

$$\mathrm{H} = \mathrm{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{H}}$$

é a matriz jacobiana ponderada, sendo W^{-1} e $\tilde{\mathrm{H}}$ as matrizes de ponderação e a matriz jacobiana, respectivamente (tomando a barra 2 como referência e $\mathrm{W} = \mathrm{I}$).

Analisando os elementos da diagonal principal da matriz $\mathbf{P}$, a medida $\tilde{z}_2$ será identificada como ponto de alavancamento (subseção 4.2.2). Eis a razão da dificuldade de se detectar erro nessa medida.

Em termos da proposição 2, o problema da detecção de erro em $\tilde{z}_2$ está relacionado ao fato de $\tilde{z}_2$ estar mais próxima de I(H) do que $\tilde{z}_1$, tendo em vista que a projeção em I(H) de um vetor unitário, alinhado à $\tilde{z}_2$, é muito maior que a projeção em I(H) de um vetor unitário, alinhado com a medida $\tilde{z}_1$. Portanto, $\tilde{z}_2$ polarizará muito mais a estimação, e o resíduo dessa medida será menor, mesmo quando a mesma possuir EG.

Observe que embora $\tilde{z}_2$ seja topologicamente redundante de $\tilde{z}_1$, numericamente essa redundância é distorcida, no sentido de $\tilde{z}_2$ ser muito mais "importante" que $\tilde{z}_1$, para a determinação do estado. Consequentemente, erros em $\tilde{z}_2$ são muito difíceis de serem detectáveis pela análise dos resíduos normalizados.

Observação 5.2: A existência de pontos de alavancamento é um problema que

ocorre devido à composição de dois fatores: linhas com baixas impedâncias e a localização dos medidores.

Em relação à identificação dos EGs, nos exemplos 3 e 4 as medidas $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ apresentam o mesmo resíduo normalizado. Isto significa que, mesmo quando for possível detectar o erro, não é possível identificar a medida com erro. Nestes exemplos isto acontece porque $\tilde{z}_1$ e $\tilde{z}_2$ constituem um conjunto crítico.

Exemplo 5.5: Considere agora o sistema de três barras associado ao conjunto de medidas apresentado na figura 5.6.

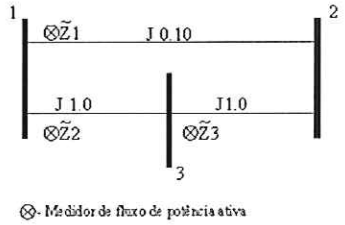


Figura 5.6: Sistema Elétrico 3 barras

Tomando a barra 2 como referência ($\delta_2 = 0$), a matriz jacobiana ponderada deste sistema é

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathbf{x}_v = [0.2\ 0.15]^t$ o vetor das variáveis de estado verdadeiras do sistema associado ao vetor de medidas verdadeiras $\tilde{\mathbf{z}}_v = [2,\ 0.05,\ 0.15]^t$. Suponha que a medida $\tilde{z}_2$ seja perfeita e a existência de um EG de $9\sigma_{\tilde{z}_1}$, $\sigma_{\tilde{z}_1} = 1$ na medida $\tilde{z}_1$. Então $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}_v + \mathbf{e} = [11,\ 0.05,\ 0.15]^t$. Aplicando o estimador WLS linear obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0.0448 \\ -0.4478 \\ -0.4478 \end{bmatrix}, \quad |\tilde{\mathbf{r}}^N| = \begin{bmatrix} 0.635 \\ 0.635 \\ 0.635 \end{bmatrix}$$

e $J(X) = 0.403$.

Isto significa que o erro não é detectado ($\lambda = 5.024$).

Façamos agora o contrário, isto é, $\tilde{z}_1$ perfeito e a existência de um EG de $9\sigma_{\tilde{z}_2}$, $\sigma_{\tilde{z}_2} = 1$ na medida $\tilde{z}_2$. Aplicando o estimador WLS linear obtemos

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.44780 \\ 4.44776 \\ -4.44776 \end{bmatrix}, \quad |\tilde{\mathbf{r}}^N| = \begin{bmatrix} 6.3481 \\ 6.3481 \\ 6.3481 \end{bmatrix}$$

e $J(X) = 40.299$.

Neste caso é possível detectar a presença de EG, mas através dos resíduos normalizados não é possível identificar qual a medida portadora desse EG, pois $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ e $\tilde{z}_3$ constituem um conjunto crítico.

Considerando um erro grosseiro de $9\sigma_{z_3}$, $\sigma_{z_3} = 1$ na medida $\tilde{z}_3$, o mesmo ocorrerá, isto é, é possível detectar a presença de EG, mas não é possível identificar a medida portadora do EG.

Pode-se concluir, então, que no conjunto de medidas analisado neste exemplo existe apenas uma medida ponto de alavancamento ($\tilde{z}_1$). Observe que essa medida é adjacente à linha com menor impedância.

Exemplo 5.6: Neste exemplo considera-se o sistema de 5 barras mostrado na figura 5.7. O conjunto de medidas que será utilizado também pode ser visto na figura.

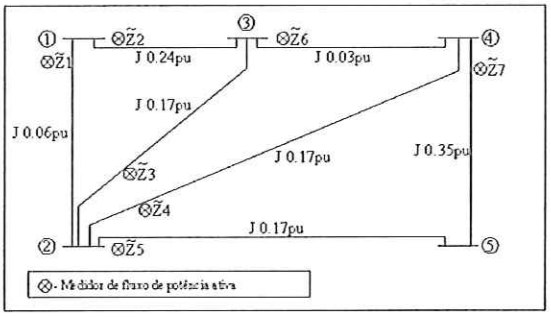


Figura 5.7: sistema de 5 barras

Para verificar se o procedimento de detecção de EGs falha, adicionaremos, em

uma medida por vez, um EG com magnitude de $7\sigma_{\tilde{z}_i}$, sendo $\sigma_{\tilde{z}_i} = 1$, para $i = 1, \cdots, 7$.

Não foi possível detectar EG, quando as seguintes medidas foram portadoras do mesmo ($\lambda = 7.815, \rho = 2.5\%$):

1) EG apenas na medida $\mathbf{z}_1$: $J(X) = 2.40$,

$$\tilde{\mathbf{r}} = [0.3368,\ -1.3473,\ 0.402,\ 0.3761,\ 0.1762,\ -0.0975,\ -0.3627]^t$$

e

$$|\tilde{\mathbf{r}}^N| = [1.5338,\ 1.5338,\ 0.5113,\ 0.4795,\ 0.4189,\ 0.6876,\ 0.4189]^t.$$

2) EG apenas na medida $\mathbf{z}_5$: $J(X) = 7.4$,

$$\tilde{\mathbf{r}} = [-0.0827,\ 0.3308,\ 0.4485,\ 0.461,\ -1.1438,\ 0.1205,\ 2.355]^t$$

e

$$|\tilde{\mathbf{r}}^N| = [0.3766,\ 0.3766,\ 0.5704,\ 0.5878,\ 2.7198,\ 0.8501,\ 2.7198]^t.$$

3) EG apenas na medida $\mathbf{z}_6$: $J(X) = 0.93$,

$$\tilde{\mathbf{r}} = [-0.091,\ 0.3639,\ 0.4982,\ -0.7224,\ -0.0335,\ 0.1334,\ 0.069]^t$$

e

$$|\tilde{\mathbf{r}}^N| = [0.4142,\ 0.4142,\ 0.6335,\ 0.921,\ 0.0797,\ 0.9411,\ 0.0797]^t.$$

Neste exemplo mostra-se que nem sempre as medidas associadas com linhas de baixa impedância são pontos de alavancamento, pois, z_3, z_4 e z_5 são incidentes às linhas com a mesma impedância, mas somente z_5 é ponto de alavancamento.

5.6 Identificação de Medidas com Erros não Detectáveis

Como vimos anteriormente, existem três tipos de medidas com ENDs: medidas críticas, medidas redundantes cuja composição resulta em um vetor de medidas pertencente à I(H) e medidas pontos de alavancamento.

Através da proposição 5.2 apresentada neste capítulo, verifica-se que a dificuldade, ou até mesmo a impossibilidade, de detectar os erros grosseiros pode ser explicada pela distância destas medidas com relação à I(H). Baseando-se nesta afirmativa, nesta seção será proposto um método para identificação de medidas com ENDs.

O método proposto é baseado na análise das linhas da matriz de sensibilidade dos resíduos, uma vez que, conforme será demonstrado a seguir, as linhas desta matriz informam sobre a distância de cada medida até à I(H).

5.6.1 Propriedade da Matriz de Sensibilidade dos Resíduos

Considerando a transformação do modelo de medição proposto por Celik & Abur (1992), apresentado na seção 3.7, revisado na seção 4 deste capítulo, a matriz de sensibilidade dos resíduos $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, dada pela equação (5.10), é uma matriz simétrica, e cada uma de suas linhas corresponde ao resíduo de uma medida.

Propriedade 5.1: Cada elemento $\mathbf{IP}_{ii}$ da diagonal principal da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, é igual ao quadrado da norma da respectiva linha da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$. Isto é,

$$\mathbf{IP}_{ii} = ||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||^2,$$

onde $\mathbf{IP}_{ii}$ e $(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i$ são, respectivamente, o i-ésimo elemento da diagonal e a i-ésima linha da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$.

Demonstração: Seja $\mathbf{z}_i$ um vetor de zeros, exceto a i-ésima posição, que é igual a 1. Então o produto $(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{z}_i$ será igual ao vetor $(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i$, que corresponde à i-ésima linha, ou i-ésima coluna, da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$. Como as colunas de $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$ são ortogonais às bases de I(H), então $(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i$ é ortogonal à I(H). Seja α_1 o ângulo entre I(H) e o eixo i (veja a figura 5.8). Então,

$$\text{sen}\alpha_1 = \frac{||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||}{||z_i||}.$$

Como $||z_i|| = 1$,

$$\text{sen}\alpha_1 = ||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||.$$

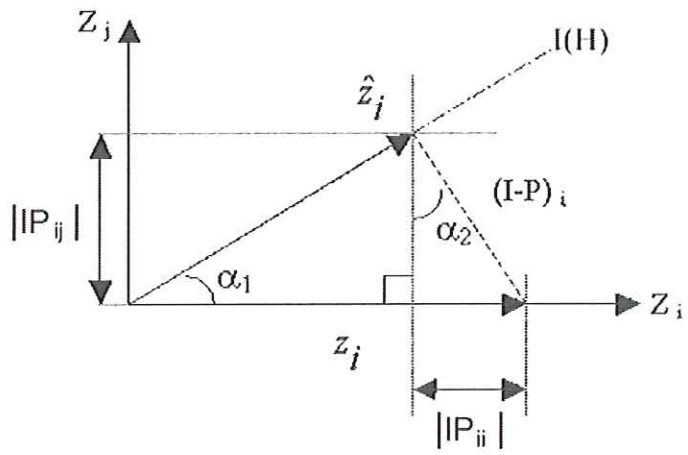


Figura 5.8: Propriedade 5.1 (Interpretação para duas medidas)

Analisando a figura 5.8 concluímos que

$$\text{sen}\alpha_2 = \frac{\text{IP}_{ii}}{||(\text{I}-\text{P})_i||}.$$

Como $\alpha_1 = \alpha_2$, $\text{sen}\alpha_2 = \text{sen}\alpha_1 = ||(\text{I}-\text{P})_i||$, então,

$$\text{IP}_{ii} = ||(\text{I}-\text{P})_i||^2,$$

como IP_{ii} corresponde ao i-ésimo elemento da diagonal da matriz $(\text{I}-\text{P})$, temos

$$\text{IP}_{ii} = ||(\text{I}-\text{P})_i||^2.$$

A partir da propriedade 1 e analisando a figura 5.8, pode-se formular os lemas a seguir.

Lema 1: A norma da i-ésima linha da matriz $(\text{I}-\text{P})$ é proporcional à distância de um ponto definido por um vetor unitário pertencente ao eixo da i-ésima medida até a I(H) (Pela figura 5.8, $\text{sen}\alpha_1 = ||(\text{I}-\text{P})_i||$, sendo α_1 o ângulo entre o eixo i e a I(H)).

Lema 2: IP_{ij} é o tamanho da projeção de $(\text{I}-\text{P})_i$ no eixo j. Como consequência, IP_{ij} dá uma idéia da influência de z_i em z_j (e vice versa). Observe que IP_{ij} corresponde ao elemento (i,j) da matriz $(\text{I}-\text{P})$.

5.7 Método para Identificação de Medidas com ENDs

1) *Identificação de medidas críticas*: Dado que $\mathrm{IP}_{ii} = ||(\mathrm{I}-\mathrm{P})_i||^2$, pelo Lema 1 pode-se afirmar que se $\mathrm{IP}_{ii} = 0$, a medida $z_i \in \mathrm{I(H)}$. Como consequência, as medidas correspondentes aos elementos nulos da diagonal da matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ são medidas críticas [4].

2) *Identificação de medidas redundantes cuja composição resulta em um vetor de medidas pertencente à* I(H): Se os resíduos de algumas medidas redundantes são iguais a zero e os correspondentes elementos da diagonal da matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ não são nulos, então os erros associados a estas medidas não podem ser detectados (Como os resíduos destas medidas são iguais a zero e os correspondentes $\mathrm{IP}_{ii} \neq 0$, embora isoladamente essas medidas não pertençam à I(H), a composição das mesmas resulta em um vetor de medidas pertencente à I(H)).[5]

3)*Identificação das medidas pontos de alavancamento*: A identificação das medidas pontos de alavancamento é mais elaborada. O primeiro passo, para identificar uma medida ponto de alavancamento, é identificar as medidas que são significativamente afetadas por ela. O Lema 2 indica que o efeito da medida "i," na medida "j," pode ser verificado pelo correspondente elemento (i, j) da matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$. Pela equação (5.9) podemos notar como esta propriedade afeta os resíduos das medidas. Isto é, quando IP_{ij} é um elemento grande, o resíduo da medida i é fortemente afetado pelo resíduo da medida j, e vice-versa. Baseando-se neste tipo de relação, o conjunto de medidas que afetam significatimente a medida z_i, ou que são significativamente afetadas por z_i (a matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ é simética), será definido como S_i.

[4]Embora a impossibilidade de detectar EG em medidas críticas seja uma propriedade bem conhecida [Clements et al (1981)], aqui ela é explicada em termos da distância dessa medida para a I(H).

[5]Vale destacar que em algumas situações os resíduos de algumas medidas redundantes são nulos porque as mesmas não possuem erros.

Para encontrar os conjuntos S_i, $i = 1, \cdots, m$, é necessário definir um critério para decidir se essa medida é ou não significativamente afetada por uma outra medida. O Lema 2 indica que os elementos fora da diagonal principal da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ podem dar tal informação. Isto é, se o elemento $\mathbf{IP}_{ij}$ da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ é significativamente grande, pode-se considerar que a medida z_i é significativamente afetada por z_j, então z_j está no conjunto de medidas que afetam significativamente a medida $z_i(S_i)$.

Obviamente é necessário quantificar a idéia intuitiva de um elemento "significativamente" grande. O elemento $\mathbf{IP}_{ij}$ pode ser considerado "significativamente" grande se

$$|\mathbf{IP}_{ij}| > \gamma,$$

onde $0 \leq \gamma \leq 1$ é arbitrariamente escolhido.

É fácil verificar que o conjunto S_i pode mudar de acordo com o valor de γ, assim definiremos o conjunto-γ de medidas que afetam significativamente a medida z_i, por S_i^γ. Desta forma, uma medida $z_j \in S_i^\gamma$, se $|\mathbf{IP}_{ij}| \geq \gamma$.

Se para uma dada medida z_i, todos os elementos fora da diagonal da linha i da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, são iguais, isto é, se

$$\mathbf{IP}_{i1} = \mathbf{IP}_{i2} = \cdots = \mathbf{IP}_{im},$$

o resíduo r_i é afetado uniformemente por cada medida z_j, com $i \neq j$. [6] Quando isto ocorre, para uma dada medida z_i, a propriedade 5.1 da matriz de sensibilidade do resíduo pode ser usada para demonstrar que [7]

$$\mathbf{IP}_{ij} = \sqrt{\frac{\mathbf{IP}_{ii} - \mathbf{IP}_{ii}^2}{m-1}}, \tag{5.11}$$

para $i \neq j$. Neste trabalho, sugerimos tomar

$$\gamma^i = \sqrt{\frac{\mathbf{IP}_{ii} - \mathbf{IP}_{ii}^2}{m-1}}$$

[6] Nesta situação todas as medidas estão na mesma distância de I(H).

[7] Veja a última seção deste capítulo.

para a medida z_i.

Este critério, definiremos de "critério de espalhamento uniforme", é sugerido porque γ^i dá uma idéia da influência " média" de uma medida sobre as outras, pois se cada medida afeta a outra da mesma maneira, $|\mathbf{IP}_{ij}| = \gamma$, $i \neq j$. Consequentemente, quando $|\mathbf{IP}_{ij}| > \gamma$, podemos dizer que a medida z_i afeta significativamente z_j, i.e., a influência de z_i em z_j é certamente maior que a influência em z_j, em pelo menos uma das demais medidas.

Após a obtenção do conjunto-γ de medidas que são afetas significativamente pela medida z_i (S_i^γ), pode-se determinar se a medida "z_i" é ponto de alavancamento ou não, isto é, determinar a possibilidade de detecção de erro na medida z_i. Para isto, realizam-se comparações entre $||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||$ e $||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_j||$, $j \in S_i^\gamma$.

Como

$$r_i = (\mathbf{I}-\mathbf{P})_i\,\mathbf{z} \ , \ \ \mathbf{z} = (\mathbf{z}_v + \mathbf{w}),$$

$$r_i = (\mathbf{I}-\mathbf{P})_i\,(\mathbf{z}_v + \mathbf{w}),$$

como $\mathbf{z}_v \in \mathrm{I}(\mathbf{H})$, temos que

$$r_i = (\mathbf{I}-\mathbf{P})_i\,\mathbf{z}_v = 0,$$

$$||r_i||\infty||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||.||\mathbf{w}||.$$

Então, se

$$||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i|| < ||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_j||,$$

para todo $j \in (S_i^\gamma)$, r_i será pequeno mesmo quando $||w_i||$ é muito grande. Assim, z_i é uma medida ponto de alavancamento, sendo muito difícil detectar erro grosseiro na mesma. Face ao exposto, a comparação entre $||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||$ e $||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_j||$, $j \in S_i^\gamma$, informa as medidas pontos de alavancamento, e sendo $\mathbf{IP}_{ii} = ||(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i||^2$, pode-se identificar as medidas pontos de alavancamento analisando os elementos da diagonal principal da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, isto é, através da comparação entre $\mathbf{IP}_{ii}$ e $\mathbf{IP}_{jj}$.

Observação 5.3 - O método para identificação de medidas pontos de alavancamento proposto requer a existência de no máximo uma medida ponto de alavancamento por conjunto S_i^γ.

5.7.1 Algoritmo para Identificação de Medidas Pontos de Alavancamento

Passo 1: Obtenha a matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ (5.10)

Passo 2: Para cada medida determine o parâmetro γ^i, (5.11) e o correspondente conjunto de medidas S_i^γ;

Passo 3: Classifique como ponto de alavancamento toda medida z_i que satisfaz

$$\mathrm{IP}_{ii} < \mathrm{IP}_{jj},$$

$j \in S_i^\gamma$.

5.7.2 Testes Numéricos - Identificação de Medidas Pontos de Alavancamento

Para ilustrar o metódo para identificação de pontos de alavancamento, apresentado neste capítulo, consideraremos os sistemas usados nos exemplos 5.4, 5.5 e 5.6 apresentados na seção 5.5.

Exemplo 5.7: Considere o mesmo sistema e as medidas usados no exemplo 5.4. A correspondente matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ é obtida por:

$$(\mathrm{I}-\mathrm{P}) = \mathrm{I} - \mathrm{H}(\mathrm{H}^t\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^t,$$

sendo

$$\mathrm{H} = \mathrm{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$(\mathrm{I}-\mathrm{P}) = \begin{bmatrix} 0.962 & 0.192 \\ 0.192 & 0.038 \end{bmatrix}.$$

Para z_1,

$$\mathrm{IP}_{11} = 0.962,$$

e

$$\gamma^1 = \sqrt{\frac{\mathrm{IP}_{11} - \mathrm{IP}_{11}^2}{m-1}} = \sqrt{\frac{(0.962 - 0.962^2)}{2-1}} = 0.191.$$

Então,

$$S_1^\gamma = \{z_2\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{11} > \mathrm{IP}_{22}$, então z_1 não é um ponto de alavancamento;

Para z_2,

$$\mathrm{IP}_{22} = 0.038,$$

e

$$\gamma^2 = 0.191.$$

Então,

$$S_2^\gamma = \{z_1\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{22} < \mathrm{IP}_{11}$, então z_2 é um ponto de alavancamento.

Exemplo 5.8: Considere o mesmo sistema e medidas usados no exemplo 5.5. A correspondente matriz $(\mathrm{I} - \mathrm{P})$ é:

$$(\mathrm{I} - \mathrm{P}) = \mathrm{I} - \mathrm{H}(\mathrm{H}^t\mathrm{H})^{-1}\mathrm{H}^t = \begin{bmatrix} 0.005 & -0.049 & -0.049 \\ -0.049 & 0.498 & 0.498 \\ -0.049 & 0.498 & 0.498 \end{bmatrix}$$

Para z_1,

$$\mathrm{IP}_{11} = 0.005,$$

e

$$\gamma^1 = 0.049.$$

Então,

$$S_1^\gamma = \{z_2, z_3\}.$$

Como $\mathbf{IP}_{11} < \mathbf{IP}_{22}$ e $\mathbf{IP}_{11} < \mathbf{IP}_{33}$, então z_1 é um ponto de alavancamento;

Para z_2,

$$\mathbf{IP}_{22} = 0.498,$$

e

$$\gamma^2 = 0.354.$$

Então,

$$S_2^\gamma = \{z_3\}.$$

Como $\mathbf{IP}_{22} = \mathbf{IP}_{33}$, então z_2 não é um ponto de alavancamento;

Para z_3,

$$\mathbf{IP}_{33} = 0.498,$$

e

$$\gamma^3 = 0.354.$$

Então,

$$S_3^\gamma = \{z_2\}.$$

Como $\mathbf{IP}_{33} = \mathbf{IP}_{22}$, então z_3 não é um ponto de alavancamento;

Exemplo 5.9: Considere o mesmo sistema e as medidas usados no exemplo 5.6. A correspondente matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ é

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.19 & 0.06 & 0.06 & 0.02 & -0.01 & -0.03 \\ -0.19 & 0.77 & -0.24 & -0.23 & -0.07 & 0.06 & 0.14 \\ 0.06 & -0.24 & 0.66 & -0.33 & -0.09 & 0.08 & 0.20 \\ 0.06 & -0.23 & -0.33 & 0.66 & -0.10 & -0.09 & 0.20 \\ 0.02 & -0.07 & -0.09 & -0.10 & 0.16 & -0.02 & -0.33 \\ -0.01 & 0.06 & 0.08 & -0.09 & -0.02 & 0.02 & 0.05 \\ -0.03 & 0.14 & 0.20 & 0.20 & -0.33 & 0.05 & 0.69 \end{bmatrix}$$

Para z_1,

$$\mathbf{IP}_{11} = 0.05,$$

e

$$\gamma^1 = 0.09.$$

Então,

$$S_1^\gamma = \{z_2\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{11} < \mathrm{IP}_{22}$, então z_1 é um ponto de alavancamento;

Para z_2,

$$\mathrm{IP}_{22} = 0.77,$$

e

$$\gamma^2 = 0.17.$$

Então,

$$S_2^\gamma = \{z_1, z_3, z_4\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{11} < \mathrm{IP}_{22}$, então z_2 não é um ponto de alavancamento.

Para z_3,

$$\mathrm{IP}_{33} = 0.66,$$

e

$$\gamma^3 = 0.19.$$

Então,

$$S_3^\gamma = \{z_2, z_4, z_7\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{33} = \mathrm{IP}_{44}$, então z_3 não é um ponto de alavancamento;

Para z_4,

$$\mathrm{IP}_{44} = 0.66,$$

e

$$\gamma^4 = 0.19.$$

Então,

$$S_4^\gamma = \{z_2, z_3, z_7\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{44} = \mathrm{IP}_{33}$, então z_4 não é um ponto de alavancamento;

Para z_5,

$$\mathrm{IP}_{55} = 0.16,$$

e

$$\gamma^5 = 0.15.$$

Então,

$$S_5^\gamma = \{z_7\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{55} < \mathrm{IP}_{77}$, então z_5 é um ponto de alavancamento.

Para z_6,

$$\mathrm{IP}_{66} = 0.02,$$

e

$$\gamma^6 = 0.06.$$

Então,

$$S_6^\gamma = \{z_2, z_3, z_4\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{66} < \mathrm{IP}_{33} = (\mathrm{I} - \mathrm{P})_{44} < (\mathrm{I} - \mathrm{P})_{22}$, então z_6 é um ponto de alavancamento;

Para z_7,

$$\mathrm{IP}_{77} = 0.69,$$

e

$$\gamma^7 = 0.19.$$

Então,

$$S_7^\gamma = \{z_3, z_4, z_5\}.$$

Como $\mathrm{IP}_{77} > \mathrm{IP}_{33} = (\mathrm{I} - \mathrm{P})_{44} > (\mathrm{I} - \mathrm{P})_{55}$, então z_7 não é um ponto de alavancamento.

5.7.3 Demonstração da Equação (5.11)

Usando a propriedade 5.1 alusiva à matriz sensibilidade do resíduo (seção 5.6.1) e supondo que a área de espalhamento do resíduo seja uniforme [8], permite-se obter os elementos (i, j), da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, designados por $\mathbf{IP}_{ij}$, para $i \neq j$. Da propriedade 5.1 temos que:

$$\mathbf{IP}_{ii} = ||(\mathbf{I} - \mathbf{P})_i||^2;$$

então,

$$\mathbf{IP}_{ii} = \sum_{j=1}^{m} ||\mathbf{IP}_{ij}^2||.$$

Se a área de espalhamento for uniforme,

$$\mathbf{IP}_{ij} = \gamma.$$

Então,

$$\mathbf{IP}_{ii} = \mathbf{IP}_{ii}^2 + (m-1)\gamma^2.$$

Assim,

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mathbf{IP}_{ii} - \mathbf{IP}_{ii}^2}{m-1}}.$$

[8]Isto é, o resíduo de uma determinada medida é afetado uniformemente pelos resíduos das demais medidas.

Capítulo 6

Análise da Influência da Matriz de Ponderação no Processo de EESEP

Diversas pesquisas visam contornar os efeitos maléficos das medidas classificadas como maus pontos de alavancamento, através de um processo de reponderação das mesmas, que podemos considerar como uma tentativa de "estimar" a matriz de ponderação correta (Mili *et al.* (1996); Pires *et al.* (1999)).

Mesmo nos trabalhos de (Abur & Celik, 1992a), (Abur & Celik, 1992b) e Abur *et al.* (1997), os procedimentos utilizados para a minimização dos efeitos maléficos das medidas classificadas, como maus pontos de alavancamento, podem ser interpretados como uma tentativa de se "estimar" a matriz de ponderação correta.

Face ao exposto, investiga-se, neste capítulo, se é possível, através da utilização da matriz de ponderação correta, detectar e identificar erros grosseiros (EGs) em medidas pontos de alavancamento, através da análise dos resíduos normalizados. Em seguida, serão apresentados os estudos aqui realizados, na tentativa de estimar uma matriz de ponderação adequada.

6.1 Processamento de EGs através da Análise do Resíduo Normalizado, utilizando a Matriz de Ponderação Correta

6.1.1 Obtenção da Matriz de Ponderação Correta

Considerando as informações sobre os erros das medidas, incorporados ao modelo de medição do processo de EESEP, apresentadas na seção 3.10, conhecendo devido a distribuição de fluxo de um sistema de potência e admitindo uma confiabilidade para os medidores disponíveis, é possível obter-se a matriz de ponderação correta. Consideremos, então, o sistema de duas barras, associado às medidas de fluxo de potência ativa, ilustradas na figura 6.1.

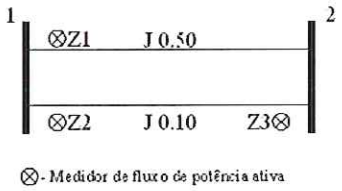


Figura 6.1: Sistema de 2 barras com 3 medidas de fluxo de potência ativa

Observemos, na figura 6.1, que as medidas adjacentes à linha 2 são pontos de alavancamento, pois, a linha 2 apresenta uma impedância bem menor que a da linha 1. Tomando a barra 2 como referência angular ($x_{2v} = 0$), a matriz jacobiana deste sistema é

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Supondo que $x_{1v} = 1.75$, sendo x_{1v} o valor verdadeiro do ângulo de tensão na barra 1, obtemos o vetor de medidas $\tilde{\mathbf{z}}_v = [0.35; 1.75; -1.75]^t$.

Tabela 6.1: Tabela dos desvios padrão das medidas associadas ao sistema da figura 6.1

i	$\tilde{z}_{iv}$	intervalo	expressão	$\sigma_{\tilde{z}_i}$
1	0.35	[0.315 ; 0385]	$z_{1v} + 3\sigma_{\tilde{z}_1} = 0.385$	0.0117
2	1.75	[1.575 ; 1.925]	$z_{2v} + 3\sigma_{\tilde{z}_2} = 1.925$	0.0583
3	-1.75	[-1.925 ; -1.575]	$z_{3v} + 3\sigma_{\tilde{z}_3} = -1.575$	0.0583

Considerando que o ruído na medida z_i, para $i = 1$, 2 e 3, tenha distribuição Normal e que a confiabilidade dos medidores seja de 10%, encontramos os intervalos $\tilde{z}_{iv} \pm 10\%$ assumindo que z_{iv} seja a média de cada uma das distribuições gaussianas. Através destes intervalos, obtivemos os desvios padrão correspondentes às medidas $\tilde{z}_i$. Os valores de $\sigma_{\tilde{z}_i}$ e os procedimentos pelos quais foram encontrados estão na tabela 6.1.

A partir desses resultados, temos a seguinte matriz de ponderação, para as medidas $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ e $\tilde{z}_3$:

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\sigma_{z_1})^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sigma_{z_2})^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\sigma_{z_3})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.305,14 & 0 & 0 \\ 0 & 294,21 & 0 \\ 0 & 0 & 294,21 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Analisaremos, a seguir, os efeitos desta matriz no processo de EESEP.

6.1.2 Teste do Resíduo Normalizado utilizando a Matriz de Ponderação Correta

Para que o efeito da utilização da matriz de ponderação correta, na análise residual, fique bem evidente, realizaremos, primeiramente, a estimação de estado para o sistema apresentado na figura 6.1, considerando que $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, isto é, assumindo que todos os medidores possuam a mesma confiabilidade. Sendo $x_{1v} = 0.175$; $\tilde{\mathbf{z}}_v = [0.35; 1.75; -1.75]^t$ representa o vetor de medidas verdadeiras, associado a x_v.

Tabela 6.2: Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ (sistema da figura 6.1)

i	$\tilde{\mathbf{z}}$	$\widehat{x}$	$\widehat{\tilde{\mathbf{z}}}$	$\tilde{\mathbf{r}}$	$\lvert\tilde{\mathbf{r}}^N\rvert$
1	0.3500	- 0.1893	0.3786	-0.0286	0.0287
2	2.0415	0.0000	1.8929	0.1486	0.2082
3	-1.7500	-	-1.8929	0.1429	0.2001

Vamos considerar a existência de um erro de 5σ, associado à medida ponto de alavancamento $\tilde{z}_{2v}$ ($\sigma = 0.0583$). Então $\tilde{z}_2 = 2.0415$ e $\tilde{\mathbf{z}} = [0.35; 2.0415; -1.75]^t$. Os resultados da estimação de estado, pelo método dos mínimos quadrados ponderados, para $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, estão exibidos na tabela 6.2.

Agora, realizando o processo de estimação de estado, considerando que $\mathbf{W}^{-1}$ é a matriz de ponderação correta, obtvemos os resultados que estão ilustrados na tabela 6.3.

Comparando as tabelas 6.2 e 6.3, verificamos que o EG associado a $\tilde{\mathbf{z}}_2$ foi detectado e identificado somente quando utilizamos a matriz de ponderação correta. Observamos que, utilizando a matriz de ponderação correta, o resíduo da medida com erro grosseiro aumentou na base de 30.62%, em relação ao valor obtido com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, e, ao mesmo tempo, o resíduo das medidas sem erro diminuiram. Faremos agora uma análise algébrica deste teste; antes disto entanto, vale ressaltar que, na prática, a confiabilidade das medidas processadas pelo estimador de estado depende da confiabilidade de todos os equipamentos utilizados no processo de medição, tornando-se muito difícil obter a matriz de ponderação correta.

6.1.3 Análise Algébrica dos Efeitos de utilizar a Matriz de Ponderação Correta

Considerando a formulação apresentada no capítulo 5, do ponto de vista algébrico, a impossibilidade de detectar EG, em medida ponto de alavancamento, deve-se ao

Tabela 6.3: Estimação de estado com a matriz de ponderação correta (sistema da figura 6.1)

i	$\tilde{z}$	$\hat{x}$	$\hat{\tilde{z}}$	$\tilde{r}$	$\lvert\tilde{r}^N\rvert$
1	0.3500	0.1847	0.3695	-0.0195	2.0366
2	2.0415	0.0000	1.8474	0.1941	4.0801
3	-1.7500	-	-1.8474	0.0974	2.0470

fato de o eixo associado às mesmas estar muito próximo à $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$, ou, em outras palavras, pelo fato de o ângulo entre o eixo da medida ponto de alavancamento e a $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$ ser muito pequeno, em relação aos ângulos entre os eixos das demais medidas e a $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$. Em razão disto, de acordo com a proposição 5.2, apresentada no capítulo 5, o erro na medida ponto de alavancamento vai apresentar uma componente detectável , $\tilde{\mathrm{w}}_D$, muito pequena. Como a utilização da matriz de ponderação correta possibilitou-nos a identificação do EG, na medida ponto de alavancamento $\tilde{z}_2$, investigaremos a influência dessa matriz nos ângulos entre os eixos das medidas z_i e a $\mathrm{I}(\mathrm{H})$, igualmente entre os eixos das medidas zi e $\mathrm{I}(\tilde{\mathrm{H}})$, do modelo transformado[1], bem como nas componentes detectáveis e não detectáveis do vetor de erros.

De acordo com o capítulo 5, o ângulo "α_i," entre o eixo da medida z_i e a $\mathrm{I}(\mathrm{H})$, pode ser calculado pela expressão

$$\mathrm{sen}\alpha_i = ||(\mathrm{I}-\mathrm{P})_i||, \tag{6.3}$$

onde $(\mathrm{I}-\mathrm{P})_i$ representa a linha "i" da matriz $(\mathrm{I}-\mathrm{P})$ do modelo de medição transformado.

Lembremo-nos também de que o vetor de erros pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}_D + \mathrm{w}_U = (\mathrm{I}-\mathrm{P})\mathrm{w} + \mathrm{P}\mathrm{w},$$

sendo w_D e w_U as componentes detectável e não detectável, respectivamente.

[1]O modelo transformado foi apresentado na seção 5.4.

A necessidade de realizar a transformação do modelo de medição deve-se ao fato a análise algébrica de medidas com erros não detectáveis, através da matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, proposta no capítulo 5, requerer $\mathbf{W}^{-1}=\mathbf{I}$.

Considerando a matriz de ponderação correta, obtida anteriormente, referente ao sistema da figura 6.1, obtivemos a seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 85.47 & 0 & 0 \\ 0 & 17.15 & 0 \\ 0 & 0 & 17.15 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

A matriz jacobiana ponderada e o vetor de medidas, após a transformação, acham-se a seguir:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} -170.94 \\ 171.50 \\ -171.50 \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

e

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 29.9145 \\ 35.0117 \\ -30.0125 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz $\tilde{\mathbf{H}}$, dada em (6.1), e a matriz $\mathbf{H}$, notamos que nesta última os módulo dos elementos que constituem suas linhas não são discrepantes, como em $\tilde{\mathbf{H}}$. Verifiquemos, então, se os ângulos, entre os eixos de cada medida z_i e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$, apresentam valores discrepantes.

A matriz $(\mathbf{I}-\mathbf{P})$, do modelo transformado é:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0.6681 & -0.3329 & 0.3329 \\ -0.3329 & 0.6659 & 0.3341 \\ 0.3329 & 0.3341 & 0.6659 \end{bmatrix}.$$

Tabela 6.4: Ângulos entre os eixos das medidas z_i e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$ e entre os eixos das medidas $\tilde{z}_i$ e a $\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

i	$\|\|(\mathbf{I}-\mathbf{P})_i\|\|$	α_i (em graus)	$\|\|(\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{P}})_i\|\|$	$\tilde{\alpha}_i$ (em graus)
1	0.8173	54.82°	0.9901	81.95°
2	0.8160	54.69°	0.7140	45.56°
3	0.8160	54.69°	0.7140	45.56°

Sabendo que a matriz de sensibilidade do modelo de medição, para $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ é:

$$(\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{P}}) = \begin{bmatrix} 0.9804 & -0.0980 & 0.0980 \\ -0.0980 & 0.5098 & 0.4902 \\ 0.0980 & 0.4902 & 0.5098 \end{bmatrix},$$

exibimos na tabela 6.4 os ângulos α_i, entre os eixos das medidas z_i e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$, e os ângulos $\tilde{\alpha}_i$, entre os eixos das medidas $\tilde{z}_i$ e a $\mathbf{I}(\tilde{\mathbf{H}})$.

Para possibilitar a análise do efeito da utilização da matriz de ponderação correta, nas componentes do vetor de erro, que estão na tabela 6.5, apresentamos essas componentes, para $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ e para $\mathbf{W}^{-1}$ equivalente à matriz de ponderação correta. Importa lembrar que, para possibilitar uma comparação adequada entre os valores obtidos para cada uma dessas matrizes de ponderação, os valores relativos à utilização da matriz de ponderação correta foram obtidos através do modelo transformado; depois, através de uma transformação inversa $\left(w_{ii} = \frac{\tilde{w}_{ii}}{\mathbf{W}_{ii}^{-\frac{1}{2}}}\right)$, foram colocados na mesma base que os obtidos para $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$.

Observando a tabela 6.4, verificamos que os ângulos α_i, para i=1, 2 e 3, são aproximadamente iguais, ou seja, os eixos das medidas z_i estão aproximadamente à mesma distância da $\mathbf{I}(\mathbf{H})$. Em termos da proposição 5.2, isto significa que embora o erro da medida ponto de alavancamento continue o mesmo, sua componente detectável aumenta, possibilitando a identificação através do resíduo normalizado. Podemos comprovar isto analisando o módulo do vetor resíduo, que aumentou em

Tabela 6.5: Análise das componentes do vetor de erros

	$\|\|\mathbf{r}\|\|$	$\mathbf{w}$	$\|\|\mathbf{w}\|\|$	$\mathbf{w}_D$	$\|\|\mathbf{w}_D\|\|$	$\mathbf{w}_U$	$\|\|\mathbf{w}_U\|\|$
	0.2081	0	0.2915	0.0286	0.2081	-0.0286	0.2041
$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$		-0.2915		-0.1486		-0.1429	
		0		-0.1429		0.1429	
Modelo transformado	0.2180	0	0.2915	0.0195	0.2180	-0.0195	0.1391
com $\mathbf{W}^{-1}$		-0.2915		-0.1941		-0.0974	
correta		0		-0.0974		0.0974	

função da ponderação correta. Na demonstração da proposição 5.2, verifica-se que o módulo do vetor resíduo depende, exclusivamente, da parcela detectável do erro, isto é:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{z} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{w}_D.$$

Pela tabela 6.5 é possível verificar também que a componente detectável do erro aumenta, e, conseqëntemente, a não detectável diminui.

Para minimizar os efeitos maléficos das medidas classificadas como maus pontos de alavancamento, nos trabalhos de Abur & Celik (1992a) e Abur & Celik (1992b), propõe-se uma mudança de coordenadas no espaço de fatores, utilizando, respectivamente, matrizes de rotação e escalonamento. Verificamos que estas transformações, quando aplicadas à matriz jacobiana de um SEP com pontos de alavancamento, geram uma matriz jacobiana ponderada, que não apresenta discrepância de valores entre os elementos de suas linhas. Isto significa, do ponto de vista algébrico, que já não serão discrepantes os ângulos entre os eixos destas medidas até a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$, independentemente da existência ou não de medidas caracterizadas como pontos de alavancamento.

Entretanto, importa lembrar que a metodologia proposta em Abur & Celik

(1992a) requer procedimentos heurísticos, para determinação dos ângulos de rotação. Já a metodologia proposta em Abur & Celik (1992b) apresenta problemas na determinação de uma matriz de ponderação adequada, quando existem medidas de injeção. Para contornar essa limitação, em Abur *et al.* (1997), utilizou-se de uma técnica destinada à ortogonalização de matrizes esparsas.

Ante o exposto, nas próximas seções, analisaremos a possibilidade de utilizar, como matriz de ponderação, as matrizes de rotação (**Rot**) e as de escalonamento (**Esc**), sendo que, a matriz **Rot** procurada é aquela que deixará bem próximos os ângulos entre os eixos de cada medida e a I(H); já a matriz **Esc** será aquela que propiciará uma matriz jacobiana ponderada que não apresenta discrepância de valores entre os elementos de suas linhas.

6.1.4 Utilizando como Matriz de Ponderação a Matriz de Rotação

Como dissemos anteriormente, para determinar a matriz de rotação é necessário encontrar o ângulo θ_i, que deixará os eixos de cada medida, aproximadamente, à mesma distância da I(H). Para simplificar a obtenção da matriz de rotação, nesta seção vamos considerar o sistema de duas barras, associado às medidas fluxo de potência ativa, ilustradas na figura 6.2.

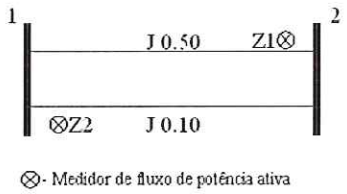


Figura 6.2: Sistema de 2 barras com 2 medidas de fluxo de potência ativa

Tomando a barra 2 como referência angular ($x_{2v} = 0$), a matriz Jacobiana desse

Tabela 6.6: Estimação de estado com a matriz de ponderação correta (sistema da figura 6.2)

i	$\tilde{z}$	$\hat{x}$	$\hat{\tilde{z}}$	$\tilde{r}$	$\lvert\tilde{r}^N\rvert$	$\tilde{\alpha}_i$
1	-0.3500	0.1896	-0.3792	0.0292	3.5295	45.09°
2	2.0415	0.0000	1.8962	0.1453	3.5295	44.90°

Tabela 6.7: Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$ (sistema da figura 6.2)

i	$\tilde{z}$	$\hat{x}$	$\hat{\tilde{z}}$	$\tilde{r}$	$\lvert\tilde{r}^N\rvert$	$\tilde{\alpha}_i$
1	-0.3500	0.2030	-0.4061	0.0561	0.0572	78.67°
2	2.0415	0.0000	2.0303	0.0112	0.0572	11.30°

sistema é:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Supondo que $x_{1v} = 1.75$, obtivemos o vetor de medidas verdadeiro $\tilde{\mathbf{z}}_\mathbf{v} = [-0.35; 1.75]^t$. Seguindo os mesmos passos da seção 6.1.1, considerando uma confiabilidade de 10% para cada um dos medidores, obtêm-se $\sigma_1 = 0.0117$ e $\sigma_2 = 0.0583$. Temos, então, a seguinte matriz de ponderação correta:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 7305.14 & 0 \\ 0 & 294.21 \end{bmatrix}.$$

Associando um erro de $5\sigma_2$ à medida z_2, processamos o estimador WLS associado a análise de resíduo normalizado, utilizando a matriz de ponderação correta e $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$. Os valores obtidos estão apresentados, respectivamente, nas tabelas 6.6 e 6.7.

Analisando essas tabelas, verificamos que foi possível detectar o EG em $\tilde{z}_2$ somente com a utilização da matriz de ponderação correta. O fato de, em princípio, não ser possível identificar a medida com EG deve-se à baixa redundância das medidas, pois, as duas medidas do sistema constituem um conjunto crítico de medidas.

Verifica-se também que, com a matriz de ponderação correta, ficaram bem próximos os ângulos entre as medidas e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$.

Para determinarmos a matriz de rotação adequada, para o sistema apresentado na figura 6.2, em razão de termos apenas duas medidas redundantes, podemos considerar $\theta = 45° - \alpha_i$, onde α_i é o ângulo associado à medida ponto de alavancamento, calculado pela expressão (6.3) e apresentado na tabela 6.7, para $i = 2$. Assim, como $\alpha_2 = 11.30°$ e $\theta_2 = 33.70°$, obtemos a seguinte matriz de rotação:

$$\mathbf{Rot} = \begin{bmatrix} 0.8354 & -0.5497 \\ 0.5497 & 0.8354 \end{bmatrix}.$$

Considerando que $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Rot}$ é a matriz de transformação do modelo de medição, as matrizes jacobiana ponderada e sensibilidade transformada, em considerando a existência de um erro de 5σ, associado à medida $\tilde{z}_2$, bem como o vetor de medidas transformado, são respectivamente:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -7.1678 \\ 7.2546 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0.506 & 0.500 \\ 0.500 & 0.4940 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

, e

$$\mathbf{z} = \mathbf{Rot}.\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0.8354 & -0.5497 \\ 0.5497 & 0.8354 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -0.3500 \\ 2.0415 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4146 \\ -1.5131 \end{bmatrix}.$$

Observemos que, com a transformação do modelo de medição, os valores, em módulo, dos elementos das linhas de $\mathbf{H}$, não são tão discrepantes como os elementos das linhas da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$, em (6.6).

Os resultados da estimação de estado do modelo de medição transformado estão exibidos na tabela 6.8.

Analisando as tabelas 6.6 e 6.8, verifica-se que a utilização da matriz $\mathbf{Rot}$, bem como da matriz de ponderação correta, faz com que os ângulos entre os eixos das

Tabela 6.8: Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Rot}$ (sistema da figura 6.2

i	$\widehat{x}$	$\widehat{z}$	r	$\lvert r^N \rvert$	α_i
1	0.2030	-1.4553	0.0407	0.0572	45.34°
2	-	1.4729	0.0401	0.0572	44.66°

Tabela 6.9: Análise das componentes do vetor de erros

Matrizes	w	$\lVert w \rVert$	w_D	$\lVert w_D \rVert$	w_U	$\lVert w_U \rVert$
Ponderação	0	0.2915	-0.0561	0.0572	0.0561	0.2858
$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$	-0.2915		-0.0112		-0.2803	
Transformação do modelo	0.1602	0.2915	-0.0407	0.0572	0.2009	0.2858
$\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Rot}$	-0.2435		-0.0402		-0.2033	
Ponderação	0	0.2915	-0.0292	0.1482	0.0292	0.1491
Correta	-0.2915		-0.1453		-0.1462	

medidas e a I(H) fiquem bem próximos. Entretanto, a utilização da matriz **Rot** não possibilitou a detecção do EG. Para entender a razão disto, basta analisar a tabela 6.9, que apresenta as componentes detectáveis e não detectáveis do vetor de erro, para $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Rot}$ e com a utilizaçõ da matriz de ponderação correta.

Verificamos, através da tabela 6.9, que a utilização da matriz de rotação não promove o aumenta da componente detectável do vetor de erro. Se utilizarmos a matriz de ponderação correta, entanto, aquela componente é aumentada.

Podemos concluir então que, embora a matriz **Rot** coloque os eixos das medidas à mesma distância da I(H), provoca apenas uma rotação do vetor de erro, mas não um aumento da componente detectável do mesmo.

6.1.5 Utilizando, como Matriz de Ponderação, a Matriz de Escalonamento

Nosso objetivo, agora, é encontrar a matriz de escalonamento **Esc** que, quando aplicada à matriz $\tilde{\mathbf{H}}$, propiciará uma nova matriz jacobiana $\mathbf{H}$, que não apresenta discrepância de valores entre os elementos de suas linhas.

Consideremos, novamente, o sistema elétrico de duas barras, ilustrado na figura 6.2. A matriz de escalonamento desse sistema é

$$\mathbf{Esc} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando que $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Esc}$ é a matriz de transformação do modelo de medição, teremos:

a matriz jacobiana ponderada

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

a matriz de sensibilidade transformada

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

e vetor de medidas transformado

$$\mathbf{z} = \mathbf{Esc}.\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -0.3500 \\ 2.0415 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7500 \\ 2.0415 \end{bmatrix}.$$

Observemos que, com a transformação do modelo de medição, os valores em módulo dos elementos que constituem as linhas de $\mathbf{H}$ não são discrepantes.

Os resultados da estimação de estado do modelo de medição transformado, a partir de $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{Esc}$, estão exibidos na tabela 6.10.

Analisando a tabela 6.10, verifica-se que, embora os ângulos entre os eixos das medidas e a $\mathbf{I}(\mathbf{H})$ sejam os mesmos, não foi possível detectar o EG. Observando a tabela 6.11, podemos verificar que isso acontece porque o escalonamento continua

Tabela 6.10: Estimação de estado com $\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{Esc}$

i	z	$\widehat{x}$	$\widehat{\mathbf{z}}$	r	$\lvert\mathbf{r}^N\rvert$	α_i
1	-1.7500	0.1896	-1.8958	0.1458	0.2061	45°
2	2.0415	0.0000	1.8958	0.1458	0.2061	45°

Tabela 6.11: Análise das componentes do vetor de erros

Matriz	w	$\lVert\mathbf{w}\rVert$	$\mathbf{w}_D$	$\lVert\mathbf{w}_D\rVert$	$\mathbf{w}_U$	$\lVert\mathbf{w}_U\rVert$
Escalonamento	0		-0.1457		0.1457	
$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{Esc}$	-0.2915	0.2915	-0.1457	0.2061	-0.1457	0.2061

mascarando o erro na medida z_2, pois, embora a componente detectável do erro tenha aumentado, em relação à estimação com $\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, conforme a tabela 6.9 a componente detectável também aumentou, apresentando o mesmo módulo que a componente não detectável. Podemos dizer então que o escalonamento espalha o erro, entre as suas componentes detectável e não detectável do erro, mascarando, assim, o seu efeito.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas Futuras

Conforme mostrado nos capítulos 1 e 3, a tentativa de filtrar medidas portadoras de erros grosseiros (EGs), durante o processo de estimação de estado em sistemas elétricos de potência (EESEP), não é recente, mas continua sendo de interesse de diversos pesquisadores. Isto devido a existência de medidas redundantes, em que a deteção de EGs não se permite realizar, através da análise do resíduo normalizado. Vale a lembrança de que, dentre os diversos métodos desenvolvidos, para detecção e identificação de medidas com EGs, os mais utilizados são aqueles baseados na análise estatística dos resíduos das medidas.

Face ao exposto, propomos este trabalho, cuja motivação principal foi o trabalho desenvolvido por London Jr. *et al.* (2004), onde se demonstrou que a existência de medidas pontos de alavancamento se refere a um problema estrutural do processo de estimação de estado.

Como ilustração, recordaremos, a seguir, os objetivos apresentados no capítulo 1:

1. Estudar e apresentar a formulação dos estimadores aplicados a SEP, em especial o WLS, tendo em vista evidenciar as limitações dos mesmos para o tratamento de EGs;

2. Estudar e apresentar as metodologias desenvolvidas para identificaçãoo de

medidas pontos de alavancamento;

3. Estudar a formulação do processo de estimação de estado, como um problema de álgebra linear (London Jr. *et al.*, 2004);

4. Tomando como base o trabalho proposto por London Jr. *et al.* (2004), desenvolver uma metodologia que nos mostre o porquê da impossibilidade de detectar, através da análise dos resíduos, EGs em determinadas medidas redundantes;

5. Desenvolver um método para identificação de medidas pontos de alavancamento, bem como para a redução ao mínimo dos efeitos maléficos dessas medidas, ao processo de EESEP, quando as mesmas são portadoras de EGs.

As formulações dos estimadores aplicados em SEP, bem como as metodologias desenvolvidas para identificação de pontos de alavancamento, foram estudadas e apresentadas, detalhadamente, nos capítulos 2, 3 e 4.

A formulação do processo de estimação de estado, como um problema de álgebra linear, proposta por London Jr. *et al.* (2004), foi estudada e apresentada no capítulo 5.

Também no capítulo 5, se demonstrou a razão da impossibilidadede de detectar EGs, em determinadas medidas redundantes.

Em relação ao método para identificação de pontos de alavancamento, objetivo 5, o método proposto e apresentado no capítulo 5 ainda possui limitações, pois, o mesmo falha na identificação de múltiplos pontos de alavancamento, quando estes ocorrem no mesmo conjunto S_i^{γ}, conforme destacado na observação 5.4, apresentada no capítulo 5. Mas acreditamos que tal limitação pode ser superada, através de um processo iterativo de identificação de medidas pontos de alavancamento, a que se procede da seguinte forma, após a identificação de uma medida ponto de alavancamento, considera-se que a mesma jńão exista procede-se então, em sequência, ao

mesmo processo, isto é a análise é novamente realizada até não serem mais identificadas medidas pontos de alavancamento.

A tentativa de minimizar os efeitos maléficos das medidas classificadas como maus pontos de alavancamento, no processo de EESEP, motivou-nos a estudar: (i) a possibilidade de aplicar outras técnicas estatísticas para o processamento de EGs (seção 3.9); (ii) aplicar técnicas para obtenção de uma matriz de ponderação adequada (capítulo 6). Assim o fizemos em razão de termos constatado que a utilização da matriz de ponderação correta possibilita a detecção e identificação de EGs, através da análise dos resíduos normalizados, mesmo quando estes ocorrem em medidas pontos de alavancamento.

7.0.6 Principais Contribuições do Trabalho

Relacionamos, a seguir, as principais contribuições deste trabalho, que nos fazem acreditar possa o mesmo contribuir, com eficácia, para a área que se refere:

1. Em razão de apresentar, de uma forma clara, a formulação dos estimadores aplicados a SEP, em especial o WLS, evidenciando as limitações dos mesmos para o tratamento de EGs, bem como as metodologias para identificação de medidas pontos de alavancamento, este trabalho vai certamente contribuir para o desenvolvimento de outras pesquisas na área em pauta;

2. Apresenta uma nova perspectiva para análise dos problemas relacionados à detecção e identificação de EGs, através da análise dos resíduos das medidas. Acreditamos que esta nova perspectiva possibilitará, futuramente, o desenvolvimento de novas metodologias para processamento de EGs, ou, até mesmo, para EESEP;

3. Expõe uma nova metodologia para identificação de medidas pontos de alavancamento.

Observação 7.1: Importa destacar que este trabalho de mestrado já deu origem a uma publicação em congresso internacional [London Jr. et al (2006)].

7.1 Sugestões para Novas Pesquisas

Tendo em vista os estudos realizados neste trabalho, bem como os resultados obtidos, afigura-se-nos cabível a realização de estudos adicionais complementares, referentes aos seguintes tópicos:

1. Verificação da possibilidade de contornar a limitação do método proposto para identificação de medidas pontos de alavancamento, através de um processo iterativo;

2. Estudo da possibilidade de obter-se uma matriz de ponderação adequada, analisando os efeitos que a mesma deve proporcionar nas componentes detectáveis e não detectáveis do vetor de erros das medidas.

Referências Bibliográficas

Abur, A. & Celik, M. (1992a). A robust WLAV state estimator transformations . *IEEE Transaction on Power Systems*, **7**(1), 106–113.

Abur, A. & Celik, M. (1992b). Use of scaling in WLAV estimator power system states . *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **7**(1), 684–692.

Abur, A. & Exposito, A. (1997). Detecting multiple solutions in state estimation in the presence of current magnitude measurements . *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **12**(1), 370–375.

Abur, A. & Magnago, H. (1999). Optimal meter placement for maintaining observability during single branch outages . *IEEE Transactions on Power Systems*, **14**(4), 1273–1278.

Abur, A., Magnano, F. & Alvarado, F. (1997). Elimination of leverage measurements via matrix stretching. *Eletrical Power & Energy System*, **19**(8), 557–562.

Arthanari, T. & Dodge, Y. (1993). *Mathematical Programming in Statistcs*. Wiley Classics Library, Canadá, fourth edition.

Ayres, M. & Haley, P. (1986). Bad data groups in power system state estimation . *IEEE Transactions on Power Systems*, **1**(3), 1–9.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. & Sherali, H. (1990). *Linear programming and network flows* . John Wiley, N. J., second edition.

Bretas, N. (1992). An iterative dynamic state estimation and bad data processing. *Internacional Journal of Electrical Power Energy Systems*, **11**(1), 70–74.

Bretas, N. G. (1996). Network observality: Theory and algorithms based on triangular factorization and path graph concepts. *IEE Proceedings, Generation, Transmission and Distribution*, **143**(1), 123–128.

Celik, M. & Abur, A. (1992). A robust WLAV state estimator using transrmations. *IEEE Transactions on Power Systems*, **7**(1), 106–113.

Celik, M. & Edwin Liu, W. (1995). An incremental measurement placement algorithm for state estimation. *IEEE Transaction on Power Systems*, **10**(3), 1001–1009.

Clements, K., Krumpholz, G. & Davis, P. (1981). Power system state estimation residual analysis: an algorithm using network topology. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **100**(4), 1779–1787.

Coutto Filho, M., Leite da Silva, A., Cantera, J. & Silva, R. (1989). Information debugging for real-time power systems monitoring. *IEE Proc. C*, **136**(1), 145–152.

Coutto Filho, M., Leite da Silva, A. & Falcão, D. (1990). Bibliography on power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems*, **5**(3), 950–961.

Debs, A. S. & Larson, R. (1970). A dynamic estimator for tracking the state of a power system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **89**(7), 1670–1678.

Falcão, D. & Arias, M. (1994). State estimation and observability analysis dased on echelon forms of the linearized measurement models. *IEEE Transactions on Power Systems*, **9**(2), 979–987.

Falcão, D. & Assis, S. (1988). Linear-programming state estimation-Error analysis and gross error identification. *IEEE Transactions on Power Systems*, **3**(1), 809–815.

Falcão, D., Cookie, P. & Brameller, A. (1982). Power system tracking state estimation and bad data processing. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **101**(2), 325–333.

Franklin, A. (1988). *Theory and Apllication of the Linear Model*. Wiley, N.J, second edition.

Garcia, A. (1977). *Estimação Estática*. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Garcia, A., Monticelli, A. & Abreu, P. (1979). Fast decoupled state estimation and bad data processing. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **98**(5), 1645–1652.

Gouvêa, J. & Simões Costa, A. (1998). Um método ortogonal com restrições de igualdade e desigualdade para a estimação de estado em sistemas de potência. *Proceedings of XII Brazilian Automatic Control Conference*, **6**(11), 2137–2142.

Handschin, E., Schweppe, F., Kohlas, J. & Fietchter, A. (1975). Bad data analysis for power systems state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **94**(2), 329–337.

Horisberger, H., Richard, J. & Rossier, C. (1976). A fast decoupled static state estimator for electric power systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **95**(1), 208–215.

Irving, M., Owen, R. & Sterling, M. (1978). Power system state estimation using linear programming. *Proceedings of IEE*, **125**(1), 879–885.

Jabr, R. & Pal, B. (2003). Iteratively re-weighted least absolute value method for stste estimation. *IEE Proceedings Genr. Transm. Distrib*, **150**(4), 385–391.

Johnson, R. A. & Wichern, D. (1988). *Applied multivariate statistical analysis* . Englewood Cliffs, N. J., first edition.

Kogling, H., Neisius, T., Beibler, B. & Schmitt, K. (1990). Bad data Detection and Identification . *Electrical Power and Energy Systems*, **12**(2), 94–103.

Korres, G. & Contaxis, G. (1991). . *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **6**(3), 999–1005.

Korres, G. & Contaxis, G. (1994). A tool for the evaluation and selection of state estimatior measurements shemes . *IEEE Transactions on Power Systems*, **9**(2), 1110–1116.

Kotiuga, W. & Vidyasagar, M. (1982). Bad data rejection properties of weighted least absolute value techniques applied to static state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **101**(4), 844–851.

Krumpholz, G., Clements, K. & Davis, P. (1980). Power system observability: a pratical algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **99**(4), 1534–1542.

Leite da Silvia, A., Coutto Filho, M. & Cantera, J. (1987). An efficient dynamic state estimation algorithm incluing bad data processing. *IEEE Transactions on Power Systems*, **2**(4), 1050–1058.

London, J., Bretas, A. & Bretas, N. (2004). Algorithm solve qualitative problems in power system state estimation . *Internacional Journal of Electrical Power & Energy Systems*, **26**(1), 583–592.

London Jr, J. (2005). A topological approach to the identification of critical measurements in power system state estimation . *IEEE Transactions on Circuits and Systems - Part I*, **1**(1), 139–147.

London Jr., J., Alberto, L., Delbem, A. & Brets, N. (2004). Undetectable errors in power system measurement . *Anais do IX Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica (CD - artigo:SP-014)*, **1**(1), 1–11.

London Jr., J. B. A. (2000). *Identificação do nível de redundância das medidas de um sistema de potência, para efeito da estimação de seus estados.* Master's thesis, Universidade de São Paulo.

Masiello, R. & Schweppe, F. (1971). A tracking static estimator. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **90**(3), 1025–1033.

Mili, L., Van Cutsem, T. & Ribbens-Pavella, M. (1984). Hypothesis testing identification: A new method for bad data analysis in power system state estimation . *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **103**(11), 3239–3252.

Mili, L., Van Cutsem, T. & M., R.-P. (1985). Bad data identification methods in power system state estimation-A comparative study. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **104**(11), 3037–3049.

Mili, L., Phaniraj, V. & Rousseeuw, P. (1991). Least Median of Squares Estimation in Power Systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, **6**(2), 511–523.

Mili, L., Cheniase, M., Vichare, N. & P.J., R. (1996). Robust state estimation based on projection statics. *IEEE Transactions on Power Systems*, **11**(2), 1118–1126.

Montecelli, A. & Wu, F. (1985a). Network observability: Theory. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **104**(5), 1042–1048.

Montecelli, A. & Wu, F. (1985b). Network observability: Identification of the observable islands and measurement placement. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **104**(5), 1035–1041.

Monticelli, A. (1999). Testing equality constraint hypotheses in weighed least squares state estimator. *IEEE Transactions on Power Systems*, **7**(1), 106–113.

Monticelli, A. (2000). Electric power system state estimation. *Proceedings of the IEEE*, **88**(2), 262–282.

Monticelli, A. & Wu, F. (1986). Observability analysis for orthogonal transformation basead state estimation . *IEEE Transactions on Power Systems*, **1**(1), 201–208.

Monticelli, A., Garcia, A. & Slutsker, I. (1990). Fast decoupled state estimators. *IEEE Transaction on Power Systems*, **5**(2), 556–564.

Monticelli, A. J. (1983). *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil, first edition.

Narula, S. & Stangenhaus, G. (1988). *Análise de Regressão L_1*. Associação Brasileira de Estatística, Brasil, second edition.

Neter, J. & Wasserman, W. (1983). *Applied linear regression models*. Irvin, N.J., second edition.

Nucera, R. & Gilles, M. (1991). Observability analysis: A new topological algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, **6**(2), 466–475.

Paula, G. A. (2004). *Modelos de regressão com apoio computacional*. IME–USP, Brasil.

Peter, J. & Rousseeuw, P. (1984). Least Median of Squares Regression. *Journal of the American Statistical Association*, **79**(388), 871–880.

Pires, R., Simões Costa, A. & Mili, A. (1999). Iteratively reweighted least-squares state estimation trough givens rotations. *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, **101**(3), 617–626.

Quintana, V., Simões Costa, A. & Mandel, A. (1982). Power system topological observability using a direct graph-theoretic approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **101**(3), 617–626.

Rousseeuw, P. & Croux, C. (1993). Alternatives to the Median Absolute Deviation. *Journal of the American Statistical Association*, **88**(424), 1273–1283.

Rousseeuw, P. & Leroy, A. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. Jonh Wiley & Sons,Inc, in Canadá.

Rousseeuw, P. & Zomeren, V. (1990). Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points . *Journal of the American Statistical Association*, **85**(411), 633–639.

Roy, L. & Mohamed, T. (1997). Fast super decoupled state estimators for power systems. *IEEE Transaction on Power Systems*, **12**(4), 1597–1603.

Schweppe, F. (1970). Power system static-state estimation, part III:Implementation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **89**(1), 130–135.

Schweppe, F. & Douglas, B. (1970). Power system static-state estimation part II Aproximate model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **80**(1), 125–130.

Schweppe, F. & Wildes, J. (1970). Power system static-state estimation part I Exact model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **89**(1), 120–125.

Searle, S. (1982). *Matrix Algebra Useful For Statistics* . John Wiley, Canadá, third edition.

Souza, J., Leite da Silvia, A. & Alves da Silva, A. (1996). Data debugging for real-time power system monitoring basead on pattern analysis. *IEEE Transaction on Power Systems*, **11**(3), 1592–1599.

Wu, F. (1990). Power System State Estimation A Survey . *Electrical Power and Energy Systems*, **12**(2), 80–87.

Zarco, P. & Expósito, A. G. (2000). Power system parameter estimation . *IEEE Transaction on Power Systems*, **15**(1), 216–222.