

SISTEMA COMPUTACIONAL, INTERATIVO, PARA ESTUDOS DE PROPAGAÇÃO DE FRATURAS EM MATERIAIS ROCHOSOS

CLOVIS GONZATTI

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para a obtenção
do Título de Mestre em Geotecnia.

DEDALUS - Acervo - EESC



31100017946

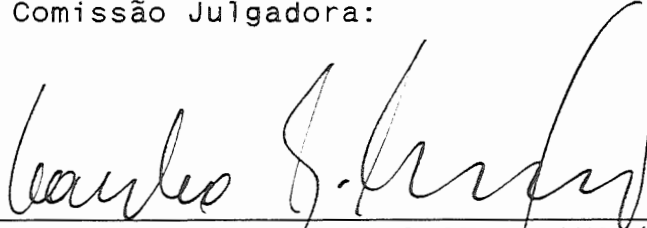
ORIENTADOR: Prof. Dr. Tarcísio Barreto Celestino

São Carlos
1994



FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida e aprovada em 19/12/1994
pela Comissão Julgadora:



Prof.Dr. TARCISIO BARRETO CELESTINO (Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)



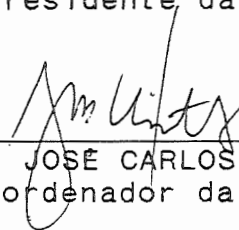
Prof.Dr. SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)



Prof.Dr. ANTONIO AIRTON BORTOLUCCI
(Escola de Engenharia de São Carlos - USP)



Prof.Dr. JURANDYR POVINELLI
Presidente da CPG



Prof.Dr. JOSÉ CARLOS A. CINTRA
Coordenador da Área

| SUMÁRIO | pag. |
|---|------|
| LISTA DE FIGURAS | iv |
| LISTA DE TABELAS | vi |
| LISTA DE SÍMBOLOS | vii |
| RESUMO | viii |
| ABSTRACT | ix |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 5 |
| 2.1. A Mecânica da Fratura na Engenharia | 5 |
| 2.2. Evolução e Conceitos Básicos da Mecânica da Fratura | 6 |
| 2.3. Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) | 8 |
| 2.4. Teorias de Iniciação da Fratura no Modo Misto | 9 |
| 2.5. Tipos de Elementos Especiais para o Modelamento da Propagação de Fratura | 10 |
| 2.6. Geração Automática de Malhas de Elementos Finitos em Duas Dimensões | 13 |
| 2.6.1. Introdução | 13 |
| 2.6.2. Métodos para a Geração dos Pontos Nodais e Elementos | 15 |
| 2.6.2.1. Grupo 1 | 16 |
| 2.6.2.1.1. Esquema de Geração de Laplace-Isoparamétrico | 16 |
| 2.6.2.2. Grupo 2 | 17 |
| 2.6.2.2.1. Método de Projeção Normal | 17 |

| | |
|--|----|
| 2.6.2.2.2. Métodos de Conexão Nodal | 19 |
| 2.6.2.3. Grupo 3 | 24 |
| 2.6.2.3.1. Método de Mapeamento Transfinito | 24 |
| 2.6.2.3.2. Métodos de Mapeamento com Sistema de Coordenadas Isoparamétricas e de Coordenadas de Área | 25 |
| 2.6.2.4. Grupo 4 | 27 |
| 2.6.2.5. Método de Partição de Quadrado | 27 |
| 2.6.3. Método Específico para o Estudo de Propagação de Fratura | 31 |
| 2.7. Técnicas de Redução da Banda da Matriz de Rigidez Global | 31 |
| | |
| 3. DESENVOLVIMENTO DO GERADOR DE MALHA INTERATIVO | 34 |
| | |
| 3.1. Introdução | 34 |
| 3.2. Seleção da linguagem de programação | 35 |
| 3.3. Entrada de Dados | 37 |
| 3.3.1. Informações Gerais | 37 |
| 3.3.2. Vinculação dos Pontos Nodais e Cargas Concentradas | 37 |
| 3.3.3. Informações sobre as Fraturas | 38 |
| 3.3.3.1. Informações Adicionais sobre a Propagação da Fratura | 38 |
| 3.3.4. Informações sobre os Contornos e Pontos Fixos no Interior do Domínio | 38 |
| 3.4. Geração dos Pontos Nodais e Elementos | 39 |
| 3.4.1. Geração dos Elementos na Ponta da Fratura | 40 |
| 3.4.2. Geração dos Elementos Junta ao Longo da Fratura | 41 |
| 3.4.3. Geração dos Elementos no Interior do Domínio | 41 |
| 3.4.3.1. Geração dos Pontos Nodais | 44 |
| 3.4.3.2. Formação dos Elementos | 45 |
| 3.5. Modo de Operação | 48 |
| 3.5.1. Opção de Inserção de Pontos Nodais | 50 |

| | |
|---|------------|
| 3.5.2. Opção para Apagar Elemento | 51 |
| 3.6. Renumeração da Malha de Elementos | 55 |
| 3.7. Características Técnicas do Programa Gerador de Malhas | 57 |
| 4. AVANÇOS IMPLEMENTADOS NO PROGRAMA "FRAT" | 59 |
| 4.1. Introdução | 59 |
| 4.2. Formulação do Elemento Junta | 60 |
| 4.3. Formulação dos Elementos Triangulares de 3 e 4 Pontos Nodais | 61 |
| 4.4. Algoritmo para o Tratamento das Fraturas | 63 |
| 4.5. Informações Complementares sobre o Programa "FRAT" | 63 |
| 5. ROTEIRO, COM EXEMPLO PRÁTICO, PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROPAGAÇÃO DE FRATURA UTILIZANDO O SISTEMA INTERATIVO | 64 |
| 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS | 77 |
| ANEXO A - FORMATO DE ENTRADA DE DADOS PARA O GERADOR INTERATIVO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDOS DE PROPAGAÇÃO DE FRATURAS (Versão 1.0) | 81 |
| ANEXO B - FORMATO DE ENTRADA DE DADOS PARA O PROGRAMA "FRAT" (Versão 2.0) | 92 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 103 |
| Referências Citadas no Texto | 103 |
| Referências Auxiliares | 108 |

| LISTA DE FIGURAS | pag. |
|--|-------------|
| FIGURA 1 - Modos de iniciação da fratura. | 8 |
| FIGURA 2 - Modelo de elemento junta proposto por GOODMAN (1976). | 12 |
| FIGURA 3 - Pontos nodais vizinhos do ponto i. a) porção da malha não retangular; b) detalhe do elemento (HERRMANN (1976)). | 17 |
| FIGURA 4 - Exemplo do efeito do espaçamento dos pontos nodais no contorno. a) malha de Laplace, $w = 0$; b) malha intermediária, $w = 0,95$; c) malha com geração pelo método isoparamétrico, $w = 1$ (HERRMANN (1976)). | 18 |
| FIGURA 5 - Pontos da linha de trabalho (P_j) são projetados ao longo de vetores normais à linha de pontos nodais corrente (R_i). | 19 |
| FIGURA 6 - Testes de tolerância. a) teste de ângulo; b) teste de superposição de linha em avanço. | 20 |
| FIGURA 7 - Domínio a ser discretizado. a) delimitação das regiões com densidade de pontos nodais constante; b) geração dos pontos nodais no interior dos quadrados com lado equivalente à densidade (CAVENDISH (1974)). | 21 |
| FIGURA 8 - Orientação dos segmentos dos contornos e definição das linhas imaginárias para a projeção dos pontos nodais. | 23 |
| FIGURA 9 - Seleção do terceiro vértice do triângulo (LO (1985)). | 23 |
| FIGURA 10 - Esquema básico de mapeamento pelo sistema de coordenadas isoparamétricas. a) definição da região pelo sistema de coordenadas locais; b) continuidade das regiões adjacentes (ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971)). | 26 |
| FIGURA 11 - Processo de formação dos elementos triangulares. a) definição do contorno do domínio; b), c), d) e e) formação dos elementos e atualização do contorno. | 28 |

- FIGURA 12 - Exemplos de formas quadradas cortadas permitidas no método de 30
partição de quadrados modificado (YERRY e SHEPHARD
(1983)).
- FIGURA 13 - Transição entre quadrados de diferentes dimensões (YERRY e 30
SHEPHARD (1983)).
- FIGURA 14 - Esquema de formação dos elementos "crack tip" na ponta da 42
fratura.
- FIGURA 15 - Configuração do elemento junta. 42
- FIGURA 16 - "Vazio" formado pelos contornos das rosetas e segmentos ao 43
longo da fratura.
- FIGURA 17 - Situação de inconsistência no processo de seleção do terceiro 47
vértice de elemento triangular.
- FIGURA 18 - Situação de possível superposição de elementos. 48
- FIGURA 19 - Exemplo de utilização da rotina de inserção de pontos nodais, após 52
a geração dos pontos automaticamente. a) densidade original; b)
densidade após a inserção de novos pontos nodais.
- FIGURA 20 - Divisão de elementos através da inserção de ponto nodal. 53
- FIGURA 21 - Exemplo da utilização da rotina de edição para apagar elementos. 54
- FIGURA 22 - Tempo aproximado para a geração de diferentes malhas de 56
elementos em máquinas modelo 386 DX, clock de 33MHz.
- FIGURA 23 - Esquema para a numeração de malhas irregulares. 58
- FIGURA 24 - Modelos de elementos finitos: a) triangular de 3 pontos nodais; b) 62
triangular híbrido de 4 pontos nodais.
- FIGURA 25 - Modelo utilizado para a simulação da propagação da fratura; a) 66
corpo-de-prova de ensaio; b) modelo analisado com simetria na
metade inferior.
- FIGURA 26 - Configuração da malha no primeiro estágio de carregamento. 67
- FIGURA 27 - Configuração da malha no segundo estágio de carregamento. 68

| | |
|--|----|
| FIGURA 28 - Configuração da malha no terceiro estágio de carregamento. | 68 |
| FIGURA 29 - Configuração da malha no quarto estágio de carregamento. | 69 |
| FIGURA 30 - Configuração da malha no quinto estágio de carregamento. | 69 |
| FIGURA 31 - Configuração da malha no sexto estágio de carregamento. | 70 |
| FIGURA 32 - Configuração da malha no sétimo estágio de carregamento. | 70 |
| FIGURA 33 - Configuração final da fratura após o sétimo estágio de carregamento. | 71 |
| FIGURA 34 - Configuração da propagação da fratura em ensaio de compressão diametral com modelamento do corpo-de-prova inteiro. | 75 |
| FIGURA 35 - Influência da simetria da malha no resultado da carga limite de propagação de uma fratura com diferentes dimensões, na simulação de um ensaio de compressão diametral. | 76 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| TABELA 1 - Comportamento dos parâmetros analisados durante o processo de propagação da fratura num ensaio de compressão diametral: modelamento utilizando simetria na metade inferior. | 67 |
| TABELA 2 - Comportamento dos parâmetros analisados durante o processo de propagação da fratura num ensaio de compressão diametral: modelamento do corpo-de-prova inteiro. | 74 |

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_y - Tensão normal na direção Y.

σ_{xy} - Tensão tangencial no plano XY.

σ_{xz} - Tensão tangencial no plano XZ.

K_I - Fator de intensidade de tensão no MODO I.

K_{II} - Fator de intensidade de tensão no MODO II.

K_{III} - Fator de intensidade de tensão no MODO III.

θ - Ângulo entre o eixo da fratura existente e a direção de propagação da mesma.

r - Distância radial medida em relação à ponta da fratura.

K_{cr} - Fator de intensidade de tensão crítico ou tenacidade da fratura.

P_c - Carga aplicada à uma distância remota da ponta da fratura.

a - Semi-comprimento da fratura.

$\sigma_{\theta_{m\acute{a}x.}}$ - Teoria de iniciação da fratura no modo misto da Máxima Tensão de Tração.

$G(\theta_{m\acute{a}x.})$ - Teoria de iniciação da fratura no modo misto da Máxima Taxa de Liberação de Energia.

$S(\theta)_{m\acute{i}n.}$ - Teoria de iniciação da fratura no modo misto da Mínima Densidade de Energia de Deformação.

$X_i, X_{nj}, X_{nl}, X_{nk}$ - Coordenada X dos pontos nodais i, nj, nl e nk , respectivamente.

$Y_i, Y_{nj}, Y_{nl}, Y_{nk}$ - Coordenada Y dos pontos nodais i, nj, nl e nk , respectivamente.

N_i - Número de elementos adjacentes ao ponto nodal i .

w - Fator de amortecimento.

α, β, δ - Fatores de forma.

λ - Fator de forma máximo.

N_1, N_2, N_3, N_4 - Funções de forma.

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ - Coordenadas de área.

ζ, η - Eixos de coordenadas isoparamétricas.

D_n - Derivadas das funções de forma.

RESUMO

GONZATTI, C.. Sistema Computacional, Interativo, para Estudos de Propagação de Fraturas em Materiais Rochosos. São Carlos, 1994. 107p.. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho apresenta mais uma etapa prevista no desenvolvimento de um sistema computacional para estudos de propagação de fraturas, em materiais rochosos, utilizando os conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). A versão atual do sistema passa a ser composta de um módulo gerador interativo de malhas de elementos finitos VERSÃO 1.0, voltado para atendimento das necessidades e novos horizontes da VERSÃO 2.0 do programa de elementos finitos "FRAT" (CELESTINO et al. (1990)).

O gerador de malhas permite o modelamento de estruturas com até 10 fraturas, com elementos especiais nas pontas das fraturas (elementos "crack tip") e ao longo das mesmas (elementos "junta"). Possui opções interativas para a edição da malha durante e após a geração, além de capacidade para a reorganização das fraturas após os sucessivos incrementos nas sua pontas e geração da nova malha de elementos.

O programa "FRAT", por sua vez, recebeu avanços no que tange a maior diversidade de elementos, especialmente, de elemento para o modelamento das juntas, além de algoritmos para a análise de estruturas com mais de 1 fratura e busca automática da carga limite para a propagação das fraturas.

Palavras-chave: Mecânica das rochas, fratura, método dos elementos finitos, junta, "FRAT".

ABSTRACT

GONZATTI, C.. *Interactive Computational System to Study Crack Propagation in Rock Materials*. São Carlos, 1994. 107p.. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work presents a new step in the development of a computational system to study fracture propagation, in rock materials, on the basis of the Linear Elastic Fracture Mechanics. The system is composed of a finite element mesh generator module (Version 1.0) and a new version (Version 2.0) of the finite element program "FRAT" (CELESTINO et al. (1990)).

The mesh generator makes possible to model structures with up to 10 fractures, utilizing crack tip and joint elements in the fractures. The interactive options give the possibility to modify the mesh during and after its generation. In addition, program procedures provide mesh reorganization considering each crack increment.

Improvements were also introduced into the "FRAT" program such as more diversity of elements and procedures to analyse several fractures with automatic determination of the critical load for their propagation.

Keywords: Rock mechanics, fracture, finite element method, joint, "FRAT".

1. INTRODUÇÃO

A realização deste trabalho procurou dar continuidade ao desenvolvimento de um sistema computacional para análise de propagação de fratura baseada na Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Para esta fase do desenvolvimento previu-se a criação de um programa tanto para a geração da malha de elementos finitos inicial, como para a sua reorganização, após os sucessivos incrementos no tamanho de uma ou mais fraturas devido à aplicação de estágios de carregamento. Ainda que desenvolvido para os fins específicos acima e para atender ao formato de um determinado programa de elementos finitos, o gerador de malhas poderá ser utilizado como pré-processador de outros programas de elementos finitos, necessitando-se fazer apenas a devida conversão dos dados da malha para o formato usado em cada programa.

Também, visou a implementação de avanços no programa para análise de tensões pelo método dos elementos finitos "FRAT" (CELESTINO et al. (1990)), que possibilitassem análises de propagação de fraturas quando submetidas a estados compressivos de tensão, além de tração. Nesse conjunto de melhorias previu-se a incorporação da formulação do elemento junta de GOODMAN (1976), elementos triangulares de 3 e 4 pontos nodais, além da preparação de algoritmos para o cálculo dos fatores de intensidade de mais de uma fratura e comunicação com o programa gerador da malha de elementos.

Do ponto de vista teórico, o trabalho pode não significar avanços no que se refere ao desenvolvimento do conhecimento para estudos de propagação de fraturas em materiais rochosos, salvo algumas pequenas contribuições. Do ponto de vista prático, no entanto, a decisão de investir em tais desenvolvimentos partiu de fatos concretos e que não podem ser desconsiderados. A filosofia da linha de pesquisa à qual está inserido o presente trabalho é a de dar continuidade a um conjunto de iniciativas, sempre buscando o aperfeiçoamento, procurando incorporar as contribuições de cada pesquisador no estudo do comportamento

dos materiais rochosos. No caso específico deste trabalho, o desenvolvimento de ferramentas computacionais mais avançadas e adequadas a efetivação de estudos de propagação de fraturas é perfeitamente justificável, haja vista a grande quantidade de tempo dispendido e as limitações para análises quando utilizadas as condições existentes (preparação das malhas manualmente, além das limitações do programa "FRAT"). As alternativas para o suprimento das necessidades são as mais variadas possíveis, desde a simples aquisição de ferramentas prontas até o desenvolvimento, a partir do conhecimento existente e das condições presentes, de ferramentas capazes de atender as necessidades atuais, além daquelas surgentes.

A escolha da alternativa da aquisição de produtos acabados, em se tratando de programas computacionais, esbarra numa série de dificuldades. Primeira, no fato de tais produtos serem comercializados, quando disponíveis, em pacotes fechados, fato que impede o seu aperfeiçoamento e, muitas vezes, o próprio conhecimento dos métodos incorporados no programa. Segunda, por atender a demanda daqueles que produziram o programa e conforme as suas concepções de continuidade do desenvolvimento das pesquisas. Terceira, pelo próprio custo de aquisição que, pela aplicação a problemas muito específicos, são elevados.

A escolha adotada nesse trabalho, contando com o quadro de pesquisadores disponível, baseou-se nos seguintes fatos: a) o desenvolvimento de uma ferramenta com alguns recursos não disponíveis em produtos já existentes contribuirá para o aperfeiçoamento das pesquisas atualmente em curso, bem como impulsionar a criação de novas linhas de atuação; b) em sendo a mecânica da fratura aplicada aos materiais rochosos uma área relativamente nova, especialmente à nível de País, o desenvolvimento deste tipo de trabalho concorre para a formação de quadros técnicos, com capacidade para melhor assimilar os conhecimentos existentes a nível internacional.

Devido à quantidade e variedade de assuntos envolvidos (informática, métodos numéricos, mecânica da fratura) neste trabalho, o mesmo deverá conter ora tópicos específicos sobre cada assunto, ora uma mescla dos vários temas dada a interligação necessária entre eles. De toda a maneira, procurar-se-á ao máximo separar cada área de conhecimento, dando a cada uma desenvolvimento próprio, procurando expor a sua importância dentro dos objetivos globais do trabalho.

Num primeiro momento (item 2) será feita uma abordagem geral do assunto mecânica da fratura aplicada à mecânica das rochas, baseada em ampla pesquisa da literatura correlata. Ênfase aos aspectos relacionados à geração de malhas para análises pelo método dos elementos finitos será dada, devido à importância do assunto na elaboração do trabalho.

A exposição das características, métodos utilizados e modo de operação do gerador de malhas vem em seguida, no item 3. Fazem parte desse capítulo o detalhamento dos principais algoritmos criados e das adaptações no método sugerido por LO (1985), que foi usado para a geração dos pontos nodais e elementos triangulares no interior do domínio (exceto nas fraturas), além da apresentação de um roteiro para a (re)numeração de malhas irregulares de elementos finitos, no plano. Com relação às possibilidades do gerador da malha, são apresentadas as diversas opções que permitem a preparação da malha de forma interativa. Os resultados estão caracterizados pela apresentação de exemplos (modelos de malhas), especialmente casos de utilização imediata do trabalho, além daqueles vislumbrados já na sua fase final de desenvolvimento, como será visto no Anexo A.

A possibilidade de geração de elementos até então não utilizados pelo programa "FRAT" (por exemplo, os elementos junta e triangulares de 3 e 4 pontos nodais) e a opção de modelamento de mais de uma fratura simultaneamente, impuseram a implementação de alguns avanços nesse programa já existente. Essas melhorias estão descritas no item 4, que trata dos novos avanços implementados no programa "FRAT".

No item 5, destinada a apresentação da aplicação do sistema, são descritos os principais passos do roteiro para a efetivação de análises de propagação de fraturas utilizando o programa gerador interativo de malhas e o programa de elementos finitos. Nessa seção, ainda, é feita a propagação de uma fratura, característica em ensaios de compressão diametral (ensaio brasileiro).

Algumas das várias lacunas abertas para a continuidade do desenvolvimento do sistema, além das limitações do mesmo já detectadas após o encerramento dessa fase, são discutidas no final, no item 6. Essa discussão visa, em última análise, nortear os passos seguintes no sentido do aperfeiçoamento do trabalho cuja etapa presente formalmente se dá por encerrada. Vale dizer que esse tipo de trabalho na prática nunca está concluído e, portanto, sempre haverá espaço para discussões e sugestões para a expansão do sistema visando melhor atender as necessidades que se impuserem.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. A Mecânica da Fratura na Engenharia

O desenvolvimento e a própria utilização da teoria da mecânica da fratura passou a ganhar maior importância à medida que os projetos de engenharia começaram a exigir um grau de confiabilidade mais elevado, devido às graves consequências caso ocorressem acidentes relacionados à ruptura da estrutura.

É sabido que todo tipo de estrutura possui pontos de fraqueza, na forma de fissuras, fraturas etc.. De outra parte, a quantificação e a qualificação dessas descontinuidades até alguns anos atrás era praticamente impossível. Nessas condições, a mecânica da fratura não integrava o conjunto de ferramentas à disposição do projetista, exceto em casos muito específicos, por exemplo, em problemas de fadiga.

OWEN e FAWKES (1983) observam que, com a implementação dos ensaios não destrutivos (e aí grande importância deve ser dada aos ensaios com equipamento de ultrassom) os defeitos nos materiais passaram a ser previamente conhecidos, cabendo ao projetista aceitá-los ou não, ou mesmo, quantificar os riscos que os mesmos impunham à estabilidade das estruturas. Cada vez mais são utilizados materiais de alta resistência mecânica e, tanto quanto possível, livres de defeitos. Como a obtenção de tais produtos é muito difícil, continuar convivendo com a existência dessas falhas exige cálculos mais precisos e com menos simplificações. O incremento na qualidade das análises concorrerá para a diminuição do grau de incerteza e determinar os níveis de tolerância aceitáveis.

Com a evolução e disseminação dos computadores nos últimos anos, novos programas utilizando métodos numéricos têm sido desenvolvidos com o intuito de facilitar, além de melhorar a qualidade das análises efetuadas para prever o comportamento das estruturas quando em serviço. O emprego das teorias da mecânica do contínuo, cuja concepção leva

em conta a deterioração da estrutura como um todo parece ainda não satisfazer as necessidades reais. A mecânica do dano, por exemplo, limita-se a analisar o comportamento da estrutura enquanto o nível de degradação da mesma está associado, ainda, a microfissuras e de forma distribuída. Processos de fraturamento de maior envergadura ou fraturas discretas fogem do espectro de abrangência do modelo. INGRAFFEA (1983) observa que a cada incremento na dimensão de uma fratura, um novo estado de tensões se verifica na estrutura. O acompanhamento dessa variação no estado de tensão exige, portanto, um modelamento dinâmico.

O mesmo Ingraffea discute os principais aspectos que devem ser contemplados por um algoritmo que utilize técnicas avançadas de análises de tensões, por exemplo, o método dos elementos finitos. Podem ser destacados entre outros o fato de a fratura poder se propagar estavelmente, possuir uma trajetória não linear e múltiplas fraturas se propagarem simultaneamente, como em problemas de mecânica de rochas. Na prática, além do método numérico para análise das tensões o algoritmo deve conter procedimentos para efetuar com precisão o cálculo dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) na ponta das fraturas. Esses fatores, quando introduzidos nas teorias de iniciação de fratura segundo o modo misto, permitem a previsão da propagação da fratura (direção e dimensão do incremento). Considerando a variação contínua da trajetória da fratura, é importante, também, que o algoritmo seja munido de técnicas especiais visando a reorganização da malha de elementos após a propagação estável da fratura, sob pena de tornar o trabalho de simulação da propagação uma tarefa extremamente demorada.

2.2. Evolução e Conceitos Básicos da Mecânica da Fratura

Owen e Fawkes citam Leonardo da Vinci, Lloyd e Hodgkinson, Anderegg e Weibull como os autores dos primeiros trabalhos que abordaram problemas à luz da mecânica da fratura, em especial, o efeito escala, e INGLIS (1913), como o primeiro a tentar equacionar a

mecânica da fratura. A concepção de Inglis não capitalizava nenhuma resistência para um material fraturado. Segundo Owen e Fawkes, ainda, Griffith constatou na década de 20 não ser totalmente verdadeira a aproximação de Inglis. Griffith aplicou os conceitos de conservação de energia e defendeu a idéia de que uma fratura se torna instável (se propaga indefinidamente) quando a "taxa de liberação da energia de deformação elástica, devida ao crescimento da fratura, supera a taxa de incremento na energia superficial dissipada associada à nova superfície da fratura formada". A fratura se propaga sem o fornecimento de energia adicional após atingir uma dimensão crítica. Nesse momento a taxa de liberação de energia, devido ao incremento na dimensão da fratura, ultrapassa a capacidade de absorção de energia por parte da superfície da mesma.

As formas como ocorre o início do processo de propagação da fratura são, fundamentalmente, três, classificadas segundo o tipo de movimento cinemático observado entre um lado e outro da fratura, conforme desenho esquemático da Figura 1. No MODO I, o fraturamento se processa devido a esforços de tração, havendo separação entre as faces. No MODO II, a propagação da fratura se dá pelo escorregamento de uma face sobre a outra, ou seja, por cisalhamento. No MODO III o fraturamento ocorre por esforço de torção. Na realidade, a propagação de uma fratura pode acontecer tanto segundo um único modo como pela combinação de mais de um deles, caracterizando um modo misto. Os MODOS I e II são bastante frequentes nos problemas de mecânica de rochas, tendo em vista a predominância das tensões compressivas nas estruturas em rocha.

IRWIN (1957) definiu o campo de tensões primárias nas imediações da ponta da fratura, associado a cada um dos modos de iniciação da fratura, através das seguintes expressões:

$$\sigma_y = K_I / (2\pi r)^{0.5} f(\theta) \quad (1)$$

$$\sigma_{xy} = K_{II} / (2\pi r)^{0.5} f(\theta) \quad (2)$$

$$\sigma_{xz} = K_{III} / (2\pi r)^{0.5} f(\theta) \quad (3)$$

onde: K_I , K_{II} e K_{III} = fatores de intensidade de tensão relacionados aos respectivos modos de iniciação da fratura;

$f(\theta)$ = função da direção de propagação da fratura (θ é o ângulo entre o eixo da fratura existente e a direção de incremento da mesma);

r = distância radial medida em relação à ponta da fratura.

Nota-se, nas expressões acima, que o campo de tensões possui uma singularidade junto à ponta da fratura do tipo $1 / r^{0.5}$. Como será visto mais adiante, essa singularidade foi objeto de pesquisas intensivas, na área dos métodos numéricos, no sentido de idealizar um elemento que contivesse na função de deslocamento termos que pudessem resultar em singularidade semelhante na ponta da fratura e, em consequência, no estado de tensões.

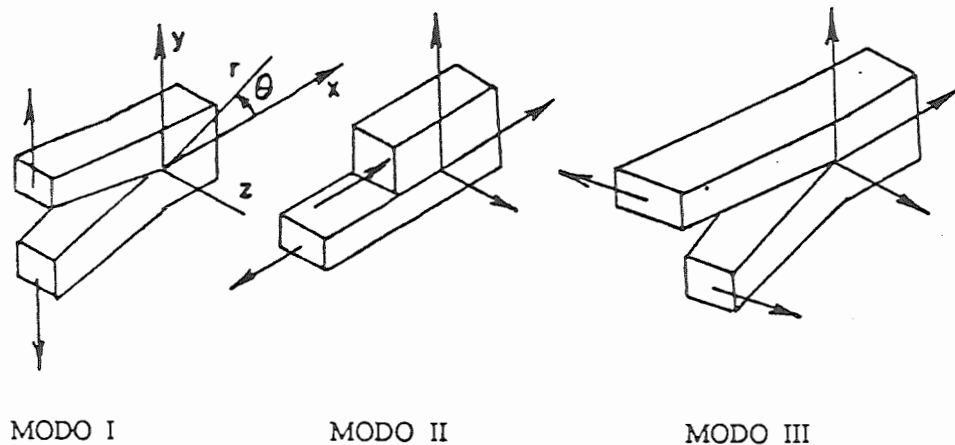


FIGURA 1 - Modos de iniciação da fratura.

2.3. Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL)

Na prática, a mecânica da fratura elástica linear pode ser traduzida pelos seguintes procedimentos: a) determinação analítica ou numérica da taxa de liberação de energia pela fratura, ou o fator de intensidade de tensão (K_I , K_{II} , K_{III}), levando em conta a geometria da

estrutura e o carregamento imposto a ela; b) comparação desses fatores com o valor crítico de intensidade de tensão da rocha, a "tenacidade à fratura do material", determinada experimentalmente. A condição de tenacidade maior que o fator de intensidade de tensão caracteriza uma fratura não se propagando, enquanto o contrário implica em propagação da mesma.

O parâmetro tenacidade à fratura resultou da derivação em termos de energia que Griffith utilizou para explicar o início do processo de propagação de uma fratura, cuja forma geral é dada por:

$$K_{cr} = P_c (\pi a)^{0,5} \quad (4)$$

onde: P_c = carga aplicada à uma distância remota da ponta da fratura;

a = semi-comprimento da fratura.

2.4. Teorias de Iniciação da Fratura no Modo Misto

INGRAFFEA (1977 e 1983) e INGRAFFEA e HEUZÉ (1980) descrevem e discutem amplamente as três principais teorias de iniciação da fratura segundo o modo misto: a da Máxima Tensão de Tração, $\sigma_{\theta_{m\acute{a}x}}$; a da Máxima Taxa de Liberação de Energia, $G(\theta_{m\acute{a}x})$; e a da Mínima Densidade de Energia de Deformação, $S(\theta)_{m\acute{i}n}$.

A teoria da Máxima Tensão de Tração, apresentada por ERDOGAN e SIH (1963), preconiza que a deflagração do processo de propagação da fratura se deve, essencialmente, à tensão de tração na região próxima da ponta da fratura. Caracterizam essa teoria aspectos como o incremento da fratura a partir da sua ponta e na direção radial e propagação da mesma na direção normal à direção da tensão de tração máxima. INGRAFFEA (1977)

acrescenta que o processo de propagação da fratura é iniciado quando a tensão de tração máxima atinge um valor limite constante e característico de cada tipo de material.

A segunda teoria, a da Máxima Taxa de Liberação de Energia foi proposta por HUSSAIN et al. (1974) e partiu da hipótese de que a generalização da teoria de energia de Griffith é válida. Baseia-se na taxa de liberação de energia e postula que uma fratura irá se propagar se a máxima taxa de liberação de energia superar um valor crítico do material.

SIH (1973) apresentou uma nova proposta para a análise do processo de iniciação da propagação de uma fratura, levando em consideração a densidade de energia de deformação nas proximidades da ponta da mesma. Os principais aspectos podem ser destacados através dos seguintes pontos básicos: a) o incremento da fratura ocorre na direção onde a densidade de energia de deformação é mínima; b) a fratura começa se propagar quando a intensidade da energia de deformação atinge um valor crítico característico do material.

2.5. Tipos de Elementos Especiais para o Modelamento da Propagação de Fratura

A utilização do método dos elementos finitos para a computação dos fatores de intensidade de tensão na ponta da fratura exige elementos capazes de modelar adequadamente a variação dos deslocamentos nas proximidades da mesma, preferencialmente incorporando na formulação a expressão $1/r^{0.5}$, além de contabilizar a influência do atrito das paredes da fratura quando estas sofrem compressão.

INGRAFFEA (1977 e 1983) faz um apanhado da evolução dos tipos e configuração das malhas usadas na ponta da fratura com vistas à obtenção de precisão aceitável no cálculo dos FIT. Segundo o autor, Jordan, em 1970, descobriu por acaso que a matriz Jacobiana do elemento isoparamétrico quadrilátero de 8 pontos nodais se torna não positiva quando

os pontos nodais do meio do lado são posicionados a um quarto do lado, ou mesmo, fora da posição central. HENSHELL e SHAW (1975) e BARSOU (1976) - elemento quadrilátero - e BARSOU (1977) - elemento triangular - parecem, no entanto, ter sido os primeiros a utilizar tais tipos de elementos, inclusive mostrando que a forma da variação das deformações nos mesmos é do tipo $1/r^{0.5}$. Esses elementos são comumente tratados como elementos "crack tip". INGRAFFEA (1977) justifica a utilização do elemento triangular "crack tip" na ponta da fratura, ao invés dos elementos com pontos nodais nos vértices e no meio dos lados, pela precisão obtida no cálculo dos deslocamentos, facilidades para a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e pela necessidade de baixa quantidade de graus de liberdade (malha relativamente grosseira). Em 1983, o mesmo autor recomenda elementos triangulares com tamanho do lado da ordem de 5 a 15% da metade do comprimento da fratura.

Entre os diversos tipos de elementos desenvolvidos para o modelamento de descontinuidades podem ser salientados o elemento junta apresentado por GOODMAN et al. (1968), GOODMAN (1976) e GOODMAN e St. JOHN (1977), conforme Figura 2. Esse elemento é composto de 4 pontos nodais, 2 em cada lado da junta e com as coordenadas dos nós da ponta coincidentes ($I=L$ e $J=K$). Outro elemento utilizado é o elemento "achatado", proposto por DESAI et al. (1984). Este elemento foi utilizado por FISHMAM et al. (1991), num trabalho experimental onde os resultados do modelo físico empregado se mostraram concordantes com as simulações numéricas. A utilização desse tipo especial de elemento ao longo de uma fratura permite avaliar a parcela de energia dispendida para vencer o atrito entre as paredes da mesma, quando as faces são submetidas a estados compressivos de tensão.

Segundo GOODMAN et al. (1968), um elemento capaz de modelar uma descontinuidade deve levar em conta uma série de aspectos. Podem ser destacados, entre outros, a planaridade da junta, a quase ou mesmo inexistência de resistência à tração, a elevada

quando sob baixas tensões normais e cisalhamento dos "dentes" da rugosidade quando sob elevadas tensões normais (a resistência, então seria devida à coesão e ao ângulo de atrito). Comenta, ainda, a possibilidade da utilização do critério de resistência linear de Mohr como uma primeira aproximação, embora um critério bilinear pudesse melhor representar a resistência.

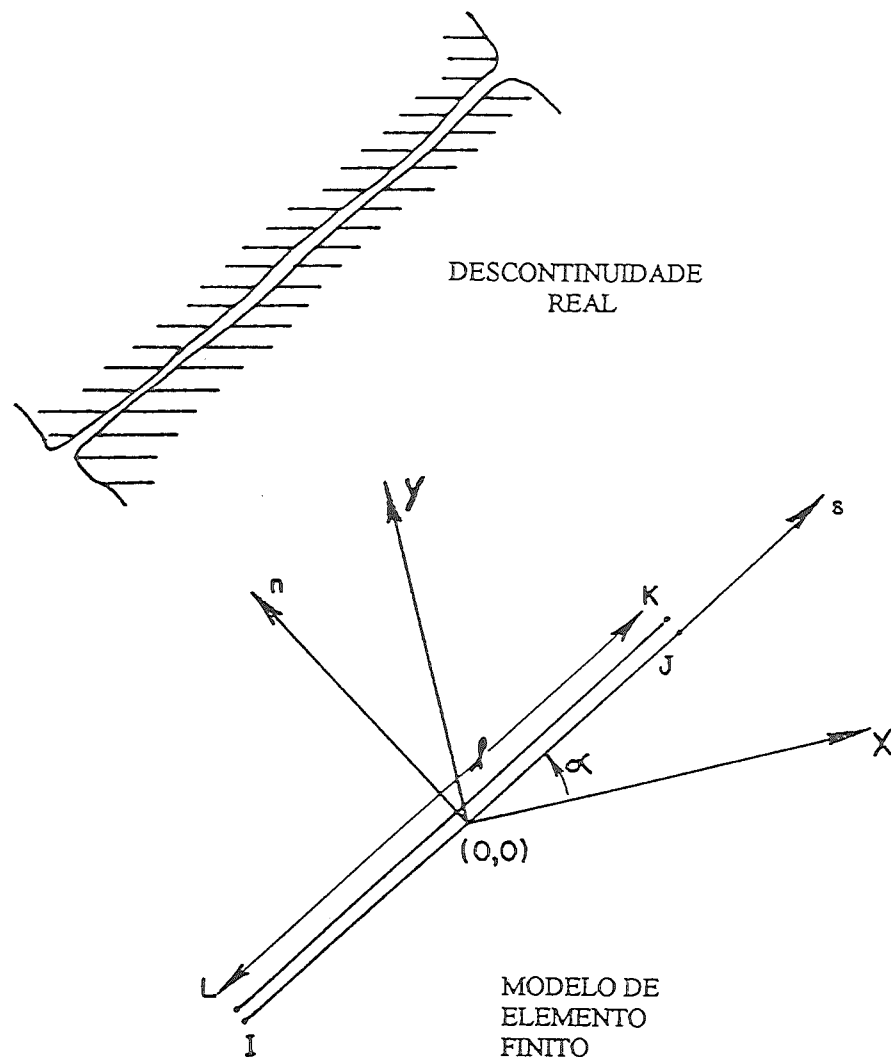


FIGURA 2 - Modelo de elemento junta proposto por GOODMAN (1976).

2.6. Geração Automática de Malhas de Elementos Finitos em Duas Dimensões

2.6.1. Introdução

Além da preocupação dos usuários e pesquisadores do método dos elementos finitos em aperfeiçoar suas análises, existe o enorme trabalho de manipulação dos dados de entrada relacionados à geometria e disposição dos elementos na malha. Nas análises onde a preparação dos dados de entrada é feita manualmente, cerca de 80% do tempo é dispendido para a definição da malha e conferência das informações de entrada (ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971)). Essa tarefa se constitui num trabalho tedioso e, na maioria das vezes, na maior fonte de erros que se verificam nas análises.

Numa análise de propagação de fraturas, então, este tipo de trabalho pode se repetir tantas vezes quanto forem necessários os incrementos na fratura até a estrutura entrar em colapso, por exemplo. Os tipos especiais de elementos utilizados no modelamento das pontas das fraturas, especialmente, dificultam ainda mais o trabalho do usuário, seja na definição das coordenadas dos pontos nodais, seja na definição das diferentes densidades de elementos ao longo do domínio. Mesmo com um grau de dificuldade maior para a definição do roteiro a ser seguido para análises de propagação de fraturas, comparado às análises considerando o meio contínuo, ainda assim pode ser traçado um algoritmo básico que substitua o esforço do usuário para o modelamento e remodelamento contínuo da estrutura.

As pesquisas empreendidas no sentido de automatizar a geração da malha de elementos objetivaram, num primeiro momento, minimizar o tempo de manipulação dos dados de entrada, além de facilitar o processo de conferência dos mesmos. Os passos seguintes se deram no sentido de melhorar a comunicação entre o usuário e a máquina (computadores). O produto dessa evolução são os "programas pré-processadores interativos", que apresentam entre outras vantagens, maior facilidade para a geração de malhas em estruturas com formas geométricas mais complexas.

Ao longo dos últimos 20 anos, especialmente, uma grande quantidade de alternativas têm sido apresentadas. BUELL e BUSH (1973) apresentam uma revisão dos métodos desenvolvidos até 1972. THACKER (1980), por sua vez, revisa as principais técnicas, existentes até o final da década de 70, para a geração de malhas irregulares utilizando o expediente da transformação de coordenadas. HO-LE (1988) faz uma ampla abordagem, incluindo as técnicas mais usadas para a suavização de malhas. Foi um dos primeiros autores a propor uma classificação dos diferentes métodos existentes à época.

A escolha das técnicas a serem utilizadas no algoritmo de geração de malhas deve procurar a minimização da quantidade de dados de entrada, facilitar o modelamento de zonas de diferentes materiais, gerar elementos com formas razoáveis de maneira a não levar o sistema a um mau condicionamento, além de facilitar a divisão de regiões de forma a se poder modelar a geometria idealizada. ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971) são partidários dessas idéias. HARBER e outros (1981) preconizam que, além das características acima, um gerador deve produzir uma boa correlação entre a malha da periferia e do interior, possibilitar a sua utilização numa grande variedade de problemas, ter capacidade de conectar elementos sem a intervenção do usuário e dispor de procedimentos que utilizem todos os recursos da máquina disponíveis e dêem uma boa resposta quando em aplicações interativas.

TACKER (1980) comenta sobre o grau de automação dos geradores e a sua dependência das técnicas adotadas e do tipo de malha desejada. Em determinados casos pode ser mais aconselhável utilizar um sistema interativo, que permita o acompanhamento do processo de geração da malha nas suas várias etapas. Em outras situações a geração pode ser efetuada a partir de dados de arquivo sem a interferência do usuário, o que caracteriza um processo todo automático. A verdade é que quanto maior o grau de automação menor é o trabalho humano durante a preparação da malha, porém, é muito provável que o programa seja de aplicação bastante restrita.

Problemas cujos caminhos a serem percorridos durante um processo de geração de malha podem ser bastante variados, tendem a exigir opções de interatividade. As malhas utilizadas para o modelamento de estruturas com descontinuidades possuem características peculiares, como o refinamento nas zonas próximas às pontas das fraturas e zonas de transição da malha refinada para grosseira, entre outras. Um processo de geração automático, mesmo com uma quantidade de informações elevada fornecidas ao algoritmo, nem sempre consegue gerar uma malha com a qualidade requerida para a malha definitiva. Tais dificuldades podem ser contornadas ou com a construção de algoritmos gigantes, contendo inúmeros caminhos e condições de contorno, ou com opções de interatividade homem/máquina. Programas gigantes exigem conhecimentos avançados da área de informática, parecendo mais aceitável, a nível de engenharia, a busca de soluções através do desenvolvimento de programas menores, não totalmente automáticos, porém, versáteis para a solução dos problemas.

2.6.2. Métodos para a Geração dos Pontos Nodais e Elementos

O critério utilizado por HO-LE (1988) para a classificação dos diferentes métodos existentes foi o que ele denominou de "ordem temporal" de geração dos pontos nodais e dos elementos. Com este enfoque, 4 grupos foram definidos: GRUPO 1) trabalha com a topologia da malha; GRUPO 2) primeiro gera os pontos e após constrói os elementos; GRUPO 3) traça uma malha gabarito e adapta ao domínio a ser discretizado; GRUPO 4) gera os pontos nodais e elementos, simultaneamente.

O GRUPO 1 se caracteriza pela determinação da topologia da figura geométrica, inicialmente, para posteriormente serem gerados os pontos nodais. Nesse grupo estão incluídas as técnicas de suavização de malha. As técnicas do GRUPO 2 possuem duas fases distintas: na primeira fase ocorre a geração dos pontos nodais, procurando dar uma boa distribuição aos mesmos dentro do domínio. Na segunda etapa são formados os elementos

triangulares ou quadriláteros. Os métodos pertencentes ao GRUPO 3 desenvolvem uma malha, geralmente num espaço paramétrico unitário (quadrado ou triangular) para, num passo seguinte, fazerem a adaptação à região de interesse através de funções especiais. Alguns métodos geram uma malha padrão que é superposta ao domínio real. A adaptação é obtida fazendo-se a subtração daquelas partes da malha padrão que ficam externas ao domínio real. Nas técnicas do GRUPO 4 não existe distinção entre o processo de geração dos nós e dos elementos. A geometria da região a ser discretizada exerce grande influência no processo de geração dos elementos.

2.6.2.1. Grupo 1

2.6.2.1.1. Esquema de Geração de Laplace-Isoparamétrico

Este método pode ser utilizado tanto para a geração da malha como para a suavização da mesma. Consiste na determinação das coordenadas médias dos pontos nodais no interior de um contorno. HERRMANN (1976) propôs algumas modificações na formulação original de Laplace, tornando a técnica aplicável também para malhas irregulares, além de possibilitar a produção de malhas bem mais próximas das desejadas. Utilizando a concepção de um elemento isoparamétrico de 8 pontos nodais com origem no centro do elemento, a forma geral das equações propostas é a seguinte (ver Figura 3):

$$X_i = \frac{1}{N_i(2-w)} \sum_{n=1}^{N_i} (X_{nj} + X_{nl} - wX_{nk}) \quad (5)$$

$$Y_i = \frac{1}{N_i(2-w)} \sum_{n=1}^{N_i} (Y_{nj} + Y_{nl} - wY_{nk}) \quad (6)$$

onde: $X_i, X_{nj}, X_{nl}, X_{nk}$ = Coordenada X dos pontos nodais i, nj, nl e nk , respectivamente.

$Y_i, Y_{nj}, Y_{nl}, Y_{nk}$ = Coordenada Y dos pontos nodais i, nj, nl e nk , respectivamente.

N_i - Número de elementos adjacentes ao ponto nodal i .

w - fator de amortecimento (pode variar de 0 a 1).

Nessas equações, a parcela antes do somatório permite a sua aplicação à malhas irregulares, enquanto o coeficiente " w " funciona como um amortecedor no processo de suavização da malha, conforme Figura 4. Na prática, esse fator pondera a influência de cada ponto nodal vizinho ao nó i , na relocação deste nó.

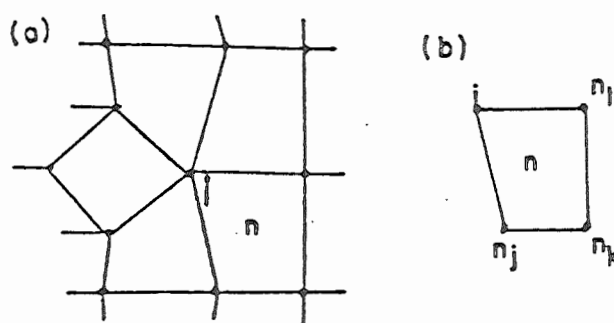


FIGURA 3 - Pontos nodais vizinhos do ponto i . a) porção da malha não retangular; b) detalhe do elemento n (HERRMANN (1976)).

2.6.2.2. Grupo 2

2.6.2.2.1. Método de Projeção Normal

A proposição desse método foi apresentada por JOHNSTON e SULLIVAN (1992), e pode ser aplicado às formas geométricas mais variadas. Na prática, o método se utiliza de uma linha de pontos nodais de um contorno inicial, a partir da qual é criada uma nova linha de pontos (linha R_i') com as seguintes características: a) cada ponto é gerado na extremidade de um vetor normal à linha anterior (linha R_i) e com origem num ponto nodal desta linha, conforme Figura 5; b) o módulo do vetor pode variar em função de um fator densidade (tamanho do lado do elemento, por exemplo).

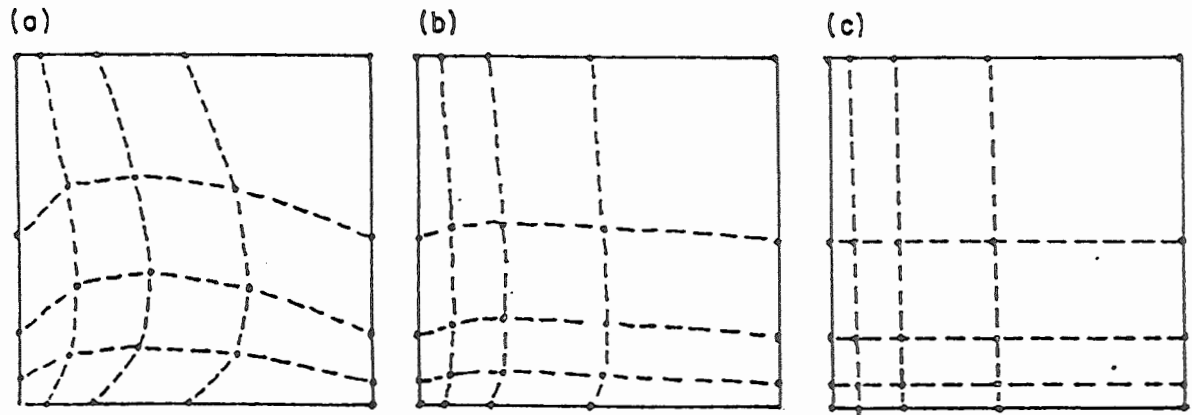


FIGURA 4 - Exemplo do efeito do espaçamento dos pontos nodais no contorno. a) malha de Laplace, $w = 0$; b) malha intermediária, $w = 0,95$; c) malha com geração pelo método isoparamétrico, $w = 1$ (HERRMANN (1976)).

O passo seguinte é o processamento desses pontos e conversão daqueles que serão realmente os formadores dos elementos. Essa tarefa normalmente é a mais trabalhosa em termos computacionais, devido à série de testes de validade que devem ser efetuados, tendo em vista a ocorrência de situações como:

- a) pontos localizados em zonas convergentes, divergentes ou em segmentos subseqüentes com ângulo entre eles inferior à 45° (Figura 6a);
- b) zonas onde ocorre superposição de partes de uma mesma linha (Figura 6b).

Nesses casos a providência pode ser a inserção, supressão ou redefinição da rota da nova linha gerada. Os elementos são formados após o povoamento completo do domínio. Não há restrição à aplicação de alguma técnica de amortecimento da malha.

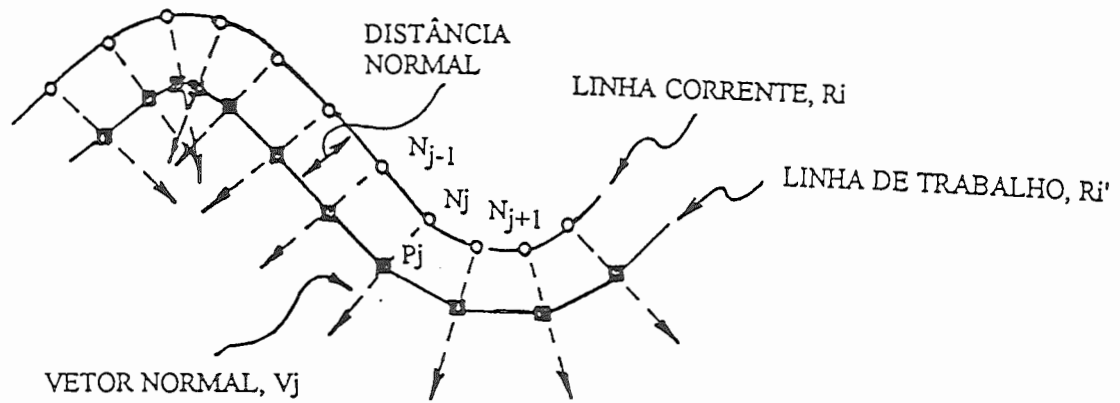


FIGURA 5 - Pontos da linha de trabalho (P_j) são projetados ao longo de vetores normais à linha de pontos nodais corrente (R_i).

2.6.2.2.2. Métodos de Conexão Nodal

Um método de triangulação automática para uma região plana é proposto por CAVENDISH (1974). Na fase de geração dos pontos nodais é empregado um gerador de números aleatórios visando à obtenção de uma distribuição estatisticamente uniforme dentro do domínio. Na fase de formação dos elementos, além de buscar a melhor geometria para o elemento sendo gerado, o algoritmo procura otimizar a forma dos elementos subseqüentes contíguos a ele.

Os pontos dos contornos externo, internos (se existirem) e das fronteiras entre regiões com diferentes densidades de elementos são fornecidos pelo usuário, juntamente com os fatores de densidade. Em cada região é traçada uma malha quadrada, cujo lado dos quadrados formados é igual ao fator densidade local. Dentro de cada quadrado é gerado um ponto, o qual será válido se estiver dentro da região de trabalho (pode haver quadrado que pertença à duas regiões contíguas com diferentes densidades) e não houver nenhum outro ponto num raio igual à densidade. Maiores detalhes podem ser vistos na Figura 7.

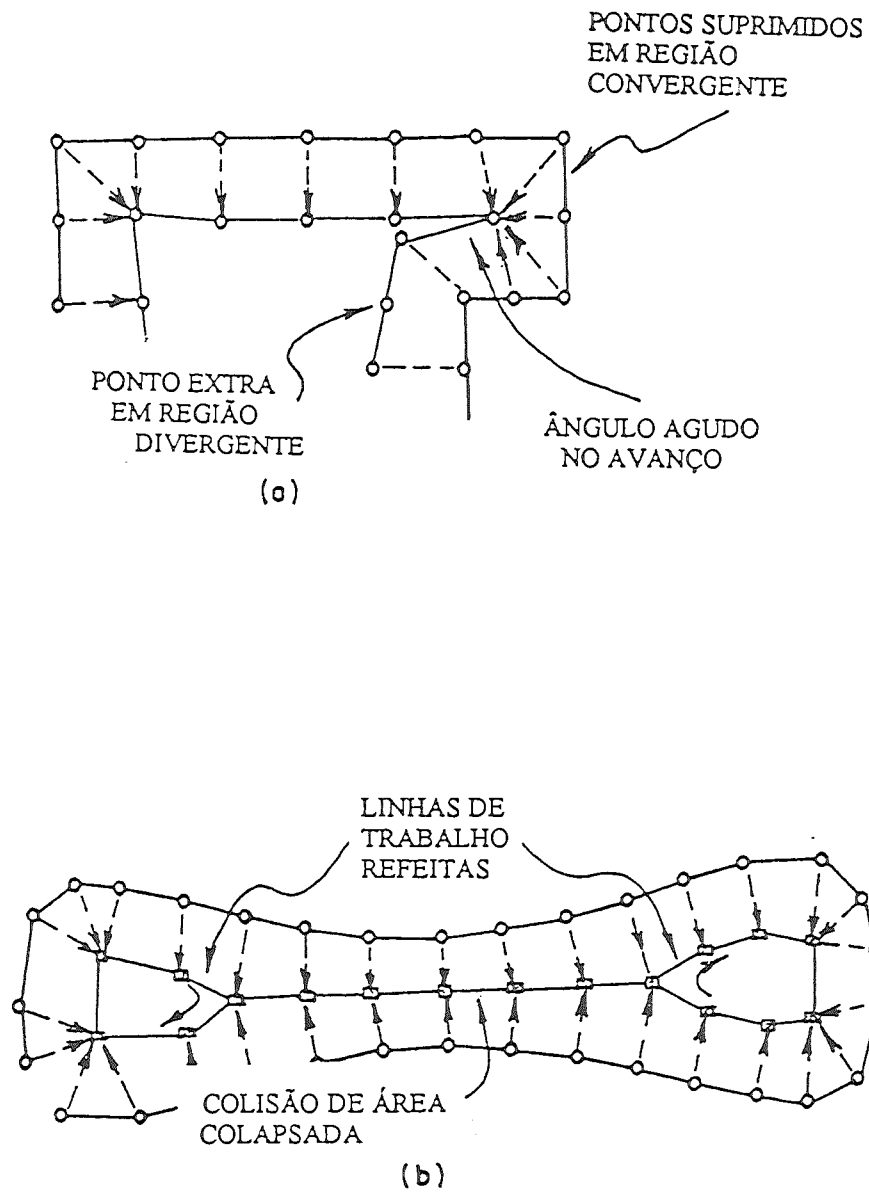


FIGURA 6 - Testes de tolerância. a) teste de ângulo; b) teste de superposição de linha em avanço.

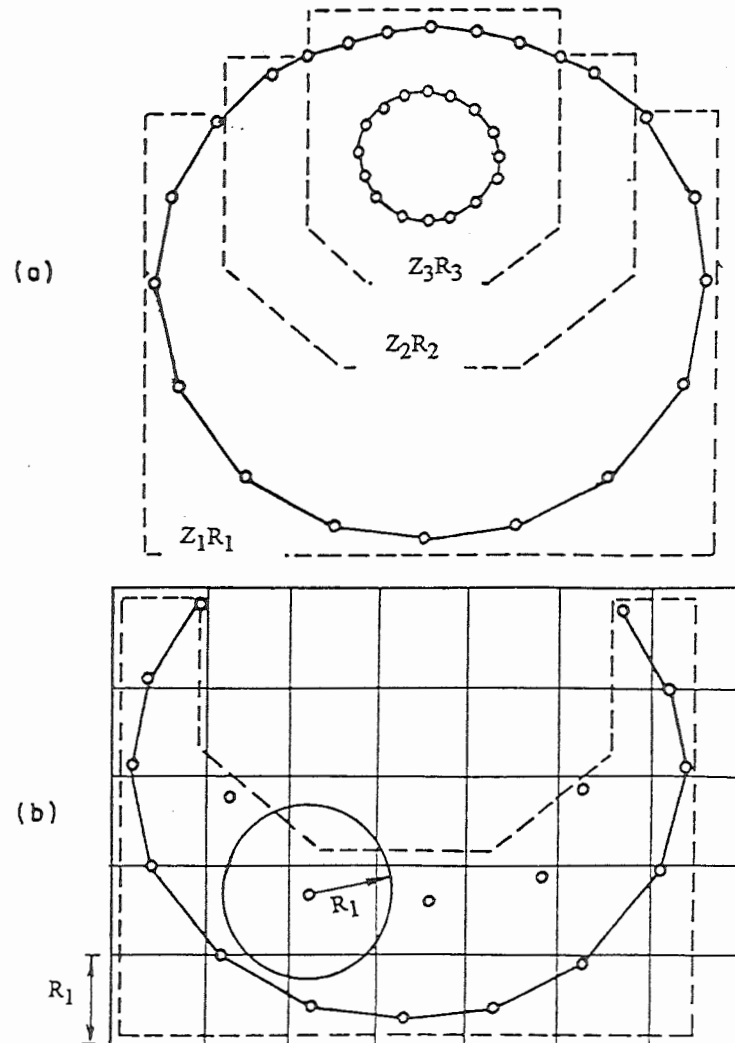


FIGURA 7 - Domínio a ser discretizado. a) delimitação das regiões com densidade de pontos nodais constante; b) geração dos pontos nodais no interior dos quadrados com lado equivalente à densidade (CAVENDISH (1974)).

O processo de formação dos elementos se dá a partir de um segmento qualquer (base). Definem-se 5 pontos vizinhos à esquerda da base e procede-se a testes para a eliminação daqueles pontos que, se utilizados como terceiro vértice, darão origem a um elemento superposto a outro. O passo seguinte consiste no aproveitamento do melhor candidato remanescente que possibilite a formação de um elemento triangular com a forma mais próxima da equilátera.

A suavização da malha é feita após a triangulação de todo o domínio. Obtém-se a recolocação de cada ponto nodal fazendo-se a média das coordenadas dos pontos nodais que estão ligados a ele por meio de um dos lados dos triângulos circundantes.

Outro método de conexão nodal foi desenvolvido por LO (1985). É aplicável à discretização de domínios planares quaisquer, inclusive contendo contornos internos (vazios), originando elementos triangulares. A delimitação dos contornos é feita similarmente à proposição de CAVENDISH (1974), porém de uma forma mais organizada. As coordenadas dos pontos do contorno externo são fornecidas seqüencialmente em segmentos com sentido de rotação anti-horário, enquanto os contornos internos possuem sentido horário, associando-se a cada segmento um fator densidade (tamanho do lado do elemento), conforme Figura 8. Tal procedimento faz com que sempre o domínio a ser discretizado esteja à esquerda de qualquer segmento. Para a geração dos pontos nodais projetam-se linhas imaginárias paralelas ao eixo X , distantes uma da outra o equivalente ao fator densidade médio em cada região no eixo das ordenadas. Em cada segmento formado pela interseção dessas linhas e os contornos, dentro do domínio, são gerados pontos potencialmente transformáveis em pontos nodais dos elementos, distantes um do outro o equivalente a, aproximadamente, o fator densidade.

A formação dos elementos se inicia no último segmento formado pelos dois últimos pontos gerados (base inicial). Selecionam-se dois candidatos utilizando o critério de distância, formando-se o elemento com o ponto que originar o triângulo cuja forma seja a mais próxima da equilátera. Segundo o autor, a boa distribuição dos pontos nodais no interior do domínio dispensa a execução de testes de superposição de elementos, tornando o algoritmo mais rápido. O tratamento matemático pode ser resumido às seguintes expressões, tendo como auxiliar o desenho esquemático da Figura 9.

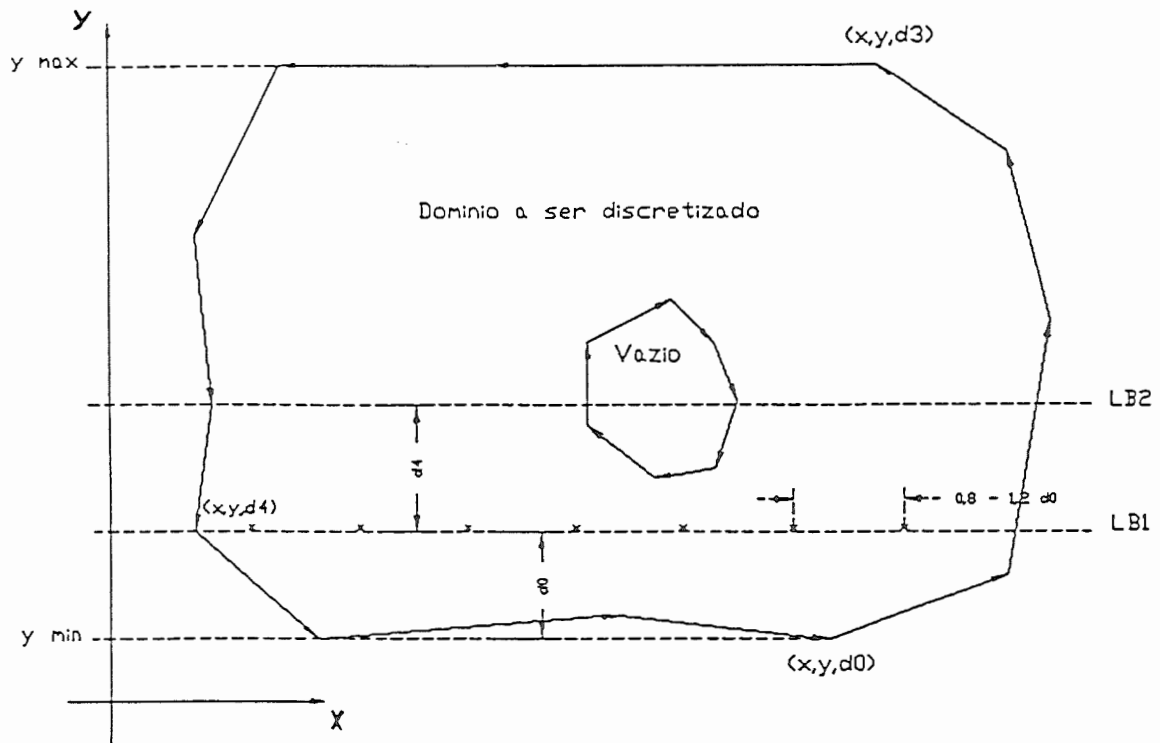


FIGURA 8 - Orientação dos segmentos dos contornos e definição das linhas imaginárias para a projeção dos pontos nodais.

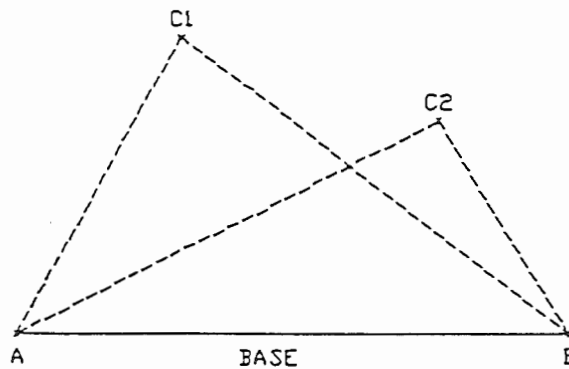


FIGURA 9 - Seleção do terceiro vértice do triângulo (LO (1985)).

- CRITÉRIO DA DISTÂNCIA:

$$D_{\text{mín.}} = \min. [(AC)^2 + (BC)^2] \quad (7)$$

- CRITÉRIO DA FORMA:

Para o ponto nodal 1:

$$\alpha_1 = \text{Área } ABC_1 / [(AB)^2 + (BC_1)^2 + (C_1A)^2] \quad (8)$$

$$\beta_1 = \text{Área } C_1BC_2 / [(C_1B)^2 + (BC_2)^2 + (C_1C_2)^2] \quad (9)$$

$$\delta_1 = \text{Área } AC_1C_2 / [(AC_1)^2 + (C_1C_2)^2 + (C_2A)^2] \quad (10)$$

$$\lambda_1 = \text{máx. } (\beta_1, \delta_1) \quad (11)$$

Para o ponto nodal 2:

$$\alpha_2 = \text{Área } ABC_2 / [(AB)^2 + (BC_2)^2 + (C_2A)^2] \quad (12)$$

$$\beta_2 = -\beta_1 \quad (13)$$

$$\delta_2 = -\delta_1 \quad (14)$$

$$\lambda_2 = \text{máx. } (\beta_2, \delta_2) \quad (15)$$

Os coeficientes α_1 e α_2 representam a qualidade da forma dos triângulos formados pela base e o respectivo terceiro vértice. Os demais coeficientes caracterizam a forma dos triângulos formados pelos candidatos a terceiro vértice e um dos pontos da base. λ_1 caracteriza a forma do triângulo adjacente ao elemento formado pela base e o ponto 1. λ_2 da mesma maneira, se o elemento resultasse da base mais o ponto 2. O valor 0,1443 caracteriza um triângulo equilátero. O ponto selecionado será aquele cujo produto dos coeficientes de forma $\alpha_1 \cdot \lambda_1$ ou $\alpha_2 \cdot \lambda_2$ for maior. Na prática, o que ocorre é a seleção do terceiro vértice cuja forma do elemento resultante seja a mais otimizada e o elemento adjacente formado pelo segundo ponto nodal (candidato a terceiro vértice desprezado) também seja de boa qualidade. Após a formação de cada elemento os contornos do domínio são atualizados.

2.6.2.3. Grupo 3

2.6.2.3.1. Método de Mapeamento "Transfinito"

HABER et al. (1981), HABER e ABEL (1982) e PERUCCHIO et al. (1982) descrevem esta técnica e a sua aplicação para a geração de malhas em duas (o primeiro) e três dimensões (os dois últimos).

A origem do nome está associada ao fato de o método descrever uma superfície ou um volume num infinito número de pontos, o que o torna bastante atraente para o modelamento de geometrias mais complexas. É um método que atende a grande maioria daquelas premissas básicas, enunciadas anteriormente, para um gerador automático de malha de elementos finitos.

No caso de duas dimensões, o mapeamento da "superfície real" (superfície física) é feito por um operador linear, denominado de projetor. Um projetor é formado por uma "função primitiva", que interpola os contornos do domínio considerado, e uma "função de forma" do tipo polinomial de Lagrange, splines cúbicas, entre outras, que combinadas dão origem a uma função interpoladora da superfície ou volume. Esta função possui características tais que a "superfície interpolada" (aproximada) é igual à "real" ao longo de curvas pré-selecionadas. O projetor mais simples é o unidirecional. A combinação de projetores desse tipo em mais de uma direção permite a interpolação de superfícies e volumes. A aplicação dessa técnica para a geração de malhas é feita através do mapeamento da superfície de forma discreta (pontual), uma vez que são de interesse, no modelo, apenas os pontos onde são locados os nós da malha de elementos. As informações entre pontos nodais, nesse caso, são suprimidas. Na prática, isso pode ser feito por meio de coordenadas paramétricas tipo comprimento de arco, radianos ou coordenadas cartesianas, por exemplo.

2.6.2.3.2. Métodos de Mapeamento com Sistema de Coordenadas Isoparamétricas e de Coordenadas de Área

ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971) conceberam um método capaz de fazer o mapeamento de quadriláteros utilizando funções de forma definidas em termos de coordenadas curvilíneas isoparamétricas. O processo de mapeamento consiste na definição da região a ser discretizada, por meio de 8 pontos no contorno, e subdivisão dos eixos de coordenadas isoparamétricas para a criação da malha com densidades de pontos nodais e de

elementos desejadas. Domínios mais complexos podem ser divididos em subregiões devidamente conectadas, aplicando-se o procedimento anterior, de acordo com o grau de discretização requerido em cada uma delas, como visto na Figura 10. As coordenadas cartesianas dos pontos nodais são obtidas utilizando-se as funções de forma do elemento quadrilátero isoparamétrico. O resultado da aplicação desta técnica são elementos quadriláteros ou triangulares, estes últimos obtidos pela divisão dos primeiros na sua diagonal menor. Entre as limitações do método estão a necessidade da continuidade do domínio (ausência de vazios) e a obrigatoriedade de um número igual de divisões em lados opostos do quadrilátero.

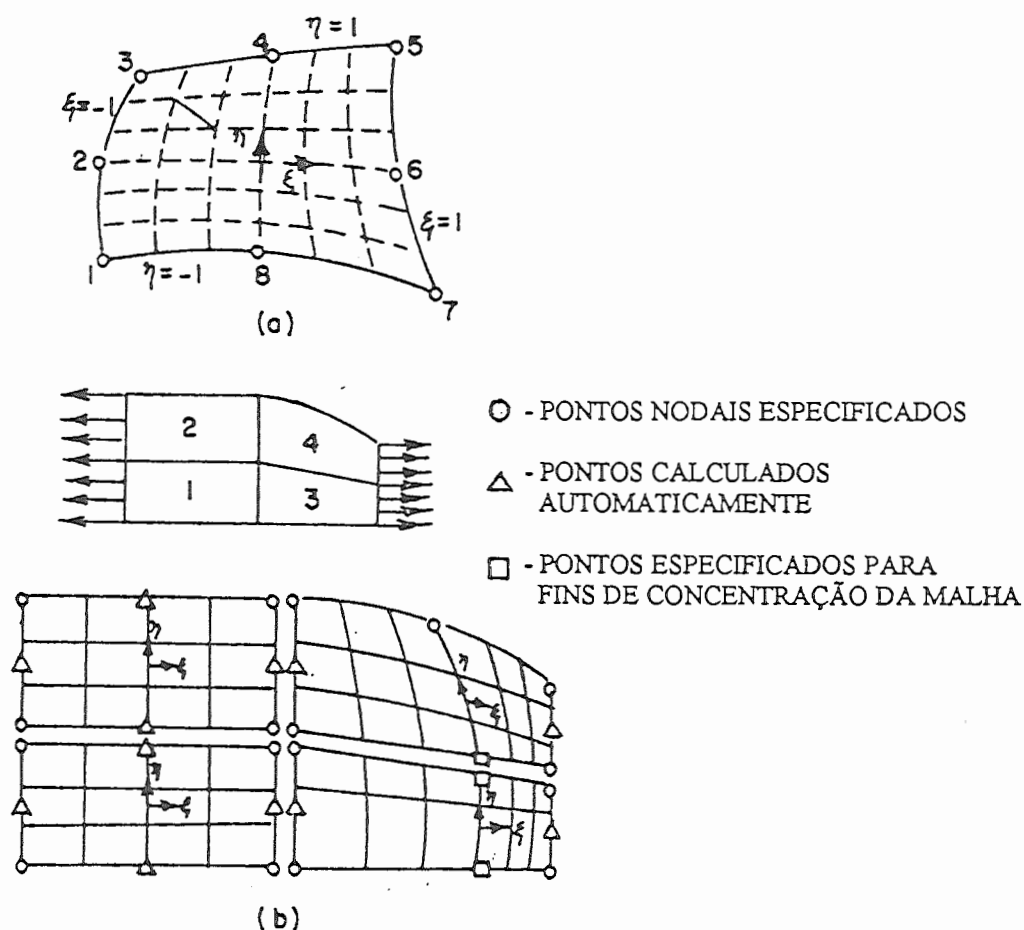


FIGURA 10 - Esquema básico de mapeamento pelo sistema de coordenadas isoparamétricas. a) definição da região pelo sistema de coordenadas locais; b) continuidade das regiões adjacentes (ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971)).

COHEN (1980) mostra uma forma de superar a limitação relacionada ao número de divisões nos lados opostos. A divisão do domínio deve ser feita manualmente, em subdomínios quadriláteros com um número de linhas e colunas de maneira que o número de colunas do topo seja maior ou igual ao número de colunas da base. A locação dos pontos nodais é feita automaticamente similarmente ao processo de mapeamento transfinito.

Já GHASSEMI (1982) apresenta o programa fonte de um gerador de malha de elementos triangulares, para o mapeamento de regiões triangulares, utilizando um sistema de coordenadas de área. O autor mostra, ainda, uma técnica com coordenadas curvilíneas isoparamétricas, que pode ser entendida como uma extensão do método de ZIENKIEWICZ e PHILLIPS (1971), obtida através da distorção de um quadrilátero fazendo coincidir dois vértices adjacentes.

2.6.2.4. Grupo 4

SADEK (1980) apresenta um esquema para a geração automática de malha em regiões multilaterais, com elementos triangulares. A região onde deve ser traçada a malha é delimitada por um número finito de pontos. A geração dos pontos e construção dos elementos é feita a partir dos vértices do polígono externo, utilizando-se uma série de procedimentos matemáticos capazes de fornecer como resultado elementos triangulares com forma próxima da equilátera. Na Figura 11 podem ser vistos os passos durante a formação dos elementos.

2.6.2.5. Método de Partição de Quadrado

Essa técnica de partição de quadrado é utilizada não somente para a geração de malhas de elementos finitos, mas, também, para o processamento de imagens, representação cartográfica, na computação gráfica em trabalhos de animação, entre outras aplicações.

Nestas últimas, pelo fato de a estrutura de dados utilizada ser compacta, há grande vantagem nas operações de transmissão de dados a grandes distâncias.

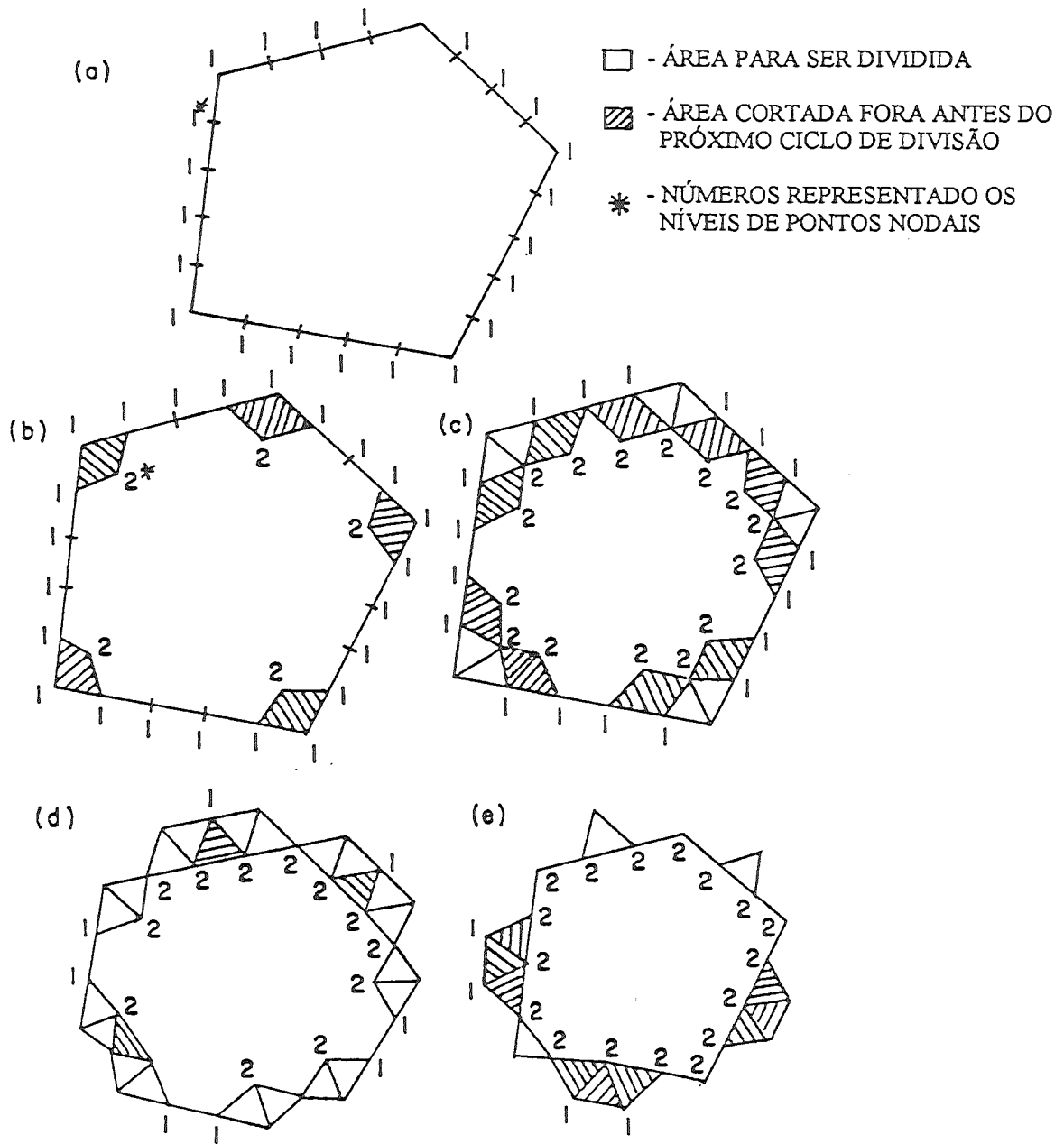


FIGURA 11 - Processo de formação dos elementos triangulares. a) definição do contorno do domínio; b), c), d) e e) formação dos elementos e atualização do contorno.

Nas descrições de SHEPHARD e YERRY (1983) e YERRY e SHEPHARD (1983), o método de partição de quadrado consiste, inicialmente, na colocação do domínio real dentro de um quadrado definido em um domínio de coordenadas inteiras. Este quadrado é subdividido em 4 quadrantes iguais e verificado se cada quadrante está totalmente fora do objeto (domínio real), parcialmente fora e parcialmente dentro ou totalmente dentro.

Os quadrantes totalmente fora ou totalmente dentro (quadrados homogêneos) são identificados e separados, enquanto os quadrantes parciais são novamente subdivididos em 4 novos quadrados. Esse procedimento é executado até que não ocorram mais quadrados parciais, o que significa obter figuras com dimensões capazes de representar satisfatoriamente todos os contornos e o interior do objeto. Deve ser salientado que, mesmo com quadrados de dimensões reduzidas, as linhas de contorno são modeladas por sucessivos degraus.

Constituem desvantagens da aplicação do método na sua concepção pura: a) o fato de o interior poder ser modelado com um número reduzido de elementos com dimensões maiores e o método nem sempre responder satisfatoriamente; b) a necessidade de cuidados especiais para manter a continuidade entre elementos com diferentes graus de subdivisões; c) problemas relacionados à representação dos contornos (degraus).

As restrições acima foram, de certa forma, eliminadas com a introdução de modificações no método original. A técnica de partição de quadrado modificada, desenvolvida pelos autores, trata melhor dos problemas relacionados ao mapeamento dos contornos. Na nova concepção, podem ser aplicados cortes nos quadrados, de maneira que um quadrado parcial se torne homogêneo, ou seja, pertença totalmente ao domínio ou esteja totalmente fora dele. As novas formas podem ser vistas na Figura 12. Nas situações em que ocorre a localização de um vértice de um quadrado ao longo do lado de outro com dimensão maior,

deve ser aplicado um tratamento especial para obter-se uma malha de transição entre diferentes níveis de quadrados, conforme Figura 13.

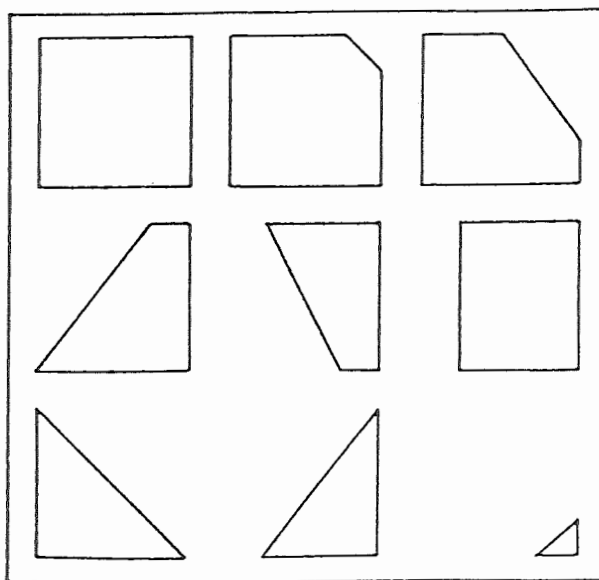


FIGURA 12 - Exemplos de formas quadradas cortadas permitidas no método de partição de quadrados modificado (YERRY e SHEPHARD (1983)).

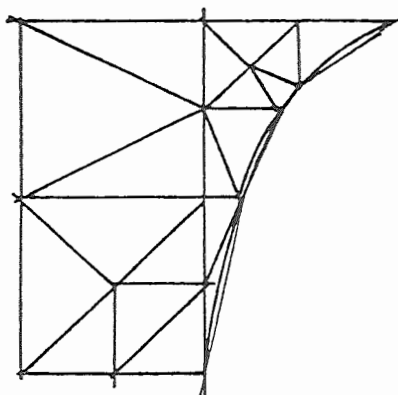


FIGURA 13 - Transição entre quadrados de diferentes dimensões (YERRY e SHEPHARD (1983)).

2.6.3. Método Específico para o Estudo de Propagação de Fratura

Aparentemente não há uma técnica específica capaz de resolver os problemas onde se deseja simular a propagação de fraturas. Aspectos como a impossibilidade da definição prévia do caminho a ser percorrido pela fratura, a configuração especial dos elementos nas pontas da fratura e a utilização de elementos junta ao longo dela, entre outros, tornam o processo de geração de uma malha aceitável (elementos com boa forma) um trabalho extremamente complicado sob o ponto de vista de um algoritmo computacional. Assim, o método a ser utilizado deve ser bastante versátil, capaz de conviver com rotinas específicas para o tratamento de regiões nas proximidades e ao longo da fratura. Uma das condições indispensáveis ao método é a sua aplicação a domínios com geometria irregular.

Recentemente, WAWRZYNEK e INGRAFFEA (1989), num dos raros trabalhos específicos sobre o assunto, implementaram no programa "FRANC" (FRacture ANalysis Code) procedimentos capazes de gerar automaticamente uma malha de elementos finitos contendo uma fratura na sua conformação e reorganizar esta malha à medida que a fratura se propaga dentro da estrutura. Segundo os autores, a estrutura de dados da matriz de incidência dos elementos e coordenadas dos pontos nodais facilita o rearranjo da malha nas proximidades da ponta da fratura. Por outro lado, são extremamente sucintos na explanação, tornando impossível o entendimento de como funciona operacionalmente o armazenamento desses dados. O algoritmo tem características interativas, permitindo ao usuário modificações durante a geração e reorganização da malha.

2.7. Técnicas de Redução da Banda da Matriz de Rigidez Global

O trabalho de renumeração da malha visa reduzir a largura da banda da matriz de rigidez global da estrutura em análise. A redução da banda concorre para a minimização da quantidade de memória necessária, melhor condicionamento do sistema, tendo como resultado maior precisão nos cálculos, além de minimizar o tempo de processamento.

O procedimento de renumeração da malha após a sua conclusão se faz necessário à medida que os pontos nodais não podem ser gerados e numerados de forma regular, ao longo de uma única direção, durante a geração. Em se tratando de problemas de mecânica da fratura, onde determinados tipos de elementos necessitam rotinas especiais para a sua geração (elementos crack tip e junta) e, portanto, fogem ao processo normal de geração, torna-se praticamente uma imposição renumerar a malha final.

Várias são as estratégias utilizadas para a renumeração dos pontos nodais para a redução da largura da banda. RAMALHO e CORRÊA (1980) propõem um procedimento alternativo para a melhoria da eficiência da técnica de COLLINS (1973). Os autores, além da proposição, citam esta técnica e a de CUTHILL-MCKEE (1969) como as melhores, considerando a simplicidade, eficiência e segurança do processo como parâmetros de análise.

A técnica proposta por Cuthill-Mckee, baseia-se na teoria dos grafos e consiste, inicialmente, na determinação das sementes, que são os nós com o menor número de pontos nodais ligados a ele. Tendo cada semente como nó número 1 (inicial) para a numeração de toda a malha, passa-se à numeração seqüencial de cada nó às suas conexões imediatas. Adota-se o esquema de numeração que produziu a menor largura de banda.

O método de Collins toma cada ponto nodal como uma semente (nó inicial) para a numeração da malha. O processo é o mesmo que o acima, porém, a cada nova semente, durante a numeração, é verificado se a diferença entre pontos nodais nos elementos é maior que a observada considerando alguma semente anterior. Em caso positivo, o processo de numeração é abandonado passando-se a próxima semente.

aparentemente poderia parecer mais demorado porque utiliza todos os nós como sementes, em geral é mais rápido que Cuthill-McKee, uma vez que não dispende tempo nenhum para a preparação das sementes.

3. DESENVOLVIMENTO DO GERADOR DE MALHA INTERATIVO

3.1. Introdução

Com a evolução dos computadores aumentaram as facilidades para a utilização de programas com saídas gráficas. Com essa nova forma de comunicação, os programas foram orientados no sentido de permitir a interação usuário/máquina durante a execução do mesmo.

Na engenharia, nos estudos do comportamento tensão/deformação das estruturas via métodos numéricos, essa filosofia foi incorporada com grandes vantagens sobre os programas fechados. Em se tratando da utilização do método dos elementos finitos, esses avanços se fizeram sentir nas fases de pré e pós-processamento, ou seja, na preparação dos dados de entrada (malha de elementos) e no tratamento dos resultados. Na realidade, a preparação da malha de elementos parece ter sido a mais beneficiada, tendo em vista a sensível redução do tempo dispendido e a flexibilidade para modificações numa malha durante a sua preparação, fato não possível quando usados programas geradores automáticos ou processos manuais.

Nos estudos de problemas de mecânica da fratura utilizando o método dos elementos finitos, a malha é composta de diferentes tipos de elementos com distribuição segundo configurações as mais variadas possíveis. Essas configurações são, ainda, modificadas à medida que a fratura se propaga. Tais características tornam praticamente impossível o desenvolvimento de um programa que cumpra automaticamente todos os requisitos necessários para uma malha inicial e a malha após cada incremento nas fraturas. Nesse caso,

então, a possibilidade de interação durante a geração da malha parece ser característica imprescindível ao programa.

A técnica utilizada para a geração dos pontos nodais e elementos no interior do domínio, neste trabalho, foi a de LO (1985), descrita no item 2.6.2.2.2., fazendo-se pequenas adaptações e correções no sentido de torná-la mais eficiente. Nos itens a seguir, são apresentadas as características básicas do programa gerador de malha de elementos finitos para o estudo de problemas utilizando a teoria da mecânica da fratura. São abordados os aspectos relacionados à entrada dos dados que definem o domínio a ser discretizado, ao processo de geração dos pontos nodais e elementos nas diferentes regiões, à capacidade das rotinas de edição da malha e à renumeração da malha após a sua conclusão.

3.2. Seleção da Linguagem de Programação

A escolha da linguagem de programação a ser utilizada levou em consideração os mais variados aspectos, desde aqueles influentes a curto prazo até os importantes tendo em vista avanços futuros no sistema que ora está sendo proposto.

Num primeiro momento, os aspectos observados numa linguagem para o desenvolvimento de programas são aqueles que de uma forma ou de outra facilitam a vida do programador para a solução do seu problema. Essas facilidades podem ser traduzidas pela existência de comandos e funções variados, bibliotecas pré-fabricadas, enfim, elementos que facilitem ao programador o desenvolvimento dos algoritmos. No caso em apreço, a riqueza e a diversidade de opções para a criação de rotinas gráficas foram importantes na escolha da linguagem a utilizar.

Se pensarmos em termos de utilização dos programas desenvolvidos para análises mais elaboradas que as previstas no momento, surgem fatores pouco conhecidos dos

profissionais da área de engenharia, que têm a informática como uma ferramenta na solução dos seus problemas. Podem ser destacados aspectos como a portabilidade dos programas, a possibilidade de expansão em grande escala do número de variáveis, a velocidade de processamento, facilidades de manutenção do programa, somente para exemplificar.

Tanto a portabilidade como a velocidade de processamento dos programas estão diretamente ligados à economia de recursos financeiros. A primeira característica está ligada à facilidade com que um programa pode ser adaptado de um tipo de máquina para outro, enquanto a segunda se relaciona ao consumo hora/máquina, ambas resultando em grande economia. As facilidades para a manutenção e/ou expansão dos programas também resultam em grande economia, sendo de suma importância quando se quer tornar os avanços a serem implementados uma tarefa menos árdua. Nessa direção, as contribuições são dadas pelas chamadas linguagens estruturadas.

Considerando o tipo de trabalho desenvolvido, a linguagem de programação "C" parece ser uma das que melhor pondera os aspectos, dentre tantos, citados acima. Se por um lado é uma linguagem perigosa sob o ponto de vista do programador, por outro lado, oferece uma grande quantidade de facilidades para o desenvolvimento de algoritmos complexos, rotinas gráficas e de interatividade.

No que se refere aos compiladores utilizados, vale dizer que procurou-se a compatibilização dos mesmos visando o acoplamento futuro dos dois programas (programa gerador de malhas, em "C" e o programa de elementos finitos, em "FORTRAN") que compõem o sistema para análises de propagação de fraturas.

3.3. Entrada de Dados

O arquivo com os dados de entrada é do tipo texto. No ANEXO A é apresentado o manual para a preparação do arquivo dos dados de entrada. É adotado um sistema de eixos de coordenadas cartesianas X, Y , com X positivo na horizontal para a direita e Y positivo na vertical para cima. As informações necessárias podem ser divididas em quatro blocos:

- informações gerais;
- vinculação dos pontos nodais e cargas concentradas;
- informações sobre as fraturas;
- informações sobre os contornos e pontos fixos no interior do domínio.

3.3.1. Informações Gerais

Os dados deste bloco dizem respeito às características gerais do problema, como título e subtítulo, tipos de materiais com as constantes elásticas e os parâmetros de rigidez das fraturas, além do tipo de análise a ser efetuado (deformação plana ou tensão plana). As informações são utilizadas apenas na fase final da geração da malha, durante a montagem do arquivo de dados a ser usado pelo programa de elementos finitos "FRAT".

3.3.2. Vinculação dos Pontos Nodais e Cargas Concentradas

Quanto à vinculação, os pontos nodais são codificados como livres automaticamente durante a geração da malha. Portanto, são necessárias apenas as informações relativas àqueles pontos onde existe algum tipo de vínculo. Tanto as informações sobre a vinculação como as relativas às cargas, devem ser associadas às coordenadas do ponto nodal. A alternativa de relacionar as informações às coordenadas e não ao número do nó levou em consideração dois aspectos: primeiro, o fato da numeração dos pontos ser feita em diferentes estágios do processamento e sofrer freqüentes modificações quando são

utilizadas as rotinas de edição da malha; segundo, como forma de minimizar o tamanho dos vetores que armazenam as informações de uso contínuo durante a geração.

3.3.3. Informações sobre as Fraturas

Nessa primeira versão do programa poderão ser modeladas até 10 fraturas. Cada fratura é definida por meio de segmentos de reta. São associadas, ainda, informações para que as fraturas sejam ou não modeladas com elementos junta na interface das paredes. O modelamento de problemas sem a presença de fraturas é feito sem as informações desse bloco.

3.3.3.1. Informações Adicionais sobre a Propagação da Fratura

Essas informações podem ser comunicadas ao gerador de duas formas: ou através do arquivo "coordpon.tas", no formato texto, ou diretamente através da modificação do arquivo de dados lido pelo gerador. O arquivo "coordpon.tas", como será visto adiante (item 4 e subitens), é montado pelo programa "FRAT" e contém as informações sobre as fraturas que se tenham propagado e a nova posição das pontas. Com essas informações o gerador atualiza os contornos das fraturas, automaticamente, na última versão do arquivo de dados do problema. O arquivo atualizado é usada para a geração da malha de elementos com a nova configuração das fraturas.

3.3.4. Informações sobre os Contornos e Pontos Fixos no Interior do Domínio

O contorno externo é delineado através de segmentos lineares, conectados no sentido anti-horário. Podem ser ou não associadas às coordenadas iniciais e finais do segmento, fatores de densidade de elementos. Esses fatores representam o tamanho médio do elemento que deverá ser formado na região da ordenada do início do segmento. Assim, numa determinada

ordenada, o tamanho do lado dos elementos deverá ser o mesmo ao longo de qualquer abcissa. Esses mesmos fatores são utilizados para a subdivisão dos segmentos dos contornos, automaticamente.

Da mesma maneira que o contorno externo, os contornos internos (vazios, se existirem) são modelados utilizando segmentos de reta, porém, orientados no sentido horário. Essa orientação dos segmentos faz com que a região do domínio a ser discretizada esteja sempre à esquerda dos mesmos, aspecto de grande utilidade no processo de geração dos futuros pontos nodais e elementos. As informações associadas aos segmentos dos contornos internos são as mesmas do contorno externo.

Os pontos fixos no interior do domínio são tratados como segmentos com início e fim num mesmo ponto. O formato de entrada é o mesmo dos segmentos.

3.4. Geração dos Pontos Nodais e Elementos

Tanto a geração dos pontos nodais como a dos elementos ocorre em momentos e áreas do programa bem distintos. A adoção de tal expediente se deve, primeiro, à impossibilidade de gerar todos os elementos com uma única rotina, por causa dos elementos com diferentes formas e características e, segundo, pela facilidade para a manutenção do programa, ou mesmo, a incorporação de desenvolvimentos futuros. Em linhas gerais, o programa trata primeiro de regiões críticas, como as pontas das fraturas e ao longo delas, promovendo uma espécie de isolamento das mesmas. Posteriormente, trabalha na geração da malha no restante do domínio. Assim, no processo global de preparação da malha são identificadas três fases básicas na geração da malha:

- geração dos elementos da ponta da fratura;
- geração dos elementos junta ao longo da fratura;
- geração dos elementos no interior do domínio.

3.4.1. Geração dos Elementos na Ponta da Fratura

Nesse local são gerados elementos triangulares de 6 pontos nodais com os pontos nos lados adjacentes à ponta da fratura distantes um quarto do lado (elementos "crack tip"). A definição do tamanho do lado dos elementos varia conforme as situações a seguir:

- a) em fraturas com segmento único o tamanho do lado corresponde à 7,5% do comprimento total da fratura;
- b) em fraturas com segmentos múltiplos, inicialmente determina-se a dimensão do lado dos elementos como em a). Se essa dimensão for superior a 75% do comprimento do segmento adjacente à fratura, o tamanho do lado do elemento será igual ao segmento. Se essa dimensão for inferior a 75% e superior a 25% do comprimento do segmento adjacente, o tamanho do lado do elemento será a metade do seu comprimento. Se a dimensão for inferior a 25%, o tamanho do lado do elemento será a própria dimensão calculada.

Os pontos nodais dos vértices dos elementos são gerados sob um círculo centrado na ponta da fratura e de raio equivalente ao tamanho do lado do elemento. A distância de um ao outro corresponde a comprimentos de arco de 45°, medidos a partir da fratura no sentido anti-horário, como mostra a Figura 14. Esse procedimento permite a formação de uma roseta com 8 elementos triangulares "crack tip". Os pontos nodais nos lados são gerados durante a formação dos elementos. Todos os pontos nodais desses elementos, já numerados, passam a fazer parte do arquivo de coordenadas ("coordena.bin") e os elementos são arquivados no arquivo de incidências ("inciden.bin"). Os segmentos de contorno das rosetas, contendo as coordenadas do segmento e numeração dos pontos nodais, são armazenados em arquivo temporário ("tempora.bin"). Todos esses arquivos são do tipo binário, o que torna o seu manuseio mais rápido durante o processamento.

3.4.2. Geração dos Elementos Junta ao Longo da Fratura

Essa rotina é capaz de gerar elementos para o modelamento da parcela da fratura externa às rosetas. Podem ser formados elementos de 4 (2 nós em cada ponta) ou 6 pontos nodais (idem 4 pontos, mais 2 nós no meio do elemento), com espessura ZERO, ou seja, as coordenadas dos pontos nodais das pontas e do meio do elemento são coincidentes, conforme Figura 15. O tamanho padrão dos elementos corresponde a 1,5 vezes o tamanho dos elementos "crack tip" da ponta da fratura mais próxima (a proximidade da ponta da fratura é medida tomando como unidade o número de segmentos). Na realidade, o lado dos elementos junta depende do número de divisões possíveis nos segmentos que compõem a fratura. Pode variar de 0,8 a 1,2 do tamanho padrão, aproximadamente, dependendo do comprimento de cada segmento que define a fratura. A matriz de incidência desse elemento também é armazenada no arquivo de incidências enquanto os segmentos do contorno da fratura (segmentos de ida e volta) são gravados no arquivo temporário. A união entre os segmentos de contorno da roseta com os segmentos da fratura formam um contorno interno, porém, com um aspecto que o diferencia de um vazio. Um vazio normal não possui segmentos sobrepostos como ocorre com os segmentos ao longo da fratura, como visto na Figura 16.

3.4.3. Geração dos Elementos no Interior do Domínio

Nessa fase, especificamente, é utilizada a técnica de LO (1985), tanto para a geração dos pontos nodais interiores como dos elementos triangulares. Conforme descrito anteriormente (item 2.6.2.2.2), primeiro são gerados os pontos para posteriormente serem formados os elementos triangulares.

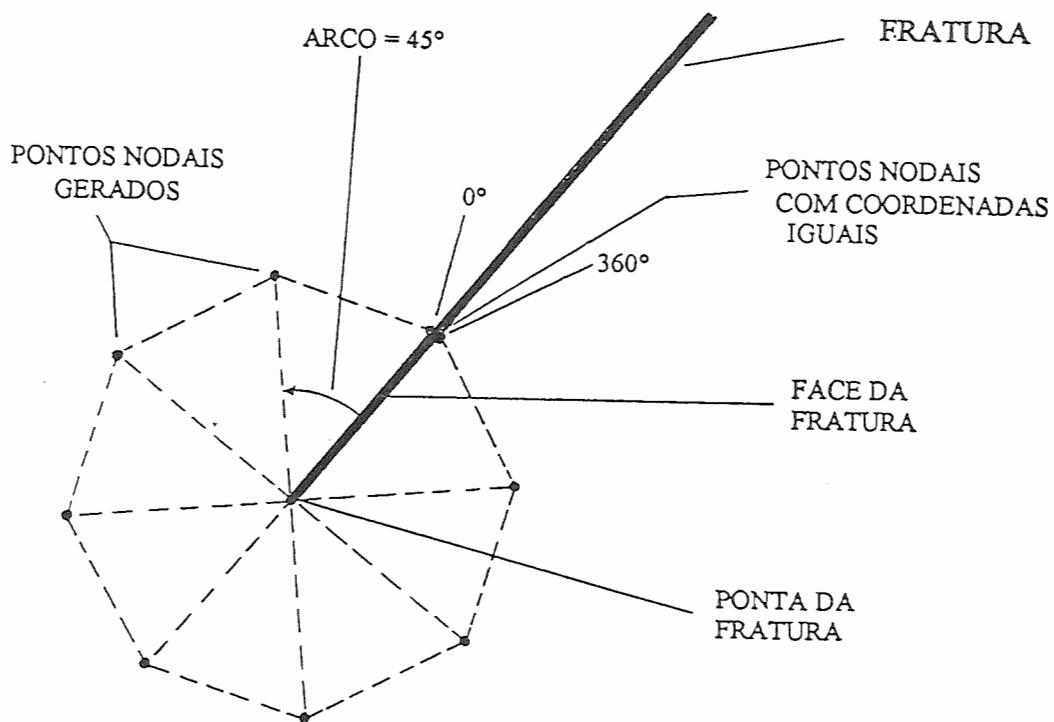
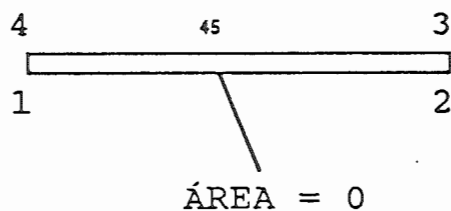


FIGURA 14 - Esquema de formação dos elementos "crack tip" na ponta da fratura.

Elemento JUNTA de 4 Pontos Nodais



Coordenadas (nó 1 \equiv nó 4; nó 2 \equiv nó 3)

FIGURA 15 - Configuração do elemento junta.

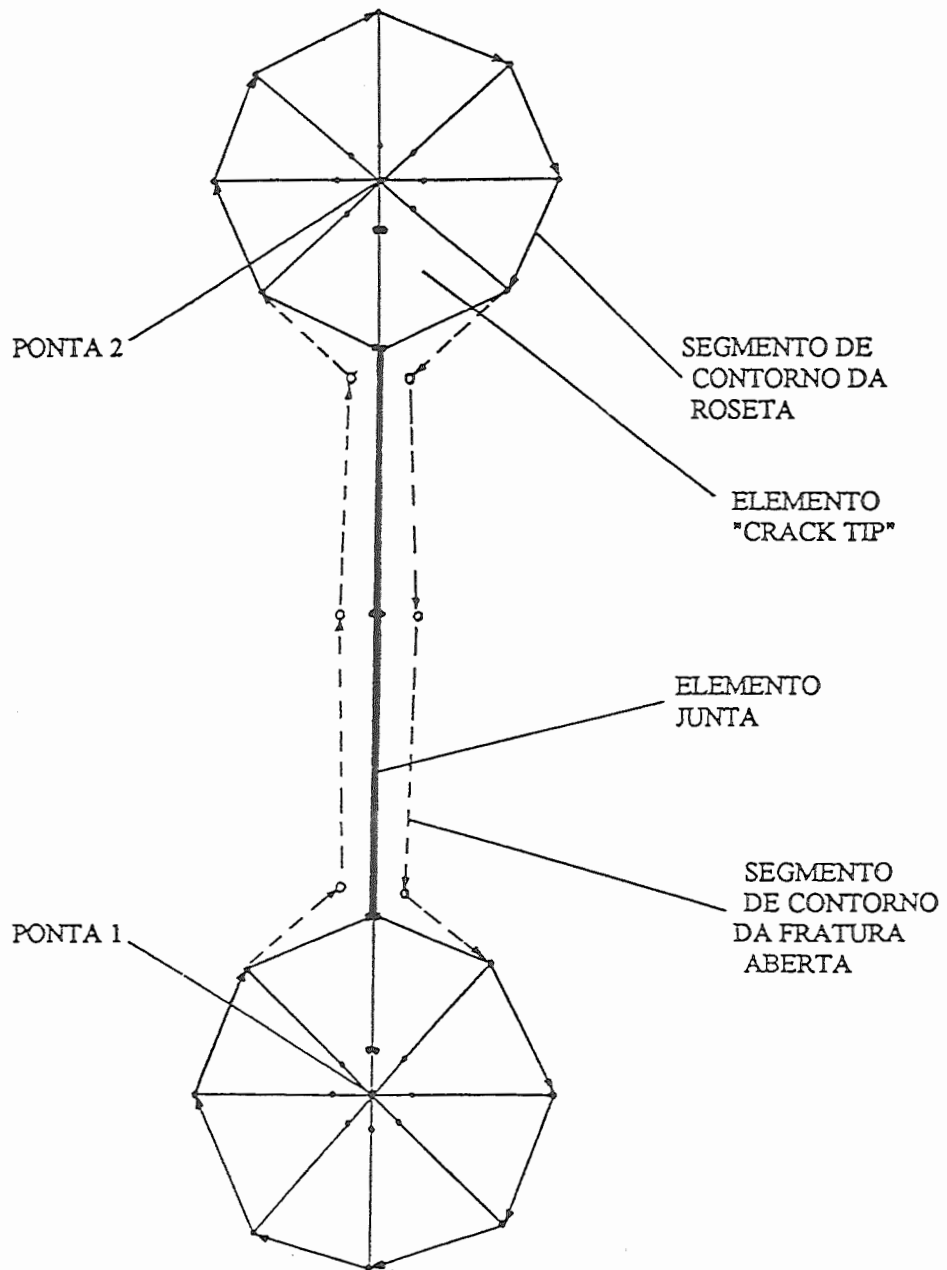


FIGURA 16 - "Vazio" formado pelos contornos das rosetas e segmentos ao longo da fratura.

3.4.3.1. Geração dos Pontos Nodais

O primeiro passo consiste na geração dos pontos nodais no meio dos segmentos dos contornos externo e internos (exceto contorno de roseta e fratura). Isso ocorre através da divisão de cada segmento de acordo com o fator densidade associado a ele. O número de pontos nodais no interior do segmento é definido pelo resultado (inteiro mais próximo) da divisão do comprimento do segmento pelo fator densidade, menos 1. O comprimento final de cada novo segmento é dado pela divisão do comprimento original pelo número de pontos nodais.

No interior do domínio, os pontos nodais são locados sobre linhas imaginárias paralelas ao eixo das abcissas (ordenada constante). A definição da ordenada dessas linhas obedece ao seguinte procedimento:

- a) determina-se a ordenada da primeira linha base, que é igual à ordenada mínima do domínio a ser discretizado;
- b) define a ordenada da linha imaginária, cuja distância da base corresponde ao fator densidade do segmento mais próximo (ordenada do seu início) da ordenada da base. Após serem gerados os pontos nodais sobre essa linha, ela passa a ser a nova linha base;
- c) repete-se o procedimento b) até ser alcançada a ordenada máxima do domínio.

Cada linha imaginária corta os contornos sempre um número par de vezes. Se cortar apenas o contorno externo, serão dois cortes (1 segmento). Se cortar o contorno externo e um contorno interno, por exemplo, serão 4 cortes (2 segmentos). Deve ser notado que os segmentos pertencentes à região de interesse do domínio sempre estão à esquerda dos segmentos de contorno que os definem. Sobre cada segmento pertencente ao domínio a ser discretizado, são gerados "possíveis" pontos nodais, da mesma forma como são gerados os pontos nos segmentos dos contornos externo e internos. O ponto gerado se constituirá num futuro ponto nodal somente se a uma distância igual a $(0,7 \cdot \text{fator densidade})^2$ não houver nenhum outro ponto nodal.

Todos os pontos nodais gerados sobre os segmentos dos contornos bem como aqueles no interior do domínio são numerados e passam a integrar os arquivos de coordenadas dos pontos nodais e temporário com os segmentos dos contornos.

3.4.3.2. Formação dos Elementos

O início da geração da malha no interior do domínio é precedida por uma série de procedimentos visando o perfeito funcionamento do algoritmo, propriamente dito, de formação dos elementos. O primeiro passo consiste na montagem de uma matriz contendo as informações sobre todos os segmentos dos contornos, pontos nodais e a numeração dos mesmos, as quais são coletadas no arquivo de dados temporário. Essas informações são filtradas de maneira a eliminar possível superposição entre pontos nodais ou entre segmentos e pontos nodais. Também, visa detectar o cruzamento de segmentos, o que pode ocorrer quando o contorno de uma roseta se sobrepõe a outra, a segmentos de fratura ou a segmentos dos contornos externos e internos. Outro procedimento importante trata-se da "abertura" da fratura. Esse expediente visa eliminar problemas quando um ponto nodal pertencente ao contorno da fratura é escolhido como terceiro vértice para a formação dos elementos triangulares. Não se pode esquecer que ao longo da fratura sempre há dois pontos nodais com a mesma coordenada, um de cada lado da fratura. Quando um desses pontos é selecionado torna-se praticamente impossível saber o lado da fratura a que pertence. Com a abertura da fratura, é possível a aplicação do teste de superposição de elementos, visto adiante, e assim fazer a escolha do ponto nodal válido para terceiro vértice do triângulo.

Para a formação dos elementos existem duas rotinas, uma para elementos triangulares de 6 pontos nodais (3 nos vértices e 3 no meio dos lados) e outra para elementos de 3 nós. As diferenças entre elas estão localizadas no algoritmo de montagem, propriamente dito, do

elemento. Quando são formados elementos de 6 pontos, os nós do meio dos lados devem ser gerados e numerados simultaneamente à formação do elemento.

A montagem dos elementos possui duas fases distintas. Na primeira, é feita a escolha de dois candidatos a terceiro vértice (critério da distância) e selecionado aquele que possibilita a formação do elemento triangular com a melhor forma (critério da forma). Na segunda, é montada a incidência do elemento, atualizados os arquivos de dados de incidência e coordenadas, além da atualização da matriz com os segmentos de contornos e pontos nodais do interior.

Partindo de um segmento de contorno (base formada por dois pontos), selecionam os dois pontos nodais mais próximos da base e situados à esquerda dela. A escolha é feita considerando todos os pontos nodais disponíveis para a formação de elementos. LO (1985) propõe que a escolha seja feita utilizando para o cálculo da distância "ponto-base" a expressão: $\min [(B_1C)^2 + (B_2C)^2]$, que corresponde à equação (7) do item 2.6.2.2.2.. Essa expressão tenderá a selecionar pontos que dêem origem a triângulos com forma mais próxima da equilátera, o que se constitui num fato positivo para a formação de uma boa malha. Por outro lado, em situações um tanto especiais, ela falha na seleção do terceiro vértice, como no exemplo da Figura 17, onde os pontos C_1 , C_2 e C_3 são os mais próximos à esquerda da base. Deve ser notado que $[(B_1C_1)^2 + (B_2C_1)^2]$ é maior que $[(B_1C_2)^2 + (B_2C_2)^2]$ e $[(B_1C_3)^2 + (B_2C_3)^2]$, o que faz com que o ponto C_1 seja preterido aos dois outros pontos. Independente de qual ponto seja escolhido (C_2 ou C_3) para formar o elemento, o ponto C_1 estará contido nesse elemento. As soluções para tal problema podem ser as seguintes, entre outras:

- modificação da expressão acima para $\min [(B_1C + B_2C)]$;
- criação de um algoritmo capaz de detectar a existência de ponto disponível no domínio dentro do elemento recém formado, e eliminá-lo da lista;

O programa adota a primeira alternativa, uma vez que o prejuízo na qualidade da malha se mostrou praticamente desprezível. A segunda alternativa, por sua vez, apresenta como desvantagem a necessidade de teste de ponto nodal contido em elemento, que deve ser feito após a formação de cada elemento. Isso implicaria tempo adicional de processamento, considerável em caso de malhas com grande quantidade de pontos nodais (mais de 2000, por exemplo).

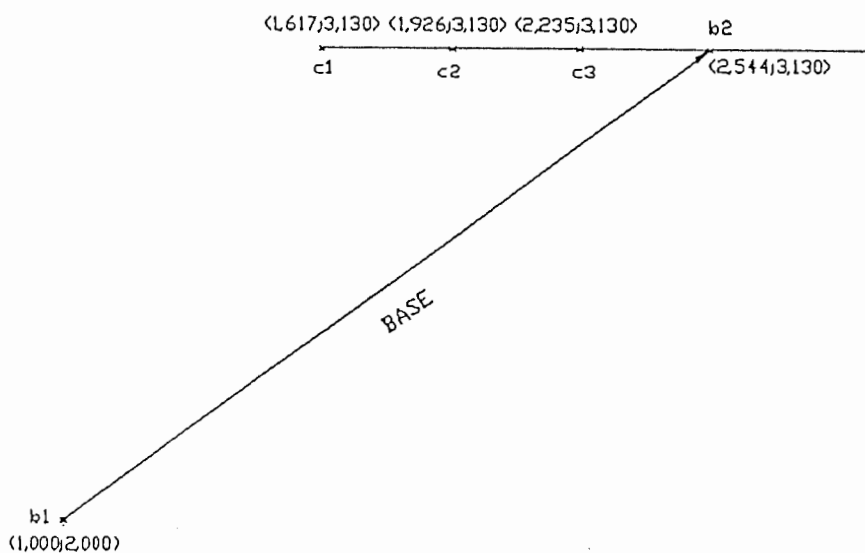


FIGURA 17 - Situação de inconsistência no processo de seleção do terceiro vértice de elemento triangular.

Outra situação de inconsistência verificada durante o processo de escolha do terceiro vértice é apresentada na Figura 18. Segundo o autor da técnica, uma boa distribuição dos pontos nodais no domínio dispensa a execução de teste de superposição de elemento (total ou parcial) após a sua formação, tornando o algoritmo mais veloz. No exemplo da figura nota-se que a formação do elemento com as linhas descontínuas implicará superposição parcial de elementos, mesmo que a distribuição de pontos pareça atender a premissa do autor. Para assegurar a não ocorrência deste tipo de erro é aplicado um teste de validade do

possível terceiro vértice. O ponto nodal será válido para terceiro vértice somente se o segmento formado pelo ponto médio da base e o ponto C não cruzar com nenhum segmento dos contornos atualizados da malha.

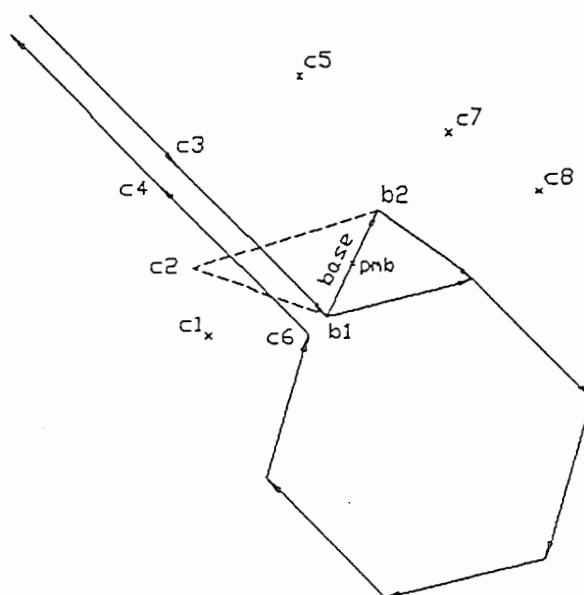


FIGURA 18 - Situação de possível superposição de elementos.

Uma vez definidos os dois possíveis pontos para o terceiro vértice, a seleção do melhor é feita de maneira a dar origem a um elemento triangular com a forma mais próxima da equilátera. As expressões matemáticas utilizadas para a avaliação da forma são aquelas do item 2.6.2.2.2., de (8) a (14). A condição de contorno do produto dos coeficientes de forma $\alpha \cdot \lambda$ maior define o melhor ponto entre os dois.

3.5. Modo de Operação

O programa utiliza uma tela gráfica dividida em três setores. O central e maior, é usada para a apresentação dos dados relativos à malha nos vários estágios do processo de geração

(dados de entrada, malha com os elementos junta e "crack tip", malha completa). O setor à direita mostra o menu secundário, de edição da malha de acordo a opção em uso. Na base da tela, é apresentado o menu de opções principal do programa, de acordo com a evolução da geração da malha. Todos os menus são auto-explicativos e os comandos utilizados são de uso corrente na maioria dos programas aplicativos conhecidos.

A partir da inicialização do programa devem ser seguidas as opções do menu principal. Com este menu ativo, duas opções sempre presentes são dadas pelas teclas <ESC>, que ativa a saída do sistema, e a tecla <ENTER>, que dá prosseguimento ao processo de geração da malha. Esse processo pode ser considerado finalizado quando, após a malha estar definida, for teclado <ENTER>. Nesse momento ocorre a renumeração da malha, automaticamente, e gravação dos dados no arquivo padrão do programa "FRAT". As demais opções, classificadas de edição, que podem ser utilizadas entre cada passo da geração, são as seguintes:

- tecla <F2>: ativa a rotina que permite a inserção de pontos nodais na malha;
- tecla <F3>: ativa a rotina para a efetivação de modificações na malha, através da supressão de elementos, inserção de pontos nodais e reorganização da malha;
- tecla <F4>; ativa uma rotina que possibilita a visualização da malha com a numeração dos pontos nodais e incidência dos elementos.

Essas opções de edição são apresentadas em função da fase da geração, podendo ser usadas durante e após a formação da malha completa. No tocante às formas de apresentação da malha, o programa permite tanto a visualização, como a própria execução do trabalho de modificações (inserção de pontos nodais, supressão de elementos), utilizando os modos "malha total" e "detalhe". Normalmente é utilizado o modo malha total. A criação do modo detalhe é feita selecionando dois vértices de uma diagonal da janela que se deseja estudar. Essa opção de trabalho torna possível a melhor visualização das regiões com grande

concentração de pontos nodais ou elementos de dimensões reduzidas em relação aos maiores. Também, permite ver a malha em verdadeira grandeza.

O menu apresentado na janela à direita possui como teclas ativas:

- <←>, <→>, <↑> e <↓>, para a movimentação do cursor. As coordenadas onde está posicionado o cursor são apresentadas na região superior da janela;
- a tecla <A>, que permite a modificação do avanço do cursor. Com a tecla <A> ativa, o usuário deve usar as setas <↑> e <↓> para incrementar ou decrementar o valor do avanço (1 a 30) e teclar <ENTER> para confirmar a escolha do novo avanço e ativar as demais opções do menu;
- tecla <ENTER>, utilizada para selecionar os vértices da janela de detalhe. Após o segundo ser selecionado, automaticamente, é apresentada a porção definida pela janela na forma de detalhe;
- tecla <INS>, usada para inserir ponto nodal;
- tecla , serve para apagar o elemento sobre o qual está posicionado o cursor.

3.5.1. Opção de Inserção de Pontos Nodais

Esta opção permite a inserção de pontos nodais na região do domínio de interesse, externa ao contorno definido por cada fratura e as rosetas nas suas pontas. Duas são as fases em que podem ser inseridos pontos nodais.

A primeira fase ocorre durante a geração da malha. Após a apresentação dos dados de entrada podem ser inseridos pontos nodais. Esses pontos serão incorporados ao arquivo de dados original, sem fator densidade associado. Outra possibilidade de inserção ocorre após finalizada a geração dos elementos junta, elementos na ponta da fratura e pontos no interior do domínio. Essa fase assume grande importância, à medida que permite melhorar a densidade de pontos em regiões onde, pelo processo automático, não foi obtida a densidade



desejada. A seqüência da Figura 19 mostra a densidade inicial de pontos nodais após a geração dos pontos nodais no interior (a) e o aumento dessa densidade em zonas de interesse, utilizando a rotina de inserção (b).

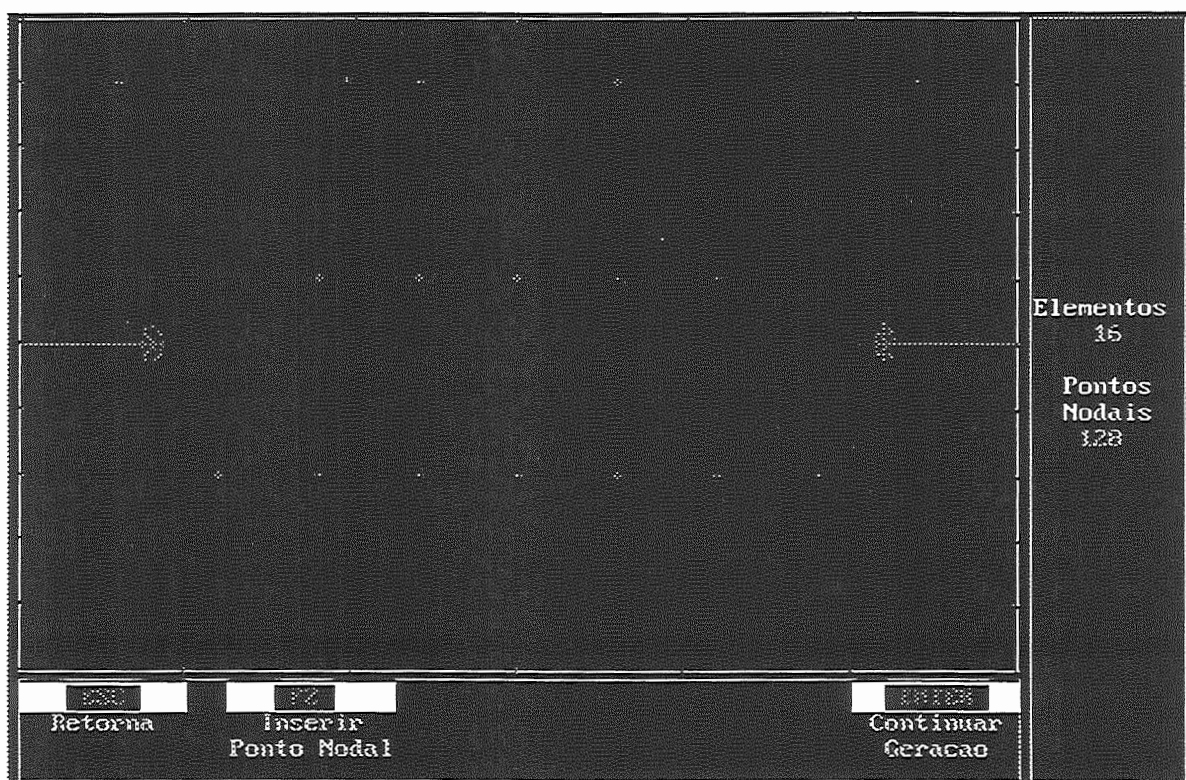
A segunda fase se estabelece após a geração da malha total. A inserção de pontos nodais, nesse momento, torna possível a divisão de elementos de grandes dimensões em três novos elementos, como mostra a Figura 20.

3.5.2. Opção para Apagar Elemento

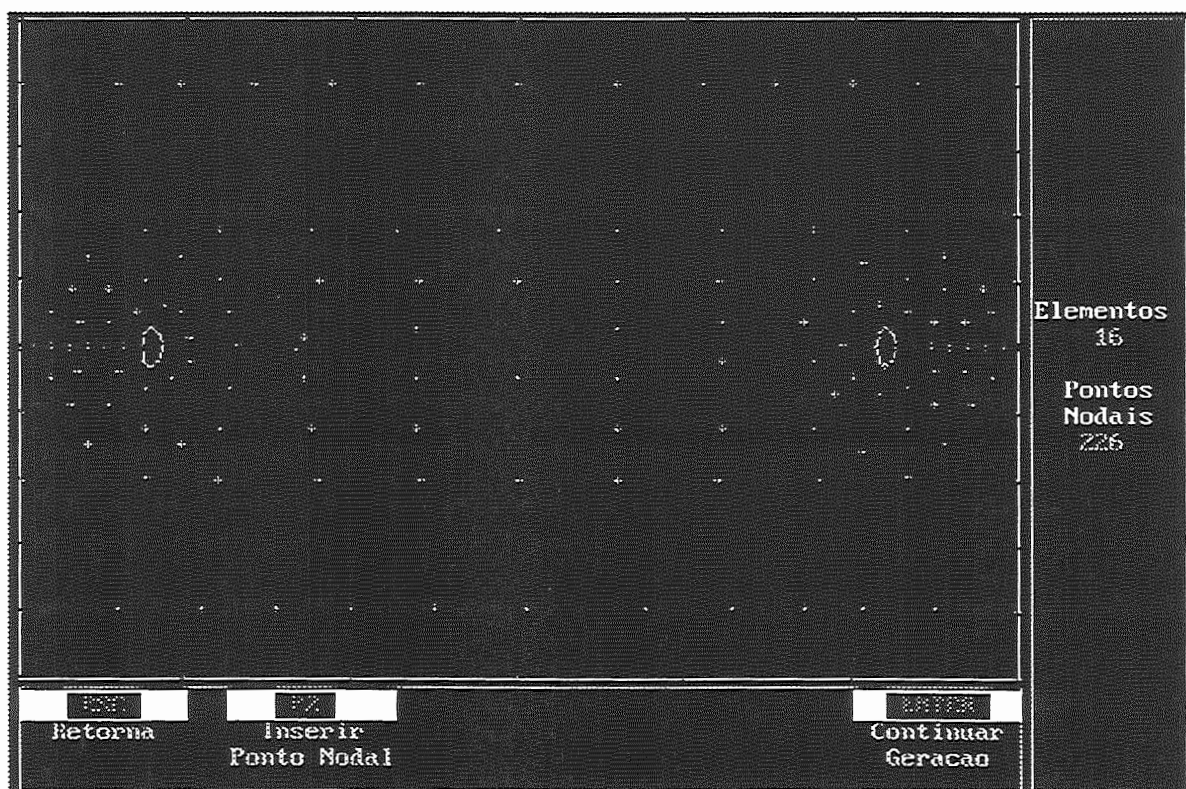
Essa opção se constitui numa das mais importantes ferramentas do programa. Após a formação completa da malha, é possível tanto aumentar como diminuir a densidade de elementos em todo o domínio, exceto nas regiões de elementos "crack tip", junta e, de certa forma, nos contornos, onde não é possível a modificação do tamanho dos segmentos. Com esse tipo de recurso é possível a criação de uma malha grosseira no interior e, posteriormente, densificar as regiões de interesse de acordo com as necessidades.

O processo, nesse caso, consiste na supressão dos elementos um a um através do posicionamento do cursor sobre o elemento seguido da tecla (automaticamente são suprimidos os elementos vizinhos). Uma vez definida a região na qual se deseja refazer a malha, deve ser inserido pelo menos um ponto nodal.

Podem ser criadas várias regiões desde que não seja ultrapassado o número 100, entre a soma dos segmentos de contorno das diversas regiões e os pontos nodais inseridos nas mesmas. A atualização da malha é feita utilizando a tecla <F1>. Podem ser efetuadas modificações tantas vezes quanto necessárias, inclusive onde a malha não for mais a original, desde que obedecido o limite acima.



a)



b)

FIGURA 19 - Exemplo de utilização da rotina de inserção de pontos nodais, após a geração dos pontos nodais automaticamente. a) densidade original; b) densidade após a inserção de novos pontos nodais.

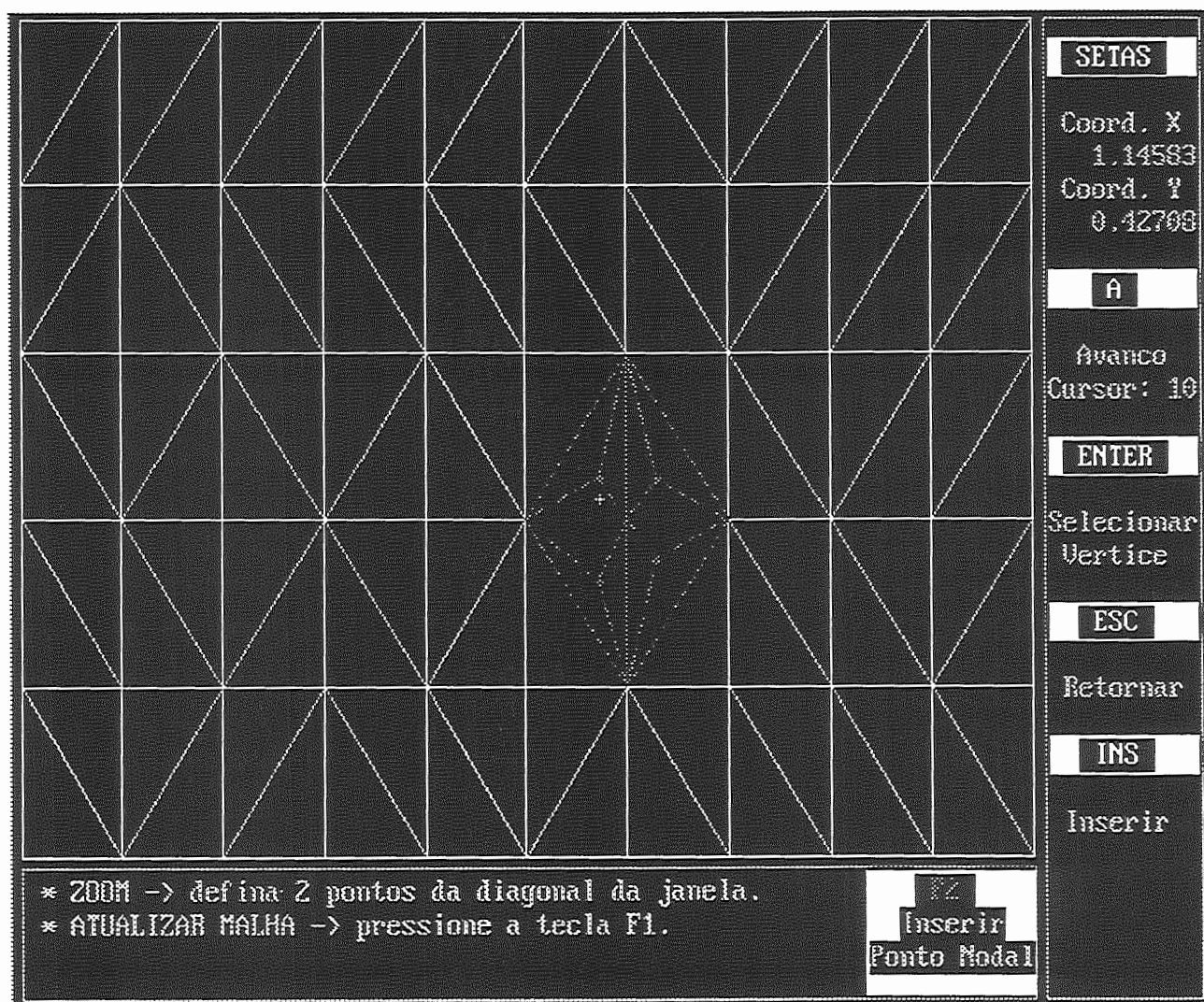
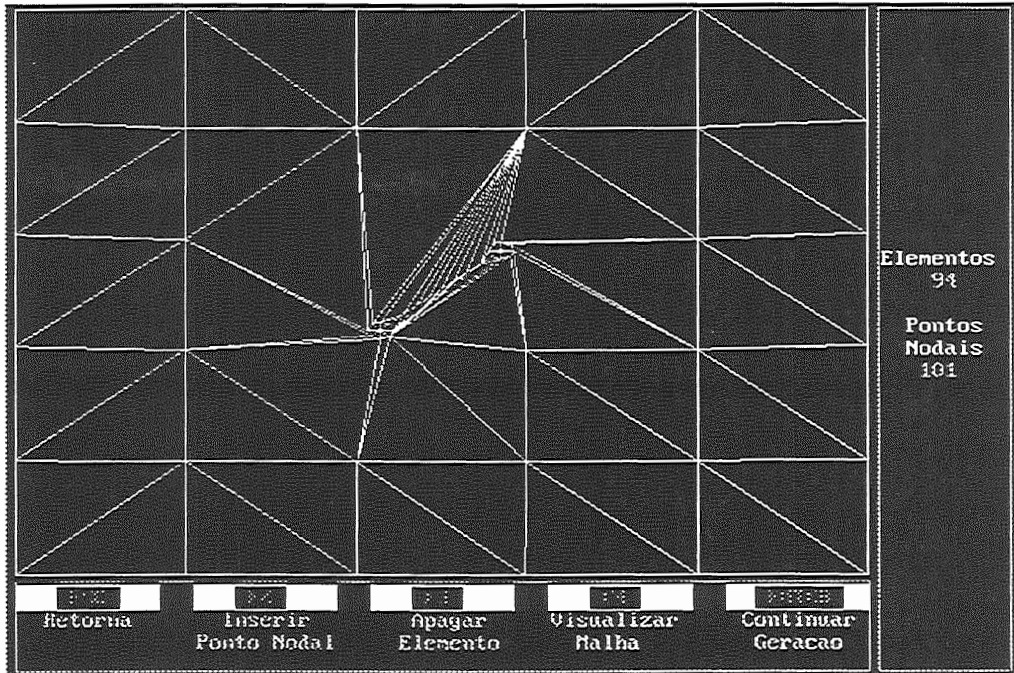
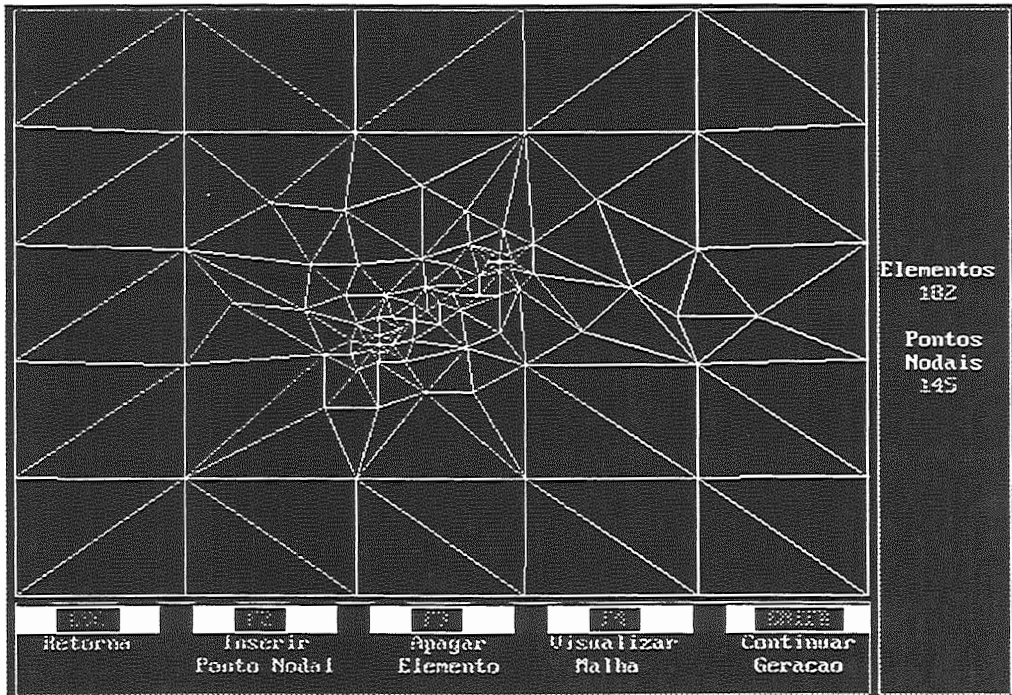


FIGURA 20 - Divisão de elementos através da inserção de ponto nodal.

A Figura 21 mostra um exemplo típico onde a malha inicial, sem a interferência do usuário, é de péssima qualidade (a) e que pode ser totalmente editada até a obtenção da malha desejada (b).



a)



b)

FIGURA 21 - Exemplo da utilização da rotina de edição para apagar elementos.

3.6. Renumeração da Malha de Elementos

O algoritmo para a renumeração dos pontos nodais levou em conta o fato, por demais conhecido, de que a numeração na direção com menor número de elementos é a que produz a menor largura de banda. Em malhas regulares esse procedimento é facilmente executável, seja manualmente, seja através da máquina. Em malhas irregulares pode ser razoável o estabelecimento de uma "faixa" na direção do menor número de elementos entre um lado e outro do contorno, onde todos os pontos nodais são numerados em cada travessia de um lado ao outro da malha. Nos casos de malhas com elementos de diferentes tamanhos distribuídos de forma não homogênea, estabelecer uma faixa com largura fixa nem sempre possibilita uma boa numeração, sendo aconselhável uma faixa variável.

A definição do algoritmo mais adequado levaria a uma série de pesquisas com procedimentos que adotassem o esquema acima ou mesmo com as técnicas difundidas no item 2.7., entre outras, o que demandaria tempo demasiado para a preparação da versão final do programa. Por isso, nessa primeira versão, adotou-se um conjunto de procedimentos que, considerando os aspectos qualitativos mencionados, forneceu resultados satisfatórios. Conhecendo-se as limitações da técnica adotada e a possibilidade de incorporação de métodos mais eficientes no futuro, procurou-se estruturar a rotina de forma que todo e qualquer avanço possa ser incorporado facilmente ao conjunto de rotinas que formam o programa. Com base na numeração de uma série de diferentes tipos de malhas, definiram-se os seguintes procedimentos:

- a) considerando um sistema de eixos X' e Y' orientado em relação ao sistema de coordenadas X e Y dos pontos nodais, escolhe-se a direção X' na qual serão formadas as faixas para a numeração;
- b) determina-se o ponto com menor ordenada ($Y'_{\text{mín.}}$), o qual será o primeiro ponto base a ser numerado. Quando ocorrer mais de um ponto com a mesma ordenada toma-se aquele com a menor abcissa;

- c) o ponto seguinte a ser numerado será aquele mais próximo da base (distância medida por diferença das abscissas X') situado à direita ou num ângulo de 30° à esquerda do segmento com origem no ponto base e se estendendo paralelamente ao eixo X' , conforme a Figura 22;
- d) quando não houver ponto para numerar dentro da faixa definida em c), repetem-se os procedimentos b) e c) sucessivamente.

O programa faz a numeração da malha, automaticamente, nas direções de 0° a 180° a cada 20° , selecionando a direção cujo resultado forneça a menor largura de banda.

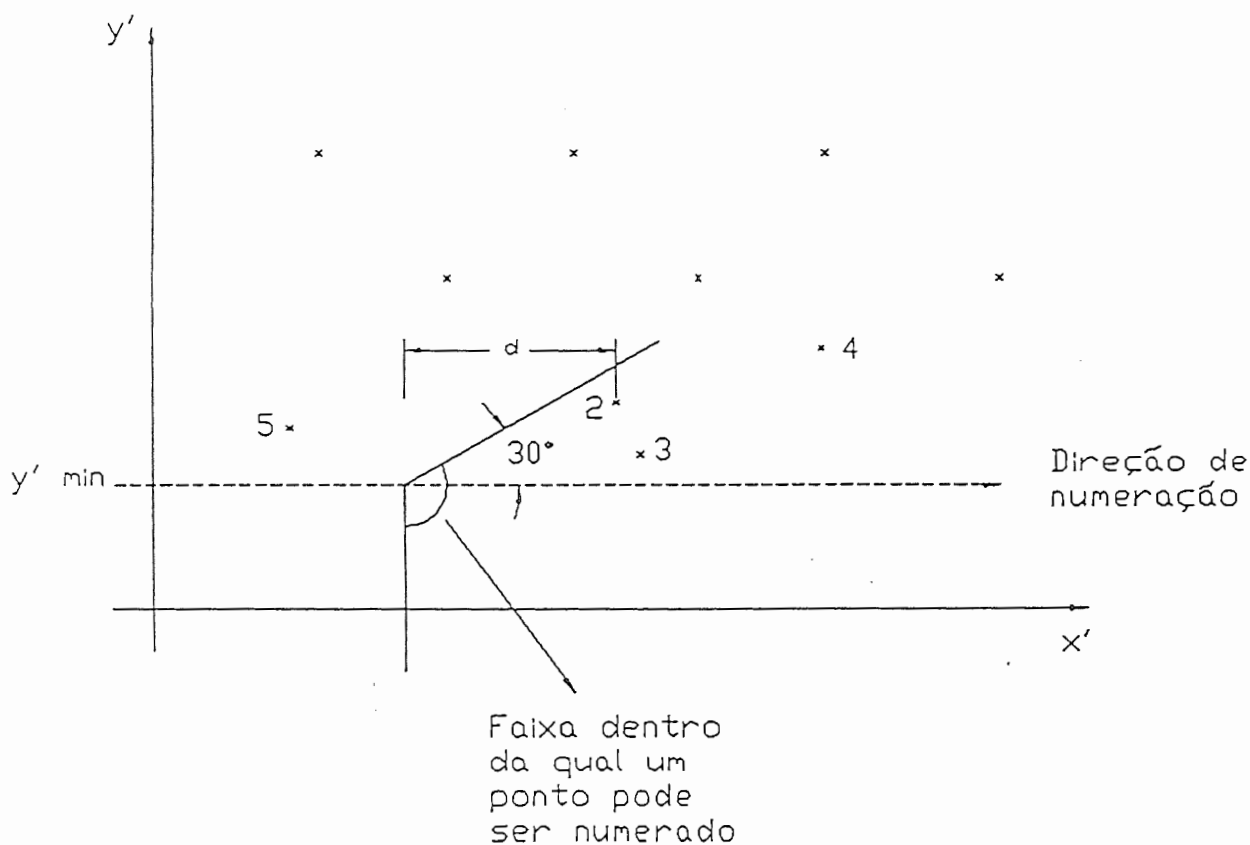


FIGURA 22 - Esquema utilizado para a numeração de malhas irregulares.

3.7. Características Técnicas do Programa Gerador de Malhas

O programa foi estruturado em módulos, como forma de facilitar tanto as fases de desenvolvimento e depuração, além da sua manutenção, como a própria implantação dos avanços sugeridos, entre outros. As funções básicas são desempenhadas por 12 módulos, chamados por um gerenciador de opções central. As principais tarefas realizadas por cada um dos módulos são descritas como segue:

- GERENCIA.C: gerenciador do sistema, tem como funções a inicialização das variáveis estáticas e dinâmicas e fazer as chamadas considerando as opções selecionadas pelo usuário;
- GERARQ.C: trata das tarefas de entrada e saída do programa tais como abertura de arquivos, leitura de dados e montagem do arquivo de dados de saída para o programa "FRAT";
- FRATURA.C: trata das funções relacionadas à geração dos pontos nodais e elementos nas pontas das fraturas (elementos crack tip) e ao longo das mesmas (elementos junta);
- GERPNDOM.C: tem a função de gerar automaticamente os pontos nodais no interior do domínio, levando em conta as informações de entrada e dos contornos das fraturas e suas pontas;
- GERELDOM.C: módulo encarregado da geração dos elementos no interior do domínio;
- INSPN.C: módulo interativo para a inserção de pontos nodais no domínio, durante e após a geração da malha de elementos;
- DELEL.C: módulo interativo para a edição da malha após a finalização do processo de geração. Este é um dos mais importantes dentro do processo de geração, porque permite a modificação da malha através da supressão de elementos e inserção de novos pontos nodais;
- VERMALHA.C: módulo interativo que permite a visualização da malha com a numeração dos pontos nodais e elementos;

- RENUMERA.C: desempenha a tarefa de redução da largura da banda da matriz de rigidez da estrutura, através da renumeração dos pontos nodais da malha;
- GRÁFICA.C: módulo encarregado da execução das principais tarefas gráficas;
- SEGURO.C: contém rotinas para a efetivação de testes e consistência dos dados utilizados para a geração dos elementos no interior do domínio;
- ERRMEM.C: módulo para o tratamento de erros na manipulação da memória dinâmica;
- DECLARA.C: contém a declaração das dimensões das variáveis estáticas e limites para as variáveis dinâmicas.

A Versão 1.0 possui como características técnicas os seguintes parâmetros:

- capacidade máxima de geração: 2000 elementos e 1800 pontos nodais;
- tamanho do código fonte: 330.000 Bytes;
- tamanho da memória da pilha necessária: 43.000 Bytes;
- tamanho da memória de dados estática: 22.000 a 43.000 Bytes;
- tamanho da memória de dados dinâmica: 51.000 a 76.000 Bytes;
- velocidade de processamento: variável conforme o número de pontos nodais da malha. O gráfico da Figura 23 mostra o tempo aproximado considerando apenas o tempo para a efetivação dos testes de consistência e geração dos elementos. Nas demais fases da geração as respostas são instantâneas, exceto quando da geração de uma quantidade elevada de pontos nodais no interior do domínio.

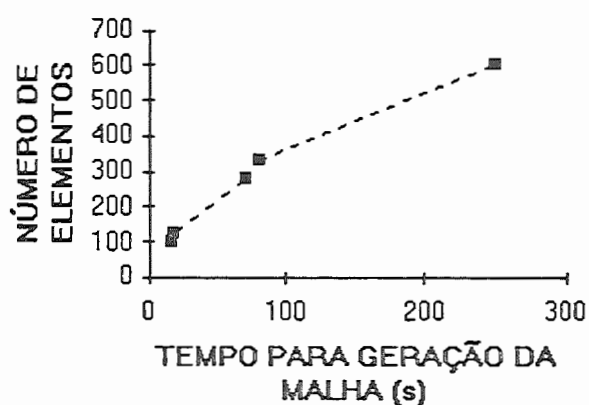


FIGURA 23 - Tempo aproximado para a geração de diferentes malhas de elementos em máquinas modelo 386 DX, clock de 33MHz.

4. AVANÇOS IMPLEMENTADOS NO PROGRAMA "FRAT"

4.1. Introdução

O programa "FRAT", desenvolvido por CELESTINO et al. (1991), consiste num programa de elementos finitos capaz de fazer análises bidimensionais de tensões e deformações, segundo os estados plano de tensão e plano de deformação. O modelamento da estrutura pode ser feito por meio de elementos isoparamétricos quadriláteros de 8 pontos nodais, triangulares "crack tip" criados a partir do elemento quadrilátero com um lado colapsado e triangulares isoparamétrico de 6 pontos nodais puro. Possui rotina específica para análise da propagação de uma fratura (uma ponta), utilizando, para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, a correlação dos deslocamentos dos pontos nodais nas faces da fratura (os mais próximos da ponta).

Diante das limitações existentes (inexistência de elementos próprios para o modelamento de juntas, impossibilidade de análise simultânea de mais de uma fratura, entre outras) estabeleceram-se como metas a serem atingidas: a) a introdução da formulação de um elemento para o modelamento de descontinuidades; b) a criação de procedimentos para o tratamento de mais de uma fratura; c) a introdução da formulação de outras duas teorias de iniciação da fratura no modo misto; d) codificação do algoritmo para o cálculo automático do incremento na fratura. Na realidade, parte dessas metas tornaram-se uma imposição, sob pena de os resultados produzidos pelo gerador de malhas não serem utilizáveis e estudos mais avançados, por exemplo, de fraturas submetidas a esforços de compressão, não possíveis.

Vale dizer que as modificações implementadas procuraram ser restritas àqueles aspectos onde realmente se faziam necessárias adaptações, para que as vantagens oferecidas pelo gerador de malhas pudessem ser utilizadas. Na prática, as mudanças no programa "FRAT" se

restringiram, basicamente, às rotinas de montagem da matriz de rigidez dos elementos e da estrutura, análise das fraturas, além da criação de um algoritmo de busca automática da carga crítica para a propagação das fraturas.

4.2. Formulação do Elemento Junta

A formulação utilizada foi a de GOODMAN (1976), tendo em vista o seu avançado desenvolvimento para a transformação em algoritmo computacional. Trata-se de um elemento capaz de representar com bastante aproximação o comportamento de descontinuidades rochosas. O elemento possui liberdade para deslocamentos lineares (normal e paralelo ao plano da junta) e rotacional (em relação às pontas do elemento). Na prática, são 8 graus de liberdade explícitos (dois em cada pontos nodal - deslocamentos lineares), uma vez que a rotação é expressa em função da rigidez normal e tangencial. Os parâmetros de rigidez normal (K_n) e tangencial (K_s) são obtidos, na prática, a partir da curva força x deslocamento, em ensaios de cisalhamento direto. Nessa versão, a formulação utilizada não inclui termo que considere a dilatação.

Como não é admitida coesão no elemento junta, o programa adota o seguinte procedimento para considerar ou não a participação dos mesmos na distribuição da energia do sistema: inicialmente, supõe-se que todos os elementos junta estejam sofrendo esforços de compressão, portanto são incluídos na montagem da matriz de rigidez global. Após a computação dos deslocamentos, são calculadas as tensões em cada elemento junta. Aqueles cuja tensão for de tração, são codificados de forma que não mais serão utilizados na montagem do sistema. O programa é executado uma segunda vez com as novas condições. Na hipótese de na primeira solução não haver elemento junta submetido a tensão de tração, o programa segue o seu curso normal. Nas fases subseqüentes os elementos juntas voltam a ser utilizados, obedecendo ao procedimento acima.

4.3. Formulação dos Elementos Triangulares de 3 e 4 Pontos Nodais

Para a implantação da formulação para o cálculo da matriz de rigidez e das tensões nesses elementos utilizaram-se as mesmas rotinas do elemento isoparamétrico triangular de 6 pontos nodais (TRIANGULO e TENS). Quando são utilizados elementos junta, com variação linear dos deslocamentos, no modelamento da fratura, o elemento CST (3 pontos) é utilizado para a conexão com os mesmos, enquanto o híbrido (4 pontos) faz a transição entre os elementos "crack tip" e os elementos CST.

As modificações efetuadas consistiram apenas na adição das derivadas das funções de forma desses novos elementos e condições de desvio segundo o tipo de elemento triangular. No caso do elemento triangular com pontos nodais nos vértices (CST, Figura 24a), as funções de forma e a matriz das derivadas são apresentadas a seguir:

a) funções de forma:

$$N_1 = \zeta_1$$

$$N_2 = \zeta_2$$

$$N_3 = \zeta_3$$

onde: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ são coordenadas de área definidas como $\zeta_1 = \zeta$, $\zeta_2 = \eta$ e $\zeta_3 = 1 - \zeta - \eta$, com ζ e η correspondentes aos eixos de coordenadas isoparamétricas com origem no ponto nodal 3 e variação de 0 a 1.

b) derivadas das funções de forma em relação a ζ e η (regra da cadeia):

$$\begin{array}{c} \dots\dots\dots\text{nó1}\dots\dots\text{nó2}\dots\dots\text{nó3} \\ D_n = \left\{ \begin{array}{ccc} 1\dots\dots\dots 0\dots\dots\dots -1 \\ 0\dots\dots\dots 1\dots\dots\dots -1 \end{array} \right\} \end{array}$$

Segundo BATHE (1982), as funções de forma do elemento triangular de 4 pontos nodais (elemento híbrido, Figura 24b) podem ser formadas da seguinte forma: tomam-se as funções de forma do elemento CST do lado que se quer introduzir um ponto nodal e

subtrai-se dessas 1/2 da função de forma do elemento LST correspondente ao ponto nodal do meio daquele lado. O resultado são 3 funções de forma com variação quadrática e uma com variação linear, como visto a seguir:

a) funções de forma:

$$N_1 = \zeta_1 - 2 \zeta_1 \zeta_2$$

$$N_2 = \zeta_2 - 2 \zeta_1 \zeta_2$$

$$N_3 = \zeta_3$$

$$N_4 = 4 \zeta_1 \zeta_2$$

b) derivadas das funções de forma:

$$D_n = \begin{matrix} \dots\dots\dots \text{nó1} \dots\dots\dots \text{nó2} \dots\dots\dots \text{nó3} \dots\dots\dots \text{nó4} \\ \left\{ \begin{array}{cccc} 1-2\zeta_2 & \dots\dots\dots & -2\zeta_2 & \dots\dots\dots & -1 & \dots\dots\dots & 4\zeta_2 \\ -2\zeta_1 & \dots\dots\dots & 1-2\zeta_1 & \dots\dots\dots & -1 & \dots\dots\dots & 4\zeta_1 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

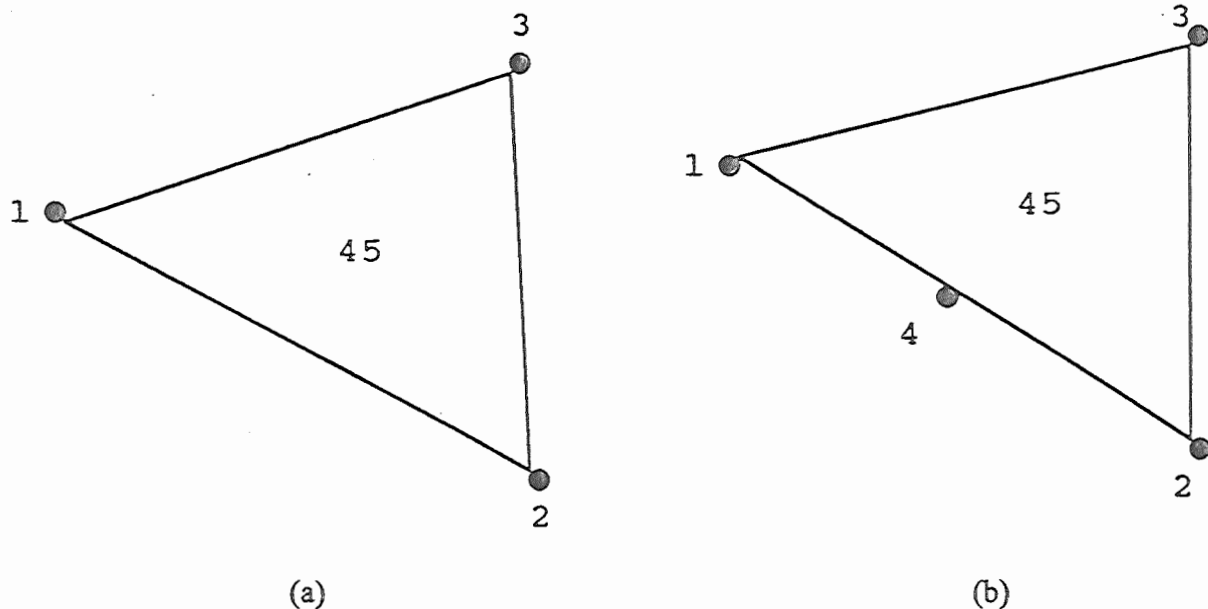


FIGURA 24 - Modelos de elementos finitos: a) triangular de 3 pontos nodais; b) triangular híbrido de 4 pontos nodais.

4.4. Algoritmo para a Análise das Fraturas

Foram criados procedimentos para a análise de um número indefinido de fraturas. As informações sobre cada fratura (cada ponta, independentemente) são lidas no final do arquivo de dados ("dados.mef") e enviadas à rotina KEVAL1 para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão. O resultado da análise é apresentado na tela (direção de propagação, fatores de intensidade de tensão K_I , K_{II} e a máxima tensão de tração, $\sigma_{\theta máx}$) juntamente com a solicitação ao usuário da tenacidade do material. Essas informações permitem avaliar se a fratura vai ou não se propagar e, na hipótese da propagação, o usuário pode definir o comprimento do incremento na fratura. Automaticamente as novas coordenadas da ponta da fratura são recalculadas e as informações armazenadas no arquivo "coordpon.tas", utilizado pelo gerador de malhas para a reorganização da malha de elementos. Na hipótese da não propagação de nenhuma das fraturas sendo avaliadas sob determinado estado de carregamento, o programa corrige esse carregamento (incrementa ou decrementa) de forma a atingir o estado crítico de pelo menos uma ponta de fratura.

4.5. Informações Complementares sobre o Programa "FRAT"

O programa "FRAT" ganhou nova forma no que se refere a declaração das variáveis, passando a ser constituído de dois módulos básicos: um módulo utilizado exclusivamente para o dimensionamento das variáveis estáticas de grande porte e tipo de precisão numérica adotada; e um segundo destinado à efetivação do processamento, propriamente dito. A criação de um módulo para o dimensionamento das matrizes de coordenadas dos pontos nodais, matriz de incidência e matriz utilizada durante a solução do sistema de equações visou, em última análise, facilitar a alteração dos limites de dados passíveis de serem manipulados pelo programa. Na Versão 2.0, o código fonte possui menos de 50.000Bytes, sendo constituído de um gerenciador e 7 subrotinas. Possui capacidade para o trabalho com malhas de até 1000 elementos, 800 pontos nodais e largura de banda de 300.

5. ROTEIRO, COM EXEMPLO PRÁTICO, PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROPAGAÇÃO DE FRATURA UTILIZANDO O SISTEMA INTERATIVO

Os procedimentos básicos para a utilização do sistema para a simulação de propagação de fraturas podem ser resumidos nos seguintes passos:

GERAÇÃO DA MALHA INICIAL

- 1 - Definição do domínio a ser discretizado através de uma malha de elementos. Nessa fase devem ser definidos os contornos do domínio, a localização das fraturas que serão estudadas e o tamanho médio dos elementos para o interior do domínio nas suas diversas regiões. Tanto os contornos como as fraturas devem ser delineados por meio de segmentos de reta;
- 2 - Montagem do arquivo de dados conforme padrão do gerador de malhas, visto no exemplo do ANEXO A;
- 3 - Utilização do gerador interativo de malhas para a preparação da malha de elementos e formação do arquivo de dados no padrão do programa "FRAT";
- 4 - Utilização do programa "FRAT" para a análise da propagação das fraturas. A propagação de uma fratura ocorre quando o fator de intensidade de tensão no modo misto superar a tenacidade da fratura. Nas fraturas em que isso ocorre, o usuário deve fornecer o comprimento do incremento ocorrido. Esta informação é solicitada pelo programa após a análise de cada uma das pontas das fraturas e apresentação dos fatores de intensidade nos MODOS I, II e MISTO.

GERAÇÃO DA MALHA COM A NOVA CONFIGURAÇÃO DAS FRATURAS

- 1 - Incluir o arquivo "COORDPON.TAS" no mesmo diretório do programa gerador de malha, pois as informações serão utilizadas por ele para a geração da malha de elementos com a nova configuração das fraturas.

2 - Repetir os procedimentos 3 e 4 acima.

Nas páginas seguintes é apresentado um exemplo de simulação numérica de propagação de uma fratura única num corpo-de-prova de material rochoso. Nele, tenta-se ilustrar o fraturamento que ocorre num ensaio de compressão diametral. O material utilizado no ensaio foi um basalto com as seguintes características:

- diâmetro do corpo-de-prova: 5,0cm;
- tenacidade: 2,5MPa m^{0,5};
- módulo de elasticidade: 40GPa;
- coeficiente de Poisson: 0,2;

Partindo da hipótese da existência de uma fratura de comprimento (2a) igual a 0,54cm paralela à direção de aplicação da carga, no centro do corpo-de-prova, simulou-se a sua propagação em 7 incrementos, equivalentes a 20% do comprimento da fratura. A análise foi feita considerando estado plano de tensão, aplicando-se uma carga concentrada vertical no topo do corpo-de-prova. Aproveitando a condição de simetria do modelo, utilizou-se apenas a metade superior, tendo como condição de contorno o impedimento dos deslocamentos na direção da aplicação da carga (eixo Y) nos pontos nodais da base correspondente a linha diametral na direção X. Na Figura 25 pode ser visto o corpo-de-prova (a) e metade superior modelada (b), enquanto na Tabela 1 são apresentados os parâmetros observados durante o processo de propagação, como os fatores de intensidade de tensão (FIT) modos I (K_I), II (K_{II}) e MISTO, a carga crítica para a propagação da fratura, a dimensão do incremento (Δa) dado à fratura após cada estágio de carga e a direção de propagação do incremento (θ). Nas Figuras 26 a 32 podem ser vistas as malhas utilizadas nas várias fases do processo de simulação numérica de propagação da fratura. A Figura 33 mostra a configuração da fratura após a aplicação do último incremento.

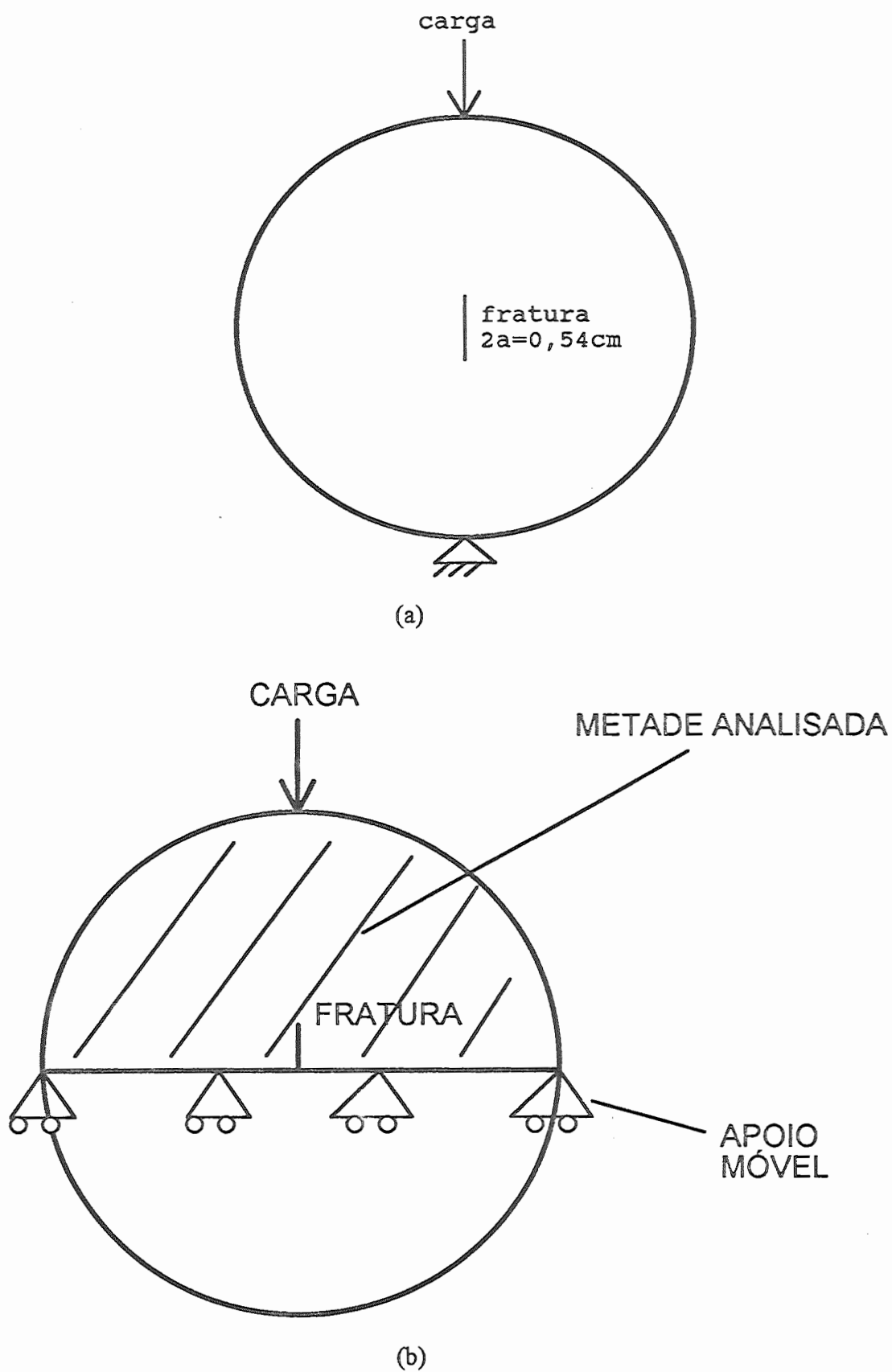


FIGURA 25 - Modelo utilizado para a simulação da propagação da fratura; a) corpo-de-prova de ensaio; b) modelo analisado com simetria na metade inferior.

TABELA 1 - Comportamento dos parâmetros analisados durante o processo de propagação da fratura num ensaio de compressão diametral: modelamento utilizando simetria na metade inferior.

| ESTÁGIO | CARGA | K_I | K_{II} | FIT | 2a | Δa | θ |
|---------|------------------|--------|----------|--------|------|------------|----------|
| | CRÍTICA (kgf) | | | | | | |
| 1 | 2301 | 249,95 | -2,80 | 250,00 | 0,54 | 0,108 | 1,3 |
| 2 | 1843 | 247,70 | 19,60 | 250,00 | 0,76 | 0,151 | -8,9 |
| 3 | 1336 | 217,27 | -74,60 | 250,00 | 1,06 | 0,211 | 32,0 |
| 4 | 887 | 100,93 | 163,93 | 250,00 | 1,48 | 0,296 | -59,0 |
| 5 | 700 | 42,47 | -195,72 | 250,00 | 2,07 | 0,415 | 66,4 |
| 6 | 513 | 58,10 | 187,64 | 250,00 | 2,90 | 0,581 | -64,7 |
| 7 | 318 | -8,09 | -220,29 | 250,00 | 4,06 | 0,813 | 71,0 |

NOTA: direção de propagação da fratura (θ) conforme ANEXO B, Figura B.5.

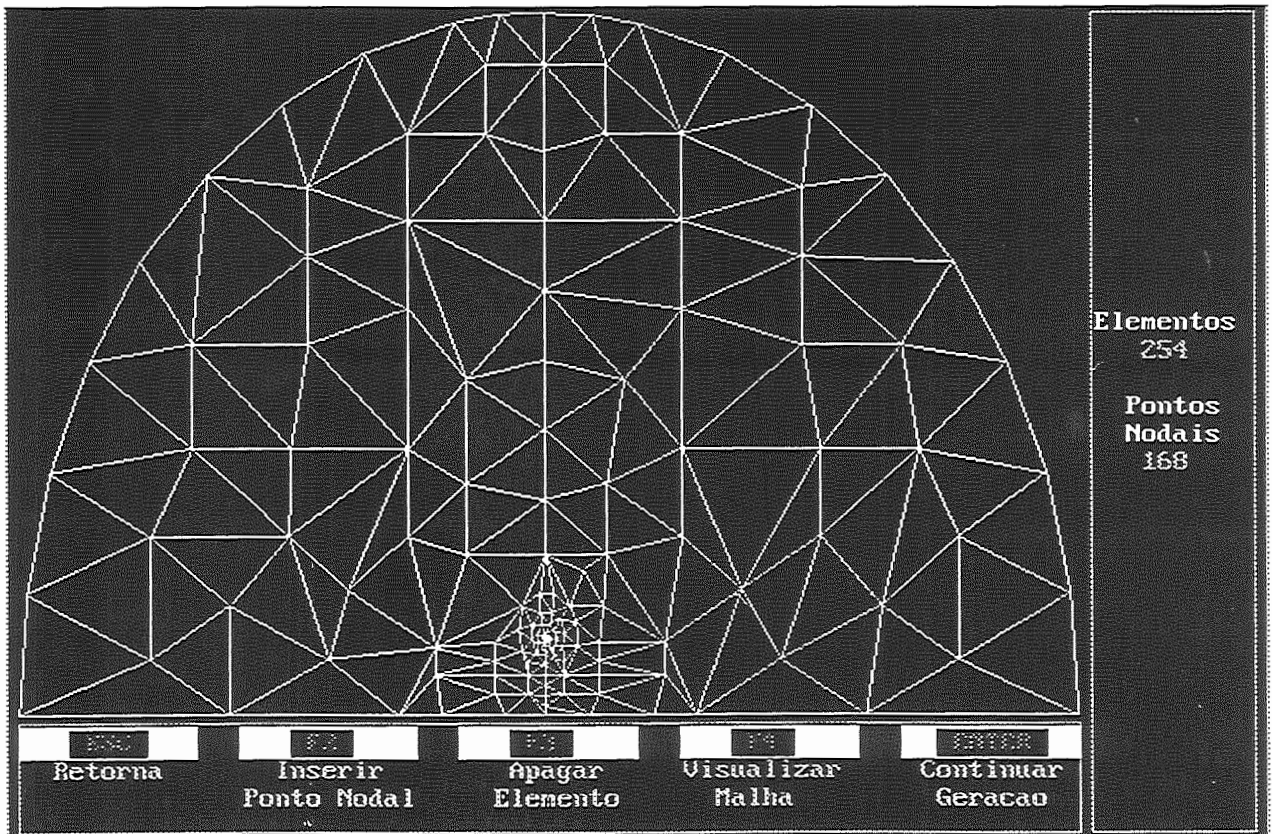


FIGURA 26 - Configuração da malha no primeiro estágio de carregamento.

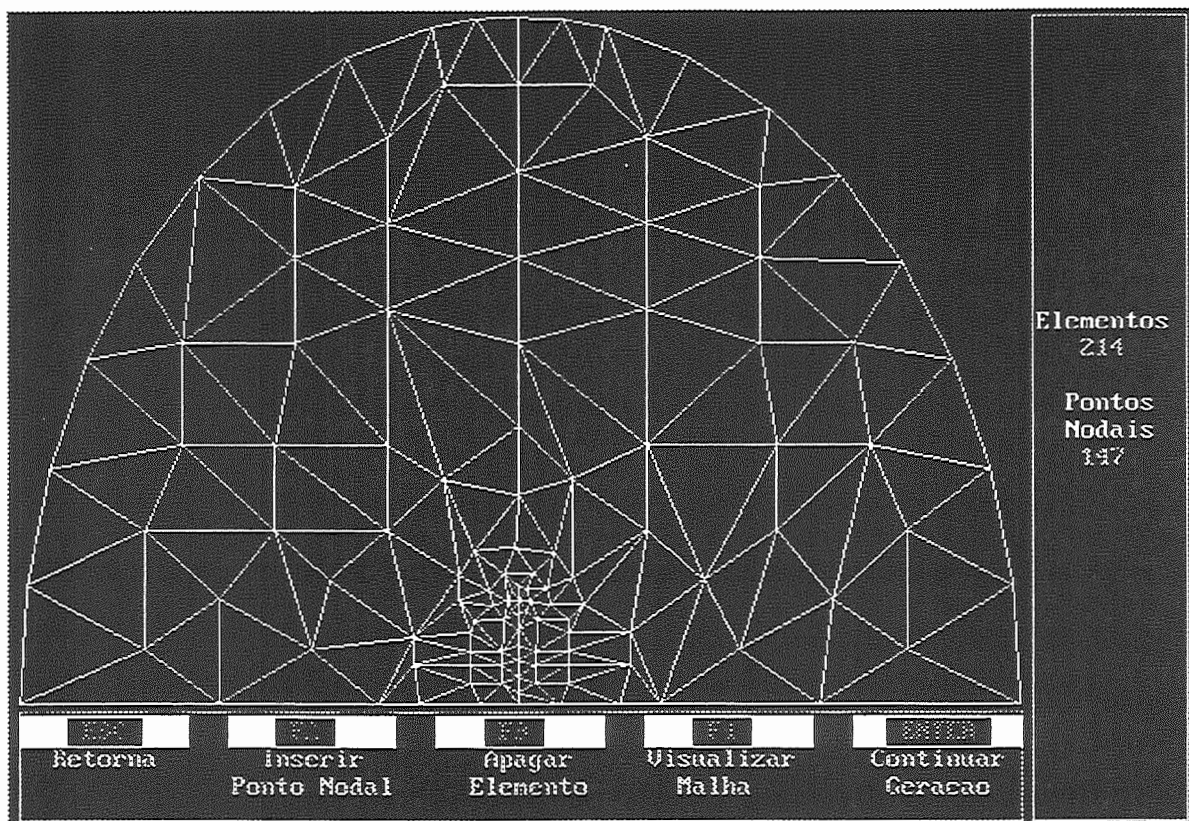


FIGURA 27 - Configuração da malha no segundo estágio de carregamento.

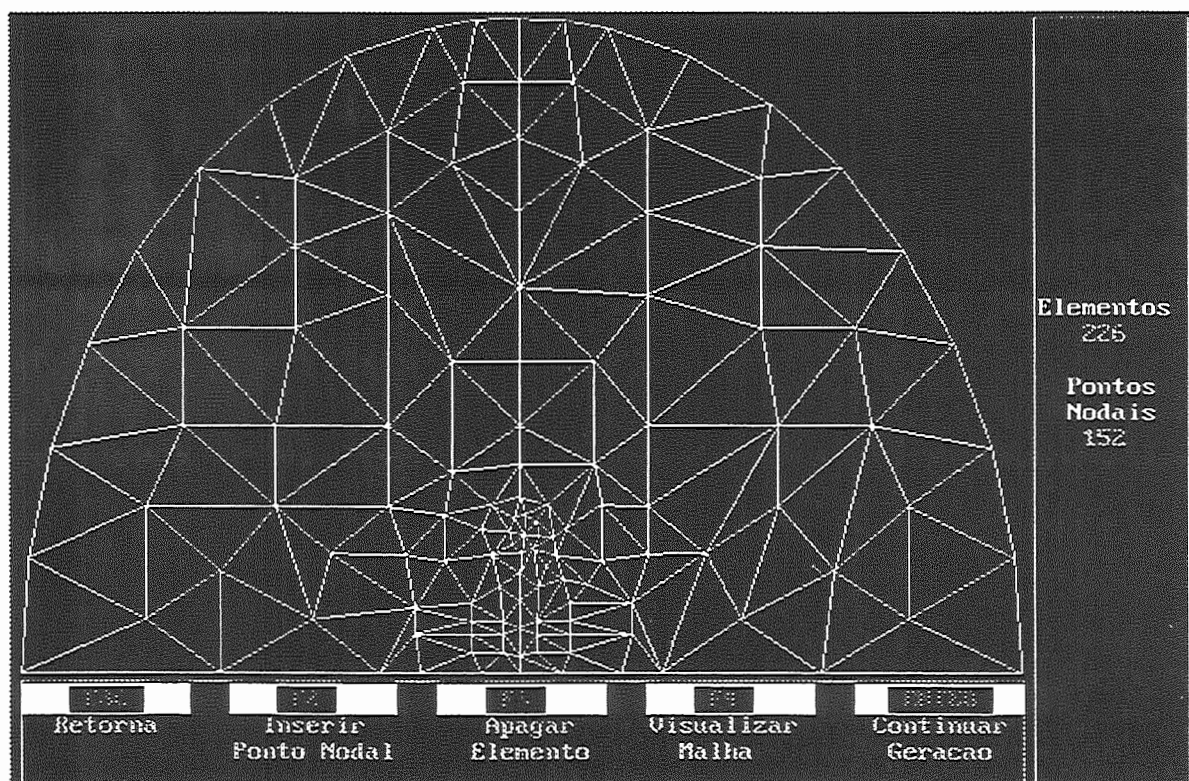


FIGURA 28 - Configuração da malha no terceiro estágio de carregamento.

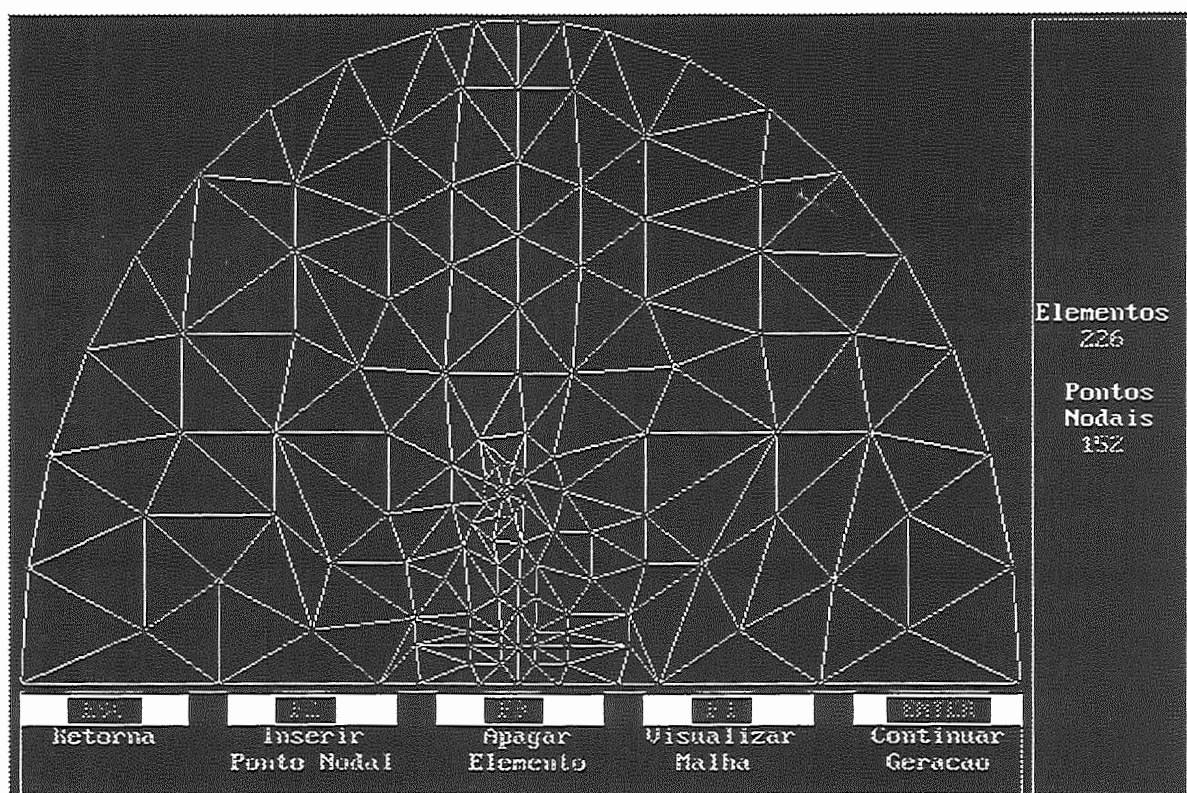


FIGURA 29 - Configuração da malha no quarto estágio de carregamento.

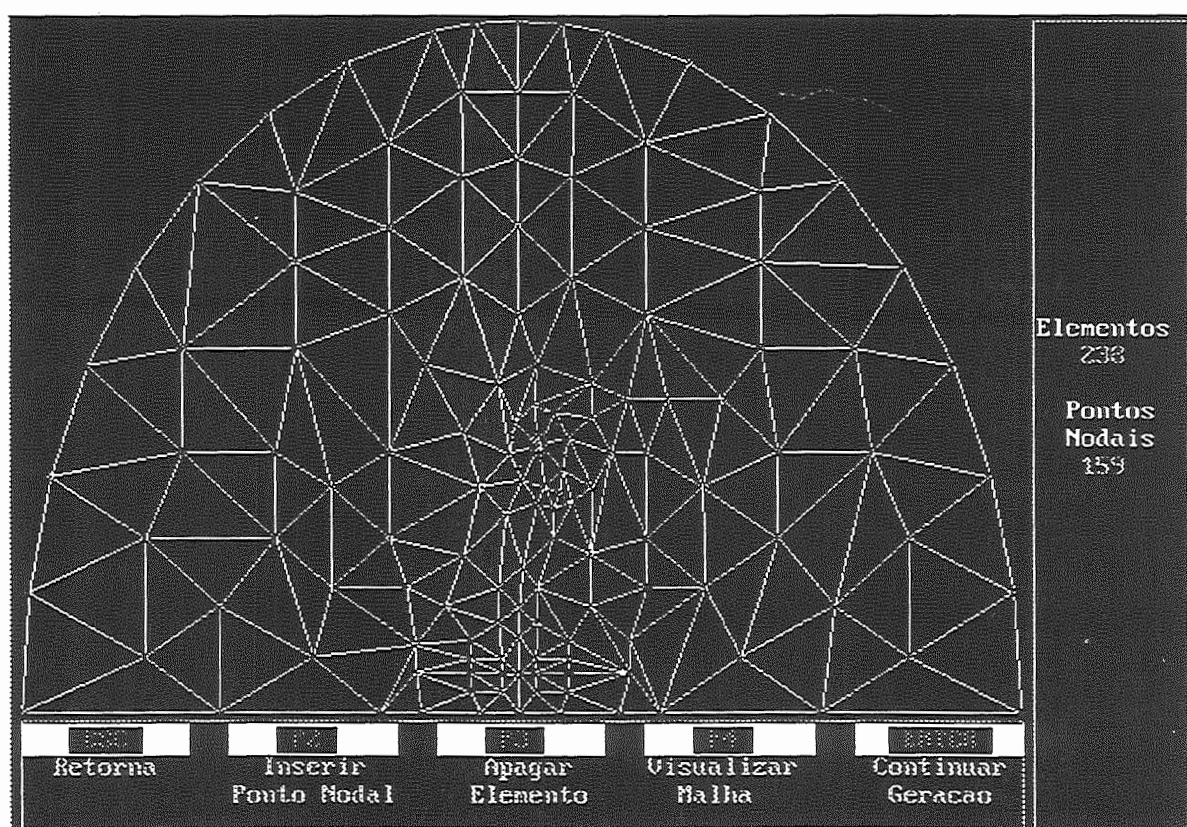


FIGURA 30 - Configuração da malha no quinto estágio de carregamento.

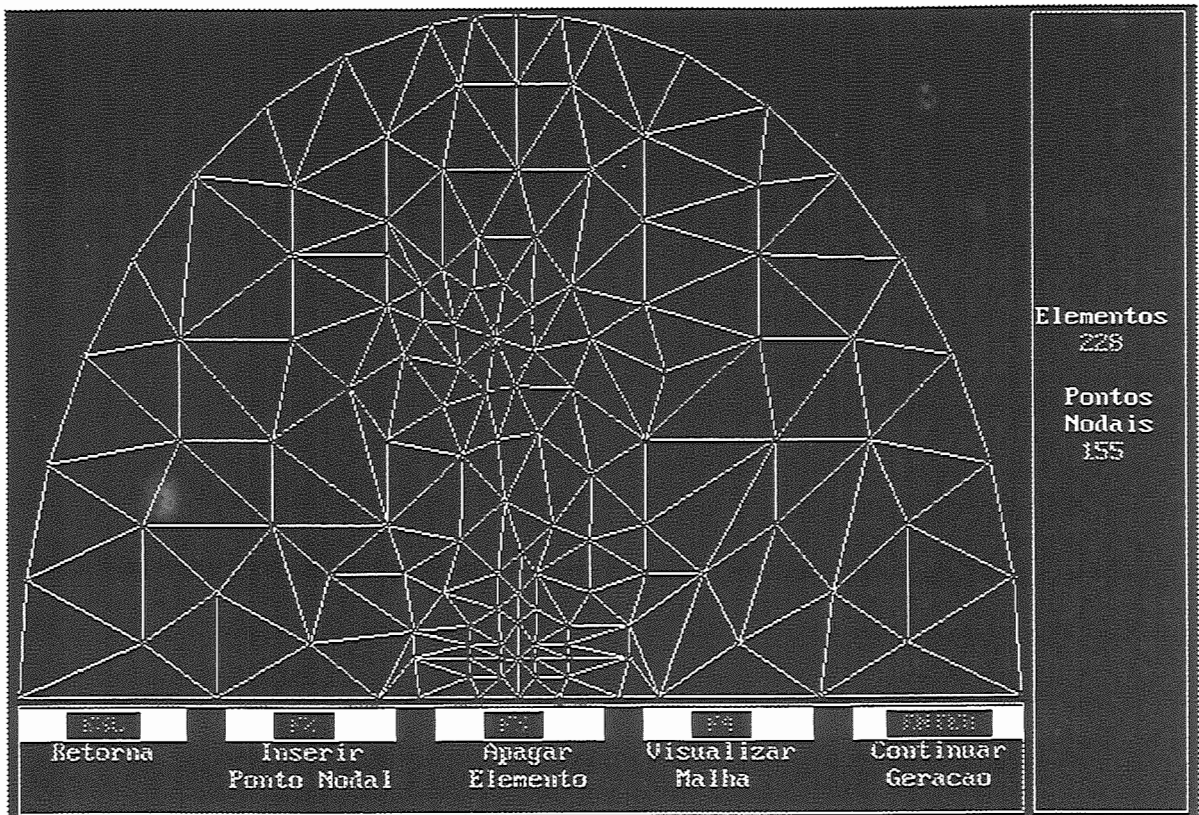


FIGURA 31 - Configuração da malha no sexto estágio de carregamento.

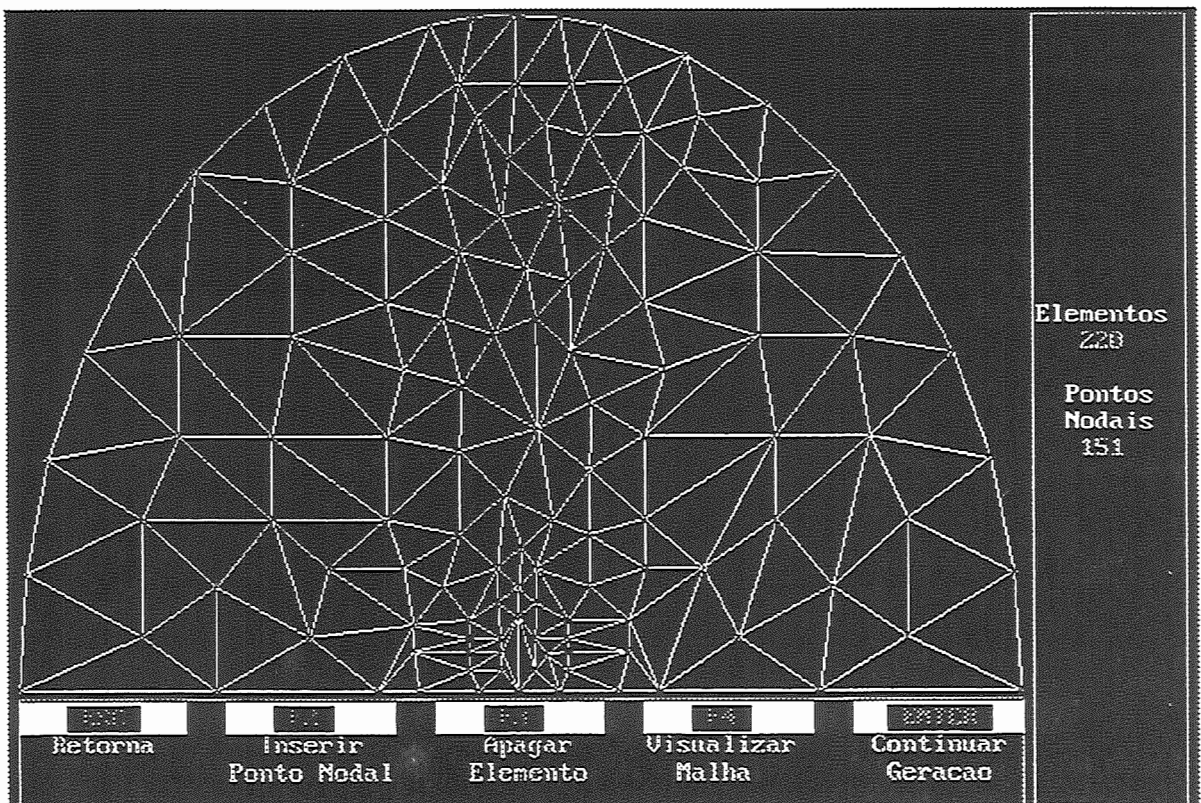


FIGURA 32 - Configuração da malha no sétimo estágio de carregamento.

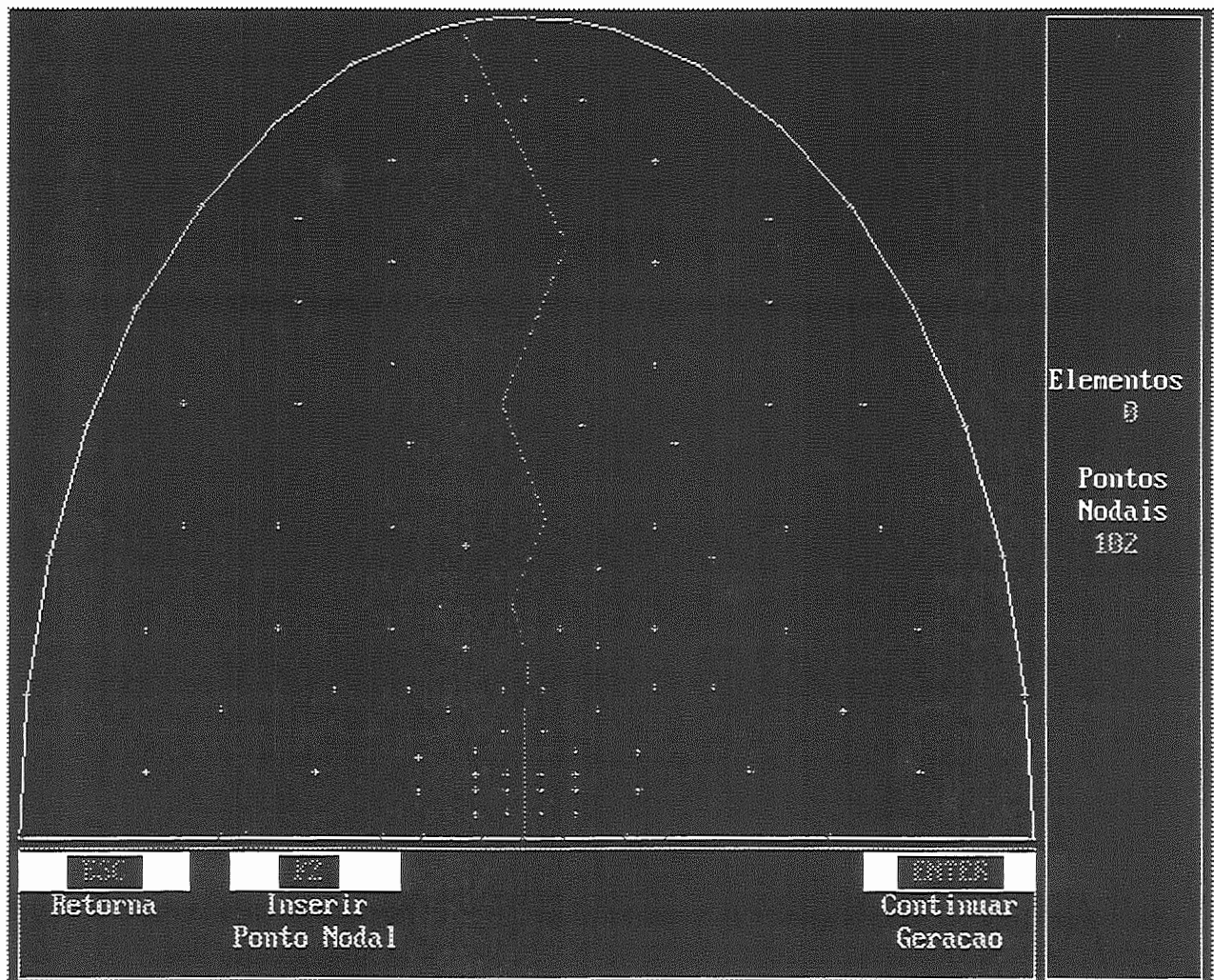


FIGURA 33 - Configuração final da fratura após o sétimo estágio de carregamento.

A análise dos dados da Tabela 1, acima, mostra que a dimensão do incremento utilizada para a propagação da fratura após cada estágio de carregamento parece ser adequada apenas para os primeiros dois estágios. Nos demais, a dimensão do incremento faz com que a fratura desvie da rota esperada e observada no ensaio. Por isso, ocorre a mudança de sinal do ângulo da direção de propagação a cada passo de maneira a retomar a direção central que a propagação deveria seguir. Mesmo assim, fica clara a direção de propagação da fratura, do centro do corpo-de-prova para a sua periferia, na direção da aplicação da carga.

Deve ser salientado que o exemplo acima teve o intuito apenas de mostrar os passos que devem ser seguidos num estudo de simulação de propagação de fraturas. Não houve grande preocupação com relação à qualidade da malha e as conseqüências decorrentes de uma pior ou melhor discretização do domínio. A solução de tais problemas demandariam tempo adicional, tanto para simulações e estudos mais aprofundados do método dos elementos finitos, como para a implementação de inovações no programa "FRAT" visando a solução de sistemas com maior número de incógnitas e/ou largura da banda da matriz de rigidez da estrutura maior do que a possível na Versão 2.0. Avanços nesse sentido serão discutidos no item 6. **CONSIDERAÇÕES FINAIS.**

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos da mesma simulação, no entanto, com o modelamento do corpo-de-prova inteiro. Nesse caso, a carga foi aplicada, também, no topo do corpo-de-prova e a restrição nas direções X e Y imposta a um único ponto nodal da base do mesmo (Figura 25a). Os incrementos nas pontas da fratura, após cada estágio de carga, foram equivalentes a dez por cento do seu comprimento total. Tal procedimento visou minimizar os efeitos da não simetria da malha, na direção de propagação da fratura. No entanto, parece claro que os desvios na direção de propagação da fratura estão relacionados muito mais à configuração da malha que à dimensão incrementada nas pontas da fratura após cada estágio de carga. Se observarmos o fator de intensidade de tensão no modo MISTO, nas duas pontas da fratura, nota-se o não aparecimento de simetria em vários

estágios do carregamento. Observou-se que, com diferentes configurações de malhas, os resultados não apresentaram simetria e, ora a ponta inferior se mostrou crítica, ora a ponta superior. Na Figura 34 pode ser vista a configuração da fratura após 12 estágios de carga e incrementos no seu comprimento.

Esse aspecto relacionado à simetria foi analisado, ainda, através da comparação com os resultados obtidos por CELESTINO e BORTOLUCCI (1993). Os autores modelaram apenas um quarto do corpo-de-prova visto na Figura 25a, aproveitando a simetria entre as metades inferior/superior e os quadrantes esquerdo/direito. Os resultados estão expressos no gráfico da Figura 35. Nota-se, claramente, a influência da simetria na carga limite para o início da propagação da fratura, quando a mesma apresenta diferentes dimensões. Quanto maior a simetria da malha mais uniforme se dá o decréscimo da carga limite para a propagação. Nas malhas geradas pelo gerador interativo, a concordância entre os resultados com diferentes configurações de malha tende a ocorrer nos estágios iniciais e finais. O desvio da fratura em relação ao eixo central vertical possivelmente seja o fator mais importante para que a carga limite se distancie daquela obtida pelos autores. No caso em que é modelado o corpo-de-prova inteiro, observa-se que o fator de intensidade de tensão modo MISTO não atinge o valor limite simultaneamente nas duas pontas, em vários estágios intermediários (3, 4, 5 e 6) de carga. Mesmo nessas condições, promoveu-se o incremento nas duas pontas da fratura.

TABELA 2 - Comportamento dos parâmetros analisados durante o processo de propagação da fratura num ensaio de compressão diametral: modelamento do corpo-de-prova inteiro.

| ESTÁGIO | CARGA CRÍTICA (kgf) | PONTA INFERIOR | | | PONTA SUPERIOR | | | 2a (cm) |
|---------|---------------------|---|---------|-------|---|---------|-------|---------|
| | | FIT MODO MISTO (kgf/cm ² ·√cm) | Δa (cm) | θ (°) | FIT MODO MISTO (kgf/cm ² ·√cm) | Δa (cm) | θ (°) | |
| 1 | 2125 | 244 | 0,054 | +2,3 | 250 | 0,054 | +0,7 | 0,540 |
| 2 | 1954 | 250 | 0,064 | -9,8 | 249 | 0,064 | -2,0 | 0,648 |
| 3 | 1658 | 250 | 0,078 | +26 | 234 | 0,078 | +6,4 | 0,777 |
| 4 | 1310 | 250 | 0,093 | -49 | 202 | 0,093 | -17 | 0,933 |
| 5 | 1113 | 250 | 0,110 | +61 | 223 | 0,110 | +39 | 1,1191 |
| 6 | 960 | 234 | 0,140 | -60 | 250 | 0,140 | -57 | 1,339 |
| 7 | 891 | 250 | 0,160 | +61 | 249 | 0,160 | +61 | 1,619 |
| 8 | 788 | 247 | 0,200 | -60 | 250 | 0,200 | -60 | 1,939 |
| 9 | 664 | 250 | 0,240 | +61 | 248 | 0,240 | +62 | 2,339 |
| 10 | 548 | 248 | 0,280 | -63 | 250 | 0,280 | -63 | 2,819 |
| 11 | 456 | 249 | 0,340 | +64 | 250 | 0,340 | +64 | 3,379 |
| 12 | 322 | 249 | 0,400 | -67 | 250 | 0,400 | -60 | 4,059 |

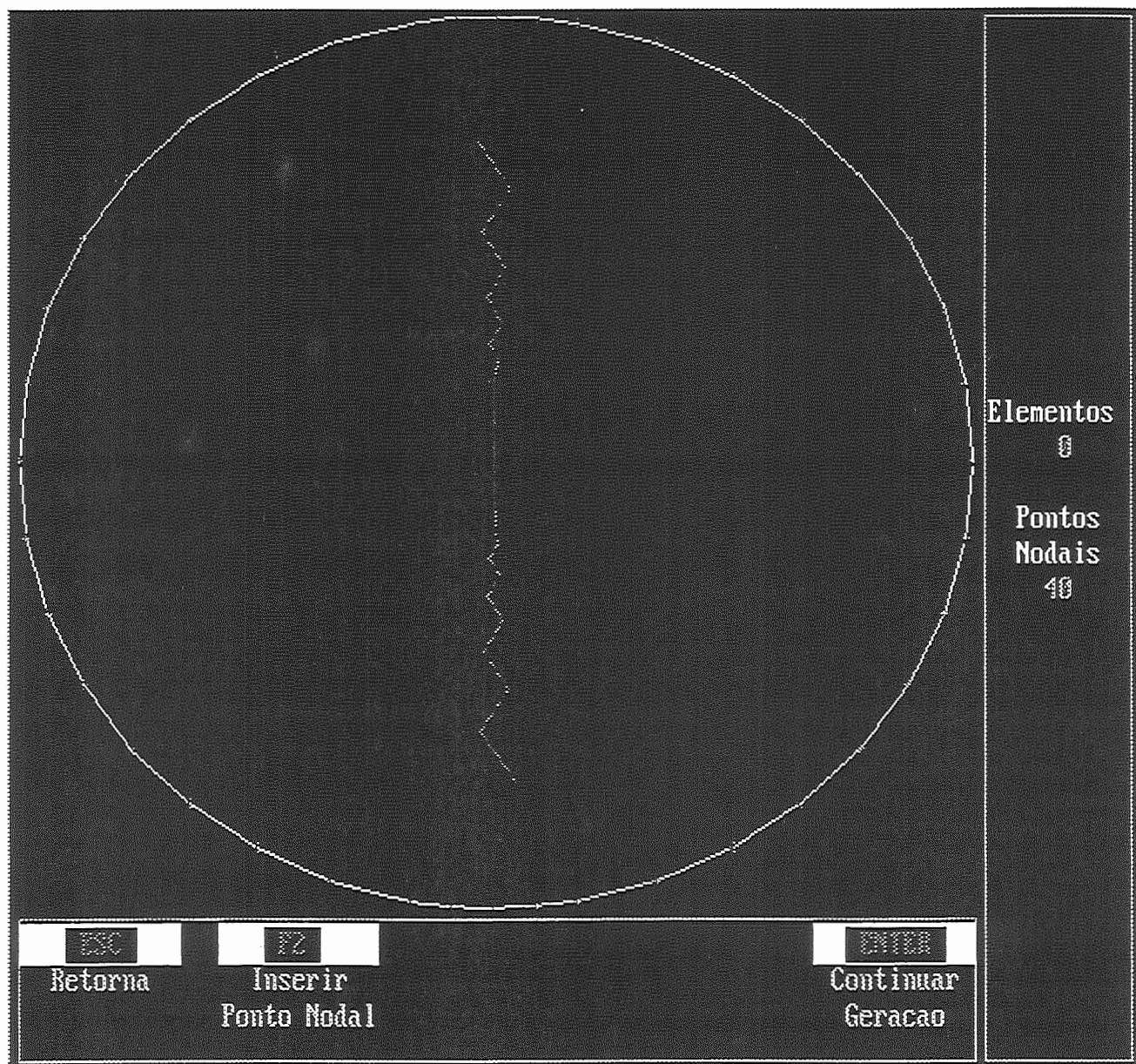


FIGURA 34 - Configuração da propagação da fratura em ensaio de compressão diametral com modelamento do corpo-de-prova inteiro.

CARGA LIMITE PARA A PROPAGAÇÃO DA FRATURA EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO $2a$

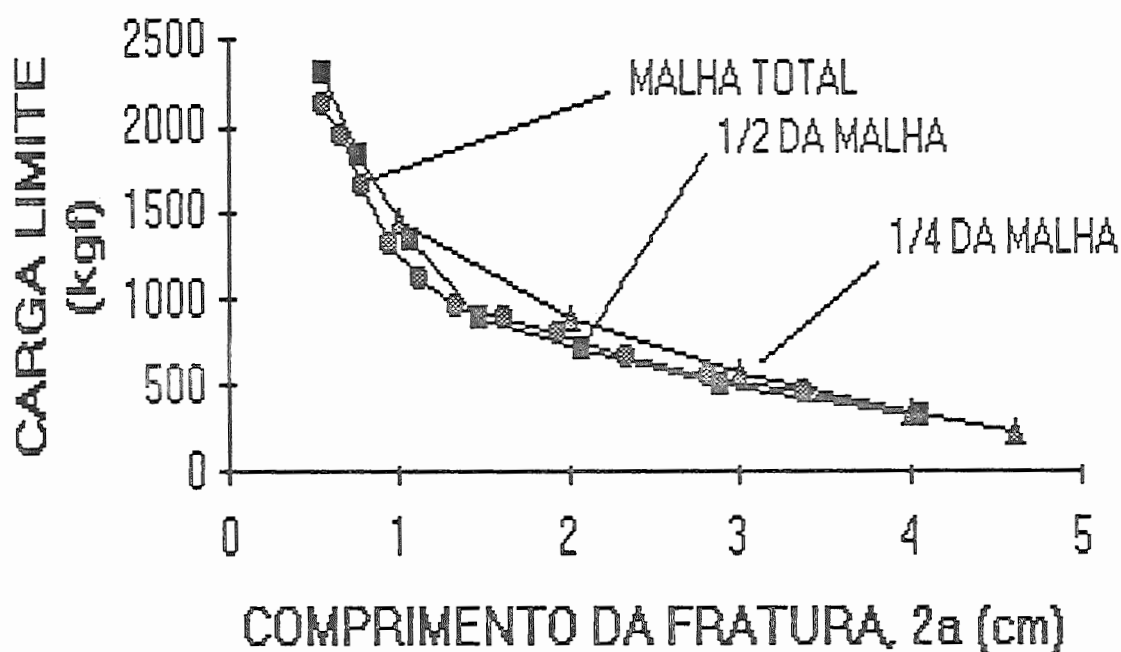


FIGURA 35 - Influência da simetria da malha no resultado da carga limite de propagação de uma fratura com diferentes dimensões, na simulação de um ensaio de compressão diametral.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os aspectos contemplados nessa avaliação final se referem tanto ao sistema adotado na linha de pesquisa em que o trabalho está inserido, como aos problemas e soluções encontrados visando atender os objetivos estabelecidos. Parece importante ressaltar os seguintes fatos:

- a) a definição do trabalho teve como fator determinante a preocupação com a continuidade do desenvolvimento das ferramentas utilizadas para simulação numérica de propagação de fraturas em materiais rochosos. Esse tipo de preocupação concorre, em última análise, para o avanço contínuo de uma linha de pesquisa, seja qual for a área de conhecimento, possibilitando a expansão do conhecimento de forma ordenada e contínua;
- b) diante das necessidades da linha de pesquisa em que o trabalho se insere, procurou-se cumprir todas aquelas premissas iniciais, ou seja, produzir um produto capaz de auxiliar técnicos envolvidos com tarefas de simulação de propagação de uma ou mais fraturas submetidas a estados de tensão compressiva e de tração. Tais exigências foram atendidas dentro das condições existentes para a execução do trabalho, através do desenvolvimento de um programa gerador interativo de malhas de elementos finitos (pré-processador) e incorporação em outro programa (programa de elementos finitos), já existente, de novos avanços que permitissem a utilização da capacidade máxima desse pré-processador;
- c) embora as ferramentas ora apresentadas não sejam definitivas nem possuam todos os recursos necessários, a sua utilização deverá resultar numa grande economia de tempo para a execução de simulações numéricas de propagação de fratura mais refinadas que as possíveis até então. Tendo em vista futuros avanços, procurou-se estruturar os algoritmos desenvolvidos de forma a facilitar a implementação de novos desenvolvimentos, que possam contribuir para a melhoria das análises;

- d) o desenvolvimento da parte principal do trabalho - gerador de malhas - levou em conta as tendências seguidas pelos programas atuais, ou seja, possibilitar a interatividade usuário/máquina durante a execução das tarefas previstas no programa. É importante salientar que, para a geração de malhas de elementos finitos para análises de propagação de fraturas, com reorganização da malha após o incremento dessas fraturas, a escolha da característica de interatividade do programa pode ser qualificada mais como uma alternativa imposta do que alternativa, propriamente dita. O desenvolvimento de um programa sem a possibilidade de interferência do usuário durante o processamento tenderia a restringir tremendamente a capacidade de solução desse tipo de problema;
- e) o item d) procurou dar a visão do ponto de vista do usuário, que é a de ter atendidas todas as suas necessidades. Do ponto de vista do criador dos algoritmos, as dificuldades são infinitamente superiores, uma vez que, devem ser atendidos todos os tipos de usuários, que podem possuir diferentes formas de abordar um mesmo problema e desejam interagir cada um da sua maneira. Tal situação implicou a criação de uma grande quantidade de dispositivos de segurança, visando dar o que se pode qualificar de consistência mínima para um programa;
- f) as conseqüências resultantes dos fatos no item e) são, basicamente, duas: primeira, os programas resultantes possuem tamanho elevado; segunda, são necessários conhecimentos avançados da linguagem de programação utilizada. Ambos aspectos requerem estudos aprofundados sobre planejamento de "software" e conhecimento profundo de "hardware", sob pena de se produzir algo com utilização limitada para as máquinas disponíveis. Assim, parece clara a necessidade de apoio da área de conhecimento de informática, ou mesmo, uma maior consciência dos profissionais de engenharia sobre as dificuldades no trato da informática quando são necessários recursos avançados para o desenvolvimento de programas complexos. Não se pode esperar que, com os enormes avanços experimentados pela informática ("hardware" e "software"),

esses conhecimentos possam ser incorporados naturalmente por profissionais que utilizam a informática como ferramenta. A continuar nessa direção, as diversas áreas de engenharia, especialmente as que utilizam métodos numéricos para a solução dos seus problemas, passarão a ser muito mais profissionais da informática que engenheiros, propriamente ditos.

g) como já dito no item 3.2., a escolha da Linguagem de programação "C" levou em conta fatores como velocidade de processamento, facilidades de alocação de memória e para a criação de rotinas gráficas, entre outros aspectos frequentemente salientados na bibliografia afim. Por outro lado, a não verificação dos limites das variáveis vetoriais durante o processamento pela própria linguagem, entre outros aspectos, torna-a uma linguagem extremamente perigosa para o desenvolvimento de programas, à medida que os dispositivos de segurança devem ser totalmente previstos pelo programador. Aspectos como este raramente são enfatizados na literatura. Pelo contrário, somente as vantagens são apresentadas. Assim, com frequência surgem problemas durante a criação dos algoritmos que, embora elementares sob o ponto de vista de um programador experimentado ou bem informado, para profissionais que utilizam a informática como ferramenta se transformam em grandes perdas de tempo;

h) o sistema ora apresentado carece de aperfeiçoamentos imediatos, sugerindo-se os desenvolvimentos seguintes no gerador de malhas:

- rotina para a leitura do arquivo de dados gerado pelo próprio gerador de malhas;
- procedimentos para a geração de pontos nodais no interior do domínio em situações específicas, como nas proximidades de um vértice, ao redor de determinados pontos fixos e nas proximidades das pontas das fraturas, externamente às rosetas;
- desenvolvimento de rotina adicional com um método mais otimizado para a redução da largura da banda da matriz de rigidez da estrutura;

- desenvolvimento de rotinas gráficas adicionais para a manipulação dos resultados produzidos pelo programa "FRAT";
 - Introdução de procedimentos, nas rotinas gráficas existentes, para a apresentação da malha em verdadeira grandeza através da utilização de comando específico. Nas condições atuais esse tipo de vista pode ser obtida, no entanto, não se constitui numa tarefa executável apenas pelo uso de um único comando;
- i) Para o programa "FRAT" parece clara a necessidade de expansão na seguinte direção:
- expansão da capacidade de manipulação de dados (número de elementos, pontos nodais, largura de banda) para possibilitar análises de problemas que exijam maior detalhamento na discretização da estrutura. Tais avanços deverão ser facilitados com a nova geração de compiladores FORTRAN para microcomputadores;
 - transformação das subrotinas em módulos independentes, como forma de facilitar a sua expansão e manutenção;
 - desenvolvimento de rotinas para apresentação de dados durante o processo interativo;
 - planejamento e desenvolvimento de rotinas para o armazenamento dos resultados das análises, para posterior manipulação e apresentação gráfica. Este trabalho deve ser criterioso, uma vez que a cada estágio de carregamento novos resultados são gerados. Objetivamente, o planejamento deve consistir na definição de quais parâmetros se deseja observar e a forma de identificação dos mesmos segundo cada passo da análise;
- j) planejar o desenvolvimento do sistema, no que se refere à normalização de procedimentos e documentação. Isso pode ser traduzido pela normalização de variáveis, padronização da estrutura das novas rotinas obedecendo ao que já existe ou implementando métodos mais avançados que possam ser incorporados às rotinas existentes, melhoria da documentação do programa "FRAT" no próprio programa ou através de anotações externas. Tais recursos (documentação) serão de vital importância para a evolução dos trabalhos, tendo em vista o crescimento que deverá ocorrer nos códigos fontes.

ANEXO A

FORMATO DE ENTRADA DE DADOS PARA O
GERADOR INTERATIVO DE MALHAS DE
ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDOS DE
PROPAGAÇÃO DE FRATURAS (Versão 1.0)

A.1. INTRODUÇÃO

O programa gerador de malhas de elementos finitos foi codificado em Linguagem C, baseado no compilador Microsoft C versão 6.0. Os dados de entrada são utilizados a partir de arquivos no formato texto, sem formatação especial. É necessário, apenas, ser obedecida a ordem definida para variáveis conforme descrito adiante. Para a execução do programa são necessários aproximadamente 530 kBytes de memória RAM, cerca de 450 kBytes para o arquivo do programa executável, mais 80 kBytes alocados de acordo com as necessidades durante o processo de geração da malha. As rotinas que fazem alocação dinâmica de memória possuem procedimentos para o tratamento de situações de possível ultrapassagem dos limites de memória da máquina em uso. O tratamento dado consiste no desvio do fluxo para uma função com mensagens de erros. A instrução fornecida ao usuário, em geral, resulta no aborto da execução do programa. A capacidade de geração da malha de elementos está limitada a 1800 elementos e 2000 pontos nodais.

A.2. FORMATO DOS DADOS DE ENTRADA

As informações de entrada podem ser divididas em 4 blocos distintos (para fins didáticos), no entanto, devem ser fornecidas sem nenhuma linha em branco para a separação entre blocos. O primeiro bloco se refere às informações gerais sobre o problema, o segundo se relaciona à vinculação dos nós e cargas concentradas nos mesmos, o terceiro contém as informações sobre as fraturas e o último os contornos do domínio a ser discretizado. Numa mesma linha cada variável deve ser separada por, pelo menos, um espaço em branco.

BLOCO 1 - Informações gerais

Neste bloco, todas as linhas são obrigatórias.

- linha 1: título principal do problema, com até 80 caracteres;
- linha 2: título secundário, com até 80 caracteres;

- linha 3: VARIÁVEL 1: número de tipos diferentes de materiais (limites da versão 1.0: mínimo 1, máximo 1);

VARIÁVEL 2: código de tipo de análise: 1 = análise estado plano de tensão.

0 = análise estado plano de deformação;

VARIÁVEL 3: código de tipo de análise: 1 = análise estado plano de deformação.

0 = análise estado plano de tensão;

VARIÁVEL 4: tipo de elemento triangular no interior do domínio:

3 = elemento triangular de 3 nós.

6 = elemento triangular de 6 nós.

- linha 4: VARIÁVEL 1: módulo de Young;

VARIÁVEL 2: coeficiente de Poisson;

VARIÁVEL 3: rigidez tangencial da junta;

VARIÁVEL 4: rigidez normal da junta;

EXEMPLO DO BLOCO:

Problema número 1. Duas fraturas com elementos junta.

Material homogêneo.

1 0 1

50000 0.2 0.4 40

Neste bloco, define-se um problema para ser analisado segundo o estado plano de deformação de um material cujas características são: $E = 50000$; $\nu = 0,2$; $K_s = 0,4$; $K_n = 40$.

BLOCO 2 - Informações sobre a vinculação e cargas concentradas

Neste bloco, todas as linhas são obrigatórias.

- linha 1: número de pontos nodais com vinculação e/ou carga concentrada diferente do padrão do gerador;

- linha 2: VARIÁVEL 1: código de vinculação: 0 = ponto nodal livre (padrão do gerador).

1 = ponto nodal fixo na direção X.

2 = ponto nodal fixo na direção Y.

3 = ponto nodal fixo na direção X e Y;

VARIÁVEL 2: coordenada X do ponto nodal com 6 dígitos significativos;

VARIÁVEL 3: coordenada Y do ponto nodal com 6 dígitos significativos;

VARIÁVEL 4: carga concentrada no ponto nodal na direção X;

VARIÁVEL 5: carga concentrada no ponto nodal na direção Y;

Obs.: um aspecto importante a ser salientado nesse bloco reside no fato de que as coordenadas acima devem, **OBRIGATORIAMENTE**, coincidir com o início de algum segmento dos contornos fornecidos no BLOCO 4 de dados, abaixo.

EXEMPLO DO BLOCO:

```
4
2 15 1 0 0.5
2 10 1 0 0
3 15 10 0 0
0 1 10 1.5 3.7
```

Neste exemplo, supõe-se a existência de 4 nós vinculados e/ou com carga concentrada. Note que o ponto nodal com as coordenadas (15 ; 1) possui vinculação e carga concentrada na direção Y.

BLOCO 3 - Informações sobre as fraturas

- linha 1: VARIÁVEL 1: número de fraturas do domínio (limites da versão 1.0: mínimo 0, máximo 10). Se não existirem fraturas, o bloco acaba nesta linha. Se existir mais de uma fratura, sub-blocos de linhas 2 e 3 devem ser repetidos tantas vezes quanto for o número de fraturas;

- linha 2: VARIÁVEL 1: número de segmentos da fratura (limites da versão 1.0: mínimo = 1, máximo = 50);

VARIÁVEL 2: código de identificação das pontas da fratura que terão roseta:

0 = apenas a ponta 1 (início do primeiro segmento da fratura).

1 = apenas a ponta 2 (final do último segmento da fratura).

2 = nas duas pontas da fratura;

VARIÁVEL 3: código para a geração de elementos junta ao longo da fratura:

0 = gerar elementos junta.

1 = não gerar elementos junta;

- linha 3: VARIÁVEL 1: coordenada X_i do início do segmento;

VARIÁVEL 2: coordenada Y_i do início do segmento;

VARIÁVEL 3: coordenada X_f do final do segmento;

VARIÁVEL 4: coordenada Y_f do final do segmento;

Obs.: o número de vezes que a linha 3 se repete deve ser concordante com o número de segmentos fornecidos na VARIÁVEL 1 da linha 2. Os segmentos devem ser ordenados do início ao fim da fratura. Na primeira linha 3 deve, obrigatoriamente, constar o primeiro segmento, nas linhas seguintes, análogas à 3, os intermediários e na última linha o segmento final da fratura. Se a fratura for modelada com um segmento único, apenas uma vez a linha 3 deve ser fornecida.

EXEMPLO DE BLOCO:

```

3
3 0 0
3 4.3 3.5 4.3
3.5 4.3 5 3
5 3 6 1
1 2 0
8 7 4 5
3 1 1
10 5 10.5 5
10.5 5 12 6
12 6 13 6

```


Neste bloco definiram-se 3 fraturas. A fratura 1 possui 4 segmentos e roseta apenas na ponta 1 (caso em a outra ponta é limitada pelo contorno da estrutura). As paredes da fratura deverão ser modeladas com elementos junta. A fratura 2 está definida através de um único segmento. Está no interior do domínio e, portanto, deverá ter rosetas nas duas pontas. Deverá, também, ser modelada com elementos junta. A terceira fratura possui 3 segmentos, deverá ter roseta somente na ponta 2 (a ponta é limitada pelo contorno externo) e não será modelada com elementos junta. Dois aspectos são fundamentais a serem salientados. O primeiro, relativo às coordenadas do final de um segmento e do início do segmento subsequente: elas devem ser IGUAIS. O segundo, relativo às pontas de fratura limitadas pelos contornos (externo ou internos). Toda vez que uma fratura for enunciada com não tendo roseta numa das pontas, as coordenadas da referida ponta deverão, OBRIGATORIAMENTE, coincidir com as coordenadas de dois segmentos (com o final de um e o início do seu subsequente) do contorno limitante. Do contrário, ocorrerá erro na rotina de "abertura da fratura" ou na geração dos elementos triangulares no interior do domínio.

BLOCO 4 - Informações sobre os contornos e pontos fixos no interior do domínio

Os segmentos do contorno externo devem ser fornecidos no sentido anti-horário, enquanto os segmentos internos no sentido horário. Pontos fixos no interior do domínio possuem as coordenadas do início e fim do segmento coincidentes.

- linha 1: VARIÁVEL 1: coordenada X_i do início do segmento;

VARIÁVEL 2: coordenada Y_i do início do segmento;

VARIÁVEL 3: coordenada X_f do final do segmento. Se ponto interior $X_i = X_f$;

VARIÁVEL 4: coordenada Y_f do final do segmento. Se ponto interior $Y_i = Y_f$;

VARIÁVEL 5: código de contorno: 0 = pontos fixos no interior do domínio.

1 = contorno externo.

2 = contornos internos;

VARIÁVEL 6: número do segmento no contorno. Nos contornos internos (vazios) cada um deverá ser iniciado com o número 1;

VARIÁVEL 7: fator densidade: ZERO = o segmento ou ponto nodal não contribuirá para fins de definição da distância entre pontos nodais durante a geração automática dos mesmos no interior do domínio.

NÃO ZERO = o valor será utilizado para promover a divisão do segmento, além de ser considerado para a definição da distância entre as linhas imaginárias, sobre as quais são gerados os pontos nodais, e o afastamento entre pontos ao longo das linhas;

EXEMPLO DE BLOCO:

| | | | | | | |
|-----|----|-----|----|---|---|------|
| 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0.3 |
| 4 | 1 | 6 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 6 | 1 | 10 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| 10 | 1 | 10 | 5 | 1 | 4 | 1.2 |
| 10 | 5 | 15 | 1 | 1 | 5 | 0.5 |
| 15 | 1 | 15 | 10 | 1 | 6 | 0.5 |
| 15 | 10 | 1 | 10 | 1 | 7 | 1 |
| 1 | 10 | 1 | 1 | 1 | 8 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 4.4 | 10 | 4.4 | 10 | 0 | 2 | 0.75 |

No exemplo acima, o contorno externo é delimitado através de 8 segmentos e são inseridos 2 pontos fixos no interior do domínio. Deve ser notado no caso dos segmentos 2 e 3, a

coincidência do final do segmento 2 e início do 3 com a ponta 2 da fratura 1. Analogamente, os segmentos 4 e 5 coincidindo com a ponta 1 da fratura 3. O usuário deve ter muito cuidado, uma vez que o programa, na versão 1.0, não possui procedimentos de segurança para detectar eventuais erros desse tipo.

A1.3. RESULTADOS

O agrupamento dos exemplos de blocos acima dão origem a um arquivo conforme Figura A.1. Nas Figuras A.2, A.3 e A.4 são apresentados os resultados nas fases de apresentação dos dados de entrada (A.2), após a geração dos pontos nodais no interior dos segmentos e do domínio (A.3) e após a formação dos elementos (A.4). A malha resultante decorreu exclusivamente da utilização dos dados de entrada, portanto, sem nenhum trabalho de edição durante ou posterior ao processo de geração. Na Figura A.5 é apresentado o arquivo já no formato texto padrão do programa "FRAT".

FIGURA A.1 - Arquivo de dados resultante do agrupamentos dos diversos blocos.

Problema número 1. Exemplo de arquivo com todos os blocos.
 Material homogêneo.
 1 0 1
 50000 0.2 0.4 40
 4
 2 15 1 0 0.5
 2 10 1 0 0
 3 15 10 0 0
 0 1 10 1.5 3.7
 3
 3 0 0
 3 4.3 3.5 4.3
 3.5 4.3 5 3
 5 3 6 1
 1 2 0
 8 7 4 5
 3 1 1
 10 5 10.5 5
 10.5 5 12 6
 12 6 13 6
 1 1 4 1 1 1 0.3
 4 1 6 1 1 2 2
 6 1 10 1 1 3 2
 10 1 10 5 1 4 1.2
 10 5 15 1 1 5 0.5
 15 1 15 10 1 6 0.5
 15 10 1 10 1 7 1
 1 10 1 1 1 8 1
 2 2 2 2 0 1 0
 4.4 10 4.4 10 0 2 0.75

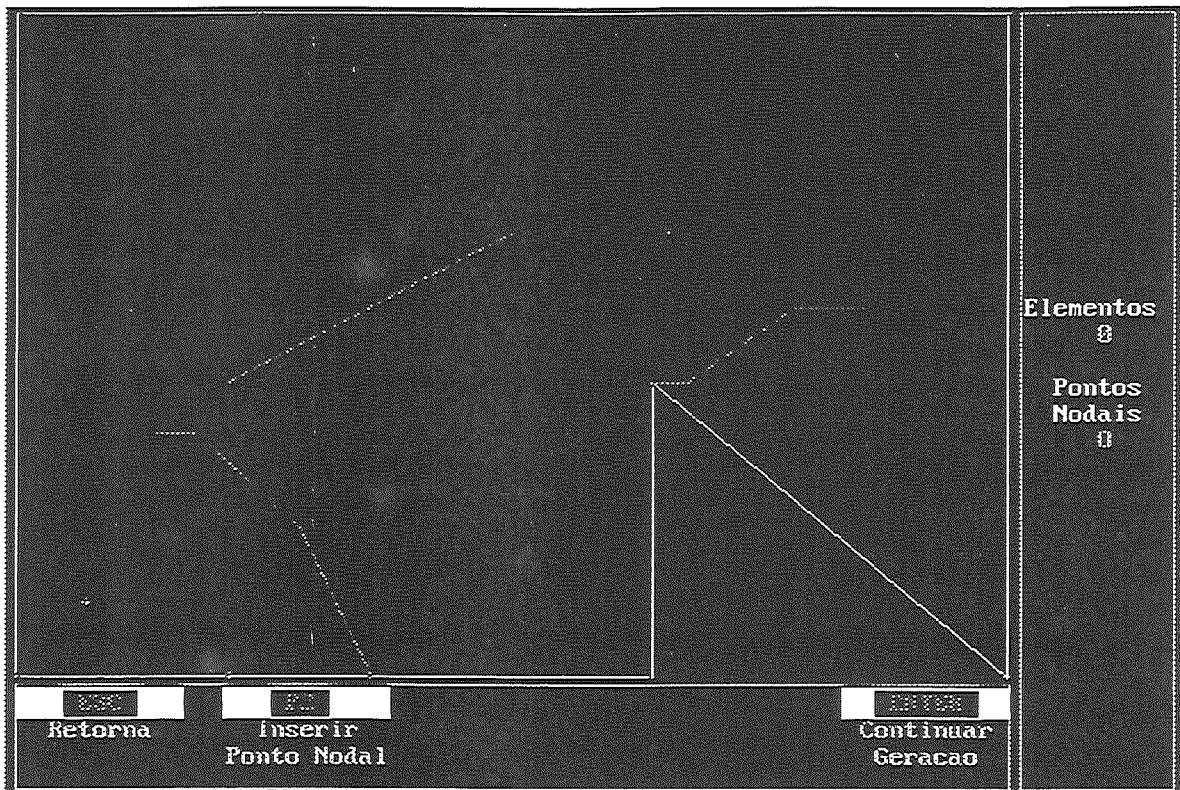


FIGURA A.2 - Apresentação dos dados de entrada.

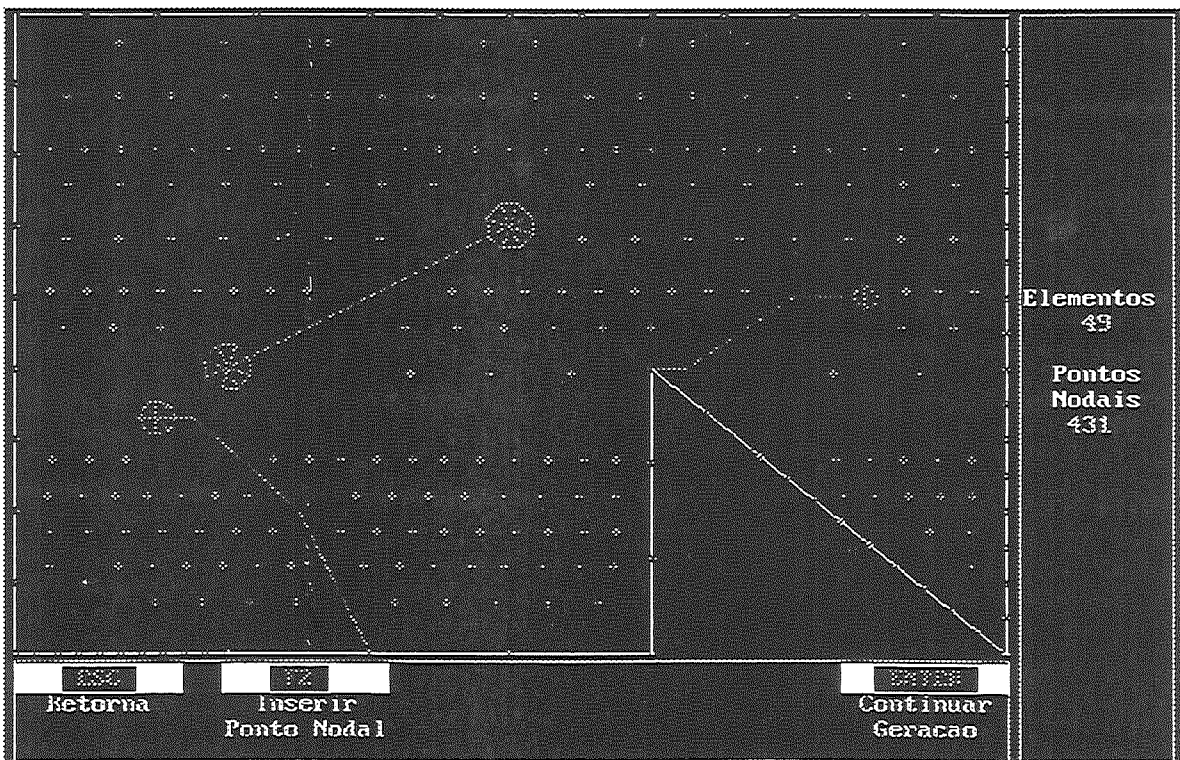


FIGURA A.3 - Apresentação da malha parcial após a geração dos elementos junta, elementos triangulares "crack tip" e pontos nodais no meio dos segmentos e no interior do domínio.

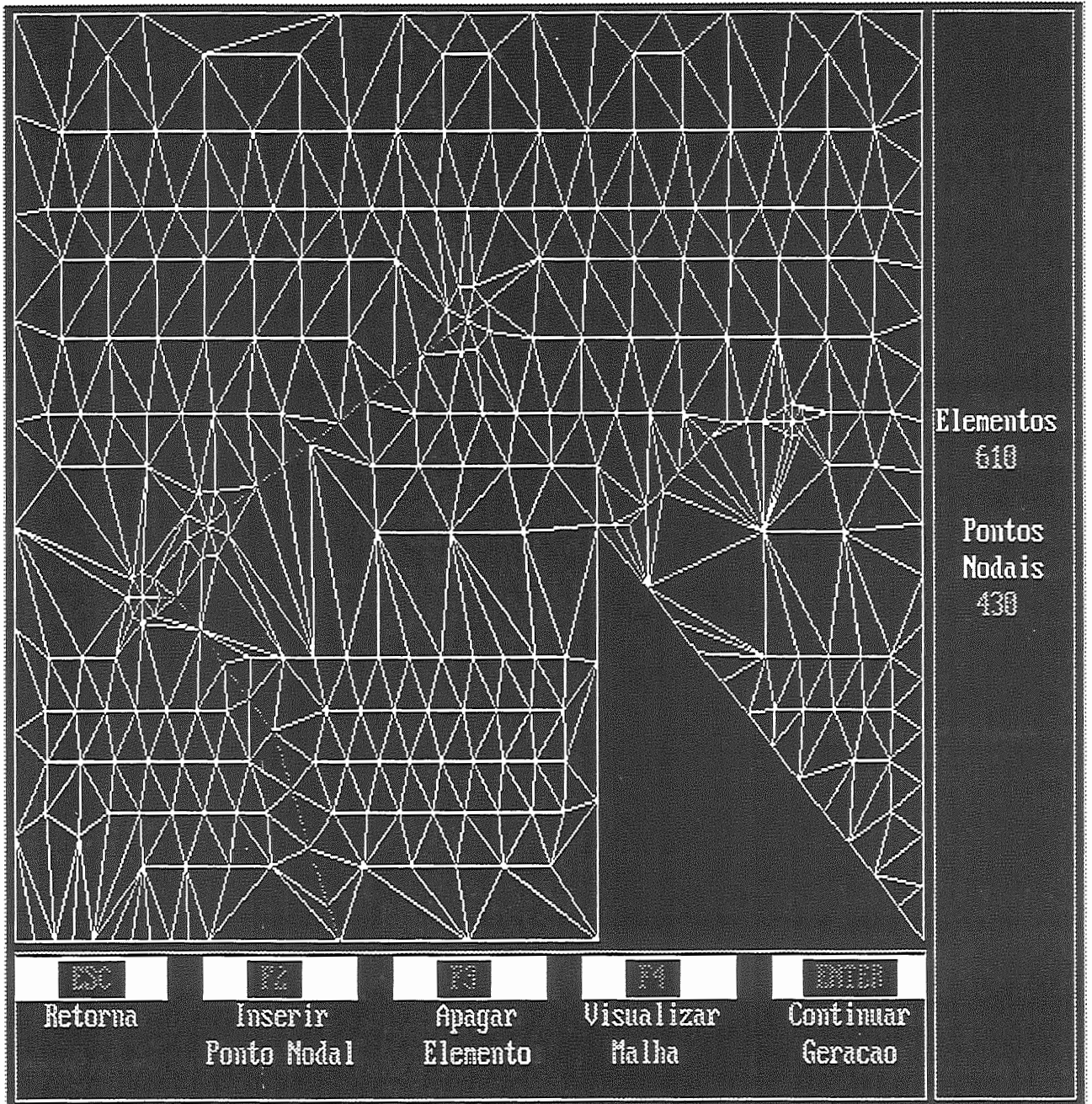


FIGURA A.4 - Apresentação da malha resultante da utilização, exclusivamente, dos dados de entrada.

ANEXO B

FORMATO DE ENTRADA DE DADOS PARA O
PROGRAMA "FRAT" (Versão 2.0)

B.1. INTRODUÇÃO

O formato do arquivo dos dados de entrada para o programa "FRAT" requer cuidados especiais, tendo em vista o rigor dos comandos de leitura da Linguagem FORTRAN. Recomenda-se a utilização de editores como o do próprio sistema operacional. Em geral, os editores dos compiladores das Linguagens C e FORTRAN possuem um sistema de formatação dos espaços em branco não compatível com os comandos de leitura do programa.

Nos passos a seguir são apresentados os formatos de cada variável. As variáveis não trabalhadas pelo gerador interativo de malhas serão devidamente identificadas e, caso o usuário venha a utilizá-las, poderá editá-las após o trabalho do gerador como se fosse um arquivo produzido manualmente. Cada variável, ao invés de separada por um espaço em branco, deverá ser editada num espaço definido por um conjunto de colunas. Se determinada variável não puder ser inserida no espaço reservado, devem ser utilizados múltiplos do sistema de unidades, de maneira a equacionar o problema.

B.2. FORMATO DOS DADOS DE ENTRADA

- linha 1: (col. 1 a 78) - título do problema;

- linha 2: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número total de pontos nodais;

VARIÁVEL 2: (col. 6 a 10) - número total de elementos;

VARIÁVEL 3: (col. 11 a 15) - número de materiais diferentes (limites da versão
2.0: mínimo 1, máximo 8);

VARIÁVEL 4: (col. 16 a 20) - código de tipo de análise:

1 = análise estado plano de tensão.

0 = análise estado plano de deformação;

VARIÁVEL 5: (col. 21 a 25) - código de tipo de análise:

1 = análise estado plano de deformação.

0 = análise estado plano de tensão;

- linha 3: (col. 1 a 78) - subtítulo do problema;

- linha 4: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 10) - módulo de Young;

VARIÁVEL 2: (col. 11 a 20) - coeficiente de Poisson;

VARIÁVEL 3: (col. 21 a 30) - rigidez tangencial da junta;

VARIÁVEL 4: (col. 31 a 40) - rigidez normal da junta;

- linha 5: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número do ponto nodal;

VARIÁVEL 2: (col. 6 a 10) - código de vinculação:

0 = ponto nodal livre.

1 = ponto nodal fixo na direção X.

2 = ponto nodal fixo na direção Y.

3 = ponto nodal fixo nas direções X e Y;

VARIÁVEL 3: (col. 11 a 20) - coordenada X do ponto nodal;

VARIÁVEL 4: (col. 21 a 30) - coordenada Y do ponto nodal;

VARIÁVEL 5: (col. 31 a 40) - carga concentrada no ponto nodal na direção X;

VARIÁVEL 6: (col. 41 a 50) - carga concentrada no ponto nodal na direção Y;

Obs.: a linha 5 deve ser repetida um número de vezes igual ao número total de pontos nodais (linha 2: VARIÁVEL 1).

- linha 6: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número do elemento;

VARIÁVEL 2: (col. 6 a 10) - incidência conforme tipo de elemento;

VARIÁVEL 3: (col. 11 a 15) - incidência conforme tipo de elemento;

VARIÁVEL 4: (col. 16 a 20) - incidência conforme tipo de elemento;

VARIÁVEL 5: (col. 21 a 25) - incidência conforme tipo de elemento;
VARIÁVEL 6: (col. 26 a 30) - incidência conforme tipo de elemento;
VARIÁVEL 7: (col. 31 a 35) - incidência conforme tipo de elemento;
VARIÁVEL 8: (col. 36 a 40) - incidência conforme tipo de elemento;
VARIÁVEL 9: (col. 41 a 45) - incidência conforme tipo de elemento;
VARIÁVEL 10: (col. 46 a 50) - código do tipo de material do elemento;

Obs.: repetir a linha 6 um número de vezes igual ao número total de elementos (linha 2: VARIÁVEL 2). Na Figura B.1 são apresentados os diferentes tipos de elementos e a respectiva configuração da linha 6.

O BLOCO FORMADO PELAS LINHAS 7, 8 E 9, A SEGUIR, NÃO SÃO TRABALHADAS PELO GERADOR INTERATIVO DE MALHAS:

- linha 7: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número de pontos nodais com cargas concentradas, além daquelas incluídas pelo gerador interativo de malhas;

VARIÁVEL 2: (col. 6 a 10) - número de lados de elementos carregados;

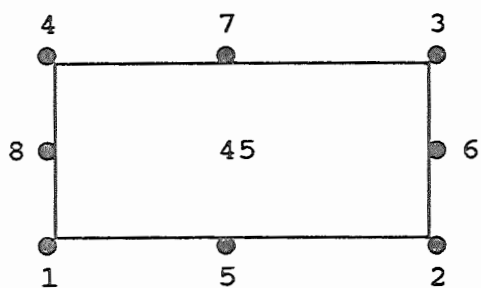
- linha 8: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número do ponto nodal com carga concentrada;

VARIÁVEL 2: (6 a 15) - carga concentrada no ponto nodal na direção X;

VARIÁVEL 3: (16 a 25) - carga concentrada no ponto nodal na direção Y;

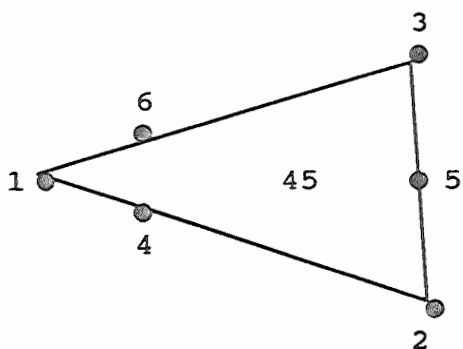
Obs.: repetir a linha 8 um número de vezes igual ao número de pontos nodais com carga concentrada (linha 7: VARIÁVEL 1).

Elemento QUADRILÁTERO de 8 Pontos Nodais



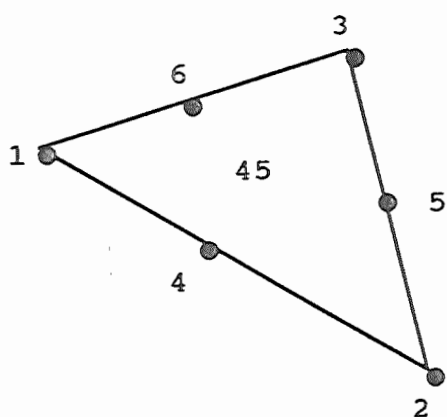
| INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <hr/> | | | | | | | | | |
| 45 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |

Elemento TRIANGULAR de 6 Pontos Nodais "Crack Tip"



| INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <hr/> | | | | | | | | | |
| 45 | 1 | 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 6 | 1 | 1 |

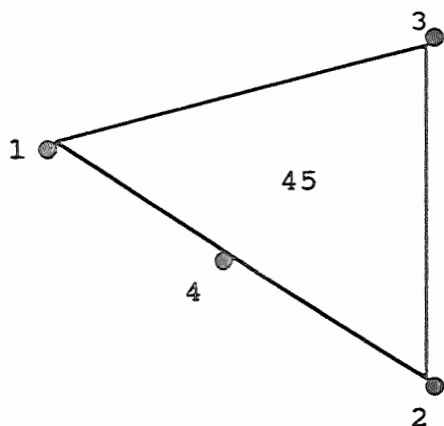
Elemento TRIANGULAR de 6 Pontos Nodais



| INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <hr/> | | | | | | | | | |
| 45 | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 6 | 0 | 0 | 1 |

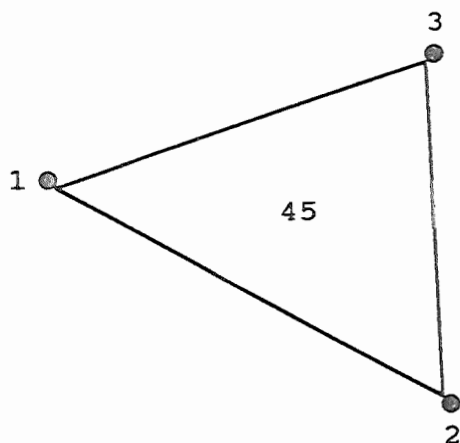
FIGURA B.1 - Tipos de elementos utilizados pelo programa "FRAT".

Elemento TRIANGULAR de 4 Pontos Nodais



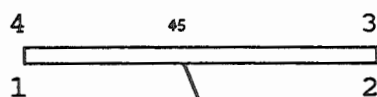
| | INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|----|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 1 | 4 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Elemento TRIANGULAR de 3 Pontos Nodais



| | INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|----|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Elemento JUNTA de 4 Pontos Nodais



ÁREA = 0

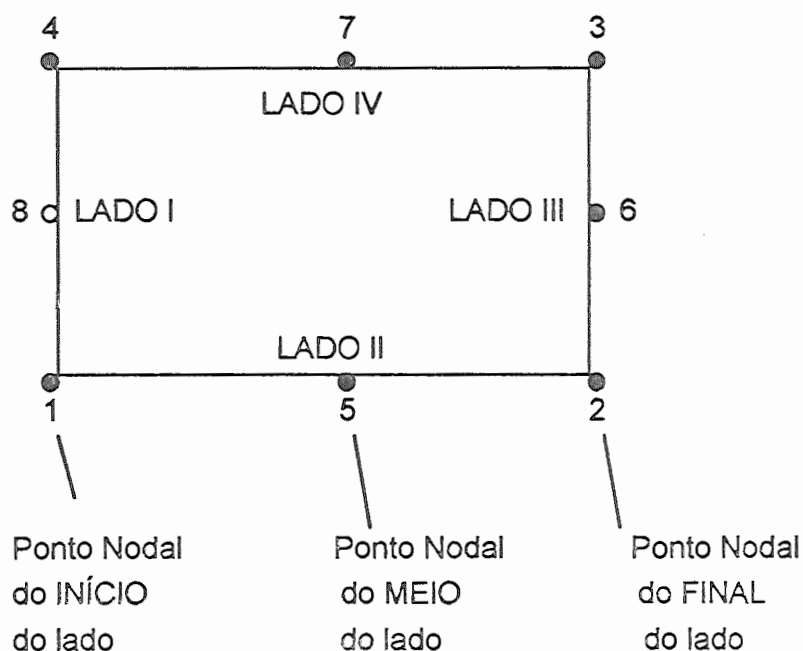
Coordenadas (nó 1 = nó 4; nó 2 = nó 3)

| | INCIDÊNCIA | | | | | | | | | |
|----|------------|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| 45 | 1 | 2 | 3 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

FIGURA B.1 (cont.) - Tipos de elementos utilizados pelo programa "FRAT".

- linha 9: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número do elemento com lado carregado;
VARIÁVEL 2: (col 6 a 10) - número do lado carregado no elemento;
VARIÁVEL 3: (col. 11 a 20) - componente da carga distribuída na direção X, no ponto nodal do início do lado;
VARIÁVEL 4: (col. 21 a 30) - componente da carga distribuída na direção Y, no ponto nodal do início do lado;
VARIÁVEL 5: (col. 31 a 40) - componente da carga distribuída na direção X, no ponto nodal do meio do lado;
VARIÁVEL 6: (col. 41 a 50) - componente da carga distribuída na direção Y, no ponto nodal do meio do lado;
VARIÁVEL 7: (col. 51 a 60) - componente da carga distribuída na direção X, no ponto nodal do final do lado;
VARIÁVEL 8: (col. 61 a 70) - componente da carga distribuída na direção Y, no ponto nodal do final do lado;
Obs.: a linha 9 deve ser repetida um número de vezes igual ao número de elementos com carga distribuída (linha 7: VARIÁVEL 2). As VARIÁVEIS de 2 a 8 são definidas conforme a Figura B.2.
- linha 10: (col. 1 a 5) - número de pontas de fratura a serem analisadas (mínimo = 0, máximo = 20);

Carga Distribuída no Lado do Elemento (DISTRIBUIÇÃO PARABÓLICA)



CONVENÇÃO:

(+) comprimindo o elemento

(-) tracionando o elemento

OBS.: os lados acima foram definidos considerando a seguinte INCIDÊNCIA:

INCIDÊNCIA

45 1 2 3 4 5 6 7 8 1

ou seja, o LADO I é formado pelo último e pelo primeiro vértices, e os demais LADOS seguem na direção ANTI-HORÁRIA. Esta sistemática vale, também, para os outros tipos de elementos contínuos que possuem lado com variação de deslocamentos parabólica.

FIGURA B.2 - Convenção para aplicação de cargas distribuídas nos lados dos elementos.

- linha 11: VARIÁVEL 1: (col. 1 a 5) - número da fratura:

0 = fratura 1.

...

9 = fratura 10;

VARIÁVEL 2: (col. 6 a 10) - número da ponta da fratura:

0 = ponta 1.

1 = ponta 2;

VARIÁVEL 3: (col. 11 a 15) - código de simetria:

-1 = simetria à esquerda.

0 = sem simetria.

1 = simetria à direita;

VARIÁVEL 4: (col. 15 a 20) - número do segundo ponto nodal à esquerda;

VARIÁVEL 5: (col. 21 a 25) - número do segundo ponto nodal à direita;

VARIÁVEL 6: (col. 26 a 30) - número do primeiro ponto nodal à esquerda;

VARIÁVEL 7: (col. 31 a 35) - número do primeiro ponto nodal à direita;

VARIÁVEL 8: (col. 36 a 40) - número do ponto nodal na ponta da fratura;

Obs.: essa linha deve ser repetida um número de vezes igual ao número de pontas de fraturas a serem analisadas (linha 10). A escolha de qual será a ponta 1 e qual será a ponta 2 (VARIÁVEL 2) fica a critério do usuário. A VARIÁVEL 3 está relacionada ao modelamento da fratura completa ou apenas uma face (simetria), conforme Figuras B.3a, B.3b e B.3c. As VARIÁVEIS 4, 5, 6, 7 e 8 são definidas conforme a configuração mostrada na Figura B.3b.

B.3. RESULTADOS DA ANÁLISE

O programa "FRAT" fornece um relatório, na forma de arquivo ("SAIDA.MEF"), com os seguintes resultados:



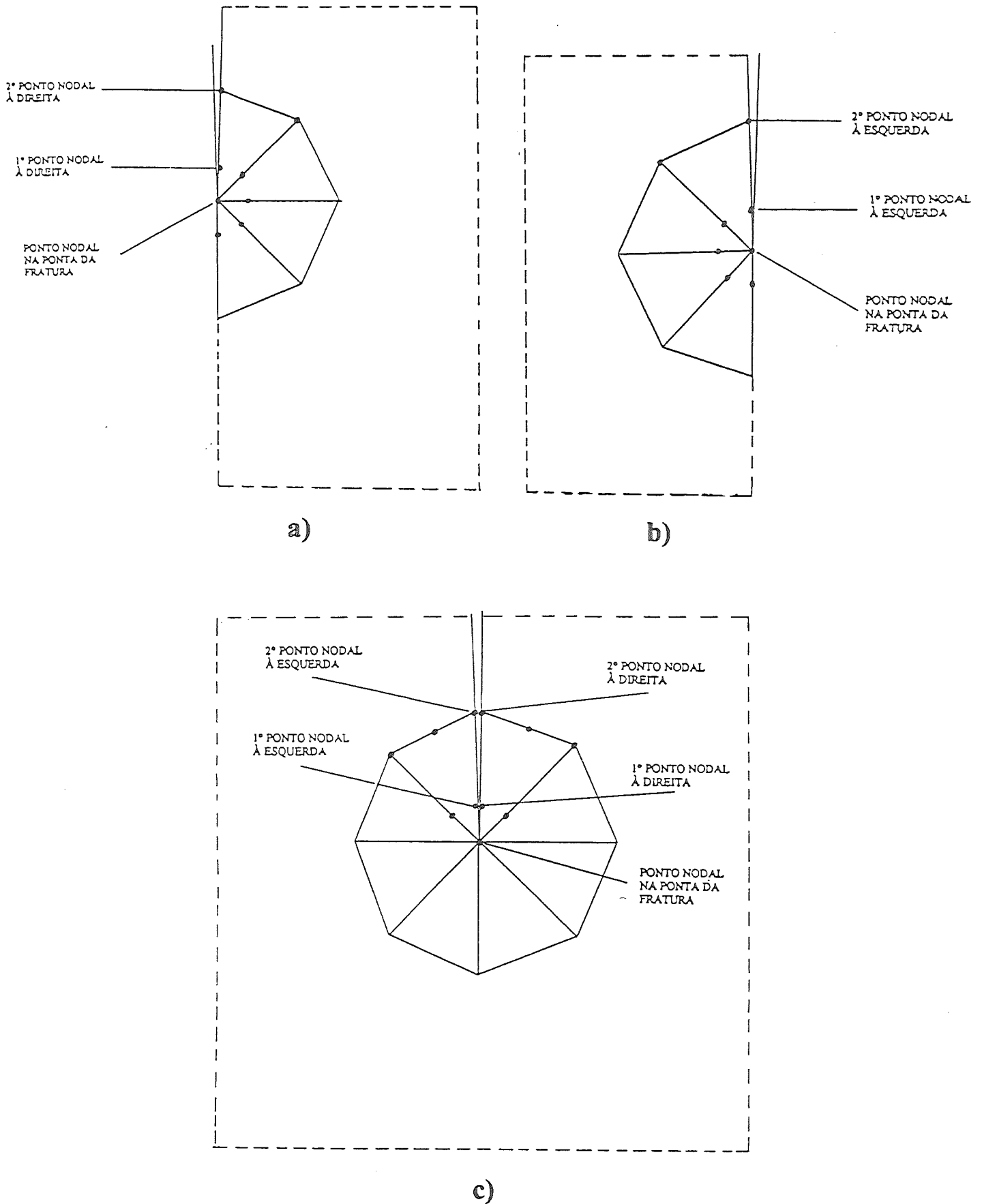


FIGURA B.3 - Códigos para o modelamento da fratura: a) simetria à esquerda; b) simetria à direita; c) sem simetria.

- a) deslocamentos nos pontos nodais;
- b) tensões normal e tangencial na direção dos eixos de coordenadas e as tensões principais, nos pontos nodais. A Figura B.4 mostra a orientação da tensão principal maior;
- c) resultados relativos à determinação do fator de intensidade de tensão nas pontas das fraturas. É fornecida, também, a orientação da direção de propagação da fratura, conforme Figura B.5.

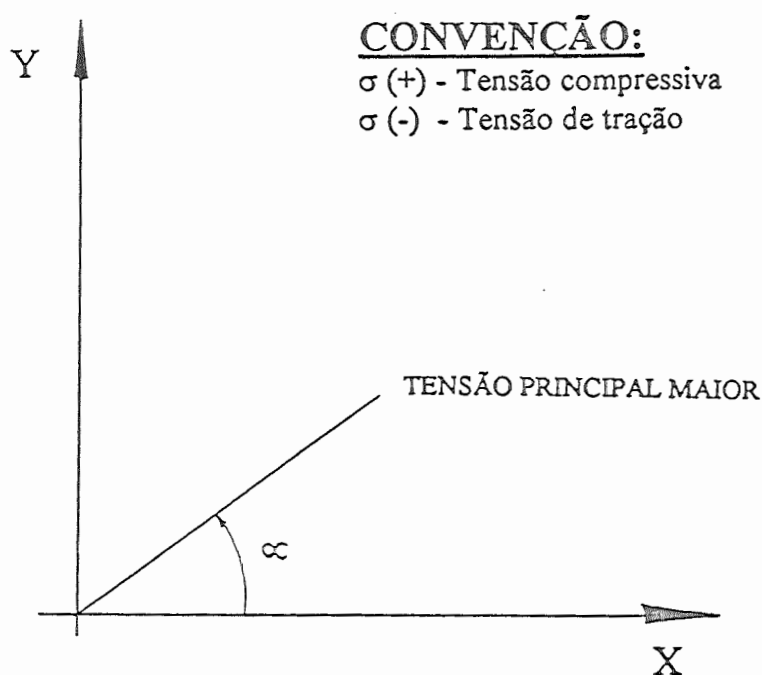


FIGURA B.4 - Convenção utilizadas para as tensões principais.

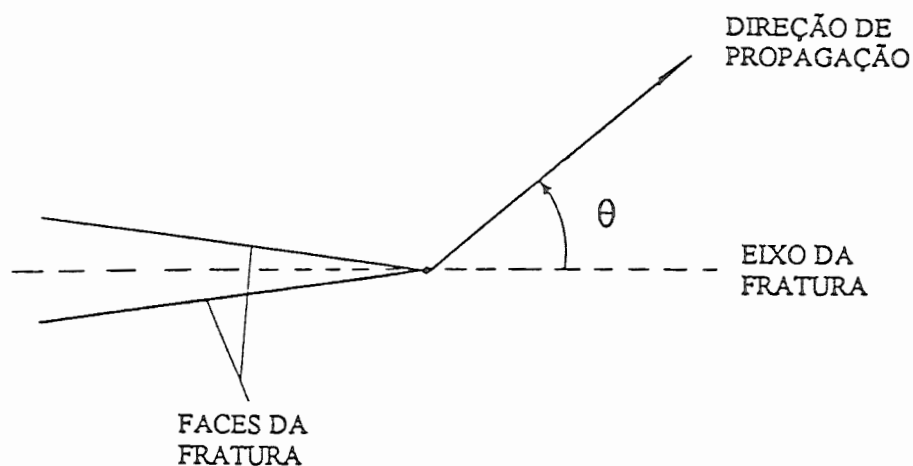


FIGURA B.5 - Convenção utilizadas para a direção de propagação da fratura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

As referências ao material de pesquisa consultado serão divididas em duas seções: a primeira, contendo aquelas citadas ao longo do desenvolvimento do texto e que foram consultadas nos seus originais. Esse material foi fundamental para a definição dos objetivos, planejamento das atividades e escolha das técnicas e caminhos mais adequados para a execução do trabalho; a segunda, apresenta uma lista do material utilizado como auxiliar, especialmente, manuais das linguagens de programação "C" e "FORTRAN", no entanto, também importante nas tarefas relacionadas à codificação dos algoritmos. Estão relacionados, ainda, trabalhos não consultados, porém, julgados importantes para o entendimento dos diversos assuntos caso o leitor desejar o aprofundamento.

Referências Citadas no Texto

BARSOUM, R. S. (1976). On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, p. 25-37.

BARSOUM, R. S. (1977). Triangular Quarter-Point Elements as Elastic and Perfectly-Plastic Crack Tip Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, p. 85-98.

BATHE, K. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall. Cap. 5.

BUELL, W. R. & BUSH, B. A. (1973). Mesh Generation - a Survey. *Journal of Engineering for Industry, ASME*, february, p. 332-38.

- CAVENDISH, J. C. (1974). Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, p. 679-96.
- CELESTINO, T. B.; BOTOLUCCI, A. A.; TSUTSUMI, M.; NETO, J. M. (1990). Análise Linear Elástica de Fraturas Aplicada a Rochas Empregando o Método dos Elementos Finitos. In: CONGRESSO SULAMERICANO DE MECANICA DE ROCAS, III°. Caracas, Venezuela.
- CELESTINO, T. B.; BOTOLUCCI, A. A. (1993). Diametral Compression Tests for Rock Fracture Toughness Measurements. Relatório Interno SGS 1-1993. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COHEN, H. D. (1980). A Method for the Automatic Generation of Triangular Elements on a Surface. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n. 3, p. 470-6.
- DESAI, C. S.; ZAMAN, M. M.; LIGHTNER, J. G.; SIRIWARDANE, H. J. (1984). Thin-Layer Element for Interfaces and Joints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, n. 1, p. 19-43.
- ERDOGAN, F. & SIH, G. C. (1963). On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal Basic Engineering*, ASME, December, p. 519-27.
- FISHMAN, K. L.; DERBY, C. W.; PALMER, M. C. (1991). Verification for Numerical Modelling of Jointed Rock Mass Using Thin Layer. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, p. 61-70.

- GHASSEMI, F. (1982). Automatic Mesh Generation Scheme for a Two- or Three-Dimensional Triangular Curved Surface. *Computers & Structures*, vol. 15, n. 6, p. 613-26.
- GOODMAN, R. E.; TAYLOR, R. L.; BREKKE, T. L. (1968). A Model for the Mechanics of Jointed Rock. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE*, vol. 94, p. 637-59.
- GOODMAN, R. E. (1976). *Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks*. New York: West Publishing CO.. 472 p..
- GOODMAN, R. E. & St. JOHN, C (1977). Finite Element Analysis for Discontuous Rocks. In: DESAI, C. S. & CHRISTIAN, J.. *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. New York: McGraw-Hill Book CO.. 1977, cap. 4.
- HABER, R.; SHEPARD, M. S.; ABEL, J. F.; GALLAGHER, R. H.; GREENBERG, D. P. (1981). A General Two-Dimensional, Graphical Finite Element Preprocessor Utilizing Discrete Transfinite Mappings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, n. 7, p. 1015-44.
- HABER, R. & ABEL, J. F. (1982). Discrete Transfinite Mappings for the Description and Meshing of Three-Dimensional Surfaces Using Interactive Computer Graphics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, n. 1, p. 41-66.
- HENSHELL, R. D. & SHAW, K. G. (1975). Crack Tip Finite Elements Are Unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, n. 3, p. 495-507.

- HERRMANN, L. R. (1976). Laplacian-Isoparametric Grid Generation Scheme. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 102, n. EM5, p. 749-56.
- HO-LE, K. (1988). Finite Element Mesh Generation Methods: a Review and Classification. *Computer Aided Design*, vol. 20, n. 1, p. 27-38.
- JOHNSTON B. P. & SULLIVAN Jn., J. M. (1992). Fully Automatic Two Dimensional Mesh Generation Using Normal Offsetting. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n. 2, p. 425-42.
- INGRAFFEA, A. R. (1977). *Discrete Fracture Propagation in Rock: Laboratory Tests and Finite Element Analysis*. University of Colorado (tese de doutorado). 162 p..
- INGRAFFEA, A. R. & HEUZE, F. E. (1980). Finite Element Models for Rock Fracture Mechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 4, n. 1, p. 25-34.
- INGRAFFEA, A. R. (1983). Numerical Modeling of Fracture Propagation. In: ROSSMANITH, H. P., ed.. *Rock Fracture Mechanics*. Wien: Springer. 484 p.. (International Centre for Mechanical Sciences: Courses and Lectures, 275).
- LO, S. H. (1985). A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, n. 8, p. 1403-26.
- OWEN, D. R. & FAWKES, A. J. (1983). *Engineering Fracture Mechanics*. Swansea: Pineridge Press Ltd.. 305 p..

- PERUCCHIO, R.; INGRAFFEA, A. R.; ABEL, J. F. (1982). Interactive Computer Graphics Preprocessing for Three-Dimensional Finite Element Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, n. 6, p. 909-26.
- RAMALHO, M. A. & CORRÊA, M. R. S. (1980). Minimização de Banda em Sistemas Computacionais Baseados no Método dos Elementos Finitos. In.: Sérgio R. Idelsohn, ed.. *Mecânica Computacional*. Associação Argentina de Mecânica Computacional. Vol. 12, p. 541-550.
- SADEK, E. A. (1980). A Scheme for the Automatic Generation of Triangular Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, n. 12, p. 1813-22.
- SHEPHARD, M. S. & YERRY, M. A. (1983). Approaching the Automatic Generation of Finite Element Meshes. *Computer in Mechanical Engineering*, April, p. 49-56.
- THACKER, W. C. (1980). A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, p. 1335-41.
- YERRY, M. A. & SHEPHARD, M. S. (1983). A Modified Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 3, n. 1, January/February, p. 39-46.

Referências Auxiliares

ATKINSON, B. K., ed. (1987). **Fracture Mechanics of Rock**. London: Academic. 534 p..

BIENIAWSKI, Z. T. (1967). **Mechanism of Brittle Fracture of Rock**. University of Pretoria. (tese de doutorado). 226 p..

CUTHILL, E. & MCKEE, J. (1969). Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices. In.: **National Conference of the Association for Computing Machinery, 24° . Proceedings**. New York.

HEHL, M. E. (1987). **Linguagem de Programação Estruturada: FORTRAN 77**. São Paulo: McGraw Hill. 511 p..

HUSSEN, M. A.; PU, S. L.; UNDERWOOD, J. (1974). Strain Energy Release Rate for Crack Under Combined Mode I and Mode II. **Fracture Analysis, ASTM STP 560**, p. 2-28.

INGLIS, G. R. (1913). Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. **Trans. Roy. Inst. Naval Architects**. Vol. 60, p. 219-230.

IRWIN, G. R. (1957). Analysis of Stresses and Strain Near the End of a Crack Transversing a Plate. **Journal Applied Mechanics**. Vol. 24, p. 361-364.

JAMSA, K. (1989). **Microsoft C Dicas Segredos e Truques**. Rio de Janeiro: MAKRON Books. 701 p..

MURAKAMI, Y. ed. (1987). **Stress Intensity Factors Handbook**. Pergamon Press.

Committee on Fracture Mechanics. The Society of Material Sciences, Japan, vol. 1.

SCHILDT, H. (1987). **C Completo e Total**. Rio de Janeiro: MAKRON Books. 889 p..

SIH, G. C. (1973). Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts.

Engineering Fracture Mechanics. Vol. 5, p. 365-377.

Microsoft C (1994). **Manuais de Referência**, versão 6.0. Cópia registrada sob o N°.

048.045.141 (EESC - USP - DEPTO DE GEOTECNIA).

Microsoft FORTRAN (1994). **Manuais de Referência**, versão 5.1. Cópia registrada sob o

N°. 005.044.023 (EESC - USP - DEPTO DE GEOTECNIA).