UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E C. ATMOSFÉRICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DO DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

DANILLO SILVA DE OLIVEIRA

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE
CALOR NA PRESENÇA DE UMA MUDANÇA
DE FASE EM UMA CAVIDADE CILÍNDRICA**

ORIENTADOR: PROF^o DR. FERNANDO BRENHA RIBEIRO

SÃO PAULO – SP
2011

Danillo Silva de Oliveira

**Solução da equação de condução de calor na
presença de uma mudança de fase em uma
cavidade cilíndrica**

Versão corrigida

A versão original encontra-se disponível no IAG-USP.

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do
Departamento de Geofísica da Universidade de São
Paulo, como requisito parcial para a obtenção do
título de Doutor em Ciências em Geofísica.

Área de Concentração: Transferência de calor,
Geotermia.

Orientador: Profº Dr. Fernando Brenha Ribeiro.

São Paulo – SP

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Oliveira, D. S.

Solução da equação de condução de calor na presença de uma mudança de fase em uma cavidade cilíndrica / Danilo Silva de Oliveira; Orientador: Profº Dr. Fernando Brenha Ribeiro. – São Paulo – SP, 2011. 86 p.

CE540.9 Tese de Doutorado — Programa de Pós-graduação e Área de Concentração em Ciências em Geofísica — Instituto de Astronomia, Geofísica e C. Atmosféricas da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Condução de calor. 2. Problema de Stefan. 3. Fronteira móvel. 4. Camada cilíndrica. 5. Mudança de fase. 6. Solução de similaridade. I. Título.

DEDICATÓRIA

“Esta parte importante da minha vida é dedicada à minha Mãe, meu Pai e minha irmã. Não esquecendo de todas as pessoas me tornaram uma parte importante em suas vidas.”

AGRADECIMENTOS

Esta Tese de doutorado é o resultado dos últimos cinco anos da minha vida, dedicados à procura de conhecimento e resposta aos meus questionamentos. Foram anos de convivência com pessoas excepcionais, que contribuíram enormemente para o meu crescimento como pesquisador e como ser humano.

Ao meu orientador, Prof^o Fernando Brenha Ribeiro, meu mais sinceros agradecimentos, pela amizade, confiança, paciência, apoio, incentivo em todos os momentos do doutorado. Seu conhecimento e profissionalismo são inigualáveis. Obrigado por acreditar, mais ainda, me fazer acreditar mesmo quando já havia perdido a esperança.

Agradeço ao instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas e a Universidade de São Paulo pela oportunidade em realizar esta pesquisa, e pelo conhecimento que acumulei durante todos estes anos.

Agradeço à CAPES, Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (processo número 300828/2008-0), e ao CNPq, Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico (processo número 140102/2009-4), pela bolsa e apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Prof^a Leila Soares Marques pelos ensinamentos e pelo apoio, à Prof^a Yara Marangoni, relatora do meu projeto, pelas valiosas instruções e colaborações. E ao Prof^o

Wladimir Shukowsky pelas dicas e esclarecimentos durante meu exame de qualificação.

Aos Professores Francisco Hiodo, Éder Molina e Jorge Porsani pelo bom humor, atenção e descontração.

Em especial, às secretárias do departamento Teca, Virgínia, Magda pelo carinho, amizade, apoio e constante suporte. Ao Edilson, ao Marco e ao Dennis, da seção de informática, pela amizade e ajuda. E ao Roberto Keiji, pela colaboração no laboratório.

Agradeço a todos os grandes amigos, que ganhei nestes anos de convivência, pela companhia, solidariedade, conversas, discussões e momentos de descontração. Em especial, ao Marcelo Bianchi, Fábio Lucas, Selma, Franklin, Marcus, Everton e Igor, meu muito obrigado.

A Alanna pelo gigantesco apoio, amizade e ajuda mútua nestes anos.

Ao Wanderson Santana que nesta longa caminhada, desde os tempos graduação, tornou-se um grande amigo com o qual compartilhei momentos de alegria e frustração, seja acadêmica ou pessoal.

À minha família, tias, tios, primos, ao Lucas e ao grande amigo Arimar Ribeiro pela fé e confiança que depositaram em mim.

Por último, agradeço as pessoas mais importantes da minha vida, minha Mãe, meu Pai, meus irmãos, minha querida irmã e meu mais novo sobrinho, e a Carla, minha namorada e companheira em bons e maus momentos. Pessoas que me apoiaram, levantaram minha autoestima, compartilharam de momentos felizes, e outros não tão felizes assim, foram de paciência sem medida e continuaram ao meu lado incondicionalmente.

RESUMO

Oliveira, D. S., **Solução da equação de condução de calor na presença de uma mudança de fase em uma cavidade cilíndrica**. 2011. 86 p. Tese – Instituto de Astronomia, Geofísica e C. Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2011.

O problema da condução de calor, envolvendo mudança de fase, foi resolvido para o caso de uma cavidade limitada por duas superfícies cilíndricas indefinidamente longas. As condições de contorno impostas consistem em manter a temperatura da superfície interna fixa e abaixo da temperatura de fusão do material que preenche a cavidade, enquanto que a temperatura da superfície externa é mantida fixa e acima da temperatura de fusão. Como condição inicial se fixou a temperatura de todo o material que preenche a cavidade no valor da temperatura da superfície externa.

A solução obtida consiste em duas soluções da equação de condução de calor, uma escrita para o material solidificado e outra escrita para o material em estado líquido. As duas soluções são formalmente escritas em termos da posição da frente de mudança de fase, que é representada por uma superfície cilíndrica com raio em expansão dentro da cavidade.

A posição dessa superfície é, a princípio, desconhecida e é calculada impondo o balanço de energia através da frente da mudança de fase. O balanço de energia é expresso por uma equação diferencial de primeira ordem, cuja solução numérica fornece a posição da frente como função do tempo. A substituição da posição da frente de mudança de fase em um instante particular, nas soluções da equação de condução de calor, fornece a temperatura nas duas fases naquele instante.

A solução obtida é ilustrada através de exemplos numéricos.

Palavras-chave: *Condução de calor, Problema de Stefan, fronteira móvel, camada cilíndrica, mudança de fase, solução de similaridade.*

ABSTRACT

Oliveira, D. S., **Heat conduction equation solution in the presence of a change of state in a bounded axisymmetric cylindrical domain**. 2011. 86 p. Tese – Instituto de Astronomia, Geofísica e C. Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2011.

The heat conduction problem, in the presence of a change of state, was solved for the case of an indefinitely long cylindrical layer cavity. As boundary conditions it is imposed that the internal surface of the cavity is maintained below the fusion temperature of the infilling substance and the external surface is kept above it. The solution, obtained in non-dimensional variables, consists in two closed form heat conduction equation solutions for the solidified and liquid regions, which formally depend of the, at first, unknown position of the phase change front. The energy balance through the phase change front furnishes the equation for time dependence of the front position, which is numerically solved. Substitution of the front position for a particular instant in the heat conduction equation solutions gives the temperature distribution inside the cavity at that moment. The solution is illustrated with numerical examples.

Keywords: *Heat conduction, moving boundary, Stefan problem, cylindrical layer, phase change, similarity solution.*

SUMÁRIO

1	Introdução	15
1.1	O “Problema de Stefan”	17
1.2	O problema resolvido nesta tese	19
1.3	A estrutura da tese	20
2	Principais resultados publicados na literatura	22
2.1	Condução de calor com mudança de fase	22
2.2	O problema da mudança de fase em meios porosos	30
3	Solução da equação de condução de calor, na presença de mudança de estado e sem contraste de densidade entre as fases, em uma cavidade cilíndrica semi-infinita	36
3.1	O problema da transferência de calor em geometria cilíndrica	36
3.2	O problema representado por variáveis adimensionais	39
3.3	A solução da equação de condução de calor	42
3.4	A condição de equilíbrio	46

3.5	Obtendo a posição da frente de mudança de fase a partir da condição de Stefan	47
4	Resultados e discussão	51
5	Conclusão	57
	Referências Bibliográficas	60
A	Solução da equação de condução de calor com contraste de densidade entre as fases	67
A.1	Descrição do problema e modelo físico em geometria esférica	68
A.1.1	A condição de contorno na interface sólido-líquido, $R(t)$	72
A.2	Formulação adimensional	75
A.3	A solução da equação de transferência de calor com contraste de densidade . .	77
B	Integração das equações adimensionais de condução de calor	81
B.1	Em geometria cilíndrica	81
B.2	Em geometria esférica	84

LISTA DE FIGURAS

- Figura 3.1 - Representação esquemática das condições atingidas para a transferência de calor com mudança de fase algum tempo após iniciado o processo de solidificação em uma cavidade cilíndrica. A figura mostra as condições de contorno para a transferência de calor envolvendo mudança de fase na cavidade cilíndrica longa e limitada por $r_a \leq r \leq r_A$ 37
- Figura 3.2 - Solução gráfica para $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$, com $\tau_0 \ll 1$ 49
- Figura 3.3 - Diagrama de fluxo do processo de solução da equação de condução de calor na presença de mudança de estado em uma cavidade cilíndrica semi-infinita. O diagrama também apresenta o processo adotado para obter a solução inicial da equação 3.47. 50
- Figura 4.1 - Posição da frente de congelamento $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional para diferentes valores de γ 52
- Figura 4.2 - $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional variando o raio da superfície interna da cavidade cilíndrica. 53
- Figura 4.3 - Posição da frente de congelamento $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional variando somente a temperatura da superfície interna da cavidade cilíndrica. 53

Figura 4.4 - Posição da frente de solidificação $\Phi(\tau)$ como uma função do tempo adimensional variando o material que preenche a cavidade cilíndrica. . .	54
Figura 4.5 - Variação da temperatura interna da cavidade cilíndrica em função da distância adimensional ao eixo da cavidade para diferentes valores do tempo adimensional.	55
Figura 4.6 - Variação da temperatura dentro da cavidade cilíndrica preenchida com o material caracterizado pelo Número de Stefan igual a 0,8393, como função da distância radial para diferentes valores do tempo adimensional.	56
Figura A.1 - Modelo esquemático representando os fenômenos de contração e expansão da casca esférica durante a solidificação do material que preenche a cavidade. Na figura, também estão apresentadas as condições de contorno para a transferência de calor por condução e advecção com mudança de fase considerando o contraste de densidade entre as camadas sólida e líquida.	74

LISTA DE SÍMBOLOS

c_i	[[J/kgK]]	Calor específico do material líquido
c_o	[[J/kgK]]	Calor específico do material solidificado
$E_1(x)$	[[–]]	Função erro exponencial
$F(t)$	[[s]]	Função arbitrária dependente apenas do tempo
$f(\tau)$	[[–]]	Função arbitrária dependente do tempo adimensional
k_i	[[W/mK]]	Condutividade térmica da região sólida
k_o	[[W/mK]]	Condutividade térmica da região líquida
L	[[J/kg]]	Calor latente de fusão
Po	[[–]]	Número análogo ao Número de Péclet, porém varia com φ
r	[[m]]	Coordenada radial
$\frac{dR(t)}{dt}$	[[m ² /s]]	Velocidade interface sólido-líquido – Condição de Stefan
r_A	[[m]]	Posição da superfície externa
r_a	[[m]]	Posição da superfície interna
$R(t)$	[[m]]	Posição da frente de mudança de fase
$S(t)$	[[m]]	Posição da superfície externa dependente do tempo
Ste	[[–]]	Número de Stefan
t	[[s]]	Tempo
T_A	[[K]]	Temperatura da superfície externa

T_a	[[K]]	Temperatura da superfície interna
T_f	[[K]]	Temperatura de solidificação
$T_i(r, t)$	[[K]]	Temperatura da região sólida
$T_o(r, t)$	[[K]]	Temperatura da região líquida
v_r	[[m/s]]	Velocidade do fluido na direção radial
v_s	[[m/s]]	Velocidade na região sólida próximo à interface
v_l	[[m/s]]	Velocidade na região líquida próximo à interface
x	[[–]]	Variável de integração
$Y(\varphi, \tau)$	[[–]]	Distribuição adimensional de temperaturas na região sólida
Y_{eq}	[[–]]	Temperatura de equilíbrio adimensional da região sólida
$Z(\varphi, \tau)$	[[–]]	Distribuição adimensional de temperaturas na região líquida
Z_{eq}	[[–]]	Temperatura de equilíbrio adimensional da região líquida

Símbolos gregos

α_i	[[m ² /s]]	Difusividade térmica da região sólida
α_o	[[m ² /s]]	Difusividade térmica da região líquida
γ	[[–]]	Razão entre as diferenças de temperatura das regiões sólida e líquida
Γ	[[–]]	Constante arbitrária
δ	[[–]]	Razão entre as condutividades térmicas do sólido e do fluido
Δ	[[–]]	Razão entre as difusividades do sólido e do líquido
ΔE	[[J]]	Variação da energia interna
ΔE_c	[[J]]	Variação da energia cinética
ΔM_i	[[kg]]	Variação de massa da região sólida
ΔM_o	[[kg]]	Variação de massa da região líquida
ΔQ	[[J]]	Variação da quantidade de calor
ε	[[–]]	Densidade relativa
η	[[–]]	Solução de similaridade para eq. de condução de calor da região líquida
$\vartheta(r, t)$	[[m/s]]	Velocidade da camada de fluido

ξ	$[-]$	Solução de similaridade para eq. de condução de calor da região sólida
ρ	$[\text{kg/m}^3]$	Densidade do fluido
ϱ_i	$[\text{kg/m}^3]$	Densidade do sólido para o caso esférico
ϱ_o	$[\text{kg/m}^3]$	Densidade do líquido para o caso esférico
τ	$[-]$	Tempo adimensional
τ_0	$[-]$	Tempo adimensional inicial
τ'	$[-]$	Tempo adimensional arbitrário
φ	$[-]$	Coordenada radial adimensional
φ_a	$[-]$	Coordenada da superfície interna adimensional da cavidade cilíndrica
$\Phi(\tau)$	$[-]$	Posição adimensional da interface sólido-líquido
Φ_{eq}	$[-]$	Posição de equilíbrio adimensional da frente de mudança de fase
$\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}$	$[-]$	Velocidade adimensional da interface sólido-líquido
		– Condição de Stefan adimensional
$\Psi(\tau)$	$[-]$	Posição adimensional da superfície externa que varia com τ
ω	$[-]$	Solução de similaridade para o caso esférico

Subscritos

0	indica valor inicial
<i>a</i>	valor sobre a superfície interna
<i>A</i>	valor sobre a superfície externa
<i>eq</i>	valor de equilíbrio
<i>f</i>	valor sobre a superfície de mudança de fase
<i>i</i>	região interna (solidificada)
<i>o</i>	região externa (fluida)
<i>l</i>	líquido
<i>r</i>	direção radial
<i>s</i>	sólido

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A solução de problemas de transferência de calor, dependentes do tempo e na presença de mudanças de fase, encontram uma série de aplicações importantes na ciência e na tecnologia.

O processo de formação e diferenciação que fez, por exemplo, com que a Terra tenha desenvolvido uma estrutura formada por um manto composto por silicatos e óxidos e um núcleo metálico é, do ponto de vista térmico, um problema de transferência de calor que envolve mudanças de fase com fusão parcial ou total acompanhada da separação, segregação e migração de fases com composições muito diferentes. Por outro lado, o núcleo externo da Terra é uma camada formada por uma liga fundida de Fe e Ni, e com outros elementos mais leves dissolvidos, que se resfria, muito lentamente, aprisionada entre o manto e o núcleo interno sólido.

A formação da litosfera oceânica, o resfriamento de magma nos diferentes tipos de intrusão e a interação de plumas provenientes do manto com a litosfera são outros exemplos geofísicos de processos de transferência de calor, onde a presença da mudança de fase, com a consequente influência do calor latente trocado sobre o processo, deve ser considerada.

O número de aplicações tecnológicas que envolvem trocas de calor com mudança de fase, seja como parte do processo seja como um inconveniente decorrente do processo, é muito

grande. A formação de gelo sobre a serpentina de sistemas de refrigeração e condicionamento de ar é um exemplo simples e comum. Por outro lado, a proteção de ogivas e naves espaciais contra o intenso aquecimento produzido pelo atrito com o ar no retorno à atmosfera, envolve um processo de ablação térmica. Nesse processo, a vaporização e remoção material que forma o escudo térmico retira a maior parte do calor gerado pelo atrito e é fundamental para a proteção das estruturas ou pessoas embarcadas na espaçonave (HELLER, 1970).

O uso de depósitos geológicos vêm sendo cogitado como alternativa para o armazenamento de gás natural. Uma das possíveis tecnologias de estocagem consiste na introdução de gás liquefeito a baixas temperaturas em cavernas ou em depósitos escavados em maciços rochosos (GLAMHEDEN; CURTIS, 2006; LEE; SONG, 2003; SEMPRICH; CROTOGINO; SCHNEIDER, 1990). Tipicamente, esses depósitos têm dimensões da ordem de dezenas de metros de diâmetro e abrigam volumes da ordem de 100.000 m^3 . A presença de um corpo a baixa temperatura com essas dimensões perturba significativamente a temperatura do maciço rochoso que o abriga. A simulação da perturbação induzida pela presença do depósito deve considerar, entre outros fatores, o possível congelamento da água contida em poros ou microfraturas da rocha hospedeira. O processo de transferência de calor, neste caso, apresenta a complicação adicional de ocorrer em um meio poroso onde o apenas o fluido de poro pode apresentar mudança de fase.

A importância prática do problema de transferência de calor na presença de mudança de fase é, no entanto, acompanhada de grandes dificuldades no seu tratamento matemático, mesmo em problemas em que a transferência de calor em cada uma das fases se dá apenas por condução.

Desde o trabalho pioneiro de Lamé & Clapeyron (1831), das conferências apresentadas na década de 1860, mas não publicadas na ocasião (WEBER, 1912 apud CARSLAW; JAEGER, 1959), por Franz Neumann na Universidade de Königsberg* e dos trabalhos de Stefan (STEFAN, 1889d, 1889a, 1889b, 1889c, 1891 apud HILL, 1987), uma enorme quantidade de trabalhos foi publicada sobre problemas de condução de calor na presença de mudança de fase e sobre o problema análogo da difusão em meios com fronteiras móveis. Esses problemas são

* Na época capital da Prússia Oriental e hoje pertencente à Rússia com o nome de Kaliningrado.

coletivamente chamados de “Problema de Stefan”.

1.1 O “PROBLEMA DE STEFAN”

O problema clássico de Stefan é extremamente idealizado e caracterizado por uma série simplificações, tais como, propriedades térmicas constantes em cada fase, variação de volume insignificante durante a fusão ou solidificação, temperatura constante durante a mudança de fase e ausência de transporte de massa e de calor.

A maioria dos casos de interesse prático, no entanto, não admite uma ou algumas dessas simplificações. Mudanças de volume, como consequência da mudança de fase, não são, em geral, desprezíveis. Considerando o caso de substâncias puras, por exemplo, variações relativas de volume durante a fusão podem variar desde valores próximos a zero, como -0,32% no caso do cádmio, até 6,6% no caso do alumínio e -8,3% no caso do bismuto. O gelo apresenta uma mudança relativa de volume 1,5%. No caso de ligas, a variação relativa de volume depende da sua composição. O aço carbono, por exemplo, apresenta variação relativa de volume durante a fusão entre 4,5% e 6,0% (KOSHKIN; SHIRKEVICH, 1982).

Por outro lado, não resta dúvida que o transporte de calor associado ao movimento de massa é um processo importante de transferência de calor em fenômenos que envolvem mudança de fase. A mudança de volume que acompanha a mudança de fase é acomodada através de fluxo da fase fluida. Variações de densidade da fase fluida em função da temperatura frequentemente são significativas e induzem, dependendo da geometria do problema, convecção térmica. De uma forma geral, convecção é uma característica comum em processos de transferência de calor na presença de fluidos e não pode ser desconsiderada em muitos casos (YAO; PRUSA, 1989).

Os problemas de Stefan, seja na forma clássica, seja em modelos bem menos idealizados, são problemas não-lineares e a sua solução pode apresentar singularidades sobre a fronteira móvel entre as fases. Existem muito poucas soluções analíticas de interesse prático, mesmo considerando geometrias simples e soluções aproximadas, e técnicas numéricas são normalmente necessárias para tratar esse tipo de problema. Casos que envolvem geometrias

mais complicadas e formulações que envolvem transporte de calor e propriedades térmicas variáveis requerem sempre o uso de técnicas numéricas. Por outro lado, mesmo métodos numéricos que, normalmente, apresentam bom desempenho no tratamento de problemas não lineares, algumas vezes fornecem resultados ruins quando aplicados na solução de problemas de Stefan. Nesses casos, é necessária a incorporação de resultados fornecidos por modelos analíticos (FOX, 1974).

É muito difícil apresentar uma revisão completa da literatura sobre o problema de Stefan. Existe um número muito grande de trabalhos, dispersos em diferentes tipos de publicação, tratando de vários aspectos e de diferentes aplicações da condução de calor na presença de mudanças de fase. Alguns autores, no entanto, apresentam revisões abrangentes sobre aspectos essenciais desse problema.

Carslaw & Jaeger (1959) apresentam uma introdução concisa do problema clássico de Stefan, enquanto Rubinstein (1971) se concentra em discutir aspectos qualitativos da solução do problema de Stefan, tais como existência e unicidade. Além disso, Rubinstein (1971) descreve vários problemas da física matemática que podem ser reduzidos ao problema de Stefan, tais como problemas de difusão térmica, ou seja, difusão induzida pela diferença de temperatura, e problemas de filtração. Elliot & Ockendon (1982) apresentam uma revisão detalhada do uso de métodos de variação, incluindo a formulação fraca, em problemas que envolvem fronteiras móveis, principalmente do ponto de vista das aplicações numéricas. Crank (1984) descreve a maioria dos métodos apropriados para o tratamento do problema de Stefan, tanto do ponto de vista analítico, quanto do ponto de vista numérico. Hill (1987) apresenta uma revisão detalhada dos métodos analíticos aproximados e exemplifica a sua aplicação no problema clássico de uma única fase de Stefan, incluindo problemas com simetria radial em geometria cilíndrica e esférica. Problemas de Stefan de uma única fase são problemas em que a temperatura de uma das fases é mantida constante na temperatura da mudança de fase e a distribuição de temperatura é calculada na outra fase.

Yao & Prusa (1989) apresentam uma revisão concisa e essencialmente descritiva de

problemas de fusão e solidificação, incluindo aqueles em que a convecção é o modo dominante de transporte de calor na fase fluida. Alexiades & Solomon (1993) apresentam uma excelente introdução ao problema incluindo soluções analíticas, soluções analíticas aproximadas e técnicas numéricas e, em particular, o método da entalpia.

1.2 O PROBLEMA RESOLVIDO NESTA TESE

O problema a ser resolvido nesta tese, em termos gerais, é a transferência de calor em uma cavidade, na presença de uma mudança de fase. O problema geral encontra uma série de aplicações em diferentes ramos da ciência e da tecnologia. O núcleo da Terra é uma cavidade esférica em resfriamento na presença de mudança de fase, onde o processo de convecção tem consequências muito mais amplas do que a evolução térmica do planeta. Intrusões magmáticas são cavidades em resfriamento na presença de um processo complexo, que associa mudanças de fase em um intervalo finito de temperatura com movimento de massa e transporte de calor.

O problema específico a ser tratado aqui é muito mais simples, tanto na complexidade do meio e do processo de resfriamento, quanto na sua geometria, e não tem aplicação direta a problemas de grande complexidade, o que talvez frustre quem se interessa pelos problemas térmicos propostos pela geofísica moderna. No entanto, a discussão apresentada representa uma contribuição ao tema geral do resfriamento de cavidades em processos que envolvem mudança de fase.

O problema da condução de condução de calor foi resolvido para o caso de uma cavidade cilíndrica indefinidamente longa, limitada por uma superfície interna de raio r_a e uma superfície externa r_A , preenchida por um material com temperatura de fusão fixa. As propriedades térmicas de cada fase são constantes e a densidade é constante e igual para as duas.

O problema é submetido a condições de contorno de Dirichlet, sendo a superfície interna mantida fixa abaixo da temperatura de fusão e a temperatura da superfície externa mantida fixa e acima da temperatura de fusão.

A solução obtida consiste de duas soluções analíticas da equação de condução de calor, uma escrita para o material solidificado e a outra para o material líquido. As duas soluções são formalmente escritas em termos da posição da frente de mudança de fase, que, neste caso é uma superfície cilíndrica. A posição da frente de mudança de fase é, a princípio desconhecida. A equação, que permite o cálculo da posição dessa frente, é deduzida fazendo o balanço de energia através da frente. Trata-se de uma equação diferencial ordinária e não-linear que é resolvida por uma técnica numérica. Uma vez obtida a posição da frente de mudança de fase, as temperaturas na camada sólida e na camada fluida são finalmente obtidas. Todas as equações são escritas e resolvidas utilizando variáveis não-dimensionais, fornecendo soluções de similaridade.

O problema resolvido é um problema clássico de Stefan, com todas as limitações que esse tipo de solução tem. No entanto, a solução de similaridade é obtida para um domínio limitado, o que contrasta com a maioria das soluções de similaridade encontradas na literatura.

1.3 A ESTRUTURA DA TESE

O corpo principal desta tese é composto de três capítulos, mais a introdução e a conclusão. O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura sobre a condução de calor na presença de mudança de fase.

Os capítulos 3 e 4 correspondem ao desenvolvimento da solução do problema de condução de calor, na presença de mudança de fase, em uma cavidade limitada por superfícies cilíndricas coaxiais e indefinidamente longas. Trata-se do tema central da tese. O capítulo 3 apresenta o problema de condução de calor na forma dimensional e, em seguida, fornece as equações adimensionais que serão resolvidas. O capítulo 4 apresenta os resultados da aplicação das soluções obtidas no capítulo 3 em alguns exemplos ilustrativos.

O corpo principal da tese se encerra com o capítulo 5 onde são apresentadas as conclusões do trabalho.

Além do corpo principal, a tese inclui dois apêndices. No apêndice A, é proposta uma

extensão do problema tratado no corpo principal da tese. Trata-se do problema de transferência de calor, na presença de mudança de fase, considerando que existe uma diferença entre as densidades do material que preenche a cavidade quando no estado sólido e quando no estado líquido. O apêndice não apresenta uma solução para o problema. Da mesma forma que a solução do problema contido no corpo principal da tese, a solução desse novo problema não é, até onde se pôde verificar na literatura, conhecido.

O material contido no apêndice A mostra a dificuldade que existe em tratar o problema da transferência de calor na presença de mudanças de fase. A solução proposta para o problema segue, essencialmente, o mesmo desenvolvimento aplicado no corpo principal da tese. No entanto, a imposição da condição de Stefan sobre a interface entre as duas fases leva a uma equação diferencial de primeira ordem que envolve termos não-lineares tanto da posição da interface, quanto da sua derivada. Ainda não foi possível resolver essa equação.

No apêndice B, são apresentados alguns detalhes do desenvolvimento algébrico utilizado, mas não apresentados nos capítulos principais da tese.

Capítulo 2

PRINCIPAIS RESULTADOS PUBLICADOS NA LITERATURA

O contínuo desenvolvimento das pesquisas tomando como tema central os diversos campos na transferência de calor com aplicações específicas levaram ao desenvolvimento de técnicas relativamente novas, além de refinamentos de técnicas antigas. Muitos trabalhos de revisão da literatura que abordam as diferentes áreas de transferência de calor de natureza específica, ou generalizada, e que possuem particular relevância acadêmica, foram publicados ao longo dos anos e como exemplo pode-se citar os trabalhos de Eckert *et al.* (1981, 2000), Goldstein *et al.* (2006, 2010).

Adicionalmente, existe uma vasta quantidade de referências acerca da transferência de calor por condução, e dentre elas pode-se destacar os trabalhos de Carslaw & Jaeger (1959), Ozisik (1980), Grigull (1984), Yener & Kakaç (2008), que fornecem uma excelente fundamentação teórica para a solução de problemas desta classe.

2.1 CONDUÇÃO DE CALOR COM MUDANÇA DE FASE

Uma característica fundamental nos problemas de condução de calor é a mudança de fase do material que é submetido à transferência de energia. Entre as fases forma-se uma interface de

separação que pode ser entendida como uma descontinuidade do meio. E devido à quantidade de calor latente que a atravessa, sendo liberada ou absorvida por uma das fases, a superfície de separação movimenta-se continuamente com o crescimento, ou o desaparecimento, de uma das fases adjacentes. O problema da mudança de fase é usualmente tratado como uma extensão do problema da condução de calor com o apropriado cálculo da frente de solidificação, ou fusão.

Problemas práticos que levam em conta processos de mudança de fase raramente são unidimensionais, as condições iniciais e de contorno são sempre complexas, as propriedades de transporte variam consideravelmente entre as fases, o que resulta em taxas de energia, transporte de massa e momento totalmente diferentes entre as fases, além de, dependendo da natureza física do problema, ocorrerem simultaneamente (OZISIK, 1980). Em geral as propriedades térmicas das fases não são as mesmas, como por exemplo, as densidades da fase sólida e da fase líquida durante a solidificação resultando, em alguns casos, no movimento na fase fluida em direção à interface de separação entre os meios, iniciando o processo de convecção natural.

As soluções da equação de condução de calor na presença de mudança de fase consideram o material contido no domínio de integração como um domínio contínuo caracterizado por uma mudança de fase que ocorre em condições isotérmicas, como o congelamento de água pura, ou em uma faixa limitada de temperaturas, como ocorre com ligas metálicas e rochas ígneas (INCROPERA; DEWITT, 1998). Em outros casos, tipicamente resultado de super-resfriamento, a região de transição pode ter uma espessura aparente com microestruturas de diferentes formações e de aspectos extremamente complexos (NATERER, 2003).

Essa classe de problemas são extremamente não-lineares, e geralmente excluem a possibilidade de soluções pelo princípio da superposição fazendo com que cada fase seja tratada separadamente, e por este motivo o número de técnicas analíticas disponíveis para resolver este tipo de problema seja consideravelmente reduzido. Além disso, as soluções analíticas obtidas são obtidas por meio de técnicas sofisticadas. Mesmo métodos numéricos que funcionam bem em muitos outros problemas não-lineares, são frequentemente pouco eficientes quando se trata dos problemas de mudança de fase. Estes métodos não representam bem os gradientes

extraordinariamente grandes que ocorrem nas vizinhanças de uma singularidade ou ao longo da interface sólido-líquido (FOX, 1974).

Fox (1974) sugere que, geralmente, um método numérico para ser preciso e bem sucedido necessita que nele esteja embutido algum modelamento analítico refinado. Muitos dos mais eficientes métodos para a solução de problemas de Stefan é uma combinação de métodos analíticos e numéricos.

Desde os pioneiros esforços para a solução desta classe de problemas, realizados no século XIX, uma enorme quantidade de trabalhos que tratam dos diferentes problemas de Stefan foram publicados. A consequência disto foi o desenvolvimento e o aperfeiçoamento de técnicas para a solução de um grande conjunto de proposições, que na verdade são variações e generalizações do problema de Stefan. Infelizmente, não existe um método único que se adapte com eficiência em todas as classes de situações relacionadas ao problema de Stefan, e por este motivo a escolha da técnica que será aplicada ao problema deve ser cautelosa.

As soluções analíticas disponíveis estão confinadas a uma classe restrita de problemas, tipicamente situações idealizadas e unidimensionais, envolvendo materiais puros em uma região infinita ou semi-infinita com condições iniciais e de contorno simples e propriedades térmicas constantes. Os métodos analíticos de solução dos problemas de mudança de fase incluem o método integral, o método de perturbação e do método de expansão da série, além de soluções de similaridade. Esta última é uma solução exata que, geralmente, toma a forma de uma função de uma única variável, $\frac{s}{\sqrt{\alpha t}}$, que reduz a equação de difusão de calor a uma simples equação diferencial ordinária, também conhecida como transformação de Boltzmann (DRESNER, 1983; CRANK, 1984). Carslaw & Jaeger (1959) e Crank (1984) apresentam uma boa coleção de exemplos utilizando soluções de similaridade. Dresner (1983) discute detalhadamente o procedimento matemático para a utilização do método e aplica soluções de similaridade a alguns problemas comuns da física-matemática. Ozisik & Uzzell (1979) estudaram o problema da solidificação em um meio infinito com simetria cilíndrica e obtiveram soluções exatas para a distribuição unidimensional de temperaturas em cada fase, além da posição da frente de

mudança de fase em função do tempo.

Segundo Ozisik (1989, 1980) os métodos numéricos mostram-se como os mais práticos no tratamento dos problemas de fusão e solidificação e são capazes de traçar com sucesso o movimento da interface. Dentre os muitos métodos numéricos, os mais utilizados para resolver problemas de mudança de fase podem ser divididos em dois grupos principais.

O primeiro grupo está associado a métodos que monitoram continuamente o deslocamento da interface sólido-líquido e, principalmente, são direcionados à aplicação das técnicas de diferenças finitas ou elementos finitos para a formulação do processo de transferência de calor considerando mudança de fase. Estes métodos são aplicáveis aos processos envolvendo uma ou duas fases em uma dimensão espacial que, com o uso de esquemas complicados, podem ser estendidos a problemas que consideram duas e três dimensões ou geometrias complexas. Nestes métodos, as regiões sólida e líquida são manipuladas separadamente e a liberação de calor latente é tratada como uma condição de contorno móvel. Tais métodos requerem a existência de interfaces discretas entre as regiões do domínio e são, geralmente, limitados à substâncias puras.

Os métodos de monitoramento contínuo da interface necessitam que a grade seja deformada, ou alterada, por uma transformação de variáveis, ou coordenadas, ou mesmo situações em que o passo de tempo, ou o espaçamento da grade, varia durante a integração. Devem ser implementados para que a interface coincida com os nós da rede. Embora os métodos de acompanhamento da interface sejam precisos na previsão da posição da interface sólido-líquido e manuseio preciso da liberação de calor latente, são inadequados para a solução de problemas onde o material muda de fase em mais de uma temperatura.

Para a solução de problemas com mudança de fase em geometrias irregulares a escolha do método de solução torna-se muito importante. No passado, o método de diferenças finitas foi frequentemente utilizado na solução de transferência de calor com mudança de fase, mas são de aplicabilidade limitada nos casos de contornos complexos. As diferentes formas de escrever esquemas por diferenças finitas foram refinadas com o passar do tempo, podendo ser aplicados

com sucesso à problemas numéricos em geometrias regulares (PANTAKAR, 1980). Para a solução do mesmo problema em configurações mais complexas, o uso de diferenças finitas requer uma grande quantidade de esforço computacional durante suas aproximações.

Por outro lado, nas últimas décadas houve uma tendência crescente na utilização de métodos baseados em elementos finitos para a solução de problemas de contorno móvel, devido à sua habilidade para lidar com geometrias complexas, em sua facilidade na implementação de condições de contorno complexas e da capacidade que possui como técnica de propósito flexível (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004; MINKOWYCZ; SPARROW; MURTHY, 2006). Zienkiewicz, Parekh & Wills (apud MINKOWYCZ; SPARROW; MURTHY, 2006) desenvolveram um dos primeiros algoritmos utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de congelamento do solo. Desde então, muitos outros algoritmos baseados em elementos finitos têm sido relatados. Samarskii *et al.* (1993) faz uma revisão da técnicas numéricas para a solução de problemas envolvendo transferência de calor e massa considerando o fenômeno de mudança de fase entre a região sólida e a região líquida.

Diferente de substâncias puras, os sistemas multi-constituídos não exibem uma forma definida para a interface entre as fases sólida e líquida. A mudança de fase de tais sistemas depende de muitos fatores, incluindo o ambiente de mudança de fase, composição e descrição termodinâmica específica da transformação de fase, além disso, a mudança de fase ocorre em um intervalo de temperaturas e a formação do sólido frequentemente ocorre como uma matriz cristalina permeável que coexiste com a fase líquida (NATERER, 2003).

O segundo grupo de soluções numéricas, utiliza uma grade fixa, e evita uma atenção explícita em relação à natureza da frente de mudança de fase, ou seja, consiste na formulação de uma região contínua que elimina a necessidade de equações de conservação separadamente para cada uma das fases. Estes métodos mostram-se possuidores de grande flexibilidade e são facilmente aplicados à problemas multidimensionais.

Um dos métodos mais importantes e mais utilizados é o método entálpico. As vantagens deste método encontram-se no fato de que o problema a ser resolvido é formulado, em uma

região fixa, de modo que a entalpia é transformada em uma variável dependente da temperatura. Além de, não haver necessidade de modificações nos esquemas numéricos para satisfazer as condições de movimento da interface (ROSE, 1993). Além disso, este método é especialmente estável para os problemas onde a mudança de fase ocorre em temperatura única, ou onde a mudança de fase acontece sobre um intervalo de temperaturas. Porém, em alguns casos especiais, o movimento da interface pode exibir um comportamento patológico, como por exemplo, uma série de saltos regulares ao invés de um deslocamento suave através do domínio de solução (YAO; PRUSA, 1989).

Muitos dos estudos apresentados na literatura em processos de mudança de fase pertencem a problemas específicos e/ou condições de contorno muito específicas, estes estudos apresentam novos métodos ou implementações de métodos antigos que podem ser utilizados em modelos para problemas singulares. Entretanto, soluções generalizadas em situações mais complexas são dificilmente encontradas, e por esse motivo um problema que aparece em uma aplicação qualquer é por diversas vezes resolvido novamente. Algumas soluções generalizadas para o problema de Stefan uni-dimensional podem ser encontradas em Kern & Wells (1977), Cao, Faghri & Chang (1989), D'Acunto & Angelis (2002), Donaldson (2003).

Braga & Viskanta (1990) apresentam uma solução de similaridade para a solidificação de uma solução aquosa e compara seus resultados, em boa aproximação, com dados experimentais. Voller (1997) aplicou a solução de similaridade à solidificação de compostos e obteve resultados bastante consistentes, em relação às soluções anteriormente obtidas por métodos numéricos. Também obteve uma solução de similaridade para a solidificação de um composto binário sub-resfriado (VOLLER, 2006).

Aziz & Lunardini (1991) aplicaram o método de similaridade para resolver três diferentes problemas de condução de calor transiente com mudança de fase, o congelamento controlado de um meio semi-infinito com convecção, o congelamento exterior a uma superfície cilíndrica com temperatura constante, e o congelamento de um meio semi-infinito com a temperatura da parede dependendo do tempo. A validade das suas soluções de similaridade são comparadas

com resultados obtidos pelos método integral de balanço térmico, método da perturbação, e soluções numéricas. A solução de similaridade encontrada possui boa aproximação.

Uma solução exata para a equação da energia, incluindo o termo de convecção na região líquida, foi obtida por Chung *et al.* (2001) para a solidificação de composto ternário. Aplicou um esquema de correção linear para localizar a posição das interfaces e compara seus resultados, com um bom grau de exatidão, com as soluções numéricas e analíticas disponíveis. Coriell *et al.* (1998), Feltham & Worster (2000) também utilizaram soluções de similaridade em seus trabalhos para a solidificação de materiais que possuem mais de uma temperatura de mudança de fase.

Kalaiselvam *et al.* (2008) investigaram analítica e experimentalmente o processo de solidificação e de fusão para materiais encapsulados em invólucros cilíndricos. Soluções analíticas foram encontradas assumindo-se um estado quase estacionário para pequenos valores do número de Stefan. Uma boa aproximação foi encontrada para o processo de solidificação, porém, para o modelo de fusão considerando condução, convecção e geração de calor houve melhor concordância dos resultados. Constatou que a presença de geração de calor aumenta o tempo de solidificação total do cilindro, apesar de acelerar o processo de fusão.

Hill & Kucera (1983) desenvolveram um procedimento semi-analítico para estudar a solidificação dentro de um recipiente esférico, incluindo efeitos de radiação na superfície. Seus resultados para a posição da interface móvel concordam com os resultados disponíveis a partir de uma solução completamente numérica e com uma solução semi-analítica alternativa.

Uma aproximação analítica utilizando a técnica de perturbação linear aliada ao método de diferenças finitas foi utilizada por Pedroso & Domoto (1973) e por Huang & Shih (1975) aplicada à solidificação em geometrias cilíndrica e esférica. Esta mesma técnica foi utilizada por Yigit (2007a, 2007b) para resolver o problema da solidificação de um metal.

Murray & Landis (1959) desenvolveram um método de grade móvel que fornecem resultados de maior exatidão que aqueles apresentados pelos métodos de grade fixa. Eles utilizaram transformações de coordenadas e uma interpolação linear entre os nós para

desenvolver um conjunto de condições numéricas aperfeiçoado, além de libertar-se do comportamento patológico na predição do movimento da interface sólido-líquido apresentado pelo método da grade fixa. Porém, Murray & Landis tiveram que assumir a posição inicial da interface e a distribuição inicial de temperatura da fase sólida, além de o algoritmo numérico ser consideravelmente mais complicado.

Tao (1967) apresentou um método aproximado usando uma grade fixa para a análise da solidificação em geometrias cilíndricas e esféricas. O seu método analisa o processo de solidificação em cilindros e esferas considerando um coeficiente médio de transferência de calor entre a superfície externa da região solidificada e o fluido resfriado. Utilizando, também, uma grade fixa unidimensional Kim & Anghaie (2001) obtiveram bons resultados numéricos em boa concordância com a solução exata.

Lazaridis (1970) utiliza aproximações baseadas no método explícito de diferenças finitas sobre uma grade fixa para resolver problemas de solidificação aplicado à uma geometria retangular em duas e três dimensões. Ele desenvolveu um esquema numérico baseado em um conjunto auxiliar de equações diferenciais que expressam a condição de contorno móvel como uma isoterma.

Sparrow & Hsu (1981), e Hsu, Sparrow & Pantakar (1981), utilizando o método entálpico aliado à técnica de imobilização da grade, e Shamsundar (1982) utilizando uma solução em série, obtiveram soluções numéricas para a equação de condução de calor de simetria radial considerando mudança de fase em um tubo semi-infinito e inicialmente na temperatura de mudança de fase.

Uma solução usando uma grade numérica móvel foi apresentada por Milanez & Ismail (1984) para a solidificação de um material com mudança de fase em geometria esférica, seus resultados são comparados com outros modelos numéricos semelhantes e, também, com resultados experimentais. Uma grade móvel também foi utilizada por Mackenzie & Robertson (2000), em uma formulação entálpica para o problema da solidificação em duas e três dimensões espaciais.

Ramakrishna & Sastri (1984) utilizaram uma aproximação por diferenças finitas para estudar numericamente o problema da solidificação em uma placa, onde o material que muda de fase encontra-se inicialmente à uma temperatura maior que a temperatura de solidificação. As equações de condução de calor nas regiões sólida e líquida, assim como as condições na interface, foram resolvidas utilizando-se um esquema implícito para o tempo em conjunto com técnica ADI (Alternating Direction Implicit).

Uma solução utilizando aproximações por séries de Taylor foi utilizada por Cheng (2000) para resolver a equação de condução de calor não-linear, ele verificou que esta análise pode ser estendida à problemas de mudança de fase com mais de uma fronteira móvel.

2.2 O PROBLEMA DA MUDANÇA DE FASE EM MEIOS POROSOS

A transferência de calor em meios porosos têm sido assunto da pesquisa de inúmeros trabalhos encontrados na literatura, e com as mais diversas condições iniciais e de contorno aplicadas à uma vasta área de conhecimento. Muitos materiais podem ser classificados como porosos e são constituído de uma matriz sólida localmente interrompida por espaços vazios, ou poros, preenchidos por um ou mais fluidos, com dimensões geralmente pequenas em relação à extensão da matriz que os contém.

A porosidade é usada para descrever a fração de uma propriedade particular em que uma matriz sólida se encontra reduzida e pode ser medida pela quantidade de “espaços vazios” presente no sólido. As propriedades físicas do meio poroso variam pontualmente, com mudanças bruscas que ocorrem em distâncias muito pequenas.

Porosidades não-uniformes raramente foram consideradas nos estudos sobre transferência de energia em meios porosos, e para um meio poroso parcialmente saturado, a migração e a condensação do fluido torna-se um importante mecanismo nos processos de mudança de fase (KAVIANY, 1995).

A solidificação, ou fusão, de meios porosos saturados, ou parcialmente saturados, são

fenômenos comumente observados na natureza ou em estruturas projetadas pelo homem. O conhecimento do processo de mudança de fase em meios porosos é cada vez mais importante em áreas de interesse como a armazenagem de energia, transporte de material em tubulações por regiões de temperaturas muito baixa e no transporte de carvão em climas frios (WEAVER; VISKANTA, 1986a). Além de, congelamentos e derretimentos sucessivos dos solos, que induzem um fluxo de águas subterrâneas de regiões aquecidas em direção a regiões frias (BECKERMAN; VISKANTA, 1988).

Apesar da grande diversidade dos sistemas heterogêneos como sua composição química, porosidade, tamanho dos poros e das partículas, sua orientação com respeito ao fluxo de calor, complexidade da análise teórica e descrição matemática do processo térmico, existem correlações analíticas disponíveis que permitem calcular com certa exatidão a condutividade térmica efetiva de muitos materiais porosos heterogêneos (BEAR, 1972; WHITAKER, 1999). Materiais porosos possuem um certo grau de homogeneidade em sua estrutura, porém, são claramente heterogêneos quando examinados em um nível correspondente às dimensões da sua estrutura particulada (NATERER, 2003).

Segundo Yao & Prusa (1989), a importância da condutividade térmica pode ser melhor explicada pelo caso limite em que a condutividade térmica da matriz sólida é muito maior que a condutividade do líquido, nessa situação as ondas térmicas se propagam mais rapidamente na matriz sólida que no líquido e o efeito de congelamento durante mudança de fase pode ocorrer quase que homogeneamente no meio poroso, podendo, então, ser tratado como um fenômeno local. Entretanto, para a situação em que a matriz sólida possui uma baixa condutividade térmica, a transferência de calor no sólido pode ser ignorada e o processo de mudança de fase é tratado apenas pela transferência de energia exclusivamente na fase líquida.

Kaviany (1995) realizou uma revisão detalhada das correlações utilizadas para definir a condutividade térmica efetiva e a permeabilidade de meios porosos.

Soluções analíticas do fenômeno da mudança de fase em meios porosos geralmente concordam com as observações experimentais, porém, podem existir discrepâncias entre os

resultados, que aumentam à medida que a razão entre a condutividade térmica da matriz sólida e a do líquido tornam-se muito diferentes de um (LUIKOV, 1980; YAO; PRUSA, 1989). Rai & Rai (1992) encontraram soluções exatas para o problema da solidificação de um meio poroso semi-infinito utilizando a técnica de imobilização da interface, seus resultados teóricos concordaram bem com o comportamento físico dos materiais utilizados no trabalho.

Doughty & Pruess (1990) apresentaram algumas características de comportamento termo-hidrológico em um meio geológico em torno de uma fonte de calor que são ilustradas através da aplicação da solução de similaridade, suas soluções foram comparadas com resultados de simulações numéricas, com excelente concordância.

Goldstein & Reid (1978) estudaram a mudança de fase de um meio poroso saturado por água, na presença de fluxo por infiltração. A equação de energia na região descongelada foi resolvida sem conhecer a forma da região congelada. Os resultados apresentados mostraram como o fluxo de fluido através do meio poroso afeta a forma e o ritmo de crescimento da região congelada dentro do meio poroso. Uma análise similar foi desenvolvida por Frivik & Comini (1982) para modelar o congelamento e o descongelamento dos solos na presença de infiltração de líquido.

O congelamento, e o derretimento, da água que satura em um meio poroso confinado em recipientes de diferentes geometrias foi investigado teórica e experimentalmente por Weaver & Viskanta (1986a, 1986b, 1986c). Os experimentos realizados por Weaver & Viskanta (1986b) em uma cavidade retangular mostraram claramente a influência de convecção natural sobre a forma e movimento da interface sólido-líquido, devido a um modelo confiável para se obter a condutividade térmica efetiva em meios porosos. Weaver & Viskanta (1986c) utilizaram um cilindro vertical como recipiente do arranjo experimental para o degelo em meio poroso, além de uma análise analítica do problema. Seus resultados quantitativos da distribuição de temperatura, da forma e do movimento da interface sólido-líquido foram obtidos para o degelo em meios com diferentes porosidades. Verificou-se que a taxa de derretimento foi aumentada por convecção natural no líquido, e que o degelo ocorre mais rápido no topo do arranjo devido à circulação do

fluido.

Beckermann & Viskanta (1988) investigaram numérica e experimentalmente o efeito da convecção natural na fase líquida na presença de mudança de fase em um meio poroso, e considerando o domínio como uma única região governada por um conjunto de equações de conservação unidimensionais baseadas no método entálpico, com o adequado emprego das propriedades térmicas efetivas. Obtiveram uma boa concordância entre seus resultados experimentais e observaram que a convecção altera a velocidade de deslocamento da interface no meio poroso.

Um estudo numérico detalhado de transferência de calor e massa com mudança de fase em materiais porosos através de um sistema de equações acopladas em regime transiente que regem um processo bidimensional de transporte multifásico em meios porosos foi investigada por Vafai & Tien (1989). Resultados numéricos e de laboratório para o congelamento e degelo de meios porosos foram comparados, com boa aproximação, para verificar a interação entre convecção natural e o processo de mudança de fase por Lein & Tankin (1992). Modelos aproximados para o problema da transferência de calor em meios porosos foram desenvolvidos por Quintard & Whitaker (1993). Estes problemas foram resolvidos numericamente para algumas geometrias, tal como sistemas estratificados e células cilíndricas uniformes para obter seus coeficientes de transporte.

O aumento da transferência de calor na presença de mudança de fase, solidificação ou fusão, em uma cavidade cilíndrica com, e sem, a presença de meio poroso induzido pela adição de esferas metálicas foi simulado por Tong & Khan (1996). A existência de convecção natural nos processos de solidificação, ou fusão, do meio poroso indica que a presença de porosidade aumenta a velocidade da interface, ou seja, diminuindo os tempos de fusão, ou solidificação, total. Consequentemente, diminuindo-se consideravelmente os índices de porosidade o efeito de convecção natural no sistema tende a ser menor.

Um dos principais problemas a serem considerados durante a transferência de calor com mudança de fase em meios porosos consiste em verificar se a hipótese de equilíbrio

termodinâmico local entre a matriz sólida e o fluido contido no espaço de poro é válida para o problema proposto. A transferência de calor em meios porosos sujeito à condição de equilíbrio térmico local foi fortemente investigada, entre outros, por Nield (1998), Minkowycz, Haji-Sheikh & Vafai (1999), Rees (2002), Alazmi & Vafai (2002), Nield (2002), Nield, Kuznetsov & Xiong (2002).

O processo de solidificação de um meio poroso saturado foi investigado por Chellaiah & Viskanta (1988) com um modelo unidimensional de condução de calor para estudar o efeito de não-equilíbrio termodinâmico local, em comparação com dados experimentais seu modelo apresentou uma boa concordância quanto as previsões do seu modelo para a distribuição de temperaturas e para a posição da frente de solidificação. Tao & Gray (1993) investigaram sob quais condições o equilíbrio térmico local poderá ser aplicado ao elemento representativo de volume do seu modelo. Seus resultados numéricos para a infiltração em solos congelados, utilizando a formulação de volume médio local, determinaram relações paramétricas de diferença de temperatura sobre todas as fases contidas no elemento representativo de volume e que satisfazem os critérios inicialmente estabelecidos. No entanto, verificou que aumentando-se da taxa de infiltração superficial, ou aumentando-se a permeabilidade do solo, resulta na quebra da condição de equilíbrio térmico local.

Quintard & Whitaker (1995) desenvolveram restrições, a partir de um modelo analítico unidimensional em regime transiente, em que o princípio de equilíbrio térmico local pode ser válido e compara estes resultados numéricos para condução de calor com mudança de fase em sistemas onde a temperatura do líquido está acima da temperatura de fusão. Obteve boa aproximação entre as estimativas e seus resultados numéricos.

Uma análise detalhada foi realizada por Whitaker (1999) para a transferência de calor em meios porosos com o objetivo de determinar as condições em que o equilíbrio térmico local pode ser aplicado e concluiu que o desequilíbrio térmico local pode ser significativo se existem grandes diferenças entre as propriedades térmicas do fluido e da fase sólida. Sob a hipótese de que o equilíbrio térmico local entre as fases sólida e a fase líquida é satisfeita, os modelos de

mistura podem ser utilizados nos problemas de condução de calor em meios porosos. Dessa forma as temperaturas para as fases sólida e fluida podem ser consideradas localmente as mesmas, e as equações de condução de calor sobre a temperatura das duas fases, sólida e líquida, podem ser agrupadas em uma única equação média para a mistura (HSU, 2000).

Harris, Haji-Sheikh & Nnanna (2001) estudaram um modelo teórico baseado no modelo entálpico aproximado para o processo de mudança de fase em um meio poroso durante processos de fusão, ou congelamento, que teve como objetivo introduzir um modelo entálpico linearizado e unidimensional que mantenha temperaturas diferentes entre o material que muda de fase e o contorno em um meio poroso semi-infinito. Assumiu previamente que a condição de equilíbrio térmico local não é válida.

Quando leva-se em consideração as características do problema térmico da transferência de calor em meio geológico, onde a dimensão física do domínio de integração e a precisão com que é razoável se obter a distribuição de temperaturas permitirem que se adote a suposição de equilíbrio térmico local, a mudança de fase por condução de calor na matriz porosa saturada se reduz exclusivamente à um problema de valor de contorno móvel, ou seja, à um problema onde a interface de separação entre os meios move-se ao longo do domínio de integração, enquanto ocorre a mudança de fase do material que satura o meio poroso.

Uma indicação da taxa de variação da temperatura como função do tempo é dada pela velocidade de propagação da frente de congelamento do fluido de poro. Um dos fatores que limitam a velocidade de propagação dessa frente de congelamento é a própria troca de calor entre o fluido de poro e a matriz sólida. Portanto, em um sistema pequeno com grãos da matriz sólida com dimensões grandes o desequilíbrio deve ser mais pronunciado, já em um sistema de grandes dimensões o desequilíbrio deve ser menor.

Capítulo 3

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR, NA PRESENÇA DE MUDANÇA DE ESTADO E SEM CONTRASTE DE DENSIDADE ENTRE AS FASES, EM UMA CAVIDADE CILÍNDRICA SEMI-INFINITA

3.1 O PROBLEMA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM GEOMETRIA CILÍNDRICA

A equação de condução de calor será resolvida para um fluido contido em uma cavidade cilíndrica infinitamente longa (figura 3.1) com raio interno r_a e raio externo r_A . O fluido está inicialmente a uma temperatura T_A acima de sua temperatura de solidificação T_f . A superfície interna da cavidade é mantida a uma temperatura constante T_a , abaixo de T_f , enquanto a superfície externa é mantida a uma temperatura constante T_A acima da temperatura de fusão. Durante o processo de troca de calor, uma frente de solidificação se afasta da superfície interna sob a forma de uma superfície cilíndrica com uma posição dependente do tempo $R(t)$, e divide o domínio inicialmente preenchido com fluido em duas regiões distintas com distribuições de temperatura bem definidas, acima e abaixo T_f .

A equação de condução de calor escrita para a região interna é representada por,

Figura 3.1 – Representação esquemática das condições atingidas para a transferência de calor com mudança de fase algum tempo após iniciado o processo de solidificação em uma cavidade cilíndrica. A figura mostra as condições de contorno para a transferência de calor envolvendo mudança de fase na cavidade cilíndrica longa e limitada por $r_a \leq r \leq r_A$.

$$\frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

com

$$r_a < r < R(t),$$

e onde α_i é difusividade térmica da região cuja temperatura é inferior à T_f . Para a região externa, a equação de condução de calor é,

$$\frac{\partial^2 T_o(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_o} \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

com

$$R(t) < r < r_A,$$

e onde α_o é a difusividade térmica da região fluida cuja temperatura é superior à temperatura de fusão, T_f .

A posição da frente de congelamento $R(t)$ é obtida a partir do balanço de energia no processo de mudança de fase, também conhecida como *Condição de Stefan* (CARSLAW; JAEGER, 1959),

$$\rho L \frac{dR(t)}{dt} = k_i \left. \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right|_{R(t), t} - k_o \left. \frac{\partial T_o(r, t)}{\partial r} \right|_{R(t), t}, \quad (3.3)$$

onde ρ é a densidade do fluido e L é o calor latente de fusão.

A condição inicial sobre a equação 3.2 é expressa como

$$T_o(r, 0) = T_A, \quad \text{para} \quad r_a < r \leq r_A, \quad (3.4)$$

visto que $T_i(r, 0)$ não está definida. Para a equação 3.3 a condição inicial fornece

$$R(0^+) = r_a \quad (3.5)$$

As condições de contorno são expressas por

$$T_i(r_a, t) = T_a, \quad \text{para} \quad t > 0, \quad (3.6)$$

$$T_o(r_A, t) = T_A, \quad \text{para} \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

e

$$T_i(R(t), t) = T_o(R(t), t) = T_f, \quad \text{para} \quad t > 0. \quad (3.8)$$

A imposição das condições de contorno e da condição inicial implicam que, em $t = 0$, na região externa a distribuição da temperatura e sua derivada apresentam uma singularidade em $r = r_a$. Na verdade, $T_o(r_a, 0)$ é indefinida e o limite $\lim_{t \rightarrow 0} T_o(r, t)$ apresentam uma descontinuidade em $r = r_a$, de T_f a T_A .

3.2 O PROBLEMA REPRESENTADO POR VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS

As equações 3.1 e 3.2 podem ser adimensionalizadas definindo-se as novas variáveis

$$\varphi = \frac{r}{r_A} \quad (3.9)$$

e

$$\tau = \frac{t\alpha_i}{r_A^2}, \quad (3.10)$$

onde r_A^2/α_i é o tempo característico de condução de calor com o material que preenche a cavidade totalmente solidificada.

$$\Delta = \frac{\alpha_i}{\alpha_o}, \quad (3.11)$$

$$Y(\varphi, \tau) = \frac{T_i(r, t) - T_f}{T_f - T_a} \quad (3.12)$$

e

$$Z(\varphi, \tau) = \frac{T_o(r, t) - T_f}{T_A - T_f} \quad (3.13)$$

Com estas novas variáveis a equação 3.1 pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \tau}, \quad \text{para} \quad \varphi_a < \varphi < \Phi(\tau) \quad \text{e} \quad \tau > 0, \quad (3.14)$$

com,

$$\varphi_a = \frac{r_a}{r_A} \quad (3.15)$$

e

$$\Phi(\tau) \equiv \frac{R(t)}{r_A} \quad (3.16)$$

As condições de contorno 3.6 e 3.8 tornam-se

$$Y(\varphi_a, \tau) = -1, \quad \text{para} \quad \tau > 0, \quad (3.17)$$

e

$$Y(\Phi(\tau), \tau) = 0, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \quad (3.18)$$

A equação 3.2 transforma-se em

$$\frac{\partial^2 Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \Delta \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \tau}, \quad \text{para} \quad \Phi(\tau) < \varphi < 1 \quad \text{e} \quad \tau > 0. \quad (3.19)$$

As condições de contorno 3.7 e 3.8 são reescritas como

$$Z(\Phi(\tau), \tau) = 0, \quad \text{para} \quad \tau > 0, \quad (3.20)$$

e

$$Z(1, \tau) = 1, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \quad (3.21)$$

A condição inicial imposta sobre a equação 3.19 fica

$$Z(\varphi, 0) = 1, \quad \text{para} \quad \varphi_a < \varphi \leq 1. \quad (3.22)$$

A função $Y(\varphi, \tau)$ é indefinida para τ igual a zero e o limite $\lim_{\tau \rightarrow 0} Z(\varphi, \tau)$ apresenta uma variação característica de 0,0 a 1,0.

A condição de Stefan 3.3 é escrita em variáveis adimensionais como

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \text{Ste} \left(\frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} \right), \quad (3.23)$$

onde

$$\gamma = \frac{(T_A - T_f)}{(T_f - T_a)}, \quad (3.24)$$

e

$$\delta = \frac{k_i}{k_o} \quad (3.25)$$

E a constante adimensional,

$$\text{Ste} = \frac{c_i(T_f - T_a)}{L}, \quad (3.26)$$

conhecida como *Número de Stefan*, é um número estritamente positivo que representa a razão entre o tempo de difusão e o tempo de solidificação (HILL, 1987; YAO; PRUSA, 1989).

A condição inicial a ser imposta sobre a condição de Stefan é

$$\Phi(0^+) = \varphi_a \quad (3.27)$$

3.3 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

Definindo-se,

$$\xi = \frac{\varphi^2}{4\tau}, \quad \text{para} \quad \tau > 0, \quad (3.28)$$

a equação diferencial parcial 3.14 transforma-se na equação diferencial ordinária, ver apêndice B,

$$\frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \frac{dY(\xi)}{d\xi} = 0, \quad \text{para} \quad \frac{\varphi_a^2}{4\tau} \leq \xi \leq \frac{\Phi^2(\tau)}{4\tau}, \quad (3.29)$$

que integrando torna-se

$$Y(\xi) = A + B \cdot \int_{\frac{\varphi_a^2}{4\tau_0}}^{\xi} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad (3.30)$$

onde A e B são constantes de integração arbitrárias e τ_0 é um valor adimensional arbitrário fixo e positivo para o tempo. Fazendo as mudanças de variáveis apropriadas e aplicando as condições de contorno para τ_0 obtemos,

$$Y\left(\frac{\varphi^2}{4\tau_0}\right) = \frac{\int_{\frac{\varphi_a^2}{4\tau_0}}^{\frac{\varphi^2}{4\tau_0}} \frac{e^{-x}}{x} dx}{\int_{\frac{\varphi_a^2}{4\tau_0}}^{\frac{\Phi^2(\tau_0)}{4\tau_0}} \frac{e^{-x}}{x} dx} - 1$$

Como τ_0 pode arbitrariamente assumir todos os valores positivos, a equação acima pode ser generalizada escrevendo-a da seguinte forma

$$Y\left(\frac{\varphi^2}{4\tau}\right) = \frac{\int_{\frac{\varphi_a^2}{4\tau}}^{\frac{\varphi^2}{4\tau}} \frac{e^{-x}}{x} dx}{\int_{\frac{\varphi_a^2}{4\tau}}^{\frac{\Phi^2(\tau)}{4\tau}} \frac{e^{-x}}{x} dx} - 1, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad \text{e} \quad \varphi_a \leq \varphi \leq \Phi(\tau). \quad (3.31)$$

Note que $-1 \leq Y\left(\frac{\varphi^2}{4\tau}\right) \leq 0$.

Definindo

$$\eta = \frac{\varphi^2 \Delta}{4\tau}, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\Phi^2(\tau) \Delta}{4\tau} \leq \eta \leq \frac{\Delta}{4\tau}, \quad (3.32)$$

a equação diferencial parcial 3.19 transforma-se na equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2 Z(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + 1\right) \frac{dZ(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (3.33)$$

Integrando a equação 3.33 e fazendo-se as correspondentes mudanças de variáveis obtém-se a seguinte relação

$$Z\left(\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}\right) = 1 - \frac{\int_{\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}}^{\frac{\Delta}{4\tau}} \frac{e^{-x}}{x} dx}{\int_{\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}}^{\frac{\Delta}{4\tau}} \frac{e^{-x}}{x} dx}, \quad \text{para} \quad \tau > 0 \quad \text{e} \quad \Phi(\tau) \leq \varphi \leq 1. \quad (3.34)$$

Note que $0 \leq Z\left(\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}\right) \leq 1$.

As equações 3.31 e 3.34 satisfazem as condições de contorno 3.17 e 3.18, e as condições de contorno 3.20 e 3.21, respectivamente, para os valores positivos do tempo adimensional, τ . A distribuição de temperaturas $Y(\varphi, \tau)$ não está definida no limite de τ tendendo a zero a partir de valores positivos, desde que a camada interna desapareça neste limite.

Derivando a equação 3.34

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi, \tau} = \frac{\frac{2}{\varphi} e^{-\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}}}{\int_{\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}}^{\frac{\Delta}{4\tau}} \frac{e^{-x}}{x} dx}, \quad (3.35)$$

e utilizando a definição da função integral exponencial $E_1(x)$ (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965)

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv,$$

a equação 3.35 pode ser reescrita como

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi, \tau} = \frac{\frac{2}{\varphi} e^{-\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}}}{E_1\left(\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}\right) - E_1\left(\frac{\Delta}{4\tau}\right)} \quad (3.36)$$

Para altos valores do argumento, a função integral exponencial pode ser aproximada por (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965)

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \dots \right) \quad (3.37)$$

Considerando pequenos valores para τ e que $\varphi \neq \Phi(\tau)$, então

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi, \tau} = \frac{\frac{2}{\varphi}}{\frac{e^{\frac{(\varphi^2 - \Phi^2(\tau))\Delta}{4\tau}}}{\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}} - \frac{e^{-\frac{(1-\varphi^2)\Delta}{4\tau}}}{\frac{\Delta}{4\tau}}} \quad (3.38)$$

Como $\Phi(\tau) \leq \varphi \leq 1$, o segundo termo do denominador torna-se muito pequeno quando τ tende a zero

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi, \tau} = \frac{\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{2\varphi\tau}}{e^{\frac{(\varphi^2 - \Phi^2(\tau))\Delta}{4\tau}}} \quad (3.39)$$

Da equação 3.27

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{2\varphi\tau}}{e^{\frac{(\varphi^2 - \Phi^2(\tau))\Delta}{4\tau}}} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\varphi_a^2\Delta}{2\varphi\tau}}{e^{\frac{\varphi^2 - \varphi_a^2\Delta}{4\tau}}}, \quad (3.40)$$

e o limite do segundo membro é facilmente demonstrado ser igual a zero, levando a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\varphi, \tau} = 0, \quad \text{para} \quad \varphi_a < \varphi \leq 1. \quad (3.41)$$

A equação 3.21 é válida para todos os valores de τ , inclusive os valores infinitesimalmente pequenos, porém positivos. Da equação 3.41 observa-se que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} Z\left(\frac{\varphi^2\Delta}{4\tau}\right) = 1, \quad \text{para} \quad \varphi_a < \varphi \leq 1. \quad (3.42)$$

Fazendo φ coincidir com $\Phi(\tau)$ na equação 3.39 temos,

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right|_{\Phi(\tau), \tau} = \frac{\Phi(\tau)\Delta}{2\tau}, \quad (3.43)$$

que, assim como a equação 3.27, mostra uma singularidade em $Z\left(\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}\right)$ para tempos cada vez mais pequenos.

3.4 A CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO

A temperatura dentro da cavidade cilíndrica tende à uma condição de equilíbrio quando o tempo torna-se infinitamente grande. Quando as derivadas temporais correspondentes tenderem a zero as equações 3.14 e 3.19 poderão facilmente ser integradas. Disto obteremos,

$$Y_{eq} = -\frac{\ln\left(\frac{\varphi}{\Phi_{eq}}\right)}{\ln\left(\frac{\varphi_a}{\Phi_{eq}}\right)}, \quad \text{para} \quad \varphi_a \leq \varphi \leq \Phi_{eq}, \quad (3.44)$$

e

$$Z_{eq} = 1 - \frac{\ln(\varphi)}{\ln(\Phi_{eq})}, \quad \text{para} \quad \Phi_{eq} \leq \varphi \leq 1. \quad (3.45)$$

A posição final da frente de congelamento Φ_{eq} é obtida pelas equações 3.44 e 3.45 e pela condição de Stefan 3.23, como a derivada temporal da posição da frente de mudança de fase pode ser feita igual a zero, temos

$$\ln(\Phi_{eq}) = \frac{\ln(\varphi_a)}{1 + \frac{\delta}{\gamma}} \quad (3.46)$$

A posição de equilíbrio é determinada pela razão entre o raio da superfície interna e o raio da superfície externa, φ_a , e pela razão entre δ e γ . Desde que $\ln(\varphi_a)$ seja negativo, o valor de

Φ_{eq} cresce com o aumento no valor de δ/γ .

3.5 OBTENDO A POSIÇÃO DA FRENTE DE MUDANÇA DE FASE A PARTIR DA CONDIÇÃO DE STEFAN

As soluções obtidas das equações de condução de calor 3.31 e 3.34 são expressas em termos da, ainda desconhecida, posição da frente de mudança de fase como uma função do tempo, $\Phi(\tau)$. Para determinar $\Phi(\tau)$ a condição de Stefan deve ser imposta, equação 3.23. Derivando as equações 3.31 e 3.34 em relação à coordenada radial φ e substituindo na equação 3.23 resulta em

$$\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} = \text{Ste} \left(\frac{\frac{2}{\Phi(\tau)} e^{-\frac{\Phi^2(\tau)}{4\tau}}}{E_1\left(\frac{\varphi_a^2}{4\tau}\right) - E_1\left(\frac{\Phi^2(\tau)}{4\tau}\right)} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\frac{2}{\Phi(\tau)} e^{-\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}}}{E_1\left(\frac{\Phi^2(\tau)\Delta}{4\tau}\right) - E_1\left(\frac{\Delta}{4\tau}\right)} \right) \quad (3.47)$$

Uma vez que esta equação é uma representação da condição de Stefan para o problema em consideração, ela é válida somente para valores de tempo estritamente positivos e somente quando as duas fases coexistirem. A condição inicial para esta equação é fornecida pela equação 3.27.

Espera-se que a derivada para $\Phi(\tau)$ possua um valor inicial positivo e indefinidamente grande que decresce monotonicamente à valores próximos a zero à medida que a posição da frente de mudança de fase se aproxima da posição de equilíbrio. A singularidade presente quando o valor do tempo é igual a zero representa a formação instantânea de uma camada solidificada indefinidamente fina na superfície interna da cavidade cilíndrica. Na integração da equação 3.47 é conveniente evitar esta singularidade.

As estimativas de $\Phi(\tau)$ e de sua derivada $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}$ devem ser encontradas para o tempo adimensional $\tau_0 \ll 1$, onde as únicas informações disponíveis são

$$\varphi_a < \Phi(\tau) < \Phi_{eq}, \quad (3.48)$$

e que $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}$ é estritamente positivo e limitado por todos os valores finitos e necessariamente positivos de τ . Entretanto, aproximações para $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ podem ser obtidas lembrando-se que a posição da frente de solidificação, $\Phi(\tau)$, é uma função contínua do tempo adimensional τ . Se $\Phi(\tau)$ for conhecido para um valor particular do tempo adimensional $\tau > 0$, um valor para o tempo τ' , no intervalo aberto $0 < \tau' < \tau$, sempre pode ser encontrado para que a derivada da frente de solidificação seja

$$\frac{d\Phi(\tau')}{d\tau} = \frac{\Phi(\tau) - \varphi_a}{\tau} \quad (3.49)$$

O tempo adimensional τ' não é conhecido, mas substituindo τ' por $\frac{\tau}{2}$ na equação 3.49 obtêm-se uma estimativa de $\frac{d\Phi(\frac{\tau}{2})}{d\tau}$. A posição da frente de solidificação também pode ser estimada em $\frac{\tau}{2}$ por

$$\Phi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\Phi(\tau) + \varphi_a}{2} \quad (3.50)$$

As duas estimativas não devem estar muito longe dos valores verdadeiros se $\tau \ll 1$. Usando este argumento uma solução gráfica para a equação 3.47 pôde ser estabelecida como segue.

As equações 3.49 e 3.50 foram usadas para estimar $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}$ e $\Phi(\tau)$ no tempo adimensional τ_0 e com $\Phi(2\tau_0)$ substituído por coordenadas radiais regularmente espaçadas, com espaçamento pequeno, no intervalo determinado pela equação 3.48. Na figura 3.2, a estimativa de $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ está representada graficamente contra a estimativa de $\Phi(\tau_0)$. A estimativa de $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ cresce linearmente com o aumento de $\Phi(\tau_0)$.

A equação 3.47 é usada para calcular $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$, com τ_0 substituído em sua dependência explícita no tempo adimensional e com $\Phi(\tau_0)$ substituído por valores previamente obtidos com a equação 3.50. A figura 3.2 também apresenta estes valores de $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ contra $\Phi(\tau_0)$.

Figura 3.2 – Solução gráfica para $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$, com $\tau_0 \ll 1$.

Os parâmetros usados para calcular $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ estão listados na legenda da figura. Os valores da derivada decaem desde valores indefinidamente grandes, nas vizinhanças de φ_a , até valores negativos. A interseção das duas curvas determina uma solução aproximada para o par $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$. No exemplo representado na figura 3.2, τ_0 é 0,01 que fornece as estimativas de $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ como sendo iguais a 0,1251 e 3,4185, respectivamente.

Os valores obtidos para $\Phi(\tau_0)$ e $\frac{d\Phi(\tau_0)}{d\tau}$ são em seguida introduzidos em um esquema de integração para a equação 3.47 utilizando o *Método de Runge-Kutta de quarta ordem* para valores de $\tau > \tau_0$. A figura 3.3 apresenta um diagrama de fluxo do processo adotado para integrar a equação 3.47 e obter sua solução inicial, além do procedimento necessário para obter a distribuição de temperatura dentro da cavidade, equações 3.31 e 3.34, que completam a solução da equação de condução de calor na presença de mudança de estado e sem contraste de densidade entre as fases em uma cavidade cilíndrica semi-infinita.

Figura 3.3 – Diagrama de fluxo do processo de solução da equação de condução de calor na presença de mudança de estado em uma cavidade cilíndrica semi-infinita. O diagrama também apresenta o processo adotado para obter a solução inicial da equação 3.47.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A solução obtida para a equação de condução de calor, na presença de uma mudança de estado, agora será ilustrada com alguns exemplos numéricos. A Figura 4.1 mostra o deslocamento da frente de congelamento em função do tempo adimensional τ . Nesta figura, o raio adimensional da superfície cilíndrica interna φ_a é 0,0909. Os parâmetros δ e Δ , que são as razões entre as condutividades térmicas e difusividades térmicas, respectivamente, são mantidas constantes em 4,018 e 3,945, o que significa dizer que não há nenhuma mudança no material que preenche a cavidade. Estes valores são semelhantes aos apresentados pela água.

O número de Stefan foi fixado em 0,2539 e o parâmetro γ varia entre 0,50 e 2,00, o que significa que a figura ilustra apenas o efeito da variação da temperatura da superfície externa da cavidade. Cerca de 90% do deslocamento total da frente de congelamento ocorre, em todos os casos, em um intervalo de tempo correspondente a três ou quatro vezes o tempo característico de condução de calor da cavidade $\left(\frac{r_A^2}{\alpha_i}\right)$. A posição de equilíbrio da frente de congelamento diminui (0,77, 0,62, 0,52, 0,45) à medida que γ aumenta (0,50, 1,00, 1,50, 2,00), respectivamente, representando o aumento da temperatura da superfície exterior.

A figura 4.2 mostra o efeito da variação do raio da superfície interna da cavidade. Nesta figura, as propriedades térmicas usadas para o material que preenche a cavidade cilíndrica são

Figura 4.1 – Posição da frente de congelamento $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional para diferentes valores de γ .

os mesmos utilizados na figura 4.1, e γ é fixo em 1,00. Como esperado, a posição de equilíbrio da frente de congelamento aumenta à medida que a relação entre os raios interno e externo da cavidade aumentam. As posições de equilíbrio, nos exemplos da figura 4.2 são 0,6201, para $\varphi_a = 0,0909$, 0,7586, para $\varphi_a = 0,25$, 0,8710, para $\varphi_a = 0,50$, e 0,9443, para $\varphi_a = 0,75$. Além disso, o tempo adimensional necessário para que a frente de congelamento aproxime-se significativamente da posição de equilíbrio diminui significativamente quando φ_a aumenta.

A figura 4.3 ilustra somente o efeito da variação da temperatura da superfície interna da cavidade cilíndrica. O raio da superfície interna da cavidade φ_a e as relações δ e Δ assumem os mesmos valores usados anteriormente. O Número de Stefan variou entre 0,1269 e 0,7617 e em consequência o valor de γ variou entre 2,00 e 0,33. Neste caso, a posição de equilíbrio cresce conforme o Número de Stefan aumenta, o que significa que a temperatura da superfície interna diminui. A maior parte do deslocamento da frente de congelamento ocorre para valores do tempo adimensional entre 1,50 e 4,00.

A figura 4.4 ilustra o efeito da mudança do material que preenche a cavidade cilíndrica.

Figura 4.2 – $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional variando o raio da superfície interna da cavidade cilíndrica.

Figura 4.3 – Posição da frente de congelamento $\Phi(\tau)$ como função do tempo adimensional variando somente a temperatura da superfície interna da cavidade cilíndrica.

Nesta figura, a curva 1 corresponde a δ igual a 2,3407, Δ igual a 2,1524, e Ste igual a 0,8913.

Curva 2 corresponde a valores de δ , Δ e Ste iguais a 1,1684, 1,2440 e 1,4860, respectivamente,

enquanto que na curva 3, estas razões possuem valores respectivamente iguais a 0,8586, 0,9296 e 0,8393. Em todas as curvas, o valor de γ é igual a 1,00. Estes valores são semelhantes aos de alguns metais. O efeito do valor da relação δ sobre a posição de equilíbrio da frente de solidificação está bem ilustrado. No caso representado pela curva 1, a posição de equilíbrio da frente de solidificação é 0,488, enquanto que no caso apresentado na curva 2, a posição de equilíbrio é 0,331 e para a curva 3, a posição de equilíbrio é 0,276. Nas três curvas, 90% do deslocamento total da frente de congelamento ocorre em um intervalo de tempo inferior a cerca de uma vez o tempo característico de condução de calor da cavidade cilíndrica $\left(\frac{r_A^2}{\alpha_i}\right)$.

Figura 4.4 – Posição da frente de solidificação $\Phi(\tau)$ como uma função do tempo adimensional variando o material que preenche a cavidade cilíndrica.

A diferença entre o tempo necessário para a da frente de congelamento avançar de 90% do seu deslocamento total, observado nos exemplos das figuras 4.1 e 4.3 e nos exemplos da figura 4.4, reflete a diferença entre os Números de Stefan nos dois casos. Para pequenos valores de Ste a libertação de calor latente é um processo lento em comparação com a difusão de calor, o que provoca uma variação lenta da temperatura no interior da cavidade. Para grandes valores do Número de Stefan, o calor latente é liberado mais rapidamente e a taxa de variação temporal da temperatura no interior da cavidade é mais dependente da difusão do calor.

A figura 4.5 ilustra a variação da temperatura no interior da cavidade cilíndrica para diferentes valores do tempo adimensional. Nesta figura, o Número de Stefan é igual a 0,2539, a relação γ possui um valor igual a 1,00, e os valores das relações δ e Δ são 4,018 e 3,945, respectivamente. A figura mostra que a maioria das variações de temperatura no interior da cavidade ocorre para valores de τ entre 0,00 e 2,50, seguindo o deslocamento do congelamento. O contraste entre os valores da derivada da temperatura em ambos os lados da frente de congelamento é observado em todos os valores de τ . Esse contraste aumenta com o tempo quando a liberação de calor latente torna-se menos importante para a transferência de calor entre as duas fases.

Figura 4.5 – Variação da temperatura interna da cavidade cilíndrica em função da distância adimensional ao eixo da cavidade para diferentes valores do tempo adimensional.

A figura 4.6 ilustra a variação da temperatura na cavidade cilíndrica preenchida com o material caracterizado pelo Número de Stefan igual a 0,8393 e os valores das relações δ e Δ são iguais a 0,8586 e 0,9296, respectivamente (corresponde a curva 3, figura 4.4). O valor de γ é igual a 1,00. Como o valor da relação δ é próxima de 1,00, o contraste entre as derivadas da temperatura em ambos os lados da frente de congelamento é pequeno para todos os valores de τ . Comparando-se a figura 4.6 com a figura 4.5 fica evidente a influência do Número de Stefan

no processo de transferência de calor.

Figura 4.6 – Variação da temperatura dentro da cavidade cilíndrica preenchida com o material caracterizado pelo Número de Stefan igual a 0,8393, como função da distância radial para diferentes valores do tempo adimensional.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu na solução do problema da solidificação de um líquido contido em uma cavidade limitada por duas superfícies cilíndricas infinitamente longas. Os resultados apresentados consistiram na solução, de forma independente, da equação de condução de calor para a fase líquida e para a fase sólida. Condições de contorno do tipo de Dirichlet foram impostas fixando-se a temperatura sobre a superfície interna e sobre a superfície externa da cavidade. Como condição inicial impôs-se que toda a cavidade é preenchida pelo material líquido mantido na temperatura da superfície externa da cavidade.

As soluções foram obtidas fixando-se, formalmente, a posição da superfície de separação entre as duas fases, que também tem a forma de uma superfície cilíndrica. Sobre a superfície de separação entre as duas fases, a temperatura é mantida na temperatura de fusão do material que preenche a cavidade. A temperatura de fusão está contida no intervalo de temperaturas definido pelas condições de contorno.

A solução da equação de condução de calor em cada fase, escrita em variáveis adimensionais, foi obtida pelo método clássico da transformação de variáveis de Boltzmann. Embora as soluções tenham sido formalmente obtidas de forma independente, elas estão ligadas através da posição da frente de mudança de fase, a princípio desconhecida.

A posição da frente de mudança de fase como função do tempo é obtida através de uma equação diferencial não-linear de primeira ordem, obtida impondo-se a condição de Stefan, ou conservação de energia do processo de condução de calor ao se atravessar a interface entre as duas fases.

A solução da equação que fornece a posição da interface entre as fases como função do tempo apresenta uma singularidade no instante inicial do processo de condução de calor devido ao fato de que, nesse instante, não existe ainda uma camada solidificada. A solução dessa equação foi obtida contornando-se o problema da singularidade através de uma solução gráfica da equação, válida para tempos adimensionais muito pequenos.

As soluções obtidas foram ilustradas com exemplos numéricos. Os resultados mostram que, para valores fixos das propriedades térmicas do material que preenche a cavidade (δ , Δ e Ste), a posição de equilíbrio da interface entre as fases diminui quando a temperatura da superfície interna da cavidade aumenta, e a superfície da externa da cavidade é mantida fixa. Nesse caso, a razão γ da diferença de temperatura entre os limites a camada líquida com a diferença de temperatura entre os limites da cavidade sólida, varia sem afetar o valor do número de Stefan.

A posição de equilíbrio da interface entre as duas fases aumenta com a diminuição da temperatura da superfície interna da cavidade, mantendo-se a temperatura da superfície da cavidade externa fixa, o que equivale a alterar o número de Stefan e a razão γ de forma a manter o produto entre os dois constante.

Os números adimensionais δ e γ exercem uma influência clara na posição de equilíbrio da frente de mudança de fase, que aumenta quando a razão $\frac{\delta}{\gamma}$ diminui. O número de Stefan, por sua vez, tem uma influência nítida sobre o tempo necessário para que a frente de mudança de fase se desloque de uma fração significativa, 90%, por exemplo, da sua posição de equilíbrio. No caso de valores baixos do número de Stefan, a liberação lenta do calor latente tem uma influência grande sobre o estágio transiente do processo de condução de calor, enquanto que para valores altos de Ste , o estágio transiente do processo de condução de calor é mais influenciado pela difusão de calor.

A influência do contraste entre as condutividades térmicas das duas fases sobre a variação da temperatura no interior da cavidade aumenta com o aumento do tempo adimensional. Para tempos adimensionais pequenos, enquanto prevalece a influência da liberação do calor latente sobre o processo de condução, o contraste entre as condutividades térmicas tem uma influência pequena sobre a forma dos perfis de temperatura. Para tempos adimensionais grandes, o processo de difusão de calor é dominante e o contraste entre as condutividades térmicas passa a influenciar nitidamente a forma dos perfis de temperatura.

A técnica adotada no tratamento do problema de condução de calor que acaba de ser discutido consiste em uma combinação de soluções analíticas com uma solução numérica. Essa técnica permitiu resolver um problema, que embora simples na sua proposição, ainda não havia resolvido na literatura. Além disso, a técnica pode ser estendida para problemas de formulação mais complexa como sugere o resultado descrito no apêndice A.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, 1965.

ALAZMI, B.; VAFAI, K. Constant wall heat flux boundary conditions in porous media under local thermal non-equilibrium conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 45, p. 3071–3087, 2002.

ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Washington: Taylor & Francis, 1993.

AZIZ, A.; LUNARDINI, V. J. Application of local similarity method to nonsimilar conduction controlled freezing problems. *International Communications in Heat Transfer and Mass Transfer*, v. 18, p. 813–822, 1991.

BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: American Elsevier Pub. Co., 1972. (Environmental science series, v. 17).

BECKERMANN, C.; VISKANTA, R. Natural convection solid/liquid phase change in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 31, n. 1, p. 35–46, 1988.

BEJAN, A. *Convection heat transfer*. 3rd edition. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004.

BRAGA, S. L.; VISKANTA, R. Solidification on a cold isothermal surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 33, p. 745 – 754, 1990.

CAO, Y.; FAGHRI, A.; CHANG, W. S. A numerical analysis of Stefan problems for generalized multi-dimensional phase-change structures using the enthalpy transforming model. *Int. J. Heat Transfer*, v. 32, n. 7, p. 1289–1298, 1989.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of heat in solids*. 2nd. ed. Oxford: Clarendon Press, 1959.

CHELLAIAH, S.; VISKANTA, R. Freezing of saturated and superheated liquid in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 31, p. 321–330, 1988.

- CHENG, T.-F. Numerical analysis of nonlinear multiphase Stefan problems. *Computers and Structures*, v. 75, p. 225–233, 2000.
- CHUNG, J. D.; LEE, J. S.; CHOI, M.; YOO, H. A refined similarity solution for the multicomponent alloy solidification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 44, p. 2483 – 2492, 2001.
- CORIELL, S. R.; MCFADDEN, G. B.; SEKERKA, R. F.; BOETTINGER, W. J. Multiple similarity solutions for solidification and melting. *Journal of Crystal Growth*, v. 191, p. 573 – 585, 1998.
- CRANK, J. *Free and moving boundary problems*. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- D'ACUNTO, B.; ANGELIS, M. D. A phase-change problem for an extended heat conduction model. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 35, p. 709–717, 2002.
- DONALDSON, R. D. *Generalised Stefan Problems*. Dissertação (Mestrado) — University of British Columbia, Vancouver, Canada, december 2003.
- DOUGHTY, C.; PRUESS, K. A similarity solution for two-phase fluid and heat flow near high-level nuclear waste packages emplaced in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 33, n. 6, p. 1205 – 1222, 1990.
- DRESNER, L. *Similarity solutions of nonlinear partial differential equations*. London: Pitman Publishing, 1983. (Research notes in mathematics, v. 88).
- ECKERT, E. R. G.; GOLDSTEIN, R. J.; IBELE, W. E.; PANTAKAR, S. V.; SIMON, T. W.; KUEHN, T. H.; STRYKOWSKI, P. J.; TAMMA, K. K.; BAR-COHEN, A.; HEBERLEIN, J. V. R.; DAVIDSON, J. H.; BISCHOF, J.; KULACKI, F. A.; KORTSHAGEN, U.; GARRICK, S. Heat Transfer - a review of 1997 literature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 43, p. 2431–2528, 2000.
- ECKERT, E. R. G.; GOLDSTEIN, R. J.; PANTAKAR, S. V.; PFENDER, E.; RAMSEY, J. W.; SPARROW, T. W. S. E. M.; TEICHMAN, K. Y. Heat transfer - a review of 1980 literature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 24, p. 1863–1902, 1981.
- ELLIOT, C. M.; OCKENDON, J. R. *Weak and Variational methods for Moving-Boundary Problems*. London: Pitman, 1982. (Research Notes in Mathematics).
- FELTHAM, D. L.; WORSTER, M. G. Similarity solutions describing the melting of a mushy layer. *Journal of Crystal Growth*, v. 208, p. 746 – 756, 2000.
- FOX, L. What are the best numerical methods? In: *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*. Oxford: Proc. Univ. Oxford, 1974. p. 25–27.
- FRIVIK, P. E.; COMINI, G. Seepage and heat flow in soil freezing. *Journal of Heat Transfer*, v. 104, p. 323 – 328, 1982.
- GLAMHEDEN, R.; CURTIS, P. Excavation of a cavern for high-pressure storage of natural gas. *Tunnelling and Underground Space Technology*, v. 21, p. 56–67, 2006.
- GOLDSTEIN, M. E.; REID, R. L. Effect of fluid flow on freezing and thawing of saturated porous media. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 364, p. 45 – 73, 1978.

GOLDSTEIN, R.; IBELE, W.; PATANKAR, S.; SIMON, T.; KUEHN, T.; STRYKOWSKI, P.; TAMMA, K.; HEBERLEIN, J.; DAVIDSON, J.; BISCHOF, J.; KULACKI, F.; KORTSHAGEN, U.; GARRICK, S.; SRINIVASAN, V.; GHOSH, K.; MITTAL, R. Heat transfer – A review of 2005 literature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 53, p. 4397 – 4447, 2010.

GOLDSTEIN, R. J.; IBELE, W. E.; PANTAKAR, T. W. s. S. V.; KUEHN, T. H.; STRYKOWSKI, P. J.; TAMMA, K. K.; HEBERLEIN, J. V. R.; DAVIDSON, J. H.; BISCHOF, J.; KULACKI, F. A.; GARRICK, U. K. a.; SRINIVASAN, V. Heat transfer – A review of 2003 literature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 49, p. 451–534, 2006.

GRIGULL, U. *Heat conduction*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

GUPTA, S. C. *The Classical Stefan Problem – Basic concepte, modelling and analysis*. Amsterdam: Elsevier Science, 2003. (North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, v. 45).

HARRIS, K. T.; HAJI-SHEIKH, A.; NNANNA, A. G. A. Phase-change phenomena in porous media – a non-local thermal equilibrium model. *International Journal of heat and mass transfer*, v. 4, p. 1619–1625, 2001.

HELLER, G. B. *Heat transfer and spacecraft thermal control*. Cambridge: MIT Press, 1970.

HILL, J. M. One-dimensional Stefan problems: an introduction. In: *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics*. Essex, England: Longman Scientific & Technical, 1987.

HILL, J. M.; KUCERA, A. Freezing a saturated liquid inside a sphere. *Int Journal Heat Mass Transfer*, v. 26, n. 11, p. 1631–1637, 1983.

HSU, C. F.; SPARROW, E. M.; PANTAKAR, S. V. Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and control-volume-based finite difference scheme. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 24, p. 1335–1343, 1981.

HSU, C. T. Heat conduction in porous media. In: VAFAI, K. (Ed.). *Handbook of porous media*. 1st. ed. New York: Marcel Dekker, 2000. p. 171–199.

HUANG, C.-L.; SHIH, Y.-P. A perturbation method for spherical an cylindrical solidification. *Chemical Engineering Science*, v. 30, p. 897–906, 1975.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentos de transferência de calor e massa*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1998.

KALAISELVAM, S.; VEERAPPAN, M.; AARON, A. A.; INIYAN, S. Experimental and analytical investigation of solidification and melting characteristics of PCMs inside cylindrical encapsulation. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 47, n. 7, p. 858 – 874, 2008.

KAVIANY, M. *Principles of heat transfer in porous media*. New York: Springer-Verlag, 1995.

KERN, J.; WELLS, G. L. Simple analysis and working equations for the solidification of cylinders and spheres. *Metallurgical Transaction*, v. 8b, p. 99, 1977.

- KIM, S.; ANGHAIE, S. An effective conduction length model in the enthalpy formulation for the stefan problem. *Int. Comm Heat Mass Transfer*, v. 28, p. 733–741, 2001.
- KOSHKIN, N. I.; SHIRKEVICH, M. G. *Handbook of Elementary Physics*. 4th. ed. Moscow: Mir, 1982. . U.S. distributor, Imported Publications, Chicago. Translated from the Russian edition (Moscow, 1980) by G. Leib.
- LAMÉ, G.; CLAPEYRON, B. P. Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe solide. *Ann. Chem. Phys.*, v. 47, p. 250–256, 1831.
- LAZARIDIS, A. A numerical solution of the multidimensional solidification (or melting) problem. *Int Journal Heat Mass Transfer*, v. 13, p. 1459–1477, 1970.
- LEE, C.-I.; SONG, J.-J. Rock engineering in underground energy storage in Korea. *Tunelling and undeground space technology*, v. 18, p. 467–483, 2003.
- LEIN, H.; TANKIN, R. S. Natural convection in porous media – II. Freezing. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 35, n. 1, p. 187 –194, 1992.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.
- LUIKOV, A. *Heat and mass transfer*. Moscow: Mir Publishers, 1980.
- MACKENZIE, J. A.; ROBERTSON, M. L. The numerical solution of one-dimensional phase change problems using an adaptive moving mesh method. *Journal of Computational Physics*, v. 161, p. 537–557, 2000.
- MILANEZ, L. F.; ISMAIL, K. A. R. Solidification in spheres, theoretical and experimental investigation. In: *Third International Conference on Multi-Phase and Heat Transfer*. Miami: [s.n.], 1984.
- MINKOWYCZ, W. J.; HAJI-SHEIKH, A.; VAFAI, K. On departure from local thermal equilibrium in porous media due to a rapidly changing heat source: The Sparrow number. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 42, p. 3373–3385, 1999.
- MINKOWYCZ, W. J.; SPARROW, E. M.; MURTHY, J. Y. (Ed.). *Handbook of numerical heat transfer*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.
- MURRAY, W. D.; LANDIS, F. Numerical and machine solutions of transiente heat-conduction problems involving melting and freezing. Part I – Method of analysis and sample solutions. *Journal of Heat Transfer*, v. 81, p. 106 – 112, 1959.
- NATERER, G. F. *Heat transfer in single and multiphase systems*. [S.l.]: CRC Press, 2003.
- NIELD, D. A. Effects of local thermal non-equilibrium in steady convective processes in a saturated porous medium: forced convection in a channel. *Journal of Porous Media*, v. 1, p. 181–186, 1998.
- NIELD, D. A.; KUZNETSOV, A. V.; XIONG, M. Effect of local thermal non-equilibrium on thermally developing forced convection in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 45, p. 4949–4955, 2002.

- NIELD, N. A. A note on the modelling of local thermal non-equilibrium in a structured porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, p. 4367–4368, 2002.
- OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. New York: Wiley, 1980.
- OZISIK, M. N. *Boundary value problems of Heat Conduction*. Mineola: Dover Publications, 1989.
- OZISIK, M. N.; UZZELL, J. C. Exact solution for freezing in cylindrical symmetry with extended freezing temperature range. *Journal of Heat Transfer*, v. 101, p. 331 – 334, 1979.
- PANTAKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington: Hemisphere, 1980.
- PEDROSO, R. I.; DOMOTO, G. A. Inward spherical solidification - Solution by the method of strained coordinates. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 16, p. 1037–1043, 1973.
- QUINTARD, M.; WHITAKER, S. One and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems. *Adv. Heat Transfer*, v. 23, p. 369–465, 1993.
- QUINTARD, M.; WHITAKER, S. Local thermal equilibrium for transient heat conductions: theory and with numerical experiments. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 38, p. 2779–2796, 1995.
- RAI, K. N.; RAI, S. An analytical study of the solidification in a semi-infinite porous medium. *International Journal of Engineering Science*, v. 30, n. 2, p. 247 – 256, 1992.
- RAMAKRISHNA, P.; SASTRI, V. M. K. Efficient numerical method for two-dimensional phase change problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 27, p. 2077–2084, 1984.
- REES, D. A. S. Vertical free convective boundary-layer flow in a porous medium using a thermal nonequilibrium model: elliptical effects. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 53, p. 1–12, 2002.
- ROSE, M. E. An enthalpy scheme for Stefan problems in several dimensions. *Applied Numerical Mathematics*, v. 12, p. 229–238, 1993.
- RUBINSTEIN, L. I. The Stefan Problem. In: *Translations of Mathematical Monographs*. Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1971. v. 27.
- SAMARSKII, A. A.; VABISHCHEVICH, P. N.; ILIEV, O. P.; CHURBANOV, A. G. Numerical simulation of convection/diffusion phase change problems – a review. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 36, n. 17, p. 4095 – 4106, 1993.
- SEMPRICH, S.; CROTOGINO, F.; SCHNEIDER, H.-J. Storage in lined hard-rock caverns: Results of a pilot study. *Tunneling and underground space technology*, v. 5(4), p. 309–313, 1990.
- SHAMSUNDAR, N. Formulae for freezing outside a circular tube with axial variation of coolant temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 25, p. 1614–1616, 1982.
- SPARROW, E. M.; HSU, C. F. Analysis of two-dimensional freezing on the outside of a coolant-carrying tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 24, p. 1345–1357, 1981.

STEFAN, J. Über die diffusion von säuren and basen gegen einander. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche, Klasse Abteilung 2a*, v. 98, p. 616–634, 1889.

STEFAN, J. Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung im polarmeere. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche, Klasse Abteilung 2a*, v. 98, p. 965–983, 1889.

STEFAN, J. Über die verdampfung und die auflösung als vorgänge der diffusion. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche, Klasse Abteilung 2a*, v. 98, p. 1418–1442, 1889.

STEFAN, J. Über einige probleme der theorie der wärmeleitung. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche, Klasse Abteilung 2a*, v. 98, p. 473–484, 1889.

STEFAN, J. Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung im polarmeere. *Annalen der Physik und Chemie*, v. 42, p. 269–286, 1891.

TAO, L. C. Generalized numerical solutions of freezing a saturated liquid in cylinders and spheres. *AIChE Journal*, v. 13, p. 165–169, 1967.

TAO, Y.-X.; GRAY, D. M. Validation of Local Thermal Equilibrium in unsaturated porous media with simultaneous flow and freezing. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 20, p. 323–332, 1993.

TONG, X.; KHAN, J. A. Enhancement of heat transfer by inserting a metal matrix into a phase change material. *Numerical Heat Transfer A*, v. 30, p. 125–141, 1996.

VAFAI, K.; TIEN, H. C. A numerical investigation of phase change effects in porous materials. *Int Journal Heat Mass Transfer*, v. 32, p. 1261–1277, 1989.

VOLLER, V. R. A similarity solution for the solidification of a multicomponent alloy. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, n. 12, p. 2869 – 2877, 1997.

VOLLER, V. R. A similarity solutions for solidification of an undercooled binary alloy. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 49, p. 1981 – 1985, 2006.

WEAVER, J. A.; VISKANTA, R. Freezing of liquid-saturated porous media. *Journal of Heat Transfer*, v. 108, p. 654 – 659, 1986.

WEAVER, J. A.; VISKANTA, R. Freezing of water saturated porous media in a rectangular cavity. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 13, p. 245–252, 1986.

WEAVER, J. A.; VISKANTA, R. Melting of frozen porous media contained in horizontal or a vertical, cylindrical capsule. *international Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 29, p. 1943 – 1951, 1986.

WEBER, H. *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. 5th. ed. Braunschweig, Germany: Vieweg & Sohn, 1912.

WHITAKER, S. *The method volume averaging*. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1999.

YAO, L. S.; PRUSA, J. Melting and freezing. In: HARTNETT, J. P.; IRVINE, T. F. (Ed.). *Advances in heat transfer*. New York: Academic Press Inc., 1989. v. 19, p. 1–19.

YENER, Y.; KAKAÇ, S. *Heat conduction*. 4th. ed. Washington: AdisonTaylor & Francis, 2008.

YIGIT, F. Approximate analytical solution of a two-dimensional heat conduction problem with phase-change on a sinusoidal mold. *Applied Thermal Engineering*, In Press, 2007.

YIGIT, F. Perturbation solution for solidification of pure metals on a sinusoidal mold surface. *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 50, p. 2624–2633, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PAREKH, C. J.; WILLS, A. J. The Application of Finite Elements to Heat Conduction Problems Involving Latent Heat. *Rock Mechanics*, v. 5, p. 65 – 76, 1973.

Apêndice A

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR, NA PRESENÇA DE UMA MUDANÇA DE ESTADO E CONSIDERANDO CONTRASTE DE DENSIDADE ENTRE AS FASES, EM UMA CAVIDADE ESFÉRICA

Ao longo do desenvolvimento apresentado a seguir, será tratado o problema da condução de calor para o caso de uma cavidade esférica, onde a superfície interna é mantida abaixo da temperatura de fusão da substância que preenche a cavidade e a superfície externa é mantida acima da temperatura de fusão.

Nos problemas de condução de calor com mudança de fase, solidificação ou fusão, geralmente são acompanhados por uma mudança de densidade durante o processo. Tais mudanças induzem movimento no material líquido que complicam consideravelmente a solução do problema de transferência de calor na presença de uma mudança de fase.

Dois tipos de mudança de densidade são relevantes nos processos transferência de calor. O primeiro é devido à dependência da densidade com a temperatura, o que afeta qualquer processo de transferência de calor em meios fluídos, e o segundo é devido à diferença entre as densidades das regiões sólida e líquida na temperatura de fusão durante o processo de mudança de fase.

A mudança de densidade aqui considerada é a mudança repentina ocorrida na temperatura

de mudança de fase, e foi assumido que ϱ_l e ϱ_s são constantes, mas diferentes em cada fase ($\varrho_o \neq \varrho_i$). Para muitos materiais a diferença entre as densidades das regiões sólida e líquida pode ultrapassar 10%, e em casos extremos chega a 30% do valor (ALEXIADES; SOLOMON, 1993).

A.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E MODELO FÍSICO PARA A TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM MUDANÇA DE DENSIDADE ENTRE AS FASES EM GEOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, se considera o processo de transferência de calor com mudança de fase para um fluido puro confinado em uma casca esférica. Onde a superfície interna, de raio r_a , é mantida à uma temperatura fixa T_a , abaixo da temperatura de mudança de fase do material T_f , de valor constante. A superfície externa é mantida em uma temperatura T_A , também fixa e acima da temperatura de mudança de fase.

A superfície de mudança de fase, $R(t)$, que se forma durante o processo de transferência de calor se afasta da superfície interna da casca esférica. A posição de $R(t)$ é uma função que varia com o tempo, e divide o recipiente que contém o fluido em duas regiões de fases diferentes com temperatura acima e abaixo da temperatura de fusão. O raio da superfície externa $S(t)$ depende do tempo e é inicialmente igual a r_A , $S(0) = r_A$, porém, à medida que o processo de mudança de fase avança esta superfície se desloca expandindo, ou contraindo, dependendo dos valores das densidades do material em cada fase.

As propriedades termofísicas do problema são constantes em cada fase, porém, com a densidade da região sólida diferente da densidade da região líquida, $\varrho_i \neq \varrho_o$. Cada fase que preenche a casca esférica é considerada incompressível e as mudanças no volume devido ao contraste de densidade na mudança de fase resultam em um deslocamento do meio fluido. Os efeitos gravitacionais não são considerados, de maneira que neste caso não existem mudanças de energia potencial no modelo.

A energia total do sistema é igual à soma da energia interna e da energia cinética, e o esforço

imposto sobre a superfície externa é somente a pressão exercida sobre ela pelo deslocamento da região fluida, já que não se consideram os efeitos de dissipação viscosa.

O desenvolvimento a seguir foi obtido para o caso unidimensional da transferência de calor com contraste de densidade em uma casca esférica. Para a região sólida, a equação de transferência de calor em coordenadas esféricas pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 T_i(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

com $r_a < r < R(t)$, e onde α_i representa a difusividade térmica de valor constante para a região sólida. A equação A.1 é simplesmente a equação de condução de calor em geometria esférica, já que na região sólida não existe transferência de calor por advecção. A condição inicial para a equação A.1, $T_i(r,0)$, é indefinida porque, como no problema apresentado no capítulo 3, não há camada sólida em $t = 0$.

Na região líquida, como resultado da conservação de massa, a mudança de densidade durante a solidificação induz um movimento no líquido em direção a interface sólido-líquido (GUPTA, 2003), gerando um efeito de contração na casca esférica se o líquido for menos denso que o sólido, ou expansão se a densidade do sólido for menor que a densidade do líquido. Para a região externa a equação de transferência de calor é,

$$k_o \nabla^2 T_o(r,t) - \rho_o c_o \nabla \cdot (\vec{v} T_o(r,t)) = \rho_o c_o \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

ou em coordenadas esféricas,

$$\frac{\partial^2 T_o(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_o} \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_o} \left(\frac{\partial}{\partial r} (v_r T_o(r,t)) + \frac{2}{r} v_r T_o(r,t) \right), \quad (\text{A.3})$$

com $R(t) < r < S(t)$, e α_o é a difusividade térmica da região líquida. A condição inicial a ser

imposta sobre a equação A.3 pode ser representada como,

$$T_o(r,0) = T_A, \quad \text{para} \quad r_a < r \leq r_A.$$

A equação A.3 representa a transferência de calor por condução e advecção na fase líquida. A velocidade do fluido, $\vec{v}$, existe porque a densidade do fluido ρ_o é diferente da densidade do sólido ρ_i , e o efeito de contração, ou expansão, do sólido ocasionado durante a mudança de fase força o fluido a se mover para ocupar, ou escoar, o espaço deixado, ou preenchido, pelo sólido.

A “contração/expansão” também força a superfície externa, $S(t)$, da casca esférica, e embora os efeitos gravitacionais apareçam naturalmente na dedução da equação A.3 a partir das Leis de Conservação (BEJAN, 2004), eles não são considerados neste problema.

A equação de continuidade implica que as velocidades devem ser uniformes em cada fase, portanto, de uma forma geral as velocidades do sólido e do líquido dependem essencialmente do tempo (ALEXIADES; SOLOMON, 1993). Aplicando o balanço de massa à interface sólido-líquido $R(t)$ em uma casca esférica infinitesimal, a variação de massa da região sólida devido à mudança de fase,

$$\Delta M_i = 4\pi\rho_i R(t)^2 dR - 4\pi\rho_i R(t)^2 v_s(R(t), t), dt$$

como a região solidificada é considerada estacionária, implicando que $v_s(R(t), t) = 0$, deve ser igualada à variação de massa da camada de fluido devido à mudança de fase,

$$\Delta M_o = 4\pi\rho_o R(t)^2 dR - 4\pi\rho_o R(t)^2 v_l(R(t), t).dt$$

.

Fazendo $\Delta M_i = \Delta M_o$, obtemos a relação para a velocidade do líquido devido à mudança de fase,

$$v_l(R(t), t) = \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right) \frac{dR(t)}{dt} \quad (\text{A.4})$$

Agora, aplicando a equação de conservação de massa na região líquida, $R(t) < r < S(t)$, e lembrando que o fluido é incompressível, a densidade é constante dentro de cada fase e a velocidade da camada de fluido, $\vartheta(r, t)$, deve ser uma função dependente do tempo, logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_o \vec{\vartheta}) &= 0 \\ \vartheta(r, t) &= \frac{F(t)}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Na interface $R(t)$ a velocidade do fluido, $\vartheta(r, t)$, é simplesmente a velocidade do líquido na interface, $v_l(R(t), t)$. Daí temos,

$$F(t) = R(t)^2 \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right) \frac{dR(t)}{dt}, \quad (\text{A.6})$$

portanto, a equação para a velocidade nos diferentes pontos da camada de fluido pode ser calculada utilizando as equações A.5 e A.6,

$$\vartheta(r) = \frac{R(t)^2}{r^2} \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right) \frac{dR(t)}{dt} \quad (\text{A.7})$$

A equação A.7 depende essencialmente da função que determina a posição da interface sólido-líquido $R(t)$ no tempo e da taxa de mudança de densidade durante a solidificação. Se $\varrho_i > \varrho_o$, ocorre uma contração no volume total durante a solidificação e a velocidade do líquido deve ser negativa quando $dR(t)/dt$ é positivo. Caso $\varrho_i < \varrho_o$ acontece uma expansão do volume total e a velocidade do líquido deve ser positiva quando $dR(t)/dt$ for positivo (GUPTA, 2003). Por outro lado, aplicando a equação A.5 na superfície externa, $S(t)$, temos

$$S(t)^3 = \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right) (R(t)^3 - r_a^3) + r_A^3, \quad (\text{A.8})$$

a equação acima determina a posição da superfície externa $S(t)$ com o tempo. A velocidade do fluido nesta superfície é a própria velocidade de $S(t)$, logo, pode-se dizer que $\vartheta(S(t), t) = \frac{dS(t)}{dt}$.

Analisando a equação A.8 é fácil perceber que se $\varrho_i = \varrho_o$, a posição $S(t)$ será constante e igual a r_A , $S(t) = r_A$. Fazendo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} R(t) = r_a \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} S^3(t) = r_A^3,$$

portanto, a equação A.8 satisfaz as condições iniciais e as condições de contorno do problema.

As condições de contorno a serem impostas sobre as equações A.1 e A.3, e sobre a interface sólido-líquido são:

$$\left. \begin{aligned} T_i(r_a, t) &= T_a \\ T_o(S(t), t) &= T_A \\ T_i(R(t), t) &= T_o(R(t), t) = T_f \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

A.1.1 A CONDIÇÃO DE CONTORNO NA INTERFACE SÓLIDO-LÍQUIDO, $R(t)$

A condição de contorno que determina a posição da interface sólido-líquido durante a solidificação pode ser obtida escrevendo-se a equação para o balanço de energia através desta superfície. Assumindo que não existe armazenagem de calor na interface e que a energia total liberada, ΔE , é apenas a soma da energia interna, ΔQ , que é a quantidade de calor latente e calor sensível liberado durante a solidificação, e da energia cinética liberada na solidificação, ΔE_c , ou seja, omitindo a energia potencial e a energia química na formulação do problema. Então, através da interface, o contraste de densidade e o correto balanço de energia durante a solidificação, fornecem,

$$\Delta E = -(\Delta Q + \Delta E_c) \quad (\text{A.10})$$

Na interface sólido-líquido, $R(t)$, o fluido se movimenta com uma velocidade representada pela equação A.4 e a massa de sólido formada no intervalo de tempo dt é igual a $\Delta M_i = 4\pi\rho_i R(t)^2 dR$, lembrando que a camada de sólido formada é considerada estacionária. Essa massa, imediatamente antes de solidificar possuía a velocidade $v_l(R(t), t)$, portanto, utilizando a equação A.4 a energia cinética liberada durante a solidificação pode ser escrita como,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(4\pi\rho_i R(t)^2 dR(t)) \cdot \left(1 - \frac{\rho_i}{\rho_o}\right)^2 \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 \quad (\text{A.11})$$

Essa quantidade de energia é depositada na interface quando a camada sólida se contrai durante a solidificação, $\rho_i > \rho_o$. Neste caso uma quantidade de calor equivalente é liberada na camada solidificada e a variação de energia total da interface no intervalo de tempo dt é dada pela equação A.10. Por outro lado, se $\rho_i < \rho_o$, expansão durante a solidificação, a energia é removida da interface sob a forma de energia cinética, $-\Delta E_c$, logo,

$$\Delta E = -(\Delta Q - \Delta E_c) \quad (\text{A.12})$$

A quantidade de calor latente liberada durante a solidificação é,

$$\Delta Q = 4\pi\rho_i L R(t)^2 dR \quad (\text{A.13})$$

onde L é o calor latente de fusão associado com a mudança de fase.

Por outro lado, ΔE é a quantidade líquida de energia removida da interface em direção à superfície continuamente resfriada pelo processo de condução de calor

$$\Delta E = 4\pi R(t)^2 \left(k_i \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \Big|_{R(t), t} - k_o \frac{\partial T_o(r, t)}{\partial r} \Big|_{R(t), t} \right) dt \quad (\text{A.14})$$

Substituindo as equações A.11 e A.13 na equação A.10 e igualando à equação A.14 obtêm-se a relação que representa o caso em que a densidade da camada solidificada é maior que a densidade da região líquida, $\rho_i > \rho_o$, ou seja, a contração da camada líquida sobre o núcleo

sólido durante a solidificação (representada esquematicamente na figura A.1a),

$$\varrho_i L \frac{dR(t)}{dt} + \frac{1}{2} \varrho_i \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right)^2 \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^3 = k_i \left. \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right|_{R(t),t} - k_o \left. \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial r} \right|_{R(t),t} \quad (\text{A.15})$$

A figura A.1b representa a expansão do volume da casca esférica durante a mudança de fase ($\varrho_o > \varrho_i$). Usando a equação A.12 em lugar da equação A.10, obtemos a expressão para o caso do aumento no volume da casca esférica durante a mudança de fase,

$$\varrho_i L \frac{dR(t)}{dt} - \frac{1}{2} \varrho_i \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right)^2 \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^3 = k_i \left. \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} \right|_{R(t),t} - k_o \left. \frac{\partial T_o(r,t)}{\partial r} \right|_{R(t),t} \quad (\text{A.16})$$

O segundo termo do lado esquerdo nas equações A.15 e A.16 representa o efeito de advecção devido à mudança de densidade durante a solidificação. Segundo Alexiades & Solomon (1993) espera-se que o segundo termo das equações A.15 e A.16 seja insignificante quando comparado com $\varrho_i L \frac{dR(t)}{dt}$, em valores de tempo excepcionalmente pequenos.

(a) Contração da camada líquida sobre a região solidificada, $\varrho_i > \varrho_o$ (equação A.15).

(b) Expansão do volume total da casca esférica durante a solidificação, $\varrho_i < \varrho_o$ (equação A.16).

Figura A.1 – Modelo esquemático representando os fenômenos de contração e expansão da casca esférica durante a solidificação do material que preenche a cavidade. Na figura, também estão apresentadas as condições de contorno para a transferência de calor por condução e advecção com mudança de fase considerando o contraste de densidade entre as camadas sólida e líquida.

A.2 FORMULAÇÃO ADIMENSIONAL

Utilizando as relações adimensionais representadas pelas equações 3.9, 3.10 e 3.12, definidas na seção 3.2 do capítulo anterior, pode-se reescrever a equação A.1 da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Y}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{Y}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{Y}(\varphi, \tau)}{\partial \tau}, \quad (\text{A.17})$$

válida dentro do intervalo $\varphi_a \leq \varphi \leq \Phi(\tau)$, para todos os valores de $\tau > 0$. A condição inicial para $\mathcal{Y}(\varphi, \tau)$ continua indefinida por não existir crosta sólida em τ igual a 0. Suas condições de contorno transformam-se em,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Y}(\varphi_a, \tau) &= -1 \\ \mathcal{Y}(\Phi(\tau), \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.18})$$

para todos os valores de $\tau > 0$. Com φ_a e $\Phi(\tau)$ definidos, respectivamente, pelas relações 3.15 e 3.16.

A equação A.3 em forma adimensional é representada por,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \Delta \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial (\text{Po} \mathcal{Z}(\varphi, \tau))}{\partial \varphi} + \frac{2}{\varphi} \text{Po} \mathcal{Z}(\varphi, \tau), \quad (\text{A.19})$$

utilizando as relações adimensionais 3.9, 3.10, 3.11 e 3.13, definidas na seção 3.2. E definindo uma nova variável adimensional, Po , como,

$$\begin{aligned} \text{Po}(r) &= \frac{r_A \vartheta(r)}{\alpha_o} \\ \text{Po}(\varphi) &= \Delta \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o} \right) \frac{\Phi^2(\tau)}{\varphi^2} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde, Po é análogo ao Número de Péclet, porém, varia com a coordenada radial e pode ser entendido como sendo a razão entre a taxa de transferência de calor por convecção e a taxa transferência por condução de calor. Os valores de Po inferiores a 1,0 indicam influência

dominante do processo de condução e valores acima de 10,0 indicam predomínio de convecção (BEJAN, 2004). Fazendo,

$$f(\tau) = \Delta \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o} \right) \Phi^2(\tau) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}, \quad (\text{A.21})$$

onde, $f(\tau)$ é uma função apenas dependente do tempo adimensional τ . Temos,

$$\text{Po}(\varphi) = \frac{f(\tau)}{\varphi^2}, \quad (\text{A.22})$$

e substituindo a equação A.22 na equação A.19 obtemos a equação diferencial parcial que representa a transferência de calor condução e advecção na camada líquida da casca esférica,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \Delta \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{f(\tau)}{\varphi^2} \frac{\partial (\mathcal{Z}(\varphi, \tau))}{\partial \varphi} \quad (\text{A.23})$$

A equação A.23 é válida para $\Phi(\tau) \leq \varphi \leq \Psi(\tau)$, para valores de $\tau \geq 0$. A condição inicial e as condições de contorno adimensionais impostas para a equação A.23 são reescritas como,

$$\mathcal{Z}(\varphi, 0) = 1, \quad \text{para} \quad \varphi_a < \varphi \leq 1.$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}(\Phi(\tau), \tau) &= 0 \\ \mathcal{Z}(\Psi(\tau), \tau) &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \text{para} \quad \tau > 0. \quad (\text{A.24})$$

$\Psi(\tau)$ é a forma adimensional da equação A.8, onde

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{S(t)}{r_A} \\ &= \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o} \right) (\Phi^3(\tau) - \varphi_a^3) + 1, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

e, aplicando o limite sobre a equação A.25, $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \Psi^3(\tau) = 1$, observa-se que ela satisfaz a condição inicial e as condições de contorno do problema.

Abaixo são apresentadas, em função de variáveis adimensionais, as equações que representam as condições de contorno na interface sólido-líquido para o caso de contração da camada líquida, $\varrho_i > \varrho_o$,

$$\left(\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\right)^3 + \frac{2}{\varepsilon^2\Gamma} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} - \frac{2\text{Ste}}{\varepsilon^2\Gamma} \left(\frac{\partial \mathcal{Y}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} \right) = 0, \quad (\text{A.26})$$

e para o caso de expansão da camada líquida, $\varrho_i < \varrho_o$,

$$\left(\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\right)^3 - \frac{2}{\varepsilon^2\Gamma} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} + \frac{2\text{Ste}}{\varepsilon^2\Gamma} \left(\frac{\partial \mathcal{Y}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} - \frac{\gamma}{\delta} \frac{\partial \mathcal{Z}(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\Phi(\tau), \tau} \right) = 0. \quad (\text{A.27})$$

Onde, as variáveis γ , δ e Ste estão definidas na seção 3.2, respectivamente pelas equações 3.24, 3.25 e 3.26. As novas variáveis adimensionais, ε e Γ , foram escritas da seguinte forma,

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_o}\right), \quad (\text{A.28})$$

e,

$$\Gamma = \frac{\alpha_i^2}{r_A^2 L} \quad (\text{A.29})$$

Note que, no limite $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \Phi(\tau) = \varphi_a$ satisfazendo a condição inicial e as condições de contorno na interface sólido-líquido.

A.3 A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM CONTRASTE DE DENSIDADE

A solução da equação A.17 é obtida reduzindo-a de uma equação diferencial parcial para uma equação diferencial ordinária através da transformação de variáveis

$$\omega = \frac{\varphi}{\Phi(\tau)}, \quad \text{para} \quad \tau > 0, \quad (\text{A.30})$$

e substituindo as respectivas derivadas, ver apêndice B, na equação A.17 válida em um instante de tempo τ_0 fixo, arbitrário e maior que zero,

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}(\omega)}{d\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} = -\Phi(\tau_0) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega}, \quad \text{para} \quad \frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)} \leq \omega \leq \frac{\Phi(\tau_0)}{\Phi(\tau_0)}. \quad (\text{A.31})$$

E integrando,

$$\mathcal{Y}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}\right) = \mathcal{A} + \mathcal{B} \int_{\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)}}^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{2}\Phi(\tau_0) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \omega^2} d\omega \quad (\text{A.32})$$

onde, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são constantes de integração. Reescrevendo as condições de contorno A.18, elas tornam-se

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Y}\left(\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)}\right) &= -1 \\ \mathcal{Y}\left(\frac{\Phi(\tau_0)}{\Phi(\tau_0)}\right) &= \mathcal{Y}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.33})$$

Agora, aplicando as condições de contorno A.33 à equação A.32 e rearranjando os termos, obtemos,

$$\mathcal{Y}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}\right) = \frac{\int_{\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)}}^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{2}\Phi(\tau_0) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \omega^2} d\omega}{\int_{\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)}}^1 \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{2}\Phi(\tau_0) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \omega^2} d\omega} - 1 \quad (\text{A.34})$$

E generalizando para todos os valores fixos e positivos de τ , a equação que representa a transferência de calor na camada solidificada da casca esférica pode ser representada por,

$$\mathcal{Y}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}\right) = \frac{\int_{\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau)}}^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \omega^2} d\omega}{\int_{\frac{\varphi_a}{\Phi(\tau_0)}}^1 \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \omega^2} d\omega} - 1, \quad (\text{A.35})$$

para todo $\tau > 0$, e com $\varphi_a \leq \varphi \leq \Phi(\tau)$. A temperatura na camada solidificada varia desde valores maiores ou iguais a $-1,0$ até a temperatura da interface sólido-líquido, que é zero.

A solução para a transferência de calor por condução e advecção na região líquida da casca esférica, equação A.23, pode ser obtida utilizando a relação de transformação representada pela equação A.30. Aplicando as transformações de variáveis necessárias, ver apêndice B, obtemos para um $\tau = \tau_0$ arbitrário e fixo, a equação

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}(\omega)}{d\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega} = -\Phi(\tau_0) \Delta \left. \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0} \omega \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega} + \Phi(\tau_0) \Delta \varepsilon \left. \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_0} \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega} \quad (\text{A.36})$$

A equação A.36 está submetida às condições de contorno,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}\left(\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\tau)}\right) &= \mathcal{Z}(1) = 0 \\ \mathcal{Z}\left(\frac{\Psi(\tau)}{\Phi(\tau)}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.37})$$

com $\tau = \tau_0$. Integrando a equação A.36 temos,

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}\right) = C + \mathcal{D} \int_1^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \omega^2 - \frac{\Delta \varepsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \frac{1}{\omega}} d\omega, \quad (\text{A.38})$$

onde, C e $\mathcal{D}$ são constantes de integração.

Impondo as condições de contorno A.37 sobre a equação A.38 a relação que representa a transferência de calor por condução e advecção na camada líquida para um valor do tempo adimensional τ_0 , pode ser representada por

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}\right) = \frac{\int_1^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau_0)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0}} \omega^2 - \frac{\Delta \varepsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \frac{1}{\omega} d\omega}{\int_1^{\frac{\Psi(\tau_0)}{\Phi(\tau_0)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0}} \omega^2 - \frac{\Delta \varepsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau_0} \frac{1}{\omega} d\omega}, \quad (\text{A.39})$$

e generalizando para qualquer valor de τ , temos

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}\right) = \frac{\int_1^{\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau}} \omega^2 - \frac{\Delta \varepsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\omega} d\omega}{\int_1^{\frac{\Psi(\tau)}{\Phi(\tau)}} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau}} \omega^2 - \frac{\Delta \varepsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\omega} d\omega}, \quad (\text{A.40})$$

válida para todos os valores de $\tau > 0$, e com $\Phi(\tau) \leq \varphi \leq \Psi(\tau)$.

Analisando a equação A.40 verifica-se que os valores para a distribuição de temperatura dentro da camada líquida da casca esférica varia entre $0 \leq \mathcal{Z}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}\right) \leq 1$. Pode-se também observar que, caso ϱ_i seja igual a ϱ_o , a equação A.40 representará apenas a transferência de calor com mudança de fase *e sem contraste de densidade* em uma casca esférica, ou seja, a transferência de energia ocorre apenas por condução de calor.

Embora as soluções A.35 e A.40 tenham sido formalmente obtidas de forma independente, elas estão ligadas através da posição da frente de mudança de fase, que, a princípio, é desconhecida. A posição da frente de mudança de fase como função do tempo é obtida resolvendo-se as equações diferenciais A.26 e A.27, que representam a condição de Stefan, ou seja, representam a conservação de energia do processo de condução de calor ao se atravessar a interface entre as duas fases.

A dificuldade do problema fica clara quando se considera que as equações A.26 e A.27 são não-lineares tanto na posição da interface quanto em sua derivada, o que torna a solução do problema mais difícil do que o problema encontrado no caso de ausência de contraste entre as densidades das duas fases.

Apendice B

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES ADIMENSIONAIS DE CONDUÇÃO DE CALOR

B.1 EM GEOMETRIA CILÍNDRICA

As equações 3.1 e 3.2 foram feitas adimensionais utilizando as variáveis representadas pelas equações de 3.9 a 3.13, equações de 3.15 e 3.16 e pelas equações 3.24 a 3.26. A seguir são apresentadas as relações genéricas de transformação, aplicadas as equações 3.1 e 3.2 com o objetivo de chegar às equações 3.14, 3.19 e 3.23, portanto temos,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \star}{\partial t} &= \frac{\partial \star}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\alpha_i}{r_A^2} \frac{\partial \star}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \star}{\partial r} &= \frac{\partial \star}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r_A} \frac{\partial \star}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \star}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r_A} \frac{\partial \star}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r_A^2} \frac{\partial^2 \star}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

para as temperaturas da região sólida, $T_i(r,t)$, e da região líquida, $T_o(r,t)$, as relações de transformação são representadas pelas equações 3.12 e 3.13. Aplicando as transformações acima, reagrupando e utilizando a relação 3.11 para a equação de condução de calor na região líquida, equação 3.2, obtemos as equações diferenciais adimensionais de condução para as regiões sólida e líquida,

$$\frac{\partial^2 Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \tau}, \quad (\text{B.2})$$

e,

$$\frac{\partial^2 Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} = \Delta \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \tau} \quad (\text{B.3})$$

Para a equação de movimento da interface obtemos sua relação adimensional aplicando as transformações B.1 à equação 3.3, que reagrupando os termos e aplicando a definição de Número de Stefan, equação 3.26, e das definições para γ , equação 3.24, e para δ , equação 3.25, temos,

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \text{Ste} \left(\left. \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \right|_{\Phi(\tau), \tau} - \frac{\gamma}{\delta} \left. \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \right|_{\Phi(\tau), \tau} \right) \quad (\text{B.4})$$

Para encontrar as soluções das equações de condução de calor adimensionais e em regime transiente, equações B.2 e B.3, devem-se lembrar de suas soluções de similaridade, que correspondem às equações 3.28 e 3.32, respectivamente para as regiões sólida e líquida. Em seguida obtêm-se as relações de transformação que modifica as equações diferenciais parciais B.2 e B.3 para simples equações diferenciais ordinárias. Primeiramente derivando $Y(\varphi, \tau)$ em relação a sua variável espacial e sua variável temporal, e aplicando a regra da cadeia em função de ξ , temos

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} &= \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\tau} \frac{\varphi}{d\xi} \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \\ \frac{\partial^2 Y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{2\tau} \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} + \frac{1}{2\tau} \frac{\varphi}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{4\tau^2} \frac{\varphi^2}{d\xi^2} \frac{d^2 Y(\varphi, \tau)}{d\xi^2} + \frac{1}{2\tau} \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \\ \frac{\partial Y(\varphi, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{\varphi^2}{4\tau^2} \frac{dY(\varphi, \tau)}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.5})$$

Substituindo as relações B.5 na equação B.2, e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \frac{dY(\xi)}{d\xi} = 0, \quad (\text{B.6})$$

uma equação diferencial ordinária cuja solução é conhecida. A ordem da equação B.6 pode ser reduzida substituindo-se

$$Q = \frac{dY(\xi)}{d\xi},$$

logo,

$$\frac{dQ}{d\xi} = \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2},$$

disto decorre que,

$$\frac{dQ}{d\xi} + \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) Q = 0 \quad (\text{B.7})$$

E integrando duas vezes, temos,

$$Y(\xi) = \zeta_1 + \zeta_2 \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi, \quad (\text{B.8})$$

que é, exatamente a equação 3.30, para a distribuição de temperaturas na região sólida, e onde ζ_1 , ζ_2 e ξ_0 são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno 3.17 e 3.18.

Agora, aplicando o mesmo procedimento a $Z(\varphi, \tau)$ em relação a sua variável espacial e sua variável temporal, e aplicando a regra da cadeia em função de η , obtemos,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} &= \frac{dZ(\varphi, \tau)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\varphi \Delta}{\tau} \frac{dZ(\varphi, \tau)}{d\eta} \\ \frac{\partial^2 Z(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{4} \frac{\varphi^2 \Delta^2}{\tau^2} \frac{d^2 Z(\varphi, \tau)}{d\eta^2} + \frac{\Delta}{2\tau} \frac{dZ(\varphi, \tau)}{d\eta} \\ \frac{\partial Z(\varphi, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{dZ(\varphi, \tau)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\frac{\varphi^2 \Delta}{4\tau^2} \frac{dZ(\varphi, \tau)}{d\eta} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo as transformações B.9 na equação B.3, e reagrupando temos,

$$\frac{d^2 Z(\eta)}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) \frac{dZ(\eta)}{d\eta} = 0, \quad (\text{B.10})$$

que é exatamente a equação 3.33. Aplicando o mesmo procedimento adotado acima para reduzir a ordem da equação diferencial ordinária acima, e novamente integrando duas vezes, obtemos a equação equivalente para a distribuição de temperaturas na região líquida,

$$Z(\eta) = \beta_1 + \beta_2 \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta, \quad (\text{B.11})$$

onde, β_1 , β_2 e η_0 são, novamente, constantes a serem determinadas, agora pelas condições de contorno, equações 3.20 e 3.21, e pela condição inicial, equação 3.22.

B.2 EM GEOMETRIA ESFÉRICA

Utilizando as transformações relacionadas em B.1, as equações de condução de calor na região sólida, equação A.1, e a equação para a transferência de calor por condução e advecção na camada líquida da casca esférica, equação A.3, podem ser adimensionalizadas. As equações adimensionais que representam a transferência de calor com mudança de fase considerando contraste de densidade entre as fases nas regiões sólida e líquida, respectivamente as equações A.17 e A.19, além das equações adimensionais para o movimento das interfaces, equações A.25 a A.27, foram determinadas.

Usando a solução de similaridade representada pela equação A.30,

$$\omega = \frac{\varphi}{\Phi(\tau)},$$

obtemos as relações de transformação,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Y}(\omega)}{\partial \varphi} &= \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{Y}(\omega)}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \right) \frac{1}{\Phi(\tau)} = \frac{1}{\Phi^2(\tau)} \frac{d^2 \mathcal{Y}(\omega)}{d\omega^2} \\ \frac{\partial \mathcal{Y}(\omega)}{\partial \tau} &= \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \left(-\frac{\varphi}{(\Phi(\tau))^2} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \right) = -\frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \omega \end{aligned} \right\}, \quad (\text{B.12})$$

para a distribuição de temperaturas dentro da região sólida. Para a distribuição de temperaturas na cama líquida as relações de transformação são as mesmas, porém trocando-se $\mathcal{Y}(\omega)$ por $\mathcal{Z}(\omega)$.

Substituindo as relações B.12 na equação A.17 e rearranjando os termos obtemos,

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}(\omega)}{d\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} = -\Phi(\tau_0) \frac{d\Phi}{d\tau} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega}, \quad (\text{B.13})$$

e, fazendo $\mathcal{U} = \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega}$ temos

$$\frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = -\frac{2}{\omega} d\omega - \Phi(\tau) \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega} \omega d\omega, \quad (\text{B.14})$$

E, integrando duas vezes, obtemos a equação que descreve a distribuição de temperaturas dentro da região solidificada,

$$\mathcal{Y}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}\right) = \theta_1 + \theta_2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{1}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \omega^2} d\omega, \quad (\text{B.15})$$

onde, ainda é necessário a aplicação das condições de contorno A.33 para eliminar as constantes.

Para a distribuição de temperaturas dentro da camada líquida é adotado o mesmo procedimento acima. Substituindo as relações B.1 na equação A.19 obtemos a equação A.36,

$$\frac{d^2 \mathcal{Z}(\omega)}{d\omega^2} + \frac{2}{\omega} \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega} = -\Phi(\tau_0) \Delta \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \omega \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega} + \Phi(\tau_0) \Delta \varepsilon \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\omega^2} \frac{d\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega}, \quad (\text{B.16})$$

utilizando a mudança de variável $\mathcal{W} = \frac{\mathcal{Z}(\omega)}{d\omega}$ e em seguida integrando duas vezes temos,

$$\mathcal{Z}\left(\frac{\varphi}{\Phi(\tau)}\right) = \kappa_1 + \kappa_2 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{1}{\omega^2} e^{-\frac{\Delta}{4} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \omega^2 - \frac{\Delta\epsilon}{2} \frac{d\Phi^2(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\omega}} d\omega, \quad (\text{B.17})$$

que ainda precisa das condições de contorno A.37 e da condição inicial para determinar o valor das constantes.