Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Danilo Morales Teixeira

Núcleos de galáxias ativos: Propriedades em escalas de parsec e kilo-parsec.

São Paulo

2014

Danilo Morales Teixeira

Núcleos de galáxias ativos: Propriedades em escalas de parsec e kilo-parsec.

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientadora: Prof.^(a) Dr.^(a) Zulema Abraham

Co-Orientador: Prof. Patrick Christopher Fragile

São Paulo

2014

Dedico este trabalho a minha linda filha Roberta Peruci Teixeira!

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais José e Sonia por todo o apoio durante todos estes anos e a minha filha Roberta que tanto me motivou a terminar este trabalho;

À minha orientadora Zulema Abraham que sempre me motivou e apoiou na minha pesquisa durante os 9 anos que trabalhamos juntos;

Ao meu co-orientador Patrick Christopher Fragile que me aceitou para fazer o doutorado sanduiche no College of Charleston por quase um ano me ensinando muito sobre simulações numéricas;

Aos professores Alessandro, Anderson Caproni, Pavel Ivanov e Omer Blaes;

À Professora Elisabe dal Pino que me acompanhou durante todo o meu doutorado contribuindo muito para este trabalho;

Aos colegas: Ana, Bob Penna, Cesar, Douglas, Gustavo, Luis, Marcio, Pedro e Slava;

À CAPES, pela bolsa de doutorado no país e também pela bolsa e doutorado sanduíche (projeto n° 1073-11-7);

Às Instituições IAG-USP e College of Charleston onde este trabalho foi realizado.

Este trabalho utilizou os equipamentos do Laboratório de Astroinformática (IAG/USP, NAT/Unicsul), cuja aquisição foi possibilitada pela agência brasileira FAPESP (processo 2009/54006-4) e pelo INCT-A.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica de discos torcidos finos e espessos para compreender melhor a propagação da deformação nestes discos. No caso dos discos finos, estudamos a física do efeito Bardeen-Petterson e aplicamos este modelo para explicar o jato em escalas de parsec e kilo-parsec da galáxia NGC 1275. Encontramos que o efeito Bardeen-Petterson reproduziu muito bem a forma do jato e com isto derivamos os parâmetros do disco como raio, valores das viscosidades azimuthal e vertical, lei de potência da densidade superficial e spin do buraco negro.

Para uma melhor compreensão da física destes discos, realizamos simulações GRMHD de discos moderadamente finos tanto planos como inclinados para estudar a evolução do ângulo de inclinação entre os momentos angular do buraco negro e do disco de acreção assim como o ângulo de torção que está associado com a precessão do disco.

Encontramos que quando o disco de acreção e o buraco negro rotacionam no mesmo sentido, o ângulo de inclinação entre os momentos angular apresentou um comportamento oscilatório na parte interna do disco e permaneceu constante na parte externa em acordo com as previsões teóricas. Já quando o buraco negro rotacina no sentido oposto ao disco de acreção, encontramos pela primeira vez numa simulação GRMHD evidências de alinhamento, ocorrendo um alinhamento de 10% do angulo entre os momentos angulares do disco e buraco negro. Além disso, comprovamos pela primeira vez numa simulação GRMHD a não isotropia do stress.

Utilizando um modelo semi-analítico, comparamos os resultados de nossas simulações com este modelo, utilizando os dados da simulações de disco plano como entrada e obtivemos os mesmos comportamentos das simulações tanto no caso prógrado quanto no caso retrógrado mostrando que o alinhamento é devido ao regime onda.

Abstract

In this work we studied the dynamics of twisted thin and thick disks to better understand how the warp propagates in these discs. In the case of thin discs, we studied the physics of the Bardeen-Petterson effect and we applied this model to explain the shape of the jet in both parsec and kilo-parsec scales of the galaxy NGC 1275. We found that the Bardeen-Petterson effect could explain very well the shape of the jet and with that we derived the disc parameters such as its radius, the values of the kinematic azimuthal and vertical viscosities, the power-law of the surface density and the spin of the black hole.

To better understand the physics of such discs, we have performed GRMHD simulations of moderately thin tilted disks to study the evolution of the tilt angle between the angular momentum of the accretion disk and black hole and also the twist angle which is associated with the precession of the disc.

We found that when the accretion disc and the black hole are rotating in the same direction, the tilt angle showed an oscillatory behavior in the inner parts of the disk while in the outer parts it remained constant in agreement with the theoretical models. However, when both rotate in the opposite direction, we found for the very first time in a GRMHD simulation, evidences of alignment of 10% of the tilt angle. Besides that, we prove for the first time in a GRMHD simulation that the stress is far from being isotropic.

Using a semi-analytic model, we compared the results of our simulations with this model, using the data of the untilted simulations as inputs and we found the same behaviors found in the simulations even in prograde case as in the retrograde case showing that the alignment is due to bending waves.

Lista de Figuras

1.1	Taxonomia dos AGNs. Extraído de Urry & Padovani 1995.	26
1.2	Modelo de unificação para AGNs. Imagem adaptada de Urry & Padovani (1995)	28
1.3	Representação mostrando o modelo Blandford-Payne. Extraído de Lovelace (1976). Esta imagem mostra o campo magnético extraindo energia do disco de acreção para produzir e acelerar o jato.	29
1.4	Representação do movimento superluminal.	30
2.1	Contornos de eficiência constante $\varepsilon = 1 + F_E$ no plano $a - F_{\theta\phi}$. O contorno de eficiência unitária está marcado como uma linha sólida grossa; acima e para a direita desta linha $F_E > 0$, isto é, energia está sendo extraída do buraco negro. Os contornos mais finos estão espaçados linearmente com $\Delta\varepsilon=0.1$. O contorno tracejado grosso cai em $\varepsilon=0.42$, a eficiência clássica de um disco prógrado ao redor de um buraco negro com rotação máxima. Extraído de Gammie (1999)	53
2.2	Disco de duas componentes. A parte interna composta por um ADAF e a parte externa por um disco fino.	71
3.1	Esquerda: Valores dos coeficientes Q para o caso adiabático ($\Gamma=5/3$). Direita: Valores dos coeficientes Q para o caso isotérmico ($\Gamma=1.0$). Extraído de Ogilvie (1999) e Ogilvie & Latter (2013)	78
3.2	Representação esquemática do efeito Bardeen-Petterson. Extraído de Caproni et al 2006).	80

3.3	A evolução do ângulo de desalinhamento entre o buraco negro e disco como função do tempo normalizados pela escala de tempo τ , escala de tempo para o spin do disco diminuir para $\varphi = 90^\circ$. Os ângulos de desalinhamento inicial são $\varphi = 135^\circ$ para as três curvas superiores e $\varphi = 90^\circ$ para a curva inferior. A razão entre os momentos iniciais são $J_D/J_{BH}=0.5, 1.4, 1.42$ e 0.5 respectivamente. Extraído de King et al. (2005)	83
4.1	Evolução do ângulo φ entre o momento angular do disco de acreção e o momento angular do buraco negro, ângulo de precessão φ_D , e o ângulo entre o momento angular total e do buraco negro φ_{BH} , como função de $\Delta\tau = (t - t_0)/T_{align}$. A linha vertical em $\Delta\tau=3$, corresponde ao tempo atual t_{obs} , quando a idade do jato é igual a três períodos de precessão. . . .	101
4.2	Superior: Posição do modelo do jato (linha contínua) e contra-jato (linha pontilhada) projetadas no plano do céu no intervalo de tempo $\tau = 1.5$, sobreposto ao mapa rádio do MERLIM em 151 MHz de Pedlar et al. (1990). A seta dupla representa a direção do eixo do cone de precessão, os triângulos as posições onde a velocidade angular atinge seu valor mínimo. Inferior: modelo do jato para a parte interna da rádio fonte sobreposto ao mapa em 1666 MHz do MERLIM.	103
4.3	Posição do modelo do jato (linha azul) e contra-jato (linha vermelha) projetados no plano do céu para o intervalo de tempo $\tau=3$, sobreposto a imagem do CHANDRA e VLA em 332 MHz (Fabian et al. 2000; Pedlar et al. 1990).	104
4.4	Densidade superficial do disco Σ_0 (curva contínua), Σ_0^{min} (curva tracejada) e Σ_0^{max} (curva ponto-pontilhada). A curva preta corresponde aos valores para $R_D=0.5$ pc, curva vermelha para $R_D=3.0$ pc e a curva azul para $R_D=5.0$ pc. O painel superior corresponde a $s=0.7$, meio $s=0.5$ e inferior $s=0.3$. A unidade de Σ_0 é gcm^{-2}	106

4.5	Esquerda: Raio de Bardeen-Petterson em função do spin do buraco negro. A linha preta corresponde a $s=0.7$, vermelha a $s=0.5$ e azul a $s=0.3$. O painel superior corresponde a $R_D=0.5$ pc, meio a $R_D=3.0$ pc e inferior a $R_D=5.0$ pc. O raio de transição não aparece no gráfico por ser maior do que a escala, a linha laranja corresponde ao raio do disco de acreção e a linha verde ao raio interno do disco. Direita: tempo de alinhamento correspondendo aos mesmo valores de R_D e s em função do spin. A linha verde corresponde ao tempo de alinhamento utilizado por Falceta-Gonçalves et al. (2010).	107
4.6	Esquerda: Raio de Bardeen-Petterson em função do spin do buraco negro. O painel superior corresponde a $s=1.0$, meio a $s=0.8$ e inferior a $s=0.6$. A linha verde corresponde ao raio interno do disco, laranja ao raio externo e azul clara ao raio de transição. Para o painel superior utilizou-se $\nu_2/\nu_1=1, 5$ e 20 ; meio: $\nu_2/\nu_1=1, 4$ e 30 ; inferior: $\nu_2/\nu_1=1, 5$ e 30 . Direita: Tempo de alinhamento utilizando os raios de Bardeen-Petterson calculados.	109
4.7	Valores da razão ν_2/ν_1 para diferentes valores de α_1 em função da amplitude da deformação.	110
4.8	Escala de altura média em função do spin do buraco negro. Painel superior corresponde ao raio do disco de 0.5 pc, o painel do meio ao raio de 3 pc e o painel inferior ao raio de 5 pc. As linhas preta, vermelha e azul correspondem aos valores de $s=1.0, 0.7$ e 0.5 e a linha laranja ao valor de α_1	111
5.1	Grade utilizada na direção X-Z.	127
5.2	Grade utilizada na direção X-Y.	127
6.1	Valores dos parâmetros $Q_2 = Q_\vartheta$ e $Q_3 = Q_\varphi$ da simulação S1.	141
6.2	Escala de altura (H/R) das simulações S1 e S2. Verifica-se que a função de resfriamento realizou um bom trabalho de manter a escala de altura próxima do valor desejado através do disco.	142
6.3	Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 das simulações S1 e S2. Observa-se que o disco é fino para raios menores do que $10M$	143
6.4	Perfil da taxa de acreção em função do raio das simulações S1 e S2.	144

6.5	Superior: Momento angular específico. Inferior: velocidade radial do material acretando. A linha preta refere-se a simulação S1, a linha vermelha a simulação S2 e a linha azul representa o valor esperado do valor do modelo NT73 assumindo $\alpha = 0.1$ e $H/R=0.08$	145
6.6	Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S1 e S2. A linha preta representa a simulação S1, a linha vermelha a simulação S2 e a linha azul o valor esperado do modelo NT73.	146
6.7	Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S1 e S2 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73. . . .	147
6.8	Visualização da densidade em escala logarítmica (escalada de 0.01 a 1) da simulação S1. em $t=12.5t_{orb}$. Um quarto do disco foi removido para revelar a secção transversal. O eixo de spin do buraco negro está orientado verticalmente junto ao eixo z	148
6.9	Semelhante a figura 6.7 mas para a simulação S2. Neste caso o spin do buraco negro está orientado no plano $x - z$ inclinado de 10° em relação os eixos $-x$ e z . Nenhuma indicação de deformação parece estar presente. . .	149
6.10	Inclinação fracional do disco, i.e. β/β_0 . como função do tempo e raio para a simulação S2. O gráfico mostra nenhuma evidência de alinhamento Bardeen-Petterson em qualquer raio durante toda a evolução da simulação. De fato a inclinação do disco na parte interna em relação ao plano de simetria do buraco negro cresce.	150
6.11	Torção, γ , de cada casca esférica como função do tempo para a simulação S2. Uma frente de torção pode ser vista movendo-se lentamente para fora através do disco. Atrás desta frente, a torção parece saturar para um certo valor em cada casca esférica, tal que apenas precessão diferencial moderada é vista.	151
6.12	Entropia em função do raio em unidades arbitrárias para as simulações S1 e S2. Os dados foram obtidos através de médias das órbitas 10-12.5. A semelhança de ambos os perfis sugere que choques não possuem um papel importante em simulações de discos inclinados.	152

6.13	Ecentricidade orbital, e para a simulação S2, estimada em uma escala de altura.	153
6.14	Escalas de tempo para a simulação S2. A linha azul representa o instante final da simulação.	154
6.15	Ângulo de precessão (ou torção), γ , como função do tempo para a simulação S2. Também graficou-se o valor estimado de $\bar{\gamma}$. Os dados da simulação foram obtidos através de médias sobre as órbitas 10-12.5.	156
6.16	Gráfico multicores de $\log_{10}(\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}})$ na casca em $R=10M$. Muito desta casca exibe sinais consistentes para $\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}}$ e uma magnitude entre 0.01 - 1.	157
6.17	Gráfico multicores de $\log_{10}(\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}})$ na casca em $R=10M$. Desde que $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ não tem um sinal consistente para graficar os seus valores em escala logarítmica, separamos o gráfico em dois painéis. O painel superior é para o caso quando $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}} > 0$ e o inferior para o caso quando $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}} < 0$. Esta figura demonstra que $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ alterna o sinal mais frequentemente e cobre uma variação muito maior de valores.	158
6.18	Gráfico multicores de $\log_{10}(\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}})$ na casca em $R=10M$. Desde que $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}}$ não tem um sinal consistente para graficar os seus valores em escala logarítmica, separamos o gráfico em dois painéis. O painel superior é para o caso quando $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}} > 0$ e o inferior para o caso quando $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}} < 0$. Nota-se que esta componente apresenta valores e variabilidade semelhantes aos da figura 6.17.	159
6.19	Escala de altura (H/R) das simulações S3 e S4. Verifica-se que a função de resfriamento realizou um bom trabalho de manter a escala de altura próxima do valor desejado através do disco.	161
6.20	Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 das simulações S3 e S4.	162
6.21	Perfil da taxa de acreção em função do raio das simulações S3 e S4.	163
6.22	Superior: Momento angular específico. Inferior: velocidade radial do material acretando. A linha preta refere-se a simulação S3, a linha vermelha a simulação S4 e a linha azul representa o valor esperado do valor do modelo NT73 assumindo $\alpha = 0.1$ e $H/R=0.08$	163

6.23	Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S1 e S2. A linha preta representa a simulação S3, a linha vermelha a simulação S4 e a linha azul o valor esperado do modelo NT73.	164
6.24	Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S3 e S4 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73. . . .	165
6.25	Comparação dos valores do stress azimutal α_1 entre as simulações S2 e S4.	166
6.26	Comparação dos valores do stress azimutal α_2 entre as simulações S2 e S4.	167
6.27	Comparação dos valores do stress azimutal α_3 entre as simulações S2 e S4.	168
6.28	Ângulo de inclinação fracional, β/β_0 para a simulação S4 como função do tempo e raio.	169
6.29	Ângulo de torção, γ , para a simulação S4 como função do tempo e raio. . .	170
6.30	Ângulo de inclinação, β , para as simulações S4 e S5 em função do raio. A linha azul representa a localização da ISCO.	171
6.31	Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 da simulação S6.	172
6.32	Comparação do momento angular específico e da velocidade radial com o modelo NT73.	173
6.33	Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S3 e S6. A linha azul o valor esperado do modelo NT73.	174
6.34	Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S3 e S6 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73. . . .	175
6.35	Densidade superficial da simulação S6.	176
6.36	Superior: Densidade do disco no plano Y-Z. Inferior: Intensidade do campo magnético.	177
6.37	Ângulo de inclinação das simulações S2 e S7.	178
6.38	Ângulo de torção das simulações S4 e S7.	179
6.39	Comparação do parâmetro de stress (α_1) com a escala de altura (H/R) do disco no instante final da simulação.	180
6.40	Superior: fluxo de acreção de massa. Meio: fluxo de energia. Inferior: Eficiência da acreção.	181

6.41	Ângulos de inclinação das simulações S4 e S8. A linha azul representa a localização da ISCO.	182
6.42	Superior: ângulo de torção das simulações S4 e S8 em função do tempo. Inferior: ângulo de torção em função do raio.	183
6.43	Escala de altura doo discos de acreção da simulação S9.	184
6.44	Superior: velocidade do som. Meio: velocidade radial Inferior: velocidade angular. A curva em preto representa os resultados da simulações e as demais curvas o esperado do modelo para diferentes valores da constnate a	186
6.45	Ângulo de inclinação em função do tempo para a simulação S9.	187
6.46	Ângulo de torção em função do tempo para a simulação S9.	188
6.47	Escala de altura dos discos de acreção das simulações S10 e S11.	189
6.48	Escala de altura e parâmetro do stress azimutal dos discos de acreção das simulações S10 e S11.	190
6.49	Superior: Momento angular específico. Inferior: Velocidade radial. A linha azul representa o valor esperado do modelo NT73.	191
6.50	Superior: fluxo de massa no horizonte. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção. A linha azul representa o valor esperado do modelo NT73.	192
6.51	Ângulo de inclinação em função do tempo e raio normalizado pelo valor inicial. Pode-se ver da figura a evidência de um modesto alinhamento em pequenos raios ($R < 10M$).	193
6.52	Superior: parâmetro do stress azimutal ($\alpha_{r\phi}$). Inferior: parâmetro do stress vertical ($\alpha_{r\theta}$).	194
6.53	Entropia das simulações S10 e S11.	195
7.1	Distribuição do parâmetro de stress α (superior esquerdo), escala de altura δ (superior direito), densidade superficial (inferior esquerdo) e componente radial da quadri-velocidade (inferior direito), como função da coordenada radial, para a simulação S1 (curvas espessas) e S3 (curvas finas), obtidas através de médias em intervalos de tempos diferentes.	199

7.2	Escala de tempo de relaxação, t_{relax} , definida nas equações acima, graficada como função da coordenada radial R . As duas curvas sólidas mostram os dois ramos da solução do modelo SA1. As soluções para o modelo SA2 apenas possuem um ramo. A curva tracejada mostra um caso adicional onde a evolução é solenemente determinada por ondas decaindo como resultado da viscosidade. Para referência, as linhas finas horizontais mostram os tempos de parada da simulação em alta resolução (reta sólida preta) e baixa resolução (reta tracejada vermelha) das simulações prógradas.	204
7.3	Ângulo de inclinação, β , (superior) e torção (inferior) como função do raio e tempo para a simulação S2 (linhas sólidas) e modelo SA1 (linhas tracejadas).	206
7.4	Semelhante a figura 7.3 mas para o modelo SA1b, onde o parâmetro da viscosidade α foi ajustado para zero em 7.1 e no lado direito de 7.2. As diferenças com a figura 7.3 são relativamente pequenas, indicando que os efeitos da viscosidade anisotrópica na evolução de β e γ podem ser bem pequenos.	207
7.5	Semelhante a figura 7.3 mas para a simulação em baixa resolução S4 e o modelo analítico correspondente SA1.	210
7.6	Ângulo de inclinação fracional do disco β/β_0 , como função do raio para os modelos SA1 (equação completa) e SA2 (aproximação difusiva) em $t=12427M$, utilizando a simulação S1 como fundo.	212
7.7	Semelhante a figura 7.3 mas para nossa simulação retrógrada S11 e seu modelo semi-analítico correspondente SA1.	213
8.1	Ângulo de inclinação das simulações retrógradas com spins de -0.1, -0.3 e -0.5 em função do raio.	218

Lista de Tabelas

6.1	Parâmetros da simulação	140
-----	-----------------------------------	-----

Sumário

1. Núcleos de galáxias ativos	25
1.1 Tipos de núcleos ativos de galáxias	25
1.2 Modelo unificado	27
1.3 Jatos relativísticos	28
1.3.1 Processo Blandford-Payne	28
1.3.2 Processo Blandford-Znajek	29
1.3.3 Movimento superluminal	29
2. Discos de acreção planos	33
2.1 Modelo Shakura-Sunyaev, SS73	35
2.1.1 Mecanismo de transporte de momento angular	35
2.1.2 Estrutura do disco	37
2.2 Modelo Novikov-Thorne	42
2.2.1 Modelo para o disco	44
2.3 Torque dentro da ISCO	49
2.3.1 Modelo Gammie (1999)	50
2.3.2 Modelo Agol & Krolik (2000)	53
2.4 Resultados de simulações numéricas	55
2.5 Modelo Novikov-Thorne modificado	59
2.6 Modelo Pringle (1981)	64
2.7 Fluxos de acreção dominados por advecção - ADAFs	66
2.8 Discos com duas componentes	70

3. <i>Discos de acreção inclinados</i>	73
3.1 Discos finos inclinados	73
3.2 Efeito Bardeen-Petterson	79
3.3 Discos espessos inclinados	86
3.4 Resultados de cálculos numéricos e simulações SPH e MHD	90
4. <i>Efeito Bardeen-Petterson em NGC 1275</i>	97
4.1 Geometria do jato precessionando	99
4.2 Imagem rádio	100
4.3 Parâmetros do disco de acreção e do buraco negro	104
5. <i>Simulações GRMHD de discos de acreção inclinados</i>	113
5.1 Cosmos++	113
5.2 Métrica de Kerr	116
5.3 HRSC	119
5.4 Constrained transport	120
5.5 Cálculo da velocidade da onda	121
5.6 Simulações	122
5.6.1 Inicialização	122
5.6.2 Função de resfriamento	124
5.6.3 Resolução da malha	126
5.7 Diagnósticos	128
5.7.1 Taxa de acreção	128
5.7.2 Escala de altura	128
5.7.3 Determinação do ângulo entre os momentos angulares do disco de acreção e do buraco negro	128
5.7.4 Localizando choques	133
5.7.5 Estimando as componentes do stress e verificando sua isotropia	134
5.7.6 Comparando com o modelo Novikov-Thorne (1973)	136
5.7.7 Escalas de tempo	137
5.7.8 Qualidade da simulação	138

6. Resultados das simulações GRMHD	139
6.1 Simulações S1 e S2	139
6.1.1 Resolução	139
6.1.2 Comparação com o modelo NT73 e simulações GRMHD	142
6.1.3 Resultados da simulação S2	148
6.1.4 Choques	152
6.1.5 Escalas de tempo	153
6.1.6 Isotropia do stress	156
6.2 Simulações S3 e S4	160
6.2.1 Comparação com o modelo NT73	160
6.2.2 Componentes do stress	165
6.2.3 Ângulos de inclinação e torção	168
6.3 Simulação S5	170
6.4 Simulações S6 e S7	171
6.5 Simulação S8	179
6.6 Simulação S9	184
6.7 Simulações S10 e S11	188
7. Modelo disco torcido relativístico	197
7.1 Equações dinâmicas para as variáveis de torção	200
7.2 Escala de tempo característica	202
7.3 Simulação em alta resolução	205
7.4 Simulações em baixa resolução	209
7.5 Ausência de alinhamento Bardeen-Petterson no caso prógrado	211
7.6 Caso retrógrado	212
8. Conclusões e perspectivas	215
Referências	219

Núcleos de galáxias ativos

Núcleos de galáxias ativos (AGNs) são regiões localizadas no centro de galáxias muito mais luminosas que galáxia normais (ver review de Antonucci 1993). Tal excesso na emissão foi observada em todos os comprimentos de onda: rádio, IR, óptico, UV, raios-X e raios gama. Uma galáxia hospedando um AGN é chamada Galáxia Ativa. Acredita-se que os AGNs são formados por um buraco negro supermassivo, um disco de acreção e um jato e que a radiação dos AGNs é o resultado da acreção da massa do disco pelo buraco negro. A variedade de luminosidades observadas é grande, sendo compreendida entre 10^{40} erg s⁻¹ - 10^{47} erg s⁻¹. AGNs são as fontes mais luminosas e persistentes de radiação eletromagnética quando comparadas com gamma-ray bursts e super-novas no universo e podem ser usados para descobrir objetos distantes.

1.1 Tipos de núcleos ativos de galáxias

Há diferentes tipos de AGNs com diferentes nomes que são baseados nas frequências de detecção, espectro, polarização e variabilidade. Lawrence (1987, 1993) dividiu estes AGNs em diferentes classes de acordo com sua luminosidade rádio (radio-loud e radio-quiet) e espectro óptico (tipos 0, 1 e 2) conforme apresentado na figura 1.1.

Figura 1.1: Taxonomia dos AGNs. Extraído de Urry & Padovani 1995.

A separação entre radio-loud e radio-quiet é definida através da razão das luminosidades rádio (5 GHz) e óptica (banda B), onde o limite ocorre para razões maiores ou iguais a 10 (Kellermann et al. 1989). A maior parte dos AGNs é do tipo radio-quiet e apenas aproximadamente 15-20% são do tipo rádio-loud. Esta proporção pode aumentar com a luminosidade no óptico e em raios-X (Della Cecca et al. 1994). Desta forma, é possível alcançar por exemplo $\sim 50\%$ em $M_B \leq -24.5$. Em alguns casos, o espectro das linhas de emissão no óptico e infravermelho e o contínuo entre o infravermelho e raios-X de AGNs radio-loud e radio-quiet são muito semelhantes (Sanders et al. 1989) provavelmente produzidos por processos semelhantes. As características dos AGNs radio-loud podem estar de alguma forma relacionada com o tipo da galáxia hospedeira (Smith et al. 1986) ou com o spin do buraco negro (Blandford 1990; Wilson & Colbert 1995) que podem permitir a formação de jatos relativísticos muito intensos.

Os AGNs do tipo 1 tem um contínuo brilhante e linhas de emissão largas, características de um gás quente em alta velocidade, localizado nas proximidades do buraco negro central. O grupo dos AGNs radio-quiet incluem as galáxias Seyfert 1 e os quasares radio-quiet (QSO) e o grupo das radio-loud incluem as rádio galáxias de linhas largas (BLRG) em baixas luminosidades, os quasares radio-loud em altas luminosidades e os quasares de espectro plano na faixa rádio (FSQR).

Os AGNs do tipo 2 tem um contínuo fraco e apenas linhas de emissão estreitas, o que significa que eles não possuem gás de alta velocidade ou que a radiação é obscurecida na

linha de visada. Os AGNs radio-quiet do tipo 2 incluem as galáxias Seyfert 2. AGNs do tipo 2 radio-loud são geralmente chamados de rádio galáxias de linhas estreitas (NLRG) e incluem os tipos morfológicos Fanaroff-Riley dos tipos I e II (FRI e FR II) que possuem jatos colimados que conduzem a lóbulos bem definidos e hot spots proeminentes. Parece haver uma boa separação entre as energias emitidas pelas FR I e FR II o que diferencia as duas classes. Mais intuitivamente, galáxias FR I são aquelas galáxias com suas regiões de baixo brilho superficial longe do núcleo. Fanaroff-Riley do tipo 2 (FR II) possuem jatos mais retos e não distorcidos que aparecem apenas de um lado do núcleo, sendo aparentemente supersônicos.

Os AGNs do tipo 0 tem uma característica espectral incomum atribuído ao fato que seus jatos formam um ângulo pequeno com a linha de visada. Esta classe inclui os objetos BL Lac que são AGNs do tipo radio-loud que não possuem linhas de absorção ou emissão.

1.2 Modelo unificado

Modelos unificados são propostos para que diferentes classes de AGNs possam ser consideradas como sendo o mesmo tipo de objeto mas observados sob condições diferentes. Os modelos unificados mais favorecidos atualmente são baseados na orientação, significando que eles propõem que as diferenças aparentes entre os AGNs são devidas a sua orientação com relação ao observador.

Blazares são aqueles AGNs no qual o jato está muito próximo da linha de visada. Um quasar regular ou uma galáxia Seyfert 1 são observados se o ângulo de orientação é $<30^\circ$, quando as regiões de linhas estreitas e largas são visíveis. Para grandes deslocamentos angulares, a região de linhas largas será obscurecida pelo tórus e a classe correspondente neste caso são às galáxias Seyfert 2. No plano do céu, a extensão completa do jato pode ser vista particularmente em baixas frequências, produzindo a morfologia típica de rádio galáxias. Uma imagem representando o modelo unificado é apresentado na figura 1.2.

Figura 1.2: Modelo de unificação para AGNs. Imagem adaptada de Urry & Padovani (1995)

1.3 Jatos relativísticos

Jatos relativísticos são jatos de plasma que emergem do disco de acreção no centro de alguns AGNs. Seus comprimentos podem alcançar parsecs ou até mesmo centenas de kilo-parsecs. Há diferentes mecanismos que explicam como estes jatos são formados, eles serão discutidos nas seções 1.3.1 e 1.3.2.

1.3.1 Processo Blandford-Payne

Este mecanismo foi proposto por Blandford & Payne (1982) sendo que a energia e momento angular são extraídas do disco de acreção por linhas do campo magnético que saem da superfície do disco e se estendem até grandes distâncias. O stress do campo magnético pode extrair momento angular do disco fino e permitir a acreção da matéria independentemente da presença da viscosidade. Este modelo tem a propriedade que a potência está concentrada dentro do núcleo do jato, enquanto que a maior parte do momento angular e do fluxo magnético são carregados nas proximidades da parede do jato. Uma representação deste modelo é apresentado na figura 1.3.

Figura 1.3: Representação mostrando o modelo Blandford-Payne. Extraído de Lovelace (1976). Esta imagem mostra o campo magnético extraindo energia do disco de acreção para produzir e acelerar o jato.

1.3.2 Processo Blandford-Znajek

O processo Blandford-Znajek é um mecanismo que explica a extração de energia de um buraco negro em rotação (Blandford & Znajek 1977). É um dos melhores modelos para explicar as potências observadas nos quasares. Este mecanismo requer um disco de acreção com um campo magnético polar forte ao redor do buraco negro em rotação onde o campo magnético extrai energia de rotação do buraco negro. Um cálculo numérico que comprovou este modelo foi realizado por McKinney & Narayan (2007a,b) utilizando um código relativístico. Eles encontraram uma boa concordância entre os cálculos e as suposições adotadas pelo modelo.

1.3.3 Movimento superluminal

Os mapas de VLBI (no inglês Very Long Baseline Interferometry) mostram que a estrutura dos jatos são complexas sendo formado por várias componentes de maior intensidade (Zensus 1997) ejetadas do núcleo com velocidades aparentes maiores do que a velocidade da luz (Cohen et al. 1971).

Os movimentos superluminais podem ser explicados se admitirmos que as componentes estão se movendo com velocidades próximas à da luz numa direção próxima a linha de visada (Rees 1966, 1967). Para entender como isto acontece, vamos considerar que o jato é ejetado do núcleo com velocidade $v = \beta c$ e que a direção do movimento forma um ângulo

θ com a linha de visada, como mostrado na figura 1.4.

Figura 1.4: Representação do movimento superluminal.

A radiação emitida pela fonte na posição A , pode ser vista por um observador na Terra após um tempo $t'_1 = D_L/c$, onde D_L é a distância de luminosidade. Depois de um intervalo de tempo δt (medido no referencial da galáxia) a componente move-se uma distância $v\delta t$. O sinal emitido depois do intervalo δt é observado na Terra no tempo $t'_2 = \delta t + (D_L - v\delta t \cos \theta)/c$. Então o intervalo $\delta t'$ no referencial do observador é

$$\delta t' = t'_2 - t'_1 = \delta t(1 - \beta \cos \theta) \quad (1.1)$$

O deslocamento da componente projetada no plano do céu é dado por $L_{proj} = v\delta t \sin \theta$. Com isto é possível definir a velocidade aparente como

$$\beta_{app} = \frac{L_{proj}}{c\delta t'} = \frac{\beta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)} \quad (1.2)$$

Da equação 1.2, é possível obter o valor de θ para o qual β_{app} é máximo. Isto ocorre quando $\cos \theta = \beta$ ou $\sin \theta = \gamma^{-1}$, onde γ é o fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3)$$

Neste caso,

$$\beta_{app,max} = \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (1.4)$$

Mantendo-se β_{app} fixo, β e γ são minimizados quando $\beta = \cos \theta$ e $\gamma = \csc \theta$ tal que

$$\beta_{min} = \frac{\beta_{app}}{\sqrt{1 + \beta_{app}^2}} \quad (1.5)$$

e

$$\gamma_{min} = \sqrt{1 + \beta_{app}^2} \quad (1.6)$$

Outro fator importante é o fator Doppler definido como:

$$\delta(\theta, \gamma) = \gamma^{-1}(1 - \beta \cos \theta)^{-1} \quad (1.7)$$

Usando a expressão 1.6, podemos obter uma nova expressão para a equação 1.4 dada por

$$\beta_{app} = \beta \gamma \delta \sin \theta \quad (1.8)$$

Se uma componente do jato está se movendo com velocidade relativísticas, podemos considerar também outro efeito relativístico. A mudança de frequência dos fótons é dada por

$$\nu = \frac{1}{\Delta t_A} = \frac{\nu'}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)} = \nu' \delta \quad (1.9)$$

onde ν é a frequência observada e ν' é a frequência emitida na fonte. Pode-se mostrar que S_ν/ν^3 é um invariante sob transformação de Lorentz, onde S_ν é a densidade de fluxo.

Portanto, a intensidade observada de uma componente em movimento é

$$\frac{S(\nu_{obs})}{\nu_{obs}^3} = \frac{S(\nu')}{\nu'^3} \quad (1.10)$$

e

$$S(\nu_{obs}) = \nu_{obs}^3 \frac{S(\nu')}{\nu'^3} \quad (1.11)$$

Especificamente para uma componente com espectro em lei de potência ($S(\nu) = A\nu^\alpha$)

$$S(\nu_{obs}) = \delta^3 A \nu_{em}^\alpha = \delta^3 A \delta^{-\alpha} \nu_{obs}^\alpha \quad (1.12)$$

Então

$$S(\nu_{obs}) = \delta^{3-\alpha} S(\nu') \quad (1.13)$$

Para uma fonte emitindo componentes simetricamente nas duas direções, da equação de fluxo temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1 + \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^{3-\alpha} \quad (1.14)$$

onde S_1 e S_2 são os fluxos emitidos pelo jato e contra-jato. Até mesmo para jatos moderadamente relativísticos e grandes ângulos, características nos lados se aproximando são significativamente mais brilhantes do que do lado recendente.

Jatos podem ser expressos como uma série de componentes mas o número de componentes observadas escala com o fator Doppler de modo que para jatos (Scheuer & Readhead 1979)

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1 + \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right)^{2-\alpha} \quad (1.15)$$

Para velocidades relativísticas de $0.97c$, ($\gamma \sim 4$) por exemplo, o fluxo na direção do observador, com uma ângulo aproximado de 30° e $\alpha = 0.5$, é amplificado por um fator 1000. Isto explica por exemplo, porque não observamos contra-jatos em quasares.

Discos de acreção planos

Como mencionamos no capítulo anterior, discos de acreção estão presentes em AGNs. Há vários tipos de discos de acreção, e.g. discos finos (Novikov & Thorne 1973, Shakura & Sunyaev 1973), discos espessos (Frank, King & Raine 1992), fluxos de acreção dominados por advecção (ADAFs, Narayan & Yi 1995), discos finos radiativamente ineficientes (slim disks, Abramowics 1983), etc. Neste capítulo discutiremos apenas discos finos e espessos que foram estudados neste projeto e no próximo capítulo discutiremos o caso em que o momento angular dos discos de acreção não é coplanar com o momento angular do buraco negro.

Os primeiros modelos de disco de acreção foram derivados na década de 1940 por Weizsäcker (1948). Desde que o momento angular total deve ser conservado, a perda do momento angular do material caindo no objeto central tem de ser compensada pelo ganho de momento angular da massa distante do centro. Com o objetivo de reproduzir as observações, estes modelos invocaram mecanismos desconhecidos para redistribuição do momento angular. Estes mecanismos serão melhores discutidos nas próximas seções.

Antes de introduzir a física e as equações dos discos de acreção, devemos falar sobre algumas quantidades relevantes que devem ser reproduzidas por todos os modelos.

Uma das características mais importantes é a luminosidade de Eddington L_{Edd} , que está associada com acreção esférica. Fótons que são irradiados durante a acreção produzem uma pressão para fora nos elétrons devido ao espalhamento Compton, enquanto que a gravidade produz uma força dirigida na direção do centro nos prótons. Quando a luminosidade do objeto aumenta, a pressão de radiação nos elétrons aumenta de forma que a força Coulombiana resultante nos pares elétron-próton age para fora impedindo a acreção. Este processo reduz a luminosidade até que as forças alcançam o equilíbrio e a

luminosidade, chamada de Eddington, L_{Edd} , quando isto ocorre é a luminosidade máxima permitida. Para uma acreção simetricamente esférica com espalhamento Thomson, esta luminosidade é dada por

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \simeq 1.3 \times 10^{46} \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right) \text{ergs}^{-1} \quad (2.1)$$

onde M é a massa do objeto que está acretando.

Há várias quantidades que estão associadas com esta luminosidade como a taxa de acreção de Eddington e o tempo de Eddington por exemplo.

A taxa de acreção é dada por

$$\dot{M} = \frac{L}{\epsilon c^2} \quad (2.2)$$

onde L é a luminosidade e ϵ a eficiência da acreção. Assumindo neste caso que a eficiência é unitária temos:

$$\dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{c^2} = 0.23 \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right) M_\odot \text{yr}^{-1}. \quad (2.3)$$

Usando a equação 2.1 obtemos

$$\dot{M}_{Edd} = \left(\frac{4\pi G m_p}{c \sigma_T} \right) M = \frac{M}{t_{Edd}} \quad (2.4)$$

onde o tempo de Eddington t_{Edd} é definido como o tempo que um corpo de massa M leva para irradiar toda sua massa de repouso na taxa de Eddington:

$$t_{Edd} = \frac{M}{\dot{M}_{Edd}} = 4 \times 10^8 \text{yr}. \quad (2.5)$$

Neste capítulo apresentaremos a teoria de discos de acreção planos finos descrevendo os modelos de discos finos de Shakura & Sunyaev (1973), a sua versão relativística desenvolvida por Novikov & Thorne (1973), o modelo de Novikov & Thorne modificado, discos espessos, discos de acreção dominados por advecção (ADAFs) e os discos de duas componentes que são compostos por um ADAF na parte interna e um disco fino na parte externa.

2.1 Modelo Shakura-Sunyaev, SS73

SS73 desenvolveram uma teoria Newtoniana para estudarem fluxos de acreção em objetos compactos como por exemplo os compostos de uma estrela e um objeto central como um buraco negro.

Consideremos um disco ao redor de um buraco negro e a existência de um mecanismo de transporte de momento angular. Neste modelo, seria necessário levar em conta os efeitos da relatividade geral apenas na região $R \sim R_S$, onde $R_S = 2GM_{BH}/c^2$ é o raio de Schwarzschild. Próximo ao buraco negro em $R < 3R_S$, órbitas circulares estáveis não são possíveis e o movimento adquire uma característica radial sem transporte de momento angular. Na última órbita estável (chamada de ISCO) a energia de ligação que é liberada, é dada por $0.057m_0c^2$, onde m_0 é a massa da partícula em repouso (Bardeen, Press, Teukolsky 1972). Energia é também radiada pela matéria movendo numa região com $R_S < R < 3R_S$ mas a contribuição desta região para a luminosidade do disco não altera apreciavelmente a estimativa da energia liberada. O raio $R_0 = 3R_S$ deve ser assumido como fronteira interna do disco porque para $R < R_0$ a matéria cai sem qualquer efeito observável.

2.1.1 Mecanismo de transporte de momento angular

Num meio rotacionando diferencialmente o mecanismos de transporte de momento angular é o stress tangencial entre as camadas adjacentes que estão conectadas por campos magnéticos, turbulência e viscosidade molecular e radiativa. No caso de interesse, o papel da viscosidade molecular é desprezível.

Existem também campos magnéticos presentes no disco de acreção. Eles também devem existir na matéria fluindo do disco e então acretar no buraco negro. Dependendo das condições iniciais, o método de compressão da matéria e do grau de ordenamento do campo magnético, a energia do último pode ser menor do que a energia térmica da matéria e da radiação dadas por

$$\varepsilon = 3\rho \frac{kT}{m_p} + bT^4 = \rho \frac{c_s^2}{2} \quad (2.6)$$

tão bem como pode exceder-la, atingindo um valor $H^2/8\pi \sim \rho(GM)/R$. Neste último caso, o stress

$$w_{R\varphi} = \frac{|H_R \times H_\varphi|}{8\pi} \quad (2.7)$$

e a eficiência de transporte de momento angular é tão alta que acreção radial irá ocorrer.

O campo magnético no gás fluindo no disco pode ter uma estrutura regular em distâncias comparáveis ao raio externo do disco. Mas como sempre $\text{div} \mathbf{H} = 0$, a componente radial do campo magnético deve ter sinais alternantes. Se isso ocorre, então a rotação diferencial rapidamente conduzirá a divisão do loop magnético em loops menores. Então dentro do disco, o campo é provavelmente caótico e de pequena escala. Neste caso, por causa das instabilidades de plasma, reconecção do campo magnético em regiões de polaridades opostas, a energia do campo magnético do disco não pode exceder a energia térmica da matéria, caracterizada pela velocidade do som c_s , ou seja:

$$\frac{H^2}{8\pi} < \rho \frac{c_s^2}{2} \quad (2.8)$$

e

$$w_{R\varphi} \sim -\rho c_s^2 \left(\frac{H^2}{4\pi \rho c_s^2} \right) \quad (2.9)$$

Num meio rotacionando diferencialmente com uma distribuição de momento angular que aumenta com o raio, a matéria é estável com respeito a deslocamentos pequenos preservando o momento angular. Mas a teoria de pequenas perturbações, sendo linear, pode dar apenas a condição de perda de estabilidade do fluxo laminar.

Em escalas comparáveis com o raio R , a turbulência é homogênea e isotrópica. Para descrever os movimentos médios na presença de tal turbulência pode-se utilizar a fórmula obtida para fluxos laminares substituindo a viscosidade molecular pela turbulenta $\eta_t = \rho c_s l$, onde l é o tamanho da camada. Para o stress tangencial temos

$$w_{r\phi} = \eta_t R \frac{d\omega}{dR} \sim \eta_t \frac{v_\varphi}{R} \sim -\rho c_s^2 \frac{v_t}{c_s} \quad (2.10)$$

onde a espessura do disco $z_0 \sim R c_s / v_\phi$. Aqui, v_t é a velocidade turbulenta e v_ϕ é a velocidade circular Kepleriana. Então a eficiência dos dois mecanismos mais importantes de transporte de momento angular conectados com o campo magnético e turbulência pode ser caracterizado por apenas um parâmetro, α_1 :

$$-w_{R\varphi} \sim \rho c_s^2 \left(\frac{v_t}{c_s} \right) + \rho c_s^2 \left(\frac{H^2}{4\pi \rho c_s^2} \right) = \alpha_1 \rho c_s^2 \quad (2.11)$$

No caso de um mecanismo turbulento $\alpha_1 < 1$. Se $\alpha_1 > 1$ a turbulência deve ser supersônica e conduz a um aquecimento rápido do plasma que faz diminuir o valor para $\alpha_1 \leq 1$. Em adição, o parâmetro α_1 pode (e deve) ser uma função do raio do disco, mas é considerado constante.

2.1.2 Estrutura do disco

Em primeira aproximação, a matéria no disco pode rotacionar em órbitas keplerianas circulares, com velocidade

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \sqrt{\frac{GM}{R}} \\ \omega &= \sqrt{GM/R^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

A fricção entre as camadas adjacentes, conectadas com a existência de turbulência no disco e campos magnéticos caóticos de pequena escala, conduzem a perda de momento angular das partículas. Uma componente radial de velocidade aparece e a partícula descreve uma órbita espiral até o buraco negro

$$u_o R^2 \frac{d\omega}{dt} = -u_o v_R \frac{d\omega R^2}{dR} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} W_{R\varphi} R^2 \quad (2.13)$$

Aqui $u_o = 2 \int_0^\infty \rho dz$ é a densidade superficial de matéria no disco, $W_{r\varphi}$ é o stress entre camadas adjacentes. De acordo com 2.11

$$W_{R\varphi} = 2 \int_0^\infty w_{R\varphi} dz = -\alpha_1 u_o c_s^2 \quad (2.14)$$

Na configuração estacionária, $v_R < 0$ e $\dot{M} = 2\pi u_o v_R R = \text{constante}$. Integrando 2.13 obtemos

$$\dot{M} \omega R^2 = -2\pi W_{R\varphi} R^2 + C \quad (2.15)$$

Praticamente todo o momento angular é transportado para fora e apenas uma pequena parte $\sim \sqrt{3R_S/R_{out}}$ do momento angular cai junto com a matéria no buraco negro (R_{out} é o raio do disco). A constante em 2.15 é determinada pela condição que $W_{R\varphi}=0$ na ISCO.

Para descrever a perda de estabilidade da matéria na ISCO, deve-se desenvolver a teoria relativística que será apresentada na próxima seção.

No caso de um buraco negro sem rotação, a constante em 2.15 é igual a $C = \dot{M}\omega(R_0)R_0^2$ e

$$\dot{M}\omega \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \right] = 2\pi\alpha_1 u_0 c_s^2 \quad (2.16)$$

Na direção perpendicular ao plano do disco a componente normal da força gravitacional do buraco negro é balanceada pela soma dos gradientes das pressões do gás, magnética e de radiação. A equação do equilíbrio hidrostático fornece a espessura do disco

$$z_0 = \frac{c_s}{v_\phi} R \quad (2.17)$$

Ao perder seu momento angular as partículas também perdem energia gravitacional. Parte da energia gravitacional aumenta a energia cinética de rotação e a outra parte é convertida em energia térmica que pode ser radiada da superfície do disco. As forças conduzindo a transferencia de momento angular num sistema em rotação estão também induzindo o fluxo de energia igual a $-2\pi W_{R\phi} R^2 \omega$. No movimento Kepleriano com ω aumentando para raios menores e $W_{R\phi} < 0$, o fluxo de energia está direcionado para fora. A taxa de dissipação de energia num anel entre R_2 e R_3 tem um termo igual ao divergente deste fluxo de energia. Coletando todos os termos, obtém-se o fluxo de energia radiado da superfície do disco por unidade de tempo

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} W_{R\phi} R \frac{d\omega}{dR} = \frac{1}{4\pi R} \frac{d}{dR} \left[\dot{M} \left(\frac{v_\phi^2}{2} - \frac{GM}{R} \right) - 2\pi R^2 W_{R\phi} \omega \right] \\ &= \frac{3}{8\pi} \dot{M} \frac{GM}{R^3} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em $R \gg R_0$, o fluxo de energia é igual a $(3/8\pi)(GM/R^3)\dot{M}$ e a energia liberada entre os raios R_2 e R_3 é igual a

$$L = 4\pi \int Q R dR = \frac{3}{2} \dot{M} G M \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \quad (2.19)$$

Este valor é três vezes maior a energia gravitacional liberada na mesma região. Ao contrário, em $R - R_0 \ll R$ o fluxo de energia decresce, indo a zero próximo da ISCO.

O máximo de $Q(R)$ ocorre em $R=1.36R_0$. A principal contribuição para a luminosidade do disco $L(R_0)$ vem da região com $R=2.25R_0$, onde $Q(R)R^2$ tem seu valor máximo. Neste dado fluxo Q , a densidade de energia da radiação dentro da camada com densidade superficial u_0 é determinada pela relação

$$\epsilon = \frac{3}{4} \frac{Q}{\epsilon} \sigma u_0 = \frac{9}{32\pi} \dot{M} \frac{GM}{R^3} \frac{\sigma u_0}{\epsilon} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \right] \quad (2.20)$$

onde σ é a opacidade da matéria. Nas condições consideradas, a principal contribuição para a opacidade vem do espalhamento Thomson em elétrons livres com secção transversal $\sigma_T=6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ e absorção livre-livre para a qual $\sigma_{ff}=0.11T^{-7/2} \text{ncm}^2/g$. Dentro do disco, que é opticamente espesso com respeito a absorção, $\tau = \sigma_{ff}u_0$, ou $\tau^* = \sqrt{\sigma_T \sigma_{ff}}u_0$ se $\sigma_T > \sigma_{ff}$ existe equilíbrio termodinâmico local e a densidade de energia da radiação é igual a $\epsilon = bT^4$. A equação dinâmica 2.16 e a equação de balanço de energia 2.20 formam um sistema fechado de equações. Ao resolve-las, encontramos a distribuição da densidade superficial da matéria $u_0(R)$ e a temperatura $T(R)$ num raio R do disco como função do fluxo de massa $\dot{M}$, a massa do buraco negro M e a eficiência α_1 do mecanismo de transporte de momento angular.

No caso geral de buracos negros em rotação a energia gravitacional liberada é transferida mecanicamente da região relativística $1/2R_S < R < 3R_S$ para a não relativística $R > 3R_S$ e dissipada lá. Alterando o valor da constante em 2.15 pode-se levar em conta esta contribuição para Q em $R > 3R_S$. De acordo com 2.18 no caso de um buraco negro sem rotação o fluxo de energia da superfície aumenta com a aproximação ao buraco negro, alcançando o máximo em $R < 1.36R_0$. Portanto consideraremos esta região apenas esquematicamente.

O disco pode ser considerado como sendo composto de um número de partes distintas:

- (a) A pressão de radiação é dominante e $c_s^2 = \epsilon/3\rho$. Na interação da matéria e radiação o espalhamento de elétrons possui o papel principal.
- (b) a pressão é determinada pela pressão do gás e $c_s^2 = kT/m_p$. O espalhamento de elétrons ainda é o responsável pela contribuição principal da opacidade.
- (c) a velocidade do som é dada por $c_s^2 = kT/m_p$ e a opacidade é determinada pela absorção livre-livre e outros mecanismos.

É conveniente introduzir parametros adimensionais: $m = M/M_\odot$, $\dot{m} = \dot{M}/\dot{M}_{cr} = \dot{M}/(3 \times 10^{-8} M_\odot/\text{ano}) \times (M_\odot/M)$, $r = R/(3R_S) = (1/6)(Rc^2)/(GM) = (M_\odot/M)(R/9km)$.

Consideremos a região a) $P_r \gg P_g$, $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$. A espessura do disco, correspondendo a 2.17 e 2.20 é

$$z_0[cm] = \frac{3}{8\pi} \frac{\sigma_T}{\varepsilon} \dot{M} (1 - r^{-1/2}) = 3.2 \times 10^6 \dot{m} m (1 - r^{-1/2}), \quad (2.21)$$

i.e. na região em $r \gg 1$ o disco tem uma espessura constante com o raio cujo valor depende apenas do fluxo de matéria acretando. Substituindo $c_s^2 = \varepsilon/3\rho$ em 2.16 e tendo em mente que $u_0 = 2\rho_0 z_0$, obtemos de 2.16 e 2.20

$$u_0[g/cm^2] = \frac{64\pi}{9\alpha_1} \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \frac{1}{\omega \dot{M} (1 - r^{-1/2})} = 4.6 \alpha_1^{-1} \dot{m}^{-1} r^{3/2} (1 - r^{-1/2})^{-1} \quad (2.22)$$

$$\varepsilon[erg/cm^3] = \frac{2c}{\sigma} \omega = 2.1 \times 10^{15} \alpha_1^{-1} \dot{m}^{-1} r^{-3/2} \quad (2.23)$$

$$n[cm^{-3}] = \frac{u_0}{2m_p z_0} = 4.3 \times 10^{17} \alpha_1^{-1} \dot{m}^{-2} m^{-1} r^{3/2} (1 - r^{-1/2})^{-2} \quad (2.24)$$

$$v_R[cm/s] = \frac{\dot{M}}{2\pi u_0 R} = 7.7 \times 10^{10} \alpha_1 \dot{m}^2 r^{-5/2} (1 - r^{-1/2}) \quad (2.25)$$

$$H[Gauss] \leq \sqrt{\frac{4\pi}{3} \alpha_1 \varepsilon} = 10^6 \dot{m}^{-1/2} r^{-3/4} \quad (2.26)$$

Assumindo que o disco é opticamente espesso com relação a absorção, i.e. $\varepsilon = bT^4$, encontramos a partir da equação 2.23 a temperatura do plasma e da radiação dentro do disco

$$T = 2.3 \times 10^7 (\alpha_1 \dot{m})^{-1/4} r^{-3/4} K \quad (2.27)$$

Correlações similares a 2.21-2.30 podem ser obtidas para as partes remanescentes do disco.

Região b) $P_g \gg P_r$, $\sigma_T \gg \sigma_{ff}$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1.7 \times 10^5 \alpha_1^{-4/5} \dot{m}^{3/5} m^{1/5} r^{-3/5} (1 - r^{-1/2})^{3/5} \\
 T &= 3.1 \times 10^8 \alpha_1^{-1/5} \dot{m}^{2/5} m^{-1/5} r^{-9/10} (1 - r^{-1/2})^{2/5} \\
 z_0 &= 1.2 \times 10^4 \alpha_1^{-1/10} \dot{m}^{1/5} m^{9/10} r^{21/20} (1 - r^{-1/2})^{1/5} \\
 n &= 4.2 \times 10^{24} \alpha_1^{-7/10} \dot{m}^{2/5} m^{-7/10} r^{-33/20} (1 - r^{-1/2})^{2/5} \\
 \tau^* &= \sqrt{\sigma_{ff} \sigma_T} u_0 = 10^2 \alpha_1^{-4/5} \dot{m}^{9/10} m^{1/5} r^{3/20} (1 - r^{-1/2})^{9/10} \\
 v_R &= 2 \times 10^6 \alpha_1^{4/5} \dot{m}^{2/5} m^{-1/5} r^{-2/5} (1 - r^{-1/2})^{-3/5} \\
 H &\leq 1.5 \times 10^9 \alpha_1^{1/20} \dot{m}^{2/5} m^{-9/20} r^{-51/40} (1 - r^{-1/2})^{2/5}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

A fronteira entre as regiões a) e b) cai no raio

$$\frac{r_{ab}}{(1 - r_{ab}^{-1/2})^{16/21}} = 150 (\alpha_1 m)^{2/21} \dot{m}^{16/21} \tag{2.29}$$

Da condição 2.29, encontramos que a região a) do disco existe apenas se

$$\dot{m} \geq \frac{1}{170} (\alpha_1 m)^{-1/8} \tag{2.30}$$

Região c) $P_g \gg P_r$, $\sigma_T \ll \sigma_{ff}$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 6.1 \times 10^5 \alpha_1^{-4/5} \dot{m}^{7/10} m^{1/5} r^{-3/4} (1 - r^{-1/2})^{7/10} \\
 T &= 8.6 \times 10^7 \alpha_1^{-1/5} \dot{m}^{3/10} m^{-1/5} r^{-3/4} (1 - r^{-1/2})^{3/10} \\
 z_0 &= 6.1 \times 10^3 \alpha_1^{-1/10} \dot{m}^{3/20} m^{9/10} r^{9/8} (1 - r^{-1/2})^{3/20} \\
 n &= 3.0 \times 10^{25} \alpha_1^{-7/10} \dot{m}^{11/20} m^{-7/10} r^{-15/8} (1 - r^{-1/2})^{11/20} \\
 \tau^* &= \sigma_{ff} u_0 = 3.4 \times 10^2 \alpha_1^{-4/5} \dot{m}^{1/5} m^{1/5} (1 - r^{-1/2})^{2/5} \\
 v_R &= 5.8 \times 10^5 \alpha_1^{4/5} \dot{m}^{3/10} m^{-1/5} r^{-1/4} (1 - r^{-1/2})^{-7/10} \\
 H &\leq 2.1 \times 10^9 \alpha_1^{1/20} \dot{m}^{17/40} m^{-9/20} r^{-21/16} (1 - r^{-1/2})^{17/40}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

A fronteira entre as regiões b) e c) cai no raio

$$r_{bc} = 6.3 \times 10^3 \dot{m}^{2/3} (1 - r_{bc}^{-1/2})^{2/3} \tag{2.32}$$

Analisando as fórmulas obtidas acima, notamos a fraca dependencia da espessura do disco na eficiência α_1 do mecanismo de transporte de momento angular. Quando α_1 diminui, a densidade superficial do disco aumenta rapidamente e a velocidade radial do movimento decresce, mas a espessura cresce como $\alpha_1^{-1/10}$ e é comparável com o raio apenas se $\alpha_1 \sim 10^{-15} \dot{m}^2$. A acreção do disco ocorre quando a turbulência é suficientemente fraca ou para valores pequenos do campo magnético.

2.2 Modelo Novikov-Thorne

Novikov & Thorne (1973) generalizaram o modelo Shakura & Sunyaev (1973) desenvolvendo sua versão relativística.

Antes de examinar em detalhes a estrutura do disco de acreção, deve-se estender as equações de estrutura da teoria Newtoniana para a da relatividade geral. Nesta aproximação, assumi-se que a geometria do espaço-tempo é a da métrica de Kerr (que será melhor discutida no capítulo 4) e assumiremos que o disco se encontra no plano equatorial da métrica de Kerr.

Para tratar a estrutura do disco precisaremos de algumas propriedades de órbitas circulares no plano equatorial da métrica de Kerr. Muitas das equações que serão apresentadas podem ser encontradas em Bardeen, Press & Teukolsky (1972) ou Bardeen (1973).

Para simplificar, separa-se as equações no limite Newtoniano mais correções relativísticas. Para isto devemos introduzir os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{a_*^2}{r_*^2} + 2\frac{a_*^2}{r_*^3} \\
B &= 1 + \frac{a_*}{r_*^{3/2}} \\
C &= 1 - \frac{3}{r_*} + 2\frac{a_*}{r_*^{3/2}} \\
D &= 1 - \frac{2}{r_*} + \frac{a_*^2}{r_*^2} \\
E &= 1 + 4\frac{4a_*^2}{r_*^2} - 4\frac{4a_*^2}{r_*^3} + 3\frac{a_*^4}{r_*^4} \\
F &= 1 - 2\frac{a_*}{r_*^{3/2}} + \frac{a_*^2}{r_*^2} \\
G &= 1 - \frac{2}{r_*} + \frac{a_*}{r_*^{3/2}} \\
H &= \exp \left[-\frac{3}{2} \int_{r_*}^{\infty} B^{-1} C^{-1} F r_*^{-2} dr_* \right] \\
L &= \frac{\tilde{L} - \tilde{L}_{ms}}{(Mr)^{1/2}} = \frac{F}{C^{1/2}} - \frac{\tilde{L}_{ms}}{(Mr)^{1/2}} \\
L &= G - \frac{3}{2r_*^{1/2}} F \int_{r_{ms_*}}^{r_*} \frac{FG dr_*}{BC^{-1} F r_*^{3/2}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Aqui M e a são a massa e momento angular específico do buraco negro, r é o raio e r_* e a_* são parâmetros adimensionais de r e a dados por: $r_* = r/M$ e $a_* = a/M$. $\tilde{L}_{ms}$ é $\tilde{L}$ na ISCO que é constante e $\tilde{L}$ é uma função de r . $\tilde{L}$ é o momento angular por unidade de massa para uma órbita circular é dado por

$$\tilde{L} = u_\phi = M^{1/2} r^{1/2} \frac{F}{C^{1/2}} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{M^{1/2}}{r^{3/2}} \frac{1}{B} \\
\omega &= \left(\frac{2Ma}{r^3} \right) A^{-1} \\
\gamma &= \frac{B D^{1/2}}{A C^{1/2}} \\
V_{(\phi)} &= \frac{M^{1/2}}{r^{1/2}} \frac{F}{D^{1/2} B}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

O raio da ISCO é dado por:

$$\begin{aligned}
r_{ms}^2 - 6Mr_{ms} + 8aM^{1/2}r_{ms}^{1/2} - 3a^2 &= 0 \\
r_{ms} &= M[3 + Z_2 - [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2}] \\
Z_1 &= 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3}[(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3}] \\
Z_2 &= (3a^2/M^2 + Z_1^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

O momento angular por unidade de massa na ISCO é dado por

$$\tilde{L}_{ms} = \frac{2M}{\sqrt{3x}}(3x - 2a) \tag{2.37}$$

onde $x = M^{1/2}r_{ms}^{1/2}$.

2.2.1 Modelo para o disco

Combinando as equações da estrutura vertical com as da estrutura radial pode-se obter expressões relativísticas para o disco. Neste caso, a taxa de acreção, massa e o raio serão expressos nas unidades:

$$\begin{aligned}
M_* &= \frac{M}{3M_\odot} \\
\dot{M}_{0*} &= \frac{\dot{M}_0}{10^{17}} gsec^{-1} \\
r_* &= \frac{r}{M} = \frac{r}{4.4 \times 10^5 cm} M_*^{-1}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Em adição, para as quantidades que aparecem na equação de estrutura deve-se calcular a profundidade óptica no centro do disco

$$\tau = \bar{\kappa}\Sigma, \tag{2.39}$$

um limite aproximado para a força do campo magnético caótico

$$B \leq \sqrt{8\pi\alpha_1 p}, \tag{2.40}$$

e a escala de tempo característica para o gás se mover de um raio r até uma parte interna do disco

$$\Delta t(r) = -\frac{r}{\tilde{v}r} \quad (2.41)$$

O disco pode ser dividido em três regiões do mesmo modo que no modelo SS73.

(a) Parte interna: $p = p^{rad}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$

$$F = (0.6 \times 10^{26} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec})(M_*^{-2} \dot{M}_{0*}) r_*^{-3} B^{-1} C^{-1/2} L \quad (2.42)$$

$$\Sigma = (20 \text{ g/cm}^2)(\alpha_1^{-1} M_* \dot{M}_{0*}^{-1}) r_*^{3/2} A^{-2} B^3 C^{1/2} E L^{-1} \quad (2.43)$$

$$h = (1 \times 10^5 \text{ cm})(M_*) r_*^{21/10} A^2 B^{-3} C^{1/2} D^{-1} E^{-1} L \quad (2.44)$$

$$\rho_0 = (1 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3)(\alpha_1^{-1} M_* \dot{M}_{0*}^{-2}) r_*^{3/2} A^{-4} B^6 D E^2 L^{-2} \quad (2.45)$$

$$T = (4 \times 10^7 \text{ K})(\alpha_1^{-1/4} M_*^{-1/4}) r_*^{-3/8} A^{-1/2} B^{1/2} E^{1/4} \quad (2.46)$$

$$\tau_{es} = 8(\alpha_1^{-1} M_* \dot{M}_{0*}^{-1}) r_*^{3/2} A^{-2} B^3 C^{1/2} E L^{-1} \quad (2.47)$$

$$B \leq (7 \times 10^7 \text{ G})(M_*^{-1/2}) r_*^{-3/4} A^{-1} B E^{1/2} \quad (2.48)$$

$$\left(\frac{p^{(gas)}}{p^{(mag)}} \right) = (5 \times 10^{-5})(\alpha_1^{-1/4} M_*^{7/4} \dot{M}_{0*}^{-2}) r_*^{21/8} A^{-5/2} B^{9/2} D E^{5/4} L^{-2} \quad (2.49)$$

$$\tau^* = (\tau_{ff} \tau_{es})^{1/2} = (2 \times 10^{-3})(\alpha_1^{-17/16} M_*^{31/16} \dot{M}_{0*}^{-2}) r_*^{93/32} A^{-25/8} B^{41/8} C^{1/2} D^{1/2} E^{25/16} L^{-2} \quad (2.50)$$

$$\Delta t(t) = (2 \times 10^{-4} \text{ sec})(\alpha_1^{-1} M_*^3 \dot{M}_{0*}^{-2}) r_*^{7/2} A^{-2} B^3 C^{1/2} D^{1/2} E L^{-1} \quad (2.51)$$

A transição da região do meio para a região interna ocorre onde $p^{gas}/p^{rad} \sim 1$, isto é, em

$$r_* = 40(\alpha_1^{2/21} M_*^{-2/3} \dot{M}_{0*}^{16/20}) A^{20/21} B^{-36/21} D^{-8/21} E^{-10/21} L^{16/21} \quad (2.52)$$

(b) Região do meio: $p = p^{gas}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$

$$F = (0.6 \times 10^{26} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec})(M_*^{-2} \dot{M}_{0*}) r_*^{-3} B^{-1} C^{-1/2} L \quad (2.53)$$

$$\Sigma = (5 \times 10^4 \text{ g/cm}^2)(\alpha_1^{4/5} M_*^{-2/5} \dot{M}_{0*}^{3/5}) r_*^{-3/5} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-4/5} L^{7/10} \quad (2.54)$$

$$h = (3 \times 10^3 \text{ cm})(\alpha_1^{-1/10} M_*^{7/10} \dot{M}_{0*}^{1/5}) r_*^{21/10} A B^{-6/5} C^{1/2} D^{-3/5} E^{-1/2} L^{1/5} \quad (2.55)$$

$$\rho_0 = (10 \text{ g/cm}^3)(\alpha_1^{-7/10} M_*^{-11/10} \dot{M}_{0*}^{2/5}) r_*^{-33/20} A^{-1} B^{3/5} D^{-1/5} E^{1/2} L^{2/5} \quad (2.56)$$

$$T = (3 \times 10^8 \text{ K})(\alpha_1^{-1/5} M_*^{3/5} \dot{M}_{0*}^{2/5}) r_*^{-9/10} B^{-2/5} D^{-1/5} L^{2/5} \quad (2.57)$$

$$\tau_{es} = (2 \times 10^4)(\alpha_1^{-4/5} M_*^{-2/5} \dot{M}_{0*}^{3/5}) r_*^{-3/5} B^{-3/5} C^{1/2} D^{-4/5} L^{3/5} \quad (2.58)$$

$$B \leq (1 \times 10^9 \text{ G})(\alpha_1^{1/20} M_*^{-17/20} \dot{M}_{0*}^{2/5}) r_*^{-51/40} A^{-1/2} B^{1/10} D^{-1/5} E^{1/4} L^{2/5} \quad (2.59)$$

$$\left(\frac{p^{(gas)}}{p^{(mag)}} \right) = 0.02(\alpha_1^{-1/10} M_*^{7/10} \dot{M}_{0*}^{-4/5}) r_*^{21/10} A^{-1} B^{9/5} D^{2/5} E^{1/2} L^{-4/5} \quad (2.60)$$

$$\left(\frac{\tau_{ff}}{\tau_{es}} \right) = 0.6 \times 10^{-5} (M_* \dot{M}_{0*}^{-1}) r_*^{3/2} A^{-1} B^2 D^{1/2} E^{1/2} L^{-1} \quad (2.61)$$

$$\tau^* = (\tau_{ff} \tau_{es})^{1/2} = 50(\alpha_1^{4/5} M_*^{-9/10} \dot{M}_{0*}^{1/10}) r_*^{3/20} A^{-1/2} B^{2/5} C^{1/2} D^{-11/20} E^{1/4} D^{1/10} \quad (2.62)$$

$$\Delta t(t) = (0.7 \text{sec}) (\alpha_1^{-4/5} M_*^{8/5} \dot{M}_{0*}^{-2/5}) r_*^{7/5} B^{-4/5} C^{-1/2} D^{-3/10} L^{3/5} \quad (2.63)$$

A transição para a região do meio ocorre onde $\tau_{ff}/\tau_{es} \sim 1$, isto é, em

$$r_* = r_{0m*} = 2 \times 10^3 (M_*^{-2/3} \dot{M}_{0*}^{2/3}) A^{2/3} B^{-8/15} D^{-1/3} E^{-1/3} L^{2/3} \quad (2.64)$$

(c) Região externa: $p = p^{gas}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ff}$

$$F = (0.6 \times 10^{26} \text{erg/cm}^2 \text{sec}) (M_*^{-2} \dot{M}_{0*}) r_*^{-3} B^{-1} C^{-1/2} L \quad (2.65)$$

$$\Sigma = (2 \times 10^5 \text{g/cm}^2) (\alpha_1^{4/5} M_*^{-1/2} \dot{M}_{0*}^{7/10}) r_*^{-3/4} A^{1/10} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-17/20} E^{-1/20} L^{7/10} \quad (2.66)$$

$$h = (9 \times 10^2 \text{cm}) (\alpha_1^{-1/10} M_*^{3/4} \dot{M}_{0*}^{3/20}) r_*^{9/8} A^{19/20} B^{-11/10} C^{1/2} D^{-23/40} E^{-19/40} L^{3/20} \quad (2.67)$$

$$\rho_0 = (8 \times 10^1 \text{g/cm}^3) (\alpha_1^{-7/10} M_*^{-5/4} \dot{M}_{0*}^{11/20}) r_*^{-15/8} A^{-17/20} B^{3/10} D^{-11/40} E^{17/40} L^{11/20} \quad (2.68)$$

$$T = (8 \times 10^7 \text{K}) (\alpha_1^{-1/5} M_*^{1/2} \dot{M}_{0*}^{3/10}) r_*^{-3/4} A^{-1/10} B^{-1/5} D^{-3/20} E^{1/20} L^{3/10} \quad (2.69)$$

$$\tau_{ff} = (2 \times 10^2) (\alpha_1^{-4/5} \dot{M}_{0*}^{1/5}) A^{-2/5} B^{1/5} C^{1/2} D^{-3/5} E^{1/5} L^{1/5} \quad (2.70)$$

$$B \leq (7 \times 10^8 \text{G}) (\alpha_1^{1/20} M_*^{-7/8} \dot{M}_{0*}^{17/40}) r_*^{-21/16} A^{-19/40} B^{1/20} D^{-17/80} E^{19/80} L^{17/40} \quad (2.71)$$

$$\left(\frac{p^{(gas)}}{p^{(mag)}} \right) = 4 (\alpha_1^{-1/10} M_*^{1/4} \dot{M}_{0*}^{-7/20}) r_*^{3/8} A^{-11/20} B^{9/10} D^{7/40} E^{11/40} L^{-7/20} \quad (2.72)$$

$$\left(\frac{\tau_{ff}}{\tau_{es}}\right) = 3 \times 10^{-3} (M_*^{1/2} \dot{M}_{0*}^{-1/2}) r_*^{3/4} A^{-1/2} B^{2/5} D^{1/4} E^{1/4} L^{-1/2} \quad (2.73)$$

$$\Delta t(t) = (2sec)(\alpha_1^{-4/5} M_*^{3/2} \dot{M}_{0*}^{-3/10}) r_*^{5/4} A^{1/10} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-7/20} E^{-1/20} L^{7/10} \quad (2.74)$$

É importante notar que a correção relativística L vai a zero suavemente até a borda interna do disco

$$L \rightarrow 0, \quad l_r \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow r_{ms} \quad (2.75)$$

Com isto, temos as expressões para a estrutura do disco relativística.

Page & Thorne (1974) estenderam o modelo NT73 obtendo expressões para outras variáveis dinâmicas como, energia, momento angular e velocidade radial. Definimos as variáveis:

$$x = \sqrt{r/M} \quad (2.76)$$

$$x_0 = \sqrt{r_{ms}/M} \quad (2.77)$$

x_1 , x_2 e x_3 como sendo as raízes de

$$x^3 - 3x + 2a_* = 0 \quad (2.78)$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} a_* - \frac{\pi}{3} \right) \\ x_2 &= 2 \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} a_* + \frac{\pi}{3} \right) \\ x_3 &= -2 \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} a_* \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{3}{2M} \frac{1}{x^2(x^3 - 3x + 2a_*)} \left[x - x_0 - \frac{3}{2}a_* \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) - Q_a - Q_b - Q_c \right] \\
Q_a &= \frac{3(x_1 - a_*)^2}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \\
Q_b &= \frac{3(x_2 - a_*)^2}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_3} \right) \\
Q_c &= \frac{3(x_0 - a_*)^2}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \ln \left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_2} \right) \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Com isto o momento angular específico é dado por

$$L^* = MxC^{-1/2}F, \quad (2.81)$$

a energia é dada por

$$E^* = C^{-1/2}G, \quad (2.82)$$

e a velocidade radial é dada por

$$V_r = -\alpha_1 \left(\frac{H}{R} \right)^2 |\Omega| r A^{-2} B^3 C^{-3/2} D^{3/2} E Q^{-1} \quad (2.83)$$

2.3 Torque dentro da ISCO

Conforme mencionado acima, tanto o modelo de Shakura & Sunyaev (1973) como o de Novikov & Thorne (1973) assumiram que o torque dentro da ISCO é nulo e que o material após cruzar a ISCO espirala até o buraco negro.

Esta hipótese foi questionada inicialmente por Page & Thorne (1974) e Thorne (1974). Através de argumentos teóricos, Krolik (1999) questionando a hipótese de torque nulo dentro da ISCO argumentou que campos magnéticos são agentes prováveis de torques em discos de acreção e então que na região localizada entre o raio do horizonte do buraco negro e a ISCO esperaria-se o congelamento do fluxo sempre que a força deste campo seja suficientemente intensa como para fazer com que a velocidade de Alfvén seja relativística e compita com a gravidade. Se a matéria dentro da ISCO pode de fato permanecer conectada ao disco, ela pode exercer um torque.

Nestã seção descreveremos os modelos teóricos de Gammie (1999) e Agol & Krolik (2000) que mostram a importância da contribuição deste torque para a luminosidade e eficiência da taxa de acreção.

2.3.1 Modelo Gammie (1999)

Consideremos um disco fino no plano equatorial da métrica de Kerr. Devido ao disco ser fino, $c_s^2/c \ll 1$ (onde c é a velocidade da luz), de modo que a entalpia relativística é dada por $\eta \sim 1$. O disco é magneticamente turbulento com densidade de energia magnética $B^2/(8\pi) \sim 2\alpha_1 \rho c_s^2$ e assumiremos que $\alpha_1 \ll 1$ de modo que o campo magnético faz uma contribuição desprezível ao equilíbrio hidrostático. Então o disco tem uma superfície interna em $R = R_{in}$ com $R_{ms} - R_{in} \sim R_{ms}(c_s^2/c)$ ou $R_{in} \sim R_{ms}$. Na superfície interna do disco imaginaremos que as linhas do campo magnético sobem aproximadamente radialmente através da atmosfera do disco o que força a atmosfera a corrotacionar com a superfície do disco. A uma certa altura na atmosfera em corotação, o gradiente do potencial efetivo muda de sinal e o gás começa a ser transmitido para dentro junto das linhas do campo até o buraco negro. Como o gás deixa o disco, a característica do fluxo muda tornando-se menos turbulento e mais próximo de laminar.

Isto conduz a considerar um fluxo assisimétrico estacionário próximo ao plano equatorial da métrica de Kerr. Assume-se que a velocidade e o campo magnético sejam puramente radiais, isto é, $u^\theta = 0$ e $F_{r\phi} = 0$, onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético. Assume-se também que as variáveis de fluxo sejam apenas funções da coordenada radial, ou seja, $\partial_\theta = 0$. Assume-se uma condutividade perfeita de modo que o campo elétrico desaparece no referencial comóvel com o fluido

$$u^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.84)$$

Junto com a condição de simetria, isto deixa $F_{\mu\nu}$ com seis componentes não nulas: $F_{t\theta} \rightarrow -rE_\theta$, $F_{r\theta} \rightarrow -rB_\phi$ e $F_{r\theta} = -(F_{t\theta}u^t - F_{\theta\phi}u^\phi)/u^r$. Desta forma, o campo magnético tem apenas dois graus de liberdade.

As simetrias do fluxo reduzem as equações de Maxwell para

$$\begin{aligned}\partial_r F_{t\theta} &= 0 \\ \partial_r F_{\theta\phi} &= 0\end{aligned}\tag{2.85}$$

A primeira equação é a lei de isorotação relativística, que pode ser re-escrita como $F_{t\phi} = \Omega_F F_{\theta\phi}$, onde Ω_F é a frequência de rotação u^ϕ/u^t no raio onde $u^r=0$. A segunda equação é o equivalente relativístico de $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$.

A conservação do número de partículas conduz ao fluxo de massa conservado por unidade de θ

$$F_M = 2\pi r^2 \rho u^r \rightarrow 2\pi r^2 \rho v_r \tag{2.86}$$

onde ρ =densidade do número de partículas multiplicado pela massa da partícula em repouso e v é a tri-velocidade. O fluxo de momento angular conservado é:

$$F_L = 2\pi r^2 T_\phi^r = 2\pi r^2 \left(\rho u_\phi u^r - \frac{D F_{\theta\phi}}{4\pi r^2} \right) \rightarrow 2\pi r^2 \left[\rho v_r v_\phi - \frac{B_\phi B_r}{4\pi} \right] \tag{2.87}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-stress. O fluxo de massa conservado é

$$\begin{aligned}F_E &= -2\pi r^2 T_t^r = 2\pi r^2 \left(-\rho u_t u^r - \frac{D F_{t\theta} F_{r\theta}}{4\pi r^2} \right) \\ &\rightarrow 2\pi r^2 \left[\rho v_r \left[c^2 + \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\phi^2) - \frac{GM}{r} \right] + v_r \frac{B_\phi^2}{4\pi} - v_\phi \frac{B_r B_\phi}{4\pi} \right]\end{aligned}\tag{2.88}$$

e consistentemente com a aproximação de disco fino, desprezou-se a contribuição da energia térmica para F_E . Notemos que a eficiência da acreção é dada por $\varepsilon = 1 - F_E/F_M$.

A equação final para fechar o sistema é a normalização da quadri-velocidade

$$u^\mu u_\mu = -c^2 \tag{2.89}$$

Daqui em diante assume-se que $r_g = c = -F_M = 1$.

Desta forma as equações acima descrevem um modelo de fluxo unidimensional com uma série de relações algébricas.

Este modelo possui seis variáveis dinâmicas $(\rho, u^t, u^r, u^\phi, F_{t\phi}, F_{\theta\phi})$ e seis quantidades conservadas $(F_M, F_L, F_E, F_{\theta\phi}, \Omega_F, u^\mu u_\mu)$ de modo que as equações são completamente integráveis.

O fluxo de massa foi normalizado para -1, mas fisicamente, ele é ajustado pelas condições no disco em raios grandes. A normalização da quadri-velocidade dá $u^\mu u_\mu = -1$. $F_{\theta\phi}$ está relacionado a fluxo magnético emergindo da região interna do disco. Isto é presumidamente determinado pela ação da turbulência MHD no disco e a interação do disco com o fluxo. Isto será tratado como um parâmetro do problema e seus valores serão estimados mais adiante.

Parece conveniente requerer que os fluxos de energia e momento angular sejam contínuos na fronteira entre o fluxo e o disco. Também é conveniente requerer que a quadri-velocidade no disco seja contínua. Se $\Omega_F = \Omega(R_{in})$ e $u^r(r_{in})=0$, então temos que $F_E = \Omega F_L + (\epsilon - l\Omega)F_M$ em r_{in} ; aqui $l = u_\phi$. Isto elimina dois graus de liberdade por expressar F_E em termos de F_L e por fixar Ω_F . Os fluxos de energia e momento angular serão então contínuos se o fluxo de momento angular viscoso do disco for igual dentro e fora de r_{in}

$$T_\phi^r(visc) = T_\phi^r(EM) \quad (2.90)$$

Uma vez que os parâmetros do modelo são fixados, a combinação resultante das equações algébricas não lineares deve ser solucionada numericamente.

$$\begin{aligned} \partial_{u^r} F_R(r_j, u_j^r, F_L) &= 0, \\ \partial_r F_E(r_j, u_j^r, F_L) &= 0, \\ F_E(r_j, u_j^r, F_L) - F_E(r_{ms}, 0, F_L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

A figura 2.1 apresenta contornos da eficiência da acreção ε obtidos sobre uma porção do plano $a - F_{\theta\phi}$. Os contornos desta figura estão apresentados em intervalos de $\Delta\varepsilon=0.05$. Para campos magnéticos fortes e spins elevados (acima e para direita da figura), $F_E > 0$, isto é, energia é extraída do buraco negro. A linha tracejada corresponde a eficiência clássica de um disco prógrado ao redor de um buraco negro com rotação máxima, $\varepsilon=0.42$.

Figura 2.1: Contornos de eficiência constante $\varepsilon = 1 + F_E$ no plano $a - F_{\theta\phi}$. O contorno de eficiência unitária está marcado como uma linha sólida grossa; acima e para a direita desta linha $F_E > 0$, isto é, energia está sendo extraída do buraco negro. Os contornos mais finos estão espaçados linearmente com $\Delta\varepsilon=0.1$. O contorno tracejado grosso cai em $\varepsilon=0.42$, a eficiência clássica de um disco prógrado ao redor de um buraco negro com rotação máxima. Extraído de Gammie (1999)

2.3.2 Modelo Agol & Krolik (2000)

NT73, e Page & Thorne (1974) mostraram como o brilho superficial e o stress integrado verticalmente no referencial do fluido para um disco de acreção fino estacionário pode ser escrito como expressões Newtonianas multiplicadas por fatores de correção que se aproximam do valor unitário para raios grandes. Na notação de Page & Thorne (1974), a conservação de momento angular é dada por

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(L^* + \frac{C^{1/2}}{B\partial\Omega/\partial r} f \right) = L^* f \quad (2.92)$$

onde f é uma função do raio definida como o fluxo do disco no referencial do fluido e é dada por $F = \dot{M}_0 f / (4\pi r)$. A condição de fronteira de f na ISCO é $f_{ms}=0$ na ausência de torque. Quando há torque

$$f_{ms} = \frac{3}{2} \frac{\Delta\varepsilon}{x_{ms} C_{ms}^{1/2}} \quad (2.93)$$

onde $C_{ms} = C(x_{ms})$ e $\Delta\varepsilon$ é a eficiência radiativa adicional relativa a aquela obtida em termos da energia de ligação na ISCO, de modo que $\varepsilon = \Delta\varepsilon + \epsilon_0$. Esta escolha de f_{ms} assegura que a dissipação adicional integrada combina com $\Delta\varepsilon$ e corresponde a um stress dado por

$$W_\phi^r(r_{ms}) = \frac{\Delta\varepsilon \dot{M}_0}{2\pi r_{ms} \Omega_{ms}} \quad (2.94)$$

Utilizando esta condição de fronteira, o fluxo na superfície gerado localmente torna-se

$$F(x) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}_0}{r^3} \left[\frac{x_{ms}^{3/2} C_{ms}^{1/2} \Delta\varepsilon}{C(x)x^{1/2}} + R_R^{NT}(x) \right] \quad (2.95)$$

onde $R_R^{NT}(x)$ é a expressão encontrada por NT73 dada por

$$R_R^{NT}(x) = \frac{Q}{C} \quad (2.96)$$

Iremos nos referir a um disco NT73 quando $\Delta\varepsilon=0$.

A expressão para o fluxo superficial torna-se

$$F^{(\infty)}(x) = \frac{3}{2} \frac{c^3}{r_g \kappa_T x^{7/2}} \frac{L}{L_{Edd}} \frac{x_{ms}^{3/2} C_{ms}^{1/2}}{C(x)} \quad (2.97)$$

A equação de conservação do momento angular correspondendo a equação do fluxo é dada por:

$$- \int dz T_{r\phi}(z) = \frac{\dot{M}_0 \Omega(x)}{2\pi} \left[\frac{x_{ms}^{3/2} C_{ms}^{1/2} \Delta\varepsilon}{D(x)x^{1/2}} + R_T^{NT}(x) \right] \quad (2.98)$$

onde R_T^{NT} é outro fator de correção dado por

$$R_T^{NT} = \frac{Q}{D} \quad (2.99)$$

Para clarificar o significado da dissipação extra escreveremos a equação do fluxo assumindo que a gravidade seja puramente Newtoniana

$$F^{(N)}(r) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}_0}{r^3} \left[\Delta\varepsilon \sqrt{\frac{r_{in}}{r}} \frac{r_{in}}{r} + \left(1 - \sqrt{\frac{r_{in}}{r}} \right) \right] \quad (2.100)$$

onde r_{in} é a borda interno do disco. O segundo termo em colchetes é o fator de correção de Shakura & Sunyaev (1973), enquanto o primeiro é derivado do torque extra na borda interna do disco.

2.4 Resultados de simulações numéricas

Diversas simulações MHD utilizando um potencial pseudo-Newtoniano, que permite simular fluxos de acreção ao redor de um buraco negro sem rotação (e.g Hawley & Krolik 2001, Armitage, Reynolds, Chiang 2001, Reynolds & Armitage 2001, Hawley & Krolik 2002, Krolik & Hawley 2002, Reynolds & Fabian 2008 e Shafee et al. 2008) como simulações GRMHD (e.g Krolik, Hawley & Hirose 2005, Shafee et al. 2008b, Noble et al. 2009, Noble et al. 2010 e Penna et al. 2010). Nesta seção iremos apresentar os resultados obtidos em cada um destes trabalhos assim como comparação entre eles e com os modelos teóricos apresentados na seção anterior.

Hawley & Krolik (2001, HK01), realizaram simulações MHD 3D descrevendo a parte interna do disco ao redor de um buraco negro. Para evitar complicações técnicas, utilizaram um potencial pseudo-Newtoniano. O disco evoluiu como resultado do transporte de momento angular que é produzido naturalmente da turbulência MHD gerada pela MRI (Balbus & Hawley 1991). Esta instabilidade é atualmente o mecanismo mais aceito para o transporte de momento angular. Para que esta instabilidade ocorra é necessário a presença de rotação diferencial e um campo magnético fraco que fazem com que a matéria na parte interna do disco seja acreta enquanto que a matéria na parte externa seja dirigida para fora. HK01 encontraram que o stress resultante é contínuo dentro da ISCO, em contradição com o modelo NT73. Como consequência, o momento angular específico da matéria acreta é menor do que o momento angular na ISCO. O disco exibiu grandes flutuações em várias quantidades, tanto espaciais quanto temporais. Em particular a razão do stress em relação a pressão exibiu gradientes sistemáticos e flutuações grandes, de $\sim 10^{-2}$ no plano médio do disco interno em raios grandes aumentando para 10 próximo da ISCO.

Armitage, Reynolds & Chiang (2001, ARC01), realizaram simulações MHD 3D com um potencial pseudo-newtoniano para estudar o fluxo de acreção que cruza a ISCO. Concentraram-se nos discos não estratificados verticalmente e isotérmicos mas também consideraram um modelo que incluiu estratificação. Em todos os casos, encontraram que o ponto sônico cai dentro da ISCO sendo a energia magnética maior do que a energia térmica dentro da ISCO. Os gradientes promediados no tempo do fluxo de momento angular específico são próximos de zero dentro da ISCO e existem flutuações grandes do momento angular e do stress magnético contínuo. O resultado que o momento angular específico é

constante dentro da ISCO está de acordo com os modelos teóricos de disco.

Reynolds & Armitage (2001, RA01), também exploraram a presença de torques nas bordas internas de um disco de acreção fino utilizando simulações MHD 3D com um potencial pseudo-Newtoniano. Variando o nível de saturação da MRI que conduz ao transporte de momento angular, mostraram que a dinâmica do gás dentro da ISCO varia dependendo da intensidade do campo magnético fora deste raio. Campos fracos não são capazes de conectar casualmente o material dentro da ISCO ao resto do disco, e o torque zero é uma condição de fronteira aproximadamente correta nos raios estáveis. Campos magnéticos mais fortes, que foram obtidos artificialmente, mas que podem ocorrer fisicamente nos modelos de discos mais complexos são aptos em acoplar ao menos algumas regiões dentro da ISCO ao resto do disco. Além do mais, o acoplamento magnético na região dentro da ISCO pode ser altamente dependente do tempo com grandes flutuações no torque nos raios estáveis. Isto implica variações na eficiência da acreção.

Hawley & Krolik (2002, HK02), realizaram novas simulações da dinâmica do disco de acreção num potencial pseudo-Newtoniano aumentando a resolução. Maiores resoluções conduzem a um aumento da força do campo magnético, taxas de acreção e flutuações na taxa de acreção. Uma simulação foi realizada com um campo poloidal e outra com um puramente toroidal. Comparado ao poloidal, a toroidal leva mais tempo para atingir o equilíbrio da MRI e produz menos turbulência e energia de campos magnéticos mais fracas. Para ambos os casos o stress continua dentro da ISCO, o valor do stress é aproximadamente 0.1 no corpo do disco e cresce para 10 na região da ISCO. Matéria cruzando esta região apresentou 10% a mais de energia de ligação e 10% menos de momento angular.

Krolik & Hawley (2002) definiram diferentes bordas internas do disco, dependendo de suas propriedades. Discutiram quatro situações, utilizando dados de simulações anteriores. Elas são (1) a borda turbulenta, onde o congelamento do fluxo torna-se mais importante que a turbulência em determinar a estrutura do disco; (2) a borda de stress, onde a matéria dentro da ISCO perde conexão dinâmica com o fluxo de acreção externo; (3) a borda de reflexão, o menor raio capaz de produzir características significantes de reflexão em raios-X; e (4) a borda de radiação, o lugar mais interno do qual luminosidade significativa emerge. Todas estas bordas dependem da taxa de acreção e são não axisimétricas e variáveis no tempo. Embora todas estejam geralmente localizados na vizinhança da ISCO, resultados das simulações dependem da escolha das bordas e podem diferir significativamente.

Krolik, Hawley & Hirose (2004) utilizaram simulações GRMHD para analisar os efeitos da relatividade geral de um tórus acretando ao redor de um buraco negro com diferentes spins. Esturadam especialmente a matéria dentro do raio de pressão máxima do tórus, onde o movimento médio do gás é dirigido para dentro e um disco se forma. A redução abrupta da taxa de acreção com o aumento do spin é explicada por uma forte dependência do fluxo de momento angular com o spin do buraco negro carregado eletromagneticamente; quando $a/M \geq 0.9$, este fluxo pode ser comparável ao fluxo de momento angular dirigido para dentro carregado pela matéria. Em todos os casos, fluxo de momento angular é dirigido para fora através do fluxo de matéria, ou seja, não há borda de stress conforme definido nos outros trabalhos. O retardamento da acreção no disco interno pelo torque eletromagnético também altera a distribuição radial da densidade superficial de matéria, um efeito que pode ter consequências nas propriedades observacionais tais como a reflexão Compton. O momento angular líquido acretado é suficientemente pressionado por efeitos eletromagnéticos e nos casos de buracos negros girando mais rapidamente a taxa de aumento de massa pode conduzir a uma diminuição do spin. Buracos negros em rotação também perdem energia por fluxos de Poynting, esta taxa é também uma função que cresce com o spin.

Reynolds & Fabian (2008) estudaram a utilização da linha de emissão larga do ferro dos discos de acreção ao redor de buracos negros para diagnosticar spins dos buracos negros. Utilizando uma simulação MHD 3D de um disco fino num potencial pseudo-Newtoniano, mostraram que ambas a densidade no plano médio e a densidade colunar vertical do fluxo de acreção caem dramaticamente sobre uma sobre uma região estreita de raios próximos da ISCO. Argumentaram que esta queda da densidade é acompanhada por uma aumento abrupto no parâmetro de ionização da fotosfera em raios-X e que o espectro pode ser utilizado para inferir o spin do buraco negro.

Shafee, Narayan & McClintock (2008, SNM08), consideraram um modelo Newtoniano simples de um disco de acreção estacionário ao redor de um buraco negro. O modelo é baseado nas equações da hidrodinâmicas integradas verticalmente e um potencial pseudo-Newtoniano que permite simular a ISCO. Encontraram que, conforme os valores de H/R ou α_1 aumentam, o modelo hidrodinâmico exhibe maiores desvios que o modelo padrão. O modelo padrão é um modelo analítico em que o torque viscoso é zero dentro da ISCO. Usando os resultados da simulação tentaram determinar os spin dos buracos negros. En-

contraram que o erro na estimativa do spin é modesta quando $H/R \leq 0.1$ e $\alpha_1 \leq 0.2$. O erro nos valores estimados é 0.1 para um buraco negro sem rotação; o erro é muito menor para buracos negros rotacionando mais rapidamente. Também consideraram o contraste entre a densidade e espessura entre o gás no disco e aquele dentro da ISCO. Este erro na estimativa é produzido por assumir que o stress dentro da ISCO seja nulo e que não existe emissão neste região.

Shafee et al. (2008) realizaram simulações 3D de um disco de acreção fino ao redor de um buraco negro sem rotação. A espessura do disco variou entre $H/R=0.05-0.1$. Encontraram que no estado estacionário, o perfil do momento angular específico do gás acretando desvia menos de 2% do valor previsto pelo modelo NT73. O resultado indica que acoplamento magnético ao redor da ISCO não é importante para discos finos.

Noble, Krolik & Hawley (2009, N09), realizaram simulações GRMHD 3D para estudar detalhadamente as propriedades do fluxo de acreção. Para um disco com $H/R=0.1$ ao redor de um buraco negro com spin de 0.9, encontraram que há uma significativa dissipação além daquela prevista pelo modelo NT73. Contudo, muito disto, ocorre no fundo do poço de potencial, onde captura de fótons e redshift gravitacional podem limitar fortemente a energia do fóton escapando para o infinito. Em adição, com estes parâmetros e o modelo de radiação utilizado, uma fração significativa das energias térmica e magnética permanecem com o gás e são acretadas pelo buraco negro. Encontraram que a luminosidade é 6% maior do que a prevista pelo modelo NT73.

Noble, Krolik & Hawley (2010, M10), exploraram a dependencia do stress do disco interno na acreção do buraco negro ao contrastar os resultados de um número de simulações, todas realizadas com códigos GRMHD. Cinco simulações foram realizadas com o código HARM3D variando a escala de altura entre 0.06 e 0.17 e comparando estas simulações com duas realizadas anteriormente com spin nulo com o objetivo de investigar a possível dependencia do stress do disco interno com a topologia do campo. Encontraram que a dependencia radial média do stress eletromagnético é quase completamente independente da espessura do disco e da topologia do campo. Ele aumenta suavemente para raios pequenos até a o raio do horizonte. O stress de Reynolds pode também ser significativo próximo da ISCO e na região interna; a magnitude deste stress no entanto, depende da espessura do disco e topologia do campo. Os dois stress combinados para o fluxo de momento angular acretado por unidade de massa dentro da ISCO é 7-15% menor do que o

fluxo de momento na ISCO.

Penna et al. (2010) realizaram simulações GRMHD 3D de um tórus ao redor de um buraco negro com diferentes valores de spin e utilizaram suas simulações para comparar com o modelo NT73. O campo magnético consistia de múltiplos loops distribuídos de forma isotrópica no disco com o objetivo de reproduzir a turbulência viscosa esperada no plano poloidal. Para um disco fino com $H/R=0.07$ ao redor de um buraco negro sem rotação, encontraram uma diminuição no momento angular específico de 2.9% relativo do modelo NT73 e um excesso de luminosidade de dentro da ISCO de 3.5%. Os desvios no caso de buracos negros em rotação são também da mesma ordem. Também os desvios diminuem com a diminuição de H/R . Encontraram que o stress eletromagnético e a luminosidade dentro da ISCO dependem da geometria do campo inicial. Consideraram uma segunda geometria com linhas de campo seguindo os contornos de densidade, que para discos finos conduz a linhas de campos magnéticos alongadas radialmente. Isto produz um aumento do fluxo de momento angular de quase o dobro em relação ao modelo NT73. Por fim, encontraram que a coroa introduz desvios do modelo NT73 no momento angular específico que são comparáveis a aqueles produzidos pelas componentes do disco, enquanto o excesso de luminosidade do gás ligado dentro da ISCO é dominado apenas pela componente do disco. Baseado nestas indicações, sugeriram que as diferenças nos resultados entre este trabalho e os anteriores são devidos as diferenças assumidas nas geometrias dos campos magnéticos.

2.5 Modelo Novikov-Thorne modificado

Com a descoberta de novas bordas internas para o disco de acreção através das simulações numéricas, Penna et al. (2012) obtiveram novas expressões para cada região do disco modificando as expressões originais de NT73 solucionando as equações da estrutura radial e vertical do disco. Seguindo NT73, a massa do buraco negro e a taxa de acreção foram normalizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_* &= M/3M_\odot \\ \dot{M}_* &= \dot{M}/10^{17} g \text{ s}^{-1} \end{aligned} \tag{2.101}$$

A profundidade óptica no centro do disco é $\tau = \bar{\kappa}\Sigma$ e a escala de tempo característica

para o gás de mover para dentro de um raio R até o canto interno do disco é $\Delta t(r) = -r/v^R$.

O disco foi dividido em quatro regiões: uma região externa, raios grandes, no qual a pressão do gás domina sobre a pressão de radiação e na qual a opacidade é predominantemente livre-livre; uma região do meio (raios menores) no qual a pressão do gás domina a pressão de radiação mas a opacidade é devida ao espalhamento de elétrons, uma região interna na qual a pressão de radiação domina a pressão do gás e a opacidade é devida ao espalhamento de elétrons; uma região de borda (raios menores ainda) onde a pressão do gás domina a pressão de radiação e a opacidade é devida ao espalhamento de elétrons. O modelo NT73 não inclui a região da borda explicitamente devido à condição de torque zero na ISCO.

As solução é função da coordenada adimensional $x = \sqrt{r/M}$ e quantidades com subíndice 0 indicam quantidades calculadas na ISCO.

(a) Região dentro da ISCO: $p = p^{gas}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$. Nesta região temos:

$$F = (2 \times 10^{18} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s})(\alpha_1^{4/3} M_*^{-3} \dot{M}_*^{5/3}) x^{-26/3} x_0^{4/3} D^{-5/6} K^{4/3} F_0^{4/3} G_0^{-4/3} v_*^{-5/3}$$

$$\Sigma = (1 \text{ g cm}^{-2})(M_*^{-1} \dot{M}_*) x^{-2} D^{-1/2} v_*^{-1}$$

$$H = (60 \text{ cm})(\alpha_1^{1/6} M_*^{1/2} \dot{M}_*^{1/3}) x^{8/3} x_0^{-5/6} D^{1/6} K^{1/6} F_0^{1/6} G_0^{-1/6} R_0^{-1/2} v_*^{-1/3}$$

$$\rho = (0.01 \text{ g cm}^{-3})(\alpha_1^{-1/6} M_*^{-3/2} \dot{M}_*^{2/3}) x^{-14/3} x_0^{5/6} D^{-1/3} K^{-1/6} F_0^{-1/6} G_0^{1/6} R_0^{1/2} v_*^{-2/3}$$

$$T = (2 \times 10^5 \text{ K})(\alpha_1^{1/3} M_*^{-1} \dot{M}_*^{2/3}) x^{-8/3} x_0^{1/3} D^{-1/3} K^{1/3} F_0^{1/3} G_0^{-1/3} v_*^{-2/3}$$

$$\tau_{es} = 0.3(M_*^{-1} \dot{M}_*) x^{-2} D^{-1/2} v_*^{-1}$$

$$\Delta t(r) = (1 \times 10^5 \text{ s}) M_* x^2 v_*^{-1}$$

$$v^r = -(3 \times 10^1 0cm s^{-1}) v_* \quad (2.102)$$

O perfil de velocidade radial adimensional é dado por:

$$v_* = [C_0^{-1} G_0^2 V - 1] + (7 \times 10^{-3}) (\alpha_1^{1/4} M_*^{3/4} \dot{M}_*^{1/2}) x_0^{-7/4} C_0^{-5/4} D_0^{-1} G_0^2 V^{1/2} \quad (2.103)$$

O termo em colchetes domina próximo ao horizonte. O termo proporcional a $\dot{M}$ domina próxima da ISCO. No horizonte, a velocidade radial é c e na ISCO é a velocidade do som.

(b) Região da borda: $p = p^{gas}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$. Nesta região temos:

$$F = (0.6 \times 10^{26} erg cm^{-2} s) (M_*^{-2} \dot{M}_*) x^{-6} B^{-1} C^{-1/2} \Phi$$

$$\Sigma = (5 \times 10^4 g cm^{-2}) (\alpha_1^{-4/5} M_*^{-2/5} \dot{M}_*^{3/5}) x^{-6/5} B^{-4/5} C^{-1/2} D^{-4/5} \Phi^{3/5}$$

$$H = (3 \times 10^3 cm) (\alpha_1^{-1/10} M_*^{7/10} \dot{M}_*^{1/5}) x^{21/10} A B^{-6/5} C^{1/2} D^{-3/5} S^{-1/2} \Phi^{1/5}$$

$$\rho = (10 g cm^{-3}) (\alpha_1^{-7/10} M_*^{-11/10} \dot{M}_*^{2/5}) x^{-33/10} A B^{-6/5} C^{1/2} D^{-3/5} S^{-1/2} \Phi^{1/5}$$

$$T = (3 \times 10^8 K) (\alpha_1^{-1/5} M_*^{-3/5} \dot{M}_*^{2/5}) x^{-9/5} B^{-2/5} D^{-1/5} \Phi^{2/5}$$

$$\tau_{es} = (2 \times 10^4) (\alpha_1^{-4/5} M_*^{-2/5} \dot{M}_*^{3/5}) x^{-6/5} B^{-3/5} C^{1/2} D^{-4/5} \Phi^{3/5}$$

$$\frac{\tau_{ff}}{\tau_{es}} = (0.6 \times 10^{-5}) (M_*^{8/5} \dot{M}_*^{-2/5}) x^{14/5} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-3/10} \Phi^{3/5}$$

$$\Delta t(r) = (0.7 s) (\alpha_1^{-4/5} M_*^{8/5} \dot{M}_*^{-2/5}) x^{14/5} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-3/10} \Phi^{3/5}$$

$$v^r = -(6 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1})(\alpha_1^{4/5} M_*^{-3/5} \dot{M}_*^{2/5}) x^{-4/5} B^{4/5} C^{-1/2} D^{3/10} \Phi^{-3/5} \quad (2.104)$$

onde a função Φ

$$\Phi = Q + (0.02)(\alpha_1^{9/8} M_*^{-3/8} \dot{M}_*^{1/4}) x^{-1} B C^{-1/2} D^{3/10} (x_0^{9/8} C_0^{-5/8} G_0 V_0^{1/2}) \quad (2.105)$$

controla a forma do fluxo radiante $F(r)$. Próximo da ISCO, o primeiro termo tende a zero e o segundo termo é não nulo e proporcional a $\dot{M}^{1/4}$. Então se $\dot{M}/\dot{M}_{Edd}$ é pequeno, o segundo termo é pequeno em todos os lugares e pode-se substituir Φ por Q . Isto produz o fluxo NT73.

(c) Região interna: $p = p^{gas}$, $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$. Nesta região temos:

$$F = (0.6 \times 10^{26} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s})(M_*^{-2} \dot{M}_*) x^{-6} B^{-1} C^{-1/2} \Phi$$

$$\Sigma = (20 \text{ g cm}^{-2})(\alpha_1 M_* \dot{M}_*^{-1}) x^3 A^{-2} B^3 C^{1/2} S \Phi^{-1}$$

$$H = (1 \times 10^5 \text{ cm})(M_*) A^2 B^{-3} C^{1/2} D^{-1} S^{-1} \Phi$$

$$\rho = (1 \times 10^{-4} \text{ g cm}^{-3})(\alpha_1^{-1} M_* \dot{M}_*^{-2}) x^3 A^{-4} B^6 D S^2 \Phi^{-2}$$

$$T = (4 \times 10^7 \text{ K})(\alpha_1^{-1/4} M_*^{-1/4}) x^{-3/4} A^{-1/2} B^{1/2} S^{1/4}$$

$$\tau_{es} = 8(\alpha_1^{-1} M_* \dot{M}_*^{-1}) x^3 B^3 C^{1/2} S \Phi^{-1}$$

$$\frac{p_{(gas)}}{p_{(rad)}} = (5 \times 10^{-5})(\alpha_1^{-1/4} M_*^{7/4} \dot{M}_*^{-2}) x^{21/4} A^{-5/2} B^{9/2} D S^{5/4} \Phi^{-2}$$

$$\Delta t(r) = (2 \times 10^{-4} \text{ s})(\alpha_1^{-1} M_*^3 \dot{M}_*^{-2}) x^7 A^{-2} B^3 C^{1/2} D^{1/2} S \Phi^{-1}$$

$$v^r = -(2 \times 10^9 \text{ cm s}^{-1})(\alpha_1 M_*^{-2} \dot{M}_*) x^{-5} A^2 B^{-3} C^{-1/2} D^{-1/2} S^{-1} \Phi \quad (2.106)$$

A fronteira entre as regiões da borda interna e do meio podem ser obtidas igualando as pressões.

- (d) Região do meio: $p = p^{(gas)}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{es}$. A solução é a mesma da região interna.
- (e) Região externa: $p = p^{gas}$ e $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{ff}$. Neste região temos:

$$F = (0.6 \times 10^{26} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s})(M_*^{-2} \dot{M}_*) x^{-6} B^{-1} C^{-1/2} \Phi$$

$$\Sigma = (2 \times 10^5 \text{ g cm}^{-2})(\alpha_1^{-4/5} M_*^{-1/2} \dot{M}_*^{7/10}) x^{-3/2} A^{1/10} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-17/20} S^{-1/20} \Phi^{7/10}$$

$$H = (9 \times 10^2 \text{ cm})(\alpha_1^{-1/10} M_*^{3/4} \dot{M}_*^{3/20}) x^{9/4} A^{19/20} B^{-11/10} C^{1/2} D^{-23/40} S^{-19/40} \Phi^{3/20}$$

$$\rho = (80 \text{ g cm}^{-3})(\alpha_1^{-7/10} M_*^{-5/4} \dot{M}_*^{11/20}) x^{-15/4} A^{-17/20} B^{3/10} D^{-11/40} S^{17/40} \Phi^{11/20}$$

$$T = (8 \times 10^7 \text{ K})(\alpha_1^{-1/5} M_*^{-1/5}) x^{-3/2} A^{-1/10} B^{-1/5} d^{-3/20} S^{1/20} \Phi^{3/10}$$

$$\tau_{ff} = (2 \times 10^2)(\alpha_1^{-4/5} M_*^{1/5}) A^{-2/5} B^{1/5} C^{1/2} D^{-3/5} S^{1/5} \Phi^{1/5}$$

$$\frac{\tau_{ff}}{\tau_{es}} = (3 \times 10^{-2})(M_*^{1/2} \dot{M}_*^{-1/2}) x^{3/2} A^{-1/2} B^{2/5} D^{1/4} S^{1/4} \Phi^{-1/2}$$

$$\Delta t(r) = (2 \text{ s})(\alpha_1^{-4/5} M_*^{3/2} \dot{M}_*^{-3/10}) x^{5/2} A^{1/10} B^{-4/5} C^{1/2} D^{-7/20} S^{-1/20} \Phi^{7/10}$$

$$v^r = -(2 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1})(\alpha_1 M_*^{-1/2} \dot{M}_*^{3/10}) x^{-1/2} A^{-1/10} B^{4/5} C^{-1/2} D^{7/20} S^{1/20} \Phi^{-7/10} \quad (2.107)$$

Com isto apresentamos a física dos discos finos incluindo os efeitos da região interna a ISCO que será utilizada no modelo semi-analítico no capítulo 7.

2.6 Modelo Pringle (1981)

Pringle (1981) utilizando as leis básicas de conservação da massa e do momento angular, encontrou duas equações para a evolução de um disco de acreção fino. Nesta seção iremos apresentar este modelo.

Consideremos o movimento de uma massa em rotação sob efeito de um poço de potencial assumindo simetria cilíndrica com o eixo de simetria paralelo ao vetor momento angular do gás. Assumiremos que o gás pode radiar eficientemente e que a escala de tempo de viscosidade é muito maior do que a radiativa e dinâmica.

Adotando coordenadas cilíndricas polares, (R, ϕ, z) , a velocidade circular $v_\phi = R\Omega(R)$ é definida em termos do potencial $\Phi(R)$ no plano $z=0$ por

$$\frac{v_\phi^2}{R} = -\frac{d\Phi}{dR} \quad (2.108)$$

Isto é, a força centrífuga é balanceada pela força gravitacional. Em geral, fluídos rotacionam diferencialmente, com isto podemos dizer que a taxa de cisalhamento A definida como

$$A = R \frac{d\Omega}{dR} \quad (2.109)$$

é não nula.

Se há alguma força viscosa presente no gás, ou se há algum outro processo presente que tenha uma ação dissipativa para amortecer o movimento de cisalhamento, a energia é dissipada no fluido como calor e irradiado. Desta forma a viscosidade converte energia gravitacional em radiação.

A equação de conservação de massa de um anel de raio R e espessura ΔR é dada por:

$$R \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma V_R) = 0 \quad (2.110)$$

A equação de conservação do momento angular para o anel resulta na equação

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma V_R R^2 \Omega) = T \quad (2.111)$$

onde T é o efeito do torque viscoso devido ao anel vizinho. Se o torque de um anel externo agindo num interno num raio R é $G(R, t)$, então

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial R} \quad (2.112)$$

A força viscosa por unidade de comprimento ao redor de uma circunferência é $\nu_1 \Sigma A$ onde ν_1 é a viscosidade cinemática e com isto

$$G(R, t) = 2\pi R \nu_1 \Sigma A R \quad (2.113)$$

Manipulando as duas equações acima, a equação de conservação do momento angular torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(\Sigma R^2 \Omega v_R) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(\nu_1 \Sigma R^3 \Omega') \quad (2.114)$$

onde aqui ' denota derivada em relação a coordenada radial. Pode-se utilizar as equações de conservação de massa e momento angular para eliminar v_R , resultando na equação

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} [[R^2 \Omega']^{-1} \frac{\partial}{\partial R} [\nu_1 \Sigma R^2 (-\Omega')]] \quad (2.115)$$

Se o potencial é devido a uma massa central M pontual, temos $\Omega = (GM/R^3)$ e com isto a equação acima torna-se

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} [R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} [\nu_1 \Sigma R^{1/2}]] \quad (2.116)$$

Com isto, temos as duas equações que governam a dinâmica de um disco de acreção que serão importantes para o estudo de discos cujo momento angular não é coplanar com o do buraco negro.

Integrando a equação de conservação da massa 2.110 obtemos

$$\dot{M} = -2\pi \Sigma R V_R \quad (2.117)$$

Integrando a equação 2.114, assumindo estado estacionário e utilizando-se a equação acima, obtemos uma expressão para a viscosidade cinemática dada por (e.g. Krolik 1999)

$$\nu_1(R) = -\frac{\dot{M}}{2\pi \Sigma(R)} \left[\frac{d \ln \Omega}{d \ln R} \right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{R_{ms}}{R} \right) \frac{\Omega(R_{ms})}{\Omega(R)} \right] \quad (2.118)$$

Utilizando a equação da viscosidade de Shakura & Sunyaev (1973) $\nu_1 = \alpha_1 c_s H$, obtemos uma expressão para a velocidade do som no disco a partir da equação 2.118. Desta forma obtemos:

$$c_s(R) = \sqrt{-\frac{\dot{M}\Omega}{2\pi\Sigma(R)} \left[\frac{d\ln\Omega}{d\ln R} \right]^{-1} \left[1 - \left(\frac{R_{ms}}{R} \right) \frac{\Omega(R_{ms})}{\Omega(R)} \right]} \quad (2.119)$$

A densidade superficial é assumida como sendo uma lei de potência da forma (Caproni et al. 2004, 2006, 2007, Martin et al. 2007):

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \left(\frac{R}{R_g} \right)^{-s} \quad (2.120)$$

onde Σ_0 e s são constantes. Pode-se inferir limites para o valor de Σ_0 : deve ser maior do que Σ_0^{min} para preservar a condição de que o fluxo radial seja subsônico e menor do que Σ_0^{max} para manter o disco estável contra auto-gravidade.

o limite inferior é dado por:

$$\Sigma_0^{min} > \frac{1}{\Upsilon^2} \frac{3\dot{M}\alpha_1}{4\pi c R_g} \left(\frac{R_D}{R_g} \right)^{(s-1/2)} \quad (2.121)$$

onde Υ é o número de Mach do fluxo de acreção e modelos atuais (Shakura & Sunyaev 1973; Abramowicz et al. 1988; Narayan & Yi 1995) encontraram que $\Upsilon \leq 0.01$). O limite superior é dado por:

$$\Sigma_0^{max} < \left(\frac{\dot{M} M_{BH}^2}{3\pi^3 R_g^5 \alpha_1 c} \right)^{1/3} \left(\frac{R_D}{R_g} \right)^{(s-3/2)} \quad (2.122)$$

2.7 Fluxos de acreção dominados por advecção - ADAFs

Narayan & Yi (1994, NI94), investigaram o que aconteceria se o gás fosse incapaz de resfriar eficientemente. Utilizaram o termo "dominado por advecção" para referir-se ao fluxo onde grande parte da energia térmica liberada é carregada pelo gás acretando como entropia ao invés de ser radiado.

Como na teoria padrão, integraram verticalmente as equações do fluxo e consideraram um fluxo bidimensional no plano equatorial $R\phi$. Assumiram um fluxo axisimétrico estacionário de modo que $\partial/\partial t = \partial/\partial\phi = 0$ e que todas as variáveis do fluxo são apenas funções do raio.

A densidade do gás ρ , sua velocidade radial v , velocidade angular Ω e velocidade do som isotérmica c_s satisfazem a equação da continuidade, equação do momento radial e azimutal e equação da conservação de energia.

$$\frac{d}{dR}(\rho R H v) = 0 \quad (2.123)$$

$$v \frac{dv}{dR} - \Omega^2 R = -\Omega_K^2 R - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dR}(\rho c_s^2) \quad (2.124)$$

$$v \frac{d(\Omega R^2)}{dR} = \frac{1}{\rho R H} \frac{d}{dR} \left(\frac{\alpha_1 \rho c_s^2 R^2 H}{\Omega_K} \frac{d\Omega}{dR} \right) \quad (2.125)$$

$$\Sigma v T \frac{ds}{dR} = \frac{3+2\epsilon}{2} 2\rho H v \frac{dc_s^2}{dR} - 2c_s^2 H v \frac{d\rho}{dR} = Q^+ - Q^- \quad (2.126)$$

na equação 2.126, o lado esquerdo é a entropia advectada, T a temperatura e s a entropia, enquanto o lado direito dá a diferença entre a energia ganha por unidade de área devido a dissipação viscosa (Q^+) e a perda de energia através de radiação (Q^-). Por conveniência, definiu-se um parâmetro $\epsilon = (5/3 - \gamma)/(\gamma - 1)$, onde γ é a razão entre os calores específicos. Substituindo a taxa de dissipação viscosa por Q^+ obtem-se

$$Q^+ - Q^- = \frac{2\alpha_1 \rho c_s^2 R^2 H}{\Omega_K} \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 - Q^- = f \frac{2\alpha_1 \rho c_s^2 R^2 H}{\Omega_K^2} \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)^2 \quad (2.127)$$

O parâmetro f mede o grau no qual o fluxo é dominado por advecção. No limite extremo de nenhum resfriamento radiativo, tem-se $f=1$, enquanto no limite oposto de resfriamento muito eficiente $f=0$. Finalmente, definiu-se $\epsilon' = \epsilon/f$. O parâmetro ϵ' possui um papel importante em determinar a natureza do fluxo.

Por simplicidade assumiu-se que ϵ' é independente do raio. Desta forma, as equações 2.123-2.126 permitem uma solução auto-similar da forma

$$\begin{aligned} \rho &\propto R^{-3/2} \\ v &\propto R^{-1/2} \\ \Omega &\propto R^{-3/2} \\ c_s^2 &\propto R^{-1} \end{aligned} \quad (2.128)$$

onde

$$v = -(5 + 2\epsilon') \frac{g(\alpha_1, \epsilon')}{3\alpha_1} v_K = -\frac{3\alpha_1}{(5 + 2\epsilon')} v_K \quad (2.129)$$

$$\Omega = \left[\frac{2\epsilon'(5 + 2\epsilon')g(\alpha_1, \epsilon')}{9\alpha_1^2} \right]^{1/2} \Omega_K = \left(\frac{2\epsilon'}{5 + 2\epsilon} \right)^{1/2} \Omega_K \quad (2.130)$$

$$c_s^2 = \frac{2(5 + 2\epsilon')}{9} \frac{g(\alpha_1, \epsilon')}{\alpha_1^2} v_k^2 = \frac{2}{5 + 2\epsilon'} v_k^2 \quad (2.131)$$

$$g(\alpha_1, \epsilon') = \left[1 + \frac{18\alpha_1^2}{(5 + 2\epsilon')^2} \right]^{1/2} - 1 \quad (2.132)$$

A densidade ρ pode ser obtida da taxa de acreção de massa $\dot{M} = 4\pi R H v \rho$. Nas equações 2.129-2.131, a primeira relação dá a solução exata enquanto a segunda corresponde ao limimte quando $\alpha_1 \ll 1$.

A equação 2.1231 mostra que a velocidade do som em fluxos dominados por advecção é comparável a velocidade Kepleriana o que significa que a temperatura do gás acretando é próxima do virial. Isto é esperado pela suposição de que o gás não é resfriado. Quando $c_s \sim v_K$, a espessura vertical H é comparável a R e o fluxo é quase esférico.

A velocidade radial do gás acretando é proporcional a α_1 . Isto é devido a velocidade radial ser determinada principalmente pela eficiência com que a viscosidade pode transportar momento angular para fora. Desde que $\nu_1 = \alpha_1 c_s^2 / v_K$, a velocidade radial tende a ser muito maior em discos em que o fluxo é dominado por advecção do que em discos finos.

Quando ϵ' é pequeno, vemos que a velocidade angular Ω do fluxo é menor do que a velocidade angular Kepleriana Ω_K por um fator $\sim (\epsilon')^{1/2}$. De fato, quando $\epsilon \rightarrow 0$, que corresponde a $\gamma \rightarrow 5/3$, Ω vai a zero e a solução fica compatível com a acreção esférica de Bondi (Bondi 1951),

A equação 2.129 mostra que a solução auto-similar satisfaz a relação

$$\frac{1}{2}v^2 + \Omega^2 R^2 - \Omega_K^2 R^2 + \frac{5}{2}c_s^2 = 0 \quad (2.133)$$

Disto, pode-se computar o parâmetro normalizado $b = Be/v_K^2$, onde Be é a constante de Bernoulli

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{v_k^2} \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 - \Omega_K^2 R^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}c_s^2 \right) \\ &= -\frac{\Omega^2 R^2}{2v_K^2} + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{5}{2} \right) \frac{c_s^2}{v_K^2} = \frac{3\epsilon - \epsilon'}{5 + 2\epsilon'} \end{aligned} \quad (2.134)$$

É conhecido que Be é conservado num fluxo adiabático na ausência de viscosidade. Portanto, quando b é positivo, o gás pode atingir o infinito numa trajetória radial. Já no caso $b < 0$, o gás não pode espontaneamente escapar para o infinito. A equação mostra que b é positivo em fluxos dominados por advecção para todos os valores de α_1 e qualquer $\gamma < 5/3$ contanto que $f > 1/3$.

É possível mostrar que a entropia aumenta para dentro nessa solução auto-similar. Precisamos portanto, considerar a possibilidade de transporte de energia convectivo. Num meio em rotação, a condição para instabilidade convectiva dinâmica é

$$N_{eff}^2 = N^2 + \kappa^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} \frac{d \ln(P^{1/\gamma}/\rho)}{dR} + \kappa^2 < 0 \quad (2.135)$$

onde N é a frequência de Brunt-Vaisala e κ é frequência epíciclica que neste caso é igual a Ω . Para as soluções auto-similares, encontra-se que

$$N_{eff}^2 = \frac{10\epsilon' + 6\epsilon\epsilon' - 15\epsilon}{(5 + 3\epsilon)(5 + 2\epsilon')} \Omega_K^2 \quad (2.136)$$

Com isto, a instabilidade dinâmica ocorre para

$$f > \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\epsilon \quad (2.137)$$

O fluxo de energia convectivo integrado na altura F_c na presença de um gradiente de entropia instável pode ser escrito como

$$F_c = -\Sigma K_c T \frac{ds}{dR} \quad (2.138)$$

onde K_c é a constante de difusão associada com transporte convectivo. Na formulação de Shakura & Sunyaev (1973), pode-se escrever $K_c = \alpha_c c_s^2 / \Omega_K$. Substituindo a solução auto-similar na equação acima, encontra-se que F_c escala como R^{-2} e possui divergência negativa. Convecção portanto provê uma fonte de energia adicional na equação de energia 2.126 de magnitude

$$Q_c^+ = -\nabla \cdot F = -\Sigma \frac{\alpha_c c_s^2}{v_k} T \frac{dS}{dR} \quad (2.139)$$

Este termo tem a mesma estrutura que a do termo do lado direito de 2.129. Pode-se portanto combinar os dois termos simplesmente redefinindo ϵ' como

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{f} \left(1 + \frac{\alpha_c c_s^2}{v v_K} \right) = \frac{\epsilon}{f} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha_c}{\alpha_1} \right) \quad (2.140)$$

Com esta adição, todos os resultados nas equações 2.123-2.126 se mantem.

2.8 Discos com duas componentes

Muitos sistemas binários de buracos negros (BHBs) tão bem como, AGNs de baixa luminosidade (LLAGNs), são modelados como um disco fino frio em grandes raios e um ADAF em raios pequenos. Esta configuração é ilustrada na figura 2.2. O principal parâmetro que controla o raio de transição R_{tr} entre as duas zonas é a taxa de acreção $\dot{M}_{BH}$. Quando $\dot{M}_{BH}$ está acima do valor máximo permitido para soluções ADAF, apenas a solução de disco fino é possível, então o disco fino se estende sobre toda a extensão até a ISCO. Quando $\dot{M}_{BH}$ torna-se menor o disco fino é truncado num raio $R_{tr} > R_{ISCO}$ e a região dentro de R_{tr} é ocupada por um ADAF. A extensão radial do ADAF aumenta com a diminuição de $\dot{M}_{BH}$. Esta configuração foi primeiramente proposta por Shapiro et al. (1976) para explicar a emissão de raios-X de Cyg X-1. Um conceito similar mas utilizando a solução ADAF, foi depois desenvolvida por Narayan (1996) para explicar os vários estados espectrais de BHBs.

Entanto há algum entendimento com relação a dinâmica da transição do disco interno fino para o ADAF interno (e.g. Abramowicz et al. 1998, Manmoto et al. 2000), o motivo físico da conversão do gás frio no disco externo em gás quente na região interna não é ainda entendida. É provável que alguma combinação dos seguintes modelos seja a responsável: evaporação (Meyer & Meyer-Hosmeister 1994, Liu et al. 1999, 2011, Meyer et al. 2000, 2007, Różanska & Czerny 2000, Spruit & Deufel 2002, Mayer & Pringle 2007, Taam et al. 2012); difusão turbulenta (Honma 1996, Manmoto & Kato 2000, Manmoto et al. 2000), viscosidade grande (Gu & Lu 2000, Lu et al 2004). Destes, o modelo de evaporação foi estudado mais extensivamente, embora todos os três modelos predizem que R_{tr} deve aumentar com a diminuição de $\dot{M}_{BH}$.

Figura 2.2: Disco de duas componentes. A parte interna composta por um ADAF e a parte externa por um disco fino.

A estrutura global dos sistemas de discos ADAF+fino baseados nas suposições de uma viscosidade turbulenta adicional nas zonas de transição foi derivada por Honma (1996). A solução analítica de Honma para os discos ADAF+fino é apenas válida para fluxos dominados completamente por advecção ($f = 1$). Fazendo isto a solução analítica encontrada é

$$v = -\alpha_1 \frac{(3 - \alpha_1)}{5} [1 - (R/R_{TR})^a] v_k(R) \quad (2.141)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{a + 5}{5}} (R/R_{TR})^{a/2} \Omega_k(R) \quad (2.142)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{2}{5}} [1 - (R/R_{tr})]^{1/2} v_k(R) \quad (2.143)$$

a relação entre f e a é dada por

$$f = \frac{12a(3 - a) - 24(\alpha_t/\alpha_1)(1 - a)a}{(a + 5)(3 - a)^2} \quad (2.144)$$

Na zona de transição $\alpha_T=0$.

Discos de acreção inclinados

Algumas fontes galácticas e extragalácticas apresentam características de distorção e precessão em seus jatos (e.g., Margon 1984, Sillanpaa et al. 1988, Abraham 2000, Galimore et al. 2004, Caproni et al. 2006, 2007). A aparente falta de correlação entre a orientação dos jatos e o plano do disco pode ser atribuída a existência de deformação no disco de acreção (e.g, Schmitt et al. 2002).

Neste capítulo descreveremos como o processo de deformação ocorre em discos finos e em discos espessos.

3.1 Discos finos inclinados

O comportamento de discos de acreção inclinados com relação ao plano equatorial do buraco negro e sujeitos a torques foi primeiro discutido por Bardeen & Petterson (1975). Petterson (1977, 1978) e Hatchett, Begelman & Sarazin (1981) derivaram equações descrevendo a física destes discos assumindo que o ângulo de inclinação era muito pequeno e que a dependencia temporal era lenta.

Papaloizou & Pringle (1983) perceberam que essas equações não conservavam o momento angular e derivaram as expressões corretas.

Eles consideraram um disco tal que em cada raio R em relação ao centro, o material é suportado centrifugamente em órbitas com velocidade angular $\Omega(R)$. Notemos que R é uma coordenada puramente radial. Em cada raio, o disco tem um vetor momento angular unitário $\mathbf{l}(R, t)$ definido de tal modo que em primeira ordem, o anel contido entre $R - (1/2)\Delta R$ e $R + (1/2)\Delta R$ tenha um momento angular $\Delta \mathbf{L} = 2\pi \Sigma \Delta R R^2 \Omega \mathbf{l}$, onde $\Sigma(R, t)$ é a densidade superficial do disco. Assumiram que o disco é fino na direção de $\mathbf{l}$. A equação

de conservação de massa é a mesma que para discos planos sendo dada por:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma V_R) = 0 \quad (3.1)$$

onde $V_R(R, t)$ é a velocidade radial no disco. A equação de conservação de momento angular é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\Sigma V_R R^3 \Omega) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\nu_1 \Sigma R^3 \Omega') + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} (\nu_2 \Sigma R^3 \Omega) \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) \quad (3.2)$$

Aqui $\Omega' = d\Omega/dR$, ν_1 é a viscosidade correspondente ao cisalhamento azimutal e ν_2 é a viscosidade correspondente ao cisalhamento vertical. Podemos ver que ν_1 é a viscosidade de cisalhamento normalmente associada com discos de acreção e ν_2 está associado com a torção.

Papaloizou & Pringle (1983) fizeram uma análise destas equações para o caso de ângulos de inclinação pequenos, porém Pringle (1992) às estendeu para casos mais gerais. Manipulando as equações de conservação de massa e momento angular obtemos:

$$V_R = \frac{(\partial/\partial R)(\nu_1 \Sigma R^3 \Omega') - \frac{1}{2} \nu_2 \Sigma R^3 \Omega |\partial l / \partial R|^2}{R \Sigma (\partial/\partial R)(R^2 \Omega)} \quad (3.3)$$

Substituindo a expressão da velocidade radial 3.3 na equação da conservação da massa 3.1, obtemos uma equação que descreve a evolução da densidade superficial do disco:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{R} \left[\frac{(\partial/\partial R)[\nu_1 \Sigma R^3 (-\Omega')]}{(\partial/\partial R)(R^2 \Omega)} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\frac{1}{2} \nu_2 \Sigma R^3 \Omega |\partial l / \partial R|^2}{(\partial/\partial R)(R^2 \Omega)} \right] \quad (3.4)$$

Das equações 3.1 e 3.2 podemos derivar uma equação para a evolução temporal da inclinação do disco. Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + \left[V_R - \frac{\nu_1 \Omega'}{\Omega} - \frac{1}{2} \nu_2 \frac{(\Sigma R^3 \Omega)'}{\Sigma R^3 \Omega} \right] \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} \nu_2 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) + \frac{1}{2} \nu_2 \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right| \mathbf{l} \quad (3.5)$$

Definimos $\mathbf{L} = \Sigma R^2 \Omega \mathbf{l}$, que é a densidade de momento angular local no disco. Com isto, a equação governando a evolução de L pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial R} = \frac{1}{R} \left[\frac{(\partial/\partial R)(\nu_1 \Sigma R^3 (-\Omega'))}{\Sigma (\partial/\partial R)(R^2 \Omega)} \mathbf{L} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{2} \nu_2 |\mathbf{L}| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right] + \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\left[\frac{\frac{1}{2} R^3 \Omega |\partial \mathbf{l} / \partial R|^2}{(\partial/\partial R)(R^2 \Omega)} + \nu_1 \left(\frac{R \Omega'}{\Omega} \right) \right] \mathbf{L} \right] + T \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde T é o torque externo agindo no disco; iremos assumir inicialmente que T é nulo. Do ponto de vista matemático, os dois primeiros termos do lado direito são difusivos e o último termo é advectivo.

Quando o disco está ao redor de um objeto pontual de massa M a equação de conservação da massa pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R} \left[R^{1/2} \frac{\partial}{\partial R} (\nu_1 \Sigma R^{1/2}) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\nu_2 \Sigma R^2 \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right|^2 \right] \quad (3.7)$$

e a equação de conservação de momento angular pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = \frac{3}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R^{1/2}}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial R} (\nu_1 \Sigma R^{1/2}) \mathbf{L} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\nu_2 R^2 \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right|^2 - \frac{3}{2} \nu_1 \right) \mathbf{L} \right] + \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} \nu_2 R |\mathbf{L}| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) + T \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde notamos que $|\mathbf{L}| = (GM)^{1/2} \Sigma R^{1/2}$ e $\mathbf{L}/\Sigma = (GMR)^{1/2} \mathbf{l}$.

Um método para resolver esta equação numericamente é descrito em Pringle (1992).

Ogilvie (1999) fez uma análise da dinâmica de fluídos não lineares em um disco de acreção deformado. Ele considerou o caso da dinâmica de um disco de acreção viscoso sujeito a uma deformação de grande amplitude variando lentamente, desprezou efeitos de auto-gravidade e também considerou o caso em que não ocorre propagação de ondas ressonantes no disco. Este método é uma versão extendida do modelo de Papaloizou & Pringle (1983) devido a se estender ao regime não linear. Resolvendo as equações da dinâmica de fluídos distorcidos não lineares ele encontrou uma nova expressão para a conservação do momento angular que é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma R^2 \Omega \mathbf{l}) + \frac{1}{R} (\Sigma R V_R R^3 \Omega) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (Q_1 F R^2 \Omega^2 \mathbf{l}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(Q_2 F R^3 \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) + \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(Q_3 F R^3 \Omega^2 \mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) + T \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $F(R, t)$ é o segundo momento vertical da densidade promediado azimuthalmente. A expressão para F é dada por:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho z^2 dz d\phi \quad (3.10)$$

Os coeficientes adimensionais Q_1 , Q_2 e Q_3 dependem da lei de rotação, da viscosidade de cisalhamento (α_1), do expoente adiabático (Γ), da viscosidade própria (α_b) e da amplitude da deformação (ψ). A equação de conservação do momento angular (3.9) pode ser decomposta numa equação para a componente paralela a $\mathbf{l}$:

$$\Sigma V_R \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (Q_1 F R^2 \Omega^2) - Q_2 F R^2 \Omega^2 \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right|^2 + \mathbf{l} \cdot \mathbf{T} \quad (3.11)$$

e uma equação para o vetor de inclinação dada por:

$$\begin{aligned} \Sigma R^2 \Omega \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) &= Q_1 F R \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(Q_2 F R^3 \Omega^2 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) \\ &+ Q_2 F R^2 \Omega^2 \left| \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right|^2 \mathbf{l} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(Q_3 F R^3 \Omega^2 \mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) - \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{T}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Este esquema é uma generalização da forma proposta por Pringle (1992) e é igualmente conveniente para implementações numéricas. Os torques internos entre um anel no disco e seus vizinhos são de três tipos. O coeficiente Q_1 representa um torque que acelera (ou desacelera) o anel. Isto seria o torque viscoso padrão proporcional a $d\Omega/dR$ em um disco plano, mas num disco deformado há uma contribuição adicional, não proporcional a $d\Omega/dR$, resultante da correlação entre as velocidades azimutais e radiais induzidas pela deformação; isto desaparece num disco inviscido porque as velocidades radiais e azimutais estão perfeitamente fora de fase. O coeficiente Q_2 representa um torque tendendo a alinhar o anel com seus vizinhos, que age para planificar o disco; também desaparece no caso de um disco inviscido. O coeficiente Q_3 representa um torque tendendo a fazer o anel precessionar se ele está desalinhado com seus vizinhos; isto conduz a uma propagação como onda dispersiva da deformação. Os termos Q_1 , Q_2 e Q_3 para o caso adiabático para $\psi \ll 1$ são dados por (Ogilvie 1999):

$$Q_1 = -\frac{3\alpha_1}{2} + \frac{1}{16} |\Psi|^2 \quad Q_2 = \frac{1}{4\alpha_1} \quad Q_3 = \frac{3}{8} \quad (3.13)$$

e para o caso isotérmico são dados por (Ogilvie & Latter 2013):

$$Q_1 = -\frac{3\alpha_1}{2} + \frac{(1 - 8\alpha^2 + 3\alpha^3)}{4\alpha(4 + \alpha^2)} |\Psi|^2 \quad Q_2 = \frac{1+7\alpha^2}{\alpha_1(4+\alpha_1^2)} \quad Q_3 = \frac{3 - 6\alpha_1^2}{2(4 + \alpha_1^2)} \quad (3.14)$$

onde

$$|\psi| = R \left| \frac{\partial l}{\partial R} \right| \quad (3.15)$$

Com isto podemos escrever os valores de α_1 , α_2 e α_3 como:

$$\alpha_1 = -\frac{2}{3}Q_1 \quad \alpha_2 = 2Q_2 \quad \alpha_3 = Q_3 \quad (3.16)$$

Independente do valor de α_1 , para baixas deformações ($\psi \ll 1$) temos que as relações entre α_2 e α_1 e α_3 e α_1 são dadas por (Ogilvie 1999, Ogilvie & Dubus 2001):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{2\alpha_1} \frac{4(1 + 7\alpha_1^2)}{(4 + \alpha_1^2)} \\ \alpha_3 &= \frac{3(1 - 2\alpha_1^2)}{2(4 + \alpha_1^2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os valores de Q_1 , Q_2 e Q_3 para o caso adiabático e isotérmico são apresentados nas figuras 3.1.

Figura 3.1: Esquerda: Valores dos coeficientes Q para o caso adiabático ($\Gamma=5/3$). Direita: Valores dos coeficientes Q para o caso isotérmico ($\Gamma=1.0$). Extraído de Ogilvie (1999) e Ogilvie & Latter (2013)

Utilizando os parâmetros Q e integrando a equação 3.11, podemos escrever expressões para as viscosidades que são dadas por:

$$\nu_1 = \frac{Q_1 F \Omega^2}{\Sigma R \frac{d\Omega}{dR}} = -\frac{2}{3} Q_1 [(H/R)^2 R^2 \Omega] \quad (3.18)$$

$$\nu_2 = \frac{2Q_2 F \Omega}{\Sigma} = 2Q_2 [(H/R)^2 R^2 \Omega] \quad (3.19)$$

$$\nu_3 = \frac{Q_3 F \Omega}{\Sigma} = Q_3 [(H/R)^2 R^2 \Omega] \quad (3.20)$$

3.2 Efeito Bardeen-Petterson

O arrasto do referencial produzido por um objeto compacto em rotação com momento angular J_B causa a precessão de uma partícula se seu plano orbital está inclinado com relação ao plano equatorial do buraco negro. Isto é conhecido como efeito Lense-Thirring (Lense & Thirring 1918). A velocidade angular de precessão, Ω_{LT} , do arrasto do referencial é dada por (Wilkins 1972):

$$\Omega_{LT} = \frac{2G J_{BH}}{c^2 R^3} \quad (3.21)$$

onde J_{BH} é o momento angular do buraco negro dado por:

$$J_{BH} = a_* \frac{GM_{BH}^2}{c} \quad (3.22)$$

A ação combinada do efeito Lense-Thirring e a viscosidade interna do disco produz o alinhamento do momento angular do disco com o momento angular do buraco negro e isto é conhecido como efeito Bardeen-Petterson (Bardeen & Petterson 1975) e tende a afetar apenas as partes mais internas devido ao curto alcance do efeito Lense-Thirring enquanto que as partes externas tendem a permanecer em sua configuração inicial. A transição entre estas duas partes é definida como sendo o raio de Bardeen-Petterson, R_{BP} , e sua localização exata depende das propriedades do disco (Bardeen & Petterson 1975; Kumar & Pringle 1985, Nelson & Papaloizou 2000).

Uma representação do efeito Bardeen-Petterson pode ser vista na figura 3.2.

Figura 3.2: Representação esquemática do efeito Bardeen-Petterson. Extraído de Caproni et al 2006).

Há duas expressões diferentes para a localização do raio de Bardeen-Petterson. Bardeen & Petterson (1975) encontraram uma expressão igualando a escala de tempo viscosa com a escala de tempo de Lense-Thirring e com isto definiram:

$$R_{BP} = \left[\frac{2a_* M_{BH}^{1/2}}{\alpha_1} \left(\frac{H}{R} \right)^{-2} \right] \quad (3.23)$$

Papaloizou & Pringle (1983) sugeriram que o correto era considerar a escala de tempo de difusão para discos torcidos de forma que:

$$R_{BP} = \sqrt{\frac{\nu_2(R_{BP})}{\Omega_{LT}(R_{BP})}} \quad (3.24)$$

Escrevendo $\nu_2(R) = K\nu_1(R)$, onde K é uma constante, e desprezando o segundo termo do lado direito da equação 2.118, pode-se obter uma expressão para o raio de Bardeen-Petterson dada por:

$$R_{BP} = \left(\frac{6\pi\Sigma_0 c R_g^{s+2}}{K\dot{M}} \right)^{1/(s+1)} \quad (3.25)$$

O regime difusivo (efeito Bardeen-Petterson) ocorre quando o raio de Bardeen-Petterson é menor do que um raio de transição definido como (Papaloizou & Lin 1995):

$$R_T \sim H_D/\alpha_1. \quad (3.26)$$

Quando o raio de Bardeen-Petterson é menor do que o raio de transição, a deformação propaga-se como uma onda. Quando o raio de transição é maior do que o raio de Bardeen-Petterson, este raio define até que raio a deformação se propaga difusivamente e após este raio propaga-se como uma onda.

Sabendo que $H_D = c_s(R)/\Omega(R)$ podemos escrever o raio de transição como:

$$R_T \sim \left(\frac{3\pi\Sigma_0\alpha_1 R_g^s}{\dot{M}} \right)^{1/(s-2)} \quad (3.27)$$

O tempo de alinhamento entre os momentos angulares do disco e buraco negro é definido como sendo:

$$T_{align} = J_B \left[\frac{dJ_{BH}}{dt} \right]^{-1} \quad (3.28)$$

onde a derivada temporal é dada por:

$$\frac{dJ_{BH}}{dt} = 2\pi \int_{R_{ms}}^{R_{out}} \boldsymbol{\Omega}_{LT}(R) \times \mathbf{L}_d(R) R dR \quad (3.29)$$

Assumiremos que o disco está alinhado com o plano do buraco negro até o raio de Bardeen-Petterson e mantêm sua inclinação inicial após este raio. Desta forma podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{dJ_{BH}}{dt} = 2\pi \sin \varphi_0 \int_{R_{BP}}^{R_{out}} \Omega_{LT}(R) L_d(R, t_0) R dR \quad (3.30)$$

onde φ_0 é o ângulo inicial entre os momentos angulares do disco de acreção e buraco negro.

Neste trabalho consideramos que no momento inicial o disco é plano de modo que a magnitude do momento angular pode ser escrita como:

$$J_D(t_0) = 2\pi \int_{R_{ms}}^{R_D} L_D(R, t_0) R dR \quad (3.31)$$

onde $L_D(R, t_0)$ é a densidade de momento angular inicial dada por:

$$L_D(R, t_0) = \Sigma(R) \Omega_D(R) R^2 \quad (3.32)$$

Kumar & Pringle (1985) determinaram que o torque produzido pelo efeito Bardeen-Petterson tem a forma:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega}_{LT} \times \mathbf{L} \quad (3.33)$$

onde $\Omega_{LT} = \omega_p R^{-3}$ e $\omega_p = 2GJ_{BH}/c^2$.

Scheuer & Feiler (1996) encontraram a solução analítica para a equação que controla a torção (eq. 3.8) no caso de um disco com densidade superficial constante e a usaram para calcular a escala de tempo de alinhamento. Neste trabalho eles encontraram que independentemente da razão entre os torques do disco de acreção e buraco negro e do ângulo de desalinhamento, o ângulo de inclinação sempre irá se alinhar com o plano do buraco negro.

A evolução temporal do alinhamento e período de precessão do momento angular do disco ao redor de um objeto em rotação acretando, P_{prec}^{BP} resultaram ser:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\Delta t/T_{align}} \quad (3.34)$$

$$P_{prec}(t) = P_0 e^{-\Delta t/T_{align}} \quad (3.35)$$

onde $\Delta t = t - t_0$, φ_0 e P_0 são respectivamente o ângulo de inclinação e período de precessão quando a ação de efeito Bardeen-Petterson começa.

Contrário a Scheuer & Feiler (1996), King et al. (2005) encontraram que contra-alinhamento é possível quando os spins são anti-paralelos ($\varphi < 2J_B$) e o momento angular do disco é menor do que o dobro do momento angular do buraco negro ($J_D < 2J_{BH}$). Este resultado foi confirmado através de cálculos numéricos realizados por Lodato & Pringle (2006). A equação obtida por King et al. (2005) que determina a evolução dos ângulos dos momentos angulares tem a forma:

$$\frac{d}{d\tau}(\cos \varphi) = \pm \sin^2 \varphi \sqrt{[J_D(t_0)/J_{BH}]^2 - \sin^2 \varphi} \quad (3.36)$$

onde $\tau = t/T_{prec}$ e os sinais + e - correspondem respectivamente ao alinhamento ou contra-alinhamento dos vetores do momento angular. A figura 3.3 mostra o comportamento para algumas situações diferentes.

Figura 3.3: A evolução do ângulo de desalinhamento entre o buraco negro e disco como função do tempo normalizados pela escala de tempo τ , escala de tempo para o spin do disco diminuir para $\varphi = 90^\circ$. Os ângulos de desalinhamento inicial são $\varphi = 135^\circ$ para as três curvas superiores e $\varphi = 90^\circ$ para a curva inferior. A razão entre os momentos iniciais são $J_D/J_{BH}=0.5, 1.4, 1.42$ e 0.5 respectivamente. Extraído de King et al. (2005)

O ângulo entre os momentos angulares total e do disco representa a abertura do cone de precessão do jato $\varphi_D(t)$ e pode ser obtido da relação:

$$\sin \varphi_D(t) = \frac{J_{BH}}{J_T} \sin \varphi(t) \quad (3.37)$$

onde

$$J_T^2 = J_D^2(t_0) + J_{BH}^2 + 2J_D(t_0)J_{BH} \cos \varphi(t_0) \quad (3.38)$$

Lodato & Pringle (2006) consideraram o processo de alinhamento de um disco de acreção ao redor de um buraco negro. Utilizaram uma combinação simples de equações que descrevem a evolução do sistema no caso onde a propagação da deformação no disco de acreção ocorre difusivamente. Permitiram a direção do spin do buraco negro se mover sob a ação do torque do disco. Desta forma, a evolução do sistema foi computada auto-consistentemente. Consideraram um número de situações diferentes e consideraram as variações dos parâmetros relevantes devidas as variações na localização do raio de deformação R_w e a velocidade de propagação da deformação. Encontraram que a dissipação associada com a torção do disco resulta num grande aumento da taxa de acreção através do disco, de modo que AGNs acretando de discos deformados são provavelmente mais luminosos do que aqueles com discos puramente planos. Computaram explicitamente as escalas de tempo para os processos de deformação do disco e alinhamento e compararam os resultados com os obtidos em trabalhos anteriores. Confirmaram que no modelo de King et

al. (2005) sob as circunstâncias apropriadas, o contra-alinhamento pode ocorrer de modo que o material irá desacelerar o buraco negro. Encontraram que a escala de tempo para o disco alinhar seu momento angular com do momento angular do buraco negro é menor do que a escala de tempo de precessão.

Martin et al. (2007) encontraram uma solução analítica da equação 3.8 assumindo que as viscosidades ν_1 e ν_2 variem como lei de potência e que os termos $\partial L/\partial t$ e $|\partial \mathbf{l}/\partial R|^2$ são nulos. Com estas suposições, a equação 3.8 adquire a forma:

$$\frac{1}{R} \left[\left(\frac{3R}{L} \frac{\partial}{\partial R} (\nu_1 L) - \frac{3}{2} \nu_1 \right) \mathbf{L} + \frac{1}{2} \nu_2 R L \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right] + \frac{\omega_p \times \mathbf{L}}{R^3} = 0 \quad (3.39)$$

Definindo $W = l_x + i l_y$ e assumindo que $W \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow 0$ e $W \rightarrow W_\infty$ quando $R \rightarrow \infty$ os autores encontraram que a forma do disco é dada por:

$$W = \frac{2W_\infty}{\Gamma\left(\frac{1}{2(1-s)}\right)} \frac{(-i)^{\frac{1}{4(1-s)}}}{(1-s)^{\frac{1}{2(1-s)}}} \left(\frac{R_{BP}}{R}\right)^{1/4} K_{\frac{1}{2(1-s)}} \left(\frac{\sqrt{2}}{1-s} (1-i) \left(\frac{R}{R_{BP}}\right)^{-\frac{1-s}{2}} \right) \quad (3.40)$$

A inclinação do disco é dada por:

$$\theta(R) = \cos^{-1}(\hat{z} \cdot \mathbf{l}) = \cos^{-1}(l_z) \quad (3.41)$$

A solução para W está no referencial do buraco negro onde $\mathbf{J}/J=(0,0,1)$ e o vetor momento angular do disco é $\mathbf{l} = (R(W), I(W), \sqrt{1 - |W(R)|^2})$. A inclinação do disco num raio R neste referencial é dado por:

$$\theta_1(R) = \cos^{-1}(\sqrt{1 - |W(R)|^2}) \quad (3.42)$$

Pode-se também encontrar a inclinação do disco no referencial alinhado com as regiões externas do disco. Neste referencial a inclinação do disco tende a zero quando $R \rightarrow \infty$. Neste caso a inclinação é dada por:

$$\theta_2(R) = \cos^{-1}(R(W) \sin \varphi + \sqrt{1 - |W(R)|^2} \cos \varphi) \quad (3.43)$$

Através desta equação os autores encontraram que $W_\infty = \sin \varphi_0$.

Analisando as componentes dos versores momento angular do disco e suas derivadas, os autores encontraram expressões para o tempo de alinhamento e período de precessão. O tempo de alinhamento é dado por:

$$t_{align} = \frac{c^2}{4\pi(G^3 M)^{1/2}\Sigma_0} R_{BP}^{1/2} (1-s)^{\frac{s}{1-s}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2(1-s)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2s}{2(1-s)}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4(1-s)}\right)} \quad (3.44)$$

Quando $s=0$ obtemos:

$$t_{align}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\Sigma_0} \left(\frac{acM}{\nu_{20}G}\right)^{1/2} \quad (3.45)$$

o qual concorda com a solução de Scheuer & Feiler (1996) exceto pelo fator $\sqrt{2}$. A escala de tempo de precessão é dada por:

$$t_{prec} = \cot\left(\frac{\pi}{4(1-s)}\right) t_{align} \quad (3.46)$$

Como encontrado por Scheuer & Feiler (1996), quando $s=0$ as escalas de tempo de alinhamento e precessão são idênticas.

Nixon & King (2012) calcularam a evolução viscosa de um disco de acreção ao redor de um buraco negro em rotação resolvendo a equação 3.9 usando o torque de Bardeen-Petterson. Em geral, tal disco está desalinhado e deformado pela ação do efeito Lense-Thirring. Diferente dos trabalhos anteriores, utilizaram viscosidades efetivas restritas por serem consistentes com a dinâmica do fluido interno do disco. Encontraram que efeitos não lineares, que reduzem a viscosidade efetiva em regiões deformadas pode promover a quebra do disco em dois planos distintos. Isto ocorre quando o valor de α_1 é menor do que aproximadamente 0.3 e o ângulo inicial de desalinhamento entre o disco e buraco negro é maior do 45° . A quebra pode ser uma característica duradoura, propagando-se para fora no disco na escala de tempo de alinhamento.

Para calcular a quebra para uma dada viscosidade pode-se assumir que não há nenhuma deformação. A força viscosa azimuthal por unidade de área no disco é proporcional a taxa de cisalhamento $Rd\Omega/dR$ e então pode-se escrever:

$$f_\nu = \mu R \frac{d\Omega}{dR} \quad (3.47)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica. A área da interface é $2\pi RH$, onde H é a espessura vertical do disco. Então a força viscosa agindo na direção azimuthal é dada por:

$$F_\nu = 2\pi RH \mu R \frac{d\Omega}{dR} = 2\pi R \nu_1 \Sigma R \frac{d\Omega}{dR} \quad (3.48)$$

onde substituiu-se a viscosidade dinâmica pela viscosidade cinemática ($\mu = \rho\nu$) e usou-se $\Sigma = \rho H$. A magnitude do torque viscoso G_ν é dada por:

$$G_\nu = |\mathbf{R} \times \mathbf{F}_\nu| = 2\pi R \nu_1 \Sigma R^2 (-\Omega') \quad (3.49)$$

onde Ω' é a derivada radial da velocidade angular. Este é o torque viscoso padrão na interface de dois anéis no disco. Para uma rotação Kepleriana temos:

$$G_\nu = 3\pi \nu_1 \Sigma (GMR)^{1/2} \quad (3.50)$$

A precessão de Lense-Thirring induz um torque com magnitude :

$$G_{LT} = 2\pi RH |\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{L}| = 2\pi RH \Omega_p \Sigma R^2 \Omega |\sin \varphi| \quad (3.51)$$

onde a frequência de Lense-Thirring $\boldsymbol{\Omega}_p = 2GJ_{BH}/c^2 R^3$, a densidade do momento angular do disco $|\mathbf{L}| = \Sigma R^2 \Omega$ e θ é o ângulo entre o momento angular do disco e buraco negro. Assume-se que o disco quebra quando o torque Lense-Thirring expulsa o gás para fora mais rápido do que a viscosidade pode fazer com que ele espirale para dentro, o que requer:

$$G_{LT} > G_\nu \quad (3.52)$$

Fazendo a suposição de um disco fino padrão Kepleriano com viscosidade α_1 e usando $J_{BH} = aGM^2/c$, o raio no qual deve-se esperar a quebra é dada por:

$$R_{break} < \left(\frac{4}{3} |\sin \varphi| \frac{a}{\alpha_1} \frac{R}{H} \right)^{2/3} R_g \quad (3.53)$$

3.3 Discos espessos inclinados

Em discos espessos como já mencionado, a propagação da deformação ocorre em forma de ondas (Papalouizou & Lin 1995) e com isto vamos chamar este regime de onda e apresentar aqui sua física.

A propagação de distorções de baixa amplitude em discos quase keplerianos e inviscidos foi discutido por vários autores e.g, Papaloizou & Lin (1995), Demianski & Ivanov (1997), Pringle (1999) e Lubow & Ogilvie (2000). Eles apenas diferem em notação e suposições

mas todos concordam que ondas distorcidas propagam-se aproximadamente de forma não dispersiva com uma velocidade menor que a velocidade média do som no disco.

Vamos considerar as perturbações de um disco estacionário de densidade superficial $\Sigma(R)$ e pressão integrada verticalmente $P(R)$ definidas por:

$$\Sigma = \int \rho dz. \quad (3.54)$$

$$P = \int p dz \quad (3.55)$$

onde (R, ϕ, z) são coordenadas polares cilíndricas. Sejam $\Omega(R)$, $\kappa(R)$ e $\Omega_z(R)$ a velocidade angular orbital, frequência epicíclica e frequência de oscilação vertical associadas com órbitas circulares. Depois de algumas integrações e usando o equilíbrio hidrostático do disco, é possível encontrar:

$$P = \int z \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = \Omega_z^2 \int \rho z^2 dz = \Omega_z^2 \Sigma H^2. \quad (3.56)$$

Uma maneira simples de descrever um disco distorcido é como uma combinação de anéis curculares inclinados, e definir um vetor de inclinação unitário $\mathbf{l}(R, t)$ normal ao plano do anel de raio R num tempo t . Quando o disco está levemente inclinado em relação ao plano xy , $\mathbf{l}_z \sim 1$. Lubow & Ogilvie (2000) encontraram as equações que governam as perturbações de baixa amplitude da inclinação do disco e Ogilvie & Latter (2013) encontraram um termo extra responsável pela precessão, e com isto estas equações podem ser escritas como:

$$\Sigma R^2 \Omega \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial R} \left(Q_3 \Sigma c_s^2 R^3 \mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R} \right) + T \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} - \left(\frac{\Omega^2 - \kappa^2}{2\Omega} \right) \mathbf{l} \times \mathbf{G} + \alpha \Omega \mathbf{G} = \frac{PR^3 \Omega}{4} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial R}. \quad (3.58)$$

A equação 3.57 é derivada da componente vertical da equação de movimento e pode ser entendida como expressando a conservação do momento angular horizontal: $2\pi G(R, t)$ é o torque horizontal interno no disco, e $T(R, t)$ é o torque horizontal externo por unidade de área agindo no disco. A equação 3.58 é derivada das componentes verticais da equação de movimento e determina os torques internos G . O torque interno é promediado pelos movimentos epicíclicos de cisalhamento, produzido pelos gradientes de pressão radial que

aparecem quando um disco estratificado está distorcido. Estes movimentos passam por precessão apsidal quando $\kappa \neq \Omega$, e também decaimento viscoso, neste caso descrito pelo parâmetro α .

O parâmetro α aparece na equação 3.58 apenas para quantificar a taxa, $\alpha\Omega$ no qual o movimento epicíclico de cisalhamento associado com a distorção decai. Embora este termo é derivado de modelos viscosos, simulações numéricas da interação dos movimentos epicíclicos de cisalhamento com turbulência magnetorotacional 3D (Torkelson et al. 2000) e um modelo fechado de tal turbulência (Ogilvie 2002), sugerem que movimentos epicíclicos de baixa amplitude decaem exponencialmente no tempo. A taxa medida é um tanto menor do que $\alpha\Omega$ se α é calibrado na maneira usual com referência a componente $R\phi$ do stress turbulento.

É normalmente melhor adotar a representação complexa de $W = l_x + il_y$ e $G = G_x + iG_y$. Então as expressões 3.57 e 3.58 sem o termo precessional, podem ser escritas como:

$$\Sigma R^2 \Omega \left[\frac{\partial W}{\partial t} - i \left(\frac{\Omega^2 - \Omega_z^2}{2\Omega} \right) W \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial G}{\partial R} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - i \left(\frac{\Omega^2 - \kappa^2}{2\Omega} \right) G + \alpha\Omega G = \frac{PR^3\Omega}{4} \frac{\partial W}{\partial R} \quad (3.60)$$

É importante notar que o torque externo está relacionado a não esfericidade do potencial e portanto a diferença entre Ω^2 e Ω_z^2 . $W(R, t)$ representa a inclinação do disco em cada raio no sentido que $W(R, t) = \beta(R, t) \exp[i\gamma(R, t)]$, onde β é a amplitude da inclinação local e γ é o azimute (Pringle 1996).

Estas equações são conhecidas por serem válidas quando as quantidades W e G são suficientemente pequenas e variam numa escala de comprimento longa comparada com H e numa escala de tempo longa comparada com Ω^{-1} .

As frequências orbital, epicíclica e vertical ao redor de um buraco negro de Kerr são dadas por (Kato 1990):

$$\Omega^{-1} = \left(\frac{GM}{c^3} \right) (R^{3/2} + a_*), \quad (3.61)$$

$$\frac{\Omega^2 - \kappa^2}{\Omega^2} = 6R^{-1} - 8R^{-3/2} + 3a_*^2 R^{-2}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\Omega^2 - \Omega_z^2}{\Omega^2} = 4a_* R^{-3/2} - 3a_*^2 R^{-2}. \quad (3.63)$$

Usando uma primeira aproximação nas equações (3.61)-(3.63) temos:

$$\frac{\lambda}{H} = \frac{\pi R^{5/4}}{(6a_*)^{1/2}} \quad (3.64)$$

Os comprimentos de onda são menores para buracos negros rotacionando mais rapidamente e diminui conforme se aproxima da órbita mais estável mas é sempre ao menos algumas vezes H . Isto sugere que estas soluções como onda são fisicamente possíveis e podem ser descritas com alguma confiança pelas teorias de ondas torcidas com comprimentos de onda grandes.

Uma descrição mais precisa para a forma como onda estacionária pode ser obtida ao igualar as derivadas temporais na equação 3.57 e 3.58 a zero. Isto resulta numa equação diferencial ordinária de segunda ordem para o ângulo de inclinação $W(R)$,

$$\frac{d}{dR} \left[\left(\frac{PR^3\Omega^2}{\Omega^2 - \kappa^2 + 2i\alpha\Omega^2} \right) \frac{dW}{dR} \right] + \Sigma R^3(\Omega^2 - \Omega_z^2)W = 0. \quad (3.65)$$

Se nós pegarmos a primeira ordem das equações 3.59 e 3.60 temos:

$$\frac{d}{dR} \left[\left(\frac{\Sigma H^2}{3r^{-1} + i\alpha} \right) \frac{dW}{dR} \right] + 8ar^{-3/2}\Sigma W = 0 \quad (3.66)$$

A amplitude pode também aumentar ou diminuir conforme se aproxima do raio interno, dependendo das propriedades do disco, mas é provável que isto ocorra lentamente.

Mais especificamente, se $\Sigma \sim R^{-2\sigma}$ e $H/R = \epsilon R^{h-1}$, com $\epsilon = \text{constante}$ e $h > \sigma > -1/4$, equação 3.66 na ausência de viscosidade tem a solução dada pelas funções de Bessel dadas por:

$$W = x^\nu [C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)] \quad (3.67)$$

onde

$$\nu = \frac{h - \sigma}{h + 1/4}, \quad (3.68)$$

$$x = \left(\frac{24a}{\epsilon^2} \right)^{1/2} \frac{R^{-(h+1/4)}}{h + 1/4}. \quad (3.69)$$

Para $R(x \ll 1)$ grande a função de Bessel é dominante e a inclinação tende a um valor constante:

$$W \rightarrow W_\infty = \frac{2^\nu}{\pi} \Gamma \nu C_2 \quad (3.70)$$

Em $R(x \gg 1)$ pequenos a função de Bessel é oscilatórias e:

$$W \sim x^\nu \left(\frac{2}{\pi x} \right) \left[C_1 \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (3.71)$$

3.4 Resultados de cálculos numéricos e simulações SPH e MHD

Pringle (1992) resolveu a equação 3.8 analiticamente e numericamente através de um código 1D assumindo que o torque externo fosse nulo ou devido ao efeito Bardeen-Petterson. Para o caso em que o torque externo é nulo assumiu que $\nu_1(R) = \nu_2(R)=1$ e no esquema numérico removeu material na parte interna do disco para assegurar que o stress fosse nulo na ISCO e adicionou material na parte externa formando um anel com a inclinação inicial no raio externo. Na condição inicial as partes internas estão alinhadas. Observou-se tanto no cálculo analítico quanto no cálculo numérico que a parte interna se alinha com a parte externa do disco e comparando-se ambos os casos obteve-se uma boa concordância. Já para o caso em que o torque era devido ao efeito Bardeen-Petterson, considerou-se que $\nu_1(R) = \nu_2(R)=1$ e $\nu_1(R) = \nu_2(R)=0.1$ e que o ângulo inicial é o mesmo em todas as regiões do disco. Conforme esperado observou-se que as partes internas se alinharam com o plano equatorial do buraco negro e que no caso onde $\nu_1(R) = \nu_2(R)=0.1$ o tempo de alinhamento foi maior conforme o esperado.

Natarajan & Armitage (1999) estenderam o trabalho de Pringle (1992) considerando o caso em que as viscosidades variem como lei de potência e o torque externo é devido ao efeito Bardeen-Petterson. Inicialmente consideraram o caso em que $\nu_1(R) = \nu_2(R)=1.0$ e assumiram que $\omega_p=200$ onde para este caso espera-se que o raio de Bardeen-Petterson seja da ordem de 100 e encontraram que seus resultados eram compatíveis com os derivados por Scheuer & Feiler (1996). Em seus cálculos também observaram um bom acordo entre a solução numérica e a analítica.

Armitage & Natarajan (1999) consideraram o caso em que o potencial gravitacional é Newtoniano e pseudo-Newtoniano e aplicaram uma deformação no disco. Para o caso

do potencial Newtoniano, observaram que a deformação decai rapidamente, cerca de uma ordem de magnitude por período de precessão e que conforme a deformação difunde radialmente a precessão diferencial induz uma torção forte na forma do disco. Encontraram que onde a viscosidade é baixa o decaimento da deformação depende quase exclusivamente de ν_2 . Uma situação análoga foi encontrada para o caso do potencial pseudo-Newtoniano não havendo diferenças significantes na forma do disco em ambos os casos. No caso do potencial pseudo-Newtoniano, a deformação mantém uma grande amplitude na borda interna do disco e isto seria mais favorável para produzir um sinal observável de precessão do disco.

Nelson & Papaloizou (1999) realizaram simulações SPH em 3D para estudar a propagação da deformação em discos de acreção e compararam seus resultados com a teoria linear e não linear. Examinaram a resposta de um disco gasoso quando se impõe inicialmente uma deformação sob uma variedade de condições físicas. Consideraram o regime em que $\alpha_1 < H/R$ onde espera-se a propagação de ondas. Também realizaram cálculos em que $\alpha_1 > H/R$ onde espera-se que a deformação se propague difusivamente. Perturbações de baixa amplitude foram estudadas em discos Keplerianos e levemente não Keplerianos e encontraram que os resultados das simulações SPH eram compatíveis com a teoria linear. Os principais resultados são: a) a deformação em discos Keplerianos quando $\alpha_1 < H/R$ propaga-se com uma baixa dispersão e amortece numa taxa esperada da viscosidade do código; b) a deformação evolui difusivamente quando $\alpha_1 > H/R$; c) os discos levemente não Keplerianos conduzem a um comportamento substancialmente mais dispersivo da deformação que amortece numa taxa semelhante ao caso Kepleriano quando $\alpha_1 < H/R$. Deformações de alta amplitude não lineares foram estudadas em discos Keplerianos. O resultado indica que deformações não lineares podem conduzir a formação de choques e que a evolução da deformação torna-se mais difusiva do que onda.

Nelson & Papaloizou (2000) realizaram simulações SPH de um disco de acreção ao redor de um buraco negro e estudaram a estrutura do disco deformado produzido pelo efeito Bardeen-Petterson. Calcularam o raio de transição no qual o vetor momento angular específico do disco está alinhado com o do buraco negro. Focaram no regime onde a dinâmica da deformação é controlada por propagações de ondas mas também consideraram modelos no qual as deformações estão sujeitas a difusão ao invés de ondas. Por causa dos efeitos hidrodinâmicos ou pressão, para a variação de parâmetros estudados, o raio

de transição foi encontrado sempre como sendo menor daquele obtido por Bardeen & Petterson (1975). Para discos com número de Mach no plano médio de ~ 10 , a transição ocorre entre $10-16R_g$, visto que para um número de Mach de ~ 30 ocorre ao redor de $30R_g$. Um disco mais espesso com número de Mach de 5 não apresentou nenhuma característica de deformação visível. A inclusão da precessão de Einstein nos cálculos modificou a estrutura da deformação do disco e produziu uma taxa de alinhamento maior por até um fator de 4 devido ao efeito que o potencial não Kepleriano tem na propagação da deformação.

Lubow et al. (2002) solucionaram numericamente as equações do regime onda tanto no caso prógrado como retrógrado. Consideraram o caso de um disco que está inicialmente alinhado com o equador do buraco negro e inclinado nas partes externas com o objetivo de reproduzir uma situação próxima do que realmente acontece assumindo que $\alpha=0.05$. Observaram que conforme o esperado a inclinação inicialmente propaga-se para dentro e para fora como uma onda. A propagação para dentro da inclinação interage com os efeitos precessionais do buraco negro e num determinado tempo o estado estacionário é atingido próximo ao buraco negro adquirindo a forma de uma deformação estacionária junto com uma leve torção gerada pela viscosidade. A propagação da deformação para dentro com as regiões internas do disco gera uma onda refletida que se propaga para fora. No caso em que o ângulo de inclinação é maior do que 90° a solução do tipo onda estacionária é substituída por uma onda evanescente. Isto ocorre porque as precessões nodal e apsidal estão em sentidos opostos. Neste caso a forma estacionária do disco é esperada por ser semelhante a investigada por Bardeen & Petterson (1975) cujo disco interno está alinhado com o equador do buraco negro mas rotacionando no sentido oposto.

Lodato & Pringle (2007) exploraram significativamente a evolução de um disco de acreção deformado. Enquanto as análises anteriores concentram-se no caso em que o disco é espesso de modo que a deformação se propague como uma onda, eles focaram no regime oposto de um disco fino onde a deformação evolui difusivamente. Comparando os resultados numéricos com um modelo de difusão simples, determinaram o coeficiente de difusão da deformação, α_2 , como função dos parâmetros relevantes do disco tais como sua espessura e viscosidade. Encontram que enquanto em geral o comportamento do disco é bem reproduzido pelo modelo de difusão e viscosidades relativamente grandes a difusão da deformação é bem descrita pela teoria linear (confirmando que o coeficiente de difusão é inversamente proporcional a viscosidade); efeitos não lineares significativos aparecem

quando a viscosidade torna-se menor mas ainda dominando os efeitos de propagação do regime onda. Encontraram que a dependência inversa entre os coeficiente α_2 e α_1 quebra para baixas viscosidades, de modo que α_2 nunca torna-se maior do que um valor de saturação α_{max} da ordem do valor unitário. Adicionalmente encontraram que enquanto a taxa de difusão da deformação não depende significativamente da formulação da viscosidade detalhada, a taxa de precessão interna gerada pela deformação é fortemente afetada.

Lodato & Price (2010) analisaram a propagação da deformação em discos finos e viscosos onde neste caso a deformação deve se propagar difusivamente com coeficiente de difusão aproximadamente inversamente proporcional a viscosidade do disco. Lodato & Pringle (2007) não tinham encontrado um bom acordo entre os resultados numéricos e as previsões da teoria analítica de propagação de deformações, tanto no regime linear quanto no não linear para valores pequenos de α_1 . Neste trabalho utilizaram um novo código e maior resolução e diferentes implementações da viscosidade para investigar a origem da discrepância entre a teoria e os resultados numéricos. Os autores identificaram a causa da discrepância na calibração incorreta da viscosidade do disco nos trabalhos anteriores. Neste nova análise encontraram um bom acordo com a teoria analítica em ambos os regimes, em termos do coeficiente de difusão e taxa de precessão. O coeficiente de difusão é inversamente proporcional a viscosidade apenas para deformações de baixas amplitudes e baixos valores de α_1 . Para deformações não lineares, o coeficiente de difusão é uma função do raio e tempo e é significativamente menor do que o valor padrão.

Nixon et al. (2012) mostraram que em casos realísticos de acreção em AGNs, o efeito Lense-Thirring quebra as regiões centrais dos discos inclinados ao redor de buracos negros em rotação, formando uma combinação de planos distintos com apenas um fluxo fraco os conectando. Se o desalinhamento original do disco externo em relação ao buraco negro é $45^\circ < \varphi < 135^\circ$, a precessão contínua destes discos produz um fluxo de gás contrarrotacionando parcialmente. Isto conduz a uma queda rápida conforme o momento angular é cancelado e tenta circularizar em raios ainda menores. Para ângulos de inclinação menores a quebra pode ainda ocorrer e pode conduzir a outros efeitos observáveis tais como oscilações quase-periódicas. Para tais efeitos não aparecerem o spin do buraco negro deve ser pequeno ou quase alinhado com o disco.

Nixon, King & Price (2012) realizaram simulações SPH de discos de acreção ao redor de buracos negros retrógrados e estimaram analiticamente a taxa de acreção máxima e

compararam com resultados de simulações SPH encontrando neste caso que a taxa de acreção pode ser da ordem de, ou até 100 vezes maior quando comparada com discos planos, estudando este comportamento para diferentes ângulos de inclinação. A taxa de acreção quando o ângulo de inclinação é menor do que 90° é semelhante ao caso de um disco plano. Isto mostra que a interação entre as órbitas do gás é relativamente fraca com o gás permanecendo em órbitas praticamente circulares com os planos variando muito lentamente entre o raio interno e externo. Já as simulações com ângulo de inclinação maiores do que 90° mostraram um aumento dramático na taxa de acreção devido ao cancelamento direto do momento angular orbital e energia onde as órbitas do gás se cruzam. A simulação com ângulo de inclinação de 90° apresentou um período inicial de fluxo caótico entre os dois discos até o disco interno mover-se para 85° depois de misturar momento angular com o disco externo. Neste ponto uma deformação forte desenvolveu-se e o fluxo continuou numa forma semelhante até 60° . A evolução das simulações com ângulos de inclinação de 120° e 150° procederam de uma forma muito diferente. Isto é devido ao compartilhamento de momento angular que agora causa uma mudança significativa nas órbitas. Na simulação com 120° o gás cai da região entre os dois discos e circulariza em raios dentro do disco interno. Neste processo parte do gás é acretado conforme carrega momento angular. Este gás não tem o mesmo momento angular do disco interno; é uma mistura do gás dos dois discos. O gás cai e alimenta o disco de acreção e um disco de acreção novo mais interno. Este disco mais interno está fortemente deformado com relação ao disco original e há novamente uma dissipação extra entre estes dois discos conforme eles se alinham. Para a simulação com um ângulo de inclinação de 150° o gás cai num raio muito menor na região entre os dois discos. Inicialmente uma grande quantidade de gás é diretamente acretada no buraco negro. A forte dissipação ocorrendo inicialmente na simulação faz com que o disco interno seja espalhado ao redor do raio de acreção. Parte do gás caindo tenta circularizar num raio onde é forçado a impactar com o disco interno. Como ainda tem parte do momento angular do disco externo, ele gera o cancelamento do momento angular produzindo mais acreção. O caso com um ângulo de inclinação de 180° não parece ser um caso realístico. No entanto, algo próximo deste caso pode aparecer na evolução de discos de acreção ao redor de buracos negros em rotação. e também durante a evolução do disco de acreção num sistema binário. Inicialmente enquanto os dois discos estão em contato, há um grande cancelamento do momento angular para o gás e este gás tenta

então cair no buraco negro. A pressão do disco interno é o bastante para forçar a queda do gás fora do plano do disco onde ele pode se comunicar em órbitas com baixo momento angular até o centro. Este gás então circulariza dentro do disco interno e depois colide com o gás em órbitas semelhantes perdendo sua energia orbital nos choques. Este novo disco mais interno tem o mesmo sentido do momento angular do disco externo desde que ele tem momento angular específico elevado. Uma vez que o disco interno original espalhou-se para dentro, o mesmo processo inicia-se entre os dois discos.

Nixon & King (2013) argumentaram que jatos precessionando em escalas de tempo menores do que a escala de tempo viscosa é uma forte indicação de que o jato está sendo produzido pelo disco e não pelo processo Blandford-Znajek e sugeriram que uma nova física para explicar a precessão nestes casos deve ser obtida.

Sorathis, Krolik & Hawley (2013a) realizaram uma simulação hidrodinâmica para estudar o caso mais simples de discos deformados, a relação de uma deformação não forçada sob a dinâmica da dinâmica de fluídos, isto é, com nenhum stress interno outro que o stress de Reynolds. Focaram no regime não linear em que a taxa de curvatura é quando comparada a escala de altura do disco. Quando deformações são não lineares, gradientes de pressão fortes conduzem a movimento radial transônico junto aos cantos superior e inferior da superfície do disco que eficientemente misturam momento angular. A taxa de decaimento não linear resultante da deformação aumenta com a taxa e largura da deformação, mas nos parametros estudados neste trabalho, é independente da velocidade do som. A magnitude característica dos fluxos de momento angular associados por outro lado aumentam com a taxa e variação radial da deformação local sobre o qual a deformação se estende. Ela também aumenta com o aumento da velocidade do som, mas mais lentamente do que linearmente. Os fluxos de momento angular respondem a taxa de deformação após um atraso que escala com a raiz quadrada do tempo para as ondas sonoras cruzarem a extensão radial da deformação. Estes comportamentos estão em variância com um número de suposições geralmente utilizadas em modelos analíticos utilizados para descrever a dinâmica de deformações lineares.

Sorathis, Krolik & Hawley (2013b) realizaram duas simulações uma puramente MHD e uma hidrodinâmica com o objetivo de entender o mecanismo específico de alinhamento do efeito Bardeen-Petterson. Como no trabalho anterior, encontraram que a deformação do disco induz fluxos radiais que misturam momento angular de diferentes orientações;

contudo, também mostraram que a velocidades destes fluxos são geralmente transônicos e são muito fracamente influenciados pelo stress interno outro que a pressão. Em particular, a turbulência MHD não age de uma forma consistente como uma viscosidade isotrópica. Quando efeitos MHD estão presentes o disco alinha primeiro em raios pequenos e então em raios grandes; alinhamento é apenas parcial no caso hidrodinâmico. Identificaram o mecanismo de transporte de momento angular específico gerando alinhamento e mostraram como os efeitos MHD podem permitir estes efeitos operarem mais eficientemente. Por fim, relacionaram a velocidade na qual uma frente de alinhamento de propaga para fora com a taxa de torque de Lense-Thirring entregua momento angular em raios pequenos.

Efeito Bardeen-Petterson em NGC 1275

Neste capítulo mostraremos que o efeito Bardeen-Petterson pode ser o mecanismo responsável pela precessão do jato da galáxia NGC 1275.

NGC 1275 é a galáxia elíptica dominante localizada no centro do aglomerado de Perseus e está associada com a rádio fonte 3C84, também conhecida como Perseus A. Através das características espectrais ópticas de seu núcleo, esta galáxia foi classificada como uma galáxia Seyfert (Veron 1978) mas sua distribuição de energia espectral se estende até raios-gama e assemelha-se com a de um blazar (Angel & Stockman 1980; Abdo et al. 2009).

NGC 1275 é a superposição de dois sistemas com diferença de 300 km s^{-1} na velocidade radial (Minkowski 1955). A galáxia principal é a que tem menor velocidade enquanto que a de maior velocidade está localizada na frente conforme revelado pela absorção do contínuo em raios-X e pela presença de linhas de absorção no óptico e rádio (Ekers, van der Hults & Miley 1976; Briggs, Snijders & Boksenberg 1982; Fabian et al. 2000, Gilmon, Sanders & Fabian 2004).

Em escalas de kilo-parsec a rádio fonte 3C84 apresenta um jato cuja estrutura parece ter a forma da letra Z (Pedlar et al. 1990), estando rodeada por um halo difuso visto em baixas frequências que se estende bem dentro da região do meio intra-aglomerado (Miley & Perola 1975; Kassim et al. 2007). De sua morfologia rádio, NGC 1275 foi classificada como sendo intermediária entre os tipos FRI e FRII mas seu fluxo rádio total é característico de uma fonte brilhante do tipo II (Pedlar et al. 1990).

Em escalas de parsec 3C84 apresenta um jato assimétrico estendendo na direção norte-sul, a parte norte é a mais fraca sendo considerada como o contra-jato parcialmente absorvido pelo material ionizado do disco de acreção que está interceptando a linha de visada

(Walker et al. 2000; Asada et al. 2006; Nagai et al. 2010). Uma região compacta localizada na parte sul numa distância de 15 mili-segundos de arco está quase certamente relacionada as componentes do jato mas sua morfologia é semelhante à dos lóbulos rádio vistos em outras fontes em escalas muito maiores. Walker et al. (2000) argumentaram que o jato não está apenas se propagando mas na verdade está interagindo fortemente com o material ao redor. Da razão das distâncias do jato e contra-jato em relação ao núcleo, eles inferiram uma velocidade para o jato de $0.3-0.5c$ e um ângulo com a linha de visada de $30^\circ - 55^\circ$.

A massa do buraco negro central foi estimada como sendo $3.4 \times 10^8 M_\odot$ por Wilman et al. (2005) usando observações da linha do H_2 no infravermelho, enquanto que McGregor et al. (2007) estimaram uma massa de $7 \times 10^8 M_\odot$ através de observações da linha de ferro. Ajustando elipses nos mapas de velocidade e dispersão de velocidades, eles modelaram um disco molecular distorcido que forma um ângulo de 37° com a linha de visada que se estende até uma distância de 35 pc em ambos os lados do núcleo e rotaciona com velocidade angular kepleriana.

NGC 1275 é uma fonte forte de raios-X com emissão que se estende até o meio intra-aglomerado. Um par de cavidades nas imagens em raios-X coincidem em posição com os lóbulos rádio internos (Bohringer et al. 1995; McNamara et al. 1996; Fabian et al. 2006) enquanto que cavidades externas não relacionadas com a emissão rádio atual podem estar associadas com lóbulos rádio antigos que estão flutuando (Fabian et al. 2002).

Os pares de cavidades possuem ângulos de posição diferentes no plano do céu sugerindo que se o jato é responsável por sua formação ele estaria precessionando com um grande ângulo de abertura (Dunn et al. 2006; Sternberg & Soker 2008).

Falceta-Gonçalves et al. (2010) realizaram simulações 3D da interação de um jato precessionando com o plasma do meio intra-aglomerado assumindo que o efeito Bardeen-Petterson era o responsável pelo torque que origina a precessão e encontraram que para inflar mais de um par de bolhas o ângulo de precessão deveria ser maior do que 40° e a precessão deveria durar pelo menos três períodos.

Neste capítulo investigamos os parâmetros físicos do buraco negro e disco de acreção que podem produzir o torque Bardeen-Petterson responsável pela precessão do jato. Aqui assumimos um disco fino com densidade superficial na forma de lei de potência e obtemos uma relação entre o expoente desta lei de potência, os coeficientes da viscosidade e o mo-

mento angular do buraco negro de Kerr. Iremos também apresentar o modelo de precessão adotado para explicar a forma do jato observado nos mapas rádio.

4.1 Geometria do jato precessionando

Neste trabalho consideramos um jato perpendicular a parte interna do disco de acreção que está precessionando com um período T_{prec} ao redor de um eixo que forma um ângulo χ_0 com a linha de visada e possui um ângulo projetado η_0 no plano do céu relativo a direção norte. O ângulo de abertura $\varphi_D(t)$ do cone delimitado pelo jato precessionando pode ser variável; sua evolução temporal depende da ação dos torques agindo no disco de acreção. A posição de um elemento de plasma no jato que foi ejetado na época $t = t_{ej}$ com velocidade v_{ej} é representada pelos ângulos $\chi(t)$ com relação a linha de visada e $\eta(t)$ com relação a direção norte no plano do céu; estes ângulos podem ser expressos como (Abraham & Romero 1999):

$$\eta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (4.1)$$

$$\chi(t) = \arcsin \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \quad (4.2)$$

com

$$x(t) = A(t) \cos \eta_0 - B(t) \sin \eta_0, \quad (4.3)$$

$$y(t) = A(t) \sin \eta_0 + B(t) \cos \eta_0, \quad (4.4)$$

onde

$$A(t) = \cos \varphi_D(t) \sin \chi_0 + \sin \varphi_D(t) \cos \chi_0 \sin(\omega t + \xi), \quad (4.5)$$

$$B(t) = \sin \varphi_D(t) \cos(\omega t + \xi), \quad (4.6)$$

com $\omega = 2\pi/T_{prec}$, e ξ sendo uma constante que representa a fase inicial da precessão.

Quando os eixos x e y são escolhidos na direção da ascensão reta α e declinação δ , respectivamente, as posições projetadas num tempo t de uma elemento de plasma ejetado num tempo t_{ej} , relativo a origem do jato são:

$$\Delta\alpha(t, t_{ej}) = \frac{v_{jet}(t - t_{ej})}{D}x(t), \quad (4.7)$$

$$\Delta\delta(t, t_{ej}) = \frac{v_{jet}(t - t_{ej})}{D}y(t), \quad (4.8)$$

onde D é a distância ao observador.

4.2 Imagem rádio

Como mencionado anteriormente, um dos objetivos deste trabalho era verificar se um jato precessionando, localizado no núcleo ativo de NGC 1275, pode ser o responsável pela formação da rádio fonte 3C84. Para testar esta suposição, utilizamos o modelo descrito na seção anterior para calcular a posição, projetada no plano do céu, das componentes ejetadas em diferentes tempos t_{ej} . Observações de VLBI (Abdo et al. 2009; Nagai et al. 2010) mostram que estas ejeções ainda estão ocorrendo em intervalos de tempo da ordem de décadas e isto nos permite assumi-las como contínuas quando comparadas com a idade da fonte.

Duas restrições para o jato no tempo presente t_{obs} foram inferidas de observações de VLBI. A primeira é o ângulo do jato com o plano do céu, $\eta(t_{obs}) \sim 170^\circ$, que foi obtida das componentes ejetadas recentemente (Asada et al. 2006), embora a rádio fonte, até mesmo em escalas de parsec, comporta-se como uma fonte dupla compacta ao invés de um jato colimado.

A segunda restrição é o ângulo entre o jato e a linha de visada $\chi(t_{obs})=30^\circ - 50^\circ$, ele foi obtido da razão do brilho e da distância aparente das componentes do jato e contra-jato (Walker, Romey & Benson 1994).

O ângulo $\varphi_D(t)$ entre o jato precessionando e a direção do momento angular total, que representa a abertura do cone de precessão, é apresentado na figura 4.1; foi obtida da solução das equações 3.36 e 3.37 usando $\varphi(t_0)=120^\circ$ e $J_D(t_0)/J_{BH}=1.1$. Esta solução foi utilizado por Falceta-Gonçalves et al. (2010) em suas simulações hidrodinâmicas 3D para reproduzir as bolhas observadas nas imagens em raios-X de NGC 1275 (Fabian et

al. 2002), assumindo que elas eram infladas por um jato precessionando. Da simulação também foi obtido o período de precessão $T_{prec}=5\times 10^7$ anos e o tempo necessário para a formação do jato, $(t_{obs} - t_0) = 3T_{prec}$; estes parâmetros foram necessários para garantir a formação dos dois pares de bolhas conforme visto na imagem do CHANDRA de NGC 1275.

Figura 4.1: Evolução do ângulo φ entre o momento angular do disco de acreção e o momento angular do buraco negro, ângulo de precessão φ_D , e o ângulo entre o momento angular total e do buraco negro φ_{BH} , como função de $\Delta\tau = (t - t_0)/T_{align}$. A linha vertical em $\Delta\tau=3$, corresponde ao tempo atual t_{obs} , quando a idade do jato é igual a três períodos de precessão.

Com estas restrições estimamos os outros parâmetros χ_0 , η_0 e v_{jet} sobrepondo o caminho descrito pelo jato e contra-jato no plano do céu nos mapas rádio de 3C84 e nas imagens em raios-X de NGC 1275.

Na figura 4.2 apresentamos o modelo do jato, obtido usando as equações 4.1 - 4.8 para épocas compreendidas entre o presente t_{obs} e $t_{obs}-1.5T_{prec}$, com os parâmetros $\chi_0=30^\circ$, $\eta_0=47^\circ$ (medido do norte para o leste) e $v_{jet}=100 \text{ km s}^{-1}$, superpostos aos mapas rádio obtidos com o interferômetro MERLIN em 151 MHz com resolução de 2.5 segundos de arco e em 1666 MHz com resolução de 0.4 segundos de arco (Pedlar et al. 1990). Através de uma inspeção visual, estimamos os erros como $\Delta\chi_0=4^\circ$, $\Delta\eta_0=10^\circ$ e $\Delta v_{jet}=10 \text{ km s}^{-1}$. Podemos ver que o modelo do jato reproduz muito bem o mapa rádio em 151 MHz, embora

o eixo de precessão (seta dupla na figura 4.2) não coincida com a direção da radio fonte. Devido a efeitos de projeção os jatos não tem a mesma velocidade angular em todas as direções no plano do céu, gastando mais tempo na posição indicada por triângulos na figura, exatamente onde a intensidade da fonte rádio é maior, simulando a existência de lóbulos rádio em ambos os extremos da imagem rádio; de fato a posição destes lóbulos foi utilizada para restringir os parâmetros do modelo. A imagem superior da figura 4.2 apresenta a parte central de 3C84, ela mostra que o modelo segue muito bem a curvatura do jato observada e coloca uma forte restrição no valor de χ_0 .

Na figura 4.3 apresentamos as posições do modelo do jato (linha azul) e contra-jato (linha vermelha) para a vida toda da fonte rádio ($t_{obs} - t_0$) sobreposto a imagem em raios-X em 0.5-7 keV, obtidas com o CHANDRA (Fabian et al. 2000) que também inclui os contornos rádio do mapa do VLA em 332 MHz de Pedlar et al. (1990). Podemos ver que da trajetória o modelo cobre a fonte rádio completamente e também delimita as bolhas internas em raios-X. As bolhas externas sofreram interação com o meio intra-aglomerado e não é esperado que elas sigam a trajetória do jato. Um fato importante que favorece a direção do eixo de precessão do jato é que ele coincide com a direção do eixo maior dos mapas de temperatura obtidos em raios-X (Fabian et al. 2006) e do mapa do índice espectral em rádio apresentado por Dunn, Fabian & Sanders (2006).

Figura 4.2: Superior: Posição do modelo do jato (linha contínua) e contra-jato (linha pontilhada) projetadas no plano do céu no intervalo de tempo $\tau = 1.5$, sobreposto ao mapa rádio do MERLIM em 151 MHz de Pedlar et al. (1990). A seta dupla representa a direção do eixo do cone de precessão, os triângulos as posições onde a velocidade angular atinge seu valor mínimo. Inferior: modelo do jato para a parte interna da rádio fonte sobreposto ao mapa em 1666 MHz do MERLIM.

Figura 4.3: Posição do modelo do jato (linha azul) e contra-jato (linha vermelha) projetados no plano do céu para o intervalo de tempo $\tau=3$, sobreposto a imagem do CHANDRA e VLA em 332 MHz (Fabian et al. 2000; Pedlar et al. 1990).

4.3 Parâmetros do disco de acreção e do buraco negro

Nesta seção derivaremos a relação entre os parâmetros físicos do disco de acreção, Σ_0 e s , e o spin do buraco negro a_* (equações 2.120 - 2.122) usando como restrições a massa do buraco negro $M_{BH}=3.4 \times 10^8 M_\odot$ (Wilman et al. 2005), a luminosidade bolométrica $L_{Bol}=4 \times 10^{44} \text{ erg s}^{-1}$ (Levinson et al. 1995) e as bolhas em raios-X cujas idades variam entre 100-150 milhões de anos (Fabian et al. 2002, Dunn & Fabian 2004). Também utilizamos o modelo de precessão derivado anteriormente e assumimos que a precessão é devida ao torque de Bardeen-Petterson e o período de precessão é igual a 1/3 da idade das bolhas conforme apresentado na figura 4.1.

Utilizando as equações do disco apresentadas no capítulo anterior, podemos obter uma relação entre Σ_0 e a_* que depende da razão inicial entre os momentos angulares do disco de acreção e do buraco negro, do raio do disco e do parâmetro s que é dada por:

$$\Sigma_0 = \frac{(2.5 - s)a_*M_{BH}}{2\pi R_g^2} \left[\frac{J_D(t_0)}{J_{BH}} \right] \left[\frac{R_g}{R_D} \right]^{2.5-s} \quad (4.9)$$

Na figura 4.4 apresentamos esta relação para $J_D(t_0)/J_{BH}=1.1$, $s=0.7$, 0.5 e 0.3 , e

$R_D=0.5, 3.0$ e 5.0 pc. Também apresentamos os valores máximos e mínimos de Σ_0 calculados utilizando as equações 2.121 e 2.122. Para o cálculo do limite inferior assumimos neste caso que $\Upsilon=0.03$ e para ambos os casos utilizaremos $\alpha_1=0.4$. O motivo da escolha do valor de α_1 será apresentada no final deste capítulo. Resultados muito semelhantes podem ser obtidos para $\alpha_1=0.3$. Podemos ver que para todos os valores de s , o raio do disco deve ser maior do que 0.5 pc, de outra forma a densidade superficial ficaria maior do que o valor máximo permitido. Podemos ver também que Σ_0^{max} aproxima-se de Σ_0^{min} quando o parâmetro s decresce e que o raio não pode ser maior do que $R=5$ pc para $s=0.6$, de outra forma, Σ_0 tornaria-se menor do que Σ_0^{min} .

Para cada valor de Σ_0 calculado anteriormente (eq. 4.9), calculamos o raio de Bardeen-Petterson R_{BP} (eq. 3.25) e o tempo de alinhamento (eq. 3.28). Na figura 4.5 apresentamos estas quantidades como função de a_* para os três valores de s e R_D e três valores para a razão ν_2/ν_1 . No mesmo gráfico mostramos o raio do disco R_D , o raio de transição R_T (eq. 3.27), além do qual a torção é transmitida por ondas e o raio da órbita interna mais estável R_{ms} , todos estes raios em unidades do raio gravitacional R_g . Para cada raio do disco, utilizamos diferentes valores para ν_2/ν_1 . Para $R_D=0.5$ pc utilizamos $\nu_2/\nu_1=1, 8$ e 20 , para $R_D=3.0$ pc utilizamos $\nu_2/\nu_1=4, 6$ e 10 e para $R_D=5$ pc utilizamos $\nu_2/\nu_1=3, 5$ e 8 . Observa-se que quanto maior o raio do disco, mais o raio de Bardeen-Petterson se aproxima do raio do disco e apenas para spins muito próximos de zero este raio é menor do que R_{ms} .

Figura 4.4: Densidade superficial do disco Σ_0 (curva contínua), Σ_0^{min} (curva tracejada) e Σ_0^{max} (curva ponto-pontilhada). A curva preta corresponde aos valores para $R_D=0.5$ pc, curva vermelha para $R_D=3.0$ pc e a curva azul para $R_D=5.0$ pc. O painel superior corresponde a $s=0.7$, meio $s=0.5$ e inferior $s=0.3$. A unidade de Σ_0 é gcm^{-2} .

Figura 4.5: Esquerda: Raio de Bardeen-Petterson em função do spin do buraco negro. A linha preta corresponde a $s=0.7$, vermelha a $s=0.5$ e azul a $s=0.3$. O painel superior corresponde a $R_D=0.5$ pc, meio a $R_D=3.0$ pc e inferior a $R_D=5.0$ pc. O raio de transição não aparece no gráfico por ser maior do que a escala, a linha laranja corresponde ao raio do disco de acreção e a linha verde ao raio interno do disco. Direita: tempo de alinhamento correspondendo aos mesmo valores de R_D e s em função do spin. A linha verde corresponde ao tempo de alinhamento utilizado por Falceta-Gonçalves et al. (2010).

Observa-se que para $R_D=0.5$ pc apenas com a curva correspondente a $s=0.7$ obtem-se o tempo de alinhamento de 50 milhões de anos para $a_*=-0.85$, para $R_D=3.0$ pc as curvas entre $s=0.7$ e 0.5 e $-0.9 < a_* < -0.25$ e para $R_D=5$ pc as três curvas fornecem o tempo de alinhamento desejado para $a_*=-0.05$, $s = -0.15$ e para $a_*=-0.4$.

Portanto, a variação possível para o raio do disco é limitado entre 0.5 e 5 pc, e desta forma utilizamos um raio intermediário $R_D=3$ pc para investigar o efeito da lei de potência s no raio de Bardeen-Petterson e tempo de alinhamento. Isto é apresentado na figura 4.6, onde apresentamos novamente R_{BP} , R_T e R_{ms} e o tempo de alinhamento como função de a_* para $s=0.7$, 0.5 e 0.3 , utilizando os mesmos valores da razão ν_2/ν_1 utilizados anteriormente. Podemos observar que nos três casos obtemos o tempo de alinhamento de 50 milhões de anos, sendo que para $s=0.7$, a razão ν_2/ν_1 deve ser da ordem de 4.0 mas o spin do buraco negro neste caso é $a_*=-0.7$, para $s=0.5$ e razão ν_2/ν_1 pode ser igual a 4.0 e 6.0 e para $s=0.3$ a razão ν_2/ν_1 pode ser igual a 4.0 , 6.0 e 10.0 sendo a solução com $\nu_2/\nu_1=10.0$ fornecendo o melhor resultado, podendo o buraco negro ter um spin de $a_*=-0.6$.

Figura 4.6: Esquerda: Raio de Bardeen-Petterson em função do spin do buraco negro. O painel superior corresponde a $s=1.0$, meio a $s=0.8$ e inferior a $s=0.6$. A linha verde corresponde ao raio interno do disco, laranja ao raio externo e azul clara ao raio de transição. Para o painel superior utilizou-se $\nu_2/\nu_1=1, 5$ e 20 ; meio: $\nu_2/\nu_1=1, 4$ e 30 ; inferior: $\nu_2/\nu_1=1, 5$ e 30 . Direita: Tempo de alinhamento utilizando os raios de Bardeen-Petterson calculados.

Conforme observou-se, pode-se obter o período de precessão para diferentes valores da razão ν_2/ν_1 . Devemos agora verificar se a teoria de discos torcidos pode explicar estes valores. Para isto, resolvemos as equações do modelo de Ogilvie (1999) para obter esta razão em função da amplitude da deformação. O gráfico desta razão em função da amplitude da deformação é apresentado na figura 4.7.

Figura 4.7: Valores da razão ν_2/ν_1 para diferentes valores de α_1 em função da amplitude da deformação.

Conforme pode-se verificar da figura 4.7, os valores da razão ν_2/ν_1 podem ser obtidos para α_1 entre 0.3-0.4 e isto explica o fato de termos utilizado $\alpha_1=0.4$ em nossos cálculos.

Por fim, verificou-se se o valor de α_1 é maior do que a escala de altura do disco (H/R). Na figura 4.8 apresentamos o valor médio da escala de altura em função do spin do buraco negro.

Figura 4.8: Escala de altura média em função do spin do buraco negro. Painel superior corresponde ao raio do disco de 0.5 pc, o painel do meio ao raio de 3 pc e o painel inferior ao raio de 5 pc. As linhas preta, vermelha e azul correspondem aos valores de $s=1.0$, 0.7 e 0.5 e a linha laranja ao valor de α_1 .

Conforme pode-se observar, o valor de α_1 é muito maior do que a escala de altura do disco

Simulações GRMHD de discos de acreção inclinados

Neste capítulo descreveremos o código utilizado, introduziremos as equações do GRMHD, explicaremos como as simulações foram realizadas e apresentaremos os diagnósticos feitos em nossas simulações.

5.1 *Cosmos++*

O trabalho foi realizado utilizando o código astrofísico *Cosmos++* (Anninos et al. 2005, Fragile et al. 2012). Este código inclui varios esquemas para resolver as equações GRMHD, incluindo esquemas de viscosidade artificial estendida (eAv), o método de diferença central não oscilatório e o método de captura de choques em alta resolução que será apresentado na seção 5.2. O esquema de viscosidade artificial (AV) consiste em variar a energia interna com o tempo (conservação da entropia) e o esquema eAv é um esquema híbrido de duas energias que resolve as equações da energia total e interna ao mesmo tempo. O esquema eAv tem a vantagem que ele conserva a energia total. Além disso, este código tem a opção de resolver as equações MHD tanto no referencial newtoniano quanto no referencial da relatividade geral. O código utiliza as três leis básicas do GRMHD; equação da continuidade:

$$(\rho u^\beta)_{;\beta} = 0, \quad (5.1)$$

conservação do tensor de energia-stress

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \quad (5.2)$$

equação de Maxwell homogênea

$${}^*F^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (5.3)$$

No caso MHD, o tensor de energia-stress pode ser escrito como

$$T^{\alpha\beta}_{MHD} = (\rho h + 2P_B)u^\alpha u^\beta + (P_g + P_B)g^{\alpha\beta} - b^\alpha b^\beta, \quad (5.4)$$

onde ρ é a densidade de massa em repouso do fluido, $h = 1 + \epsilon + P_g/\rho$ é a entalpia específica, ϵ é a densidade de energia interna específica, P_g é a pressão do fluido, P_B a pressão magnética, $u^\alpha = g^{\alpha\beta}u_\beta$ é o quadri-vetor velocidade do fluido, $g^{\alpha\beta}$ é a métrica, g é o determinante da métrica, $F^{\alpha\beta}$ é o tensor de Faraday, ${}^*F^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/2$ é o seu dual e b^α é o campo magnético calculado por um observador comóvel com o fluido e pode ser definido em termos de seu tensor de Faraday dual $b^\alpha = u_\beta {}^*F^{\alpha\beta}$. Neste trabalho usaremos a lei isentrópica para a equação de estado (EOS) dada por

$$P = (\Gamma - 1)\rho\epsilon \quad (5.5)$$

onde Γ é o índice adiabático.

Quando expandimos as equações GRMHD nas suas componentes espaciais e temporais e as reorganizamos em termos de novas variáveis D , $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}$ onde $D = \rho W$ é a densidade generalizada do fluido, $W = \sqrt{-g}u^0 = \sqrt{-g}\gamma/\alpha$ é o fator generalizado de amplificação, com $\alpha = 1/\sqrt{-g^{00}}$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, onde $v = v_i v^i$, sendo v_i a velocidade do fluxo na direção normal ao observador, $V^i = u^i/u^0$ é a velocidade de transporte do fluido, $\mathcal{E} = \sqrt{-g}T^{00}_{MHD}$ é a densidade de energia total e $\mathcal{S}^j = \sqrt{-g}T^{0j}_{MHD}$ é a densidade de momento contra-variante, obtemos um sistema acoplado de equações:

$$\partial_t D + \partial_i(DV^i) = 0, \quad (5.6)$$

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_i(\sqrt{-g} T^{i0}_{MHD}) = -\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{MHD} \Gamma^0_{\alpha\beta}, \quad (5.7)$$

$$\partial_t \mathcal{S}^j + \partial_i(\sqrt{-g} T^{ij}_{MHD}) = -\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{MHD} \Gamma^j_{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

$$\partial_t \mathcal{B}^j + \partial_i(\mathcal{B}^j V^i - \mathcal{B}^i V^j) = 0, \quad (5.9)$$

Os termos $\Gamma^j_{\alpha\beta}$ são os coeficientes geométricos da métrica. Junto com estas equações, a componente temporal da equação de Maxwell também provê a restrição de divergente nulo $\partial_j \mathcal{B}^j = 0$.

O campo magnético tem diferentes representações nestas equações, $\mathcal{B}^j = \sqrt{-g}B^j$ é o tri-vetor do campo magnético amplificado. O campo magnético $B^i = {}^*F^{\alpha i}$ está relacionado com o campo comóvel por

$$B^i = u^0 b^i - u^i b^0. \quad (5.10)$$

A pressão magnética é $P_B = b^2/2 = b^\alpha b_\alpha/2$.

As equações GRMHD apresentadas (5.6-5.9), podem ser escritas em uma forma conservativa:

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{P}) + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{P}) = \mathbf{S}(\mathbf{P}) \quad (5.11)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\epsilon \\ V^j \\ B^j \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

e

$$\mathbf{U}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} D \\ \mathcal{E} \\ \mathcal{S}_j \\ \mathcal{B}^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} DV^i \\ \sqrt{-g} T_{\text{mhd}}^{i0} \\ \sqrt{-g} T_{\text{mhd}}^{ij} \\ \mathcal{B}^j V^i - \mathcal{B}^i V^j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-g} T_{\text{mhd}}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \\ -\sqrt{-g} T_{\text{mhd}}^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

onde os vetores representam as quantidades conservadas. Integrando ambos os lados das equações 5.6-5.9 com relação ao volume e aplicando o teorema de Gauss, as equações conservadas podem ser escritas da seguinte forma

$$\int_V \partial_t \mathbf{U} dV = - \oint_S \mathbf{F}^i dA_i + \int_V \mathbf{S} dV, \quad (5.14)$$

É possível observar das equações acima que as variáveis conservadas U , os fluxos F^i e os termos fontes são todos funções de uma combinação de variáveis primitivas.

5.2 Métrica de Kerr

Antes de prosseguir, apresentaremos a métrica de Kerr e os coeficientes desta métrica em coordenadas Boyer-Lindquist (coordenadas BL) e coordenadas Kerr-Schild (coordenadas KS).

Existem quatro métricas para descrever buracos negros. Duas para buracos negros sem rotação e duas para buracos negros com rotação. Quando o buraco negro não está rotacionando temos a métrica de Schwarzschild para o caso de um buraco negro sem carga ($Q = 0$) e a métrica de Reissner-Nordström para um buraco negro com carga ($Q \neq 0$). Para o caso de buracos negros com rotação temos a métrica de Kerr para o caso sem carga ($Q = 0$) e a métrica de Kerr-Newman para o caso de buraco negro com carga ($Q \neq 0$). Nesta dissertação iremos focar no caso apenas de buracos negros com $Q = 0$.

A forma explícita da métrica de Kerr é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2MR}{\Sigma} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2 \quad (5.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta(R) &= R^2 - 2MR + a^2 \\ \Sigma(R) &= R^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.16)$$

e a é o spin do buraco negro.

A métrica de Kerr depende de dois parâmetros M e a , comparando 5.15 com o limite da métrica num campo muito distante de um objeto isolado, vemos que M representa a massa do buraco negro e Ma seu momento angular, medido no infinito. As coordenadas (t, r, θ, ϕ) , em que é expressa a métrica de Kerr são chamadas coordenadas BL.

Algumas propriedades da métrica de Kerr podem ser vistas na equação 5.15:

- É estacionária: não depende explicitamente do tempo
- É axisimétrica: não depende explicitamente em ϕ
- Não é estática: não é invariante para o tempo reverso $t \rightarrow -t$

- É invariante para inversões simultâneas de t e ϕ .

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t \\ \phi &\rightarrow -\phi \end{aligned} \quad (5.17)$$

como esperado: o tempo reverso de um objeto rotacionando produz um objeto que rotaciona na direção oposta

- No limite $r \rightarrow \infty$, a métrica de Kerr reduz para a métrica de Minkowski em coordenadas polares; então o espaço-tempo de Kerr é assintoticamente plano.
- No limite $a \rightarrow 0$ (com $M \neq 0$), reduz a métrica de Schwarzschild: $\Delta \rightarrow R(R - 2M)$, $\Sigma \rightarrow R^2$, então

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (5.18)$$

Definindo $f = 2MR/\Sigma$, os coeficientes da métrica covariante tem a forma:

$$g_{\mu\nu}^{[BL]} = \begin{pmatrix} -1 + f & 0 & 0 & -\frac{af \sin^2 \theta}{2} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \frac{-af \sin^2 \theta}{2} & 0 & 0 & \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} [(R^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta] \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Os coeficientes da métrica contra-variante são dados por:

$$g_{[BL]}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(\Sigma(a^2 \cos^2 \theta (a^2 + R^2) + R(a^2 R + R^3 + 2a^2 M \sin^2 \theta)))}{z} & 0 & 0 & -\frac{aMR\Sigma}{z} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{aM\Sigma}{z} & 0 & 0 & -\frac{\text{cosec}^2 \theta (-(a^2 \cos^2 \theta) + (2M - R)R)\Sigma}{z} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

onde

$$\begin{aligned} z = a^4 \cos^4 \theta (a^2 + R^2) - a^2 \cos^2 \theta R(a^2 \cos^2 \theta aM + a^2(M - 2R) + 2(M - R) + R^2) + \\ R^2(-1((2M - R)R(a^2 + R^2)) - a^2 M(3M - 2R) \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (5.21)$$

No caso de uma configuração onde o momento do buraco negro está inclinado com relação ao momento angular do objeto ao redor do buraco negro, a métrica no sistema de

coordenadas BL pode ser obtida através de uma rotação sob o eixo y de um ângulo β_0 . Esta rotação é dada por

$$\begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 & 0 & -\sin \beta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_0 & 0 & \cos \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Uma família compreensiva destes sistemas do espaço-tempo de Kerr pode ser obtido com a seguinte transformação das coordenadas BL (t, r, θ, ϕ) para as novas coordenadas

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi} &= d\phi + (a/\Delta)dr \\ d\tilde{t} &= dt + [(1+Y)/(1+Y-Z)] - [(1-Z^k)/(1-Z)]dr \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} Y &= a^2 \sin^2 \theta / \Sigma^2 \\ Z &= 2MR / \Sigma^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

e k é um inteiro não negativo que parametriza a família (Font, Ibáñez & Papadopoulos 1998). Todos os membros da família são regulares no horizonte; daí, a simples escolha $k = 1$ é preferida. Isto corresponde a então chamada forma Kerr-Schild (KS) da métrica de Kerr. Com esta escolha a métrica torna-se:

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2MR}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4MRa \sin^2 \theta}{\Sigma} d\tilde{t}d\tilde{\phi} + \frac{4MR}{\Sigma} d\tilde{t}dr + \left(1 + \frac{2MR}{\Sigma}\right) dr^2 \\ &\quad - 2a \left(1 + \frac{2MR}{\Sigma}\right) drd\tilde{\phi} + \Sigma^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[\Sigma + a^2 \left(1 + \frac{2MR}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \right] d\tilde{\phi}d\tilde{\phi} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Os coeficientes covariantes da métrica são dados por:

$$g_{\mu\nu}^{[KS]} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2MR}{\Sigma} & \frac{2MR}{\Sigma} & 0 & -\frac{2aMR \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ \frac{2MR}{\Sigma} & 1 + \frac{2MR}{\Sigma} & 0 & -a \left(1 + \frac{2MR}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & -a \left(1 + \frac{2MR}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta (a^2 + R^2) - \frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Os coeficientes contra-variantes são dados por:

$$g_{[KS]}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-(2MR+\Sigma)}{\Sigma} & \frac{2MR}{\Sigma} & 0 & 0 \\ \frac{2MR}{\Sigma} & \frac{2\Delta}{(a^2 \cos^2 \theta + 2R^2)} & 0 & \frac{2a}{a^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ 0 & \frac{2a}{a^2(1+\cos^2 \theta)} & 0 & \frac{2c \operatorname{cosec}^2 \theta}{a^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2R^2} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

5.3 HRSC

O esquema numérico de diferença central não oscilatório (NOCD) foi introduzidos como alternativa de métodos de viscosidades artificiais e de Godunov para resolver as equações da hidrodinâmica relativística. Esta aproximação provê a vantagem do método de Godunov em capturar fluxos ultra-relativísticos sem o custo e complicação dos Riemann solvers.

A versão do código utilizada atualmente (Fragile et al. 2012), tem um esquema de captura de choques em alta resolução que substitui o método de diferenças centrais não oscilatórios (NOCD, Anninos & Fragile 2003). Este esquema compartilha muitos elementos com o método de diferença central não oscilatório (NOCD) apresentado em Anninos & Fragile (2005).

Podemos discretizar a equação 5.14 usando uma representação para os volumes finitos obtendo

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{V} \sum_{faces} (\mathbf{F}^i \Delta A_i) + \Delta t \mathbf{S}. \quad (5.28)$$

Para obter uma melhor precisão e estabilidade, esta equação é integrada usando o método de saltos escalonados que é de segunda ordem no tempo. Primeiro um meio passo $\Delta t/2$ é utilizado para calcular as variáveis conservadas U^n em $n + 1/2$. Depois, uma nova combinação de primitivas $P^{n+1/2}$ é computada. Estas primitivas intermediárias são usadas para obter F^i e S utilizadas na equação 5.14.

Os F^i são determinados usando um Riemann solver aproximado. No código utilizamos o solver HLL, que foi utilizado em nossas simulações e que reconstrói os fluxos como

$$\mathbf{F} = \frac{c_{min} \mathbf{F}_R + c_{max} \mathbf{F}_L - c_{max} c_{min} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{c_{max} + c_{min}}. \quad (5.29)$$

onde c_{min} e c_{max} são os mínimos e máximos das velocidades das ondas obtidas através da solução do Riemann Solver e L e R referem-se ao lado esquerdo e direito da célula.

Extrapolando-se os valores de P , podemos obter P_R e P_L , as variáveis primitivas nos lados direito e esquerdo de cada zona da interface. De P_R e P_L podemos calcular as quantidades conservadas dos lados esquerdo e direito (U_R e U_L), os fluxos $F_R = F(P_R)$ e $F_L = F(P_L)$ e os máximos da velocidade das ondas que se propagam para a direita e esquerda, $c_{\pm,R}$ e $c_{\pm,L}$.

A interpolação parabólica de P_R e P_L é feita usando o método PPM de Colella & Woodward (1984). O esquema PPM (Piecewise Parabolic Method) é utilizado para resolver choques de forma mais adequadas junto com o Riemann solver.

5.4 Constrained transport

Utilizaremos uma representação promediada no volume de todos os campos magnéticos para usar uma representação escalonada dos mesmos, com a primeira representação dos campos sendo centrada nas faces. Integramos então a equação de indução sobre as superfícies ao invés do volume da célula. Por exemplo, integrando a equação 4.9 sobre as faces x_1 , x_2 e x_3 localizadas em $(i - 1/2, j, k)$, $(i, j - 1/2, k)$ e $(i, j, k - 1/2)$ respectivamente obtemos após o uso da lei de Stokes (Gardiner & Stone 2009),

$$(\mathcal{B}^1)_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = (\mathcal{B}^1)_{i-\frac{1}{2},j,k}^n - \frac{\delta t}{\delta x_2} [(\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}] + \frac{\delta t}{\delta x_3} [(\epsilon_2)_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_2)_{i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \quad (5.30)$$

$$(\mathcal{B}^2)_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1} = (\mathcal{B}^2)_{i,j-\frac{1}{2},k}^n - \frac{\delta t}{\delta x_3} [(\epsilon_1)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_1)_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] + \frac{\delta t}{\delta x_1} [(\epsilon_3)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}] \quad (5.31)$$

$$(\mathcal{B}^3)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\mathcal{B}^3)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^n - \frac{\delta t}{\delta x_1} [(\epsilon_2)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_2)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] + \frac{\delta t}{\delta x_2} [(\epsilon_1)_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (\epsilon_1)_{i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \quad (5.32)$$

onde, por exemplo $(\epsilon_1)_{i,j-1/2,k-1/2}$ é a componente x_1 do campo elétrico $\epsilon_i = -\varepsilon_{ijk} V^j \mathcal{B}^k$ centrado no canto apropriado da célula. O melhor método encontrado até aqui para determinar o campo elétrico centrado nos cantos é simplesmente obter a média dos fluxos recuperados do Riemann solver e centrados nas faces. Por exemplo,

$$(\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4}[(\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j,k} + (\epsilon_3)_{i-\frac{1}{2},j-1,k} + (\epsilon_3)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (\epsilon_3)_{i-1,j-\frac{1}{2},k}]. \quad (5.33)$$

Este procedimento preserva a seguinte representação matemática do divergente zero em cada zona:

$$\partial_i \mathcal{B}^i = \frac{1}{V} [(\mathcal{B}^1 A_1)_{i+1/2,j,k} - (\mathcal{B}^1 A_1)_{i-1/2,j,k} + (\mathcal{B}^2 A_2)_{i,j+1/2,k} - (\mathcal{B}^2 A_2)_{i,j-1/2,k} + (\mathcal{B}^3 A_3)_{i,j,k+1/2} - (\mathcal{B}^3 A_3)_{i,j,k-1/2}]. \quad (5.34)$$

Neste esquema, mantemos as formas escalonadas de ambos os campos primitivos e conservados que estão relacionados pelo determinante da métrica em suas respectivas faces, e.g., $\mathcal{B}^1 = (\sqrt{-g})_{i-1/2,j,k} B^1$. O campo magnético escalonado é utilizado para sobre-escrever a componente apropriada do campo primitivo extrapolado utilizado na reconstrução do fluxo em cada face. Eles são também utilizados quando requeremos valores centrados nas células dos campos magnéticos primitivos, tais como para calcular a pressão magnética. Neste caso usamos os campos promediados no volume:

$$(\mathcal{B}^1)_{i,j,k} = \frac{1}{2}[(B^1)_{i-\frac{1}{2},j,k} + (B^1)_{i+\frac{1}{2},j,k}] \quad (5.35)$$

$$(\mathcal{B}^2)_{i,j,k} = \frac{1}{2}[(B^2)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (B^2)_{i,j+\frac{1}{2},k}] \quad (5.36)$$

$$(\mathcal{B}^3)_{i,j,k} = \frac{1}{2}[(B^3)_{i,j,k-\frac{1}{2}} + (B^3)_{i,j,k+\frac{1}{2}}] \quad (5.37)$$

5.5 Cálculo da velocidade da onda

O Riemann solver aproximado apenas requer os máximos e mínimos das velocidades das ondas. Estas velocidades são também necessárias para ajustar o passo temporal sob a condição CFL. A velocidade relevante é a velocidade de fase da onda ω/κ , e tratamos cada coordenada de forma independente. Para sinais propagando na direção da coordenada x_1 , o autovetor correspondente é $\kappa_\alpha = (-\omega, \kappa_1, 0, 0)$, e a velocidade da onda é ω/κ_1 .

A condição de Courante-Friedrichs-Lewy (CFL) é uma condição necessária para estabilidade quando se resolvem as equações diferenciais parciais de forma numérica (normalmente equações diferenciais hiperbólicas) pelo método de diferença finita. Ela surge

da análise numérica de esquemas explícitos, quando estes são utilizados para evoluir no tempo. Como consequência, o passo temporal deve ser inferior a um certo valor em muitas simulações computacionais caso contrário irá produzir resultados incorretos.

Para encontrar a velocidade da onda no referencial da grade, começamos com a seguinte relação de dispersão aproximada no referencial comóvel (Gammie et al. 2003; Farris et al. 2008):

$$\omega_{cm}^2 = v_T^2 k_{cm}^2 \quad (5.38)$$

onde

$$v_T^2 = \max(1/3, v_A^2 + c_s^2(1 - v_A^2)) \quad (5.39)$$

$v_A^2 = b^2/(\rho h + b^2)$ é a velocidade de Alfvén e $c_s^2 = \Gamma P_{gas}/\rho h$ é a velocidade do som. Substituímos então as relações $\omega_{cm} = -\kappa_\alpha u^\alpha$, $k_{cm}^2 = K_\alpha K^\alpha$ com $K_\alpha = (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)\kappa^\beta$ na equação 5.38 para obter a seguinte equação quadrática para as velocidades das ondas desejadas ω/k_1

$$\left[1 - v_T^2 \left(1 + \frac{g^{00}}{u^0 u^0}\right)\right] \left(\frac{\omega}{k_1}\right)^2 + 2 \left[v_T^2 \left(V^1 + \frac{g^{01}}{u^0 u^0}\right) - V^1\right] \left(\frac{\omega}{k_1}\right) + \left[V^1 V^1 - v_T^2 \left(V^1 V^1 + \frac{g^{11}}{u^0 u^0}\right)\right] = 0. \quad (5.40)$$

As velocidades nas outras direções são encontradas de forma análoga.

5.6 Simulações

Nesta seção descreveremos como as simulações foram realizadas detalhando a inicialização, a função de resfriamento e a grade adaptativa.

5.6.1 Inicialização

As simulações são inicializadas com um tórus axisimétrico ao redor de um buraco negro em rotação que segue a solução analítica de Fragile et al. (2007) que é uma versão levemente modificada de Chakrabarti (1985), onde o tórus é definido pelo spin do buraco negro (a_*), seu raio interno (R_{in}), o raio onde a pressão é máxima (R_{cen}) e um parâmetro q que é utilizado para controlar a distribuição do momento angular e tem a forma

$$l = -\frac{u_\phi}{u_t} = \kappa \left(\frac{g_{t\phi} + l g_{tt}}{l g_{\phi\phi} + l^2 g_{t\phi}} \right)^{\frac{q}{2}-1} \quad (5.41)$$

onde κ é um coeficiente que é fixado pelo requerimento que $l = l_{Kep}$ em $R = R_{cen}$. Em nosso modelo, utilizamos $|a_*| = 0.1$, $R_{in}=12.0$, $R_{cen}=30.0$ para $a_*=0.1$, $R_{cen}=33.2$ para $a_*=-0.1$ e $q=1.6$. Devemos mencionar aqui que usaremos o período orbital de uma partícula teste em R_{cen} , i.e. $t_{orb} = 2\pi/\Omega(R_{cen})$, como uma unidade de tempo conveniente na discussão de nossos resultados, onde $\Omega = u^\phi/u^t$ pode ser recuperado do conhecimento do momento angular específico

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi} + l g_{tt}}{g_{\phi\phi} + l g_{t\phi}} \quad (5.42)$$

Com o conhecimento de R_{in} , podemos obter a energia de ligação superficial do tórus, $u_{in} = u(R_{in})$ através da relação:

$$u_t^{-2}(R_{in}) = g^{tt} - 2l g^{t\phi} + l^2 g^{\phi\phi} \quad (5.43)$$

É também necessário definir a energia interna do tórus que é dada por (De Villiers et al. 2003):

$$\epsilon(R, \theta) = \frac{1}{\Gamma} \left[\frac{u_{in} f(l_{in})}{u_t(R, \theta) f(l(R, \theta))} \right] \quad (5.44)$$

onde $l_{in} = l(r_{in})$ é o momento angular específico do fluído na superfície e

$$f(l) = |1 - k^{2/n} l^\alpha|^{1/\alpha} \quad (5.45)$$

onde $n = 2 - q$ e $\alpha = (2n - 2)/n$. Neste trabalho assumimos que a pressão é descrita por uma equação de estado isentrópica $P = \rho\epsilon(\Gamma - 1) = \kappa\rho^\Gamma$, onde a densidade é dada por $\rho = [\epsilon(\Gamma - 1)/\kappa]^{1/(\Gamma-1)}$.

Para produzir a instabilidade magneto-rotacional (Balbus & Hawley 1991) a configuração de campo magnético é composta de um campo poloidal fraco onde as componentes não nulas são $\mathcal{B}^r = -\partial_\vartheta A_\varphi$ e $\mathcal{B}^\vartheta = \partial_r A_\varphi$, sendo

$$A_\varphi = \begin{cases} C(\rho - \rho_{cut}) \sin[4N \log(R/R_c)] & \text{para } \rho \geq \rho_{cut} \\ 0 & \text{para } \rho \leq \rho_{cut} \end{cases}, \quad (5.46)$$

e em nosso caso $R_c = 1.1R_{in}$ e $\rho_{cut}=0.5$. A constante C é obtida usando o parâmetro β tal que inicialmente $\beta_{mag}(t) = P_g/P_B \geq \beta_{mag}(t=0)=10$. Notemos que esta configuração não contém fluxo magnético suficiente para conduzir a um estado de disco magneticamente arrastado (MAD state) durante a simulação (Narayan et al. 2003; McKinney et al. 2012); discos de acreção inclinados espessos no estado MAD foram estudados por McKinney et al. (2013).

Na região externa onde a solução do tórus não se aplica, inserimos um plasma não magnetizado rarefeito acretando no buraco negro (Komissarov 2006). Neste caso a densidade e pressão são dadas por $\rho = 10^{-4}\rho_{\max,0}(R/M)^{-2.7}$ e $e = \rho\epsilon = 10^{-6}\rho_{\max,0}(R/M)^{-2.7}$, a componente da velocidade radial deste plasma é dada por:

$$V^r = \frac{g^{tr}}{g^{tt}} \left[1 - \left(\frac{R_G}{R} \right)^4 \right] . \quad (5.47)$$

onde $R_G = GM/c^2$ é o raio gravitacional.

5.6.2 Função de resfriamento

Nesta seção discutiremos a função de resfriamento apresentada em Noble, Krolik & Hawley (2009) e utilizada em nossas simulações.

A equação 5.8 assegura que na solução numérica toda a energia dissipada seja convertida em calor. Se este calor for retido pelo fluido, o disco se tornará geometricamente espesso. A energia térmica poderia também ser acretada pelo buraco negro ou dissipada na forma de ventos. Com a adição de um termo de perdas na equação da energia obteremos a luminosidade do sistema em que a radiação é eficiente. Assumimos que esta radiação é opticamente fina e que age como um redutor na conservação de energia local descrita pela equação 5.8:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = -F_\nu, \quad (5.48)$$

onde F_ν é a quantidade de energia-momento radiada pelo quadri-volume. Para descrever a radiação assumimos que ela é isotrópica no referencial do fluido:

$$F_\nu = Lu_\nu \quad (5.49)$$

onde a função de resfriamento L é a taxa de energia que é radiada por unidade de tempo.

Numa simulação podemos fazer com que grande parte do calor seja irradiado ao construir uma função de resfriamento que mantenha a temperatura do gás próxima a uma pequena fração da temperatura do virial. Quando fazemos isso, podemos também controlar a escala de altura do disco H/R , parâmetro que é importante no modelo de disco.

Existem definições diferentes para a escala de altura H . Para um disco fino isotérmico em um potencial newtoniano, o perfil de densidade é gaussiano, dado por $\rho \propto \exp[-z^2/(2H_G^2)]$ com $H_G = c_i/\Omega$ onde c_i é a velocidade do som isotérmica. Uma medida comum é a largura média a meia altura (HWHM), $H_{HWHM} = \sqrt{2 \ln 2} H_G$. Outra possibilidade é a altura ponderada pela densidade:

$$H = \frac{\int d\theta d\phi \sqrt{-g\rho} \sqrt{g_{\theta\theta}} |\theta - \pi/2|}{\int d\theta d\phi \sqrt{-g\rho}} \quad (5.50)$$

Quando o perfil é gaussiano, $H = \sqrt{2/\pi} H_G = 0.798 H_G$.

Em nossas simulações adotaremos esta definição de momento que é robusta a flutuações e está relacionada aos comprimentos característicos do equilíbrio hidrostático.

A temperatura que deve produzir a razão H/R desejada na gravidade newtoniana é dada por

$$T_* = \frac{\pi}{2} \left[\frac{H}{R} r \Omega(R) \right]^2. \quad (5.51)$$

T_* é obtido em nossas simulações usando a frequência orbital relativística $\Omega(r > r_{isco}) = 1/(R^{3/2} + a_*/M)$.

Para assegurar que o disco fique próximo a temperatura desejada, a taxa de resfriamento deve ser rápida (i.e., $\propto \Omega$), mas deve cair para zero quando a temperatura fica abaixo de T_* . Todos estes critérios são satisfeitos para uma função que tem a forma (Noble et al. 2009)

$$L = s\Omega\rho\epsilon[I - 1 + |I - 1|]^{q_1}, \quad (5.52)$$

onde $I = (\Gamma - 1)\epsilon/T_*$ e s é a constante de proporcionalidade. O parâmetro q_1 controla a taxa de resfriamento quando a temperatura excede o valor desejado. Em nossas simulações nós escolhemos $q_1 = 1/2$ porque o mesmo resfria o disco de uma forma eficiente e estável.

5.6.3 Resolução da malha

O código Cosmos++ tem uma única discretização adaptada para cada tipo de situação semelhante ao código HARM3D (Gammie et al. 2003; Noble et al. 2009). O código realiza uma discretização não uniforme através de uma transformação de coordenadas de uma malha uniforme subjacente. As equações de volume finito são discretizadas com relação a pontos distribuídos uniformemente nas coordenadas x^μ , que são colocados não uniformemente num sistema de coordenadas esférico r, θ, ϕ . O centro da célula C_{ijk} está localizado em $(x_{i+1/2}^1, x_{j+1/2}^2, x_{k+1/2}^3)$, onde $x_i^\mu = x_0^\mu + i\Delta x^\mu$, é a extensão da célula na direção x^μ . Nós adotamos $t = x^0, \phi = x^3$ e $r_i = e^{x_i^1}$ de tal forma que $\Delta r/r$ é o mesmo em todas as posições. Para N_1 células da grade na direção x^1 e com os raios máximo e mínimo r_{max} e r_{min} , $\Delta x^1 = \frac{1}{N_1} \log\left(\frac{r_{max}}{r_{min}}\right)$. Na literatura encontramos diferentes relações para x^2 e ϑ . Gammie et al. (2003) e Noble et al. (2007, 2009) utilizaram funções que incluem um corte no eixo polar dado por:

$$\vartheta(x^2) = \vartheta_c + (\pi - 2\vartheta_c)x^2 + \psi \sin[2(\vartheta_0 + sx^2)], \quad (5.53)$$

onde ϑ_c é o tamanho aproximado do corte, ϑ_0 e s controlam a não linearidade da transformação e ψ é a amplitude da parte não linear.

Em nossas simulações utilizamos a mesma expressão de Noble et al. (2010) que consiste em adicionar um corte na expressão 5.53 onde o termo senoidal da equação anterior é substituído por um polinômio tendo a forma:

$$\vartheta(x^2) = \frac{\pi}{2} \left[1 + (1 - \psi)(2x^2 - 1) + \left(\varepsilon - \frac{2\theta_c}{\pi} \right) (2x^2 - 1)^n \right], \quad (5.54)$$

onde n é um inteiro ímpar positivo, θ_c é o tamanho da região extirpada e ψ é a amplitude relativa do termo não linear. Em nosso trabalho utilizamos $n=9$, $\varepsilon=0.3$ e $\theta_c=0.0$. Notemos que não utilizamos uma região de corte nos polos. Por causa das coordenadas de Kerr-Schild penetrantes dentro do horizonte externo, colocamos a fronteira radial interna da malha dentro do horizonte de eventos do buraco negro, isolando-o do domínio físico de interesse. A fronteira interna radial foi colocada em $0.9R_H$, onde R_H é o raio do horizonte de eventos, dando 7 zonas dentro do horizonte para nossa simulação em alta resolução e 3 zonas para a simulação em baixa resolução. A fronteira externa foi colocada em $R=100M$. Utilizamos condições de fronteira do tipo *outflow* em ambas as fronteiras interna e externa,

fronteiras refletoras nos polos e periódicas na direção azimutal.

Nas figuras 5.1 e 5.2, apresentamos nossa grade nas direções X-Y e X-Z.

Figura 5.1: Grade utilizada na direção X-Z.

Figura 5.2: Grade utilizada na direção X-Y.

5.7 Diagnósticos

Todos os diagnósticos são realizados através de médias sobre as quantidades desejadas. As médias são feitas a partir de cascas esféricas ponderadas pela densidade. As médias tem a seguinte forma:

$$\langle X \rangle = \frac{\int d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} \rho X}{\int d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} \rho} \quad (5.55)$$

onde ρ é a densidade.

5.7.1 Taxa de acreção

Uma importante ferramenta para estudar discos de acreção é observar a taxa de acreção de massa como função do tempo. A taxa de acreção é dada por

$$\dot{M} = \int \sqrt{-g} \rho u^r d\vartheta d\varphi \quad (5.56)$$

5.7.2 Escala de altura

Para obter a escala de altura de nossas simulações, utilizamos uma expressão diferente daquela utilizada na função de resfriamento. Esta nova expressão evita oscilações produzidas pela coroa, que é uma região instável de baixa densidade, devido a presença de campos magnéticos intensos e ela é dada por:

$$\frac{H}{R}(R) = \sqrt{\frac{\int d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} \rho^2 \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\int d\vartheta d\varphi \sqrt{-g} \rho^2}} \quad (5.57)$$

5.7.3 Determinação do ângulo entre os momentos angulares do disco de acreção e do buraco negro

No caso geral de um buraco negro de Kerr, projeções do momento angular não são conservadas. Contudo, pode-se obter duas equações de evolução acopladas para estes vetores assumindo que o spin do buraco negro é pequeno $a_* \sim 0.1$. Definindo dois vetores do momento angular associados com estas projeções, $L_{[1]}$ e $L_{[2]}$, e um terceiro, $L_{[3]}$, perpendicular a este plano, como

$$L_{[i]} = \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} M_{[i]}^0, \quad (5.58)$$

onde integramos sobre a coordenada radial de um raio interno r_1 até um raio externo r_2 e

$$M_{[i]}^\alpha = T_\beta^\alpha \xi_{[i]}^\beta. \quad (5.59)$$

T_β^α são as componentes do tensor energia-momento e obedecem equações de movimento da forma

$$T_{\alpha;\beta}^\beta = -Q_\alpha, \quad (5.60)$$

$\xi_{[i]}^\alpha$ são as componentes do vetor de Killing associados com as simetrias rotacionais de um buraco negro sem rotação. São proporcionais as componentes correspondentes do operador momento angular padrão. Explicitamente temos

$$\xi_{[1]}^\theta = -\sin \phi, \quad \xi_{[1]}^\phi = -\cot \theta \cos \phi, \quad \xi_{[2]}^\theta = \cos \phi, \quad \xi_{[2]}^\phi = -\cot \theta \sin \phi, \quad \xi_{[3]}^\theta = 0, \quad \xi_{[3]}^\phi = 1, \quad (5.61)$$

enquanto as coordenadas radiais e temporais de todos vetores $\xi_{[i]}^\alpha$ são zero e onde $Q_\alpha = \Lambda u_\alpha$ e Λ é a função de resfriamento. A convenção de somatória é assumida daqui por diante. Aqui as equações de evolução para as componentes horizontais $[i]=1,2$ são:

$$\frac{dL_{[i]}}{dt} + F_{[i],2} - F_{[i],1} = \int_{r_1}^{r_2} dr d\theta d\phi \sqrt{-g} \Psi_{[i]}, \quad (5.62)$$

onde

$$F_{[i],\{1,2\}} = \int d\theta d\phi \sqrt{-g} M_{[i]}^r(r = r_{1,2}) \quad (5.63)$$

são os fluxos das componentes respectivas do vetor momento angular através das fronteiras $r = r_1$ e r_2 e

$$\Psi_{[i]} = -W_{[i]} + S_{[i]} \quad (5.64)$$

representam as contribuições externas devido aos termos de resfriamento e quebra de simetria de uma métrica vindo da rotação do buraco negro. O primeiro termo tem a forma

$$W_{[i]} = Q_\phi \xi_{[i]}^\phi + Q_\theta \xi_{[i]}^\theta, \quad (5.65)$$

enquanto o segundo é

$$S_{[i]} = \pm g^{\phi\phi} (g_{0\phi} M_{[j]}^0 + g_{r\phi} M_{[j]}^r) , \quad (5.66)$$

onde o sinal mais e $[j]=2$ são assumidos quando $[i]=1$ e o sinal menos e $[j]=1$ são utilizados quando $[i]=2$.

É conveniente introduzir um termo de torque descrevendo a precessão agindo no disco

$$T_{[i]} = \int_{r_1}^{r_2} dr d\theta d\phi \sqrt{-g} S_{[i]} . \quad (5.67)$$

Explicitamente

$$T_{[1,2]} = \mp \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} (\Omega_0 M_{[2,1]}^0 + \Omega_r M_{[2,1]}^r) , \quad T_{[3]} = \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} (\Omega_0 M_{[3]}^0 + \Omega_r M_{[3]}^r) , \quad (5.68)$$

onde

$$\Omega_0 = -g^{\phi\phi} g_{0\phi} \quad \text{and} \quad \Omega_r = -g^{\phi\phi} g_{r\phi} . \quad (5.69)$$

Notemos que estas expressões são válidas para ambos os sistemas de coordenadas BL e KS. Em coordenadas BL, o coeficiente da métrica $g_{r\phi}=0$.

Algumas de nossas simulações são realizadas num referencial de coordenadas rotacionados. Enquanto o elemento de volume $\sqrt{-g} d\theta d\phi = \sqrt{-g} d\vartheta d\varphi$ permanece inalterado sob esta rotação, outras quantidades tais como $M_{[i]}^\alpha$, $S_{[i]}$ e $W_{[i]}$, adquirem termos adicionais. Podemos ver que as quantidades $M_{[i]}^\alpha$, $W_{[i]}$ e de acordo $L_{[i]}$ podem ser considerados como vetores dirigidos junto aos eixos x , y e z para $[i]=1,2,3$, respectivamente. Portanto, suas transformações são dadas por

$$M_{[1]}^\alpha = \cos \beta_0 \bar{M}_{[1]}^\alpha + \sin \beta_0 \bar{M}_{[3]}^\alpha, \quad M_{[2]}^\alpha = \bar{M}_{[2]}^\alpha, \quad (5.70)$$

e

$$M_{[3]}^\alpha = \cos \beta_0 \bar{M}_{[3]}^\alpha - \sin \beta_0 \bar{M}_{[1]}^\alpha , \quad (5.71)$$

onde é implicado que todas as quantidades com barra são as quantidades definidas anteriormente mas com ϑ e φ substituídos por θ e ϕ . Neste caso $\bar{M}_{[3]}^\alpha = T_\varphi^\alpha$. O momento angular $L_{[i]}$ e os termos térmicos $W_{[i]}$, são transformados de acordo com as mesmas regras

(5.70-5.71), onde $L_{[i]}$ e $\bar{L}_{[i]}$ ou $W_{[i]}$ e $\bar{W}_{[i]}$ substituem $M_{[i]}^\alpha$ e $\bar{M}_{[i]}^\alpha$. Para $W_{[i]}$ e $\bar{W}_{[i]}$, é o caso que $W_{[3]} = Q_\phi$ e $\bar{W}_{[3]} = Q_\varphi$. A lei de transformação para os termos de torque $T_{[i]}$ seguem das equações 5.67

$$T_{[1]} = \bar{T}_{[1]}, \quad T_{[2]} = \cos \beta_0 \bar{T}_{[2]} + \sin \beta_0 \bar{T}_{[3]}. \quad (5.72)$$

Devemos mencionar que as quantidades na equação 5.68 devem ser sempre calculadas no sistema de referencial não inclinado (t, r, θ, ϕ) .

As componentes do momento angular dados pela equação 5.67 podem ser utilizados para definir os ângulos de Euler médios $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ descrevendo os ângulos de inclinação e torção com respeito ao plano equatorial sobre algum intervalo $[r_1, r_2]$ como

$$\tan \bar{\gamma} = \frac{L_{[2]}}{L_{[1]}} \quad \text{and} \quad \bar{\beta} = \frac{1}{|L_{[3]}|} \sqrt{L_{[1]}^2 + L_{[2]}^2}. \quad (5.73)$$

Quando os termos térmicos determinados pela função de resfriamento Λ e os termos de fluxo em 5.62 são pequenos o bastante para serem desprezados, o movimento do disco tem uma característica exata de precessão. Neste caso, temos

$$\frac{dL_{[i]}}{dt} = T_{[i]}. \quad (5.74)$$

Vamos calcular explicitamente os termos em 5.74 fazendo as seguintes suposições simplificadoras: Primeiro, vamos assumir que a velocidade radial, u^r , é muito menor do que u^ϕ e u^θ . Segundo, desprezamos as contribuições térmicas e magnéticas do tensor de energia-stress. Fazendo isso, obtemos

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta. \quad (5.75)$$

Finalmente, utilizando o fato que o parâmetro rotacional do buraco negro é pequeno, fixamos $a_*=0$ em todas as expressões junto com os termos não diagonais das componentes da métrica entrando explicitamente na equação 5.66.

Adotando estas suposições, podemos ver que $M_{[i]}^r=0$, enquanto

$$M_{[1]}^0 = \rho u^0 l_x, \quad M_{[2]}^0 = \rho u^0 l_y, \quad \text{and} \quad M_{[3]}^0 = \rho u^0 l_z, \quad (5.76)$$

onde introduziu-se a seguinte notação

$$l_x = -r^2(u^\phi \sin \theta \cos \theta \cos \phi + u^\theta \sin \phi) , \quad l_y = -r^2(u^\phi \sin \theta \cos \theta \sin \phi - u^\theta \cos \phi) , \quad (5.77)$$

e

$$l_z = r^2 \sin^2 \theta u^\phi . \quad (5.78)$$

É importante notar que no limite Newtoniano l_x, l_y e l_z são simplesmente projeções do momento angular (por unidade de massa) nos eixos x, y e z do sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) relacionados às coordenadas Kerr-Schild (r, θ, ϕ) da forma usual. Nestas coordenadas o eixo de rotação do buraco negro está direcionado na direção z .

As expressões do momento angular e torque agora tem a seguinte forma

$$L_{[1]} = \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 l_x , \quad L_{[2]} = \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 l_y , \quad L_{[3]} = \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 l_z , \quad (5.79)$$

onde $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, e

$$T_{[1]} = - \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 \Omega_{LT} l_y , \quad T_{[2]} = \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 \Omega_{LT} l_x , \quad T_{[3]} = \int r^2 dr d\Omega \rho u^0 \Omega_{LT} l_z , \quad (5.80)$$

onde $\Omega_{LT} = 2a/r^3$ é a frequência de precessão de Lense-Thirring. No limite Newtoniano temos $u^0=1$, enquanto que u^θ e u^ϕ coincidem com as componentes correspondentes da tri-velocidade normal. Então, a equação 5.80 segue da lei de precessão do momento angular $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{\Omega}_{LT} \times \mathbf{l}$, onde $\mathbf{l}$ and $\mathbf{\Omega}_{LT}$ são dois vetores com componentes cartesianas $(l_x, l_y, 0)$ e $(0, 0, \Omega_{LT})$, respectivamente.

Vamos estimar a escala de tempo de precessão t_{prec} . Para isto, primeiro diferenciamos a equação 5.73 com respeito ao tempo para obter

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \frac{1}{L_{[1]}^2 \cos^2 \bar{\gamma}} \left(\frac{dL_{[2]}}{dt} L_{[1]} - \frac{dL_{[1]}}{dt} L_{[2]} \right) \approx \frac{1}{L_{[1]}^2 \cos^2 \bar{\gamma}} (T_{[2]} L_{[1]} - T_{[1]} L_{[2]}) , \quad (5.81)$$

onde na última igualdade assumimos que a evolução do momento angular é principalmente determinada pelos termos de torque. Para estágios iniciais da evolução do disco, ajustamos $\bar{\gamma}=0$ e $\bar{\beta} = \beta_0$. Adicionalmente, pode-se mostrar que $T_{[1]}$ e $L_{[2]}$ podem ser desprezados

assim como as contribuições proporcionais a $\cos \beta_0$ nas leis de transformação 5.88 - 5.90 para $L_{[i]}$ e $T_{[2]}$. Temos então

$$L_{[1]} \approx \sin \beta_0 \bar{L}_{[3]} , \quad T_{[2]} \approx \sin \beta_0 \bar{T}_{[3]} , \quad (5.82)$$

e

$$\bar{\gamma} \approx \frac{t}{t_{\text{prec}}}, \quad t_{\text{prec}} = \frac{\bar{L}_{[3]}}{\bar{T}_{[3]}} . \quad (5.83)$$

Com o objetivo de obter expressões para $\bar{L}_{[3]}$ e $\bar{T}_{[3]}$ em 5.82 e 5.83, utilizamos as expressões simplificadas 5.70-5.72, onde fazemos a mudança para coordenadas cilíndricas de acordo com a regra padrão $z = r \cos \vartheta$ e $R = r \sin \vartheta$. Utilizamos o fato que o disco é fino, aproximadamente axisimétrico e que a distribuição de densidade é aproximadamente simétrica com respeito ao plano $z = 0$ (ou $\vartheta = \pi/2$) para obtermos

$$L_{[1]} \approx 2\pi \sin \beta_0 \int r^3 dr \Sigma u^\varphi u^0, \quad T_{[2]} \approx 4\pi a_* \sin \beta_0 \int dr \Sigma u^\varphi u^0, \quad (5.84)$$

onde $\Sigma = \int dz \rho$ é a densidade superficial, ajustamos $R = r$, integrado sobre todo o disco, e utilizamos as expressões explícitas para a frequência de Lense-Thirring. Equação 5.84 pode ser simplificada mais ainda considerando que as integrais são principalmente determinadas pelas regiões suficientemente afastadas do buraco negro, onde podemos utilizar o limite Newtoniano: $u^0 = 1$ e $u^\varphi = r^{-3/2}$. Deste modo obtemos

$$L_{[1]} \approx 2\pi \sin \beta_0 \int r^{3/2} dr \Sigma, \quad T_{[2]} \approx 4\pi a_* \sin \beta_0 \int r^{-3/2} dr \Sigma \quad (5.85)$$

Substituindo 5.85 em 5.83 obtemos

$$t_{\text{prec}} = \frac{\int r^{3/2} dr \Sigma}{2a_* \int r^{-3/2} dr \Sigma} . \quad (5.86)$$

5.7.4 Localizando choques

Outra ferramenta para estudar discos de acreção nos quais o momento angular não é coplanar com o momento do buraco negro é medir sua excentricidade para procurar por choques de uma forma semelhante à feita por Fragile & Blaes (2008) e Dexter & Fragile (2011).

A ecentricidade é definida como sendo:

$$e = -\frac{R}{6M} \frac{\partial(\beta \sin \gamma)}{\partial R} \quad (5.87)$$

Quando a excentricidade aumenta para raios pequenos isto conduz a órbitas que se cruzam próximas ao epicentro (Ivanov & Illarionov 1997) e este mecanismo é responsável por choques.

Outro diagnóstico importante para procurar estes choques é a entropia do sistema que é definida como:

$$Entropia = \log \left(\frac{P}{\rho^\Gamma} \right) \quad (5.88)$$

5.7.5 Estimando as componentes do stress e verificando sua isotropia

Enquanto muito dos trabalhos analíticos e simulações SPH fazem a suposição de que a viscosidade é isotrópica, alguns trabalhos recentes questionaram esta suposição (Sorathia et al. 2013b, Naumann & Blackmann 2014). Nesta dissertação testamos pela primeira vez esta suposição em simulações GRMHD. Para fazer isto calculamos os tensores de energia-stress ($W_{\hat{i}\hat{j}}$) e taxa de tensão ($S_{\hat{i}\hat{j}}$) no referencial comóvel do fluido. Se o tensor viscoso fosse de fato isotrópico, então o tensor de stress deveria ser proporcional a um múltiplo do tensor taxa de tensão mais um tensor isotrópico. Esperaríamos portanto que a razão entre as componentes não diagonais do tensor de stress e as mesmas componentes não diagonais do tensor taxa de tensão ($W_{\hat{i}\hat{j}}/S_{\hat{i}\hat{j}}$) fossem uma constante, que utilizamos para definir os parâmetros α de nosso disco que é dado por

$$\alpha_{\hat{i}\hat{j}} = \frac{-3W_{\hat{i}\hat{j}}\Omega}{4S_{\hat{i}\hat{j}}P_{tot}} \quad (5.89)$$

Este é um argumento muito forte, uma vez que a viscosidade deve ser aproximadamente constante ao invés de exatamente constante. Neste caso é suficiente encontrar que todos os $\alpha_{\hat{i}\hat{j}}$ tem sinais e magnitudes compatíveis.

Para obter o tensor de energia-stress no referencial comóvel, devemos primeiro converter o tensor de energia-stress para a forma covariante e isto é feito da seguinte forma:

$$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha k} g_{\beta \lambda} T^{k\lambda} \quad (5.90)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ são os componentes da métrica. Em seguida devemos converter para o sistema de coordenadas Boyer-Lindquist utilizando uma matriz de transformação que é dada por (McKinney & Gammie 2004, Shafee et al. 2008):

$$\frac{\partial x^\mu[KS]}{\partial x^\nu[BL]} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2r}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a}{\Delta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

onde $\Delta = r^2 - 2r + a^2$.

Uma vez que a matriz de transformação é conhecida, o tensor de energia-stress em coordenadas Boyer-Lindquist é dado por

$$T_{\mu\nu}^{BL} = \frac{\partial x^\alpha[KS]}{\partial x^\mu[BL]} \frac{\partial x^\beta[KS]}{\partial x^\nu[BL]} T_{\alpha\beta}^{KS} \quad (5.92)$$

Por fim, para estimar o tensor de stress no referencial comóvel local, utiliza-se os operadores tetrads definidos por Beckwith, Hawley & Krolik (2008) que são dados por:

$$e_{(r)}^\mu = -\frac{1}{k_r k_\phi} \left[\sqrt{g_{rr}} u^r u^t, \frac{k_\phi^2}{\sqrt{g_{rr}}}, 0, \sqrt{g_{rr}} u^r u^\phi \right] \quad (5.93)$$

$$e_{(\phi)}^\mu = -\frac{1}{k_\phi \sqrt{|-g_{t\phi}^2 + g_{\phi\phi} g_{tt}|}} [g_{\phi\phi} u^\phi + g_{t\phi} u^t, 0, 0, -(g_{t\phi} u^\phi + g_{tt} u^t)] \quad (5.94)$$

$$e_{(\theta)}^\mu = -\frac{1}{k_r k_\theta} \left[\sqrt{g_{\theta\theta}} u^\theta u^t, \sqrt{g_{\theta\theta}} u^\theta u^r, \frac{k_r^2}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}, \sqrt{g_{\theta\theta}} u^\theta u^\phi \right] \quad (5.95)$$

onde

$$k_r = \sqrt{|g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + u^t(2g_{t\phi}u^\phi + g^{tt}u^t)|} \quad (5.96)$$

$$k_\theta = \sqrt{|g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + u^t(2g_{t\phi}u^\phi + g^{tt}u^t)|} \quad (5.97)$$

$$k_\phi = \sqrt{|g_{\phi\phi}(u^\phi)^2 + u^t(2g_{t\phi}u^\phi + g^{tt}u^t)|} \quad (5.98)$$

Com isso, o tensor energia-stress no referencial comóvel é dado por:

$$W_{\hat{i}\hat{j}} = e_i^\mu e_j^\nu T_{\mu\nu}^{BL} \quad (5.99)$$

O tensor taxa de tensão é dado por:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha;\mu}h_\beta^\mu + u_{\beta;\mu}h_\alpha^\mu) - \frac{1}{3}u_{;\mu}^\mu h_{\alpha\beta} \quad (5.100)$$

onde

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad (5.101)$$

é o tensor de projeção, $u_{\alpha;\mu}$ e $u_{;\mu}^\mu$ são as derivadas covariantes da quadri-velocidade dadas por:

$$u_{\alpha;\mu} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^k u_k \quad (5.102)$$

$$u_{;\mu}^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{k\mu}^\mu u^k \quad (5.103)$$

e

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial g^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial g^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial g^k} \right) \quad (5.104)$$

e h_β^μ é o tensor de projeção dado por:

$$h_\beta^\mu = \delta_\beta^\mu + u^\mu u_\beta = g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} + u^\mu u_\beta \quad (5.105)$$

Com isto o tensor taxa de tensão no referencial comóvel é dado por

$$S_{\hat{i}\hat{j}} = e_i^\mu e_j^\nu \sigma_{\alpha\beta}^{BL} \quad (5.106)$$

5.7.6 Comparando com o modelo Novikov-Thorne (1973)

Comparamos os resultados de nossas simulações com o modelo NT73. Para isso, determinamos o fluxo de momento angular no raio do horizonte de eventos, o momento angular específico, a velocidade radial e a eficiência da acreção. O fluxo de momento angular normalizado pela taxa de acreção é dado por:

$$\frac{\dot{J}(R_H, t)}{\dot{M}(R_H, t)} = \frac{-\int \sqrt{-g} T_\varphi^r d\vartheta d\varphi}{-\int \sqrt{-g} \rho u^r d\vartheta d\varphi} \quad (5.107)$$

O momento angular específico é dado por:

$$\langle l(R) \rangle = \left\langle \frac{u_\phi}{u_t} \right\rangle \quad (5.108)$$

A eficiência da acreção é dada por:

$$\epsilon = 1 - \frac{\dot{E}(t)}{\dot{M}(t)} \quad (5.109)$$

onde

$$\dot{E}(t) = - \int \sqrt{-g} T_t^r d\vartheta d\varphi \quad (5.110)$$

5.7.7 Escalas de tempo

As expressões para as escalas de tempo que serão apresentadas abaixo podem ser encontradas em Frank, King & Raine (2002). Estas escalas de tempo são importantes para nos dizer por quanto tempo devemos realizar a simulação para observar os efeitos desejados.

A escala de tempo dinâmica é dada por

$$t_{dyn} = \frac{1}{\Omega}. \quad (5.111)$$

A escala de tempo térmica é dada por

$$t_{th} = \frac{t_{dyn}}{\alpha}. \quad (5.112)$$

A escala de tempo viscosa é dada por

$$t_{vis} = \frac{R^2}{\nu} = \left(\frac{R}{H} \right)^2 t_{th}. \quad (5.113)$$

A escala de tempo de acreção é dada por

$$t_{acc} = \frac{R}{V_R}, \quad (5.114)$$

onde V_R é a velocidade radial do fluido.

A escala de tempo de Lense-Thirring é dada por

$$t_{LT} = \frac{2\pi}{\Omega_{LT}} = \frac{\pi R^3}{aM} \quad (5.115)$$

A escala de tempo sonica é dada por:

$$t_{cs} = \frac{R}{c_s} \quad (5.116)$$

onde

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma(\Gamma - 1)P}{(\Gamma - 1)\rho + \Gamma P}} \quad (5.117)$$

5.7.8 Qualidade da simulação

A instabilidade magneto-rotacional (MRI) é uma instabilidade linear com comprimento de onda crescendo rapidamente dado por

$$\lambda_{x,MRI} = 2\pi \frac{|v_{x,A}|}{|\Omega_{rot}|} \quad (5.118)$$

para $x = \theta, \phi$ onde $|v_{x,A}| = \sqrt{b_x b^x}/\epsilon$ é a velocidade de Alfvén na direção x .

Para resolver a MRI a relação entre o comprimento de onda e o tamanho da célula $Q_{x,MRI} = \lambda_{x,MRI}/\Delta_x$ deve ser maior do que 6 na direção θ e maior do que 20 na direção ϕ (McKinney et al. 2012) onde $\Delta_R = dx^{(1)}(dR/dx^{(1)})$, $\Delta_\theta = Rdx^{(2)}(dR/dx^{(2)})$ e $\Delta_\phi = R \sin \theta dx^{(3)}(d\phi/dx^{(3)})$.

Resultados das simulações GRMHD

Utilizamos as equações e o código apresentados no capítulo 5 para realizar simulações GRMHD de discos de acreção distorcidos. Realizamos várias simulações onde mudamos a resolução da grade, a direção de rotação do buraco negro, a topologia do campo magnético, o momento em que mudamos a direção do momento angular do disco relativo ao do buraco negro e o uso ou não da função de resfriamento. As propriedades de cada simulação estão apresentadas na tabela 6.1. Discutiremos primeiro os resultados das simulações em alta resolução (S1 e S2) e depois discutiremos os resultados das simulações em baixa resolução, especialmente as simulações S3, S4, S10 e S11. No capítulo 7 compararemos os resultados de nossas simulações com o modelo analítico de Zhuravlev & Ivanov (2011).

6.1 Simulações S1 e S2

6.1.1 Resolução

Antes de apresentar nossos resultados é muito importante definir a resolução numérica, uma vez que simular discos finos em GRMHD é algo ainda desafiador. Resolver a escala de altura vertical do disco mantendo simultaneamente a resolução comparável em todas as outras dimensões espaciais, requer muito mais zonas nas direções radiais e azimutais, aproximadamente $N_R \sim N_\phi \sim N_z/\delta$, onde $\delta = H/R$. Para um disco fino, com $\delta \ll 1$, isto pode ser proibitivo. Além disso, no caso de um disco inclinado, não há simetrias no problema que possam ser exploradas, devendo assim ser utilizado todo o domínio computacional.

Conforme pode-se ver na figura 6.1, na direção vertical temos 3 zonas por comprimento de onda da MRI ($Q_\vartheta \geq 6$), e na direção azimutal temos aproximadamente 9 ($Q_\varphi \geq 20$) para nossas simulações em alta resolução sobre o domínio radial ($10 \leq R/M \leq 50$). Os

Tabela 6.1 - Parâmetros da simulação

Simulação	Resolução	a_*	Inclinação (β_0)	$t_{\text{stop}}/t_{\text{orb}}$	Nº loops	Resfriamento
S1	$256 \times 96 \times 192$	0.1	0°	12.5	1	Sim
S2	$256 \times 96 \times 192$	0.1	10°	12.5	1	Sim
S3	$128 \times 48 \times 96$	0.1	0°	34	1	Sim
S4	$128 \times 48 \times 96$	0.1	10°	34	1	Sim
S5	$128 \times 48 \times 96$	0.1	10°	20	1	Sim
S6	$128 \times 48 \times 96$	0.1	0°	10	2	Sim
S7	$128 \times 48 \times 96$	0.1	10°	10	2	Sim
S8	$128 \times 48 \times 96$	0.1	10°	20	1	Não
S9	$128 \times 48 \times 96$	0.1	10°	25	1	Sim para $R > 30$
S10	$128 \times 48 \times 96$	-0.1	0°	22	1	Sim
S11	$128 \times 48 \times 96$	-0.1	10°	22	1	Sim

valores de Q , seção 5.7.8, aumentam consideravelmente dentro de $R=10M$.

Figura 6.1: Valores dos parâmetros $Q_2 = Q_\vartheta$ e $Q_3 = Q_\varphi$ da simulação S1.

Nossos modestos valores de Q significam que a turbulência MRI não é completamente desenvolvida nas simulações (ver Hawley et al. 2011; McKinney et al. 2012; Hawley et al. 2013, para discussões sobre a resolução da MRI em simulações numéricas). No entanto, apresentamos os seguintes argumentos sustentando porque nossos resultados são ainda significativos. Primeiro, embora isto provavelmente signifique que o valor efetivo de α_1 seja menor do que seria numa simulação com resolução apropriada, temos viscosidades efetivamente mensuráveis agindo em nossas simulações e podemos discutir a resposta do disco a turbulência. Segundo, foi mostrado em estudos anteriores (e.g. Fragile & Blaes 2008; Sorathia et al. 2013b) que as principais respostas dentro de discos inclinados são hidrodinâmicas ao invés de MHD. Portanto, apesar da baixa resolução da MRI, os principais efeitos de discos inclinados foram capturados. Adicionalmente nas próximas seções mostraremos que nosso disco não inclinado reproduziu bem muitas das características importantes vistas em outras simulações numéricas de discos de acreção finos.

Outro fato importante que notamos, que pode estar relacionado a baixa resolução da MRI, é que a turbulência mal desenvolvida parece ter feito o disco precessionar de forma semelhante a um corpo rígido. Em simulações MHD de precessão de Lense-Thirring,

Sorathia et al. (2013) encontraram que as simulações MHD mostraram menos precessão de corpo rígido, argumentando que a turbulência quebra o acoplamento entre os anéis vizinhos que permitem precessão de corpo rígido. Isto pode também ter um papel importante em quão efetivamente o disco pode alinhar com o burano negro.

6.1.2 Comparação com o modelo NT73 e simulações GRMHD

Iremos comparar as simulações S1 e S2 com resultados da literatura, especialmente os de Noble et al. (2010) e Penna et al. (2010) que realizaram simulações GRMHD de discos com escalas de altura muito semelhantes. Uma vez que simulações GRMHD de discos finos tornaram-se possíveis recentemente, é interessante fazer uma comparação dos nossos resultados com os da literatura.

Primeiramente demonstraremos que a função de resfriamento utilizada funcionou de forma satisfatória e que de fato obtivemos um disco fino. Na figura 6.2 apresentamos o gráfico da escala de altura em função do raio, onde a escala de altura foi calcula através da equação 5.57.

Figura 6.2: Escala de altura (H/R) das simulações S1 e S2. Verifica-se que a função de resfriamento realizou um bom trabalho de manter a escala de altura próxima do valor desejado através do disco.

O próximo passo foi comparar a escala de altura com o parâmetro azimutal do stress

(α_1) para verificarmos se o disco é fino em todos os raios e também comparar com os valores teóricos (α_1) de King et al. (2007). O comportamento das duas quantidades é apresentado na figura 6.3. Mais adiante iremos discutir nossos valores de α_1 com relação a questão da isotropia.

Figura 6.3: Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 das simulações S1 e S2. Observa-se que o disco é fino para raios menores do que 10M.

O perfil de α_1 mostra propriedades muito similares a outros perfis de simulações GRMHD (e.g. Penna et al. 2013), em que α_1 tem uma dependencia radial forte em raios pequenos e então cai para valores entre 0.01-0.1 para raios maiores. Uma diferença é que nosso perfil dentro da ISCO não se anula e começa a decrescer dentro desta região, semelhantemente a Penna et al. (2013), mas devemos mencionar que utilizamos uma definição diferente para α_1 . Muitos trabalhos definiram α_1 apenas em termos do tensor de stress MHD no referencial comóvel, normalizado pela pressão total, i.e. $\alpha_1 = W_{\hat{r}\hat{\phi}}/P_{Tot}$. Esta simplificação é devida ao fato de que num disco puramente Kepleriano, $S_{\hat{r}\hat{\phi}} \propto \Omega$. Se utilizarmos a mesma definição, obtemos um perfil muito semelhante com as outras simulações. No entanto, não é óbvio que $S_{\hat{r}\hat{\phi}}$ deva ser proporcional a Ω , principalmente para discos inclinados. Um dos objetivos deste trabalho, foi testar também se $W_{\hat{i}\hat{j}} \propto S_{\hat{i}\hat{j}}$, uma suposição normalmente utilizada em muitos trabalhos analíticos de discos de acreção inclinados. Por esta razão decidimos utilizar uma expressão mais completa (equação 5.89). Um

ponto importante de ser mencionado é que a escala de altura é menor do que o parâmetro de stress para raios menores do que 10M e pode-se com isso esperar presença de efeito Bardeen-Petterson na parte interna do disco. Outro ponto importante é que para raios maiores do que 10M o valor de α_1 torna-se menor do que 0.1 e levantando a questão se os valores propostos por King et al. (2007) estão corretos, onde é proposto que α_1 esteja entre 0.1-0.4.

Na figura 6.4 apresentamos a taxa de acreção em função do raio calculada através da equação 5.56 e na figura 6.5 o painel superior representa o momento angular específico, calculado utilizando-se a equação 5.104 e o painel inferior a velocidade radial do material sendo acretado. Juntamente com estes graficos da figura 6.5, apresentamos a comparação com o modelo NT73.

Figura 6.4: Perfil da taxa de acreção em função do raio das simulações S1 e S2.

Figura 6.5: Superior: Momento angular específico. Inferior: velocidade radial do material acretando. A linha preta refere-se a simulação S1, a linha vermelha a simulação S2 e a linha azul representa o valor esperado do valor do modelo NT73 assumindo $\alpha = 0.1$ e $H/R=0.08$.

As figuras mostram que ambas as simulações atingiram um estado estacionário razoável dentro de $R=10M$, com a simulação S2 acretando com uma taxa levemente maior, consistente com os resultados de Fragile et al. (2007), Fragile & Blaes (2008), Generozov et al. (2014) e de Lodato & Pringle (2006). O perfil da velocidade radial é quase exatamente o mesmo quando comparado com o perfil de Penna et al. (2010) e segue razoavelmente as previsões do modelo NT73 fora da última órbita circular estável (ISCO). O momento angular específico é muito semelhante ao gráfico da figura 14 de Noble et al. (2010) e segue aproximadamente bem a previsão do modelo NT73. A principal discrepância é que $\langle l \rangle$ continua a cair dentro da ISCO, indicando que o stress ainda está extraindo momento angular do fluxo, em contraste com a suposição de NT73. O mesmo comportamento foi notado por Noble et al. (2010) e Penna et al. (2010). Os resultados de Penna et al. (2010) sugerem que esta discrepância tornaria-se desprezível se a espessura do disco tendesse a zero. Seus resultados também sugerem que esta discrepância seria menor se a simulação fosse inicializada com um campo magnético formado por múltiplos campos magnéticos poloidais. Os perfis de α_1 , H/R , a densidade superficial (Σ) e a componente radial da quadri-velocidade (u^r) em diferentes tempos serão apresentados no próximo capítulo uma vez que serviram como parâmetros de entrada no modelo semi-analítico.

Comportamento temporal dos fluxos de massa, energia, eficiência da acreção e do momento angular no horizonte do buraco negro são apresentados nas figuras 6.6 e 6.7. O fluxo de momento angular normalizado pela taxa de acreção foi calculado utilizando-se a equação 5.103, o fluxo de energia obtido através da equação 5.106 e a eficiência da acreção através da equação 5.105.

Figura 6.6: Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S1 e S2. A linha preta representa a simulação S1, a linha vermelha a simulação S2 e a linha azul o valor esperado do modelo NT73.

O valor do fluxo de momento angular pode ser comparado com o modelo NT73, representado pela linha azul. Encontramos que nosso valor é 13% menor do que a previsão. Desde que o modelo NT73 prevê que os torques internos na ISCO desaparecem, o fluxo de momento angular através do horizonte deveria ser igual ao seu valor na ISCO. Contudo, nossos resultados mostram o que fluxo continua caindo dentro da ISCO sugerindo que o stress continua a agir no gás. Portanto, pouco momento angular alcança o buraco negro.

Figura 6.7: Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S1 e S2 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73.

Da figura 6.7, vemos que o comportamento temporal de ambas as simulações, é consistente com os resultados de outras simulações (por exemplo, figura 7 de Penna et al. 2010) e as previsões do modelo NT73. Em particular a eficiência da acreção para um disco fino ao redor de um buraco negro rotacionando lentamente deveria ser de aproximadamente 6%. Nossas simulações fornecem valores levemente maiores, consistente com a energia adicional liberada pelo gás após passar pela ISCO. A discrepância em $\dot{J}/\dot{M}$ e $1-\dot{E}/\dot{M}$ são semelhantes aos obtidos por Noble et al. (2010) e Penna et al. (2010) para discos com escalas de alturas semelhantes e mesma topologia para o campo magnético.

Finalmente, na figura 6.8 apresentamos uma imagem da simulação S1 do último intervalo temporal. Esta imagem será útil para uma comparação com os resultados da simulação S2 que será apresentado na próxima seção.

Figura 6.8: Visualização da densidade em escala logarítmica (escalada de 0.01 a 1) da simulação S1. em $t=12.5t_{orb}$. Um quarto do disco foi removido para revelar a secção transversal. O eixo de spin do buraco negro está orientado verticalmente junto ao eixo z .

6.1.3 Resultados da simulação S2

A figura 6.9 apresenta uma visualização da simulação S2 no mesmo instante de tempo comparado com o da simulação S1. A fato mais marcante aqui é o quão similares os discos aparecem em ambos os casos, dando primeiros indícios de que até mesmo para este disco de acreção mais fino (quando comparado aos de Fragile et al. (2007)), não há sinais de efeito Bardeen-Petterson no caso prógrado. Apesar do fato de que a figura 6.2 mostra que em uma grande parte do disco ($R < 12M$), $H/R < \alpha_1$, esperaria-se algum comportamento do tipo Bardeen-Petterson.

Figura 6.9: Semelhante a figura 6.7 mas para a simulação S2. Neste caso o spin do buraco negro está orientado no plano $x - z$ inclinado de 10° em relação os eixos $-x$ e z . Nenhuma indicação de deformação parece estar presente.

Uma ilustração mais qualitativa desta afirmação é dado na figura 6.10 que grafica o ângulo de inclinação (β) normalizado pelo ângulo de inclinação inicial (β_0) da simulação S2 como função do tempo e raio para todo o intervalo de tempo da simulação. Os valores de β foram obtidos da expressão 5.73.

Figura 6.10: Inclinação fracional do disco, i.e. β/β_0 , como função do tempo e raio para a simulação S2. O gráfico mostra nenhuma evidência de alinhamento Bardeen-Petterson em qualquer raio durante toda a evolução da simulação. De fato a inclinação do disco na parte interna em relação ao plano de simetria do buraco negro cresce.

Em vez de alinhamento do disco até o plano de simetria do buraco negro, a figura mostra uma tendência para β de evoluir longe de zero, ao menos em raios pequenos. Além do mais, nenhuma parte do disco mostrou mais do que 5% de alinhamento em qualquer tempo. A implicação clara da figura é que a precessão de Lense-Thirring não alinha o disco neste caso.

No entanto, a precessão de Lense-Thirring ainda causa uma torção no disco, embora novamente, não de uma forma simples como seria esperado. A figura 6.11 mostra o gráfico do ângulo de torção (γ) em função do tempo e raio, semelhante a imagem do ângulo de inclinação. Este gráfico revela dois comportamentos importantes no disco: primeiro, em raios pequenos ($R < 10M$), após um período de forte precessão diferencial, a torção satura num valor modesto e relaxa mais tarde até valores menores. Enquanto isso, a torção gradualmente se desenvolve em raios grandes, enquanto o resto do disco alcança a torção do disco interno. Pelo fim da simulação, a frente de torção moveu-se até $R=40M$. Um padrão aproximadamente semelhante de forte precessão diferencial inicial, seguido por uma precessão global gradual foi observada em Sorathia et al. (2013b). Geralmente, precessão

diferencial mais forte foi vista em simulações SPH (Nelson & Papaloizou 2000), embora uma comparação direta seja difícil devido as diferenças dos parâmetros das simulações GRMHD e SPH.

Figura 6.11: Torção, γ , de cada casca esférica como função do tempo para a simulação S2. Uma frente de torção pode ser vista movendo-se lentamente para fora através do disco. Atrás desta frente, a torção parece saturar para um certo valor em cada casca esférica, tal que apenas precessão diferencial moderada é vista.

O fato do ângulo de inclinação oscilar nas partes internas do disco e ficar com um valor aproximadamente constante nas partes externas pode ser explicando tanto pelo modelo de Lubow et al. (2002, ver cap. 3) quanto pelo modelo de Zhuravlev & Ivanov (2011) que será apresentado no capítulo 7. Aqui explicaremos este comportamento utilizando o modelo de Lubow et al. (2002) e no próximo capítulo explicaremos utilizando o modelo de Zhuravlev & Ivanov (2011).

Ajustando uma lei de potência na escala de altura do disco para pequenos raios do tipo $H/R = \epsilon r^{h-1}$, encontramos que $\epsilon=0.049$ e $h=1.0$. Substituindo estes valores na expressão 3.108 para determinar o valor do coeficiente x em dois raios diferentes encontramos que para $R=5M$, $x=3.35$ e para $R=15M$, $x=0.85$. Observa-se que o comportamento do ângulo de inclinação está de acordo com o modelo de Lubow et al. (2002), onde em raios pequenos o valor de x é maior do que um e portanto deve-se esperar um comportamento oscilatório

e para raios maiores, o valor de x é menor do que um e como esperado o valor do ângulo de inclinação permaneceu constante.

6.1.4 Choques

Uma característica de discos de acreção inclinados obtidas em estudos numéricos no passado foi a presença de choques em raios pequenos (Fragile & Blaes 2008). Eles conduziram ao truncamento do disco em raios grandes em discos inclinados (Fragile 2009, Dexter & Fragile 2011); eles podem ajudar a amplificar a variabilidade inerente do disco de acreção (Henisey et al. 2012) e eles dissipam uma fração significativa da energia da massa em repouso acretada (Generozov et al. 2014). Contudo, não encontramos evidências de choques semelhantes em nossa simulação S2. Uma forma de verificar isso é através do perfil da entropia em função do raio, calculada através da equação 5.88 e apresentado na figura 6.12. Desde que estes choques geram entropia, a associação de choques com discos inclinados deve manifestar-se como um excesso na entropia (e.g. figura 14 de Dexter & Fragile 2011). Contudo, tal excesso não é visto na figura 6.12; ao invés disso, as entropias das simulações S1 e S2 são muito semelhantes em todos os raios.

Figura 6.12: Entropia em função do raio em unidades arbitrárias para as simulações S1 e S2. Os dados foram obtidos através de médias das órbitas 10-12.5. A semelhança de ambos os perfis sugere que choques não possuem um papel importante em simulações de discos inclinados.

A explicação física proposta por Fragile & Blaes (2008) para a existência de choques é que eles são uma resposta do disco ao cruzamento das trajetórias das partículas próximas ao apocentro sempre que a excentricidade destas trajetórias aumenta significativamente até raios pequenos (Ivanov & Illarionov 1997). A excentricidade orbital é uma manifestação do movimento epicíclico do gás devido a gradientes de pressão radiais não balanceados encontrados em altas latitudes. Para quantificar esta afirmação pode-se utilizar o critério proposto por Ivanov & Illarionov (1997) que choques se formarão sempre que a excentricidade e se torne comparável a escala de altura (H/R). Isto é baseado na suposição que um valor típico para a velocidade da perturbação associado com a excentricidade é $v' \sim er\Omega$ e que a velocidade do som é $H\Omega$. O valor da excentricidade é apresentado na figura 6.13. Diferente de outros resultados (Figura 16 de Dexter & Fragile 2011), a excentricidade nesta simulação é muito pequena e a desigualdade $e \ll H/R$ é satisfeita para um intervalo grande de raios.

Figura 6.13: Excentricidade orbital, e para a simulação S2, estimada em uma escala de altura.

6.1.5 Escalas de tempo

Outra forma de pensar sobre discos inclinados é em termos de escalas de tempo. Para um disco de acreção inclinado ao redor de um buraco negro, há diversas escalas de tempo que podem ser consideradas: 1) escala de tempo dinâmica; 2) escala de tempo sonora; 3)

escala de tempo de acreção; 4) escala de tempo viscosa; 5) escala de tempo de precessão de Lense-Thirring; 6) escala de tempo de precessão. As expressões para todas estas escalas de tempo foram apresentadas na seção 5.7.7. Na figura 6.14 apresentamos os valores de todas as escalas de tempo em função do raio. Da figura podemos notar que a duração da simulação, foi suficiente para cobrir a escala de tempo viscosa até $R=6M$, a escala de tempo de Lense-Thirring até $R=11M$, a escala de tempo de acreção até $R=13M$ e todas as demais escalas de tempo foram cobertas para todos os raios.

Figura 6.14: Escalas de tempo para a simulação S2. A linha azul representa o instante final da simulação.

De acordo com o modelo de Bardeen-Petterson, um disco inclinado deve alinhar com o buraco negro quando $t_{LT} < t_{vis}$, o que é mais provável de ocorrer nas proximidades do buraco negro, onde t_{LT} é menor. Na figura 6.14, vemos que este é o caso até $R > 50M$, embora para tais raios ambas as escalas de tempo são significativamente maiores do que a duração de nossa simulação, e desta forma deve-se tomar cuidado quando consideramos estes dados. O fato que $t_{LT} < t_{vis}$, sobre grande parte do disco pareceria sugerir que o disco deveria alinhar-se com o buraco negro. Contudo, no próximo capítulo iremos explicar através do raio de relaxação porque isto não ocorreu.

O comportamento de γ em nossas simulações pode ser entendido em termos da escala de tempo sonora, t_{cs} . Baseado em trabalhos anteriores, Fragile & Anninos 2005 e Fragile et

al. 2007, argumentaram que se a velocidade do som é suficientemente alta ou se a escala de tempo sonora é curta, então o torque de Lense-Thirring rapidamente se redistribui através do disco. O resultado disto é que o disco como um todo experimenta precessão de corpo rígido. Há algumas evidências disto na figura 6.11, notado pelo fato que o perfil radial de γ não muda significativamente em raios pequenos após um tempo $t \approx 6000M$, enquanto a precessão continua a crescer gradualmente em raios maiores, embora com variabilidade espacial e temporal.

A precessão do disco é mais claramente vista na figura 6.15, onde apresentamos o ângulo de precessão do disco (definido sobre a região $5 \leq R \leq 90$) como função do tempo. Para pequenos valores do ângulo de torção $\bar{\gamma}$, quando o disco está próximo de $\bar{\beta} \approx \beta_0$, a escala de tempo é dada pela equação 5.86, onde ignorou-se as correções relativísticas e correções proporcionais a $\cos \beta_0$. Desde que a densidade superficial é uma função do tempo, esta escala de tempo de precessão é também formalmente dependente do tempo. Contudo, verificou-se que para todos os intervalos de tempo da simulação, o valor do período de precessão está próximo de $t_{prec} \approx 3.4 \times 10^{-6}t$. Desta forma, encontramos que o ângulo de precessão deve depender do tempo como:

$$\bar{\gamma} = \frac{t}{t_{prec}} \approx 3 \times 10^{-6}t \quad (6.1)$$

Esta previsão é apresentada junto com os dados da simulação na figura 6.15. É aparente que o disco não está precessionando tão rapidamente quanto a previsão sugere. Isto não é uma surpresa pois há grandes incertezas na suposição de que há um simples padrão global para a densidade superficial e para o ângulo de precessão como foi feito. Outra forma de pensar sobre este fato é que o ângulo de precessão começa do zero e estamos medindo mudanças relativamente pequenas em seu valor sobre o curso da simulação.

Figura 6.15: Ângulo de precessão (ou torção), γ , como função do tempo para a simulação S2. Também graficou-se o valor estimado de $\bar{\gamma}$. Os dados da simulação foram obtidos através de médias sobre as órbitas 10-12.5.

6.1.6 Isotropia do stress

As figuras 6.16, 6.17 e 6.18 mostram como $\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}}$, $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ e $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}}$ variam com a posição espacial sobre a casca esférica localizada em $R=10M$ no final da simulação. Pode-se notar da figura 6.16 que $\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}}$ é aproximadamente consistente em sinal em todos os lugares com magnitudes entre 0.01 e 1 em grande parte da casca. Este gráfico foi obtido exatamente no instante final da simulação, e então, como esperado há alguma variabilidade espacial até na direção azimutal. Na figura 6.17 apresentamos dois painéis que mostram ser muito diferentes do da figura 6.16. O fato de apresentarmos dois painéis é que um representa os valores positivos de $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ e o outro representa os valores negativos de $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$. O mesmo foi feito com a componente $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}}$. Podemos notar que os valores tanto de $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ como os de $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}}$ variam muito e isto indica que diferente de $\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}}$ as outras componentes $\alpha_{\hat{i}\hat{j}}$ provavelmente possuem valores positivos e negativos. Podemos ver que os valores variam entre 10^{-3} - 1.

Figura 6.16: Gráfico multicore de $\log_{10}(\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}})$ na casca em $R=10M$. Muito desta casca exibe sinais consistentes para $\alpha_{\hat{r}\hat{\phi}}$ e uma magnitude entre 0.01 - 1.

Figura 6.17: Gráfico multicores de $\log_{10}(\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}})$ na casca em $R=10M$. Desde que $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ não tem um sinal consistente para graficar os seus valores em escala logarítmica, separamos o gráfico em dois painéis. O painel superior é para o caso quando $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}} > 0$ e o inferior para o caso quando $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}} < 0$. Esta figura demonstra que $\alpha_{\hat{r}\hat{\theta}}$ alterna o sinal mais frequentemente e cobre uma variação muito maior de valores.

Figura 6.18: Gráfico multicores de $\log_{10}(\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}})$ na casca em $R=10M$. Desde que $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}}$ não tem um sinal consistente para graficar os seus valores em escala logarítmica, separamos o gráfico em dois painéis. O painel superior é para o caso quando $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}} > 0$ e o inferior para o caso quando $\alpha_{\hat{\theta}\hat{\phi}} < 0$. Nota-se que esta componente apresenta valores e variabilidade semelhantes aos da figura 6.17.

Estes resultados são altamente consistentes com os apresentados por Sorathia et al. (2013b), sendo o único trabalho que questionou a isotropia do tensor viscoso numa simulação global MHD. Notemos que a componente deles (α_*) apenas considera a com-

ponente $r - \theta$ do stress de Maxwell e não inclui o stress de Reynolds. Este stress tem geralmente uma magnitude variando entre $\sim 10^{-5}$ - 10^{-4} , enquanto eles argumentam em seu trabalho que o stress de Reynolds para esta componente pode aproximar-se de ~ 1 - $10P_g$. Desde que nosso $\alpha_{r\theta}$ inclui ambos os stress de Reynolds e Maxwell, parece que nossos resultados são consistentes em ambos os sentidos qualitativos e quantitativos com os deles. A única diferença é que o gráfico de α_* de Sorathia et al. (2013b) mostra mais detalhes devido a alta resolução utilizada.

Há muitas explicações possíveis para a anisotropia aparente da viscosidade. Primeiro, até mesmo assumindo que há uma correlação local no tempo entre os tensores de stress e taxa de tensão, a relação entre eles pode não ser uma proporcionalidade direta de suas respectivas componentes. Num meio anisotrópico, uma relação linear geral pode ser da forma $W_{ij} \sim D_{ijlm} S_{lm}$, onde o tensor $D_{ijlm} S_{lm}$ não é necessariamente diagonal. Segundo, poderia haver correlações não locais no tempo entre W_{ij} e S_{ij} . Por exemplo, Hirose et al. (2009) encontraram através de simulações shearing-box que poderia haver um atraso no tempo no desenvolvimento de W_{ij} e a pressão no disco. Esta situação pode também ser descrita por expressar a relação entre W_{ij} e S_{ij} em termos de uma convolução com um kernel ou utilizando equações dinâmicas para W_{ij} obtidas de um procedimento conveniente (ver e.g. Kato 1994; Ogilvie 2003 para uma discussão).

6.2 Simulações S3 e S4

Devido a resolução das simulações S3 e S4 serem menores e por consequencia terem um custo computacional menor, elas foram evoluídas por mais tempo para verificar se algum efeito dinâmico não observado nas simulações S1 e S2 apareceria em tempos superiores. Porém, antes de apresentarmos os resultados do comportamento dos ângulo de inclinação e torção do disco, iremos mostrar em que casos a resolução afetou o resultado de nossas simulações, verificando o desempenho da função de resfriamento, eficiência da acreção, comparação com o modelo NT73 e as componentes do stress.

6.2.1 Comparação com o modelo NT73

Nesta seção iremos apresentar em que casos a resolução afetou o nosso resultado e levantar possíveis explicações para tais diferenças.

Começaremos mostrando o desempenho da função de resfriamento nestas duas simulações. Para isto apresentamos na figura 6.19 a escala de altura das simulações S3 e S4.

Figura 6.19: Escala de altura (H/R) das simulações S3 e S3. Verifica-se que a função de resfriamento realizou um bom trabalho de manter a escala de altura próxima do valor desejado através do disco.

Comparando-se com a escala de altura da figura 6.2, observa-se que os valores de H/R são muito semelhantes nas partes internas e no caso das simulações S3 e S4 nas partes externas a escala de altura ficou mais próxima de 0.08.

Semelhantemente ao que foi feito com as simulações S1 e S2, comparou-se o valor de H/R com os valores de α_1 das simulações S3 e S4 para verificar se em alguma porção do disco ele poderia ser considerado fino. Este comportamento é apresentado na figura 6.20.

Figura 6.20: Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 das simulações S3 e S4.

Pode-se observar que diferentemente das simulações S1 e S2 o parâmetro de stress α_1 só é maior do que H/R dentro da ISCO, região esta conhecida como *plunging region* onde o campo magnético é muito turbulento podendo aumentar consideravelmente o valor do stress.

É conhecido que a resolução afeta o desempenho da MRI em transportar momento angular pelo disco e desta forma, devido a eficiência ser menor quando a resolução de uma simulação é baixa, espera-se levar mais tempo para atingir o estado de equilíbrio para o mesmo raio. Na figura 6.21 apresentamos o perfil da taxa de acreção e na figura 6.22 os perfis da velocidade radial e momento angular específico.

Figura 6.21: Perfil da taxa de acreção em função do raio das simulações S3 e S4.

Figura 6.22: Superior: Momento angular específico. Inferior: velocidade radial do material acretando. A linha preta refere-se a simulação S3, a linha vermelha a simulação S4 e a linha azul representa o valor esperado do valor do modelo NT73 assumindo $\alpha = 0.1$ e $H/R=0.08$.

Nota-se da figura 6.21 que conforme o esperado, para o mesmo intervalo de tempo da figura 6.4, a simulação só atingiu um estado estacionário até $R=5M$, apresenta uma maior

taxa de acreção quando comparadas com S1 e S2 e além disso observa-se um comportamento caótico para raios superiores. Já a figura 6.22 mostra que ambas as simulações seguem bem o comportamento esperado do modelo NT73 porém, nota-se que para raios pequenos o comportamento tem uma característica dentada que está extremamente associado com a baixa resolução.

Verificou-se se a resolução afeta a quantidade de momento angular que é transportada para dentro da ISCO. Para isto apresentamos na figura 6.23 o fluxo de momento angular no horizonte em função do tempo para as simulações S3 e S4.

Figura 6.23: Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S1 e S2. A linha preta representa a simulação S3, a linha vermelha a simulação S4 e a linha azul o valor esperado do modelo NT73.

Pode-se observar que o comportamento do fluxo de momento angular é muito semelhante ao observado na figura 6.6, onde também encontrou-se um desvio de 13% em comparação com o modelo NT73. Na figura 6.24 apresentamos os fluxos de massa e energia e a eficiência da acreção destas simulações.

Figura 6.24: Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S3 e S4 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73.

Verificando-se o comportamento temporal dos fluxos de massa e energia observa-se que os fluxos das simulações S3 e S4 são menores comparados aos das simulações S1 e S2 mostrando que a resolução afeta o transporte de massa e energia de discos inclinados. Observa-se também que a eficiência de acreção neste caso é maior quando comparada com as simulações S1 e S2, sendo que a eficiência é 23% maior do que o valor esperado do modelo NT73. Uma possível explicação para isto é que devido a baixa resolução, o transporte de matéria e energia são menos eficientes e também é provável que a função de resfriamento esteja resfriando mais o material, liberando mais energia para o meio.

6.2.2 Componentes do stress

Nesta seção, apresentaremos os valores das três componentes do stress de uma forma diferente. Eles serão apresentados em função do raio, seus valores foram obtidos a partir de médias sobre os ângulos ϑ e φ e no intervalo de tempo $10 - 12.5P_{orb}$. Começaremos apresentando na figura 6.25 a componente azimutal α_1 das simulações S2 e S4.

Figura 6.25: Comparação dos valores do stress azimutal α_1 entre as simulações S2 e S4.

Note-se da figura 6.25 que conforme o esperado o valor de α_1 para a simulação S2 é maior devido a MRI ser mais eficiente em redistribuir o momento angular pelo disco. Nota-se porém, um pico entre $R=15-35M$ que pode ser devido a um acúmulo de material nesta região produzido pela má distribuição do momento angular.

De acordo com a teoria de Ogilvie (1999) o stress vertical (α_2) é dominado pelo stress de Reynolds e dessa forma espera-se que ele não seja afetado pela resolução. O valor desta componente para as simulações S2 e S4 é apresentado na figura 6.26.

Figura 6.26: Comparação dos valores do stress azimutal α_2 entre as simulações S2 e S4.

Observa-se do gráfico da figura 6.26 que a componente α_2 apresenta mais oscilações na parte interna para a simulação S2 mas conforme o esperado ambas as simulações mostram o mesmo comportamento para este parâmetro. O valor de α_3 para ambas as simulações é apresentado na figura 6.27.

Figura 6.27: Comparação dos valores do stress azimutal α_3 entre as simulações S2 e S4.

Nota-se que esta componente é extremamente afetada pela resolução, devido a componente φ que está relacionada com a instabilidade magneto-rotacional. Nota-se que em ambos os casos os valores oscilam fortemente sendo que para a simulação S2 a oscilação é muito mais forte.

6.2.3 Ângulos de inclinação e torção

Nesta seção verificaremos se para tempos superiores a simulação S4 mostrou alguma tendência de alinhamento ou se o comportamento obtido foi o mesmo em relação a simulação S2 e verificar se a resolução afetou o comportamento destes ângulos.

Começamos apresentando o ângulo de inclinação para o intervalo de tempo $t = 2000 - 35000M$ na figura 6.28.

Figura 6.28: Ângulo de inclinação fracional, β/β_0 para a simulação S4 como função do tempo e raio.

Observa-se da figura que mesmo para tempos superiores a simulação não mostrou nenhuma diferença em relação a simulação S2 mas nota-se o fato importante que para a simulação S4 o perfil do ângulo de inclinação mostra muito menos variabilidade espacial.

O próximo passo foi observar quanto a resolução afetou o ângulo de precessão. O valor deste ângulo em função do tempo e raio é apresentado na figura 6.29.

Figura 6.29: Ângulo de torção, γ , para a simulação S4 como função do tempo e raio.

Comparando a figura 6.29 com a figura 6.11, nota-se que não se observa uma forte precessão diferencial em raios pequenos no início da simulação, e conforme encontrado por Sorathia et al. (2013b), devido a MRI ser menos eficiente, o disco mostra uma precessão semelhante a de um corpo rígido durante um intervalo de tempo muito longo.

6.3 Simulação S5

Conforme mencionado na introdução deste capítulo, uma das simulações teve como objetivo verificar a influência no ângulo de inclinação no momento em que o ângulo entre os momentos angulares do disco de acreção e buraco negro são alterados. Nas simulações S2 e S4, o ângulo do momento angular do buraco negro foi alterado após duas órbitas para permitir que um disco se formasse nas partes internas e a MRI já estivesse estabelecida. No caso da simulação S5, inicializou-se a simulação com o buraco negro já inclinado com o mesmo ângulo inicial.

Como o objetivo era apenas verificar se a introdução do ângulo de inclinação desde o instante inicial afetaria o resultado final da simulação, apresentaremos apenas o ângulo de inclinação desta simulação em função do raio comparado com o ângulo de inclinação da

simulação S4. Este comportamento é apresentado na figura 6.30.

Figura 6.30: Ângulo de inclinação, β , para as simulações S4 e S5 em função do raio. A linha azul representa a localização da ISCO.

Conforme pode-se observar da figura, o fato de já termos iniciado a simulação com o momento angular do buraco negro inclinado com relação ao momento angular do disco não afetou nossos resultados e nenhum alinhamento foi observado.

6.4 Simulações S6 e S7

Conforme mencionado anteriormente, Penna et al. (2010) argumentaram que quanto mais fino for o disco ou quanto maior o número de loops o campo magnético possuir, menor será o stress dentro da ISCO. Desta forma realizamos duas simulações com campo magnético formado por dois loops e verificamos se a eficiência da acreção se aproximava mais do valor previsto pelo modelo NT73 e também a influência desse segundo loop no caso em que o momento angular do disco está inclinado em relação ao momento angular do buraco negro.

Começamos inicialmente comparando a escala de altura (H/R) do disco com a parâmetro de stress azimuthal (α_1) para verificar quanto o campo magnético pode ter afetado a forma do disco. O gráfico representando ambas quantidades é apresentado na figura 6.31.

Figura 6.31: Comparação da escala de altura (H/R) com o parâmetro de stress α_1 da simulação S6.

Observa-se que de forma semelhante ao caso da simulação S3, o parâmetro de stress (α_1) só é maior do que a escala de altura dentro da plunging region e além disso também observa-se que o stress da simulação S6 é menor comparado ao da simulação S3, mostrando que a inclusão de um novo loop fez com que a instabilidade magnetorotacional ficasse menos eficiente.

O próximo passo foi verificar se o momento angular específico e a velocidade radial seguiram melhor as previsões do modelo NT73. O gráfico de ambos os casos é apresentado na figura 6.32.

Figura 6.32: Comparação do momento angular específico e da velocidade radial com o modelo NT73.

Comparando-se com a figura 6.22 observa-se que a simulação S6 apresenta um comportamento muito semelhante ao da simulação S4 e diferentemente da simulação S3, ambas as quantidades não apresentam a característica de um perfil dentado.

O próximo passo foi testar se o fluxo de momento angular no horizonte é menor para a simulação S6. O fluxo de momento angular em função do tempo das simulações S3 e S6 são apresentados na figura 6.33.

Figura 6.33: Fluxo de momento angular no horizonte das simulações S3 e S6. A linha azul o valor esperado do modelo NT73.

Observa-se que de fato a simulação S6 tende um pouco mais ao valor esperado do modelo NT73, apresentando um desvio de 12% em relação ao modelo NT73, enquanto a simulação S3 apresentou um desvio de 13%.

Comparou-se a eficiência da acreção da simulação S6 com a simulação S3 e também com o valor previsto pelo modelo NT73. Verificou-se também o quanto a inclusão do segundo loop afetou a taxa de acreção e o fluxo de energia. Todas estas quantidades são apresentadas na figura 6.34

Figura 6.34: Superior: fluxo de massa no horizonte do buraco negro. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção para as simulações S3 e S6 e a linha azul representa o valor esperado pelo modelo NT73.

Observa-se que tanto a taxa de acreção quanto o fluxo de energia apresentaram uma queda considerável, tendo uma queda superior à 50% porém observa-se que a eficiência da acreção para as duas simulações é a mesma revelando que a luminosidade emitida é a mesma em ambos os casos.

Desta forma, concluiu-se que de fato a inclusão de um novo loop para o campo magnético afetou o fluxo de momento angular no horizonte mesmo sendo uma diferença muito pequena, comprovando o argumento apresentado por Penna et al. (2010).

Um fato observado que pode explicar os baixos valores da taxa de acreção e do fluxo de energia é que na região onde ocorre a inversão de polaridades, o disco se quebrou em dois provavelmente devido a um torque magnético exercido nesta região. Isto pode ser visto pelo perfil da densidade superficial da simulação e da intensidade do campo magnético da simulação S6. As imagens são apresentadas nas figuras 6.35 e 6.36.

Figura 6.35: Densidade superficial da simulação S6.

Figura 6.36: Superior: Densidade do disco no plano Y-Z. Inferior: Intensidade do campo magnético.

Das imagens da simulação, observa-se que a quebra do disco ocorreu exatamente em $R=30M$, compatível com o gráfico da densidade superficial e também é o raio conforme pode-se ver pelas linhas do campo magnético onde ocorre a inversão de polaridade.

Além de verificar os efeitos da inclusão de um segundo loop no campo magnético num disco fino plano, verificou-se se este segundo loop geraria algum efeito nos ângulos de precessão e inclinação. O gráfico do ângulo de inclinação da simulação S7 é apresentado na figura 6.37.

Figura 6.37: Ângulo de inclinação das simulações S2 e S7.

Conforme pode-se verificar o segundo loop não gerou nenhum efeito no ângulo de inclinação exceto na região dentro da ISCO, confirmando que a evolução do ângulo de inclinação é governado por efeitos hidrodinâmicos.

O próximo passo foi verificar se o disco precessionou da mesma forma em relação a simulação S4. O gráfico do ângulo de torção é apresentado na figura 6.38.

Figura 6.38: Ângulo de torção das simulações S4 e S7.

Verifica-se que o comportamento do ângulo de torção de ambas as simulações é semelhante porém, a inclusão do segundo loop do campo magnético fez com que o disco precessionasse mais lentamente mostrando que a precessão é afetada por efeitos magnetohidrodinâmicos, como também encontrado por Sorathia et al. (2013b).

6.5 Simulação S8

Conforme verificou-se em todas as simulações anteriores o ângulo de inclinação do momento angular do disco em relação ao do buraco negro apenas apresentou um comportamento oscilatório e além disso não verificou-se nenhum tipo de propagação que fizesse este ângulo diminuir ou aumentar em raios maiores. Como utilizou-se uma função de resfriamento empírica, pensou-se na possibilidade desta função de resfriamento não estar permitindo o desenvolvimento da perturbação no disco. Para verificar esta possibilidade, realizou-se uma simulação com a mesma inicialização porém sem a função de resfriamento. Devido a inexistência da função de resfriamento espera-se que o disco fique espesso.

Primeiramente comparou-se a escala de altura do disco com o parâmetro de stress azimuthal. Estes parâmetros são apresentados na figura 6.39.

Figura 6.39: Comparação do parâmetro de stress (α_1) com a escala de altura (H/R) do disco no instante final da simulação.

Conforme pode-se observar, o disco que inicialmente tinha uma escala de altura $H/R=0.08$ ao final tornou-se mais espesso conforme o esperado passando a ter uma escala de altura de aproximadamente $H/R \approx 0.13$ e comparando-se com o parâmetro de stress verifica-se que o disco é realmente espesso revelando que o efeito Bardeen-Petterson não deve se manifestar.

O comportamento da eficiência da acreção é apresentado na figura 6.40.

Figura 6.40: Superior: fluxo de acreção de massa. Meio: fluxo de energia. Inferior: Eficiência da acreção.

Verifica-se que neste caso a eficiência da acreção após o tempo $t = 4000M$ ficou dentro do valor esperado do modelo NT73 indicando que a eficiência extra apresentada nas outras simulações pode realmente estar sendo produzida não só pelo torque dentro da ISCO como também pela função de resfriamento.

O passo seguinte foi verificar se a função de resfriamento estava impedindo o desenvolvimento da deformação do disco. O gráfico do ângulo de inclinação da simulação S8 em comparação com a simulação S4 é apresentado na figura 6.41.

Figura 6.41: Ângulos de inclinação das simulações S4 e S8. A linha azul representa a localização da ISCO.

Conforme pode-se observar, ambos os ângulos apresentaram o mesmo tipo de comportamento provando que a função de resfriamento em nenhum momento impediu a formação da deformação no disco.

Comparou-se também o ângulo de torção da simulação S8 com o da simulação S4 tanto em função do raio como em função do tempo. O resultado é apresentado na figura 6.42.

Figura 6.42: Superior: ângulo de torção das simulações S4 e S8 em função do tempo. Inferior: ângulo de torção em função do raio.

Inicializou-se a simulação S8 com o momento angular do buraco negro inclinado em relação ao do disco desde o começo mas ainda assim observou-se que a simulação S8 apresentou um grau de precessão maior em função do tempo, porém ambas mostrando comportamentos aproximadamente lineares enquanto que em função do raio obsevou-se que

apenas a parte interna do disco da simulação S8 precessionou levemente em comparação com o disco da simulação S4.

6.6 Simulação S9

O objetivo da simulação S9 era simular um disco de duas componentes semelhante ao sistema composto por um disco do tipo ADAF (Narayan & Yi 1995) na parte interna e um disco fino na externa. Sabe-se que nestes sistemas o raio de transição entre os dois discos é determinado principalmente pela taxa de acreção que é governada pelo resfriamento radiativo do disco. Devido a limitações computacionais em simular o regime opticamente espesso, utilizando-se nossa função de resfriamento empírica, resfriou-se apenas o disco para raios maiores do que 30M e começou-se com o desalinhamento entre os momentos angulares do disco de acreção e buraco negro desde o começo. Além de verificarmos a evolução dos ângulos de inclinação e torção, comparou-se a velocidade radial, sonora e angular com o modelo de disco ADAF+Fino descrito no capítulo 2.

A escala de altura é apresentada na figura 6.43

Figura 6.43: Escala de altura doo discos de acreção da simulação S9.

Pode-se verificar que a função de resfriamento realizou um bom trabalho, fazendo com

o disco ficasse espesso até $R < 30M$ e após este raio observa-se que a escala de altura tende ao valor inicial de 0.08.

Em seguida, fizemos a comparação dos resultados da simulação com a teoria para este caso. Na figura 6.44 apresentamos os gráficos das três velocidades junto com a previsão do modelo.

Observa-se do gráfico da velocidade do som que para nenhum valor da constante a , o perfil da velocidade do som pode ser reproduzido. O mesmo ocorreu para as demais velocidades indicando como esperado que o disco espesso interno não é um ADAF e além disso no modelo teórico efeitos do ângulo de inclinação não foram incluídos nas equações 2.141-2.143.

Figura 6.44: Superior: velocidade do som. Meio: velocidade radial Inferior: velocidade angular. A curva em preto representa os resultados da simulações e as demais curvas o esperado do modelo para diferentes valores da constnate a .

Por fim, estudou-se o comportamento dos ângulos de inclinação e torção em função do

tempo. Pelo fato de termos dois tipos de discos, as médias foram realizadas do raio do horizonte até o raio externo do disco fino, do raio do horizonte até o raio de transição, do raio de transição até o raio externo e sobre todo o disco. Os perfis são apresentados nas figuras 6.45 e 6.46.

Figura 6.45: Ângulo de inclinação em função do tempo para a simulação S9.

Figura 6.46: Ângulo de torção em função do tempo para a simulação S9.

Observa-se que a dinâmica dos ângulos de inclinação e torção são dominados pelo disco fino externo uma vez que o comportamento médio de seu ângulo é igual ao ângulo médio de todo o disco.

6.7 Simulações S10 e S11

Zhuravlev & Ivanov (2011) em seu modelo de discos distorcidos relativísticos, argumentaram que sempre que o buraco negro rotaciona no sentido oposto ao disco de acreção, os momentos angulares de ambos devem se alinhar. Com o objetivo de testar esta hipótese, realizamos duas simulações semelhantes à S3 e S4 mas com o buraco negro tendo um spin $a_* = -0.1$ e um mesmo valor para o ângulo de inclinação.

Inicialmente iremos comparar os resultados de ambas as simulações com o modelo padrão NT73 e depois iremos apresentar os resultados da simulação S11.

A escala de altura de ambas as simulações são apresentadas na figura 6.47.

Figura 6.47: Escala de altura dos discos de acreção das simulações S10 e S11.

Pode-se observar do gráfico que a função de resfriamento realizou um bom trabalho mantendo a escala de altura próxima de $H/R=0.08$.

O passo seguinte foi comparar o parâmetro de stress azimuthal com a escala de altura para verificarmos para que raios obtemos um disco fino. Este resultado é apresentado na figura 6.48.

Figura 6.48: Escala de altura e parâmetro do stress azimutal dos discos de acreção das simulações S10 e S11.

Observa-se que para raios até 30M o disco pode ser considerado fino e portanto deve-se esperar alinhamento Bardeen-Petterson na parte interna do disco.

Comparou-se em seguida o perfil da velocidade radial e do momento angular específico com os valores previstos pelo modelo NT73. Ambos os perfis são apresentados na figura 6.49.

Figura 6.49: Superior: Momento angular específico. Inferior: Velocidade radial. A linha azul representa o valor esperado do modelo NT73.

Comparando-se com os perfis das simulações S10 e S11, verifica-se que ambos seguem o mesmo comportamento seguindo relativamente bem o modelo NT73.

A próxima comparação feita com o modelo NT73, foi verificar se a eficiência de acreção no caso retrógrado se aproxima do valor esperado. O gráfico dos fluxos de massa, energia no horizonte e da eficiência da acreção são apresentados na figura 6.50.

Figura 6.50: Superior: fluxo de massa no horizonte. Meio: fluxo de energia no horizonte. Inferior: eficiência da taxa de acreção. A linha azul representa o valor esperado do modelo NT73.

Observando a evolução da eficiência da taxa de acreção, verifica-se um desvio de 15% para a simulação S10 e 10% para a simulação S11. O motivo desta diferença será explicado mais adiante.

Uma vez feita a comparação com o modelo NT73, estudou-se a evolução dos ângulos de inclinação e precessão da simulação S11.

O gráfico do ângulo de inclinação em função do tempo e raio é apresentado na figura 6.51.

Figura 6.51: Ângulo de inclinação em função do tempo e raio normalizado pelo valor inicial. Pode-se ver da figura a evidência de um modesto alinhamento em pequenos raios ($R < 10M$).

Diferente do caso prógrado, a simulação S11 exibe uma tendência de alinhamento embora este efeito não seja forte. O alinhamento dentro de $R = 10M$ é apenas de 10% e permaneceu assim durante toda a simulação. Embora este não seja um grande valor, mostraremos no próximo capítulo que é consistente com o modelo de Zhuravlev & Ivanov (2011). Desta forma, esta é a primeira evidência de alinhamento numa simulação GRMHD.

Uma vez observado a presença do alinhamento na simulação S11, a diferença entre as eficiências das taxas de acreção das simulações S10 e S11 é devida a uma dissipação extra produzida por este efeito fazendo com que a taxa de acreção aumente e este aumento pode ser notado comparando-se o fluxo de massa das figuras 6.24 e 6.50. Resultados semelhantes foram encontrados por Lodato & Pringle (2006) ao solucionarem a equação de conservação de momento angular adicionando o termo de torque de Bardeen-Petterson.

Paploizou & Pringle (1983) desenvolveram uma teoria de discos inclinados válida para pequenos ângulos de inclinação e parâmetro de stress e em seu modelo encontraram que a componente vertical do stress ($\alpha_{r\theta}$) seria a responsável pelo alinhamento da parte interna do disco, e encontraram que esta componente vertical depende da componente azimuthal através da relação $\alpha_2 = 1/2\alpha_1$.

Ogilvie (1999) estendeu esta análise para valores maiores dos parâmetros de stress e do ângulo de inclinação obtendo expressões mais precisas para as viscosidades encontrando também que $\alpha_2 > \alpha_1$. Uma vez que o alinhamento se mostrou presente na simulação S11, comparamos os valores das duas componentes do stress que são apresentadas na figura 6.52 juntos com os valores da simulação S4 para comparação.

Figura 6.52: Superior: parâmetro do stress azimutal ($\alpha_{r\phi}$). Inferior: parâmetro do stress vertical ($\alpha_{r\theta}$).

Observa-se que os valores da componente vertical são muito semelhantes indicando que a eficiência do transporte de momento angular nas simulações S4 e S11 são muito semelhantes. Já a componente $\alpha_{r\theta}$, diferentemente do esperado, mostrou-se ser menor do que a componente $\alpha_{r\phi}$ mas comparada com a simulação S4, o valor desta componente mostrou-se ser maior.

Nossos resultados vão contra da teorias de Papaloizou & Pringle (1983) e Ogilvie (1999) e as implicações deste desacordo ainda são desconhecidas.

Verificou-se por fim se neste caso poderia haver a presença de choques como encontrado por Fragile & Blaes (2008). Para verificarmos isto, graficou-se a entropia das simulações S10 e S11 em função do raio e o resultado é apresentado na figura 6.53.

Figura 6.53: Entropia das simulações S10 e S11.

Conforme pode-se verificar ambos os perfis são muito semelhantes indicando que mesmo neste caso não há choques. Desta forma, acredita-se que estes choques só se manifestem para spins ou ângulos de inclinação maiores.

Modelo disco torcido relativístico

Embora simulações GRMHD tridimensionais fornecem resultados mais precisos e detalhados para o estudo de discos de acreção, é importante, quando possível, comparar com modelos analíticos e semi-analíticos que são computacionalmente mais baratos e podem prover conclusões adicionais. Consideramos aqui uma descrição da dinâmica de um disco torcido completamente relativístico baseado na generalização apropriada do trabalho de Zhuravlev & Ivanov (2011, daqui em diante ZI). A principal vantagem desta aproximação é que, neste referencial, a dinâmica dos discos torcidos pode ser descrita por quatro equações lineares para quatro variáveis, que são funções apenas de uma variável espacial e temporal. Estas equações podem ser evoluídas numericamente muito mais rápido do que as equações GRMHD e por tempos maiores. Em certos casos este esquema permite até mesmo um tratamento analítico.

Como nosso trabalho leva em conta os efeitos da relatividade geral por completo, é importante descrever os diferentes sistemas de coordenadas utilizados neste trabalho. Seguindo nossa prática com as simulações GRMHD, utilizamos coordenadas Kerr-Schild (t, r, θ, ϕ) como sistema de coordenadas principal. Algumas vezes é conveniente introduzir coordenadas espaciais cartesianas que estão associadas com este sistema da seguinte forma: $(x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta)$. Para introduzir a inclinação, fazemos uma rotação adicional do sistema de coordenadas por uma quantidade β_0 sobre o eixo y , como na equação 5.22. Isto resulta numa mudança dos ângulos esféricos $(\theta, \phi) \rightarrow (\vartheta, \varphi)$ tal que o plano médio do disco inicial sempre coincide com o plano equatorial das coordenadas inclinadas $\vartheta = \pi/2$.

O modelo semi-analítico de ZI foi formalmente desenvolvido em coordenadas BL, embora foi mostrado que para buracos negros rotacionando lentamente pode-se utilizar co-

ordendas de Schwarzschild, por tratar os efeitos da rotação como perturbações. No contexto do modelo de ZI, que apenas depende das coordenadas radiais e temporais, as coordenadas de Schwarzschild diferem das de Kerr-Schild apenas na componente temporal, $t_S = t - 2M \ln(r/2M - 1)$. Utilizamos o mapeamento correspondente entre as coordenadas (t_S, r) e (t, r) para relacionar os resultados obtidos em diferentes sistemas.

A aproximação de ZI é baseada na separação de todas as variáveis dinâmicas entre componentes de fundo e perturbações, onde as componentes de fundo são baseadas no modelo de um disco de acreção não inclinado ou tórus, enquanto que as perturbações caracterizam a dinâmica associado com a inclinação e torção. É assumido que a inclinação do disco $\beta(r, t)$ permanece pequena durante a evolução, daí a motivação em escolher um modesto valor de $\beta_0 = 10^\circ$ para nossas simulações. Também fazemos a suposição que o parâmetro rotacional do buraco negro (a_*) é pequeno.

Quando derivamos as equações para a evolução das perturbações, assumimos que as variáveis de fundo são descritas pela generalização não estacionária do modelo relativístico de disco fino opticamente espesso de NT73, utilizando a prescrição α de Shakura & Sunyaev (1973) para representar a viscosidade efetiva dentro do disco. Contudo, este α pode ter várias formas podendo ser extraído diretamente das simulações numéricas. Pode-se mostrar que esta aproximação é equivalente ao formalismo da função de resfriamento utilizada nas simulações GRMHD recentes (Noble et al 2010; Penna et al. 2010).

Para o modelo semi-analítico, precisamos apenas de quatro variáveis de fundo; o parâmetro α , a densidade superficial do disco Σ , a escala de altura $\delta = H/R$; e a componente radial da quadri-velocidade u_S^r . Todas estas quantidades são em geral funções de t_S e R . Em geral, quando α e uma função da opacidade para o disco são dadas, $\Sigma(t_S, R)$, $\delta(t_S, R)$ e $u_S^r(t_S, R)$ podem ser obtidos solucionando a equação de evolução da densidade superficial relativística (Eardley & Lightman 1975). Neste trabalho, obtemos estas variáveis diretamente das simulações GRMHD. As simulações utilizadas neste modelos são S1, S3 e S10. Os modelos semi-analítico são feitos para cada uma delas e então comparadas com S2, S4 e S11.

Perfis das simulações S1 e S3 para alguns intervalos de tempo são apresentados na figura 7.1. A simulação em alta resolução é mostrada por ter dois intervalos de tempos diferentes correspondendo aproximadamente ao início e final dos cálculos semi-analíticos. Todas as quantidades se comportam da forma esperada: a densidade superficial está se espalhando

com o tempo; a velocidade radial se aproxima do estado quase-estacionário próximo da ISCO nos tempos finais; o parâmetro α permanece aproximadamente constante. Já a simulação em baixa resolução, demonstra um comportamento peculiar em tempos tardios. Notavelmente nos tempos finais, há um máximo adicional na distribuição de densidade em $R \sim 12-15M$, o parâmetro α é também não monotônico e atinge valores grandes da ordem de um ou mais. Isto pode ser atribuído a baixa resolução da turbulência MHD neste modelo, que pode conduzir por exemplo, a acreção no buraco negro artificialmente estagnada e a formação do segundo pico na densidade. Portanto, resultados baseados nesta simulação, tão bem como sua generalização para o caso inclinado, devem ser analisados com cuidado; eles serão discutidos mais adiante principalmente para propostas ilustrativas.

Figura 7.1: Distribuição do parâmetro de stress α (superior esquerdo), escala de altura δ (superior direito), densidade superficial (inferior esquerdo) e componente radial da quadri-velocidade (inferior direito), como função da coordenada radial, para a simulação S1 (curvas espessas) e S3 (curvas finas), obtidas através de médias em intervalos de tempos diferentes.

7.1 Equações dinâmicas para as variáveis de torção

Nesta seção apresentaremos como a inclinação e torção do disco podem ser caracterizadas por um par de variáveis complexas $\mathbf{W}$ e $\mathbf{B}$, referidas daqui por diante como variáveis de torção, onde $\mathbf{W}$ está diretamente associado com perturbações geométricas do disco, desde que $\mathbf{W} = \beta e^\gamma$, enquanto $\mathbf{B}$ descreve o cisalhamento de velocidade no disco. Embora ZI derivaram as equações dinâmicas para as variáveis de torção assumindo um fundo estático especificado pelo modelo NT73, a forma mais geral das equações dinâmicas de ZI (46-48) foram derivadas utilizando apenas duas suposições gerais: $\delta \ll 1$ e $a_* \ll 1$. Então, estas equações podem ser utilizadas para fundos não estacionários.

Utilizando as equações (46) e (47) de ZI, pode-se obter uma equação dinâmica para $\mathbf{B}$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_S} = \frac{1}{2} \left[\left[1 + \frac{\kappa^2}{(i - \alpha_*)^2 \Omega^2} \right] (i - \alpha_*) \Omega \mathbf{B} - \left[(i + \alpha_*) u_S^\varphi \Omega - \frac{3i\alpha_*}{i - \alpha_*} K_1 (u_S^t)^2 u_S^\varphi \tilde{\Omega} \right] K_1 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial R} \right] \quad (7.1)$$

Similarmente uma equação dinâmica para $\mathbf{W}$ segue da equação (48) de ZI:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t_S} - i\Omega_{LT} \mathbf{W} + K_1^2 \left[\frac{u^r}{u_S^t} + \frac{\alpha}{2(n+3/2)} u_S^\varphi \delta_{SA}^2 \right] \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial R} = \\ & \frac{K_1}{4(n+3/2)R^2 u_S^t u_S^\varphi \Sigma} \frac{\partial}{\partial R} \left[\Sigma R^3 K_1 \delta_{SA}^2 u_S^\varphi \left[\left(i + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{K_1 u_S^t} \right) \mathbf{B} + \frac{2}{3} \frac{\alpha}{u_S^t} u_S^\varphi \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial R} \right] \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde $\alpha_* = 2(u^t)^2 \alpha / (3K_1)$, $K_1 = \sqrt{1 - 2M/R}$, $u_S^t = \sqrt{(R - 2M)/(R - 3M)}$ e $u_S^\varphi = M^{1/2}/\sqrt{R - 3M}$ são duas componentes da quadri-velocidade de uma partícula livre orbitando um buraco negro de Schwarzschild na direção azimutal na base ortonormal natural, $\Omega = M^{1/2} R^{-3/2}$ é a frequência angular do movimento circular, $\kappa = M^{1/2} R^{-3/2} \sqrt{1 - 6M/R}$ é a frequência epicíclica relativística, $\tilde{\Omega} = M/(R^2 u_S^t u_S^\varphi)$, e $\Omega_{LT} = 2aMR^{-3}$ é a frequência de precessão de Lense-Thirring. Notemos que quando R é grande temos que $\Omega \sim \kappa \sim \tilde{\Omega} \sim M^{1/2} R^{-3/2}$. É suficiente empregar u^t e u^φ da métrica de Schwarzschild desde que desvios devido a rotação do buraco negro aparecem apenas como pequenas correções $\propto a_*$. Por esta razão, $R=6M$, que é o raio da ISCO é assumido como fronteira interna do disco torcido no modelo semi-analítico.

Contrário a ZI, onde uma equação de estado isotérmica foi utilizada na direção vertical, assumimos em 7.1 e 7.2 que o disco é barotrópico na direção vertical, com pressão $P \propto \rho^\gamma$. Obtemos desta forma uma distribuição de densidade na direção vertical dada por

$$\rho(r, z) = \rho_c(1 - z^2/H^2)^n \quad (7.3)$$

onde a densidade central ρ_c , a meia altura do disco H , são funções de R . A potência n é assumida como $3/2$ para corresponder ao índice adiabático $\Gamma = 1 + 1/n = 5/3$, como nas simulações GRMHD. Neste caso a densidade superficial é dada por $\Sigma(R) = \int dz \rho = \rho_c H$.

É importante notar que a escala de altura $\delta_{SA} = H/R$, utilizada no modelo semi-analítico é diferente da utilizada nas simulações GRMHD. No último caso, esta quantidade fornece uma razão média, com o quadrado da densidade utilizado como uma função peso. Em contraste, δ_{SA} assume uma distribuição de densidade da forma dada pela equação 7.3, e o código procura pela altura H , onde ρ cai para zero. Claramente, espera-se $\delta_{SA} \sim \delta$, e de fato, para a distribuição 7.3 tem-se $\delta_{SA} = 3\delta$. Com o objetivo de obter δ_{SA} dos dados numéricos calculamos

$$\delta_{SA} = 6 \frac{\int d\varphi \sin \vartheta d\vartheta \rho(\vartheta - \frac{\pi}{2})^2}{\int d\varphi \sin \vartheta d\vartheta \rho} \quad (7.4)$$

Devemos mencionar que isto é apenas verdadeiro se 7.3 é satisfeita. De fato, o valor de $\delta_{SA} \sim 0.25$ obtido dos dados numéricos está muito próximo de 3δ conforme esperado. Isto demonstra que a distribuição 7.3 deve ser mantida em nossas simulações GRMHD.

Notemos que utilizamos a densidade superficial Σ e a variável de torção $\mathbf{B}$ levemente diferentes do utilizado no trabalho de ZI. Utilizando Σ_{ZI} e $\mathbf{B}_{ZI}$ para nos referir as variáveis do trabalho de ZI, temos $\Sigma = \Sigma_{ZI} K_2$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ZI} / K_2$, onde o coeficiente $K_2(R)$ é definido através das relações: $R = K_2 R_{ISO}$ e $K_2 = (1 + M/2R_{ISO})^2$, onde R_{ISO} é a então chamada coordenada radial isotrópica. É necessário fazer isto desde que ZI utilizaram coordenadas radiais e verticais diferentes, R_{ISO} e ε , respectivamente. As coordenadas verticais são relacionadas como $\varepsilon = z/K_2$. Também devemos notar que utilizamos uma prescrição α diferente da de ZI.

Contrário as simulações GRMHD, o modelo semi-analítico apenas se aplica em raios $R > R_{ms}$, onde $R_{ms} = 6M$ é o raio da ISCO. Em todos os raios, os coeficientes em 7.1 e 7.2 tornam-se singulares e uma condição de fronteira aproximada para as variáveis $\mathbf{B}$ e $\mathbf{W}$ devem ser utilizadas.

Iremos nos referir ao modelo completamente relativístico que leva em conta todos os termos em 7.1 e 7.2 como modelo SA1. Para o modelo SA2, ajustaremos $\partial \mathbf{B} = 0$ na equação

7.1, removendo efeitos baseados na propagação de ondas o que simplifica as equações dinâmicas por ajustar todos os termos em 7.1 e 7.2 iguais aos seus valores Newtonianos. Notemos que manteremos o termo gravitomagnético neste modelo. Então, o modelo SA2 está aproximadamente relacionado aos modelos numéricos e analítico de discos torcidos que caem na aproximação difusiva. Com o objetivo de explorar possíveis efeitos da viscosidade anisotrópica no esquema semi-analítico, consideramos também um modelo adicional, SA1b, onde solucionamos as mesmas equações do modelo SA1, mas ajustando $\alpha=0$ em todos os termos de 7.1 e 7.2 além do termo contendo α no lado esquerdo da equação 7.2.

7.2 Escala de tempo característica

Antes de discutirmos nossos resultados, devemos apresentar uma escala de tempo importante para verificar se efeitos dinâmicos conduzem a relaxação das partes internas do disco utilizando as equações pós-Newtonianas (38) e (39) de Demianski & Ivanov (1997). Encontramos a solução destas equações na aproximação WKBJ procurando por variáveis dinâmicas proporcionais a $e^{i(\omega t + kR)}$.

Para estimar a escala de tempo de relaxação, utilizamos um modelo muito simples de disco torcido apresentado por Demianski & Ivanov (1997) (ver também Lubow et al. 2002). Este modelo faz as seguintes simplificações: primeiro, assume que o ângulo de inclinação é pequeno e apenas termos lineares em β são considerados; segundo, efeitos da Relatividade Geral são tratados como correções na forma da precessão de Einstein da linha apsidal e a precessão gravitomagnética; terceiro, a viscosidade efetiva é assumida como sendo isotrópica, com um valor constante e pequeno de α . Utilizamos o esquema WKBJ e assumimos a variável complexa $W_k \propto e^{i(\omega t + kR)}$. Desta forma obtemos a seguinte relação de dispersão:

$$\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}(\tilde{\Omega}_e + \tilde{\Omega}_{LT} + i\alpha) + \tilde{\Omega}_{LT}(\tilde{\Omega}_e + i\alpha) = \frac{\kappa^2}{4}, \quad (7.5)$$

onde todas as frequências são expressas em termos da frequência Kepleriana $\Omega_{Kep} = r^{-3/2}$, $\Omega_e = 3\Omega_{Kep}/R$ é a frequência da precessão de Einstein da linha apsidal e $\kappa = \delta kR$. A solução para esta equação é

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\tilde{\Omega}_e + \tilde{\Omega}_{LT} + i\alpha \pm \sqrt{\frac{R}{2}} \left(\sqrt{1 + \cos \psi} + i \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 + \cos \psi}} \right) \right], \quad (7.6)$$

onde

$$\sin \psi = -\frac{2\alpha(\tilde{\Omega}_e - \tilde{\Omega}_{LT})}{R}, \quad \cos \psi = \frac{(\tilde{\Omega}_e - \tilde{\Omega}_{LT})^2 + \kappa^2 - \alpha^2}{R}, \quad (7.7)$$

e

$$R = \sqrt{[(\tilde{\Omega}_e - \tilde{\Omega}_{LT})^2 + (\kappa + \alpha)^2][(\tilde{\Omega}_e - \tilde{\Omega}_{LT})^2 + (\kappa - \alpha)^2]}. \quad (7.8)$$

Utilizamos a expressão 7.6 para encontrar a escala de tempo de relaxação para uma solução quase-estacionária,

$$(t_{\text{relax}})_{1,2} = \frac{1}{\text{Im}(\tilde{\omega}_{1,2}\Omega_{\text{Kep}})}, \quad (7.9)$$

como funções de R , formalmente ajustando $k = 1/R$, e correspondentemente $\kappa = \delta$.

Como explicado anteriormente, também consideramos um modelo auxiliar, SA2, onde a contribuição das ondas é suprimida e todos os termos com excessão do gravitomagnético são iguais aos seus valores Newtonianos. A supressão das ondas corresponde a uma aproximação de baixa frequência, onde o termo $\tilde{\omega}^2$ em 7.5 é desprezado assim como o termo $\tilde{\Omega}_{LT}$ multiplicando $\tilde{\omega}$ em 7.5. Neste caso há apenas um ramo de soluções:

$$\tilde{\omega} = i\frac{\kappa^2}{4(\alpha - i\tilde{\Omega}_e)} + \tilde{\Omega}_{LT}. \quad (7.10)$$

A relação de dispersão apropriada para o modelo SA2 segue de 7.10 com $\tilde{\Omega}_e$ ajustado para zero, isto é,

$$\tilde{\omega} = i\frac{\kappa^2}{4\alpha} + \tilde{\Omega}_{LT}. \quad (7.11)$$

A escala de tempo de relaxação, t_{relax} , correspondendo ao modelo SA2 segue de 7.11 do mesmo modo como para o modelo SA1. Notemos que a equação 7.11 é a relação de dispersão padrão da dinâmica de discos torcidos na aproximação difusiva. No limite oposto do regime de ondas, o termo $\tilde{\omega}^2$ no lado direito da equação 7.5 é dominante, enquanto o termo proporcional a $\tilde{\omega}$ pode ser tratado como uma perturbação. Isto conduz a

$$\tilde{\omega} = \pm \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}(\tilde{\Omega}_e + \tilde{\Omega}_{LT} + i\alpha). \quad (7.12)$$

Na figura 7.2 graficamos t_{relax} como função de R para $\kappa \sim 1/R$. Nesta figura, a viscosidade é assumida como sendo isotrópica e a escala de altura constante; utilizamos valores

canônicos $\alpha=0.1$ e $\delta=0.08$. Podemos ver da figura que a aproximação de difusão (curva tracejada) conduz a um tempo de relaxação curto. Portanto, quando esta aproximação é adotada, as partes internas do disco devem se aproximar do alinhamento dentro do tempo computacional típico. No entanto, correções relativísticas produzem uma escala de relaxação maior. Neste caso, embora da mesma ordem a escala de tempo é maior que a do domínio computacional para a simulação em alta resolução, e menor do que o tempo computacional para a simulação em baixa resolução. Portanto, podemos esperar alguma assinatura de relaxação ao menos em raios pequenos.

Figura 7.2: Escala de tempo de relaxação, t_{relax} , definida nas equações acima, graficada como função da coordenada radial R . As duas curvas sólidas mostram os dois ramos da solução do modelo SA1. As soluções para o modelo SA2 apenas possuem um ramo. A curva tracejada mostra um caso adicional onde a evolução é solenemente determinada por ondas decaindo como resultado da viscosidade. Para referência, as linhas finas horizontais mostram os tempos de parada da simulação em alta resolução (reta sólida preta) e baixa resolução (reta tracejada vermelha) das simulações prógradas.

7.3 Simulação em alta resolução

Na figura 7.3 comparamos os resultados da simulação S2 para o ângulo de inclinação β e torção γ com aqueles correspondentes ao modelo semi-analítico SA1, enquanto na figura 7.4 a comparação é feita com o modelo SA1b, onde a ação da viscosidade é artificialmente reduzida para testar o efeito da anisotropia conforme observado nas simulações. Aqui e em todas as figuras, as linhas sólidas mostram os resultados das simulações, enquanto que as tracejadas foram obtidas do modelo semi-analítico, utilizando os dados das simulações sem inclinação como fundo. Cores diferentes correspondem a intervalos de tempos diferentes (os dados foram obtidos através de médias sobre duas órbitas). Também apresentamos em todas as figuras representando β a solução estacionária (linha ponto tracejada), onde todas as derivadas temporais nas equações dinâmicas do modelo analítico foram ajustadas para zero e os perfis de fundo do final de cada simulação são utilizados sob a suposição formal que eles não dependem do tempo.

Estas figuras indicam que as simulações GRMHD e o modelo semi-analítico apresentam qualitativamente o mesmo comportamento. Em ambas as situações, os ângulos crescem em média até o buraco negro. Isto não é uma surpresa no caso do ângulo de torção, γ , mas o fato que a inclinação β cresce com a diminuição do raio claramente demonstra que o efeito Bardeen-Petterson não é observado nas simulações GRMHD prógradas nem no modelo semi-analítico correspondente. Outro ponto importante é que, em ambos os casos, os valores da inclinação e torção próximos à ISCO não são monotônicos com o tempo. Inicialmente, ambos ângulos crescem, enquanto em tempos tardios seus valores na ISCO decrescem com o tempo. Uma comparação das figuras 7.3 e 7.4 mostra que o efeito da viscosidade anisotrópica na aproximação semi-analítica é mínima. Isto pode ser entendido se a dinâmica do disco inclinado é dominado por efeitos associados com a propagação de ondas conforme o esperado.

Figura 7.3: Ângulo de inclinação, β , (superior) e torção (inferior) como função do raio e tempo para a simulação S2 (linhas sólidas) e modelo SA1 (linhas tracejadas).

Figura 7.4: Semelhante a figura 7.3 mas para o modelo SA1b, onde o parâmetro da viscosidade α foi ajustado para zero em 7.1 e no lado direito de 7.2. As diferenças com a figura 7.3 são relativamente pequenas, indicando que os efeitos da viscosidade anisotrópica na evolução de β e γ podem ser bem pequenos.

Há, no entanto, muitas diferenças marcantes entre as simulações GRMHD e os cálculos semi-analíticos. O primeiro é que os resultados GRMHD mostram mais variabilidade espacial e temporal. Isto pode ser explicado pelas seguintes considerações: 1) desde que a aproximação GRMHD intrinsecamente tem mais graus de liberdade, ela pode naturalmente produzir mais ondas de diferentes tipos dentro do disco. 2) Não é trivial de inferir o parâmetro α da viscosidade e os ângulos de Euler, β e γ , dos dados numéricos, que podem afetar a precisão das nossas comparações.

A segunda diferença importante entre os resultados GRMHD e o modelo semi-analítico é que a aproximação GRMHD dá valores de β/β_0 e γ que são aproximadamente duas vezes menores próximos da ISCO. Isto pode ser explicado pela contribuição de três fatores: 1) como discutido acima, devido aos parâmetros mais extremos das simulações GRMHD, o parâmetro rotacional $a_*=0.1$ e a espessura do disco $\delta=0.08$, até mesmo para a alta resolução tem erros numéricos nos cálculos das projeções do momento angular no plano equatorial, $L_{[1]}$ e $L_{[2]}$; além disso, isto parece ser um efeito sistemático, conduzindo a valores menores para estes parâmetros do que seriam esperados dos cálculos simples dos termos do torque gravitomagnético. Desde que as estimativas dos ângulos de inclinação e torção no esquema GRMHD caem nestas componentes, é claro que estes valores serão subestimados. 2) Pode haver problemas com as condições de fronteira utilizadas no modelo semi-analítico. Estes modelos foram derivados sob a suposição que as quantidades de fundo comportam-se singularmente na ISCO, com a densidade superficial sendo zero e a velocidade radial tendendo a infinito. As simulações GRMHD indicam que estas quantidades comportam-se de fato desta maneira próximas da ISCO, conforme foram apontados nos resultados anteriores (Noble et al. 2009, 2010; Penna et al. 2010). 3) A aproximação semi-analítica apenas leva em conta parcialmente a advecção da torção no buraco negro, através de termos proporcionais a $\partial\mathbf{W}/\partial R$ no lado esquerdo da equação 7.2. Um tratamento completo consistente deste efeito requeriria o desenvolvimento da teoria de discos finos torcidos dominados por advecção. É natural supor que a possível advecção das perturbações não planares no buraco negro, que estão intrinsecamente presentes nas simulações GRMHD, podem conduzir a valores menores dos ângulos de inclinação e torção quando comparados ao modelo semi-analítico simplificado. Estes efeitos de advecção podem ser especialmente importantes nas simulações desde que a escala de tempo correspondente t_{acc} é menor do que a escala de tempo de Lense-Thirring, t_{LT} , através de quase todo o disco.

7.4 Simulações em baixa resolução

Nesta seção brevemente discutiremos os resultados da simulação GRMHD S4 com o modelo semi-analítico, calculado da simulação sem inclinação correspondente S3. Conforme mencionado acima, a simulação em baixa resolução demonstra certas peculiaridades mais provavelmente associadas com a baixa resolução e portanto, resultados baseados nela devem ser considerados como ilustrativos apenas.

Na figura 7.5, comparamos os perfis de β e γ da simulação GRMHD e o modelo semi-analítico do mesmo modo que fizemos para a simulação da figura 7.3. O primeiro fato que podemos notar é que o modelo em baixa resolução dá valores um tanto diferentes para o ângulo de torção γ , comparado a alta resolução. Inicialmente, a simulação em baixa resolução mostra um deslocamento sistemático semelhante entre os resultados das simulações GRMHD e o modelo semi-analítico comparado com o caso em alta resolução. No entanto, em $t \sim 10t_{orb}$ os valores de γ em raios pequenos são menores no caso da baixa resolução. Então, em tempos tardios, o comportamento muda novamente com o caso em baixa resolução mostrando um grande deslocamento entre as previsões do modelo semi-analítico e os dados numéricos. Este efeito pode estar relacionado a presença do segundo pico no perfil da densidade superficial nestes tempos, como discutido anteriormente. No modelo SA1, este pico conduz a uma precessão mais rápida da parte interna do disco. A simulação numérica, em outras palavras, parece mostrar precessão mais coerente, com as partes internas e externas do disco mantendo uma conexão mais rígida. Ressaltamos, embora, que a presença do pico pronunciado na parte interna do disco pode ser um artifício numérico, e, portanto, a diferença em evolução do ângulo de torção pode ser simplesmente atribuída a baixa resolução da simulação.

A concordância de β é muito melhor entre as simulações em alta e baixa resolução, e entre as simulações e o modelo semi-analítico. A diferença entre os valores da simulação e o modelo SA1 é aproximadamente um fator dois na vizinhança da ISCO, semelhante ao caso da alta resolução. É muito importante ressaltar novamente que em ambas aproximações o ângulo de inclinação cresce até o buraco negro para todos os tempos e o efeito Bardeen-Petterson não é observado até mesmo em $t=34t_{orb} \sim 35000M$.

Figura 7.5: Semelhante a figura 7.3 mas para a simulação em baixa resolução S4 e o modelo analítico correspondente SA1.

7.5 Ausência de alinhamento Bardeen-Petterson no caso prógrado

A ausência de alinhamento Bardeen-Petterson pode ser explicada pelo efeito primeiramente discutido em Ivanov & Illarionov (1997) (ver também Lubow et al. 2002). Como já mencionamos, estes artigos mostraram que em um modelo simplificado de disco torcido estacionário, o disco não alinha com o plano equatorial no limite $\alpha \rightarrow 0$, ao invés experimenta oscilações radiais de seu ângulo de inclinação com escalas típicas determinadas pela equação 3.103. Em outras palavras, neste limite, a solução tem uma característica de onda com amplitude crescente e frequência radial até raios pequenos. Depois, utilizando um formalismo mais avançado, ZI mostraram que o disco não alinha até mesmo quando $\alpha \sim H/R$. Neste caso intermediário, pode haver crescimento monotônico do ângulo de inclinação até o buraco negro conforme observado nas simulações numéricas em raios pequenos. Estes raios pequenos são também onde espera-se que as soluções numéricas tenham tido tempo adequado de se aproximar de um estado estacionário.

Este comportamento do ângulo de inclinação é determinado pela contribuição das ondas para as equações descrevendo a dinâmica de discos torcidos. Para verificar esta afirmação, realizamos cálculos adicionais (modelos SA2), onde a contribuição das ondas são artificialmente suprimidas e todos os coeficientes nas equações dinâmicas do modelo semi-analítico foram ajustados para seus valores Newtonianos. Neste modelo o crescimento do ângulo de inclinação não é esperado. Os resultados, junto com o modelo SA1 completo, são apresentados na figura 7.6, onde os ângulos de inclinação são graficados nos tempos finais da simulação em alta resolução. Como pode ser visto da figura, o ângulo de inclinação calculado no modelo SA2 decresce até o buraco negro, não há alinhamento completo do disco com o plano equatorial. Isto pode também ser explicado desde que o raio de alinhamento para este modelo $R_{BP} \sim 3$, é menor do que o raio da ISCO. Neste caso, alinhamento completo não é esperado.

Figura 7.6: Ângulo de inclinação fracional do disco β/β_0 , como função do raio para os modelos SA1 (equação completa) e SA2 (aproximação difusiva) em $t=12427M$, utilizando a simulação S1 como fundo.

7.6 Caso retrógrado

Na figura 7.7 apresentamos os resultados obtidos para nossa simulação retrógrada, onde o parâmetro rotacional do buraco negro é assumido como $a_*=-0.1$. A resolução numérica dos modelos com e sem inclinação correspondem ao caso da baixa resolução discutida acima. Notavelmente, na simulação GRMHD e no modelo semi-analítico, observou-se uma diminuição no ângulo de inclinação até o buraco negro. Embora o ângulo não se aproxime de zero, ao menos, um alinhamento parcial é observado. Esta é a primeira simulação GRMHD mostrando alinhamento. O ângulo γ também comporta-se similarmente, em que agora ele decresce até o buraco negro.

Além disso, o acordo quantitativo entre as simulações numéricas e o modelo semi-analítico é pior no caso retrógrado. Por exemplo, o desvio relativo β/β_0-1 das simulações numéricas é em alguns tempos um fator mais que três vezes menor do que o do modelo semi-analítico, visto que para o caso em alta resolução este desvio era de um fator dois. Ainda não é claro se a diferença é simplesmente um artifício numérico ou possui alguma explicação mais profunda.

Figura 7.7: Semelhante a figura 7.3 mas para nossa simulação retrógrada S11 e seu modelo semi-analítico correspondente SA1.

Conclusões e perspectivas

Nesta trabalho estudamos a dinâmica de discos de acreção distorcidos onde a deformação no disco de acreção propaga-se tanto difusivamente no caso de um disco de acreção fino ou como ondas num disco de acreção espesso. Utilizamos os modelos de Papaloizou & Pringle (1983) e Pringle (1992) para estudar o efeito Bardeen-Petterson na galáxia NGC 1275. Utilizando os resultados do trabalho de Falceta-Gonçalves et al. (2010), que encontraram que o ângulo inicial entre os momentos angulares do buraco negro e do disco de acreção é de 120° , que a razão entre os momentos angulares de ambos é de 1.1, que o tempo de alinhamento entre os momentos angulares é de 150 milhões de anos e que para inflar os dois pares de bolhas observados em raios-X são necessários três períodos de precessão com período de 50 milhões de anos, reproduzimos a forma do jato tanto em escalas de parsec quanto kilo-parsec utilizando os resultados obtidos da simulação e o modelo de precessão de Carrara et al. (1993). Uma vez reproduzida a forma do jato, utilizando a física do efeito Bardeen-Petterson, determinamos o intervalo de spins do buraco negro, os parâmetros físicos do disco de acreção como a lei de potência da densidade superficial, tamanho do disco e a razão entre as viscosidades vertical e azimuthal, com o objetivo de obter o tempo de alinhamento encontrado por Falceta-Gonçalves et al. (2010). Encontramos que o raio do disco é da ordem de $0.5 < R_D < 5$ pc, que a lei de potência da densidade superficial é $0.3 < s < 0.7$ e que todos os valores de spins podem fornecer o tempo de alinhamento de 150 milhões de anos. Encontramos que apenas um disco de acreção com $\alpha_1=0.4$ pode fornecer o tempo de alinhamento desejado, pois para valores menores deste parâmetro obtem-se o tempo de alinhamento mas apenas para spins do buraco negro muito pequenos e para determinados valores não encontramos o tempo de alinhamento desejado.

Conforme mencionado no parágrafo anterior, encontramos que para inflar os dois pares de bolhas são necessários três períodos de precessão, porém modelos como por exemplo o de Martin et al. (2007), que assumi que o disco de acreção está em estado estacionário, possui um tamanho infinito e o ângulo entre os momentos angulares do disco de acreção e do buraco negro é pequeno, encontraram que os momentos angulares de ambos se alinham antes de completar um período de precessão. Para uma melhor compreensão desta situação, modelos mais completos tanto analíticos como numéricos, que não assumam estado estacionário e viscosidade isotrópica e um disco de acreção de tamanho finito, devem ser desenvolvidos para determinar se ou não o momento angular do disco se alinha com o momento do buraco negro antes de completar um período de precessão.

Para melhor compreender a física dos discos de acreção distorcidos com ângulo de inclinação e spin do buraco negro pequenos e estudar apenas os efeitos lineares da propagação da deformação, realizamos simulações GRMHD de discos de acreção moderadamente finos, com escala de altura de 0.08, cujo buraco negro rotacionava no mesmo sentido do disco de acreção e também no sentido oposto, com spin de $|a_*|=0.1$ para verificarmos a influência da rotação do buraco negro. Além de variarmos o sentido de rotação do buraco negro, mudamos a configuração do campo magnético, não utilizamos a função de resfriamento e o momento em que o momento angular do buraco negro era alterado em relação ao momento angular do disco de acreção. Para as simulações onde tanto o disco quanto o buraco negro rotacionavam no mesmo sentido, o ângulo entre os momentos angulares do disco de acreção e buraco negro oscilava nas partes internas e permaneceu constante nas partes externas em acordo com o modelo de Lubow et al. (2000) e Zhuravlev & Ivanov (2011). Nas simulações o ângulo entre o momento angular do disco e o momento angular do buraco negro foi alterado após duas orbitas, porém a inicialização da simulação com os momentos angulares não coplanares desde o início da simulação, a simulação utilizando um segundo loop no campo magnético e a não utilização da função de resfriamento, não afetaram os resultados, mostrando os mesmos comportamentos em todos os casos e nos casos das simulações com um segundo loop encontramos um melhor acordo com o modelo Novikov & Thorne (1973) e a não utilização da função de resfriamento mostrou que a mesma gerava uma contribuição extra na eficiência da acreção. No caso onde o disco de acreção rotacionava no sentido oposto ao buraco negro observamos pela primeira vez numa simulação GRMHD um leve alinhamento de 10% nas partes internas do disco de acreção

compatível também com a deformação propagando-se como ondas conforme os modelos de Lubow et al. (2000) e Zhuravlev & Ivanov (2011). Devido a limitações computacionais, não foi possível utilizar uma resolução apropriada para o desenvolvimento da instabilidade magneto-rotacional, problema este que influencia o valor do parâmetro do stress azimuthal. Observamos na simulação em baixa resolução que devido efeitos da resolução, um segundo pico na densidade superficial surgiu durante a evolução fazendo com que o disco precessionasse mais lentamente e concluímos que este pico era devido a problemas puramente numéricos. Mesmo com o parâmetro do stress subestimado, nossos resultados mostraram ser compatíveis com os de Shafee et al. (2008), Noble et al. (2010) e Penna et al. (2010) onde a perda de momento angular dentro da ISCO e a eficiência da acreção extra são da mesma ordem. Além disso, provamos pela primeira vez numa simulação GRMHD que o stress azimuthal não é isotrópico e que a componente vertical do stress em discos deformados não segue os valores do modelo de Ogilvie (1999).

Por fim, comparamos os resultados de nossas simulações GRMHD com o modelo semi-analítico de Zhuravlev & Ivanov (2011), onde utilizamos os dados das simulações de discos planos como entrada no modelo e verificamos que tanto os resultados das simulações como os do modelo semi-analítico apresentaram uma concordância satisfatória, apresentando o comportamento oscilatório no caso prógrado e um leve alinhamento no caso retrógrado. Para uma melhor concórdancia entre o modelo e as simulações, é necessário expandir este modelo tanto para spins e ângulos de inclinação maiores e a utilização de uma fronteira interna apropriada compatível com a de um disco fino dominado por advecção.

Para compreender melhor o processo de alinhamento nos discos de acreção que rotação no sentido oposto ao buraco negro, estamos realizando simulações de discos de acreção com a mesma escala de altura porém com spins do buraco negro maiores, para verificar o quanto o disco alinha e o raio de alinhamento e desta forma obter uma relação entre o raio de alinhamento com o spin do buraco negro. Na figura 8.1 apresentamos os resultados iniciais destas novas simulações. Observamos que quanto maior o spin, o disco de acreção apresenta um maior grau de alinhamento com o buraco negro e o raio de alinhamento cresce conforme o esperado no modelo de Zhuravlev & Ivanov (2011).

Figura 8.1: Ângulo de inclinação das simulações retrógradas com spins de -0.1, -0.3 e -0.5 em função do raio.

Para realizar as simulações em alta resolução para estudar apropriadamente o processo de alinhamento, iremos contar com a colaboração do Prof. Patrick Christopher Fragile, onde iremos solicitar tempo nos supercomputadores localizados nos Estados Unidos permitindo assim realizarmos as simulações com resolução e duração adequadas para observar os efeitos corretamente e também do Prof. Pavel Ivanov que nós ajudará com a utilização de seu modelo semi-analítico.

Referências Bibliográficas

- Abdo, A. A., Ackermann, M., Ajello, M., Baldini, L., Ballet, J. et al., 2009, ApJ, 699, 31
- Abraham, Z., Romero, G.E., 1999, A&A, 344, 61
- Abraham, Z. 2000, A&A, 355, 915
- Abramowicz, M. A., Jaroszyński, M., Sikora, M. 1978, A&A, 63, 221
- Abramowicz, M. A., Czerny, B., Lasota, J. P., Szuszkiewicz, E. 1988, ApJ, 332, 646
- Abramowicz, M. A., Igumenshchev, I. V., Lasota, J.-P. 1998. MNRAS, 293, 443
- Agol, E., Krolik, J. H. 2000, ApJ, 528, 161
- Angel, J. R. P., Stockman, H. S., 1980, ARA&A, 18, 321
- Anninos, P., Fragile, P. C. 2003, ApJS, 144, 243
- Antonucci, R. 1993, ARA&A, 31, 473
- Armitage, P. J., Natarajan, P., 1999, ApJ, 525, 909
- Armitage, P. J., Reynolds, C. S., Chiang, J. 2001, ApJ, 548, 868
- Asada, K, Kamenno, S., Shen, Z-Q., Horiuchi, S., Gabuzda, D.C., Inoue, M., 2006, PASJ, 58, 261
- Balbus, S. A., Hawley, J. F. 1991, ApJ, 376, 214
- Bardeen J. M. 1973, Rapidly rotating stars, disks and black holes Black Holes (Les Hou-ches) ed C deWitt and B deWitt (New York: Gordon and Breach) pp 241-89

- Bardeen, J. M., Petterson, J. A. 1975, *ApJ*, 195, L65
- Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. 1972, *ApJ*, 178, 347
- Beckwith, K., Hawley, J. F., Krolik, J. H. 2008, *MNRAS*, 390, 21
- Blandford, R. D. 1990, *QJRAS*, 31, 305
- Blandford, R. D., Znajek, R. L. 1973, *MNRAS*, 179, 433
- Blandford, R. D., Payne, D. G. 1982, *MNRAS*, 199, 883
- Böhringer, H., Nulsen, P.E.J., Braun, R., Fabian, A.C., 1995, *MNRAS*, 274, L67
- Briggs, S. A., Snijders, M. A., J., Boksenberg, A., 1982, *Nature*, 300,336
- Caproni, A., Mosquera Cuesta, H. J., Abraham, Z. 2004, *ApJ*, 616, 99
- Caproni, A., Abraham, Z., Mosquera Cuesta, H. J. 2006, *ApJ*, 638, 120
- Caproni, A., Livio, M., Abraham, Z., Mosquera Cuesta, H. J. 2006, *ApJ*, 653, 112
- Caproni, A., Abraham, Z., Livio, M., Mosquera Cuesta, H. J. 2007, *MNRAS*, 379, 135
- Chakrabarti, S. K. 1985, *ApJ*, 288, 1
- Cohen, M. H., Cannon, W., Purcell, G. H., Shaffer, D. B., Broderick, J. J., Kellermann, K. I., Jauncey, D. L. 1971, *ApJ*, 170, 207
- Colella, P., Woodward, P. R. 1984, *J. Comput. Phys.*, 54, 174
- De Villiers, J., Hawley, J. F., Krolik, J. H. 2003, *ApJ*, 599, 1238
- Demianski, M., Ivanov, P. B. 1997, *A&A*, 324, 829
- Dexter, J., Fragile, P. C. 2011, *ApJ*, 730, 36
- Dunn, R.J. H., Fabian, A. C., 2004, *MNRAS*, 351, 862
- Dunn, R.J. H., Fabian, A. C., Sanders, J. S. 2006, *MNRAS*, 366, 758
- Eardley, D. M., Lightman, A. P. 1975, *ApJ*, 200, 187
- Ekers, R. D., van der Hulst, J. M., Miley, G. K., 1976, *Nature*, 262, 369

- Fabian, A. C., Sanders, J. S., Ettori, G. B., Taylor, G. B., Allen, S. W. et al. 2000, MNRAS, 318, L65
- Fabian, A. C., Sanders, J. S., Taylor, G. B., Allen, S. W., Crawford, C. S., Johnstone, R. M., Iwasawa, K., 2006, MNRAS, 366, 417
- Falceta-Gonçalves, D., Caproni, A., Abraham, Z., Teixeira, D.M., Gouveia Dal Pine, E. M., 2010, ApJ, 713, L74
- Farris, B. D., Li, T. K., Liu, Y. T., Shapiro, S. L. 2008, Phys. Rev. D, 78, 024023
- Font, J. A., Ibáñez, J. M., Papadopoulos, P. 1998, ApJ, 507, 67
- Fragile, P. C., Blaes, O. M., Anninos, P., Salmonson, J. D. 2007, ApJ, 668, 417
- Fragile, P. C., Blaes, O. M. 2008, ApJ, 687, 757
- Fragile, P. C. 2009, ApJL, 706, L246
- Fragile, P. C., Gillespie, A., Monahan, T., Rodriguez, M., Anninos, P. 2012, ApJS, 201, 9
- Frank, J., King, A. R., Raine, D. J. 1992, *Accretion Power in Astrophysics* (2nd edition) Cambridge University Press
- Gallimore, J. F., Baum, S. A., O'Dea, C. P. 2004, ApJ, 613, 794
- Gammie, C. F. 1999, ApJ, 522, L57
- Gammie, C. F., McKinney, J. C., Tóth, G. 2003, ApJ, 589, 444
- Gardiner, T. A., Stone, J. M. 2008, J. Comput. Phys., 227, 4123
- Generozov, A., Blaes, O., Fragile, P. C., Henisey, K. B. 2014, ApJ, 780, 81
- Gillmon, K., Sanders, J. S., Fabian, A. C., 2004, MNRAS, 348, 159
- Gu, Wei-Min; Lu, Ju-Fu 2000, ApJ, 540, 33
- Hatchett, S. P., Begelman, M. C., Sarazin, C. L. 1981, ApJ, 247, 677
- Hawley, J. F., Krolik, J. H. 2001, ApJ, 548, 348
- Hawley, J. F., Krolik, J. H. 2002, ApJ, 566, 164

- Hawley, J. F., Guan, X., Krolik, J. H. 2011, *ApJ*, 738, 84
- Hawley, J. F., Richers, S. A., Guan, X., Krolik, J. H. 2013, *ApJ*, 772, 102
- Henisey, K. B., Blaes, O. M., Fragile, P. C. 2012, *ApJ*, 761, 18
- Hirose, S., Krolik, J. H., Blaes, O. 2009, *ApJ*, 691, 16
- Honma, F. *PASJ*, 1996, 48, 77
- Ivanov, P. B., Illarionov, A. F. 1997, *MNRAS*, 285, 394
- Kassim, N. E., Lazio, T. J. W., Erickson, W.C., Perley, R. A., Cotton, W. D. et al., 2007, *ApJS*, 172, 686
- Kato, S. 1990, *PASJ*, 42, 99
- Kato, S. 1994, *PASJ*, 46, 589
- Kellermann, K. I., Sramek, R., Schmidt, M., Shaffer, D. B., Green, R. 1989, *AJ*, 98, 1195
- King, A. R., Lubow, S. H., Ogilvie, G. I., Pringle, J. E. 2005, *MNRAS*, 363, 49
- King, A. R., Pringle, J. E., Livio, M. 2007, *MNRAS*, 376, 1740
- Komissarov, S. S. 2006, *MNRAS*, 368, 993
- Krolik, J. H. 1999, *Active Galactic Nuclei: From the Central Black Hole to the Galactic Environment* (Princeton: Princeton Univ. Press)
- Krolik, J. H. 1999, *ApJ*, 515, L73
- Krolik, J. H., Hawley, J. F. 2002, *ApJ*, 573, 754
- Krolik, J. H., Hawley, J. F., Hirose, S. 2005, *ApJ*, 622, 1008
- Kumar, S., Pringle, J. E. 1985, *MNRAS*, 213, 435
- Lawrence, A. 1987, *PASP*, 99, 309
- Liu, B. F., Yuan, W., Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E., Xie, G. Z. 1999, *ApJ*, 527, 17
- Liu, B. F., Done, C., Taam, Ronald E. 2011, *ApJ*, 726, 10

- Lense, J., Thirring, H. 1918, *Phys. Z.*, 19, 156
- Levinson, A., Laor, A., Vermeulen, R. C., 1995, *ApJ*, 448, 589
- Lodato, G., Price, D. J. 2010, *MNRAS*, 405, 1212
- Lodato, G., Pringle, J. E. 2006, *MNRAS*, 368, 1196
- Lodato, G., Pringle, J. E. 2007, *MNRAS*, 381, 1287
- Lu, Ju-Fu; Lin, Yi-Qing; Gu, Wei-Min 2004, *ApJ*, 602, 37
- Lubow, S. H., Ogilvie, G. I. 2000, *ApJ*, 538, 326
- Lubow, S. H., Ogilvie, G. I., Pringle, J. E. 2002, *MNRAS*, 337, 706
- Manmoto, T., Kato, S. 2000, *ApJ*, 538, 295
- Manmoto, T., Kato, S., Nakamura, K. E., Narayan, R. 2000, *ApJ*, 529, 127
- Margon, B. 1984, *ARA&A*, 22, 507
- Martin, R. G., Pringle, J. E.; Tout, C. A. 2007, *MNRAS*, 381, 1617
- Mayer, M., Pringle, J. E. 2007, *MNRAS*, 376, 435
- McGregor, P., Dopita, M., Sutherland, T. C., Storchi-Bergmann, T., 2007, *APSS*, 311, 223
- McKinney, J. C., Gammie, C. 2004, *ApJ*, 611, 977
- McKinney, J. C.; Narayan, R. 2007, *MNRAS*, 375, 513
- McKinney, J. C.; Narayan, R. 2007, *MNRAS*, 375, 531
- McKinney, J. C., Tchekhovskoy, A., Blandford, R. D. 2012, *MNRAS*, 423, 3083
- McKinney, J. C., Tchekhovskoy, A., Blandford, R. D. 2013, *Sci*, 339, 49
- McNamara, B.R., O'Connell, R.W., Sarazin, C.L., 1996, *AJ*, 112, 91
- Meyer, F., Meyer-Hofmeister, E. 1994, *A&A*, 288, 175
- Meyer, F., Liu, B. F., Meyer-Hofmeister, E. 2000, *A&A*, 354, 67

- Meyer, F., Liu, B. F., Meyer-Hofmeister, E. 2007, *A&A*, 463, 1
- Miley, G. K., Perola, G. C., 1975, *A&A*, 45, 223
- Minkowski, R., 1995, *Carnegie Yearbook*, 54, 25
- Nagai, H., Suzuki, K., Asada, K., Kino, M., Kamenno, S. et al., 2010, *PASJ*, 62, 11
- Narayan, R. 1996, *ApJ*, 462, 136
- Narayan, R., Yi, I. 1994, *ApJ*, 428, 13
- Narayan, R., Yi, I. 1995, *ApJ*, 452, 710
- Narayan, R., Igumenshchev, I. V., Abramowicz, M. A. 2003, *PASJ*, 55, 69
- Natarajan, P., Armitage, P. J. 1999, *MNRAS*, 309, 961
- Nauman, F., Blackman, E. G. 2014, *MNRAS*, 441, 1855
- Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B. 1999, *MNRAS*, 309, 929
- Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B. 2000, *MNRAS*, 315, 570
- Nixon, C. J., King, A. R. 2012, *MNRAS*, 421, 1201
- Nixon, C. J., King, A. R., Price, D. J. 2012, *MNRAS*, 422, 2547
- Nixon, C. J., King, A. R. 2013, *ApJ*, 765, 7
- Noble, S. C., Leung, P. K., Gammie, C. F., Book, L. G. 2007, *CQGra*, 24, 259
- Noble, S. C., Krolik, J. H., Hawley, J. F. 2009, *ApJ*, 692, 411
- Noble, S. C., Krolik, J. H., Hawley, J. H. 2010, *ApJ*, 711, 959
- Novikov, I., Thorne, K. 1973, in *Black Holes*, ed. C. DeWitt & B. DeWitt (New York: Gordon and Breach), 343-450
- Ogilvie, G. I. 1999, *MNRAS*, 304, 557
- Ogilvie, G. I. 2002, *MNRAS*, 331, 1053
- Ogilvie, G. I. 2003, *MNRAS*, 340, 969

- Ogilvie, G. I., Dubus, G. 2001, MNRAS, 320, 485
- Ogilvie, G. I., Latter, H. N. 2013, 433, 2403
- Page, Don N., Thorne, Kip S. 1974, ApJ, 191, 499
- Papaloizou, J. C. B., Pringle, J. E. 1983, MNRAS, 202, 1181
- Papaloizou, J. C. B., Lin, D. N. C. 1995, ApJ, 438, 841
- Pedlar, A., Ghataure, H. S., Davies, R. D., Harrison, B. A., Perley, R., Crane, P. C., Unger, S. W., 1990, MNRAS, 246, 477
- Penna, R. F., McKinney, J. C., Narayan, R., et al. 2010, MNRAS, 408, 752
- Penna, R. F., Saowski, A., McKinney, J. C. 2012, MNRAS, 420, 684
- Penna, R. F., Sądowski, A., Kulkarni, A. K., Narayan, R. 2013, MNRAS, 428, 2255
- Petterson, J. A. 1977, ApJ, 214, 550
- Petterson, J. A. 1978, ApJ, 226, 253
- Pringle, J. E. 1981, ARA&A, 19, 137
- Pringle, J. E. 1992, MNRAS, 258, 811
- Pringle, J. E. 1996, MNRAS, 281, 357
- Pringle, J. E. 1999, ASPC, 160, 53
- Rees, M. 1966, Nature, 211, 468
- Rees, M. 1967, MNRAS, 135, 435
- Reynolds, C. S., Armitage, P. J. 2001, ApJ, 561, L81
- Reynolds, C. S., Fabian, A. C. 2008, ApJ, 675, 1048
- Różańska, A., Czerny, B. 2000, A&A, 360, 1170
- Sanders, D. B., Phinney, E. S., Neugebauer, G., Soifer, B. T., Matthews, K. 1989, ApJ, 347, 29

- Scheuer, P. A. G., Feiler, R. 1996, MNRAS, 282, 291
- Scheuer, P. A. G., Readhead, A. C. S 1979, Nature, 277, 182
- Schmitt, H. R., Pringle, J. E., Clarke, C. J., Kinney, A. L. 2002, ApJ, 575, 150
- Shafee, R., Narayan, R., McClintock, J. E. 2008, ApJ, 676, 549
- Shafee, R., McKinney, J. C., Narayan, R., Tchekhovskoy, A., Gammie, C. F., McClintock, J. E. 2008, ApJ, 687, L25
- Shakura, N.I., Sunyaev, R. A. 1973, A&A, 24, 337
- Shapiro, S. L., Lightman, A. P., Eardley, D. M. 1976, ApJ, 204, 187
- Sillanpaa, A., Haarala, S., Valtonen, M. J., Sundelius, B., Byrd, G. G. 1988, ApJ, 325, 628
- Smith, E. P., Heckman, T. M., Bothun, G. D., Romanishin, W., Balick, B. 1986, ApJ, 306, 64
- Sorathia, K. A., Krolik, J. H., Hawley, J. F. 2013, ApJ, 768, 133
- Sorathia, K. A., Krolik, J. H., Hawley, J. F. 2013, ApJ, 777, 21
- Spruit, H. C., Deufel, B. 2002, A&A, 387, 918
- Sternberg, A., Soker, N., 2008, MNRAS, 384, 1327
- Stone, J. M., Gardiner, T. 2009, New Astron., 14, 139
- Taam, R. E., Liu, B. F., Yuan, W., Qiao, E. 2012, ApJ, 579, 65
- Torkelsson, U., Ogilvie, G. I., Brandenburg, A., Pringle, J. E., Nordlund, A., Stein, R. F. 2000, MNRAS, 318, 47
- Thorne, Kip S. 1974, ApJ, 191, 507
- Urry, C. M., Padovani, P. 1995, PASP, 107, 803
- Veron, P. 1978, Nature, 272, 430
- Walker, R. C., Romney, J. D., Benson, J.M., 1994, ApJ, 430, L45

-
- Walker, R. C., Dhawan, V., Romney, J. D., Kellermann, K. I., Vermeulen, R. C. 2000, ApJ, 530, 233
- Weizsacker, C. F. V. 1948, Zeitschrift Naturforschung Teil A, 3, 524
- Wilkins, D. C. 1972, Phys. Rev. D, 5, 814
- Wiman, R.J., Edge, A.C., Johnstone, R. M., 2005, MNRAS, 359, 755
- Wilson, A. S.; Colbert, E. J. M 1995, ApJ, 438, 62
- Zensus, A. 1997, ARA&A, 35, 607
- Zhuravlev, V. V., Ivanov, P. B. 2011, MNRAS, 415, 2122