UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

TESE DE DOUTORADO

Apresentada por
RODOLFO VALENTIM DA COSTA LIMA

ANÁLISE BAYESIANA DE DOIS PROBLEMAS EM ASTROFÍSICA RELATIVÍSTICA: NEUTRINOS DO COLAPSO GRAVITACIONAL E MASSAS DAS ESTRELAS DE NÊUTRONS

defendida na Universidade de São Paulo

Orientador: Jorge E. HORVATH – IAG-Universidade de São Paulo

Versão Corrigida.

O original encontra-se disponível na Unidade.

Dedicado *in memoriam*, aos meus queridos avós Catarina e Sebastião.

Agradecimentos

Este trabalho é resultado de uma sequência de incontáveis eventos que marcaram a minha vida. Tais eventos são resultados e sonhos, ilusões, desilusões e realizações que marcaram a minha vida. Muitas pessoas foram e são responsáveis por esse momento e não sei se conseguirei citar todas aqui.

Quero agradecer primeiramente a meus pais Glória e Valentim por tudo que fizeram por mim durante a vida toda. Meus queridos e amados irmãos Rodrigo e Cristiane, meu sobrinho João Pedro e meu cunhado Rogério. Meus tios Clélia e Antônio Carlos, Terezinha e Cecílio, aos primos Lê, Ana, Dri e Tonho, sou imensamente grato a todos.

Aos grandes amigos de caminhada Adriano Boveri, Clécio, Alexandre, Eliane, André e Lucas. Minhas queridas Andrea e Malê pela presença e incentivo constante. À minha família de Araraquara André, Lu, Henrique e Ismael. Aos meus queridos amigos de grupo *monsieur* Richard Pavan, Ina, Regina, Lu Gerbasi e ao *Château* Pavan. Aos irmãos, parceiros e grandes amigos Fabiano Ionta, Edson, Marcão, Carlos Hirth, Alberto, Jean Michel, Lela, Cláudia, Marcos, Luiza e Letícia. Agradeço demais aos amigos que me ajudaram muito neste trabalho, em especial na parte computacional Eraldo e Leonel, meus imensos agradecimentos. Aos amigos Vivi Fais, Daniela, Marlon, Valeska, Max, Erickson, Diana e a pequena Alice. Ao pessoal da PUC prof. Tadeu, prof. Cecil, prof. Júlio e prof. Fujimoto, meu muito obrigado pelo incentivo.

Aos amigos de IAG Roberto Parra, Luiz Felipe, Philip, Alan, Mônica, Douglas, Márcio, Daniel Faes, Bruno, Marcia Regina, Marina Trevisan, Marina, Conceição, prof. Alex, prof. Rama, prof. Roberto, prof. Ademir, profa. Silvia Rossi e prof. Jacques. Ao prof. Georg Raffelt por me receber tão bem no Max Planck e a querida Rosita Jurgenleit por sua generosidade e atenção. Ao prof. Thomas Loredó pelas discussões e sempre muita atenção e boa vontade no esclarecimento de dúvidas, o meu muito obrigado.

Agradeço enormemente ao meu orientador e amigo prof. Jorge Horvath por sempre acreditar em mim, ser um formador e incentivador nato. Me ajudou muito no trabalho com discussões, motivações, sugestões e busca por soluções dos mais diversos problemas. Foi uma honra e um privilégio ter sido seu aluno.

Agradeço ao SPFC por muitas alegrias sempre, Philip Roth, Roger Federer, CEAK-Campinas e às Escolas Dora Kanso e Francisco Álvares.

E a todas as pessoas que passaram pela minha vida deixando alguma boa contribuição, meu muito obrigado.

Sou grato ao projeto Alfa, que me permitiu estagiar no Max Planck de Munique, à CAPES que financiou meu doutorado e a todo o povo brasileiro que através de seus impostos mantém esta instituição.

Resumo

O evento extraordinário de SN1987A vem sendo investigado há mais de vinte e cinco anos. O fascínio que cerca tal evento astronômico está relacionado com a observação em tempo real da explosão à luz da Física de neutrinos. Detectores espalhados pelo mundo observaram um surto neutrinos que dias mais tarde foi confirmado como sendo a SN1987A. Kamiokande, IMB e Baksan apresentaram os eventos detectados que permitiu o estudo de modelos para a explosão e resfriamento da hipotética estrela de nêutrons remanescente. Até hoje não há um consenso a origem do progenitor e a natureza do objeto compacto remanescente.

O trabalho se divide em duas partes: estudo dos neutrinos de SN1987A através de Análise Estatística Bayesiana através de um modelo proposto com duas temperaturas que evidenciam dois bursts de neutrinos. A motivação está na hipótese do segundo burst como resultado da formação de matéria estranha no objeto compacto. A metodologia empregada foi a desenvolvida por um trabalho interessante de [Loredo & Lamb \(2002\)](#) que permite modelar e testar hipóteses sobre os modelos via *Bayesian Information Criterion* (BIC).

A segunda parte do trabalho, a mesma metodologia estatística é usada no estudo da distribuição de massas das estrelas de nêutrons usando a base de dados disponível (<http://stellarcollapse.org/>). A base de dados foi analisada utilizando somente o valor do objeto e seu desvio padrão. Construindo uma função de verossimilhança e utilizando distribuições “a priori” com hipótese de bimodalidade da distribuição das massas contra uma distribuição unimodal sobre todas as massas dos objetos. O teste BIC indica forte tendência favorável à existência da bimodalidade com valores centrados em $1.37M_{\odot}$ para objetos de baixa massa e $1.73M_{\odot}$ para objetos de alta massa e a confirmação da fraca evidência de um terceiro pico esperado em $1.25M_{\odot}$.

Abstract

The extraordinary event of supernova has been investigated twenty five years ago. The fascination surrounds such astronomical event is on the real time observation the explosion at light to neutrino Physics. Detectors spread for the world had observed one burst neutrinos that days later it was confirmed as being of SN1987A. Kamiokande, IMB and Baksan had presented the detected events that allowed to the study of models for the explosion and cooling of hypothetical neutron star remain. Until today it does not have a consensus the origin of the progenitor and the nature of the remaining compact object.

The work is divided in two parts: study of the neutrinos of SN1987A through Analysis Bayesian Statistics through a model considered with two temperatures that two evidence bursts of neutrinos. The motivation is in the hypothesis of as burst as resulted of the formation of strange matter in the compact object. The employed methodology was developed for an interesting work of [Loredo & Lamb \(2002\)](#) that it allows shape and to test hypotheses on the models saw Bayesian Information Criterion (BIC).

The second part of the work, the same methodology statistics is used in the study of the distribution of masses of the neutron stars using the available database <http://stellarcollapse.org/>. The database was analyzed only using the value of the object and its shunting line standard. Constructing to a a priori function likelihood and using distributions with hypothesis of bimodal distribution of the masses against a unimodal distribution on all the masses of objects. Test BIC indicates fort favorable trend the existence of the bimodality with values centered in $1.37M_{\odot}$ for objects of low mass and $1.73M_{\odot}$ for objects of high mass and week evidence of one third peak around $1.25M_{\odot}$.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Evolução histórica	2
1.2.1	Observações sistemáticas	3
1.3	Um pouco de teoria de Evolução Estelar	4
1.3.1	Massa de Chandrasekhar	7
1.4	A explosão das Supernovas (colapso gravitacional)	9
1.4.1	Resfriamento do caroço e o colapso gravitacional	12
1.4.2	Neutronização	12
1.4.3	Foto-dissociação	13
1.4.4	Aniquilação de pares	14
1.4.5	Formação da região homóloga e a camada externa	14
1.4.6	Rebote e formação da neutrinosfera	15
1.4.7	Mecanismos “imediatos”	17
1.4.8	Mecanismos “atrasados”	18
1.5	Estrelas de nêutrons remanescentes	22
1.5.1	Estrutura global das estrelas de nêutrons	23
2	Neutrinos	25
2.1	Objetivos	26
2.1.1	Neutrinos e sua origem	26
2.2	Neutrinos e supernovas	27
2.2.1	Flash inicial	27
2.2.2	Resfriamento	28
2.2.3	Resfriamento inicial	28
2.2.4	Equação de Boltzmann	29
2.2.5	Taxas para $\mathcal{F}_\nu$: evolução e transferência de energia	30
2.2.6	Espalhamento núcleon-núcleon $\nu_\mu n \longleftrightarrow$ e $\nu_\mu p \longleftrightarrow \nu_\mu p$	31
2.2.7	Espalhamento neutrino-elétron $\nu_\mu e^- \longleftrightarrow \nu_\mu e^-$	32
2.2.8	Aniquilação elétron-pósitron: $e^+ e^- \leftrightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$	33
2.2.9	Bremsstrahlung núcleon-núcleon	34
2.2.10	Livres caminhos médios na presença de matéria de quarks	35
2.2.11	Espectros de energia	37
2.3	Supernova 1987A	39
2.3.1	Objeto antes da explosão: progenitor	39
2.3.2	Objeto depois da explosão: remanescente	41
2.4	Métodos de detecção de neutrinos	41
2.4.1	Cerenkov	43
2.4.2	Kamiokande	46

2.4.3	IMB	50
2.4.4	Baksan	52
2.4.5	Outros detectores	53
2.5	Algumas propriedades dos neutrinos	54
2.5.1	Número de eventos esperados no detector	54
2.5.2	Limites de massas dos neutrinos	54
2.5.3	Efeitos de mistura nos neutrinos de SN1987A	55
3	Estatística	57
3.1	Objetivos	58
3.2	Considerações iniciais	58
3.2.1	Considerações sobre probabilidade	58
3.3	Aspectos históricos	60
3.3.1	Paradigma frequentista	62
3.3.2	Paradigma bayesiano	62
3.3.3	Estatística frequentista versus bayesiana	63
3.4	Análise de modelos paramétricos	65
3.4.1	Marginalização de parâmetros	66
3.4.2	Estimativa de um parâmetro	66
3.4.3	Comparação de modelos	67
3.5	Modelando um detector de neutrinos	68
3.5.1	Função de verossimilhança para um detector real	71
3.5.2	Função de verossimilhança para um detector com sinal isotrópico	72
3.6	Modelagem da taxa de produção de léptons	73
3.6.1	Componente de resfriamento	73
3.6.2	Componente de acreção	73
3.6.3	Propagação do sinal	74
3.6.4	Produção de léptons no detector	74
4	Análise bayesiana do sinal de neutrinos para modelos de temperatura e raio para estrelas de nêutrons	77
4.1	Objetivos	78
4.2	Introdução	78
4.2.1	Características dos detectores e a base de dados	81
4.3	Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança	81
4.3.1	Distribuições <i>a priori</i>	82
4.4	Modelos de temperatura e raio da neutrinosfera	82
4.5	Discussão dos resultados	83
4.5.1	Intervalos de confiança frequentistas	85
4.5.2	Teste BIC para os modelos	95
4.5.3	Cálculo das energias de ligação para os modelos	96

5	Massas das estrelas de nêutrons	97
5.1	Objetivos	98
5.2	Introdução	98
5.2.1	Base de dados	100
5.3	Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança .	100
5.3.1	Distribuições a priori	102
5.4	Discussão dos resultados	104
5.4.1	A distribuição bimodal	104
5.4.2	Teste estatístico BIC	108
6	Discussão dos resultados	109
6.1	Objetivos	110
6.2	Considerações finais sobre modelos de temperatura e raio de estrelas de nêutrons	110
6.2.1	Perspectivas	112
6.2.2	Modelagem estatística	113
6.2.3	Perspectivas	114
A	Construção da função de verossimilhança	115
A.1	Função de verossimilhança	115
B	Programa da análise estatística da distribuição de massas dos ob- jetos compactos remanescentes	121
B.1	Análise estatística das massas dos objetos remanescentes da explosão de supernovas	121
C	Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutri- nos da SN1987A	131
C.1	Código para o modelo com duas temperaturas	131
C.1.1	Modelo de duas temperaturas com função degrau	131
C.1.2	Modelos de Temperaturas com decaimento exponencial	142
D	Trabalho publicado em revista indexada	155
D.1	Trabalho publicado	155
	Bibliografia	167

CAPÍTULO 1

Introdução

“We expected this must occur when the density of matter becomes so great that atomic nuclei in close contact, forming one gigantic nucleus.”
Lev Davidovich Landau wrote about neutron stars.

Conteúdo

1.1	Objetivos	2
1.2	Evolução histórica	2
1.2.1	Observações sistemáticas	3
1.3	Um pouco de teoria de Evolução Estelar	4
1.3.1	Massa de Chandrasekhar	7
1.4	A explosão das Supernovas (colapso gravitacional)	9
1.4.1	Resfriamento do caroço e o colapso gravitacional	12
1.4.2	Neutronização	12
1.4.3	Foto-dissociação	13
1.4.4	Aniquilação de pares	14
1.4.5	Formação da região homóloga e a camada externa	14
1.4.6	Rebote e formação da neutrinosfera	15
1.4.7	Mecanismos “imediatos”	17
1.4.8	Mecanismos “atrasados”	18
1.5	Estrelas de nêutrons remanescentes	22
1.5.1	Estrutura global das estrelas de nêutrons	23

1.1 Objetivos

Discutiremos neste capítulo introdutório alguns conceitos básicos sobre supernovas. Inicialmente, é feita uma descrição histórica com finalidades didáticas e contextuais. A seguir, é abordado o conhecimento atual e as relações existentes a respeito das supernovas e sua classificação através das linhas de emissão. Remanescentes compactos (no caso estrelas de nêutrons), estrutura interna e neutrinos são tratados em último tópico.

1.2 Evolução histórica

O primeiro relato do aparecimento de uma supernova foi feito no século I A. C. (precisamente no ano de 185). Astrônomos chineses observaram e reportaram estrelas que apareciam repentinamente no céu e depois de um certo tempo (dias, meses e até anos) desapareciam lentamente. O gás remanescente desse evento produz nos dias de hoje, uma forte imagem em raios-X. A mais brilhante supernova na antiguidade foi observada em 1 de Maio de 1006. Foi vista por toda China e também em alguns lugares do meio oeste da Ásia e Europa. “Brilhou o bastante para moldar as sombras no chão durante a noite [Marschall (1988)]”. O remanescente pode ser observado atualmente em rádio e outras bandas.

A mais famosa supernova relatada no Ocidente e também reportada por chineses deu origem à Nebulosa de Caranguejo (NC) em 1054, visível como um emaranhado de filamentos. Difere fundamentalmente dos remanescentes de 185 e 1006 A.C., porque não mostra o envelope ejetado, mas somente a nebulosa energizada por uma estrela de nêutrons, um pulsar que emite radiação em todas as frequências em intervalos regulares de 30 pulsos por segundo. Os remanescentes 185 e 1006 não têm estrela de nêutron no centro [Bethe (1990)].

Em 17 de Novembro de 1572, o astrônomo dinamarquês, Tycho Brahe descobriu uma “nova estrela” em Cassiopéia com brilho maior que o de Vênus. Ele determinou a posição exata em todas as noites claras, durante os meses que a estrela era visível e, percebeu que sua posição relativa às estrelas fixas no céu não mudava e, conseqüentemente, refutava a idéia de Aristóteles de que o Universo era imutável além da Lua: uma estrela aparecia e desaparecia novamente, o qual, certamente muito mais distante que a Lua. O remanescente da supernova de Tycho Brahe, apresenta uma imagem de raios-X mas não existe detecção de um pulsar associado.

Kepler em outubro de 1604, viu outra supernova, menos brilhante que a de Tycho Brahe mas com remanescente visível por um ano inteiro. Recentemente, astrônomos reconstruíram a curva de luz sem o máximo de luminosidade observada. A posição no céu foi descrita por astrônomos no tempo e a emissão em raios-X do remanescente foi medida.

Outra supernova foi descoberta em nossa galáxia entre 1650 e 1680, conhecida como Cas A (Cas de Cassiopéia). Este remanescente é uma fonte muito forte em rádio, mas não foi reportada por observadores contemporâneos, está descrita em detalhes em [Marschall \(1988\)](#). Algumas supernovas em outras galáxias foram observadas entre 1885 e 1930 [Marschall \(1988\)](#).

1.2.1 Observações sistemáticas

Zwicky e Baade foram pioneiros no estudo sistemático de supernovas. Fritz Zwicky foi um físico suíço com imensa imaginação, e Walter Baade um astrônomo alemão; ambos trabalhavam no Caltech e colaboravam por muitos anos. Em 1934, escreveram um trabalho de grande alcance sobre os raros fenômenos de supernovas [[Baade & Zwicky \(1934\)](#)]. Nele concluíram que seria possível encontrar muito mais supernovas para um *levantamento* sistemático de galáxias: uma supernova poderia facilmente ficar “escondida” ou sobre o ruído de fundo de estrelas comuns de uma galáxia.

Zwicky usando um telescópio de Schmidt de dezoito polegadas de diâmetro, recém desenvolvido na época, encontrou três supernovas em um ano de observação. Posteriormente, ele e seu assistente, J.J. Johnson encontraram por volta de vinte objetos no intervalo de tempo de cinco anos. Esses objetos foram detectados comparando imagens da galáxia em diferentes épocas e observaram o aparecimento de manchas que antes não apareciam, e notaram que possivelmente eram supernovas. Minkowski, também no Caltech, mediu o espectro das candidatas a SN's, e junto com outros astrônomos, descobriram que existiam dois tipos de SN's: as “Ia” são termonucleares, as Ib e Ic não tem hidrôgenio, mas resultam de colapsos de estrelas massivas que perderam o envelope. Os primeiros doze objetos observados por Zwicky eram todas SN's tipo I, mas a décima terceira, descoberta por Johnson era tipo II. Zwicky distinguiu e classificou as supernovas em cinco tipos, atualmente são apenas dois principais, mas existem algumas subclasses em cada tipo. Desde então, vários astrônomos e observadores (inclusive amadores) descobriram entre dez e trinta supernovas em cada ano.

A curva de luz, isto é a luminosidade óptica em função do tempo, tem sido medida para muitas supernovas. Curvas de luz típicas para supernovas tipo I e II começam com aumento da luminosidade no período de uma ou duas semanas, fenômeno associado à explosão da mesma. SN tipo I tem um pico (máximo) razoavelmente estreito, enquanto o pico da tipo II é largo por um tempo da ordem de até centenas de dias. Depois disso, a intensidade declina no período típico de um ano. Discutiremos mais tarde a curva de luz da supernova SN1987A.

[Baade & Zwicky \(1934\)](#), sugeriram em seu trabalho, que a imensa energia da supernova decorria do *colapso gravitacional*, em particular, de uma estrela supergigante que colapsa em uma estrela de nêutrons. O conceito de estrelas de nêutrons foi proposto por Landau em 1932, e consiste numa “bola de nêutrons autogravitante” com raio de aproximadamente 10km, o resto da estrela-mãe ejetado no MI. Este modelo é aceito até hoje para o modelo de supernova tipo II. A SN tipo I, acredita-se que

seu energia deriva não do colapso, mas de reações termonucleares. Este mecanismo foi sugerido por [Hoyle & Fowler \(1960\)](#) e [Fowler & Hoyle \(1964\)](#) para todas as SN's de tipo I.

1.3 Um pouco de teoria de Evolução Estelar

Uma “estrela” começa sua existência quando reações termonucleares são acesas em seu interior, inclusive antes do estabelecimento do equilíbrio hidrostático, no caminho até a Sequência Principal direcionado pelo Teorema do Virial (TV). A massa inicial é um parâmetro determinante nesse processo, e que quanto maior a mesma, maior será sua temperatura central. O TV é descrito através da relação :

$$2E_T + E_P = 0; \quad (1.1)$$

sendo E_T a energia térmica e E_P a energia potencial gravitacional. E_P é dada por:

$$E_P = - \int_0^R \left[\frac{4}{3} \pi r^3 \rho(r) \right] \left[4\pi r^2 \rho(r) \frac{G}{r} \right] dr = -f \frac{GM^2}{R}; \quad (1.2)$$

onde $f = 0.6$ para simetria esférica e densidade constante, e $f \approx 1$ para objetos cuja densidade aumenta quando o raio diminui. A energia térmica é metade da energia potencial gravitacional e proporcional ao quadrado da massa. Quando uma proto-estrela possui massa $\geq 0.1M_\odot$, criam-se condições de temperatura no centro para iniciar as reações de fusão termonucleares. Nesse momento, a estrela nasce e o começo a queima de hidrogênio (H) marca a entrada na Sequência Principal (SP).

Durante grande parte de sua existência, as estrelas encontram-se em equilíbrio hidrostático. A equação newtononiana que descreve tal estado é:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho g = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.3)$$

onde $M(r)$ é a massa interna ao raio r . O calor gerado pelas reações de fusão promove aumento a pressão interna contrabalanceando a auto-atração gravitacional evitando, assim que a estrela entre em colapso. O reestabelecimento do equilíbrio hidrostático é recorrente em vários momentos do processo evolutivo das estrelas. A primeira série de reações de fusão nuclear é a cadeia $p - p$ formado por:

Liberando $\sim 7\text{MeV/nucleon}$. O tempo de duração do ciclo $p - p$ é de $\sim 10^7$ anos. Quando 15% do H é queimado, o equilíbrio não pode ser mantido e o caroço da estrela se contrai até o reestabelecimento do equilíbrio hidrostático. Tal efeito reacende as reações nucleares para H nas camadas mais externas e no centro da estrela a temperatura aumenta até iniciar a ignição do He.

Figura 1.1: A sequência da queima dos elementos químicos e o tempo de duração de cada etapa para uma estrela de 25M_☉ [Kemp (2000)].

Este ciclo se repete algumas vezes, em períodos de tempo mais curtos e permitindo a fusão de núcleos cada vez mais pesados. O ciclo posterior ao p – p é o *triplo alfa*, onde He é usado para formar C:

em $\sim 5 \times 10^5$ anos. C para formar Ne e O:

em ~ 600 anos e Si com tempo aproximado de 1 ano. Por fim, o Si é utilizado na reação de formação do Fe no tempo de ~ 1 ano. A figura 1.1 é um diagrama dos estágios de fusão no plano $\rho - T$, mostrando a velocidade de consumo do combustível nuclear em condições de temperatura e densidades. A formação do Fe interrompe as reações de fusão porque possui energia máxima de ligação por nucleon (8.8MeV - vide figura 1.2). A formação de elementos mais pesados precisa de reações endotérmicas.

Estrelas em estágios avançados de evolução estelar possuem camadas concêntricas com os elementos químicos mais pesados no interior (estrutura de “cebola”) e os mais leves nas camadas mais externas. O caroço é composto de Fe e as camadas adjacentes de S + Si, O + Ne, C, He e a camada mais externa por H (vide figura 1.1 pelos perfis de densidade e a figura 1.3 a estrutura de camadas de uma estrela massiva com 25M_☉). As estrelas atingem a última etapa evolutiva formando o caroço de Fe, isto é detalhado nas figuras 1.3, que mostra a estrutura de camadas

Figura 1.2: Energia de ligação por nucleon (E/A MeV) em função da massa atômica (A).

concêntricas em uma estrela de $25M_{\odot}$ e 1.4 [Woosley & Heger (2007)] a relação entre a massa do remanescente e as massas originais das estrelas progenitoras, que ao evoluir sua entropia diminui do interior até a superfície do objeto para alcançar o perfil das massas das estrelas remanescentes como pode ser visto na figura 1.5. E a figura 1.6 ilustra as densidades e a entropia/bárion pelas massas das progenitoras [Woosley et al (2002)].

Nem todas as estrelas atingem o estágio final de formação do caroço de Fe, isso porque há uma forte dependência com a massa inicial do objeto. Estrelas de baixa massa ($0.1M_{\odot} \leq M \leq 1.0M_{\odot}$) evoluem mais lentamente pois seus processos de fusão e o reestabelecimento do equilíbrio hidrostático são mais lentos ($t \sim 13.7$ bilhões de anos), e podem acender as reações de He, como é o caso das chamadas anãs brancas de He. Estrelas de massa intermediária ($1.0M_{\odot} \leq M \leq 8.0M_{\odot}$) com energia térmica pequena por partícula não conseguem evoluir além da queima do ciclo C – O terminando sua evolução em anãs brancas (que podem ser de He também). No fim desse processo a estrela exaure seu combustível nuclear, diminuindo sua pressão interna e promovendo a contração da estrela. Com isso, a densidade aumenta, e consequentemente, a distância entre os elétrons passa a ser da ordem do comprimento de onda de de Broglie¹. No interior estelar o gás de elétrons está em um regime degenerado onde as partículas não se movem livremente e o espaço de fases é restringido aos estados de energia cada vez mais altos. A pressão dos elétrons degenerados $P_e \propto p_f^4 \propto \rho^{4/3}$, onde p_f é o momento correspondente à energia de Fermi (E_f) e ρ é a densidade dada em gramas por centímetro cúbico. Quando o

¹Definido como $\lambda = \frac{h}{mv}$.

objeto colapsa gravitacionalmente, a densidade ρ e a energia de Fermi E_f , aumentam, pois os estados de menor energia se encontram ocupados e são preenchidos em energias mais altas. Isto faz com que a pressão de elétrons degenerados aumente até o equilíbrio hidrostático seja reestabelecido. Isso pode ocorrer com densidades $\sim \rho \geq 10^5 \text{g/cm}^3$.

Nas estrelas de grande massa, ($8.0M_\odot \leq M \leq 60.0M_\odot$) os ciclos nucleares continuam até formar O – Mg – Ne (entre $8.0M_\odot \leq 10.0M_\odot$) e Fe para ($10.0M_\odot \leq M \leq 60.0M_\odot$) em seu interior, a pressão do gás de elétrons degenerados é o principal componente de sustentação. A distância média entre as partículas é $\sim \lambda$, onde λ é o livre caminho médio, esta é a condição que torna a densidade crítica (ρ_c) e o regime degenerado: $\rho_c \propto m^{3/2}$ (m massa da partícula que compõe o gás). No estágio final de formação de Fe, a temperatura central é $T_c \simeq 8 \times 10^8 \text{K}$ ($kT \simeq 0.7 \text{MeV}$) e densidade $\rho \simeq 10^{10} \text{g/cm}^3$, segundo [Burrows \(1990\)](#). Quando a densidade atinge a condição de $\rho \gg \rho_c$, onde a densidade de núcleons $\sim \rho \simeq 10^{11} \text{g/cm}^3$ é muito maior que a densidade de elétrons $\rho_c \simeq 10^5 \text{g/cm}^3$ é configurada a condição de gás ideal com pressão parcial $P_n \ll P_c$. Nessa situação um parâmetro astrofísico torna-se fundamental para o caminho evolutivo final da estrela, tal valor é conhecido como *massa de Chandrasekhar* (M_{Ch}) ou *limite de Chandrasekhar* e estabelece o valor final da massa do caroço estelar que pode ser mantido com a pressão de um gás degenerado. Trataremos esse aspecto na seção a seguir.

1.3.1 Massa de Chandrasekhar

Vimos que a estrutura final para estrelas de baixa massa ($0.1M_\odot \leq M \leq 1.0M_\odot$) e massa intermediária ($1.0M_\odot \leq M \leq 8.0M_\odot$), evolui para um caroço de C – O onde as reações de fusão termonucleares cessam e o objeto é constituído por uma estrutura de camadas de He e um envelope externo de H. No reestabelecimento do equilíbrio hidrostático, a estrela se contrai até a pressão exercida pelas camadas externas se equilibrarem com a pressão interna do gás de elétrons degenerado. A pressão das camadas (P_c) torna-se igual à pressão do gás (P_e)

$$P_c = P_e. \quad (1.7)$$

Estrelas com essas características terminam seu caminho evolutivo como anãs brancas. A condição de degenerescência é dada pela distância média entre as partículas constituintes do gás (d). A densidade de partículas em um gás completamente ionizado é dada pela expressão $n = \rho/(\mu m_H)$, onde μ é o peso molecular e m_H é a massa do átomo de H, implicando em $d = n^{1/3}$, logo, a condição de degenerescência pode ser determinada pela desigualdade

$$\sqrt{\frac{\mu m_H}{\rho}} \leq \left(\frac{h}{p}\right)^3. \quad (1.8)$$

A degenerescência depende do momento (p) e da densidade (ρ) das partículas. A

aproximação por um gás ideal é válida, se e somente se, para a situação clássica:

$$\frac{3kT}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.9)$$

É importante ressaltar que se o gás é degenerado quântico, a condição para gases ideais não é válida. A condição de degenerescência é dada por $KT/E_F \sim 0$.

combinando as equações 1.8 e 1.9 estabelecemos a densidade crítica para um gás degenerado:

$$\rho_c = \frac{\mu m_H}{h^3} (3mkT)^{3/2}. \quad (1.10)$$

Se $\rho > \rho_c$ o volume ocupado por uma partícula é $V_p \simeq \lambda^3$, logo as partículas não podem mover-se mais livremente, entrando na condição de degenerescência. Para uma mesma temperatura (T), ρ_c passa a depender somente da massa das partículas constituintes do gás. No regime do estelar, as primeiras partículas a se tornarem degeneradas são os elétrons, seguido por prótons e nêutrons. Para estrelas de massa intermediária $\rho_c \simeq 10^6 \text{g/cm}^3$ para elétrons e $\rho_c \simeq 10^{11} \text{g/cm}^3$ para núcleons (condição para uma estrela de nêutrons).

A pressão do gás de elétrons relativísticos degenerados resulta na equação

$$P = K\rho^{4/3}. \quad (1.11)$$

Onde K é uma constante que engloba uma série de parâmetros físicos e ρ é a densidade das partículas. $\rho \simeq n_e$. A condição de equilíbrio estabelecida após a contração é:

$$P = Kn_e^{4/3}. \quad (1.12)$$

A equação 1.3 descreve o equilíbrio hidrostático, substituindo a equação 1.11, temos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3}G\rho^2 r. \quad (1.13)$$

Supondo a densidade constante e $M \equiv M(r)$,

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r' \rho dr'. \quad (1.14)$$

Temos um caso onde o gradiente de densidade é diferente de zero e a descrição pode ser melhorada com o termo de correção gaussiano no gradiente de pressão:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0^2 r e^{(r/a)^2}. \quad (1.15)$$

Onde ρ_0 é a densidade central da estrela, a é um parâmetro relativo ao comprimento relacionado à massa na direção do centro estelar. Para um valor de R , o raio

da estrela, quanto maior a razão R/a , maior o gradiente de densidade. Integrando a equação 1.15, temos a pressão para qualquer distância do centro,

$$P(r) = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 a [e^{(r/a)^2} - e^{(R/a)^2}], \quad (1.16)$$

onde a constante de integração é determinada pela condição de contorno $P(R) = 0$. Na situação que estamos tratando, a densidade ρ_0 é muito maior que a densidade média da estrela, o que implica em $a < R$. A massa total pode ser aproximada pela expressão:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^3 \sqrt{6}. \quad (1.17)$$

Usando a equação 1.17, temos a pressão no centro estelar, calculando $P(r)$ em $r = 0$, resulta

$$P_c = 0.4 G M^{2/3} \rho_0^{4/3}. \quad (1.18)$$

Com isso temos uma expressão para a pressão central P_c escrita em termos da massa e da densidade central. Substituindo na equação 1.12, que estabelece a condição de equilíbrio, resulta

$$M = 4 \left(\frac{Y_e}{m_H} \right)^2 \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} = 5.78 Y_e^2 M_\odot, \quad (1.19)$$

também conhecida como *Massa de Chandrasekhar*:

$$M_{Ch} = 5.78 Y_e^2 M_\odot. \quad (1.20)$$

A massa de Chandrasekhar M_{Ch} depende fundamentalmente da fração de elétrons Y_e e apresenta diferentes limites para diferentes composições. Para $Y_e \approx 0.5$, que é a composição para um caroço de Fe, a massa do remanescente é de $M = 1.44 M_\odot$ que resulta em uma anã branca, acima desse limite não há anã branca estável. Também o limite de massa entre a formação de uma estrela de nêutrons e um buraco negro não é bem entendido e não há um consenso sobre o limiar de massa do caroço estelar que promove a formação de um e de outro, na explosão de estrelas de $M \geq 10 M_\odot$. Alguns autores discutem a possível existência de uma distribuição bimodal nas massas das estrelas de nêutrons Schwab et al (2010), Valentim et al (2011b), etc. onde, possivelmente distribuições dessa natureza sejam provenientes dos diferentes canais evolutivos desses objetos. Faremos uma discussão detalhada desse assunto no capítulo 5.

1.4 A explosão das Supernovas (colapso gravitacional)

Uma supernova se caracteriza como um dos eventos mais extraordinários conhecidos pelo homem, e acontece quando uma estrela de massa $\geq 8 M_\odot$ encerra seu ciclo evolutivo termonuclear e explode de seu envelope liberando uma imensa

Figura 1.3: Estrutura de camadas para uma estrela com $25M_{\odot}$. Crédito: Astronomy-on-line (Brooks/Cole Thomson Learning).

Figura 1.4: Perfil da temperatura (T) com a densidade (ρ) para uma estrela de $15M_{\odot}$ em comparação com o Sol durante a fase de síntese de elementos químicos [Woosley et al (2002)].

Figura 1.5: Perfil de massas das estrelas remanescentes com as progenitoras [Woosley & Heger (2007)].

Figura 1.6: Perfil de densidades e entropia por bárion para a massa do progenitor [Woosley & Heger (2007)].

quantidade de energia ($\sim 10^{53}$ ergs, a maior parte no espectro não visível). O brilho desses eventos é comparável a de uma galáxia [Baade & Zwicky (1934)], o estudo das supernovas configura-se importante e de grande interesse porque envolve muitas áreas da Física Astronomia: evolução da pré-supernova, física da explosão, observações em todos comprimentos de onda (λ) emitidos pelo remanescentes gasoso e compacto, nucleossíntese, evolução química da galáxia, interação com o Meio Interestelar (MI), possivelmente mecanismos de aceleração de Raios Cósmicos, indicadores cosmológicos de distância, bursts de neutrinos, ondas gravitacionais, etc. O estudo desses objetos fantásticos engloba todas as áreas citadas anteriormente e, possivelmente, novas áreas Witten (1984), Woosley et al (1986) e Woosley & Weaver (1986). Vamos dividir o fenômeno “supernova” em algumas etapas para facilitar o entendimento e a compreensão.

1.4.1 Resfriamento do carço e o colapso gravitacional

A ocorrência do fenômeno acontece após a formação do carço de Fe e coincide com fim das reações de fusão nuclear no interior estelar (embora as reações ainda podem ocorrer se a temperatura for alta o suficiente na região fronteira com a camada de Si, adicionando mais Fe no carço). Segundo Weaver & Woosley (1980), os processos associados à fusão do Si há um aumento da temperatura ($\simeq 0.35$ MeV) causada pela sucessiva adição de partículas α ao Si proporcionando sua fusão e resultando é Ni ou Fe. A fusão do Si aumenta a temperatura fazendo com que a entropia aumente até um máximo. O carço fica convectivo, com entropia e composição uniformes [Bethe (1990)]. O aumento da entropia faz com que o carço convectivo se estenda até o ponto onde entropia é máxima. Quando as reações do Si cessam o carço para de receber massa.

Se a massa do carço exceder o limite de Chandrasekhar ($M_{core} \geq M_{Ch}$), perde-se o equilíbrio hidrostático, isto porque, a pressão de degenerescência não suporta mais o próprio peso e o das camadas mais externas promovendo a implosão do carço. Uma abordagem detalhada pode ser conferida em Bethe (1990).

O começo da implosão do carço estelar está intimamente ligada aos mecanismos de resfriamento que promovem o fim efetivo das reações de fusão nuclear. Neste momento, o carço estelar deixa de produzir energia (exotérmico) e começa o resfriamento essencialmente por três processos: neutronização, foto-dissociação e aniquilação de pares, que são processos endotérmicos e auxiliam no resfriamento do centro estelar. Na próxima seção serão discutidos em detalhes.

1.4.2 Neutronização

Este processo ocorre no regime de densidades elevadas ($\rho \geq 10^5$ g/cm³) e com gás degenerado de elétrons que tem a energia de Fermi (E_F) aumentada pelo colapso gravitacional. Com isso a pressão de elétrons degenerados tem um acréscimo antes do reestabelecimento do equilíbrio. A condição fundamental para que o processo ocorra é energia de Fermi ser $E_F \simeq \Delta_{np}$, que é a diferença entre as massas dos nêutrons e

prótons, e assume um valor de $\Delta_{np} \simeq 1.3\text{MeV}$. Esse processo facilita a captura do elétron por um próton:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e; \quad (1.21)$$

$$e^- + (A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e. \quad (1.22)$$

A primeira equação descreve o processo sob a ótica da estrutura interna, onde há captura eletrônica pelo próton. Já no segundo termo é representada a captura por meio do núclídeo de “Fe” que são os elementos mais abundantes no interior estelar, e a redução do número atômico Z na neutronização. Esse processo promove o resfriamento porque há perda de neutrinos (ν_e) que escapam livremente da estrela. Uma outra consequência importante dessa deleptonização do caroço é a diminuição da concentração de léptons, que são férmions. Tal fato, promove o aumento dos estados disponíveis no espaço de fase, e conseqüentemente, a diminuição da energia de Fermi (E_F) e diminui a pressão do gás de elétrons, favorecendo um eventual colapso gravitacional.

1.4.3 Foto-dissociação

Vimos anteriormente, que encerrada o ciclo de fusões nucleares, os elementos químicos predominantes no caroço são Fe e Ni. Os núcleos passam a ser dissociados (quebrados) por fótons (γ) altamente energéticos provenientes do campo de radiação do gás de elétrons degenerados, esse campo é descrito por uma distribuição maxwelliana na temperatura e a condição para a foto-dissociação é a existência de γ 's com energia superior a $> 1\text{MeV}$. As transições permitidas por esse processo serão vistos a seguir.

i-) Transição $\text{Fe} \rightarrow \text{He}$

$$\gamma + {}^{56}\text{Fe} \rightarrow 13\ {}^4\text{He} + 4n. \quad (1.23)$$

$${}^{56}\text{Ni} \rightarrow {}^{54}\text{Fe} + 2n. \quad (1.24)$$

O Fe resultante da equação 1.24 sobre nova dissociação como é descrito na equação 1.23.

ii-) Transição do He

$$\gamma + {}^4\text{He} \rightarrow 2n + 2p. \quad (1.25)$$

As reações descritas pelas equações 1.23, 1.24 e 1.25 são endotérmicas, isto é absovervem energia do meio e produzem núcleons e elétrons livres. A energia “perdida” por unidade de massa nesses processos é $\sim 5 \times 10^8 \text{ergs/g}$.

1.4.4 Aniquilação de pares

Como foi mostrado na seção anterior, o campo de radiação presente no equilíbrio termodinâmico do gás de elétrons degenerados segue uma distribuição maxwelliana das temperaturas. Temperaturas mais elevadas podem produzir fótons (γ 's) suficientemente energéticos que promovem a criação de pares. Fótons com energia da ordem de MeV's produzem pares e^-e^+ , $\mu^-\mu^+$ e $\tau^-\tau^+$, onde os dois últimos têm menor probabilidade de serem produzidos por conta das suas massas. Para temperaturas um pouco superiores ao limiar de produção ($T = 1.022\text{MeV}$), a energia dos fótons é praticamente toda transferida para a produção da massa das partículas. Isso produz partículas com pouca energia cinética e subtrai energia térmica do meio e reduzindo a pressão que balanceia a estrela. Em temperaturas mais altas, as taxas desses processos são maiores, e retiram energia do campo de radiação sem causar a diminuição da pressão, isso porque, parte da energia convertida em massa é também convertida em energia cinética (agitação térmica). Dessa maneira não há diminuição significativa da pressão e mantendo a estrela em equilíbrio. A temperatura crítica que favorece o colapso é $\sim 1\text{MeV}$. O processo de criação de pares é descrito pelas equações abaixo:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^-e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_e. \quad (1.26)$$

1.4.5 Formação da região homóloga e a camada externa

O colapso gravitacional em seus estágios iniciais divide o cargo estelar em duas regiões distintas quanto ao regime de velocidades de atração das camadas mais externas da estrela. São a região *homóloga* e a camada externa (queda quase-livre). Essa divisão causa um acúmulo de energia mecânica entre ambas propiciando a formação de uma onda de choque que reverte o sentido da “queda de matéria” podendo provocar a explosão.

É a parte mais externa do caroço onde as distribuições de densidade e temperatura só são alteradas quando ocorre o colapso por um fator de escala conhecido como auto-similaridade. A região homóloga pode ser modelada como uma esfera de raio R_h , onde a massa da região é a $M(R_h) = M_{Ch}$. O processo de deleptonização reduz o valor de Y_e para 0.36 [Bethe (1990)]. A densidade da $\rho(r)$ aumenta no momento do colapso e o volume diminui. Mesmo a associação desses fatores fazem com que $\rho(R_h/r)$ no interior da esfera homóloga não se altere, isso caracteriza a região homóloga [Goldreich & Weber (1980)]. Uma importante característica dessa região é que a velocidade de queda da matéria é subsônica e proporcional à $v \propto r$.

Além da região homóloga há a camada externa. Essa região é a borda externa que delimita o colapso. A matéria é atraída com velocidade supersônica ($v \propto r^{-1/2}$). Tanto a velocidade como a densidade na região são decrescentes com o raio. O ponto no espaço onde a velocidade de queda é igual à velocidade supersônica é conhecido como *ponto sônico* (figura 1.7). O impacto da “queda” de matéria em direção ao centro estelar promove alterações na pressão que se propagam no sentido contrário à

Figura 1.7: A descrição gráfica da velocidade (v) de queda da matéria e a velocidade do som (v_s) em função do raio (r) no instante de 1ms. O ponto de cruzamento entre as duas curvas é o ponto sônico que delimita a região homóloga [Arnett (1977)].

queda das camadas externas. Esse rebote acontece na forma de ondas sonoras (no referencial do meio) de matéria mas no referencial da estrela estão paradas. Segundo o trabalho de Arnett (1977), a figura 1.7 ilustra o regime de velocidades no instante 1ms que o ponto sônico está em $\simeq 25\text{km}$.

1.4.6 Rebote e formação da neutrinosfera

A formação da região homóloga discutida na seção anterior, o aumento contínuo da densidade no caroço estelar proporciona alguns efeitos como a aprisionamento de neutrinos e as transições de fase da matéria nuclear. Regiões onde o regime de densidade alcança $\simeq 10^{11}\text{g/cm}^3$, a matéria passa a ser opaca à eles, já que o livre caminho médio é de $\simeq 1\text{km}$, sendo menor que o raio estelar ($\simeq 100\text{km}$). É interessante ressaltar que a densidade varia como função do raio $[\rho(r)]$ podendo atingir valores supranucleares ($\simeq 10^{15}\text{g/cm}^3$), o que implica em um livre caminho médio dos neutrinos de $\simeq 1\text{m}$. Nesses cenários, os neutrinos entram em equilíbrio termodinâmico com a matéria [Raffelt (1996)], embora existam alguns desvios que podem afetar o espectro emergente de neutrinos.

A opacidade é causada principalmente pelo espalhamento elástico, via corrente-neutra, com núcleons. Os neutrinos se difundem na região homóloga e sofrem processos de absorção e reemissão em taxas praticamente iguais. Isso faz com entrem

em equilíbrio com os elétrons via reação

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^- . \quad (1.27)$$

O equilíbrio estabelecido pelas reações $e \leftrightarrow \nu_e$ estabiliza a abundância eletrônica (Y_e) estabelecendo um limite para a massa da região homóloga. O aprisionamento de neutrinos dá origem (após a explosão) à *neutrinosfera*, que consiste na região onde há a última interação antes que eles escapem livremente. O cálculo da neutrinosfera pode ser feita por meio da profundidade óptica [Bethe (1990)]:

$$\tau = \int \frac{dr}{\lambda_\nu} . \quad (1.28)$$

Onde τ é a profundidade óptica e λ_ν é o livre caminho médio dos neutrinos e é definido como

$$\lambda_\nu = 2\text{km} \left(\frac{10}{\varepsilon_\nu} \right)^2 , \quad (1.29)$$

ε_ν é a energia média dos neutrinos na região é dada em MeV [Cooperstein (1988)]. O livre caminho médio dos neutrinos (λ_ν) contém a seção de choque para o processo considerado. A profundidade óptica da neutrinosfera é mostrada por Bethe (1990),

$$\tau(R_\nu) = \frac{2}{3} . \quad (1.30)$$

O valor 2/3 indica que os neutrinos não emergem radialmente do centro estelar, mas que deve ser feita uma média angular. A densidade da localização da neutrinosfera é explicitada pela expressão abaixo,

$$\rho_{12}(R_\nu) = 23\varepsilon_\nu^{-3} . \quad (1.31)$$

A densidade é função da energia dos neutrinos. A notação ρ_{12} significa 10^{12}g/cm^3 . Portanto, o raio da neutrinosfera deve variar com energia média (ε_ν), como mostra a expressão abaixo [Bethe (1990)]

$$R_\nu = 11\varepsilon_\nu \text{km} . \quad (1.32)$$

As grandezas mostradas acima dependem fortemente da energia dos neutrinos (ε_ν em MeV) produzidos. Valores típicos para a energia dos neutrinos estão compreendidos entre $\simeq 6\text{MeV} - 22\text{MeV}$ aproximadamente. O raio é $R_\nu \simeq 10^2\text{km}$ para $< \varepsilon_\nu > \simeq 10\text{MeV}$. O processo que mais ocorre nessa fase é o espalhamento neutrino-elétron. É um espalhamento elástico e não do tipo emissão-reemissão que acontece no momento de “queda”.

Enquanto $\rho < 2.7 \times 10^{12}\text{g/cm}^3$, a pressão relevante é a do gás de elétrons degenerados. Quando $\rho \sim \rho_{nuclear}$ (deleptonização), os nêutrons se agregam formando uma estrutura “única”, nesse momento ocorre a transição de fase, a matéria nuclear supera a densidade crítica e entra em regime de degenerescência, aumentando a pressão do gás de nêutrons. A pressão dominante deixa de ser eletrônica e passa a ser

Figura 1.8: Lattimer & Prakash (2004a)

neutrônica, a equação de estado da $P \propto k\rho^\gamma$, onde fator γ passa de $4/3$ (pressão de elétrons degenerados relativísticos) para $5/3$ pressão de nêutrons não-relativísticos. A transição de fase promove um enrijecimento do caroço estelar que resiste à compressão do colapso. Isso é o que provoca o acúmulo de energia no ponto sônico que promove a formação da onda de choque.

Mesmo com a rigidez atingida pelo caroço, a compressão não é nula em algumas situações a densidade (ρ) pode superar $\rho_{nuclear}$ em até 50% [Brown & Bethe (1985)] causando um aumento da pressão interna do caroço, nesse instante há o rebote que reverte o sentido do colapso das camadas mais externas. Esse efeito é observado em todas as simulações numéricas, mas não faz com que a estrela exploda de forma violenta caracterizando a supernova. Há concordância entre os autores Janka & Mueller (1996), Buras et al (2006) e Janka et al (2007) que descrevem toda a fenomenologia das supernovas até o ponto formação da onda de choque, por outro lado, o entendimento dos mecanismos físicos que culminam na explosão ainda não são bem compreendidos e se encontram em debate. Existem dois cenários consolidados na literatura: *mecanismo adiantado*² (de natureza puramente hidrodinâmica, já descrito) e *mecanismo atrasado*³ (onde o choque adiantado perde energia na dissociação dos núcleos mas é revitalizados pela difusão dos neutrinos), que trataremos a seguir.

1.4.7 Mecanismos “imediatos”

O mecanismo *imediato* no cenário da explosão de supernovas se caracteriza pelo

²O termo em inglês é *adiantado* mas usaremos imediata.

³O termo em inglês é *atrasado* mas usaremos atrasada.

rebote da região homóloga no momento de máxima compressão criando uma onda de choque. Idealmente, quando a onda de choque é suficientemente energética podendo proporcionar a explosão do envelope estelar e resultando no nascimento do objeto compacto remanescente.

A modelagem da explosão de supernovas feitas nas últimas décadas através de simulações numéricas, e têm se mostrado ineficientes na reprodução da explosão. Algumas razões podem ser apontadas, como a grande dissipação de energia na dissociação dos núcleos ao atravessar a casca externa. A dissociação do Fe é de $\sim 9\text{MeV/núclon}$. Segundo [Arnett et al \(1989\)](#), a energia dissipada na dissociação de $0.1M_{\odot}$ de matéria estelar é de $\simeq 10^{51}\text{ergs}$. Entre $0.5 - 0.8M_{\odot}$ são atravessadas pela onda de choque e dissociam os núcleos pesados que formam essas camadas. Os prótons liberados pela dissociação aumentam a captura de elétrons e liberam neutrinos que podem escapar mais livremente se a $\rho_r < \rho_{nuclear}$. Os neutrinos escapam logo atrás da onda de choque em $\sim 10\text{ms}$.

Os modelos de explosão *imediatos* têm forte dependência com a massa da estrela e com a Equação de Estado (EE) da matéria nuclear. Estrelas de menor massa formam caroços de Fe menores, e conseqüentemente, menos matéria para ser atravessada pela onda de choque. EE com massas menores promovem rebotes mais potentes e explosões mais energéticas. [Baron et al \(1985\)](#) explodem estrelas com intervalo de massa de $12 - 15M_{\odot}$, nesses modelos a estrela é rica em matéria nuclear e densidades altas. [Hillebrandt \(1982\)](#) não conseguiu explodir uma estrela com $10M_{\odot}$. Algo que [Burrows & Lattimer \(1985\)](#) também não observaram em suas simulações. Um outra forma de tratar essa dificuldade em reproduzir as explosões para objetos em diversos intervalos de massa é a implementação de mais de uma dimensão. Por limitações computacionais, esses modelos ganharam força a partir da segunda metade da década de 90. [Woosley & Weaver \(1995\)](#), por exemplo usou modelos com 1-D, e mostrou a sensibilidade à massa da estrela.

Mesmo com essa nova geração de modelos, não há concordância sobre os limites de massa que a estrela pode ter para ser explodida [[Kitaura et al \(2006\)](#)], a composição exata do caroço [[Janka & Mueller \(1996\)](#)] e o papel dos neutrinos no processo. [Kitaura et al \(2006\)](#) simularam explosões em modelos esfericamente simétricos no intervalo de massa de $8 - 10M_{\odot}$ com caroço composto por O – Ne – Mg. Objetos nessa faixa de massa não chegariam a formar o núcleo de Fe. Eles usaram diferentes equações de estado (EE) e não reproduziram a explosão pelo mecanismo adiantado. [Buras et al \(2006\)](#) também não conseguiriam explodir uma estrela com massa $15M_{\odot}$ em modelos 1-D, 2-D e 3-D. Assim, foram implementados processos de recuo de núcleons, movimentos térmicos, campos magnéticos fracos e estudadas vários efeitos, sem sucesso para a explosão em geral.

1.4.8 Mecanismos “atrasados”

Modelos que tentam explicar a explosão de estrelas massivas depois das escalas de tempo dinâmicas ($\sim 1\text{ms}$) são chamados de *atrasados*. O modelo de [Baron et al \(1985\)](#) falha na explosão de estrelas $> 18M_{\odot}$. Uma estrela com massa $25M_{\odot}$ produz

um caroço de Fe com massa de $2M_{\odot}$ logo, o choque deve atravessar aproximadamente uma massa solar, algo que implica em grandes perdas de energia na dissociação de núcleos como apontamos anteriormente.

O modelos de explosão *atrasados* são baseados que em centenas de ms após o rebote, a explosão possa ser reativada por neutrinos gerados pelo remanescente (no caso, estrela de nêutrons). O choque diminui a densidade de matéria por onde passa facilitando a difusão dos neutrinos provenientes da região homóloga. O fluxo de neutrinos gerados nas regiões mais quentes podem dissociar os núcleos também e promove o aumento da pressão (P_n), devido o aumento da energia cinética, esses fatores revigoram o choque [Brown & Bethe (1985)]. Diferentemente dos modelos *adiantado*, o choque não dissocia energia mas fornece energia para o choque. Esse acréscimo de energia é feito pelos neutrinos que se difundem da região de aprisionamento. O fluxo de neutrinos é gerado principalmente por aniquilação de pares, e *bremsstrahlung* N-N, e está constituído por três sabores:

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e, \quad (1.33)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu} \quad (1.34)$$

e

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_{\tau} + \bar{\nu}_{\tau}. \quad (1.35)$$

O mecanismo que fornece a maior quantidade de energia ($\sim 80\%$) é proveniente dos processos de absorção :

$$\nu_e + n \rightarrow e^- + p \quad (1.36)$$

e

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (1.37)$$

O fluxo de neutrinos é composto em sua grande parte, por ν_e 's (vide 1.21 e 1.22) de captura eletrônica que causa a neutronização, e foram produzidos na região homóloga na fase de compressão. Uma menor contribuição do fluxo, onde estão incluídos os ν_{μ} e ν_{τ} é proveniente de processos de espalhamento em núcleons e/ou elétrons [Raffelt (1996)]. A figura 1.8 [Janka et al (2007)] tem uma descrição detalhada dos processos que envolvem neutrinos no estágio pré colapso. Uma referência detalhada e completa é Thompson et al (2000). Os neutrinos do fluxo “aquecem” a matéria quando são capturados, a taxa de variação da energia aquecida por unidade de massa e tempo é dada pela expressão abaixo [Brown & Bethe (1985)]:

$$\dot{E} = K(T_{\nu}) \left[\frac{L_{\nu}}{4\pi R_m^2} - \left(\frac{T_m}{T_{\nu}} \right)^2 a_c T_m^4 \right] \quad (1.38)$$

Os índices m e ν se referem ao elemento de matéria e neutrinos, respectivamente. R é distância percorrida e T é a temperatura. R_m é o elemento de matéria atravessada pelos neutrinos, $K(T_{\nu})$ ($\sim \lambda_{\nu}/\rho$) é o coeficiente de absorção em unidades de cmg^{-1}

L_ν é a luminosidade do fluxo de neutrinos ($\sim 4 \times 10^{52}$ ergs), $a_c T_m$ é a densidade de energia por unidade de volume do “corpo negro” do gás de neutrinos, e corresponde $\sim 6 \times 10^{25}$ erg/cm³ MeV⁴.

O ganho de energia ocorre onde o primeiro termo da equação 1.38 supera o segundo termo. Em $R \sim 150$ km, nessa região a probabilidade de absorção de neutrinos ainda é alta $\sim 10^{-3}$ e temperatura da matéria é da ordem de MeV's. A energia por unidade de tempo cedida é 50 MeV/s suficiente pra reenergizar o choque no intervalo de 250 ms [Bethe (1990)].

A redução da seção de choque dos neutrinos (σ_ν), que é proporcional à energia dos mesmos, é compensada pelo aumento do fluxo L_ν , neutrinos produzidos na região de aprisionamento são incorporados a essa grandeza com a formação do objeto compacto remanescente. A liberação de energia gravitacional ocorre através de neutrinos de todos os sabores e, fazendo com que o fluxo seja $L_\nu \sim 10^{53}$ ergs/s. Portanto, com uma pequena fração de energia é depositada pelos neutrinos ($\sim 5\%$) e sendo suficiente pra revitalizar o choque [Brown & Bethe (1985)], na verdade, os neutrinos cumprem o papel de criar condições para a explosão, e por isto se denominam “transporte de neutrinos” em supernovas.

A massa das regiões mais internas resfriaram por difusão de ν 's em ~ 20 s dando origem ao objeto compacto remanescente: uma estrela de nêutrons com raio $R \sim 10$ km, massa $M \sim M_{\text{Ch}}$, baixa concentração de léptons $Y \sim 0.04$. A estrela de nêutrons remanescente pode sofrer um segundo colapso e se tornar um buraco negro. Os mecanismos que delimitam a formação dos objetos compactos não é bem compreendido e continua um problema em aberto. Discutiremos mais a respeito no capítulo 5.

Alguns autores, com mecanismo *atrasado* conseguiram explodir objetos entre $25M_\odot$ e $50M_\odot$ [Wilson (1985)]. O desenvolvimento das simulações sobre a explosão de supernova se desenvolveu muito nas últimas décadas, em decorrência do “salto” dado pelos processadores que permitiu a confecção de códigos mais robustos com a implementação de efeitos como rotação, campos magnéticos, assimetria esférica, etc. Um bom exemplo é dado por Burrows et al (1995), ele não conseguiu a explosão com modelo 1-D⁴ mas implementando a convecção em 2-D, pois a convecção fornece energia suficiente para a explosão foi possível. Bethe (1993) mostrou que as curvas de luminosidade de neutrinos obtidas de SN1987A são consistentes com os mecanismos atrasado. Outros autores, como Janka & Müller (1995) apontaram que assimetria esférica também é um fator determinante nos mecanismos de explosão. Há alguns anos, modelos com 3-D [Janka et al (2007)] tem se mostrado promissores na descrição de explosões de supernova para objetos de grande massa ($> 8M_\odot$), e as simulações têm apontado a relevância dos parâmetros nas tentativas de “reprodução” das explosões de supernovas.

⁴Modelos com um parâmetro livre na propagação dos neutrinos. Modelos 1-D que não permitem a inserção de efeitos que envolvem dimensionalidade superior (2-D e 3-D) como convecção, rotação, campos magnéticos e assimetria.

Figura 1.9: Janka et al (2007).

1.5 Estrelas de nêutrons remanescentes

Estrelas de nêutrons (EN) são alguns dos mais densos objetos encontrados no Universo. Se configuram como importantes laboratórios astrofísicos para testar teorias em regimes extremos (altas densidades, física de partículas, física nuclear e astrofísica), e também, para fenômenos ainda não observados: matéria dominada por hyperons e desconfinamento de quarks [Witten (1984), Benvenuto & Horvath (1989) e Benvenuto et al (1991)], superfluidez, supercondutividade com temperaturas críticas próximas a 10^{10}K , opacidade para neutrinos e campos magnéticos que excedem 10^{13}Gauss [Lattimer & Prakash (2004a)].

Baade & Zwicky (1934) propuseram a idéia da realidade das EN como objetos com altas densidades, raios pequenos e campo gravitacional intenso. Eles sugeriram ainda que as ENs seriam formadas em explosões de supernovas, na compressão do núcleo central que discutimos antes.

As ENs normalmente se apresentam na natureza como objetos com massas da $\sim 1.0 - 2.0M_{\odot}$, raios esperados de $\sim 10\text{km}$ e densidades elevadas $> 10^{14}\text{g/cm}^3$, superiores à densidade nuclear. Embora, os nêutrons (por isso leva esse nome) devam dominar quase que, completamente a estrutura nuclear desse objeto, há também prótons e léptons carregados para neutralizar a matéria. Para densidade supranuclear exótica existem bárions de estranheza finita [Glendenning (1985)], condensados de mésons (píons e kaóns) [Kaplan & Nelson (1986)] e possivelmente, quarks desconfinados [Witten (1984), Collins & Perry (1975)]. Férmions na forma de hádrons ou quarks desconfinados devem exibir supercondutividade e/ou superfluidez.

ENs englobam estrelas “normais” com matéria hadrônica que pode conter partículas exóticas permitidas pela física das interações fortes e talvez *strange quark matter* (SQM) [Alcock & Olinto (1988)]. Uma estrela de SQM⁵ pode ter uma superfície de matéria estranha com pressão zero mas com densidade supranuclear, ou uma camada fina de matéria convencional suportada por forças de Coulomb. A formação de matéria estranha, origina-se da conjectura de Witten-Bodmer-Terazawa a respeito da matéria de quarks: up, down e strange quarks (charm, botton e top que também são quarks massivos e não aparecem dentro da estrela para densidades fisicamente relevantes) podem ter uma grande energia de ligação por bárion, até maior que a massa de um nêutron. Se matéria estranha existe é, provavelmente, o limite final para a matéria hadrônica. Esta última, em seu estado normal (núcleos) é metaestável, e em regimes de altas densidades e pressões pode espontaneamente se converter em matéria de quarks desconfinada. Ao contrário de objetos normais, estrelas de matéria estranha são auto-ligadas pelas interações fortes e precisam gravidade para induzir a transição de fase para a matéria estranhapara. Normalmente, pulsares e outras ENs são consideradas “estrelas de nêutrons normais”, pois apresentam as características citadas no início dessa seção. Se estrelas matéria estranha têm uma superfície de quarks livres, cálculos sugerem que exista uma emissão de fótons superficial, compreendida entre $30\text{keV} \leq E \leq 500\text{keV}$ [Page & Usov (2002)].

⁵Nos referiremos à *strange quark matter* somente como matéria estranha.

1.5.1 Estrutura global das estrelas de nêutrons

Os aspectos globais da estrutura das ENs passam necessariamente pela relação M-R que são determinadas pelas equações de equilíbrio hidrostático relativístico. Para um objeto aproximadamente esférico (sem rotação) em Relatividade Geral, a estrutura teórica é dada pela equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV), dada a seguir

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G[m(r) + 4\pi r^3 P/c^2](\rho + P/c^2)}{r[r - 2Gm(r)/c^2]} \quad (1.39)$$

onde P e ρ são a pressão e a densidade de energia respectivamente, m é a massa gravitacional compreendida no raio r . Embora existam poucas soluções exatas para essas equações, as soluções numéricas para a equação de estado $M - \rho$ (EE) permitem obter a relação $M - R$ como pode ser vista na figura 1.9. A região separada pela condição de Schwarzschild $R \leq 2GM/c^2$ e $R \leq 3GM/c^2$ é separada por causalidade [Lattimer et al (1990)]. Algumas ENs contém grandes quantidades de matéria exótica (curvas GS1). Essas ENs têm raios pequenos ($< 10\text{km}$) e valores máximos para suas massas e são praticamente incompressíveis ($R \propto M^{1/3}$).

Para ENs normais, o raio é relativamente insensível para massas compreendidas entre $1 - 1.5M_\odot$ ao menos que a massa máxima seja relativamente pequena. Medidas de massa e raio para estrelas com massas intermediárias ajudam a discriminar entre as possíveis famílias de EEs. Talvez, duas das mais importantes quantidades astrofísicas desconhecidas sejam a massa máxima e o raio para estrelas de nêutrons com $1.4M_\odot$, várias delas muito bem medidas. Existem grandes variações nas previsões dos valores da massa e do raio que determinam a equação de estado em regimes de altas densidades para o caroço.

Figura 1.10: Diagrama massa-raio para estrelas de nêutrons. As curvas são obtidas a partir da equação 1.39 ao passo que a região vermelha corresponde ao limite imposto pela relação $E_{tot} > E_{grav}$ [Lattimer & Prakash (2001)]. Regiões excluídas pela relatividade geral (RG), causalidade, rotação e vínculos são indicados. Contornos do raio de radiação R_∞ são dadas pelas curvas alaranjadas. A linha pontilhada dada por $\Delta I/I = 0.014$ é um raio limite estimado para pulsares Vela [Lattimer & Prakash (2001), Lattimer & Prakash (2004b)].

CAPÍTULO 2

Neutrinos

"We are apply to inform you that we definitely detected neutrinos from fission fragments by observing inverse beta decay of protons"

The telegram sent by Frederick Reines & Clyde Cowan to W. Pauli 1956

Conteúdo

2.1	Objetivos	26
2.1.1	Neutrinos e sua origem	26
2.2	Neutrinos e supernovas	27
2.2.1	Flash inicial	27
2.2.2	Resfriamento	28
2.2.3	Resfriamento inicial	28
2.2.4	Equação de Boltzmann	29
2.2.5	Taxas para $\mathcal{F}_\nu$: evolução e transferência de energia	30
2.2.6	Espalhamento núcleon-núcleon $\nu_\mu n \longleftrightarrow e \nu_\mu p \longleftrightarrow \nu_\mu p$	31
2.2.7	Espalhamento neutrino-elétron $\nu_\mu e^- \longleftrightarrow \nu_\mu e^-$	32
2.2.8	Aniquilação elétron-pósitron: $e^+ e^- \leftrightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$	33
2.2.9	Bremsstrahlung núcleon-núcleon	34
2.2.10	Livres caminhos médios na presença de matéria de quarks	35
2.2.11	Espectros de energia	37
2.3	Supernova 1987A	39
2.3.1	Objeto antes da explosão: progenitor	39
2.3.2	Objeto depois da explosão: remanescente	41
2.4	Métodos de detecção de neutrinos	41
2.4.1	Cerenkov	43
2.4.2	Kamiokande	46
2.4.3	IMB	50
2.4.4	Baksan	52
2.4.5	Outros detectores	53
2.5	Algumas propriedades dos neutrinos	54
2.5.1	Número de eventos esperados no detector	54
2.5.2	Limites de massas dos neutrinos	54
2.5.3	Efeitos de mistura nos neutrinos de SN1987A	55

2.1 Objetivos

No capítulo anterior, discutimos a relação existente entre supernovas, estrelas de nêutrons e a importância dos neutrinos no processo de formação das supernovas. Agora discutiremos os neutrinos do ponto de vista da Física de Partículas, sua origem no problema do decaimento beta, as primeiras observações, mecanismos de resfriamento, algumas técnicas e os detectores Kamiokande, IMB, Baksan e alguns outros.

2.1.1 Neutrinos e sua origem

Neutrinos são léptons neutrais elementares, provenientes de três famílias distintas¹. Com seções de choque de $\simeq 10^{-44} E_\nu^2 \text{cm}^2$, sua probabilidade de interação com a matéria é muito baixa. Mesmo em meios de altíssimas densidades como o interior de uma estrela de nêutrons ($\rho > 10^{14} \text{g/cm}^3$), o livre caminho médio dos neutrinos nessas condições é da ordem de metros. Neutrinos atravessam grandes quantidades de matéria sem praticamente interagirem e são insensíveis a campos magnéticos intensos, isso faz deles fundamentais para testar modelos sobre a constituição interna de objetos estelares. Em particular, carregam informações a respeito das fontes e os processos pelos quais foram produzidos já que os envelopes estelares são essencialmente transparentes a eles.

A história dos neutrinos começa com a descoberta da radioatividade do urânio por Becquerel em 1896. Três anos depois, Rutherford descobriu que existiam dois diferentes produtos: α e β , a radiação γ foi descoberta mais tarde. Em 1914, Chadwick demonstrou que o espectro β é contínuo diferentemente de α e γ . Isso foi confirmado por Ellis e Wooster em 1927. Meitner, posteriormente demonstrou que a perda de energia não poderia ser atribuída a raios γ , de modo que a perda de energia podia ser explicada pela existência de uma nova partícula, ou como sugeriu Niels Bohr, a energia talvez não se conservasse para esse tipo de decaimento [Giunti & Chung (2007)].

Pauli, na conferência de Tübingen em 4 de dezembro de 1930, propôs em uma carta a existência de um férmion neutro fracamente interagente poderia resolver o problema da emissão do decaimento β . Ele chamou esse férmion de *nêutron* com a massa da ordem de m_e .

Quando o nêutron foi descoberto por Chadwick (1932), Fermi renomeou a partícula desconhecida para *neutrino*², como publicado nos Proceedings of the Solvay Conference 1933. Posteriormente, ele e Perrin concluíram, independentemente que os neutrinos podiam não ter massa de repouso.

Além do problema do espectro do decaimento β comentado anteriormente, outro problema foi associado à existência dos neutrinos, e diz respeito ao spin do átomo

¹Léptons associados aos léptons e^- , μ e τ e suas respectivas antipartículas.

²O nome neutrino significa pequeno nêutron.

de ${}^7\text{Ni}_{17}$ e outros núcleos. O número atômico do ${}^7\text{Ni}_{17}$ é igual à 14 e a carga do núcleo é igual à 7e. Se assumirmos que os núcleos são estados ligados entre prótons e elétrons, para o caso do átomo de ${}^7\text{Ni}_{17}$, e sabendo que tanto prótons quanto elétrons tem spin semi-inteiros (1/2, precisamente), o spin total do átomo deveria ser semi-inteiro. Entretanto, experimentos que investigavam o espectro das moléculas de ${}^7\text{Ni}_{17}$ mostravam que o átomo de nitrogênio satisfazia a estatística de Bose, e estava de acordo com o teorema que conecta spin e estatística, o spin do núcleo deveria ser inteiro. Esse problema é conhecido como a “catástrofe” do ${}^7\text{Ni}_{17}$ [Bilenky (2001)], e só seria resolvido com a descoberta do nêutron em 1932 e com o spin do neutrino.

Quando Pauli postulou a existência do neutrino, ele assumiu que teria spin 1/2, massa menor que a do elétron e um livre-caminho-médio muito grande. Para explicar o espectro do decaimento β , Pauli assumiu que no processo o “neutrino” seria emitido com o elétron mas não detectado pois, além de ser uma partícula neutra, o livre-caminho-médio seria muito grande. A energia liberada no processo seria compartilhado entre essas duas partículas resultantes, isso esclareceu o espectro contínuo do decaimento. Enrico Fermi foi o primeiro a apresentar uma teoria completa para o decaimento β em 1933, e propor que elétrons e neutrinos seriam emitidos juntos [Bilenky (2001)].

2.2 Neutrinos e supernovas

A liberação de energia do colapso estelar é uma consequência direta do teorema do Virial (TV) como mostramos na equação 1.1. A energia “expelida” pode ser melhor descrita pela equação Newtoniana:

$$\Delta E = -G \left(\frac{M^2}{R_0} - \frac{M^2}{R_N} \right) \simeq 2 - 4 \times 10^{53} \text{ergs.} \quad (2.1)$$

Onde M é a massa inicial da estrela, R_0 raio inicial da progenitora, R_N raio da EN após o colapso. Observações indicam que radiação emitida na forma de fótons corresponde à $\sim 10^{52}$ ergs e a energia cinética da matéria ejetada $\sim 10^{51}$ ergs [Burrows (1990)]. Neutrinos carregam aproximadamente 99% do montante total de energia. Os outros 1% correspondem à perdas de energia por outros mecanismos, possivelmente *ondas gravitacionais*.

A emissão de neutrinos em supernovas se dá em três fases distintas: o *flash inicial* compreendido entre o colapso do objeto até a detenção do choque em $\sim 100 - 200$ km da neutrinosfera, uma possível *pulsção intermediária* que corresponde ao período entre a amortização do choque e a explosão com acréscimo de matéria na região homóloga e *resfriamento* correspondendo à fase de formação final da proto-estrela de nêutrons e o estabelecimento do remanescente compacto.

2.2.1 Flash inicial

Ao início do colapso, a captura eletrônica produz neutrinos que escapam livre-

mente até a fase de *aprisionamento*³. Esse processo provoca a denominada *deleptonização* do caroço estelar. Nesse momento da explosão são liberados $\sim 2 \times 10^{51}$ ergs em ν 's com $\langle E \rangle \sim 15$ MeV. A implosão tem duração aproximada de 5ms e libera uma luminosidade de $\sim 10^{53}$ ergs. A onda de choque ao se propagar dissocia núcleos proporcionando um aumento da captura de elétrons livres por prótons com produção de ν_e 's.

No caroço estabelece-se uma distribuição quase-térmica com os neutrinos de todos os tipos via processos $e^- + e^+ \leftrightarrow \nu_x + \bar{\nu}_x$, com temperaturas $\sim$ MeV's. Os espectros são, porém, diferentes para cada tipo de neutrino, isso porque, cada um dos três tipos (ν_e , ν_μ e ν_τ) têm seções de choque diferentes (com forte dependência da energia) e neutrinosferas com raios diferentes, isto por conta de livres caminhos médios distintos. Como os neutrinos muônicos interagem apenas por processos de corrente neutra, a temperatura não suficientemente alta para a produção de μ 's e τ 's. Suas seções de choque são menores e, portanto suas neutrinosferas têm raios menores, logo os espectros têm temperaturas mais altas (e energias características).

Quando a onda de choque atinge esta *neutrinosfera*, todos os neutrinos escapam em ~ 5 ms, cerca de $\sim 10^{52}$ ergs são emitidos em ν_e e $\sim 0.5 \times 10^{52}$ ergs em ν_μ e ν_τ , resultando na luminosidade total de $L_{\nu_e} \sim 2 \times 10^{52}$ ergs/s e $L_{\nu_\mu, \nu_\tau} \sim \times 10^{52}$ ergs/s. L_{ν_e} atinge o pico de 6×10^{52} ergs/s, somadas todas as contribuições da produção neutrinos.

2.2.2 Resfriamento

No momento da explosão, a quantidade de energia liberada varia entre $3 - 5 \times 10^{53}$ ergs, ou seja a maior parte da energia da formação da EN. A fração mais significativa é liberada após a explosão com os processos de resfriamento (como vimos detalhadamente na seção 1.5.2 do capítulo 1). Neste momento, depois de alguns segundos, os cenários podem conter um segundo *surto* de neutrinos gerado, por exemplo, por formação de matéria estranha [Benvenuto & Horvath (1989)]. Isto será discutido em detalhes no capítulo 5.

2.2.3 Resfriamento inicial

Já vimos anteriormente que as estrelas de altas massas ($> 8M_\odot$) evoluem rapidamente e seu período de vida é inferior a 3×10^7 anos. A estrela colapsa rapidamente e suas camadas externas colidem violentamente com o caroço de Fe dando origem à explosão. A energia liberada nesse processo corresponde a $\sim 10^{49}$ ergs nas bandas ópticas, $\sim 10^{51}$ ergs energia cinética em ondas de choque e $\sim 2 - 3 \times 10^{53}$ ergs em um surto de neutrinos, sendo o principal mecanismo de liberação de energia e resfriamento da estrela de nêutron remanescente. Essa energia liberada é equivalente a $0,1 - 0,2M_\odot$, ~ 50.000 massas da Terra ou 5×10^{30} megatons de TNT. Por alguns segundos a luminosidade de neutrinos rivaliza com a luminosidade emitida no óptico. Durante a vida da nossa galáxia, a emissão de neutrinos é equivalente a $\sim 10^7 M_\odot$

³Chamado de *trapping* na literatura)

liberadas no nascimento de estrelas de nêutrons. Algo que equivale às massas de uma dezena de aglomerados globulares gigantes.

Como vimos na seção anterior, as estrelas de nêutrons ($1 - 2 M_\odot$) são caracterizadas por densidades elevadas ($\sim 10^{10} - 10^{14} g/cm^3$) e temperaturas da ordem de 1-50 MeV. Os neutrinos de todas as espécies são importantes, dentre outras coisas pois, carregam a maior quantidade de energia inicialmente (ν_ν e ν_τ ou 50% - 60%). Prevalecendo processos de espalhamento $\nu_\mu e^-$ e $\nu_\mu n$, e bremsstrahlung $e^- e^+$ e nn . Alguns autores, como [Thompson et al \(2000\)](#), sustentam que o espalhamento $\nu_\mu - \text{nucleon}$ é um mecanismo pouco importante no equilíbrio dos neutrinos, sendo incluído como fonte de opacidade na redistribuição espacial dos neutrinos em contraste com o espalhamento $\nu_\mu e^-$.

Nessa fase inicial da evolução das estrelas de nêutrons, os ν 's são a principal fonte e mecanismo de transporte de energia em supernovas no intervalo de 0 - 1s. O problema de transporte de energia [[Thompson et al \(2000\)](#)] é tratado pela função de distribuição de Boltzmann ($\mathcal{F}_\nu$) somente no espaço de fase da energia, levando-se em consideração que os fluxos de neutrinos (ν) são isotrópicos, homogêneos e se encontram em equilíbrio termodinâmico local (ETL) (espalhadores e absorvedores).

2.2.4 Equação de Boltzmann

A equação de Boltzmann descreve a distribuição e o transporte de partículas no espaço de fases. Sua forma original é:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r n + \frac{F}{m} \nabla_v n = \left(\frac{dn}{dt} \right), \quad (2.2)$$

onde $n \equiv n(\mathbf{n}, \mathbf{v}, t)$ é o número de partículas que é uma função da posição ($\mathbf{r}$), velocidade ($\mathbf{v}$) e do tempo. F forças envolvidas, m massa das partículas⁴ e o termo à direita da igualdade é o termo colisional.

A distribuição espacial e o transporte dos neutrinos em uma estrela de nêutrons recém nascida é descrita por uma equação tipo Boltzmann modificada [[Thompson et al \(2000\)](#)]. Considera-se o caso estático ($\mathbf{v}$), simetria esférica para um gás de nêutrons e levando em consideração o Pauli blocking:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} r \right) \mathcal{F}_\nu = (1 - \mathcal{F}_\nu) j_\nu - \mathcal{F}_\nu \chi_\nu; \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{F}$ é a função de distribuição dos neutrinos, $\mathbf{r}$ é a coordenada radial, $\mu = \cos \theta$ é o ângulo zenital. χ_ν e j_ν são a função fonte total ou emissividade e o termo de absorção ou coeficiente de extinção. Para o espalhamento, as funções de emissividade e dissipação redistribuem as integrais da energia acoplada em cada bin. O elemento de matriz que associada às integrais do espaço de fase que compreendem χ_ν e j_ν para os elétrons e nucleons espalhados, a probabilidade que uma colisão espalhará uma partícula em qualquer ângulo em um bin de energia.

⁴A existência da massa dos neutrinos é um consenso na comunidade científica, só que ainda está sendo estudada e não afeta muito esta abordagem teórica.

A equação de Boltzmann para espalhamentos e absorções isotrópicas, em banho térmico, sem gradiente espacial e angular, fica:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} = (1 - \mathcal{F}_\nu) - \mathcal{F}_\nu \chi_\nu. \quad (2.4)$$

Com essas considerações, é possível reduzir à equação de transporte de $\mathcal{F}_\nu$ a duas variáveis: tempo e energia. É importante notar, que para os processos de espalhamento, as funções χ_ν e j_ν requerem uma integral sobre toda a função de distribuição $\mathcal{F}'_\nu$ dos neutrino espalhados. Similarmente, envolve $\mathcal{F}_\nu$ via produção e absorção, χ_ν e j_ν envolve uma integração sobre a função dos anti-neutrinos $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}$. Entretanto, $\mathcal{F}_\nu$ está envolvida simultaneamente com $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}$. Enquanto j_ν e χ_ν são integrais do espaço de fase. O tratamento é feito em termos de n bins de energia.

2.2.5 Taxas para $\mathcal{F}_\nu$: evolução e transferência de energia

Os processos de emissão, espalhamento e absorção para uma dada energia (ε_ν), produz e remove neutrinos do espaço de fase. Os processos transferem energia para a matéria durante o espalhamento, emitem e absorvem diretamente do bin. A equação de Boltzmann para a fonte e depois absorção é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu|_{in} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu|_{out}. \quad (2.5)$$

Para quantificar as interações, existem duas taxas a considerar: taxa de espalhamento ou produção em um bin e a taxa de espalhamento e absorção. Os canais para isso são:

$$\Gamma_{in} = \frac{1}{\mathcal{F}_\nu} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu|_{in} = \frac{(1 - \mathcal{F}_\nu)}{\mathcal{F}_\nu} c j_\nu \quad (2.6)$$

e

$$\frac{1}{\mathcal{F}_\nu} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu|_{out} = c \chi_\nu. \quad (2.7)$$

As taxas são definidas nos canais *in* e *out* da equação de Boltzmann durante o equilíbrio, tal que existem diferentes energias de espalhamento. Para o espalhamento de ν_μ com elétron ou núcleon (s) com uma energia específica ε_ν , a média da energia térmica transferida pode ser definida:

$$\langle \omega \rangle_{in} = \frac{\int d^3 p'_\nu \omega \mathcal{F}'_\nu \mathcal{I}^{in}[\nu_\mu s \leftarrow \nu'_\mu s']}{\int d^3 p'_\nu \mathcal{F}'_\nu \mathcal{I}^{in}[\nu_\mu s \leftarrow \nu'_\mu s']} \quad (2.8)$$

e

$$\langle \omega \rangle_{out} = \frac{\int d^3 p'_\nu (1 - \mathcal{F}'_\nu) \mathcal{I}^{out}[\nu_\mu s \leftarrow \nu'_\mu s']}{\int d^3 p'_\nu (1 - \mathcal{F}'_\nu) \mathcal{I}^{out}[\nu_\mu s \leftarrow \nu'_\mu s']}. \quad (2.9)$$

As energias transferidas para o neutrino espalhado é $\omega = \varepsilon_\nu - \varepsilon'_\nu$, $\mathcal{I}^{in}$ e $\mathcal{I}^{out}$ são os canais de espalhamento dentro e fora do intervalo de energia. A consequência é o balanço de energia entre os canais *in* e *out* da equação de Boltzmann e a relação

entre eles é: $\mathcal{I}^{in} = e^{\beta\omega}\mathcal{I}^{out}$, onde $\beta = 1/k_B T$. T é a temperatura da matéria. As escalas de tempo são definidas por:

$$\Gamma_D = c\chi_\nu \left| \frac{\langle\omega\rangle_{out}}{\varepsilon_\nu} \right| \quad (2.10)$$

e

$$\Gamma_E = c\chi_\nu \left| \frac{\langle\omega^2\rangle_{out}}{\varepsilon_\nu^2} \right| \quad (2.11)$$

2.2.6 Espalhamento núcleon-núcleon $\nu_\mu n \longleftrightarrow e \nu_\mu p \longleftrightarrow \nu_\mu p$

A transferência de energia via neutrino-nucleon foi reavaliada por alguns autores [Burrows & Sawyer \(1998\)](#) e [Hannestad & Raffelt \(1998\)](#). A perda de energia é de $\sim 1\%$, as taxas são:

$$j_\nu = \frac{G^2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p}_\nu \mathcal{I}_{NC} \mathcal{F}'_\nu e^{\beta\omega} \quad (2.12)$$

e

$$\chi_\nu = \frac{G^2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p}_\nu \mathcal{I}_{NC} (1 - \mathcal{F}'_\nu), \quad (2.13)$$

onde $\vec{p}'_\nu$ é o momento do estado final do neutrino e ω é a energia transferida. $\mathcal{I}_{NC}$ é o núcleo da interação, dado em termos da função de estrutura:

$$\mathcal{I}_{NC} = S(q, \omega) [(1 + \mu)V^2 + (3 - \mu)A^2]. \quad (2.14)$$

$S(q, \omega)$ é a função dinâmica de estrutura e são os vetores $A = -1/2$ e $V = -1.26$.

$$S(q, \omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \mathcal{F}_\nu (1 - \mathcal{F}'_\nu) (2\pi) \delta(\omega + \varepsilon' - \varepsilon), \quad (2.15)$$

ou também:

$$S(q, \omega) = 2\text{Im}\Pi(q, \omega)(1 - e^{\beta\omega})^{-1}, \quad (2.16)$$

onde $q = |p_\nu - p'_\nu|$ ou em termos das energias: $q = [\varepsilon_\nu^2 + \varepsilon_\nu'^2 - 2\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu]^{1/2}$ é a magnitude do momento transferido, e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são as funções de distribuição dos núcleons incidente e espalhado. A parte imaginária da equação 15 é:

$$\text{Im}\Pi^{(0)}(q, \omega) = \frac{m^2}{2\pi\beta q} \ln \left(\frac{1 + e^{-Q^2 + \eta}}{1 + e^{-Q^2 + \eta - \beta\omega}} \right) \quad (2.17)$$

onde

$$Q = \left(\frac{m\beta}{2} \right)^{1/2} \left(-\frac{\omega}{q} + \frac{q}{2m} \right). \quad (2.18)$$

Combinando as equações acima na equação de Boltzmann para a evolução de $\mathcal{F}_\nu$ para o espalhamento neutrino-núcleon de corrente neutra:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu = \frac{G^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\varepsilon'_\nu \varepsilon_\nu'^2 \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{I}_{NC} [(1 - \mathcal{F}_\nu) \mathcal{F}'_\nu e^{-\beta\omega} - \mathcal{F}_\nu (1 - \mathcal{F}'_\nu)] \quad (2.19)$$

2.2.7 Espalhamento neutrino-elétron $\nu_\mu e^- \longleftrightarrow \nu_\mu e^-$

Para temperaturas e densidades encontradas em supernovas e protoestrelas de nêutrons, os elétrons são ultra-relativísticos. Um formalismo análogo ao que é usado para o caso anterior, leva a equação de Boltzmann para o espalhamento neutrino-elétron:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_\nu = \frac{G^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\varepsilon'_\nu \varepsilon_\nu'^2 \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{I}_{NC}^r [(1 - \mathcal{F}_\nu) \mathcal{F}'_\nu e^{-\beta\omega} - \mathcal{F}_\nu (1 - \mathcal{F}'_\nu)], \quad (2.20)$$

onde $\mathcal{I}_{NC}^r$ é o núcleo do espalhamento de corrente neutra para $\nu_s s$. Toda a física da interação está nesse termo e pode ser escrita como:

$$\Lambda^{\alpha\beta} = [2k^\alpha + (k \cdot q)g^{\alpha\beta} - (k^\alpha q^\beta - q^\alpha k^\beta) - i\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k^\mu q^\nu], \quad (2.21)$$

o qual é o quadrado da soma do elemento de matriz do spin para o processo de espalhamento em termos de k^α , e o quadrimomentum de ν_μ incidente, e $q^\alpha = (\omega, \vec{q})$ o quadrimomentum transferido. O núcleo de espalhamento contém o tensor de polarização retardado $\Pi_{\alpha\beta}^R$ que é diretamente análogo à polarização livre no caso não relativístico. O tensor retardado é

$$Im\Pi_{\alpha\beta}^R = \tanh\left(-\frac{1}{2}\beta\omega\right) Im\Pi_{\alpha\beta}, \quad (2.22)$$

sendo,

$$\Pi_{\alpha\beta} = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr[G_e(p) J_\alpha G'_e(p+q) J_\beta], \quad (2.23)$$

onde p_α é o quadrimomentum do elétron e J_α é o operador corrente. A função de Green (G_e e $G'_e(p+q)$), explicita a polarização, conecta os pontos no espaço de energia e caracteriza o efeito de interação dos elétrons relativísticos. O tensor de polarização pode ser escrito em termos de uma parte vetorial e uma parte axial, com um termo cruzado, tal que:

$$\Pi_{\alpha\beta} = V^2 \Pi_{\alpha\beta}^V + A^2 \Pi_{\alpha\beta}^A - 2V A \Pi_{\alpha\beta}^{VA}. \quad (2.24)$$

A parte vetorial da polarização pode ser escrita em termos das componentes independentes de Π_L e Π_T , com a condição que os elétrons sejam relativísticos ($v/c \sim 1$). $\mathcal{I}_{NC}$ pode ser escrito em termos de três funções de estrutura:

$$\mathcal{I}_{NC} = 8[AS_1(q, \omega) + S_2(q, \omega) + BS_3(q, \omega)](1 - e^{-\beta\omega})^{-1}, \quad (2.25)$$

onde $A = (4\varepsilon'_\nu \varepsilon_\nu + q_\alpha^2)/2q$ e $\beta = \varepsilon_\nu + \varepsilon'_\nu$.

2.2.8 Aniquilação elétron-pósitron: $e^+e^- \leftrightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$

Para obter a taxa volumétrica se faz necessário o uso da Regra de Ouro de Fermi, obtem-se:

$$Q = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\varepsilon} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2\varepsilon'} \frac{d^3\vec{q}_\nu}{(2\pi)^3 2\varepsilon_\nu} \frac{d^3\vec{q}_{\bar{\nu}}}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\bar{\nu}}} \varepsilon_\nu \left(\frac{1}{4} \sum_s |\mathcal{M}^2| \right) (2\pi)^4 \delta^4(P) \Xi[\mathcal{F}], \quad (2.26)$$

onde $\Xi[\mathcal{F}] = (1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{\bar{\nu}})\mathcal{F}_{e^-}\mathcal{F}_{e^+}$ e $\delta^4(P)$ é a conservação do quadrimomentum. Usando a expansão do *kernel* em séries de Legendre até primeira ordem, temos:

$$\frac{dQ}{d\varepsilon_\nu} = (1 - \mathcal{F}_\nu) \frac{\varepsilon_\nu^3}{8\pi^4} \int d\varepsilon_\nu \varepsilon_{\bar{\nu}}^2 \phi_o^p(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}}) (1 - \mathcal{F}_\nu), \quad (2.27)$$

onde $\phi_o^p(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}})$ é o *kernel* de produção de neutrinos expandido sobre toda energia do elétron. Com a emissividade extraída da equação de Boltzmann para aniquilação de pares (e^+e^-), temos explicitamente:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} \Big|_m = \frac{1}{4\pi} \frac{(2\pi)^3}{\varepsilon_\nu^3} \frac{dQ}{d\varepsilon_\nu}. \quad (2.28)$$

Para escrever o canal de saída para a absorção e e^+e^- aniquilação de pares, vamos escrever em termos de $\mathcal{F}_{e^-}$, $\mathcal{F}_{e^+}$, $\mathcal{F}_\nu$ e $\mathcal{F}_{\bar{\nu}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} = \frac{2G^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\varepsilon_\nu \varepsilon_{\bar{\nu}} \int_0^\varepsilon H_0(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}}, \varepsilon) [(1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{\bar{\nu}})\mathcal{F}_{e^+}\mathcal{F}_\nu - \mathcal{F}_\nu\mathcal{F}_{\bar{\nu}}(1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{e^+})], \quad (2.29)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\bar{\nu}}$ e

$$H_0(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}}, \varepsilon) = (V + A)^2 J_0^I(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}}, \varepsilon) + (V - A)^2 J_0^I(\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\bar{\nu}}, \varepsilon); \quad (2.30)$$

onde a taxa $Q_{\nu_\mu \bar{\nu}_\mu}$ é

$$Q_{\nu_\mu \bar{\nu}_\mu} \approx 2.09 \times 10^{24} \left(\frac{T}{MeV} \right)^9 f(\eta_e) \text{erg.cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (2.31)$$

e $f(\eta_e)$ é escrita em termos das integrais de Fermi:

$$f(\eta_e) = \frac{F_4(\eta_e)F_3(-\eta_e) + F_4(-\eta_e)F_3(\eta_e)}{2F_4(0)F_3(0)}, \quad (2.32)$$

e

$$F_n(y) = \int_0^\infty \frac{x^n}{e^{x-y} + 1} \quad (2.33)$$

2.2.9 Bremsstrahlung núcleon-núcleon

A importância do processo de bremsstrahlung como mecanismo de resfriamento de uma estrela de nêutrons tem sido revisitada recentemente. O processo tem recebido maior atenção, pois sua importância tem sido melhor estudada tanto para o resfriamento como para o transporte de energia [Thompson et al (2000) e Steiner et al (2001)]. O bremsstrahlung é composto pelos processos: nn, pp, pn e np. A taxa volumétrica é:

$$Q = \int \left(\prod_{i=1}^4 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3} \right) \frac{d^3 \vec{q}_\nu}{(2\pi)^3 2\varepsilon_\nu} \frac{d^3 \vec{q}_{\bar{\nu}}}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\bar{\nu}}} \varepsilon_\nu \left(s \sum |\mathcal{M}^2| \right) (2\pi)^4 \delta^4(P) \Xi[\mathcal{F}], \quad (2.34)$$

onde $\Xi[\mathcal{F}] = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 (1 - \mathcal{F}_3)(1 - \mathcal{F}_4)(1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{\bar{\nu}})$. O produto dos fatores do espaço de fase, a equação 33 inclui um termo para os quatro núcleons envolvidos no processo. 1 e 2 denotam o estado inicial dos núcleons e 3 e 4 denotam o estado final. s é o fator de simetria para férmions idênticos e $\vec{q}_\nu$ é o tri-momentum do neutrino, ε_ν é a energia do neutrino. O elemento de matriz do bremsstrahlung tem a seguinte forma:

$$\sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{A \xi \varepsilon_\nu \varepsilon_{\bar{\nu}}}{\varepsilon^2}. \quad (2.35)$$

Aqui não detalharemos muitos os cálculos para a evolução da distribuição de neutrinos no processo de bremsstrahlung. Temos casos para dois limites: degenerado e não degenerado, com isso temos as expressões:

1 - Degenerado

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} = K' s \xi \int d\varepsilon_{\bar{\nu}} dv_+ dv_{3c} (\varepsilon_{\bar{\nu}} \varepsilon)^2 v_+^{-1/2} e^{-\beta \varepsilon / 2} \Phi(\varepsilon, v_+, v_{3c}) [(1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{\bar{\nu}}) - \mathcal{F} \mathcal{F}_{\bar{\nu}} e^{\beta \varepsilon}], \quad (2.36)$$

onde os termos são:

$$K' = 2G^2 \left(\frac{m}{2\pi^2} \right) \left(\frac{f}{m_\pi} \right)^4 g_A T^{7/2}, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon, v_+, v_{3c}) = & \sinh^{-1}(f) \ln \left[\left(\frac{1 + \cosh(e_+)}{1 + \cosh(e_-)} \right) \left(\frac{\cosh(f) + \cosh(g_+)}{\cosh(f) + \cosh(g_-)} \right) \right] \\ & \times \sinh^{-1}(j) \ln \left[\left(\frac{1 + \cosh(h_+)}{1 + \cosh(h_-)} \right) \left(\frac{\cosh(j) + \cosh(k_+)}{\cosh(j) + \cosh(k_-)} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

e $e_\pm = (v_+^{1/2} \pm v_-^{1/2})^2 - \eta_2$, $f = v_+ + v_- - \eta_1/2 - \eta_2/2$, $g_\pm = \pm 2(v_+ v_-)^{1/2} - \eta_1/2 + \eta_2/2$, $h_\pm = (v_+^{1/2} \pm v_{3c}^{1/2})^2 - \eta_2$, $j = v_+ + v_{3c} - \eta_1/2 - \eta_2/2$, $k_\pm = \pm 2(v_+ v_{3c})^{1/2} - \eta_1/2 + \eta_2/2$. Onde v_i é o momentum adimensional (direção de incidência pela direção

de interação), η 's são as contribuições para a degenerescência nos processos de interação, de forma mais simplificada assumimos $\eta_1 = \eta_2 = \eta_n$ e $\eta_1 = \eta_2 = \eta_n$

2 - Caso não degenerado

No limite não degenerado, o produto dos termos $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2(1 - \mathcal{F}_3)(1 - \mathcal{F}_4)$ pode ser reduzido para $e^{\eta_1}e^{\eta_2}e^{-2(v_+-v_-)}$, que é independente do ângulo. Essa simplificação permite integrar sobre v_+ e v_{3c} . A emissividade total por unidade de volume para um simles par $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu$, ignorando o bloqueio no estado final, é:

$$Q_{\nu_\mu\bar{\nu}_\mu} \simeq 1.04 \times 10^{30} \xi(X\rho_{14})^2 \left(\frac{T}{MeV} \right)^{5.5} ergscm^{-3}s^{-1} \quad (2.39)$$

Para bremsstrahlung de nn e pp, X é a fração de nêutrons (X_n) e (X_p), respectivamente. Para o processo mixto (np), X^2 torna-se $(28/3)X_nX_p$. A emissividade diferencial ν_μ pode ser escrita:

$$\frac{dQ}{d\varepsilon_\nu} = C \left(\frac{Q_{\nu_\mu\bar{\nu}_\mu}}{T^4} \right) \varepsilon_\nu^3 \int_{q_\nu}^\infty \frac{e^{-q}}{q} K_1(q)(q - q_\nu)^2 dq, \quad (2.40)$$

onde $C \simeq 1.128$, $q_\nu = \varepsilon_\nu/2T$, $q = \varepsilon/2T$ e K_1 é a função de Bessel padrão modificada com argumento imaginário. A contribuição da equação de Boltzmann incluindo o Pauli blocking do ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} = C s \xi \int_0^\infty d\varepsilon_{\bar{\nu}} (\varepsilon_{\bar{\nu}}^2/\varepsilon) K_1 \left(\frac{\beta\varepsilon}{2} \right) e^{-\beta\varepsilon/2} [(1 - \mathcal{F}_\nu)(1 - \mathcal{F}_{\bar{\nu}}) - \mathcal{F}_\nu\mathcal{F}_{\bar{\nu}}e^{\beta\varepsilon}], \quad (2.41)$$

onde

$$C = \frac{G^2 m^{4.5}}{\pi^{6.5}} \left(\frac{f}{m_\pi} \right)^4 g_A T^{2.5} e^{\eta_1} e^{\eta_2} \simeq \frac{2G^2 g_A^2}{\pi^{3.5}} \left(\frac{f}{m_\pi} \right)^4 \frac{m^{1.5}}{T^{0.5}} n_1 n_2, \quad (2.42)$$

e,

$$e^{\eta_i} = \left(\frac{2\pi}{mT} \right)^{3/2} \frac{n_i}{2}. \quad (2.43)$$

Onde n é a densidade de núcleons. Para i, sendo 1 nêutrons e 2 prótons, dependendo de qual processo o bremsstrahlung é considerado.

2.2.10 Livres caminhos médios na presença de matéria de quarks

Opacidades de neutrinos são importantes na evolução da protoestrela de nêutrons contendo matéria de quarks. [Steiner et al \(2001\)](#). mostram que a presença de matéria exótica, em especial matéria de quarks, pode reduzir drasticamente a opacidade para um dado valor da entropia por bárion. Essa redução é sensível às condições termodinâmicas na fase de mistura quark-hádron. A evolução de uma protoestrela de

nêutrons, os neutrinos têm papel determinante nos mecanismos de difusão e resfriamento do objeto. Neutrinos são criados no momento da deleptonização, durante esse período, a entropia por baryon $Y_L = Y_e + Y_{\nu_e} \simeq 0.4$. Os neutrinos capturados no caroço, inibem o aparecimento de matéria exótica (hyperons, condensado de Bósons ou quarks), isso porque o potencial químico alcança valores elevados. Como a estrela resfria, o livre caminho médio para os neutrinos diminui, e os neutrinos escapam em um intervalo entre 20 – 60s. A difusão de neutrinos criados aquece a matéria elevando a entropia por bárion para ~ 2 . A estrela de nêutrons remanescente, depois desse processo é completamente deleptonizada, sua densidade $\rho \simeq 10^{15} \text{gcm}^{-3}$ e seu livre caminho médio $\simeq 1\text{m}$. O objeto pode permanecer uma estrela de nêutrons, resfriando até alcançar temperaturas inferiores a 1MeV ou se sua massa foi superior ao limite de Rohades-Ruffinni colapsará, tornando-se assim, um buraco negro.

Steiner et al (2001) mostram que as seções de choque de espalhamento e absorção para os neutrinos na fase quark-hádron para temperaturas de neutrinos degenerados podem ser reduzidos a duas integrais ou simples funções polinomiais e funções de distribuição térmicas. O cálculo da seção de choque por unidade de volume (inverso do livre caminho médio) é definido pela Regra de Ouro de Fermi:

$$\frac{\sigma}{V} = g \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} W_{f_i} f_2 (1 - f_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4), \quad (2.44)$$

onde g é o fator de degenerescência 6 ($3\text{cores} \times 2\text{spins}$), $f_i = [1 + \exp(E_i - \mu_i)]^{-1}$, onde E_i e μ_i é o potencial químico da partícula i , W_{f_i} é a probabilidade de transição somado sobre todos os estados iniciais e ponderado sobre todos os estados finais. Tal termo é dado como função dos momenta e das constantes $\mathcal{V}$ e $\mathcal{A}$

$$W_{f_i} = \frac{G_F^2}{E_1 E_2 E_3 E_4} \int_{M_2}^{\infty} dE_2 \int_0^{\infty} dE_3 S \frac{E_3}{E_1} |\vec{p}_2| |\vec{p}_4| [(\mathcal{V}^2 + \mathcal{A}^2)^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2)^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (\mathcal{V}^2 - \mathcal{A}^2)(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)] \quad (2.45)$$

Sem detalhar o formalismo vejamos as seções de choque para os processos envolvendo neutrinos:

(1) *Espalhamento de neutrinos degenerados*

$$\frac{\sigma_S}{V} = \frac{G_F^2 \mu_2^3}{5\pi^3} [(E_1 - \mu_1)^2 + \pi^2 T^2] \left(\frac{x E_1}{\mu_2} \right)^{1/2} [(\mathcal{V}^2 + \mathcal{A}^2)(10 + x^2) + 10(\mathcal{V}\mathcal{A})x], \quad (2.46)$$

onde $x = \min(E_1, \mu_2)/\max(E_1, \mu_2)$.

(2) *Espalhamento de neutrinos não degenerados*

$$\frac{\sigma_S}{V} = \frac{G_F^2 \mu_2^3 E_1^3}{5\pi^3}. \quad (2.47)$$

(3) *Absorção de neutrinos degenerados*

$$\frac{\sigma_A}{V} = \frac{G_F^2 \mu_3^3}{5\pi^3 \mu_1^2} (11\mu_4^2 + 5\mu_4\mu_3) [(E_1^2 - \mu_1)^2 + \pi^2 T^2] \quad (2.48)$$

(4) *Absorção de neutrinos não degenerados*

$$\frac{\sigma_A}{V} = \frac{16}{\pi^4} \alpha_c G_F^2 p_{F2} p_{F3} p_{F4} [E_1^2 + \pi^2 T^2]. \quad (2.49)$$

2.2.11 Espectros de energia

O espectro de energia dos ν 's de supernovas foi modelado por vários autores e discutiremos em detalhes nessa subseção. Faremos um resumo detalhado dos principais modelos e seus resultados.

Esta claro pela discussão anterior e pelos argumentos do livre caminho médio dentro do caroço colapsado que, em primeira aproximação, o espectro de neutrinos esperado é o de um *corpo negro de férmions*, ou seja, $\propto T^4$ com um prefator 7/8 que leva em conta o spin. Assim, a primeira abordagem a luminosidade será a de supor que $L = (7/8)4\pi R^2 \sigma T^4$. Porém, vários efeitos (degenescência parcial perto da neutrinosfera e outros) podem distorcer esta forma ideal, e de fato os espectros emergentes do cálculo numérico detalhado mostram um déficit de neutrinos de baixa e também de alta energia. Para levar em conta estes desvios, [Nadyozhin & Otroshenko \(1980\)](#) (NO) introduziram um dos primeiros modelos para o espectro de energia dos neutrinos provenientes de supernovas. Eles calcularam o espectro para ν_e e $\bar{\nu}_e$ em dois estantes específicos da evolução: $t_I = 0.04s$, o pico de luminosidade de neutrinos após o choque e $t_{II} = 5.1s$ no período de resfriamento da EN. Os espectros em ambas as épocas são aproximadamente térmicos (distribuições tipo Fermi-Dirac) e têm déficits de energia na parte mais alta das distribuições. Para a época I o déficit ocorre no momento da acreção de matéria. Para a época II, após a interrupção da acreção, o espectro torna-se aproximadamente térmico, sendo como se a estrela emitisse neutrinos como um corpo negro. [Nadyozhin & Otroshenko \(1980\)](#) propuseram a seguinte expressão analítica para o espectro na época II:

$$\frac{dN_\nu}{dE} = A \frac{E^2 e^{-\alpha x^2}}{1 + e^x}; \quad (2.50)$$

onde dN_ν/dE é o número de neutrinos produzido por intervalo de energia (E), A é uma constante de normalização, $x = E/kT$, k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura da neutrinosfera e α é o parâmetro que determina a opacidade. O corte gaussiano é usado para descrever o déficit de energia na região mais alta da distribuição. Os parâmetros deste modelo são mostrados na tabela 2.1.

Depois do trabalho de NO, vários autores calcularam o espectro de neutrinos para SN187A implementando a descrição da geração /propagação de neutrinos. O modelo de NO, com déficit de energias mais altas, apresenta resultados similares aos cálculos mais recentes entretanto, a energia total encontrada para os neutrinos é quase o dobro ($E \simeq 6.1 \times 10^{53} \text{ergs}$) do valor típico obtido por outros autores.

Tabela 2.1: *Parâmetros do espectro energético do modelo [Nadyozhin & Otroshenko (1980)].*

<i>Sabor</i>	$E_{tot}(MeV)$	α	$T(MeV)$	$< E > (MeV)$
ν_e	$1.1 \times 10^{53} \text{ergs}$	0.01	3.5	10.9
$\bar{\nu}_e$	10^{53}ergs	0.02	4.5	12.6
ν_μ	10^{53}ergs	0	8.0	24.6

Mayle et al (1987) (MSW), Janka & Hillebrandt (1989) (JH) e Myra & Burrows (1990) (MB), foram além e resolveram a equação de Boltzmann, MSW e MB usaram métodos numéricos e JH usaram Monte Carlo se aproximações analíticas no transporte de neutrinos. Todos os autores obtiveram os espectros com déficit de energia tanto na parte alta quanto na parte baixa de suas respectivas distribuições, quando comparadas com os espectros térmicos. Uma possível explicação para esses déficits está relacionada com a supressão séria causada pela emissão de neutrinos por interações fracas via $W^\pm$ é $\propto E^4$ (na região mais baixa) e a seção de choque dos neutrinos é $\propto E^2$ (na região mais alta), aumentando a opacidade.

JH propuseram assim um modelo com duas abordagens distintas: um corte gaussiano no modelo de NO, e introduziram uma pseudo-degenerescência (η) na distribuição de Fermi-Dirac:

$$\frac{dN_\nu}{dE} = A \frac{E}{1 + e^{x-\eta}}; \quad (2.51)$$

esse parâmetro η não tem significado físico, apenas parametriza a distribuição.

Em ambos os modelos, os parâmetros fundamentais: a temperatura da neutrinosfera T e β é o parâmetro de modificação em relação à distribuição de Fermi-Dirac perfeitamente térmica. Para $\beta = \alpha$ (corte gaussiano), temos o modelo de corte proposto por NO e para $\beta = \eta$ (pseudo-degenerescência) o modelo de degenerescência.

O trabalho de JH calculou os espectros para dois instantes diferentes: $t_1 = 0.012s$ e $t_2 = 0.315s$, pós-picos e pré-explosão, respectivamente. A descrição analítica é obtida através do par (T, β) , de maneira que os ajustes reproduzam os espectros simulados para a energia média ($< E >$) e a dispersão ($\sqrt{< E^2 > - < E >^2}$). Os valores obtidos pelo modelo de JH são mostrados na tabela 2.2:

O modelo de MB encontrou os espectros em vários instantes, do início do colapso ($t = 0$) até o final do mesmo ($t_f = 0.228s$). O $t = 0.156s$ compreendido entre o começo e o final do colapso, e o começo do instante da fase de resfriamento. O ajuste dos espectros foi feito usando o modelo η , como pode ser visto na tabela 2.3.

Os resultados da tabela acima mostram uma pequena variação dos parâmetros entre os períodos de início do resfriamento (t_r) e final (t_f) do colapso. O aumento/-diminuição da temperatura nos diversos instantes está relacionado com a fase de emissão de neutrinos e o resfriamento causado pela difusão dos mesmos.

Tabela 2.2: *Parâmetros do espectro energético do modelo [Janka & Hillebrandt (1989)].*

Tipo de ν		Modelo de α		Modelo de η		
ν_e	α	T	$\langle E \rangle$	η	T	$\langle E \rangle$
$\bar{\nu}_e(t_1)$	—	—	—	5.4	1.8	9.5
$\nu_\mu(t_2)$	2.6	12.8	8.1	3.5	1.9	8.1
$\bar{\nu}_e(t_2)$	1.9	19.2	14.4	3.4	3.4	14.4
$\nu_\nu(t_2)$	0.1	8.8	17.2	2.4	4.6	17.2

Tabela 2.3: *Parâmetros do espectro energético do modelo [Myra & Burrows (1990)].*

Sabor	η	$T(\text{MeV})$	$\langle E \rangle (\text{MeV})$
$\nu_e(t_r)$	3.2	2.4	9.8
$\nu_e(t_f)$	1.2	3.4	10.5
$\bar{\nu}_e(t_r)$	3.0	3.1	12.3
$\bar{\nu}_e(t_f)$	2.5	3.3	12.8
$\nu_\nu(t_r)$	4.1	5.1	23.2
$\nu_\nu(t_f)$	3.7	5.9	25.6

2.3 Supernova 1987A

Astrofísica de neutrinos teve um momento decisivo em 23 de fevereiro de 1987 com a observação de um surto de neutrinos em diversos experimentos por todo mundo proveniente da explosão de uma supernova na Grande Nuvem de Magalhães (LMC). A supernova 1987A foi descoberta por Ian Shelton, em 24.23 T.U.⁵ usando um telescópio de 10 polegadas em Las Campanas, Chile. Quase que simultaneamente, em 24.2, Oscar Duhalde relatou a observação no ótico. Na Nova Zelândia, o astrônomo amador Robert Jones reportou em 24.37 T.U. o evento durante sua rotina de monitoramento da LMC [Arnett et al (1989)].

As coordenadas astrométricas do objeto são R.A. = $5^{\text{h}}35^{\text{m}}49.992^{\text{s}}$, dec = $-69^{\circ}17'50.08''$ determinadas por mais diversos autores mostram que o objeto coincide com uma estrela do catálogo Sanduleak. A estrela que dá origem à supernova 1987 é chamada por Sanduleak (Sk) - 69202 e o evento de explosão simplesmente, SN1987A [Arnett et al (1989)].

2.3.1 Objeto antes da explosão: progenitor

A distância da LMC é bem conhecida sendo de $\simeq 50\text{kpc}$ com $m - M = 18.5$ [Humphreys & McElroy (1984) e Andreani et al (1987)]. Isto permite um conhe-

⁵Tempo Universal, a sigla em inglês U.T..

cimento observável detalhado da Sk - 69202 e da SN1987A. A melhor estimativa da magnitude bolométrica é 7.8, com o provável intervalo de 7.5 – 8.2. O valor de 7.9 é o valor preferido, a priori por [Humphreys & McElroy \(1984\)](#) para a explosão da supernova. A magnitude bolométrica de 7.8 corresponde à luminosidade de $4.0 \times 10^{38} \text{erg.s}^{-1}$ com o intervalo provável de $3.0 - 6.0 \times 10^{38} \text{erg.s}^{-1}$. Este intervalo de luminosidades equivale à Sequência Principal (SP) e, segundo modelos de evolução estelar [[Arnett et al \(1989\)](#)] a massa de Sk-69202 está compreendida entre $16 - 22 M_{\odot}$. A massa do caroço de He está compreendida entre $5 - 7 M_{\odot}$.

Observações também vinculam o raio de Sk-69202 [[Humphreys & McElroy \(1984\)](#)] a uma estrela supergigante B3 I com a temperatura superficial $\simeq 16000\text{K}$ compreendida no intervalo de $15.000 - 18.000\text{K}$. O raio estimado em $3 \times 10^{12} \text{cm}$ com um intervalo de $2 - 4 \times 10^{12} \text{cm}$. As observações no estágio de pré-supernova não vinculam a massa ao envelope de hidrogênio mas algumas discussões sugerem que o envelope seja $\simeq 10 M_{\odot}$. Com isso, é possível inferir a massa original de Sk-69202 em torno de $20 M_{\odot}$ sendo $6 M_{\odot}$ correspondendo ao caroço de hélio e $10 M_{\odot}$ com possíveis perdas de massa durante seu estágio evolutivo.

Algumas das propriedades de Sk-69202 concordam com a teoria de evolução estelar. Sk-69202 foi uma estrela massiva com luminosidade $\simeq 10^5 L_{\odot}$. A teoria prevê que objetos com massas $\simeq 8 M_{\odot}$ podem promover a ignição de estágios avançados de queima de elementos como: carbono, oxigênio e silício (que pode conduzir a formação de um caroço de ferro instável).

A estrela Sk-69202 surpreendeu teóricos pelo fato de não ter explodido como uma estrela supergigante vermelha, mas azul. Modelos sobre a onda de choque de supernovas SNII's e mostram que o raio da estrela deve ser grande, que seriam, provavelmente, supergigantes vermelhas. Objetos com grandes raios correspondem baixas densidades e temos curtos de difusão de radiação resultando que a energia térmica produzida pelo choque pode escapar antes de se converter em energia cinética na expansão de matéria. A SN1987A apresenta um desafio aos teóricos pelo fato da estrela no estágio pré-SN tinha um raio pequeno. Para explicar este fato, dois cenários foram propostos: i - mistura entre o caroço de He e o envelope de H mediante a rápida rotação e baixa metalicidade [[Saio et al \(1988\)](#), [Weiss et al \(1988\)](#) e [Woosley et al \(1988\)](#)]; ii - perda do envelope de H por uma estrela companheira próxima [[Hillebrandt & Meyer \(1989\)](#), [Podsiadlowski & Joss \(1989\)](#)].

Posteriormente, outras supernovas foram observadas tendo como progenitoras estrelas supergigantes azuis. [Utrobin & Chugai \(2011\)](#), mostram semelhanças entre a SN2000bc com SN1987A, onde a primeira seria uma versão “mais energética” da segunda e com progenitores de mesma natureza, isto é, supergigantes azuis. [Kleiser et al \(2011\)](#) chegaram as mesmas conclusões. [Pastorello et al \(2005\)](#) estudaram fotometria e a espectroscopia da SN1998A e encontraram semelhanças com SN1987A o que sugere um mesmo tipo de progenitor.

2.3.2 Objeto depois da explosão: remanescente

Vimos na seção anterior o que a natureza da estrela progenitora da SN1987A não é conhecida. Nesta seção discutiremos o que é sabido a respeito da estrela da remanescente de SN1987A. Alguns autores, como [Staveley-Smith et al \(1993\)](#) estudaram a estrutura do remanescente da SN1987A, através de imagens de alta resolução por um período de 600 dias e obtiveram um espectro com a frequência de 8.8GHz, o que sugere que a emissão em rádio, que seria produzida por elétrons relativísticos acelerados pela onda de choque da supernova.

[Middleditch et al \(2000\)](#) fizeram um monitoramento no infravermelho e no infravermelho próximo, pelo período de poucas semanas depois do “nascimento” até meados de 1996. Eles usaram fotômetros de alta velocidade e não encontraram uma claras evidências de que o remanescente da SN1987A possa ser um pulsar com emissão constante e intensidade estável. Encontraram uma emissão com período de modulação complexa e próximo a 467.5Hz – 2.14ms. Um objeto com um período de 2.14s com modulação complexa em 1 : 000s seria consistente com a precessão de uma estrela de nêutrons. Os autores sugeriram que o remanescente pode ser um pulsar ótico, porém, nunca houve confirmação independente desta detecção, suspeita-se que o sinal medido seja de natureza espúria.

Recentemente [Chan et al \(2009\)](#) especularam que o remanescente da SN1987A é uma estrela de nêutrons ou de um pulsar. Argumentaram que o objeto compacto sofreu uma transição de fase após a escala de tempo de captura de neutrinos (~ 10 s). Consequentemente, se o remanescente for uma estrela de quarks com equação de estado mais “leve” que a de uma estrela de nêutrons e a transição de fase poderia induzir o colapso, resultando em oscilações estelares de grande amplitude. Na defesa deste argumento, os autores usaram um código hidrodinâmico newtoniano tridimensional para estudar a evolução temporal da temperatura e densidade na neutrinosfera. Fluxos de pulsação extremamente intensos do neutrinos, com período de $\sim$ ms e com $E_\nu > 30\text{MeV}$, segundo o modelo, poderiam ser emitidos porque as oscilações da temperatura e da densidade estão fora de fase por quase 180° . [Chan et al \(2009\)](#) também sugeriu que a emissão de raios-X do objeto compacto remanescente estaria abaixo de $< 10^{34}\text{erg.s}^{-1}$ e pode ser um espectro térmico de bremsstrahlung para uma estrela de quarks com $T \sim 10^7\text{K}$.

De fato, não se sabe ao certo qual a natureza real do remanescente, há algumas poucas evidências que seja um pulsar. O conhecimento a respeito do objeto compacto resultante da explosão da SN1987A se mostra insuficiente, o que permite uma série de especulações deixando o problema em aberto.

2.4 Métodos de detecção de neutrinos

Em 1951, o físico americano Frederick Reines que trabalhava nos testes atômicos no atol de Eniwetok, junto com o físico Clyde Cowan contemplaram a possibilidade de estudar física fundamental. Eles trabalharam no Projeto Manhattan, em Los Alamos, onde haviam fontes de nêutrons e neutrinos. Eles escolheram pesquisar

neutrinos e usaram cintiladores orgânicos que permitiu a construção de um detector de neutrinos. Los Alamos era um local ideal para procurar neutrinos pois haviam reatores nucleares em funcionamento. Reines e Cowan procuraram evidências do processo $\nu + p \rightarrow n + e^+$ que emitiria uma luz no cintilador pela aniquilação do pósitron. Reines e Cowan instalaram um detector próximo ao reator Savannah River, que gerava um fluxo de $\sim 10^{13}$ por centímetros quadrados por segundo a uma distância de 11 metros. O experimento era constituído por três tanques que ficavam há 12 metros de profundidade, compostos por um cintilador orgânico e mapeado por 100 fotomultiplicadoras. A primeira detecção de neutrinos foi publicada por [Reines & Cowan \(1953\)](#), e observaram 3.0 ± 0.2 eventos por hora. Reines e Cowan deram o primeiro passo na abertura da “janela” de neutrinos, que deu origem a um novo campo de pesquisa.

A observação de neutrinos é feita com detectores (ou telescópios) que apresentam características muito particulares como a grande massa que é uma consequência direta da pequena seção de choque dos neutrinos⁶. Água (H_2O) é um bom exemplo desse material, rica em prótons e a interação é via decaimento β inverso ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$), as seções de choque destes processos podem ser vistos na figura 2.1. Outros exemplos de materiais usados em detectores de neutrinos são os cintiladores orgânicos. A idéia principal é aumentar a probabilidade de interação tanto com a massa do material que constitui o detector quanto com a molécula da substância que tenha uma seção de choque elevada para interações de neutrinos. A estimativa do número de eventos esperado num detector de neutrinos é:

$$N_\nu = \frac{\sigma_\nu F_\nu N_A M n_T}{A}. \quad (2.52)$$

Onde N_ν é o número de eventos esperados no detector, σ_ν é a seção de choque dos neutrinos para um dado processo, F_ν é o fluxo de neutrinos integrado no tempo, N_A é o número de Avogrado, M é a massa total do cintilador, n_T número de partículas-alvo⁷ e A é a massa molecular do cintilador. Como exemplo, se quisermos $N \sim 100$ eventos de $\bar{\nu}_e$ via decaimento β inverso ($\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^+$) em um detector de cintilador, $\sigma_\nu \sim 10^{-41} \text{cm}^2$, $F \sim 10^{11} \text{cm}^{-2}$ (para um colapso no centro galáctico), $A = 14$ (cintiladores tipo CH_2) e $n_T = 2$ (dois prótons), resultando em um detector $M \sim 1 \text{ton}$ de massa e um cubo com $\sim 10 \text{m}$ de lado [[Kemp \(2000\)](#)].

Outra característica essencial é a “blindagem” contra ruídos de naturezas distintas: decaimento radiativos de isótopos ativos nas vizinhanças do detector e radiação cósmica. Isto é feito analisando a taxa de ruído de fundo (background) nas proximidades do detector. Em relação à radiação cósmica, normalmente os detectores de neutrinos são construídos em minas desativadas ou galerias subterrâneas, a massa total de matéria (ar+terra+água) protege o experimento de ruídos de natureza cósmica altamente penetrante e suas respectivas partículas derivadas.

O último ponto importante diz respeito ao limiar de detecção. É importante que os experimentos tenham um limiar de energia na faixa do fenômeno que se

⁶É importante dizer que a seção de choque tem forte dependência com a energia.

⁷Nesta estimativa são usados somente prótons.

Figura 2.1: Seção de choque dos neutrinos $[\sigma_\nu(E)]$ pela energia (E) para alvos tipo H_2O em um detector tipo Cerenkov [Raffelt (1996)].

deseja observar. Por exemplo, explosões de supernovas encontra-se no intervalo entre 10 – 30 MeV, logo é importante que as curvas de eficiência estejam deste limite para cima. Isto pode ser visto na figura 2.2. O limiar de eficiência também funciona como uma espécie de blindagem, pois filtram os eventos de menor energia que normalmente são provenientes de fontes de ruídos.

Aém das características citadas acima, como massa, profundidade e material, detectores de neutrinos precisam ter uma aquisição eletrônica com buffers capazes de gerenciar grandes frequências ($\sim$ kHz) de eventos e pequeno tempo morto ($\sim$ 1ms), precisão temporal relativa e absoluta, boa resolução energética, baixos custos de manutenção e longo tempo de operação [Kemp (2000)]. Na seção a seguir faremos uma descrição detalhada das principais técnicas utilizadas nos experimentos de neutrinos, duas em especial foram utilizadas nos experimentos de Kamiokande II e IMB.

2.4.1 Cerenkov

Detectores tipo Cerenkov são constituídos por grande volume de água pura monitorado por uma rede de fotomultiplicadoras para a detecção de luz Cerenkov proveniente de processos, onde os secundários são emitidos ($e^\pm$) por interação de neutrinos com os “alvos”(prótons) que compõe as moléculas de água. A luz emitida pela propagação dos secundários na água é “observada” pelas fotomultiplicadoras, com isso é possível inferir a energia de cada evento, bem como a direção de chegada.

Figura 2.2: Curvas de eficiência $[\eta(\epsilon)]$ dos detectores Kamiokande II (KII), Baksan e IMB pela energia (ϵ) dos neutrinos. A importância em conhecer as curvas de eficiência é em saber qual o intervalo onde o detector apresenta maior eficiência, isto é, maior probabilidade de detecção [Loredo & Lamb (2002)].

Figura 2.3: Seções de choque (em unidades de 10^{-44}cm^{-2}) versus energia dos neutrinos (MeV) para os processos entre **a-g**. Os processos descritos são para os alvos: ^{12}C , ^{16}O , ^{18}O , ^{40}Ar e ^{37}Cl . $\nu_i\text{C}$ e $\bar{\nu}_i\text{C}$ se referem a processos de corrente neutra envolvendo neutrinos e antineutrinos respectivamente. Para baixas energias, o processo $\nu_e^{18}\text{O}$ (**3b**) a seção de choque para corrente carregada e para altas energias, a seção de choque de $\nu_e^{16}\text{O}$ (**3a**) domina os processos [Burrows et al (1992)].

Dois experimentos que utilizaram essa técnica são KII e IMB. Os principais processos são descritos abaixo [Burrows et al (1992)]:

- a. $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$, limiar de $\simeq 1.8\text{MeV}$ e corrente carregada;
- b. $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ e corrente carregada e neutra;
- c. $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$, corrente carregada e neutra;
- d. $\nu_e + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{F} + e^-$, limiar de $\simeq 15.4\text{MeV}$ e corrente carregada;
- e. $\bar{\nu}_e + ^{18}\text{O} \rightarrow ^{18}\text{F} + e^+$, limiar de $\simeq 1.66\text{MeV}$ e corrente carregada;
- f. $\bar{\nu}_e + ^{16}\text{N} \rightarrow \bar{\nu}_e + ^{16}\text{N}$ e limiar de $\simeq 11.4\text{MeV}$.
- g. $\nu_x + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{O}$ e corrente carregada;

A reação **a** tem maior seção de choque a excitação da reação **g** é menos provável com neutrinos de supernovas por conta de suas energias. Os processos de **a-c** são completados por espalhamento neutrino - elétron, para neutrinos com energias $\sim 40\text{MeV}$. Devemos notar que detectores Cerenkov de neutrinos são muito sensíveis a ν_μ 's e a ν_τ 's⁸ e, muito mais sensíveis a $\bar{\nu}_e$'s. A figura 2.3 [Burrows et al (1992)] mostra as seções de choque para cada um dos processos acima mostrados:

Onde o subíndice x representa neutrinos de todas as espécies. Devido à grande dispersão angular nos secundários o intervalo angular é $10^\circ - 30^\circ \pm 30\%$ e a energética é de $\sim 10\%$. Um problema da técnica dos detectores Cerenkov é o nível de ruído e o

⁸Neste caso sensíveis a detectores que usam água pesada [Kemp (2000)].

limiar energético de detecção, para neutrinos com $\sim 10\text{MeV}$ no máximo da curva de eficiência (vide figura 2.2) não é 100%. Outros problemas estão relacionados com a baixa sensibilidade a ν_μ e ν_τ quando o cintilador é H_2O . Uma solução criativa para isso foi adotado por SNO [Ewan (1992)], utilizando água pesada (D_2O) e com isso aumentado a sensibilidade aos ν_μ e ν_τ .

Há outros detectores a cintiladores orgânicos ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}$), como é o caso dos detectores LSD, Baksan, LVD, ASD, LSND e MACRO. As características desses detectores serão vistas a seguir.

A luz “observada” pelas fotomultiplicadoras é proporcional à energia de chegada das partículas, possibilitando a determinação da energia total do evento. A resposta temporal do experimento é rápida ($\sim 10\text{ns}$), por conta do cintilador. Maior massa das partículas-alvo possibilita um aumento da probabilidade de detecção de $\sim 30\%$. Grande eficiência na produção de luz, reduzindo o limiar energético inferior de detecção de neutrinos. E a boa “assinatura” do decaimento beta inverso, sendo indicados pela coincidência de $e^\pm$ com os γ 's em um tempo de $\sim 10\mu\text{s}$ [vide Kemp (2000)].

Outras técnicas que foram desenvolvidas dizem respeito a experimentos como o ICARUS com uma câmara que usa 3.6kton ar líquido, a reação é $\nu_e + {}^{40}\text{Ar} \rightarrow {}^{40}\text{K} + e^- \rightarrow {}^{40}\text{K} + \gamma$ com energia de $E_\gamma = 5.0\text{MeV}$. Mais detalhes sobre outros experimentos de neutrinos pode ser visto em Kemp (2000).

2.4.2 Kamiokande

Um surto de neutrinos foi observado no experimento Kamiokande II (KII) em 23 de fevereiro, às 7h 35 minutos e 35 segundos $\pm 1\text{min}$, durante um intervalo de tempo de 13s. KII observou 16 eventos de neutrinos, onde posteriormente, através de uma reanálise esse número diminuiu para 11. O surto de neutrinos foi detectado no decorrer dos dias 21 de Fevereiro às 16h09min até 7h31min 24 de Fevereiro de 1987. Os dois primeiros eventos chegaram com ângulos de $18^\circ \pm 18^\circ$ e $15^\circ \pm 27^\circ$, o que evidencia a observação de neutrinos provenientes da Grande Nuvem de Magalhães⁹. O experimento de Kamiokande foi instalado na mina de Kamioka a uma profundidade de 1000m a 300km a oeste de Tóquio - Japão. A coleta de dados foi iniciada em 4 de julho de 1983 e foi imediatamente reconhecido que o espectro de energia do decaimento dos múons podia ser observado no limite aproximado de 12MeV, dados abaixo desse valor foram considerados ruídos de fundo. Isto implica que existia uma possibilidade de determinar, em tempo real, a direção e o espectro de neutrinos solares - ${}^8\text{B}$ com energia superior a 14MeV. O ruído de fundo podia ser reduzido para um limiar inferior a poucos MeV's [Koshiba (1987)].

O detector KII entrou em funcionamento em 1986 para observar decaimento de núcleons e detecção de neutrinos solares - ${}^8\text{B}$ ($\sim 7.5\text{MeV}$). KII é descrito em detalhes na figura 2.4 e tendo como principais características: 2140ton de água pura e mapeado por um arranjo de fotomultiplicadoras com 20 polegadas de diâmetro que circula todo o detector internamente. As estruturas formadas pelas fotomultiplicadoras

⁹O termo em inglês *Large Magellanic Cloud*.

com área de $\sim 1\text{m}^2$ recobriam aproximadamente 20% da área interna do detector. O comprimento de atenuação da luz Cerenkov no tanque é da ordem de 45m. A espessura das paredes do detector, que blindava o ruído, corresponde a $\sim 1.4\text{m}$.

Neutrinos de diferentes sabores são detectados via espalhamento $\nu e \rightarrow \nu e$. A energia cinética desta reação e a subsequente multiplicidade do espalhamento do recuo do elétron preserva o conhecimento sobre a direção do neutrino incidente ($\sim 28^\circ$) e com energias próximas a 10MeV. Os $\bar{\nu}_e$'s foram detectados pela reação $\bar{\nu}_p^+ \rightarrow e^+ n$, para os prótons livres na água cuja seção de choque é ~ 100 vezes maior que a seção de choque para a reação de espalhamento eletrônico, onde os e^+ 's são produzidos isotropicamente. A luz Cerenkov produziu aproximadamente 26.3 disparos nas fotomultiplicadoras para fótons no limite energia 10MeV. A calibração do experimento foi feita por meio da reação $\mu \rightarrow e$ que libera um γ que sofre espalhamento Compton com elétrons, estes processos são $\sim 9.0\text{MeV}$. O detector é disparado por 20 fotomultiplicadores em $t \sim 100\text{ns}$, o tempo morto é de 50ns. O disparo das fotomultiplicadoras teve 50% de eficiência para elétrons produzidos com energia de 8.5MeV e 90% para elétrons energias de 14.0MeV sobre o volume do detector. A reconstrução dos vértices de eventos de baixa energia foram feitos através de um algoritmo baseado no tempo e na disposição espacial dos disparos das fotomultiplicadoras. Depois de estabelecido os vértices, os ângulos dos elétrons provenientes de cada evento são determinados. Segundo [Hirata et al \(1987\)](#) os eventos apresentados são consistentes com a distribuição volumétrica do detector.

Os eventos de KII satisfazem alguns importantes critérios técnicos: o número de fotoelétrons por evento dentro do detector não excedia < 170 , o que correspondia a um elétron com energia de $\sim 50\text{MeV}$, para excluir efeitos de ruídos proveniente de raios cósmicos. O número de fotoelétrons que corresponde a um evento na saída do detector não excedia 30, isto para excluir ruídos de natureza térmica na eletrônica do detector. E por último, o intervalo de tempo entre dois eventos tinha que ser $> 20\mu\text{s}$ para excluir o ruído do decaimento muônico.

A correlação de tempo curto para eventos de baixa energia são mostrados na figura 2.5 que mostra a sequência de eventos de baixa energia (linhas sólidas) e os eventos de múons de raios cósmicos (linhas pontilhadas). Os eventos no intervalo de 0.0 – 2.0s são mostrados na parte superior do gráfico. As propriedades dos doze eventos detectados no surto são mostrados na tabela 2.4, o evento número 6 é excluído pois $N_{\text{disparos}} < 20$, os eventos de 12 à 16 são considerados por muitos autores como duvidosos [[Loredo & Lamb \(2002\)](#)]. A distribuição angular dos eventos apresentada por [Hirata et al \(1987\)](#) é omitida em nossa análise apresentada no capítulo 4 para modelos de temperatura e raio, isto por que, os desvios associados aos ângulos de cada evento são elevados o que diminui a “certeza” a respeito dos mesmos.

Segundo [Hirata et al \(1987\)](#), os critérios para a distinção entre eventos do surto e possíveis fontes de ruídos. Os dados foram divididos em intervalos de 10s e um candidato a evento do surto foi definido como tendo uma multiplicidade ≥ 4 por 10s e com $N_{\text{disparos}} \geq 30$ por evento. Para um período estendido de tempo, a taxa de eventos para multiplicidade 3 pode ser descrita por uma distribuição de Poisson sobre a média dada por $\bar{n} = 0.0121$. Para um limite de disparos reduzido

Figura 2.4: Descrição esquemática de KII contendo ~ 2.14 kton de água pura. São 948 fotomultiplicadoras, sendo [Hirata et al (1987) e Koshiba (1987)].

Figura 2.5: A sequência de eventos no *surto* de neutrinos no intervalo de 45s em 7h35min35s em 23 de Fevereiro de 1987. O comprimento vertical de cada linha representa a energia relativa da cada evento. As linhas sólidas representam os elétrons de baixa energia em unidades do número de disparos das fotomultiplicadoras ($N_{disparos}$). As linhas pontilhadas representam os eventos de muôns em unidades de fotoelétrons. Os eventos de muôns $\mu_1 - \mu_4$ precedem o surto no tempo zero [Hirata et al (1987)].

para $N_{disparos} \geq 20$ por 10s a distribuição de Poisson para a taxa de eventos é $\bar{n} = 0.219$ sobre a multiplicidade 4, somente exceto o surto (com multiplicidade 9), as flutuações estatísticas para $N_{disparos} \geq 30$ (ou 6 para 10s) são menores que um para um período de tempo de 7×10^7 anos e $N_{disparos} \geq 20$ (9 para 10s) menores que um para 1×10^5 anos respectivamente.

Os processos associados à taxa de ruído por unidade de tempo foram estudadas para o momento do surto para a produção de uma cascata nuclear gerada por muóns energéticos. O ruído foi atribuído à spallation de ν 's solares via ^8B . A taxa relativa de spallation que produz eventos de e's de baixa energia $\simeq 10^{-3}$ por muón incidente. A distribuição de multiplicidades (≥ 3) para elétrons de baixa energia provenientes de muóns é 10^{-3} . O ruído de spallation apresentou com principais características uma função exponencial no tempo que reflete os tempos de vida de fragmentos de radioisótopos ^{16}O ($18 \pm 1.2\text{ms}$), ^{12}N e ^{12}B ($1.2 \pm 0.5\text{s}$) com taxas relativas de 2 : 1 e elétrons do decaimento β com energias observadas $\sim 15\text{MeV}$. A probabilidade dos $\mu_1 - \mu_4$ serem resultado do surto era extremamente baixa ($\simeq 3 \times 10^{-6}$) o que distingue esses eventos com ruídos e não com eventos provenientes do surto de neutrinos. Hirata et al (1987) concluíram que os eventos de KII eram de fato um surto, devido especificamente, pela estrutura dos eventos no surto, distribuição de energia dos eventos, distribuição volumétrica dos eventos no detector e pela correlação angular dos dois primeiros eventos (que ocorreu 18h antes da observação no ótico) de neutrinos observados. Os eventos observados por KII são mostrados na tabela 2.4.

2.4.3 IMB

Nesta seção descrevemos, primeiramente em detalhes o detector IMB e suas peculiaridades, a seguir são apresentamos os resultados do experimento, relativos ao surto de neutrinos da SN1987A. Estes dados são usados no capítulo 5 na análise bayesiana para modelos relativos à estrela de nêutrons remanescente.

O detector Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) foi projetado inicialmente para observar o decaimento de prótons e é localizado na mina de sal em Morton-Thiokol, Fairport em Ohio (EUA - 41.7°N e 81.3°O), com uma profundidade de 1570m de água. Consiste em um tanque retangular, com dimensões $22.5 \times 18\text{m}^3$ que contém água pura, com a massa de 6.8kton [Bionta et al (1987)]. Os seis lados do tanque são mapeados por 2048 fotomultiplicadoras de 8 polegadas distribuídos em um grid de 1m. Os tubos das fotomultiplicadoras são montados em placas de wave-shifter que aumentam a eficiência da coleta de luz por um fator 2. Cada tubo fornece a informação do sincronismo do tamanho do pulso para o vértice, direção e energia das partículas carregadas o que permite a reconstrução do “caminho” da interação. Para um período de tempo de 7h, um pulso de neutrinos é detectado, um quarto de fotomultiplicadora representa essencialmente, uma região contínua das paredes do tanque não foram operacionais por causa de uma falha de uma de quatro fontes de alimentação de alta tensão [Bionta et al (1987)].

O detector é disparado, quando ao menos, 25 fotomultiplicadoras coletam luz Cerenkov em 50ns, isto corresponde em torno de 40 ou mais fotomultiplicadoras

Tabela 2.4: *Eventos de neutrinos de Kamiokande II [Hirata et al (1987) e Loredó & Lamb (2002)]. A tabela abaixo mostra os valores relativos aos eventos de KII: tempo de chega de cada evento $t_i(s)$, energia $\varepsilon_i(MeV)$, desvio da energia $\sigma_i(MeV)$ e taxa de ruído relativo a cada evento $B_i(s^{-1})$.*

<i>Evento</i>	$t_i(s)$	$\varepsilon_i(MeV)$	$\sigma_i(MeV)$	$B_i(s^{-1})$
1	0.0	20.0	2.9	1.6×10^{-5}
2	0.107	13.5	3.2	1.9×10^{-3}
3	0.303	7.5	2.0	2.9×10^{-2}
4	0.324	9.2	2.7	1.2×10^{-2}
5	0.507	12.8	2.9	2.1×10^{-3}
6 ^a	0.686	6.3	1.7	3.7×10^{-2}
7	1.541	35.4	8.0	4.5×10^{-5}
8	1.728	21.0	4.2	8.2×10^{-5}
9	1.915	19.8	3.2	1.5×10^{-5}
10	9.219	8.6	2.7	1.5×10^{-2}
11	10.433	13.0	2.6	1.9×10^{-3}
12 ^a	12.439	8.9	1.9	1.6×10^{-2}
13 ^a	17.641	6.5	1.6 ^b	3.8×10^{-2}
14 ^a	20.257	5.4	1.4 ^b	2.9×10^{-2}
15 ^a	21.355	4.6	1.6 ^b	2.9×10^{-2}
16 ^a	23.814	6.5	1.6 ^b	3.8×10^{-2}

a. Eventos considerados de ruídos por vários autores. b. Valores obtidos pelo fit linear de σ_i versus ε_i .

disparando em 511ns na janela de gravação. Tipicamente, em torno de 15 fotomultiplicadoras que dispararam foram resultados de ruído aleatório. A eficiência do detector em função da energia observada é mostrada na figura 2.2. Múons de raios cósmicos dispararam o detector com uma taxa de $\sim 2.7\text{Hz}$. Eventos de neutrinos podem ser distinguidos pela reconstrução do vértice de interação do mesmo que ocorreu no volume de água do tanque, enquanto que o evento muônico ocorreu no topo ou nas paredes do detector, neste caso, as fotomultiplicadoras que dispararam no teto ou nas paredes do tanque. O tempo absoluto de um evento no tempo universal é $\pm 50\text{ms}$, o tempo relativo de cada evento é estimado com uma precisão de 1ms.

O sinal de neutrinos esperado para uma supernova é um surto de baixa energia que ocorre no período de poucos segundos. A procura por eventos de neutrinos de baixa energia, com um limite superior de 100 disparos de fotomultiplicadoras. A busca de neutrinos de SN1987A foi realizada no período compreendido entre $5^h.00^m.00^s$ de 23 de Fevereiro de 1987 (a observação durou $\sim 60\text{h}$), o número de eventos com menos de 100 disparos foram determinados no intervalo de 10s, para

$N_{disparos} \leq 5$ foi ajustada uma distribuição de Poisson com taxa média de $\bar{N} = 0.77$ de eventos por intervalo de 10s, entretanto entre $7^h.35^m.40^s$ e $7^h.35^m.50^s$ foram observados nove eventos.

Com o uso da capacidade de imageamento de caminhos de IMB, os nove eventos durante este intervalo de tempo foram estudados em detalhes para determinar se os mesmos seriam provenientes de partículas carregadas ou não, ou possivelmente, de disparos e/ou ruídos espúrios. Um evento foi identificado como sendo possivelmente múons e os outros oito eventos de neutrinos, os dados referentes a IMB são apresentados na tabela 2.5.

Tabela 2.5: *Eventos de neutrinos de IMB [Bionta et al (1987), Koshiba (1987) e Loredó & Lamb (2002)]. A tabela abaixo mostra os valores relativos aos eventos de IMB: tempo de chega de cada evento $t_i(s)$, energia $\varepsilon_i(MeV)$, desvio da energia $\sigma_i(MeV)$ e taxa de ruído relativo a cada evento $B_i(s^{-1})$.*

<i>Evento</i>	$t_i(s)$	$\varepsilon_i(MeV)$	$\sigma_i(MeV)$	$B_i(s^{-1})$
1	0.0	38.0	7.0	0.0
2	0.412	37.0	7.0	0.0
3	0.650	28.0	6.0	0.0
4	1.141	39.0	7.0	0.0
5	1.562	36.0	9.0	0.0
6	2.684	36.0	6.0	0.0
7	5.010	19.0	5.0	0.0
8	5.582	22.0	5.0	0.0

As energias foram determinadas (vide tabela 2.5) pela correção do pulso observado nas fotomultiplicadoras ponderada pelo ruído, efeitos geométricos e comparando com a simulação da produção de luz Cerenkov no detector. Os eventos de neutrinos foram causados pela interação de antineutrinos eletrônicos com os prótons da água, a energia dos processos são aproximadamente iguais as energias observadas pelos fótons coletados nas fotomultiplicadoras. As incertezas das energias dos neutrinos foram estimadas estatisticamente em $\pm 25\%$. A reconstrução das direções de cada evento têm uma incerteza $\pm 15^\circ$. O tempo morto do detector é $\sim 35ms$ depois de cada disparo e o tempo morto total durante o surto de $\sim 6s$ foi medido como $\sim 0.8s$.

Os eventos de neutrinos observados por IMB são consistentes com os dados de KII e com outros detectores (será discutido na seção a seguir). IMB observou neutrinos com energia média $\sim 32MeV$ superior as energias médias observadas em KII. IMB é mais sensível a neutrinos mais energéticos do que KII.

2.4.4 Baksan

Outros experimentos de neutrinos observaram, de forma independente, eventos que são atribuídos à SN1987A. O experimento de Baksan, localizado no Cáucaso

(ex-URSS) e é formado por 3156 tanques de cintilador (óleo-mineral) com uma fotomultiplicadora cada, totalizando uma massa de 330ton. Baksan que observou 6 eventos de neutrinos, com intervalo temporal de 9s e energias $12 \leq E_\nu \leq 23\text{MeV}$ [Alexeyev et al (1987)]. O primeiro evento de Baksan ocorreu 25s depois do primeiro evento de IMB, esta diferença temporal foi corrigida, posteriormente com a incerteza temporal de $\sim 50\text{s}$ no tempo absoluto do detector [Arnett et al (1989)]. O número de eventos esperados para Baksan é ~ 5 , o que contradiz o cálculo teórico que resulta em ~ 2 eventos. Algumas explicações foram levantadas a respeito desta discrepância: grandes flutuações estatísticas de pequenas amostras e incertezas relacionadas a filtragem do ruído de fundo no experimento. Por conta disso, os resultados de Baksan ficaram imersos em grandes dúvidas sobre sua veracidade. Utilizamos os dados de Baksan de forma complementar em nossa análise, os neutrinos são apresentados na tabela 2.6

Tabela 2.6: *Eventos de neutrinos de Baksan [Alexeyev et al (1987), Loredó & Lamb (2002) e Koshiba (1987)]. A tabela abaixo mostra os valores relativos aos eventos de Baksan: tempo de chega de cada evento $t_i(s)$, energia $\varepsilon_i(\text{MeV})$, desvio da energia $\sigma_i(\text{MeV})$ e taxa de ruído relativo a cada evento $B_i(s^{-1})$.*

<i>Evento</i>	$t_i(s)$	$\varepsilon_i(\text{MeV})$	$\sigma_i(\text{MeV})$	$B_i(s^{-1})$
1	0.0	12.0	2.4	8.4×10^{-4}
2	0.435	17.9	3.6	1.3×10^{-3}
3	1.710	23.5	4.7	1.2×10^{-3}
4	7.687	17.6	3.5	1.3×10^{-3}
5	9.099	20.3	4.1	1.3×10^{-3}

2.4.5 Outros detectores

Outro experimento que observou o surto de neutrinos da SN1987A é o Liquid Scintillator Detector (LSD), que foi uma colaboração entre italianos e russos instalado em um túnel sob o Monte Bianco (entre a França e Itália), com 90ton de cintilador líquido (solvente à hidrocarboneto) distribuídos em 72 módulos, cada um monitorado por 3 fotomultiplicadoras. LSD observou 5 eventos de neutrinos atribuídos à SN1987A, em 8s e com energias compreendidas entre $7 \leq E_\nu \leq 11\text{MeV}$ [Dadykin et al (1987)].

Os dados de LSD são considerados duvidosos por conta da antecedência da observação do surto de neutrinos que é 4h42min em relação ao eventos de KII e IMB, dentro desta análise, a temperatura espectral dos ν 's de LSD, e consequentemente a energia média dos neutrinos é considerada baixa ($T_\nu \sim 1\text{MeV}$). Haxton (1987) sugeriu que um surto rico em neutrinos muônicos e pobre em neutrinos e antineutrinos eletrônicos produziria interações mediadas por corrente neutra nos sabores não eletrônicos [Kemp (2000)]. Em relação a divergência temporal, de Rújula (1987) sugeriu um surto duplo com a formação inicial de uma estrela de nêutrons e o segundo

com a formação de um buraco negro, a força desta hipótese está na não confirmação da natureza da estrela remanescente (vide seção 2.3.2).

2.5 Algumas propriedades dos neutrinos

Nesta seção abordaremos rapidamente algumas propriedades relativas aos neutrinos e sua detecção nos diversos experimentos.

2.5.1 Número de eventos esperados no detector

O número de eventos esperados em um detector de neutrinos pode ser calculada de forma simplificada através da seguinte expressão [Kemp (2000)]:

$$N_\nu = \frac{1}{2n_p} \frac{\Delta E(1 - f_\nu)}{< E_\nu >} \frac{1}{4\pi D^2} \times \bar{\sigma}_{xp}. \quad (2.53)$$

Onde f_n é a fração da energia dos surto, D é a distância estimada entre SN1987A e a Terra ($\sim 50\text{kpc}$), n_p é o número de prótons alvo no detector e $\bar{\sigma}_{xp}$ é a seção de choque média para os processos de interação de neutrinos com os prótons¹⁰.

O número de eventos esperados para KII está compreendido entre ~ 13 (algo consistente com as observações). A seção de choque média para os procesos de $\nu - p$ é obtida por meio da mediana da distribuição que é função da energia. Uma consequência direta, é não levar em conta o limiar inferior de detecção para KII é $\sim 4\text{MeV}$ (vide figura 2.2). Para IMB o número de eventos esperados está entre ~ 17 , foi observado metade deste número e pode ser relacionado com o fato da curva de eficiência para o limiar de detecção é de $\sim 20\text{MeV}$, o que “filtra” eventos com energias abaixo deste valor e sofre do mesmo efeito, de forma mais acentuada, do citado para KII, o que determina a discrepância entre os eventos observados e ou previstos pela teoria.

2.5.2 Limites de massas dos neutrinos

Zatsepin (1968), num trabalho pioneiro, determinou o limiar inferior para as massas dos neutrinos. Ele assumiu que os neutrinos têm massa finita e que somente os mais energéticos chegariam à Terra, o que pode ser visto na expressão abaixo:

$$m_\nu = \frac{2c\Delta t}{D^2} \left(\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 - E_2} \right). \quad (2.54)$$

Onde m_ν é a “massa” dos neutrinos que chegam, c (ele supôs que os neutrinos são ultra-relativísticos) é a velocidade dos neutrinos, D é a distância da fonte (no caso SN1987A), Δt é o intervalo de tempo entre a chegada dos neutrinos ν_1 e ν_2 , E_1 e E_2 são suas energias respectivamente. Ele assumiu que energia média dos neutrinos na emissão é $\sim 10\text{MeV}$, logo

$$m_\nu \leq 16\text{eV}. \quad (2.55)$$

¹⁰A seção de choque média é $\sim 10^{-45}(\text{E/MeV})^2\text{cm}^2$.

Resultados mais recentes obtidos por [Loredo & Lamb \(2002\)](#) apontam que o valor a massa de repouso do antineutrino eletrônicos é de:

$$m_\nu \leq 5.7\text{eV}. \quad (2.56)$$

2.5.3 Efeitos de mistura nos neutrinos de SN1987A

Oscilação de neutrinos ou mixing é um fenômeno quântico proposto por Pontecorvo em 1950 [[Giunti & Chung \(2007\)](#)] por analogia com a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$. Conceitualmente, as oscilações são geradas por interferência de diferentes neutrinos massivos, que são produzidos e detectados coerentemente pela pequena diferença de massa. A probabilidade de oscilação entre neutrinos de sabores diferentes (ν_e , ν_μ e ν_τ e suas respectivas antipartículas) é dada por:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) \sim \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta m^2 L}{2E} \right) \right]. \quad (2.57)$$

Onde θ é o ângulo de mixing que muitos autores assumem como sendo $0 < \theta < \pi/4$, Δm é a diferença de massas entre neutrinos de sabores diferentes (eV), L é a distância entre a fonte e o detector (km) e E a energia do neutrino (MeV). A probabilidade é a mesma tanto para transições $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$, $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$, $\nu_{\bar{\alpha}} \rightarrow \nu_{\bar{\beta}}$ e $\nu_{\bar{\beta}} \rightarrow \nu_{\bar{\alpha}}$. Um problema no cálculo da probabilidade de oscilação é o fato dos neutrinos não terem massas definidas. O efeitos de oscilação de neutrinos nos dados observados da SN1987A são muito pouco prováveis, isto porque para que haja mudança de sabor entre dois neutrinos, depende de $\sim U_{eh}$ que é o elemento de matriz do efeito de mistura para a transições $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ou $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$. Os dados de KII e Baksan não sofreram quaisquer interferências de efeitos de mistura por conta que os detectores são pouco sensíveis a neutrinos pesados (ν_μ e ν_τ) e porque ambos têm altas taxas de ruído. Para o caso de IMB que tem estimativas negligenciáveis para ruído a colaboração não encontrou nenhum neutrino horas depois do surto, o que afasta a hipótese da presença de mudança de sabor. Efeitos de mistura nos neutrinos de SN1987A para transições $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ e/ou $\nu_e \rightarrow \nu_\tau$ são pouco prováveis porque implicaria em um espectro para os ν 's mais energético que o observado na Terra [[Giunti & Chung \(2007\)](#), [Costantini et al \(2004\)](#), [Kachelrieß et al \(2001\)](#) entre outros].

CAPÍTULO 3

Estatística

“The frequency concept based on the notion of limiting frequency as the number of trials increases to infinity, does not contribute anything to substantiate the application of the results of probability theory to real practical problems where we always have to deal with a finite number of trials”.

Andrei Nikolaevich Kolmogorov

Conteúdo

3.1	Objetivos	58
3.2	Considerações iniciais	58
3.2.1	Considerações sobre probabilidade	58
3.3	Aspectos históricos	60
3.3.1	Paradigma frequentista	62
3.3.2	Paradigma bayesiano	62
3.3.3	Estatística frequentista versus bayesiana	63
3.4	Análise de modelos paramétricos	65
3.4.1	Marginalização de parâmetros	66
3.4.2	Estimativa de um parâmetro	66
3.4.3	Comparação de modelos	67
3.5	Modelando um detector de neutrinos	68
3.5.1	Função de verossimilhança para um detector real	71
3.5.2	Função de verossimilhança para um detector com sinal isotrópico	72
3.6	Modelagem da taxa de produção de léptons	73
3.6.1	Componente de resfriamento	73
3.6.2	Componente de acreção	73
3.6.3	Propagação do sinal	74
3.6.4	Produção de léptons no detector	74

3.1 Objetivos

Neste capítulo discutiremos um pouco de teoria de probabilidades, as diferenças entre estatística bayesiana e frequentista, o teorema de Bayes e sua aplicação na análise de modelos paramétricos no contexto de sinais de neutrinos e na distribuição de massa das estrelas de nêutrons.

3.2 Considerações iniciais

A Estatística é a ciência que se dedica ao desenvolvimento e ao uso de métodos para a coleta, resumo, organização, apresentação e análise de dados. O problema fundamental pode ser resumido a seguir:

“The fundametal problem towards which the study of statistics is addressed is that of inference. Some data are observed and we wish to make statments, inferences, about one or more unknown features of the physical system which gave rise to these data” O’Hagan 1994.

Um aspecto essencial da estatística é a busca por uma análise descritiva a cerca observações pregressas com o propósito de inferir ou predizer algo sobre os fenômenos de mesma natureza (Robert 1994). Essa abordagem tem grande importância para as ciências e as demais áreas do conhecimento humano, permitindo assim as diversas áreas do conhecimento tratarem por de um número finito de observações (amostra) a respeito de um certo fenômeno e buscar correlações entre parâmetros, padrões e interpretar os resultados, isso é feito por meio da inferência.

Uma visão comum a respeito da Estatística é que se configura como uma “indústria” de resultados onde os métodos são criados sem uma razão aparente, e que valoriza a produção em massa de dados. Para muitos cientistas o uso da metodologia estatística se restringe apenas o grau de incerteza sobre um fenômeno estudado. A dificuldade da análise de dados está no fato em que muitos eventos da natureza não podem ser controlados e observados um número convenientemente repetido de vezes, e portanto, a estimativa do intervalo de confiança não pode ser bem determinado na abordagem frequentista.

Abordagem de inferência bayesiana é notavelmente direta e intuitiva no tratamento de problemas aplicados, os físicos têm o entendimento estatístico nos limites de “barras de erros”, em teoria bayesiana isso fica mais claro por meio da distribuição *a posteriori*, enquanto na estatística clássica isso se perde completamente.

3.2.1 Considerações sobre probabilidade

Probabilidade é comumente descrita como um ente abstrato que permite medir o grau de incerteza de problemas reais, sendo conduzido à linguagem matemática por meio de funções. Isso é possível por meio da aximática de Kolmogorov, sendo definida como uma função matemática que aborda um espaço fundamental, tal qual as seguintes definições:

Axioma 1: $P(A) \geq 0 \forall A \subseteq \Omega$;

Axioma 2: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$;

Axioma 3: $P(\Omega) = 1$.

A axiomática de Kolmogorov é definida sobre o espaço fundamental Ω , onde os termos A e B são subconjuntos desse espaço.

Não há uma definição epistemológica que seja completamente aceita por estatísticos, sendo considerado um problema em aberto. Existem correntes como a interpretação frequentista (Venn, von Mises, Reichenbach, etc), que foi adotada quase unanimemente na primeira metade do século é a da frequência relativa. Probabilidade frequentista ou aleatória é tradicionalmente descrita como *frequência relativa de ocorrências de um evento pelo número de eventos possíveis*¹, em uma sequência de experimentos idênticos e repetidos ou em um ensemble de sistemas identicamente preparados. A visão probabilística clássica, também conhecida como frequentista, clássica ou ortodoxa é base dos procedimentos estatísticos normalmente em uso nas ciências físicas.

A interpretação lógica (Keynes, Jeffreys, Carnap, etc.) ou necessária defende que a probabilidade representa uma relação lógica entre uma proposição ou um conjunto de proposições - a evidência - e outra proposição - a hipótese - e mede o grau de implicação (grau de confirmação de Carnap) da hipótese pela evidência. O grau de implicação é único, racional e impessoal. No entanto, sendo de difícil mensuração, torna a interpretação pouco operacional, exceto nos casos extremos: se a hipótese é falsa, sua probabilidade é zero, caso contrário, se a hipótese for verdadeira a probabilidade é um.

A interpretação subjetivista ou personalista (Ramsey, de Finetti, Savage, etc.) considera que probabilidade representa uma relação entre evidência e a hipótese e mede o grau de credibilidade que uma dada pessoa em posse de uma evidência atribui à hipótese. Supõe-se que coerência na análise e nada impede que pessoas diferentes, à luz da mesma evidência, obtenham graus de credibilidade diferentes à mesma proposição. Uma das vantagens dessa abordagem é poder aplicá-las em situações não repetitivas.

Probabilidade bayesiana aborda como *a real medida da plausibilidade de uma proposição quando o conhecimento a respeito dela não nos permite estabelecer a veracidade ou a falseabilidade com certeza*. A medida é estabelecida em uma escala, onde 1 representa o grau máximo da veracidade de uma proposição, enquanto 0 representa a falseabilidade. Esta definição tem uma óbvia conexão com o uso coloquial da palavra "probabilidade". De fato, a visão de Laplace sobre a teoria da probabilidade é um cálculo reduzido do senso comum. Para os bayesianos, então, a teoria de probabilidades é um tipo de epistemologia quantitativa, uma codificação numérica do conhecimento.

Poucos trabalhos em estatística para ciências físicas abordam as controvérsias existentes entre as diferentes abordagens frequentista e bayesiana, e tratam probabi-

¹Eventos aleatórios são descritos por distribuições de Poisson e são classificados como homogêneos (taxa de ocorrência constante) e inhomogêneos (taxa de ocorrência variável).

lidade somente no âmbito da região de confiança (Bevington *et al.* 1969), sem entrar nos aspectos mais complexos como metodologia na complicada discussão frequentista. Outros nem citam a existência dessa controvérsia e citam somente pequenas diferenças entre as abordagens (Eadie 1971 *et al.*, Martin 1971 and Mendenhall *et al.* 1981). A forma “correta” de interpretar probabilidade, reflete somente as diferentes escolhas dos tipos de problemas abordados e deixa em aberta a questão sobre a abordagem mais apropriada para esses problemas.

3.3 Aspectos históricos

Problemas estatísticos emergiram de jogos de azar e têm entretido mentes e pensadores durante centenas de anos. O primeiro cálculo formal de probabilidades foi feito por Bernoulli em sua obra *Ars Conjectandi* (Arte da Conjectura, Bernoulli 1713). Em sua obra, Bernoulli deixa clara a distinção entre probabilidade relativa à frequência, derivando a relação entre a probabilidade de ocorrência de um simples evento e a frequência da ocorrência de um grande número de eventos independentes, hoje conhecido como teorema de Bernoulli ou lei dos grandes números.

O teorema de Bernoulli diz que se a probabilidade p de obter um resultado em um evento é conhecido, a frequência relativa da ocorrência de um grande número de eventos que irá convergir para uma probabilidade p . Bernoulli tratou o problema de forma inversa: supondo que a probabilidade de ocorrer um evento é desconhecida, a observação de n eventos em N experimentos independentes feitos repetidamente, o que se pode dizer a respeito do valor da probabilidade? Bernoulli nunca resolveu esse problema, mas seu interesse enfatizou a distinção feita por ele e seus contemporâneos entre o conceito de probabilidade (“grau de certeza”) e frequência.

A solução do problema de Bernoulli foi publicado no trabalho do reverendo Thomas Bayes (1763) após sua morte e foi redescoberto por Laplace em uma forma mais geral e é conhecido como o *Teorema de Bayes*, sendo derivado de axiomas para probabilidades condicionais:

$$p(A|B) + p(\bar{A}|C) = 1; \quad (3.1)$$

é a regra da soma e $p(A|B)$ é a probabilidade A dado B , quando ambas as proposições são verdadeiras. $p(\bar{A}|C)$ é a probabilidade A não verdadeiro dado C . A equação 3.1 é válida para quaisquer proposições B e C desde que satisfaçam as condições citadas acima.

$$p(AB|C) = p(A|BC)p(B|C); \quad (3.2)$$

é a regra do produto e $p(AB|C)$ é a probabilidade onde A e B verdadeiras, se e somente se C verdadeiro. $p(A|BC)$ é a probabilidade onde a proposição A é verdadeira dado BC verdadeira e $p(B|C)$ é a probabilidade de B dado C , ambas verdadeiras. Todas as relações entre as probabilidades condicionais podem ser derivadas dessas

duas relações, inclusive o teorema de Bayes,

$$p(A|BC) = p(A|C) \frac{p(B|AC)}{p(B|C)}, \quad (3.3)$$

teorema de Bayes que é uma consequência do segundo axioma. A teoria da probabilidade bayesiana é chamada assim porque faz uso direto desse teorema para acessar hipóteses fazendo escolhas sobre as proposições A , B e C . Alterando a notação, temos que $A \leftarrow H$ é a hipótese que desejamos acessar, $B \leftarrow D$ que são os dados relevantes sobre H e $C \leftarrow I$, com essas considerações o teorema de Bayes adquire a seguinte forma:

$$p(H|DI) = p(H|I) \frac{p(D|HI)}{p(D|I)}, \quad (3.4)$$

onde $p(H|DI)$ é a distribuição ou probabilidade *a posteriori*, $p(H|I)$ é a distribuição *a priori*, $p(D|HI)$ é a distribuição dos dados ou função de verossimilhança² e $p(D|I)$ é somente, um número. A distribuição *a priori* ajusta a plausibilidade da avaliação sobre o estado do conhecimento nas considerações das hipóteses e na aquisição dos dados pelo observador. Em outras palavras, diz respeito aos dados ou a probabilidade “posterior dos dados” da hipótese H ser obtida multiplicando os “dados anteriores” ou a probabilidade *a posteriori*, para a probabilidade dos dados assumindo ser verdadeira a hipótese H , dividindo pelo termo de normalização $p(D|I)$. Por essa razão, o fator $p(D|HI)$ é chamada de função de verossimilhança e é denotada aqui por $\mathcal{L}(H)$, onde é considerada como uma distribuição sobre as hipóteses. Sendo, por isso que $p(D|I)$ torna-se e é chamada de verossimilhança global e usualmente ignorada por ser um termo que normaliza a distribuição *a posteriori*³.

Algumas considerações emergem do teorema de Bayes. Primeiramente, que não há nada temporal na construção da teoria de probabilidade. O uso dos termos “antes dos dados”, “depois dos dados”, “probabilidade a priori” e “probabilidade a posteriori”, não se referem à passagem de tempo precisamente, distribuição a priori é a probabilidade atribuída antes da consideração dos dados e analogamente para os outros termos. A informação anterior I define o que se sabe a respeito do sistema e define o estado de ignorância e H representa as hipóteses alternativas consideradas verdadeiras na elaboração das premissas.

Na resolução do problema, Bernoulli usou o caso especial para avaliar diferentes proposições em torno do valor do resultado da probabilidade na observação de um resultado, dada a relativa frequência de ocorrência em um número finito de observações (Bayes 1763 & Jaynes 1978). Posteriormente e de forma independente, Laplace desenvolveu a teoria de probabilidades usando o teorema de Bayes. Um exemplo no contexto astrofísico, seria usar o teorema de Bayes para estimar as massas dos planetas, quantificando as incertezas das massas nos erros associados às observações. Tais cálculos ajudariam a escolher quais problemas de mecânica celeste

²O termo em inglês *verossimilhança* e não deve ser confundido com a função de verossimilhança frequentista.

³Ignorar $p(D|I)$ passa, quase sempre, pela dificuldade numérica em calculá-la.

estudados permitiriam identificar significativas perturbações e fazer previsões que seriam testadas por observadores.

3.3.1 Paradigma frequentista

O paradigma frequentista consiste na construção de funções de variáveis randômicas que de algum modo são mensuráveis, isto é chamado de *fazer a estatística dos dados*. A estatística, como é familiarmente conhecida, analisa o conjunto de dados (que pode ser uma amostra sistemática sobre um conjunto universo previamente definido) através da média dos dados, análise de variância, χ^2 , determinação do intervalo de confiança, etc. Sendo a estatística uma função de variáveis aleatórias, esta distribuição de probabilidades assume que as hipóteses de interesse são verdadeiras e podem ser calculadas. Uma hipótese avalia por comparação o valor observado da estatística com a observação de frequências em repetidos experimentos.

Intuitivamente, fica claro que a construção de estatística para problemas simples, como a medida de uma grandeza qualquer se referem normalmente à uma distribuição gaussiana. Em problemas de maior complexidade, existe raramente uma liberdade de escolha para a estatística. Um problema específico, tratado à luz de procedimentos estatísticos distintos podem gerar diferentes resultados, por exemplo, a estimativa de valor de um parâmetro onde é possível usar o método dos momentos, o método da máxima da verossimilhança ou mais especificamente, um método *ad hoc*. O tratamento de dados frequentista é baseado em critérios e princípios que incluem imparcialidade, eficiência, consistência, coerência, princípio da condicionalidade, verossimilhança e suficiência.

Toda metodologia utilizada na abordagem frequentista visa determinar o valor médio de um parâmetro e quantificar a incerteza da medida. Interpreta-se o resultado como sendo o “valor mais provável” no intervalo determinado pela variância. Uma boa estatística é feita com uma boa base de dados (amostragem sistemática) e um número considerável de medidas. Os dados de uma amostra precisam “reproduzir” com fidelidade o conjunto universo do qual faz parte e o número de dados precisa ser suficientemente grande para que a variância tenha um valor razoável. Portanto, não se faz uma “boa estatística” sem respeitar essas duas condições fundamentais. O subjetivismo dos dados, isto é, o contexto onde eles foram medidos fica puramente à critério do experimentador e não são levados em conta na construção da função de probabilidade. Outro aspecto não muito bem tratado pela abordagem frequentista é a avaliação de hipóteses e a incerteza em um dado problema. Por exemplo, quando um júri decide se um acusado é culpado ou inocente leva-se em consideração o conhecimento prévio ou *à priori* sobre cada uma das hipóteses: culpa ou inocência. Do ponto de vista frequentista isso seria tratado como probabilidade de ser culpado ou inocente, isso não é claro nesta abordagem.

3.3.2 Paradigma bayesiano

Para Lindley (1990) a substituição do paradigma frequentista pelo bayesiano

representa uma verdadeira revolução científica no sentido de Kuhn. A idéia de probabilidade como grau de credibilidade é importante para entender o paradigma bayesiano. De Morgan (1847) em seu livro *The Formal Logic*(1847), afirma: (1) a probabilidade identifica-se com um grau de credibilidade; (2) os graus de credibilidade podem medir-se; (3) os graus de credibilidade pode identificar-se com a credibilidade que um indivíduo (entenda-se observador) atribui a ela. A idéia de coerência de um sistema de graus de credibilidade está na atitude do observador ao apostar na veracidade de uma dada proposição está associada com o grau de credibilidade que esse observador lhe atribui. Se ele declara vantagens (*odds*) - a favor da veracidade da proposição contra a não veracidade da mesma Ramsey (1980).

O teorema de Bayes definido na equação 3.4 tem a estrutura das proposições lógicas e define o grau de plausibilidade das hipóteses. Isto é especificado por I no teorema de Bayes e permite avaliar cada uma delas quando se calcula a distribuição de probabilidades *a posteriori*. A probabilidade *a posteriori* que depende do produto da distribuição *a priori* (hipóteses I) ou conhecimento prévio a cerca do problema) e da função verossimilhança ou distribuição dos dados.

Avalia-se o fenômeno não somente pelos dados realmente observados mas também pelo conjunto de hipóteses previstas e que não foram observadas. Voltando ao problema da decisão de um júri a respeito de um acusado, os jurados tentam decidir a culpa ou a inocência do réu levando em consideração as hipóteses à luz das evidências apresentadas. Do ponto de vista bayesiano é como se o júri tentasse decidir a culpa ou a inocência de um réu através da massa de evidências sobre o máximo de hipóteses possíveis.

Estatística bayesiana acessa hipótese fundamentais a respeito de um problema proposto, comparando o conjunto de hipóteses I e avaliando a plausibilidade de cada uma delas (distribuição *a priori*) segundo os dados obtidos, portanto esta abordagem se configura completa na análise de problemas com diversas possibilidades e contextualiza o conhecimento pré-estabelecido a respeito do sistema estudado.

3.3.3 Estatística frequentista versus bayesiana

A teoria de Laplace de probabilidades sofreu imensa rejeição da comunidade científica Matemática dos séculos XIX e XX, isso ocorreu principalmente pela dificuldade na aplicação dos axiomas 3.1 e 3.2 na resolução de problemas reais. Esta “simplificação ” na teoria de probabilidades limitou a teoria e a interpretação de probabilidade.

Os axiomas 3.1 e 3.2 descrevem como manipular probabilidades mas não especificam como atribuir probabilidades a dados em algum modelo ou fenômeno estudado. Outro aspecto complicado da teoria de Laplace é a atribuição de valores da probabilidade *a priori*, como fazer isso? Esta questão foi resolvida usando *Princípio da Inferência*(PI)⁴, é uma regra que faz atribuição de probabilidades para um conjunto finito e discreto de proposições que são mutualmente exclusivas (eventos com probabilidades independentes) e exaustivas (onde somente uma proposição deve

⁴Também conhecida como Princípio da Razão Insuficiente.

ser verdadeira). A PI afirma que se a evidência da atribuição não fornece qualquer razão para considerar a proposição A_1 mais ou menos provável que a proposição A_2 , então o estado do conhecimento seria o mesmo para ambas, e consequentemente, igualmente prováveis.

O paradigma frequencista objetiva determinar as generalizações sobre uma população através de uma amostragem acerca dos dados. Uma amostra é escolhida de tal maneira que reproduza em micro escala as características de uma população previamente definida na escolha das variáveis qualitativas e/ou quantitativas. O conjunto de combinações para as possibilidades relativas à aos valores coletados é conhecido como espaço amostral. A interpretação inferencial clássica reconhece a variabilidade dos elementos deste espaço.

A inferência frequencista busca modelar os dados coletados com uma função de distribuição que representa a variabilidade e as incertezas associadas ao método de obtenção dos dados. Tal que escolha é proveniente do conhecimento inicial acerca do fenômeno estudado, isso se faz possível por meio dos seguintes critérios: (1) evidência experimental a respeito do tratamento de fenômenos semelhantes. (2) considerações teóricas sobre os objetivos do estudo e sobre a natureza dos fenômenos envolvidos⁵. (3) Condições teóricas sobre a natureza das técnicas experimentais aplicadas. (4) A existência de parcimônia, isto é, recorrer a modelos tão simples quanto o possível⁶.

Na abordagem frequentista, os procedimentos estatísticos são julgados à luz da amostragem dos dados. Um segundo princípio aprecia o comportamento dos dados sobre um número indefinido e hipotético de repetições sobre as mesmas condições. A interpretação frequentista reside na interpretação de probabilidades como medida da incerteza associada aos dados. Outro aspecto fundamental que diferencia as abordagens é que a frequentista assume como verdadeiras hipóteses na definição de probabilidade Oliveira (1981). Segundo Jaynes (1996) a abordagem frequentista usa somente os dados na determinação das funções de distribuição para problemas simplificados ou para simplificações de problemas complexos, isto porque, pressupõe que os dados observados são observações feitas independentemente de variáveis aleatórias, isto torna a análise limitada, pois considera as hipóteses verdadeiras e desconsidera, muitas vezes, o conhecimento a priori sobre o sistema.

Vimos na seção anterior que a abordagem bayesiana acessa fundamentalmente as hipóteses lógicas na construção das funções de probabilidades. As probabilidades são interpretadas como “grau” de plausibilidade ou credibilidade apontando vantagens e desvantagens sobre uma hipótese considerada, além de imbutir o conhecimento anterior ou a priori sobre o problema estudado. A controvérsia existente na teoria bayesiana concentra-se na distribuição à priori. Segundo Paulino et al (2003) a informação a priori incorpora na análise a informação que o pesquisador contém sobre elementos subjetivos sobre o fenômeno.

⁵Estas condições expressam a utilização do conhecimento “a priori” na análise de dados.

⁶A *Ockham's razor* ou navalha de Ockham é um princípio lógico atribuído ao frade franciscano William de Ockham (1285 - 1349), e afirma que o fenômeno deve assumir somente premissas estritamente necessárias à explicação do fenômeno e eliminar todas que não causariam quaisquer diferenças entre as predições da hipótese e/ou teoria.

Um bom exemplo, que explicita as diferenças entre abordagem frequentista e bayesiana. Suponhamos um parâmetro θ , $\theta \in \Theta$, é um escalar ou um vetor desconhecido, mas fixo, isto é, igual ao valor particular que está associado a uma distribuição pertencente à família $\mathcal{F}$ e descreve apropriadamente o sistema físico que gerado pelas observações. Na abordagem bayesiana o parâmetro θ é tomado como escalar ou vetor aleatório (que pode não ser observável) e determinado seu valor mais plausível por uma análise paramétrica. Na abordagem frequentista, o valor assumido por θ é obtido por sucessivas medidas em condições idênticas, o que permite obter a tendência central e quantificar a incerteza nas medições [Paulino et al \(2003\)](#).

Bayesianos defendem que a informação inicial ou a priori - anterior ou externa em relação à experiência mas importante para não ser ignorada ou ser tratada como *ad hoc* - formalmente, traduz-se por uma distribuição de probabilidade, geralmente subjetiva para θ , sendo $p(\theta|I)$ a distribuição a priori⁷. Assim, se θ é um parâmetro discreto, $p(\theta|I)$ é a função que exprime o grau de credibilidade que o pesquisador atribui ao fenômeno, caso seja contínuo, é uma função densidade de probabilidade sendo escrita $p(\theta|I)d\theta$ e atribui a mesma credibilidade sendo definida no intervalo $(\theta, \theta + d\theta)$. A distribuição a priori se configura com um dos pontos mais controversos porque algumas vezes é interpretado como um “parâmetro livre” ou uma distribuição que “aceita” quaisquer interpretações subjetivas.

A discussão das distribuições a priori e da natureza subjetiva ilustra claramente alguns aspectos entre bayesianos e frequentistas. Para os primeiros [[Berger \(1985\)](#)] a escolha do modelo da família das distribuições traduz no uso da informação a priori para θ . Para os segundos [[Lehmann \(1983\)](#)] há uma diferença entre a modelagem das distribuições e da função a priori, pois enquanto se dispõe de um conjunto de observações geradas para uma distribuição que pode testar a forma desta e o valor do parâmetro θ é apenas um dado extraído da observação. As controvérsias existentes entre as duas linhas de abordagem permanecem abertas, bayesianos argumentam que sua abordagem é mais geral e acessa hipóteses fundamentais levando em consideração as informações sobre o fenômeno. Enquanto frequentistas contrargumentam que sua abordagem é ligada aos dados e na busca da distribuição que quantifique a incerteza. Ambas são amplamente utilizadas atualmente, a teoria bayesiana é de mais difícil trato por suas dificuldades numéricas⁸ nos cálculos das distribuições e por outro lado, a frequentista simplifica problemas dessa natureza.

3.4 Análise de modelos paramétricos

A metodologia estatística utilizada neste trabalho é baseada no Teorema de Bayes (TB) que foi discutido nas seções anteriores. Agora discutiremos como “tratar” os parâmetros que envolvem as probabilidades condicionais, como buscar o valor dos mesmos calculando a região de credibilidade, a exclusão de parâmetros

⁷Muitos autores, como [Jaynes \(1996\)](#) usam essa notação pra descrever o parâmetro θ e I como a informação do sistema estudado.

⁸A evolução dos processadores e dos métodos numéricos promoveu uma maior utilização da teoria bayesiana.

*inconvenientes*⁹ e o teste comparativos de modelos *Bayesian Information Criterion* (BIC)¹⁰. A expressão 3.4 denota a forma de TB por meio de hipóteses (H's), trocando $H \rightarrow \theta$ e $I \rightarrow M$ temos:

$$p(\theta|M) = p(\theta|M) \frac{p(D|\theta, M)}{p(D|M)}, \quad (3.5)$$

onde θ explicita o espaço dos parâmetros e M denota os modelos.

3.4.1 Marginalização de parâmetros

Uma característica interessante da inferência bayesiana é a exclusão dos chamados parâmetros *inconvenientes*, isto é, parâmetros que não interessam, por exemplo: dada uma função de probabilidade *a posteriori* $p(\theta, \phi|D, M)$, supondo que somente nos interessa θ , a distribuição *a posteriori* para θ , fica:

$$p(\theta|D, M) = \int p(\theta, \phi|D, M) d\phi. \quad (3.6)$$

O nome deste procedimento é *marginalização*, onde $p(\theta|D, M)$ também é chamada de *distribuição marginal a posteriori* para θ . A habilidade em eliminar parâmetros inconvenientes é uma das vantagens da abordagem bayesiana em relação à frequentista, e não é amplamente aceita por especialistas desta vertente estatística.

3.4.2 Estimativa de um parâmetro

O problema da estimativa de um parâmetro em uma distribuição *a posteriori* $p(\theta|D, M)$ está no fato do “melhor” valor não ser um ponto do espaço de parâmetros. Normalmente se determina o “melhor ajuste” e o valor da “barra de erros” indicando a largura a meia altura da distribuição *a posteriori*. Possíveis escolhas estão no cálculo da média posteriori¹¹ ou da moda posteriori¹². Se ambas são muito diferentes possivelmente a distribuição é complicada e pode ser estimada por apenas um número C , tal procedimento é feito usando a região de credibilidade R , definida por:

$$\int_R p(\theta|D, M) d\theta = C. \quad (3.7)$$

Se R é escolhida de tal maneira que a densidade de pontos dentro dela é maior que fora, então R é a região de credibilidade com *maior densidade posteriori*¹³. Regiões de credibilidade são calculadas geralmente desta maneira e diferem das regiões de confiança usadas na abordagem frequentista.

Em nosso trabalho utilizamos a estimativa do máximo da distribuição $p(\theta, \phi|D, M)$ para θ e ϕ graficando a projeção da curva de nível em gráficos de duas dimensões que mostram a região onde os parâmetros são mais plausíveis.

⁹Em inglês *nuisance*.

¹⁰Neste trabalho deixaremos a sigla em Inglês BIC.

¹¹Média posteriori é calculada como: $\langle \theta \rangle = \int \theta p(\theta|D, M) d\theta$.

¹²Valor mais frequente para os pontos da distribuição $p(\theta|D, M)$.

¹³Em inglês *highest posterior density* (HPD)

3.4.3 Comparação de modelos

Em inferência bayesiana é possível comparar modelos determinando o sucesso de um modelo em relação a modelos rivais. Na análise frequentista, o teste de χ^2 é usado na distinção de modelos, onde o modelo que apresenta $\chi^2 \sim 1$ é o melhor. Na abordagem bayesiana para comparar os modelos recorre-se novamente ao TB e inicialmente especificaremos o conjunto de modelos competidores, usaremos o símbolo M_i que denota uma proposição acerca de um determinado modelo i descrito pelos dados, e o símbolo I explicita a informação “anterior” sobre o modelo especificado. Então a forma que TB assume para calcular a probabilidade para o modelo M_i , é

$$p(M_i|D, I) = p(M_i|I) \frac{p(M_i|D, I)}{p(D|I)}. \quad (3.8)$$

Esta equação é a forma de TB mais conveniente para acessar os parâmetros e os modelos. M_i representa o parâmetro e I representa o modelo. O termo $p(M_i|I)$ é a distribuição *a priori* para o modelo M_i . A proposição (M_i, I) (lê-se “ M_i e I ”) é verdadeira se e somente se, o modelo M_i é verdadeiro.

A comparação entre dois modelos M_i e M_j que representa a “aposta” do primeiro (M_i) em relação ao segundo (M_j) é denotada por O_{ij} , e pode ser calculada assim:

$$\begin{aligned} O_{ij} &= \frac{p(M_i|D, I)}{p(M_j|D, I)} \\ O_{ij} &= \frac{p(M_i|I)}{p(M_j|I)} \frac{p(M_i|D, I)}{p(M_j|D, I)} \\ O_{ij} &= \frac{p(M_i|I)}{p(M_j|I)} B_{ij}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o primeiro fator é a taxa de aposta e o segundo (O_{ij}) é chamado *fator de Bayes*. O fator de Bayes B_{ij} é a simples razão entre as verossimilhanças para os modelos. A tabela obtida por Jaynes ilustra os intervalos numéricos dos valores para o fator de Bayes que ilustram força de um modelo em relação a outro. Para $1 < B_{ij} < 3$ modelos testados são equivalentes (fraca evidência) e não se pode afirmar que um prevalece sobre o outro. Para $3 < B_{ij} < 20$ mostra que o modelo $\mathcal{L}_i$ é levemente melhor (positivo) em relação ao $\mathcal{L}_j$. Para $20 < B_{ij} < 150$ mostra que o modelo $\mathcal{L}_i$ é melhor (forte) em relação ao modelo $\mathcal{L}_j$. Para $B_{ij} > 150$ e por último, no intervalo $1 < B_{ij} < 3$ e por último, no intervalo $20 < B_{ij} < 150$ o modelo $\mathcal{L}_i$ é muito melhor (muito forte) que o modelo $\mathcal{L}_j$. Esta análise penaliza a diferença dos parâmetros de um modelo sobre o outro.

Nota-se que a distribuição preditiva para ambos os modelos é constante. Quando a taxa de aposta não é forte em favor de um modelo sobre outro, o fator de Bayes pode ser interpretado apenas como uma aposta no melhor, tal interpretação pode explicitada pela tabela 3.1. Melhores discussões sobre o fator de Bayes estão em Kass & Raftery (1995).

Tabela 3.1: Interpretação do fato de Bayes

$\ln B_{ij}$	B_{ij}	Evidência sobre H_j
0 a 1	1 a 3	Fraco
1 a 3	3 a 20	Positivo
3 a 5	20 a 150	Forte
>5	>150	Muito forte

Um importante aspecto da comparação bayesiana de modelos é que o cálculo implementa automaticamente a “navalha de Ockham”, isto é, dá ampla preferência por modelos simples (com melhor número de parâmetros) em relação à modelos mais complicados (com maior número de parâmetros). Em estatística frequentista, é comum o cálculo de razões entre verossimilhanças para comparar modelos rivais. Entretanto, quase sempre os modelos mais complicados tem valores maiores para a verossimilhança em relação a modelos mais simples, tal que, modelos mais complicados são somente aceitos se a razão do máximo da verossimilhança em seu favor excede subjetivamente um certo valor crítico, expressando uma *subjetividade a priori* em relação ao modelo mais simples. O método bayesiano compara a média das verossimilhanças e não o máximo das verossimilhanças e tende a favorecer modelos mais simples mesmo quando ambos os modelos tem a mesma probabilidade *a priori*, isto é bem discutido em [Loredo & Lamb \(2002\)](#) e [Jeffreys & Berger \(1992\)](#).

A forma explícita do *Bayesian Information Criterion* (BIC) ou critério de Schwarz [[Kass & Wasserman \(1995\)](#)] é dada pela seguinte equação:

$$\ln B_{ij} = \ln [\mathcal{L}_i(\theta, \phi) / \mathcal{L}_j(\theta)] - \frac{1}{2} m_\phi \ln N. \quad (3.10)$$

Onde $\mathcal{L}_i(\theta, \phi) / \mathcal{L}_j(\theta)$ é a razão entre as verossimilhanças dos modelos, ϕ é o parâmetro adicional, m_ϕ é a dimensão de ϕ e N é o número de dados. O BIC penaliza modelos que têm mais parâmetros em relação aos que têm menos, isso fica evidente com o termo ϕ , pois para os modelos testados o número de dados é o mesmo (N).

3.5 Modelando um detector de neutrinos

Vamos agora modelar a probabilidade de observar um neutrino no detector, dada a taxa de produção de um lépton carregado sobre o experimento. Começaremos, primeiramente, introduzindo as notações para a construção das funções de probabilidades levando em consideração a taxa de ruído e a eficiência do detector. Trataremos aqui dos dados observados por Kamiokande II e Irvine - Michigan - Brookhaven (IMB). Usaremos como referência o trabalho de [Loredo & Lamb \(2002\)](#), onde todo o formalismo e a modelagem do disparo em uma fotomultiplicadora proveniente da chegada de um neutrino astrofísico é modelada com detalhes. A construção estatística usando o formalismo bayesiano e poissonianas inhomogêneas são os pontos chave

da modelagem.

O dado de entrada no cálculo da probabilidade de observar um evento em um detector é a taxa de produção de léptons carregados que chegam sobre o mesmo. Essa taxa possui basicamente duas componentes: ruído ou background relativa as partículas produzidas por interações de raios cósmicos com a atmosfera e/ou decaimentos radiativos nas vizinhanças do experimento. A taxa de ruído inclui formalmente outras fontes que não detalharemos, como por exemplo, falsos triggers nas fotomultiplicadoras de cada um dos detectores. A segunda componente, de interesse físico, é o sinal observado pela explosão da supernova 1987A. Presumimos que ambas as taxas são dadas. Na prática, a taxa de ruído é inferida das medidas, e a taxa do sinal é o resultado da modelagem descrita aqui.

Como vimos no capítulo 2 a eficiência de detectores de neutrinos é maior para a captura de antineutrinos resultante da produção de um pósitron (e^+) energético. O detector “vê” o fóton Cerenkov proveniente do deslocamento do pósitron na água do experimento. O ruído associado aos detectores dessa natureza, são normalmente pósitrons, prótons e múons, possivelmente raios cósmicos de baixas energias. Simplificando a discussão, um evento é definido pela produção de qualquer lépton carregado. Devemos distinguir a ocorrência de um evento da detecção de um evento: nem todo evento que ocorre é detectado.

O ruído ou background é modelado por uma taxa diferencial $B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$, tal que $B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)dVd\mathbf{n}d\varepsilon dt$ é a probabilidade que um evento de background ocorrerá em um intervalo de tempo infinitesimal por unidade de volume do detector dV para um pósitron $\mathbf{r}$ no detector pela direção em um ângulo sólido $d\mathbf{n}$ sobre um vetor unitário $\mathbf{n}$ com uma energia no intervalo $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$. Assumimos que a taxa de ruído é constante sobre todo tempo das observações. A taxa não é constante no espaço, entretanto, por que os eventos gerados por esse ruído aparecem preferencialmente nas rochas que estão próximas as paredes do detector.

A taxa diferencial de sinal é denotada por $R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)$, sendo a taxa de produção de pósitrons no detector por unidade de tempo, energia e esteroradianos das interações com neutrinos da supernova. Entretanto a taxa de ruído é dependente do tempo, mas pode ser considerada constante sobre o volume do detector, essa aproximação é válida assumindo que o meio é opticamente fino para essas partículas. Uma forma de escrever a taxa de eventos por unidade de volume é:

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon, t) = \frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)}{V}, \quad (3.11)$$

onde V denota o volume do detector. A taxa de eventos dependerá de alguns parâmetros que são denotados coletivamente por $\mathcal{P}$. O número e o tipo dos parâmetros depende diretamente do modelo adotado para a taxa de eventos. A taxa de ruído para qualquer direção, posição e energia $d\varepsilon$ pode ser quantificada quanto para o sinal integrando sobre todos os intervalos dessas grandezas, o mesmo pode ser feito para a taxa de eventos.

Normalmente, o cálculo da verossimilhança é feito, considerando os valores inferidos para para energias e tempos de chegada dos pósitrons detectados. Esses

valores são muito mais complicados que aparentam, porque são na verdade séries temporais dos pulsos observados ponderadas pelas eficiências das fotomultiplicadoras nas paredes do detector. A idéia principal na construção da verossimilhança é tentar calcular a probabilidade da observação de um evento a partir das séries temporais tanto do sinal quanto do ruído. Uma forma simplificada de fazer isso é calcular o produto das probabilidades para os eventos detectados com os eventos não detectados em intervalos de tempo infinitesimais δt . Essa construção considera algumas coisas importantes: que os eventos são independentes entre si, que há somente um evento por δt , definimos como “evento” a produção de qualquer lépton carregado. Devemos ter cuidado na distinção entre a **ocorrência** e a **deteccção** de um evento.

A verossimilhança para eventos de neutrinos em um detector Cerenkov é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \left[\prod_{i=1}^{N_d} p(d_i|\mathcal{P}, M) \right] \times \left[\prod_j p(\bar{d}_j|\mathcal{P}, M) \right], \quad (3.12)$$

onde N_d é o número de eventos observados, $p(\bar{d}_i|\mathcal{P}, M)$ é a probabilidade da ocorrência de um evento em um intervalo de tempo t_i , o termo d_i representa os eventos observados, $\mathcal{P}$ denota o conjunto de parâmetros, M representa as proposições assumidas na modelagem. O termo $p(d_j|\mathcal{P}, M)$ representa a probabilidade de não deteção de eventos, $\bar{d}_j$ ¹⁴.

Assumimos que, dadas as taxas de sinal e de ruídos, a probabilidade para um evento ocorrer em qualquer intervalo infinitesimal de tempo, volume, direção e energia é independente da ocorrência ou não de um evento em algum outro intervalo de tempo. Isto implica que a probabilidade para n eventos ocorrendo em qualquer intervalo de tamanho finito é dado por uma distribuição de Poisson,

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (3.13)$$

onde $\bar{n}$ é a taxa de eventos no intervalo considerado, sendo encontrada através da integração da taxa diferencial relevante sobre o intervalo. Focaremos nossa atenção no intervalo de tempo δt , e usaremos S^0 para expressar a não observação de eventos ocorridos no intervalo de tempo. A probabilidade para S^0 é dada pela equação 3.13, com $\bar{n}$ igual para a taxa de sinal integrada sobre δt :

$$p(S^0|\mathcal{P}, M) = \exp \left[- \int_{\delta t} R(t) dt \right], \quad (3.14)$$

em um intervalo de tempo (δt) muito pequeno, a integral em δt é aproximadamente $R(t)\delta t$, isto é:

$$p(S^0|\mathcal{P}, M) = e^{-R(t)\delta t}, \quad (3.15)$$

¹⁴O índice i denota eventos observados e j os não observados.

com t sendo igual para qualquer intervalo δt , o tratamento para o ruído é idêntico¹⁵. Agora analisaremos a situação para a ocorrência de um evento, denotado por $S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ em um intervalo de tempo δt especificado, com uma posição, direção e energia em $dV d\mathbf{n} d\varepsilon$ sobre um ponto $(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$, a probabilidade para esta proposição é:

$$p[S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon | \mathcal{P}, M)] dV d\mathbf{n} d\varepsilon, \quad (3.16)$$

onde $p[S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon | \mathcal{P}, M)] dV d\mathbf{n} d\varepsilon$, é a densidade de probabilidade. Esta proposição é a conjunção lógica de duas proposições: (1) o sinal de um evento ocorrido em $dV d\mathbf{n} d\varepsilon \delta t$; e (2) a não ocorrência de um sinal de um evento em δt com diferente posição, direção e energia. Vamos calcular a probabilidade para um sinal detectado de um evento e a não detecção de um evento em um intervalo de tempo diferente de δt , para isso usaremos a equação 3.13. Para a proposição (1):

$$\left[\frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)}{V} dV d\mathbf{n} d\varepsilon \delta t \right] \exp \left[-\frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)}{V} dV d\mathbf{n} d\varepsilon \delta t \right]. \quad (3.17)$$

A probabilidade para a distribuição de Poisson para a segunda é:

$$p(S^0 | \mathcal{P}, M) \exp \left[-\frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)}{V} dV d\mathbf{n} d\varepsilon \delta t \right]. \quad (3.18)$$

A probabilidade para $S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ é o produto das equações 3.17 e 3.18 divididas por $dV d\mathbf{n} d\varepsilon$, sendo dada por:

$$p[S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon | \mathcal{P}, M)] = \frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t)}{V} \delta t e^{-R(t)\delta t}. \quad (3.19)$$

Podemos escrever a probabilidade para ocorrência de um sinal observado para um ruído de forma similar substituindo B por R . Temos agora todo o arsenal matemático-lógico para a construção das verossimilhanças e faremos isso na próxima seção.

3.5.1 Função de verossimilhança para um detector real

A verossimilhança para um detector real será discutida nesta seção. A dedução formal está no apêndice 1 e a função é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}) = & \exp \left[-f \int_T dt \int d\mathbf{n} \int \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i) \right] \\ & \times \prod_{i=1}^{N_d} \left[B_i + \int d\mathbf{n} \int d\varepsilon \mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Onde $R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i)$ é a taxa de sinal, $\bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon)$ é a eficiência do detector, B_i é a integral de todo espectro do ruído pela função $\mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon)$, T é o tempo de integração do detector,

¹⁵Para a taxa de ruído o tratamento é o mesmo para a detecção de um ruído e a não detecção, desde que a taxa seja considerada constante, não há dependência com t .

$\mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon)$ é a função peso que dá a probabilidade de “enxergar” um evento, presumindo o pósitron produzido pelo na direção $\mathbf{n}$ e energia ε . Esta integral contém as incertezas inferidas nas direções e energias dos eventos.

3.5.2 Função de verossimilhança para um detector com sinal isotrópico

A forma mais geral da verossimilhança deve levar em consideração a isotropia do sinal $[R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i)]$ dos neutrinos provenientes da SN1987A. A consideração de isotropia dos eventos é assumida por conta das elevadas incertezas associadas aos eventos de SN1987A. A taxa do sinal isotrópica tem a forma:

$$R(\mathbf{n}, \varepsilon, t) = \frac{R(\varepsilon, t)}{4\pi}. \quad (3.21)$$

Esta taxa é uma expressão analítica que é deduzida na seção 3.6. É função da energia (ε), temperatura (T) e raio da neutrinosfera (α). Essa expressão pode ser relativa a duas componentes: resfriamento e acreção.

A eficiência do detector é dada pela média da direção e do volume do tanque

$$\bar{\eta}(\varepsilon) = \int \frac{dV}{V} \int \frac{d\mathbf{n}}{4\pi} \bar{\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon). \quad (3.22)$$

Usando as expressões 3.21 e 3.22 e considerando o tempo morto τ que foi discutido no capítulo 2, a verossimilhança para sinais isotrópicos é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \exp \left[-f \int_T dt \int \bar{\eta}(\varepsilon) R(\varepsilon, t_i) \right] \\ \times \prod_{i=1}^{N_d} \times e^{R_{eff}(t_i)\tau} \left[B_i + \int d\varepsilon \mathcal{L}_i(\varepsilon) R(\varepsilon, t_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Onde $\mathcal{P}$ representa os espaço dos parâmetros¹⁶ e $R_{eff}(t_i)$ é o sinal efetivo, dado por:

$$R_{eff}(t_i) = \int d\mathbf{n} \int d\varepsilon \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t). \quad (3.24)$$

E a função peso $[\mathcal{L}_i(\varepsilon)]$, somente dependente da energia pode ser bem aproximada por gaussianas:

$$\mathcal{L}_i(\varepsilon) = C_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2}{2\sigma_i^2} \right] \Theta(\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (3.25)$$

Onde ε_i é a energia estimada para cada evento, σ_i é a incerteza correspondente, C_i é a constante de normalização e a função Θ é a função degrau que representa a eficiência, onde a verossimilhança perde os eventos abaixo do limite de ε_0 . $\mathcal{L}_i$ é

¹⁶A construção detalhada

função que seleciona os eventos usando a função degrau Θ como eficiência do detector em função da energia de cada evento.

A modelagem estatística para o sinal de neutrinos e o ruído observados em um detector está concluída. No próximo capítulo discutiremos os modelos de temperatura e raio para a estrela de nêutrons remanescente da explosão da SN1987A.

3.6 Modelagem da taxa de produção de léptons

A taxa de produção léptons é modelada nesta seção. Existem três etapas: o modelo de emissão dos neutrinos/antineutrinos na supernova, a propagação do sinal até a Terra a interação dos neutrinos com o detector para a produção de léptons energéticos [Loredo & Lamb (2002)]. Para modelos de emissão de neutrinos provenientes de supernovas possuem duas componentes: resfriamento relativa a neutrinos formados dentro da estrela de nêutrons e uma da acreção de matéria no colapso estelar. No desenvolvimento deste trabalho consideramos somente neutrinos provenientes do resfriamento estelar cujo intervalo de tempo é da ordem de milisegundos após o colapso.

3.6.1 Componente de resfriamento

A taxa de formação de neutrinos é:

$$\dot{N}(E, t^{em}) = 4\pi R^2 \frac{g\pi c}{(h c)^3} E^2 \times \frac{1}{\exp(E/T - \eta) + 1}. \quad (3.26)$$

Onde os parâmetros R é o raio da estrela remanescente, E é a energia, g é o fator relativo as espécies de neutrinos, η parâmetro de degenerescência (o mesmo usado na modelagem do espectro de neutrinos) e t^{em} tempo de emissão.

3.6.2 Componente de acreção

A taxa de neutrinos para a componente de acreção:

$$\frac{\dot{N}(E, t^{em})}{M_{hot}} = \frac{1 + 3g_A}{8} \frac{\sigma_0 c}{m_n(m_e c^2)^2} \frac{8\pi^3}{hc} Y_n E^4 \times \frac{1}{\exp(E/T_a - \eta) + 1}. \quad (3.27)$$

Onde g_A é a constante de acoplamento (≈ 1.254), m_n massa de repouso do nêutron, σ_0 seção de choque para a interação fraca. Para calcular o espectro emitido, devemos multiplicar a equação 15 com a massa de material acretada:

$$M_{hot} = M_0 a(t^{em}), \quad (3.28)$$

a equação 3.28 fica:

$$\dot{N}(E, t^{em}) = M_0 a(t^{em}) \frac{1 + 3g_A}{8} \frac{\sigma_0 c}{m_n(m_e c^2)^2} \frac{8\pi^3}{hc} Y_n E^4 \times \frac{1}{\exp(E/T_a - \eta) + 1}. \quad (3.29)$$

3.6.3 Propagação do sinal

A difusão dos neutrinos gerados na supernova percorrem uma distância D , o fluxo por unidade de energia que chega até a Terra é:

$$\Phi(E, t^{em}) = \frac{1}{4\pi D^2} \dot{N}(E, t^{em}). \quad (3.30)$$

Os tempos t^{em} e t^{det} , são dados por

$$t^{det} = t^{em} + \Delta t(m_\nu, E) - t^{off}, \quad (3.31)$$

onde $t^{det} = 0$ para o primeiro evento detectado, t^{off} é desconhecido pois se configura entre $t^{det} = 0$ e o tempo de chegada do primeiro evento, m_ν é a massa de repouso do antineutrino e

$$\Delta t(m_\nu, E) = 2.57 \left(\frac{m_\nu}{eV} \right) \left(\frac{E}{MeV} \right) \frac{D}{50pc} \quad (3.32)$$

3.6.4 Produção de léptons no detector

O processo dominante na detecção de neutrinos é a produção de pósitrons por meio da seguinte reação: $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$. Outros processos que produzem diferentes espécies de neutrinos são ignorados aqui. A taxa de captura para a componente de cooling é:

$$R^{cap}(E, t^{det}) = 1.22 \times 10^{-5} \alpha^2 \left(\frac{M_{eff}}{kton} \right) \left(\frac{E}{MeV} \right)^4 \times f[E, T(t^{em})] \kappa(E) r^2(t^{em}) \text{MeV}^{-1} s^{-1} \quad (3.33)$$

onde α é o termo de parametrização,

$$\alpha = \frac{R_\nu}{10km} \left(\frac{D}{50kpc} \right)^{-1} \sqrt{g}. \quad (3.34)$$

A taxa para a componente de acreção parametrizada é:

$$R^{cap}(E, t^{det}) = 2.14 \times \mu \left(\frac{M_{eff}}{kton} \right) \left(\frac{E}{MeV} \right)^6 \times f[E, T(t^{em})] \kappa(E) r^2(t^{em}), \quad (3.35)$$

onde o parâmetro μ é a amplitude de acreção emissão, dado por:

$$\mu = \frac{M_0}{M_\odot} \left(\frac{Y_n}{0.6} \right) \left(\frac{D}{50kpc} \right)^{-2}. \quad (3.36)$$

A taxa de captura total em termos da energia ($E = \varepsilon - Q$) é a soma das duas taxas,

$$R^{cap}(E, t^{det}) = R^{cap}(\varepsilon + Q, t^{det}). \quad (3.37)$$

A expressão 3.37 mostra a taxa de captura total de em um detector de neutrinos. Essa taxa inclui as componentes relativas a resfriamento e acreção. Podemos observar claramente que $R^{cap}(E, t^{det})$ é função dos parâmetros de emissão (ε , T e α) o que permite modelar a temperatura de emissão e o raio da neutrinosfera. Os modelos utilizados neste trabalho serão apresentados no próximo capítulo junto com os resultados obtidos.

Análise bayesiana do sinal de neutrinos para modelos de temperatura e raio para estrelas de nêutrons

“...the energy disappears in the nucleus of the supernova as quickly as the money disappeared at that roulette table”.

M. Schoenberg and S. Chandrasekhar speaking about the URCA process.

Conteúdo

4.1	Objetivos	78
4.2	Introdução	78
4.2.1	Características dos detectores e a base de dados	81
4.3	Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança	81
4.3.1	Distribuições <i>a priori</i>	82
4.4	Modelos de temperatura e raio da neutrinosfera	82
4.5	Discussão dos resultados	83
4.5.1	Intervalos de confiança frequentistas	85
4.5.2	Teste BIC para os modelos	95
4.5.3	Cálculo das energias de ligação para os modelos	96

4.1 Objetivos

Nesse capítulo vamos discutir a análise bayesiana dos neutrinos detectados das estrelas dos remanescentes de exposição de supernovas. Analisaremos modelos para o raio (R) e temperatura (T) da neutrinosfera sob à luz da Estatística Bayesiana. Os dados utilizados são os dos neutrinos provenientes da explosão da supernova SN1987A. Usaremos os dados dos eventos de Kamiokande, IMB e Baksan somente, estes experimentos foram discutidos no capítulo 2. A modelagem estatística utilizada por nós é o formalismo teórico desenvolvido por [Loredo & Lamb \(2002\)](#) e mostrado no capítulo 3. Neste capítulo apresentaremos os resultados e uma análise detalhada de um modelo alternativo proposto por nós contra o modelo de decaimento exponencial da temperatura [[Loredo & Lamb \(2002\)](#)]. O modelo com duas temperaturas sugere a existência de um segundo surto de neutrinos como foi proposto por [Benvenuto & Horvath \(1989\)](#). Analisaremos individualmente, através dos modelos, o conjunto de dados observados por KII, IMB e Baksan e suas combinações K-IMB, K-Baksan, K-IMB-Baksan para cada um dos modelos, algo que não foi feito para K-Baksan em análises anteriores. Aplicando o *Bayesian Information Criterion* (BIC) testaremos a força do modelo com duas temperaturas contra o modelo de decaimento exponencial adotado por [Loredo & Lamb \(2002\)](#). Os resultados são apresentados por meio de gráficos com os parâmetros de cada um dos modelos e tabelas. Apresentaremos os intervalos de confiança para os parâmetros: raio da neutrinosfera (parametrizado por α), temperatura de emissão dos neutrinos (T), tempo de emissão à luminosidade constante (τ), intervalo de tempo entre os dois surtos de neutrinos (Δt) e o parâmetro de escala para o temperatura do segundo surto (ap). Discutiremos também no contexto da existência de matéria estranha.

4.2 Introdução

Em fevereiro de 1987, Ian Shelton percebeu em tempo real uma grande alteração da magnitude de uma estrela da Grande Nuvem de Magalhães. A taxa de ocorrência de eventos como supernovas é em média $\sim 1/\text{século}$. Shelton informou à comunidade astronômica e o registro foi observado e confirmado em várias partes do mundo. Horas após a descoberta, vários experimentos anunciaram a detecção de um surto de neutrinos. Este surto foi registrado e posteriormente publicado por Kamiokande II (KII) [[Hirata et al \(1987\)](#)], Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) [[Bionta et al \(1987\)](#)] e Baksan [[Alekseev et al \(1987\)](#)].

Acredita-se que a estrela progenitora que “gerou” SN198A, seja uma estrela com aproximadamente $18M_{\odot}$ e que pode ter residido na Sequência Principal por $\sim 10^7$ anos, exaurindo o hidrogênio no caroço há uns $\sim 7 \times 10^6$ anos, passando para o estágio de Cefeida e queimando hélio por aproximadamente 6.5×10^6 anos. No momento da explosão, a temperatura efetiva seria $\sim 1.8 \times 10^4 \text{K}$, portanto uma estrela

gigante azul. Estas estrelas são azuis devido à dinâmica das camadas externas, ao passo que o colapso depende das camadas internas.

Vimos no capítulo 2, que os neutrinos são provenientes de processos na formação da EN remanescente. O processo tem início com a neutronização da matéria via decaimento beta inverso¹. A região central torna-se mais rígida promovendo o ricocheteio do envelope no momento de queda. Este mecanismo ainda não é bem compreendido e, portanto não há um consenso a respeito do seu funcionamento. Após a ejeção do envelope, o caroço de ferro, que originalmente tinha $\sim 500\text{km}$ de raio passa a ter por volta de $30 - 40\text{km}$ com enorme energia térmica que é produto da implosão do caroço original. Antes da estabilidade ser atingida, o caroço impludido, onde predominam nêutrons, irradia o excesso de energia térmica acumulada. As temperaturas são tão altas que a emissão de neutrinos é facilitada. Esses neutrinos são de origem termal e se encontram em equilíbrio termodinâmico local com a matéria com isso, a estrela emite como um “corpo negro” de neutrinos. O papel dos neutrinos neste momento é importante porque transportam energia térmica para fora da estrela, configurando-se como o principal mecanismo de resfriamento do objeto compacto remanescente. A esses neutrinos é associada uma luminosidade de $\simeq R_\nu^2 T_\nu^4$, sendo relativa ao momento que os neutrinos começam a escapar até a estrela adotar sua configuração final. A importância da ocorrência do surto de neutrinos na escala de tempo de segundos está no fato de ser uma “assinatura” da estrutura interna da supernova original.

Os detectores KII, IMB e Baskan observaram claramente o surto mas infelizmente poucos neutrinos foram associados à explosão da supernova (~ 20 eventos). Alguns fatores contribuíram para a pouca observação de eventos, além da natural dificuldade na detecção de neutrinos por conta da sua baixa seção de choque, outros fatores como a direcionalidade e a distância à Grande Nuvem de Magalhães diminuíram a possibilidade de obter mais eventos. Os neutrinos que esses três experimentos observaram foram associados ao evento de supernova por conta da direção de chegada e o tempo da explosão. Alguns parâmetros importantes podem ser inferidos dos neutrinos observados como por exemplos a temperatura da neutrinosfera e sua evolução temporal, emissão sequencial com um “hiato” da ordem de segundos não podem ser descartados [Loredo & Lamb (2002)], bem como a evidência física de um cenário de matéria estranha. Uma estrela de nêutrons apresenta condições favoráveis de temperatura, pressão e densidade para o aparecimento de matéria estranha [Benvenuto & Horvath (1989) e Witten (1984)] (estado auto-ligado de 3 sabores de quarks u, d e s). Benvenuto & Horvath (1989) analisaram o sinal de neutrinos de KII, e observaram que o primeiro grupo de neutrinos é concentrado no intervalo de tempo de $\sim 2\text{s}$ associado à deleptonização na formação da proto-estrela de nêutrons via mecanismo prompt, um segundo intervalo depois do gap de $\sim 7\text{s}$ correspondente à neutronização total podendo formar um cenário de matéria estranha e os eventos “atrasados” após $\sim 3\text{s}$ podem ser interpretados como deleptonização da

¹Reação de neutronização da matéria ao longo do colapso: $p^+ + e^- \rightarrow \nu + n$.

proto-estrela-estranha². Esta é a principal motivação teórica na proposta do modelo com duas temperaturas ($T_1 = T_0$ e $T_2 = \text{ap.}T_0$). Sendo T_1 relativa deleptonização e T_2 à neutronização e, possivelmente da formação de matéria estranha [Witten (1984)].

O modelo que propomos é simplificado, sendo composto dois degraus de temperatura constantes em um certo intervalo de tempo. Este modelo apresenta quatro parâmetros: α parâmetro do raio da neutrinosfera, T_0 temperatura de emissão dos neutrinos, α parâmetro de escala para a segunda temperatura e Δt o “intervalo” temporal entre os surtos. O modelo é aplicado à função de verossimilhança construída por Loredó & Lamb (2002) usando os dados dos experimentos Kamiokande (KII - Japão), IMB (EUA) e Baksan (URSS) como foi discutido no capítulo 2. KII observou desesseis eventos, enquanto IMB observou somente oito eventos e Baksan observou apenas cinco eventos. Há uma clara evidência de dois surtos de neutrinos nos dados de KII entre o primeiro e o novo evento ($\sim 2s$). Após $\sim 7s$, entre o décimo e décimo terceiro eventos o segundo surto é razoavelmente evidente. Para os dados de IMB a evidência de dois surtos não é tão clara, entre o primeiro e quinto eventos o intervalo de tempo é de $\sim 1.5s$, após um segundo aparece um sexto evento e há um hiato de $\sim 2.5s$ onde aparecem os eventos sétimo e oitavo. Em Baksan, três eventos foram observados em $\sim 2s$, há um intervalo de $\sim s$ até a detecção do quarto e quinto eventos. Tanto para os eventos de IMB quanto para Baksan não é tão evidente os processos descritos anteriormente por conta da baixa base dados. Mesmo assim os dados relativos aos experimentos foram usados aqui. Como modelagem estatística bayesiana consiste na construção de uma função de verossimilhança composta pelos parâmetros referentes aos modelos a serem testados e aos dados observados nos detectores. Mesmo com um número relativamente pequeno de dados é possível fazer uma análise estatística, algo que a abordagem frequentista não permite. O estudo da função de verossimilhança permite, através de uma análise paramétrica, obter o máximo valor para a função de probabilidade onde os parâmetros são mais prováveis, bem como através do BIC testar modelos com diferentes números de parâmetros usando a tabela 3.1 do capítulo 3 que mostra a força de um modelo em relação a outro. Isto é feito, levando em consideração as funções de verossimilhança dos modelos, a dimensão do espaço de parâmetros e o número de dados. Testamos os modelos com duas temperaturas contra o modelo mais simples de resfriamento exponencial proposto por Loredó & Lamb (2002). O capítulo segue a seguinte sequência: as características dos detectores e a base de dados mostrada no capítulo 2, a expressão para a função de verossimilhança, as distribuições *a priori*, os modelos de temperatura e raio, discussão dos resultados que são apresentados pelas tabelas 4.2, 4.3 e pelos gráficos com os intervalos de credibilidade para os parâmetros, intervalos de confiança frequentistas, BIC para os modelos e o cálculo da energia de ligação. O desenvolvimento do trabalho é apresentado a seguir.

²Em inglês *proto-strange-star*.

4.3. Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança

4.2.1 Características dos detectores e a base de dados

A base de dados foi apresentada nas tabelas 2.4 (KII), 2.5 (IMB) e 2.6 (Baksan) no capítulo 2 e conta com os tempos de chegada (temos de observação dos neutrinos em s), energia inferida de cada evento (MeV), desvio padrão da energia (MeV) e a taxa de ruído para cada evento (dada em número de eventos por segundo menos para IMB). As características dos detectores são apresentadas na tabela abaixo e são dados importantes usados nas funções de verossimilhança.

Tabela 4.1: *Tabela com características dos detectores.*

<i>Detector</i>	<i>KII</i>	<i>IMB</i>	<i>Baksan</i>
<i>Mef</i> (kton)	2.14	6.8	0.28
<i>B</i> (s ⁻¹)	0.187	0.0	0.0345
<i>τ</i> (s)	0.0	0.035	0.0
f	1	0.9055	1.0

A tabela 4.1 mostra dados importantes relativos aos detectores KII, IMB e Baksan: *Mef* é a massa efetiva do detector, *B*(s⁻¹) é a taxa de ruído constante, *τ*(s) tempo morto do detector e f é um termo de correção do ruído.

4.3 Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança

No capítulo 3 introduzimos a inferência bayesiana e a função de verossimilhança para a modelagem de um detector de neutrinos. Todo o formalismo foi desenvolvido por [Loredo & Lamb \(2002\)](#) com parâmetros como a temperatura de emissão dos neutrinos (função de Fermi-Dirac) e a parametrização do raio da neutrinosfera (α). A função de verossimilhança é escrita explicitamente por

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \exp \left[-f \int_T dt \int d\varepsilon \bar{\eta}(\varepsilon) R(\varepsilon, t_i) \right] \quad (4.1)$$

$$\times \prod_{i=1}^{N_d} \times e^{R_{eff}(t_i)\tau} \left[B_i + \int d\varepsilon \mathcal{L}_i(\varepsilon) R(\varepsilon, t_i) \right].$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ é a função de verossimilhança para a detecção de neutrinos, $\bar{\eta}(\varepsilon)$ é a eficiência do detector em função da energia (ε), $R(\varepsilon, t_i)$ é a taxa de captura de neutrinos no detector, B_i é a taxa de ruído integrada pela eficiência, $R_{eff}(t_i)$ é a taxa de captura efetiva e τ é o tempo morto do detector. A função de verossimilhança é baseada na ideia que os dados obedecem uma distribuição tipo poissoniana [[Loredo & Lamb \(2002\)](#)]. O trabalho foi orientado na metodologia adotada por [Loredo & Lamb \(2002\)](#), onde o modelo de resfriamento exponencial é utilizado como referência na escala para os modelos fenomenológicos propostos por nós.

O valor do máximo da função de verossimilhança não é por si só muito significativo, pois o importante são os valores dos parâmetros, que são mais prováveis no máximo da verossimilhança. Na análise do BIC, como vimos anteriormente, modelos com espaço de parâmetros maior são penalizados em relação a modelos com menos parâmetros, isto porque a esta análise basea-se no princípio da it navalha de Ockham.

O valor do máximo próprio da função de verossimilhança para cada modelo não é diretamente significativo, isto porque, o que importa são os valores dos parâmetros que são mais prováveis. na análise do *Bayesian Information Criterion* (BIC) que penaliza modelos com mais parâmetros e favorece modelos mais simples, isto porque utiliza como princípio da *navalha de Ockham*.

4.3.1 Distribuições *a priori*

As distribuições *a priori* testadas em nossos modelos são: priori constante, $1/\alpha^2$, $1/T^4$ e $1/\alpha^2 T^4$. Analisaremos todas as distribuições e a base de dados para todos os três dados observados pelos detectores. A escolha de uma *a priori* constante é relacionada com a idéia de uma distribuição que não tenha dependência com os parâmetros R_ν^3 e T . No caso da priori $1/\alpha^2$ está relacionando com a dependência da luminosidade de neutrinos com $\alpha \propto R_\nu^2$. A terceira *a priori* com $1/T^4$ está relacionada também com a dependência de $\propto T^4$, e por último, uma distribuição *a priori* mista $1/\alpha^2 T^4$ que envolve ambas as dependências.

4.4 Modelos de temperatura e raio da neutrinosfera

Apresentaremos agora os modelos para a temperatura (T) e raio (R) da neutrinosfera. Os modelos têm motivação fenomenológica e tentam descrever o comportamento da temperatura associada aos neutrinos e o raio da neutrinosfera. [Loredo & Lamb \(2002\)](#) analisaram esses modelos e encontraram como modelo que melhor descreveu o comportamento o Resfriamento exponencial (RE) [[Woosley et al \(1986\)](#)] e por isso adotou como base em sua análise, o mesmo é feito neste trabalho mas comparando com modelos com dois surtos de temperaturas [[Benvenuto & Horvath \(1989\)](#)].

a- Resfriamento exponencial (RE):

$$T(t) = T_0 \exp(-t/4\tau). \quad (4.2)$$

e

$$r(t) = 1. \quad (4.3)$$

Onde $r(t)$ é o parâmetro de escala do raio da neutrinosfera, nos modelos tratados neste trabalho consideraremos constante. Isto porque não há um consenso na modelagem do raio da neutrinosfera com a variação da luminosidade de neutrinos.

³O raio da neutrinosfera que é parametrizado por $\alpha/10\text{km}$. Usaremos somente α e para obter o valor do raio é necessário multiplicar por 10km.

É um modelo onde a temperatura (T) decai exponencialmente com o tempo t . O parâmetro τ é o tempo que a luminosidade dos neutrinos (L_ν) permanece constante. A importância deste modelo está no fato que permite testar a hipótese de que o fluxo de neutrinos emitidos diminui com o tempo [Loredo & Lamb (2002)].

b - Dois degraus de temperatura (DT): primeiro degrau de temperatura, há uma queda e depois o segundo degrau:

$$T(t) = \begin{cases} T_0 & \text{para } 0 < t < 2.0s \\ a_p \cdot T_0 & \text{para } 2.0 + \Delta t < t < 5.0 + \Delta t \end{cases} \quad (4.4)$$

e

$$r(t) = 1. \quad (4.5)$$

É um modelo com quatro parâmetros: α , T , a_p (fator de escala menor que 1.0) e Δt (intervalo de tempo entre os surtos). Este modelo supõe duas temperaturas, onde o segundo pico (para temperatura $T_2 = a_p \times T_0$) corresponde a uma transição de fase que possivelmente produz matéria estranha [Benvenuto & Horvath (1989)]. Os modelos para a temperatura são inseridos nas expressões analíticas das taxas de captura que foram mostradas na construção da função de verossimilhança no capítulo anterior. A taxa de captura é função dos parâmetros energia (ε), temperatura (T que está na função de Fermi-Dirac) e raio da neutrinosfera (parametrizado por α). Os resultados da modelagem são apresentados na próxima seção.

4.5 Discussão dos resultados

Os dados são apresentados nas tabelas 4.2, 4.3 e nas figuras de 4.1 à 4.8 onde são mostrados os valores mais prováveis dos parâmetros R_ν e T para o máximo da função de verossimilhança. As tabelas e os gráficos estão organizados em modelos, combinação dos detectores, parâmetros, distribuições *a priori* e função de verossimilhanças. Os intervalos para cada parâmetro foi determinado empiricamente e foi notado que as funções de verossimilhança não variavam sensivelmente para intervalos levemente diferentes, algo que já era esperado. O programa se mostrou sensível na determinação dos valores da máxima verossimilhança ao passo de integração e portanto os mesmos passos foram utilizados para os parâmetros.

Assumimos como modelo padrão para nossa análise o modelo proposto por Loredo & Lamb (2002) de resfriamento exponencial com raio da neutrinosfera constante. O modelo de resfriamento exponencial é mais viável do que outros modelos que consideram uma dependência temporal de $r(t)$ e o tempo de escala da luminosidade constante (τ) são mais difíceis de descrever e conciliar com as expectativas teóricas para os parâmetros, é importante enfatizar que a luminosidade $L_\nu \sim R_\nu^2 T^4$, logo L_ν tem uma variabilidade muito maior com T_ν (por um expoente 4) do que com o R_ν (por um expoente 2). Outro aspecto que reforça essa hipótese, é que em Análise Bayesiana modelos mais simples são favorecidos em detrimento a modelos com mais parâmetros, isto por conta da navalha de Ockham. O modelo de resfriamento exponencial é a

escolha mais adequada em relação a modelos mais complicados tenham a variabilidade tanto da temperatura quanto do raio. Fizemos uma reanálise do modelo proposto por este trabalho combinando o conjunto de dados de KII, IMB e Baksan e as distribuições *a priori*. Os parâmetros R_ν , T e τ variam sensivelmente para diferentes *a priori*'s, isso já era esperado pois há uma dependência explícita de cada um deles. A função de verossimilhança independe das distribuições *a priori* e portanto não varia. Os valores dos valores máximos para as funcao de verossimilhanças são significativos para o teste BIC. Ao contrário do que foi feito por [Loredo & Lamb \(2002\)](#), nossas funcao de verossimilhanças não foram normalizadas e escaladas por um valor, o que é apresentado nas tabelas são os valores próprios delas.

O modelo de resfriamento exponencial, com raio da neutrinosfera constante, é descrito por três parâmetros: α , T e τ , que fornecem raio, temperatura e tempo de luminosidade neutrínica constante. Na tabela 4.2 temos a descrição detalhada deste modelo para quatro distribuições *a priori*: 1 , $1/\alpha^2$, $1/T^4$ e $1/\alpha^2 T^4$. A primeira parte da tabela mostra os dados de KII-IMB combinados para as quatro distribuições e os respectivos valores para os parâmetros para a máxima verossimilhança. No trabalho de [Loredo & Lamb \(2002\)](#), os melhores valores para esses parâmetros são $\alpha = 4.31$, $T = 3.66\text{MeV}$ e $\tau = 4.50\text{s}$, o raio da neutrinosfera é de 43.1km , com erros para essas grandezas $\sim 15\%$. O valor encontrado por nosso trabalho que mais próximo foi para a priori $1/T^4$ com $\alpha = 4.10 \pm 0.66$, $T = 3.60\text{MeV} \pm 0.24\text{MeV}$ e $\tau = 4.75\text{s} \pm 0.10\text{s}$, sendo os valores consistentes com os encontrados por trabalhos anteriores. Nesta análise excluimos os eventos 6 e de 13-16 eventos de KII, porque há dúvidas a respeito do evento 6 que está abaixo do limiar de detecção e por conta do ruído associado aos eventos de 13-14 que foi inferido através do fit do desvio da energia versus energia do evento e porque o trabalho de [Loredo & Lamb \(2002\)](#) mostra maior consistência na estimativa de τ , pois o erro é menor. As figuras 4.1 até 4.4 mostram as curvas de nível⁴ do espaços dos parâmetros mais provável para o máximo da funcao de verossimilhança. A região de credibilidade é mostrada nas figuras e fornecida pelo programa gráfico como sendo a região central que maximiza os parâmetros pela função de verossimilhança com $\sim 90\%$ de credibilidade. Na figura 4.1 para a priori constante, os valores de R e T para K-IMB, K-IMB-Baksan e K-Basan estão na mesma região de credibilidade. Os valores de R estão compreendidos entre $38 - 42\text{km}$ e os da temperatura são os mesmos ($\sim 3.4\text{MeV}$). Na figura 4.2, para a priori $1/\alpha^2$ os valores do $R \sim 25\text{km}$ e $T \sim 3.9\text{MeV}$ para K-Baksan estão na região de credibilidade, enquanto que os valores para K-IMB e K-IMB-Baksan se encontram mais afastados da região central com valores $R \sim 27\text{km}$ e $\sim 33\text{km}$ e temperaturas de $\sim 3.7\text{MeV}$ e $\sim 3.6\text{MeV}$ para as combinações respectivamente. Na figura 4.3, os valores de K-IMB (43km e 3.3MeV) e K-IMB-Baksan (47km e 3.3MeV) estão na parte mais central da região de credibilidade. Enquanto os dados de K-Baksan com 53km e 3.1MeV estão mais afastados da região central. Na figura 4.4 com a priori $1/\alpha^2 T^4$ os valores para K-IMB (34km e 3.5MeV), K-IMB-Baksan (37km e 3.5MeV) e K-Baksan (32km e 3.6MeV) apontam para os valores na parte central da região de credibilidade, para

⁴O programa estatístico utilizado para obter essas curvas de nível foi o R.

esta priori mesmo os valores estando mais próximos as temperaturas estão abaixo do esperado ($\sim 4.0\text{MeV}$). Os valores na região mais central apontam que os valores têm a margem de 90% de serem verdadeiros os valores mais afastados da região central têm essa margem diminuída.

Para o modelo com duas temperaturas e com raio da neutrinosfera constante é descrito por quatro parâmetros: α , T_0 , Δt e ap . O parâmetro α fornece o raio da neutrinosfera, T_0 é a temperatura no primeiro surto, Δt é o intervalo temporal dos surtos e ap é o parâmetro de escala para a temperatura do segundo surto. Na tabela 4.3 os valores são apresentados para quatro distribuições a priori para os dados de K-IMB com raio. Para as quatro distribuições a priori há uma pouca variação do parâmetro Δt que é de $\sim 6.5\text{s}$, o raio tem uma variabilidade maior, sendo 38km o maior valor encontrado para a priori constante e 14km para a priori $1/\alpha^2$. Para as temperaturas, o maior valor foi de 5.0MeV ($1/\alpha^2$) seguido de 4.0MeV e 4.5MeV para $1/T^4$ e $1/\alpha^2 T^4$, respectivamente. O parâmetro $ap \sim 0.7$ varia muito pouco em todas as priori. A temperatura do segundo surto, os valores de 1.97MeV ($1/T^4$) e 1.68MeV são os valores mais próximos de 1.78MeV [Benvenuto & Horvath (1989)]. Na combinação de K-IMB-Baksan, o raio para $1/\alpha^2$ resultou em 17km e o mais alto sendo 26km ($1/T^4$). Os valores das temperaturas são mais próximos e variam de 4.1MeV ($1/T^4$) até o valor mais alto que é 4.8MeV ($1/\alpha^2$). O parâmetro $ap \sim 0.7$ para as quatro distribuições e a temperatura do segundo surto tem os valores de 2.37MeV ($1/\alpha^2$) como sendo o mais elevado e 2.02MeV ($1/T^4$) como sendo o mais baixo e próximo ao estimado teoricamente. O intervalo de tempo $\Delta t \sim 4.5\text{s}$ que é menor que o valor de K-IMB. Para K-Baksan, os raios têm valores mais elevados, sendo o maior 78km para $1/T^4$ por outro lado temperatura mais baixa $\sim 2.6\text{MeV}$. Enquanto que o valor mais baixo para o raio $\sim 33\text{km}$ é encontrado para $1/\alpha^2$ e os valores para as priori 1 e $1/\alpha^2 T^4$ são 40km e 44km, respectivamente. As temperaturas do primeiro surto são relativamente baixas, variando entre 2.6MeV e 3.4MeV. O intervalo de tempo entre os surtos $\sim 5.0 - 6.3\text{s}$ que é próximo ao encontrado por K-IMB. O parâmetro $ap \sim 0.8$ mais elevado que as outras combinações. A temperatura do segundo surto têm valores entre 1.47MeV ($1/\alpha^2 T^4$) mais baixo e 1.92MeV mais alto para 1.0 e $1/\alpha^2$.

Os valores encontrados para o modelo com duas temperaturas combinando os dados de KII, IMB e Baksan apontam uma tendência positiva para as distribuições a priori 1.0 e $1/T^2$ são comparativamente mais próximas para K-IMB e K-IMB-Baksan. As temperaturas para K-IMB e K-IMB-Baksan forneceram valores mais próximos dos encontrados na literatura, enquanto para K-Baksan esses valores encontrados são muito baixos, porém não inaceitáveis. Comparativamente com a abordagem frequentista, estão fora do intervalo de confiança como pode ser visto na tabela 4.1, logo é pouco provável que esses valores sejam aceitáveis.

4.5.1 Intervalos de confiança frequentistas

Nesta subseção apresentamos os intervalos de confiança dos parâmetros dos modelos calculados pela abordagem frequentista. Os parâmetros dos modelos são mostrados

Figura 4.1: Curva de nível para o modelo de resfriamento exponencial para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori constante. Temos as regiões de credibilidade para K-IMB, K-Basan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T . Claramente aponta uma tendência central na região de credibilidade ($\sim 95\%$) para os valores do raio $3.8 - 4.2(\times 10\text{km})$ e para a temperatura $\sim 3.4\text{MeV}$.

Figura 4.2: Curva de nível para o modelo de resfriamento exponencial para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/\alpha^2$. Temos as regiões de credibilidade para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T. Os valores para K-Baksan estão mais centralizados na região de credibilidade (região central com $\sim 95\%$) para o raio $\sim 2.5(\times 10\text{km})$ e temperatura $\sim 3.9\text{MeV}$. Os valores de K-IMB-Baksan ($\sim 3.3(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.6\text{MeV}$) e K-IMB ($\sim 2.7(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.7\text{MeV}$) estão na região de 95%.

Figura 4.3: Curva de nível para o modelo de resfriamento exponencial para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/T^4$. Temos as regiões de credibilidade para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T . Os valores de K-Baksan ($\sim 5.3(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.1\text{MeV}$) estão em 95% da região de credibilidade, K-IMB ($\sim 4.3(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.3\text{MeV}$) está na região de 95% e K-IMB-Baksan ($\sim 4.7(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.3\text{MeV}$) está no limiar da região de 95%.

Figura 4.4: Curva de nível para o modelo de resfriamento exponencial para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/\alpha^2 T^4$. Temos as regiões de credibilidade praticamente coincidindo em 95% para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T. Os valores de K-Baksan ($\sim 3.2(\times 10\text{km})$ e $\sim 3.6\text{MeV}$), K-IMB ($3.4(\times 10\text{km})$ e 3.5MeV) e K-IMB-Baksan ($3.7(\times 10\text{km})$ e 3.5MeV).

Figura 4.5: Curva de nível para o modelo de duas temperaturas para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori 1. Temos duas regiões de credibilidade distintas para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T . Nota-se que K-IMB ($3.8(\times 10\text{km})$ e 3.4MeV) e K-IMB-Baksan ($3.8(\times 10\text{km})$ e 3.4MeV) estão na mesma região de credibilidade. Por outro lado K-Baksan ($2.3(\times 10\text{km})$ e 4.0MeV) estão fora da região de credibilidade de K-IMB o que aponta para uma tendência favorável aos primeiros.

Figura 4.6: Curva de nível para o modelo de duas temperaturas para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/\alpha^2$. Temos as regiões de credibilidade para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T . Nota-se que K-IMB ($1.4(\times 10\text{km})$ e 5.0MeV) e K-IMB-Baksan ($1.7(\times 10\text{km})$ e 4.8MeV) estão na mesma região de credibilidade. Enquanto K-Baksan ($3.3(\times 10\text{km})$ e 3.4MeV) estão fora desta região. A tendência se mostra favorável a K-IMB e K-IMB-Baksan.

Figura 4.7: Curva de nível para o modelo de duas temperaturas para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/T^4$. Os valores para K-IMB ($2.6(\times 10\text{km})$ e 4.0MeV) e K-IMB-Baksan ($2.6(\times 10\text{km})$ e 4.1MeV) que estão na mesma região de credibilidade. K-Baksan está fora e tem o valor para temperatura muito baixo 2.6MeV e o raio da neutrinosfera muito alto 7810km . Os valores mostram uma tendência muito favorável para K-IMB e K-IMB-Baksan.

Figura 4.8: Curva de nível para o modelo de duas temperaturas para os dados de K-IMB-Baksan e distribuição a priori $1/\alpha^2 T^4$. Temos as regiões de credibilidade para as com K-IMB, K-Baksan e K-IMB-Baksan dos parâmetros R e T . Os valores para K-IMB ($1.4(10\text{km})$ e 5.0MeV) e K-IMB-Baksan ($1.7(\times 10\text{km})$ e 4.8MeV) estão na mesma região de credibilidade. K-Baksan com valores ($3.3 \times 10\text{km}$ e 3.4MeV) não coincidem com a região de credibilidade de K-IMB e K-IMB-Baksan. Os valores do raio da neutrinosfera para K-IMB 14km e 17km são muito baixos, porém as temperaturas 5.0MeV e 4.8MeV são valores próximos do estimado teoricamente.

Tabela 4.2: O modelo de resfriamento exponencial (RE) é analisado para todo o conjunto de dados e as distribuições *a priori* [Loredo & Lamb (2002)]. A tabela 4.2 apresenta os valores dos parâmetros raio da neutrinosfera R_ν , temperatura de emissão da neutrinosfera T , tempo de emissão para luminosidade constante τ e energia de ligação E_b .

KII-IMB	$1/\alpha^2$	$1/T^4$	$1/\alpha^2 T^4$	1.0
$R_\nu(10\text{km})$	3.0	4.1	3.2	3.9
$T(\text{MeV})$	3.75	3.6	3.5	3.4
$\tau(\text{s})$	4.70	4.75	4.60	4.75
$E_b(10^{53}\text{ergs})$	2.83	4.54	2.40	3.27
KII-IMB-Baksan				
$R_\nu(10\text{km})$	3.2	4.5	3.9	4.1
$T(\text{MeV})$	3.6	3.25	3.5	3.5
$\tau(\text{s})$	4.75	4.75	4.75	4.70
$E_b(10^{53}\text{ergs})$	2.77	3.64	3.67	4.02
KII-Baksan				
$R_\nu(10\text{km})$	2.8	5.0	3.2	4.0
$T(\text{MeV})$	4.0	3.1	3.6	3.4
$\tau(\text{s})$	4.75	4.9	5.0	4.75
$E_b(10^{53}\text{ergs})$	3.23	3.83	2.91	3.44

na tabela 4.4. A variabilidade dos parâmetros de cada modelo. Para α do modelo RE os valores estão compreendidos no intervalo 3.36 – 4.11 enquanto para o modelo DT 2.74 – 4.19 o intervalo é mais extenso. Para o modelo RE a figura 4.1 na região de confiança para R com os valores sendo 3.8 (K-IMB), 4.0 (K-B) e 4.2 (K-IMB-Baksan), salvo o último valor os outros coincidem bem com o intervalo de confiança frequentista. Para T os valores são iguais em 3.4MeV e estão bem inseridos no intervalo. Para a figura 4.2 os valores para α somente o valor relativo á K-IMB-Baksan estão dentro do intervalo. Na T todos os valores estão no intervalo. Na figura 4.3 nenhum dos valores de α estão no intervalo mas todos os valores de T estão compreendidos no intervalo de confiança. Na figura 4.4, somente o valor relativo a K-IMB-Baksan está fora do intervalo e para T todos coincidem com o intervalo de confiança.

No modelo de DT os valores encontrados de R e T para as distribuições *a priori* $1/\alpha^2$, $1/T^4$ e $1/\alpha^2 T^4$ nas regiões de credibilidade são apresentadas nas figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8. Na figura 4.5 estão fora dos intervalos de confiança, isto sugere que as distribuições para a combinação dos dados de K-IMB e K-IMB-Baksan para esta *a priori* seja descartada. Os valores do raio da neutrinosfera $\sim 14\text{km}$ e $\sim 18\text{km}$ para K-IMB e $\sim 17\text{km}$ e $\sim 2.1\text{km}$ para são pequenos, enquanto que os valores das temperaturas $\sim 5.0\text{MeV}$ e $\sim 4.5\text{MeV}$ são elevados. A tendência para K-Baksan é

Tabela 4.3: O modelo de duas temperaturas (DT) é analisado para todo o conjunto de dados e as distribuições *a priori* [Loredo & Lamb (2002)].

KII-IMB	$1/\alpha^2$	$1/T^4$	$1/\alpha^2 T^4$	1.0
$R_\nu(10\text{km})$	1.4	2.6	1.8	3.8
$T_1(\text{MeV})$	5.0	4.0	4.5	3.4
$\Delta t(\text{s})$	6.1	6.2	6.5	6.5
ap	0.65	0.70	0.70	0.65
$T_2(\text{MeV})$	3.25	2.80	3.15	2.21
$\text{Eb}_1[10^{53}\text{ergs} \times (t/2.0\text{s})]$	0.83	1.17	0.90	1.31
$\text{Eb}_2(10^{53}\text{ergs})$	0.22	0.42	0.32	0.35
KII-IMB-Baksan				
$R_\nu(10\text{km})$	1.7	2.6	2.1	2.3
$T_1(\text{MeV})$	4.8	4.1	4.4	4.3
$\Delta t(\text{s})$	4.5	4.5	4.7	4.5
ap	0.70	0.70	0.70	0.70
$T_2(\text{MeV})$	3.36	2.87	3.08	3.01
$\text{Eb}_1[10^{53}\text{ergs} \times (t/2.0\text{s})]$	1.01	1.29	1.12	1.22
$\text{Eb}_2(10^{53}\text{ergs})$	0.40	0.47	0.40	0.44
KII-Baksan				
$R_\nu(10\text{km})$	3.3	7.8	4.4	4.0
$T_1(\text{MeV})$	3.4	2.6	3.1	3.4
$\Delta t(\text{s})$	6.2	6.0	5.0	5.3
ap	0.80	0.80	0.80	0.80
$T_2(\text{MeV})$	2.72	2.08	2.48	2.72
$\text{Eb}_1[10^{53}\text{ergs} \times (t/2.0\text{s})]$	0.98	1.88	1.21	1.45
$\text{Eb}_2(10^{53}\text{ergs})$	0.61	1.15	0.74	0.89

que as prioris constante e $1/\alpha^2$ estão no intervalo de confiança. Por outro lado, as distribuições *a priori* 1 e $1/T^4$ apresentam valores que estão no intervalo de confiança e no caso da priori constante estão mais próximos com os valores encontrados por Loredo & Lamb (2002), o que reforça a hipótese que há uma tendência favorável para esta *a priori*.

4.5.2 Teste BIC para os modelos

O teste BIC mostra a força de um modelo em relação a outro e penaliza os modelos com o maior número de parâmetros. O modelo de resfriamento exponencial (RE) tem três parâmetros: α , T e τ . Enquanto o modelo com duas temperaturas (DT) possui quatro parâmetros: α , T , Δt e ap . Os valores para as funções de verossimilhanças para o modelo de resfriamento exponencial $\mathcal{L} \sim 10^{-11}$, é importante ressaltar que o valor da função de verossimilhança é o mesmo para os modelos porque

Tabela 4.4: Intervalos de confiança frequentista dos parâmetros para os modelos de resfriamento exponencial (RE) e duas temperaturas (DT).

<i>Modelo</i>	<i>R(10km)</i>	<i>T(MeV)</i>	τ (s)	Δt (s)	ap
<i>RE</i>	3.36 – 4.11	3.33 – 3.62	4.70 – 4.81	–	–
<i>DT</i>	2.18 – 4.14	3.50 – 4.33	–	4.95 – 5.86	0.69 – 0.76

independe da distribuição *a priori*. Enquanto para o modelo com duas temperaturas a função de verossimilhança $\mathcal{L} \sim 10^{12}$. As evidências através do teste BIC apontam que o modelo com duas temperaturas é muito forte ($\ln B_{ij} > 5.0$) em relação ao modelo de resfriamento exponencial para a a distribuição *a priori* constante (melhor resultado apontado na análise de [Loredo & Lamb \(2002\)](#) e também mostrada neste trabalho). Este resultado é importante, pois reforça a hipótese do segundo surto de neutrinos favorecendo esse modelo que mesmo tendo mais parâmetros que o de resfriamento exponencial se apresenta como mais provável comparativamente pelo teste BIC.

4.5.3 Cálculo das energias de ligação para os modelos

O cálculo para as energias de ligação da estrela de nêutrons para os valores dos parâmetros listados nas tabelas 4.2 e 4.3 é calculado por:

$$\frac{E_b}{10^{53}\text{ergs}} = 3.39 \times 10^{-4} \times \alpha^2 \left(\frac{D}{50\text{kpc}} \right)^2 \int_0^\infty \left(\frac{T(t)}{\text{MeV}} \right)^4 r^2(t) dt. \quad (4.6)$$

Onde α é a parametrização do raio da estrela, T é a função da temperatura para os modelos em função do tempo, $r(t)$ é a função que exprime a variação temporal do raio da neutrosfera. A expressão acima assume três sabores (seis espécies) de neutrinos e antineutrinos, cada qual carregando em partes iguais energia de ligação pra fora da estrela e que a expressão é uma razoável aproximação [[Loredo & Lamb \(2002\)](#), [Burrows & Lattimer \(1987\)](#) & [Janka & Hillebrandt \(1989\)](#)]. Nas tabelas 4.2 e 4.3 os valores da energia de ligação (E_b) para os modelos são listados e com os valores calculados apresentados para cada combinação de detectores e respectiva distribuição *a priori*.

Massas das estrelas de nêutrons

“No theory ever solves all the puzzles with which it is confronted at a given time; nor are the solutions already achieved often perfect. On the contrary, it is just the incompleteness and imperfection of the existing data-theory fit that, at any given time, define many of the puzzles that characterize normal science. If any and every failure to fit were ground for theory rejection, all theories ought to be rejected at all times. On the other hand, if only severe failure to fit justifies theory rejection, then the Popperians will require some criterion of ‘improbability’ or of ‘degree of falsification.’ In developing one they will almost certainly encounter the same network of difficulties that has haunted the advocates of the various probabilistic verification theories [that the evaluative theory cannot itself be legitimated without appeal to another evaluative theory, leading to regress”.

Sir Karl Popper, The Structure of Scientific Revolutions.

Conteúdo

5.1	Objetivos	98
5.2	Introdução	98
5.2.1	Base de dados	100
5.3	Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança	100
5.3.1	Distribuições a priori	102
5.4	Discussão dos resultados	104
5.4.1	A distribuição bimodal	104
5.4.2	Teste estatístico BIC	108

5.1 Objetivos

Neste capítulo apresentamos a análise estatística de inferência Bayesiana para a distribuição de massas das estrelas de nêutrons. A likelihood é construída usando uma base de dados composta por cinquenta e quatro objetos que compõem uma variedade de sistemas. A modelagem é feita através de uma distribuição *a priori* com picos gaussianos e os resultados sugerem a existência de uma distribuição bimodal com um pico mais estreito centrado em $1.37M_{\odot}$ e outro mais largo centrado em $1.73M_{\odot}$. O resultado reforça a hipótese da existência de histórias evolucionárias distintas que promove a separação dos objetos em duas populações. O existência um subgrupo de objetos centrado em $1.25M_{\odot}$ também é explorada sob a perspectiva bayesiana. Caso este subgrupo de objetos exista, uma fraca evidência de sua existência foi encontrada. E por último, através do *BIC* analisamos a hipótese da distribuição bimodal versus um pico gaussiano em torno de $1.50M_{\odot}$ ajustado para todos os objetos da base de dados. A análise se mostrou positiva a favor da bimodalidade.

5.2 Introdução

Medidas de massa (M) e raio (R_{ν}) são vínculos importantes para o entendimento da evolução e constituição em estágios finais de vida das estrelas e na formação do objeto compacto remanescente [Bethe (1990)]. E a observação dos mesmos é de fundamental importância na construção posterior de equações de estado (EE), sendo possível testar teorias da matéria em altas densidades. A Teoria de Evolução Estelar sugere que a massa (M) é o parâmetro mais importante na Sequência Principal para estrelas massivas, resultando em objetos compactos numa faixa importante da distribuição .

Acredita-se hoje que estrelas com massas compreendidas entre $8M_{\odot} - 11M_{\odot}$ produzem um caroço degenerado de O – Mg – Ne, o qual deve eventualmente colapsar por captura de elétrons. Nomoto (1987) analisou estrelas com massas $\sim 8.8M_{\odot}$, cuja composição do caroço é de O – Mg – Ne. Massa é acrescida ao núcleo estelar degenerado por dragagem das camadas de He na fase da queima de C. Segundo o modelo proposto por ele, o resultado é um SN tipo II e NE remanescente com massa $\sim 1.30M_{\odot}$. Nomoto & Kondo (1991) estudaram a descoberta de pulsares binários de baixa massa (LMBP's)¹ em aglomerados globulares. Eles investigaram a origem evolucionária desses pulsares bem como, a possibilidade de alguns deles se originarem por colapso de acreção induzida de anãs brancas. Este último processo tem um status difícil de avaliar, já que teoricamente apresenta problemas sérios, embora sua existência seja bem-vinda para obter um canal de formação de estrelas de nêutrons alternativo, possibilidade especialmente importante em aglomerados globulares.

¹Low Mass Binary Pulsar.

Recentemente [Podsiadlowski et al \(2005\)](#) sugeriu que a massa característica esperada para o carvão em objetos de massa intermediária pode ser $\sim 1.25M_{\odot}$. [Siess \(2007\)](#) discute limites inferior e superior de massa na formação do carvão de Fe no colapso de SN em estrelas AGB, analisando propriedades evolutivas na fase final de queima de C. Esse intervalo depende do canal evolutivo, sendo discutido por eles a captura de elétrons em SN. Esse trabalho analisou conjuntos de modelos estelares com massas entre $5 - 11M_{\odot}$, correlacionando valores de metalicidade (Z) com as massas, isso resultou num padrão não-linear. Obtiveram o limite superior de massa para o carvão de $\sim 2.0M_{\odot}$ e o inferior para o canal de O – Ne na limiar da formação de anãs brancas de $\sim 1.05M_{\odot}$. [Poelarends et al \(2008\)](#) discutem a evolução da metalicidade, em estrelas super-AGB's (SAGB) e AGB's na transição entre a formação de anãs brancas e o colapso do carvão para intervalo de massas compreendido entre $7.5 - 9.25M_{\odot}$.

No trabalho de [Schwab et al \(2010\)](#) os autores argumentam a favor da existência de uma distribuição bimodal das estrelas de nêutrons, quebrando a afirmação folclórica de todas elas terem um valor da massa compatível com $1.44M_{\odot}$, e revelando um segundo pico centrado em $1.35M_{\odot}$. Eles analisaram uma base de dados de 14 estrelas de nêutrons com massas bem conhecidas. A formação da supernova nesses objetos de baixa massa se dá basicamente por captura eletrônica, tal canal evolutivo é caracterizado por resultar em valores menores de massa gravitacional e pequenos “kicks” natais. Outros autores, como [Demorest et al \(2010\)](#) estudaram o rádio pulsar binário **PSR J 1614-2230** com massa $1.97M_{\odot} \pm 0.04M_{\odot}$, cuja estrela companheira é uma anã branca algo distigue a história evolucionária e, evidencia a existência de EN's massivas em sistemas binários (HMXRB)². Existe ainda a possibilidade destas massas maiores serem também um direto resultado da carões massivos provenientes de estrelas com $M \geq 19M_{\odot}$ na Sequência Principal, hipótese sugerida por [Timmes et al \(1996\)](#) e defendida por [van den Heuvel \(2010\)](#) entre outros.

O conhecimento da distribuição de massas é de fundamental importância para o entendimento dos mecanismos estelares evolutivos, bem como, os estágios finais que resultam em objetos compactos. [Zhang et al \(2011\)](#) concluíram que a acreção de matéria em sistemas binários por reciclagem aumenta suas massas em $\geq 0.3M_{\odot}$. Esta análise foi motivada pelo trabalho de [Finn \(1994\)](#), o qual determinou limites inferior/superior para as massas de NE. [Finn \(1994\)](#) analisou observações para estrelas de nêutrons em somente quatro rádio pulsares utilizando a Estatística Bayesiana para obter conclusões fortes. O procedimento adotado foi o de aproximar cada ponto observado por uma gaussiana (sendo cada ponto a massa e o desvio padrão), usando uma distribuição *a priori* plana com limite inferior (m_l) e superior (m_u). Os valores encontrados por ele foram: $1.01 < m_l/M_{\odot} < 1.34$, para o limite inferior e $1.43 < m_u/M_{\odot} < 1.64$ para o limite superior. Assim, a questão dos limites de massa e suas relações com os carões pré-supernova e a bimodalidade da distribuição permaneceram em aberto. Nesta Tese, apresentamos uma análise original que visa responder estas questões.

²High Mass X Radio Binary Pulsars.

5.2.1 Base de dados

Para estudar as características pretendidas devemos adotar uma base de dados confiável e o mais homogênea possível. Os dados são extraídos de observações de uma base de dados encontrada na literatura. A base de dados adotada é compilação de 55 ENs feita por Lattimer e colaboradores. Os dados estão disponíveis no site <http://stellarcollapse.org/nsmasses> e são bem ilustrados na figura 5.1. Depois de encontrar os valores centrais através da figura 5.2, incluímos em nossa análise os 55 objetos com desvios compreendidos entre $0.009M_{\odot}$ e $0.548M_{\odot}$. Os dados são continuamente atualizados pela descoberta de novos objetos. A lista de referências completa pode ser encontrada em [Valentim et al \(2011b\)](#). A grande variação das incertezas medidas nos dados correspondem a medições que foram feitas em épocas e metodologias diferentes. Atualmente, muitas técnicas foram aprimoradas melhorando a precisão dos valores de massa.

5.3 Metodologia estatística e construção da função de verossimilhança

Construiremos nessa seção a função de probabilidades bayesiana. A função de verossimilhança é o ponto chave da análise bayesiana por que leva em consideração o que se sabe sobre os dados e o conhecimento teórico sobre as medidas. Como foi mostrado no capítulo 3, assumimos que a verossimilhança é um simples produto das probabilidades independentes do que foi medido por aquilo que se espera à respeito dos dados. Construímos um modelo simples usando o produto de gaussianas na inserção dos dados e dos parâmetros, a forma da função é:

$$\mathcal{L}(\theta|D, \bar{M}) = \left[\prod_i^N p(m_i|D, \bar{M}) \right] \prod_j p(m_j|D, \bar{M}). \quad (5.1)$$

Onde θ representa os espaço dos parâmetros, D é o conjunto dos dados, $\bar{M}$ os modelos, $p(m_i|D, \bar{M})$ é a probabilidade para os dados e $p(m_j|D, \bar{M})$ é a probabilidade esperada para os dados. Em outras palavras, a likelihood é o produto das probabilidades independentes para as massas medidas vezes o produto do que espera-se medir. A likelihood é ponderada pelo produto do conjunto de dados (D) assumindo o modelo ($\bar{M}$). A função de verossimilhança em nosso caso é

$$\mathcal{L}(\theta|D, \bar{M}) = -\exp \int n_p(M, M_1, M_2, a, \sigma_{M_1}, \sigma_{M_2}, a_0) dM \times \quad (5.2)$$

$$\prod_i^N a \times g(M_1, \sigma_{M_1}, M_i, \sigma_i) + (1 - a - a_0) \times \quad (5.3)$$

$$g(M_2, \sigma_{M_2}, M_i, \sigma_i) + a_0 \times g(1.25, 0.07, M_i, \sigma_i)$$

Onde n_p é a função que envolve os picos das massas M_1 , M_2 , a que é a amplitude

Figura 5.1: Massa de NE's medidas em sistemas binários obtido de <http://stellarcollapse.org/nsmasses>.

Figura 5.2: Massa de NE's medidas em sistemas binários [Valentim et al \(2011b\)](#).

total e a_0^3 é a amplitude centrada em $1.25M_{\odot}$, assumindo um desvio padrão de $\simeq 0.07$, σ_{M_1} , σ_{M_2} são os desvios para os picos teóricos. A função n_p é dada pela expressão

$$n_p(M, M_1, M_2, a, \sigma_{M_1}, \sigma_{M_2}, a_0) = a \times \exp \left[-\frac{(M - M_1)^2}{\sigma_{M_1}^2} \right] \quad (5.4)$$

$$+ a_0 \times \exp \left[-\frac{(M - 1.25)^2}{0.07^2} \right] + [1 - (a + a_0)] \times \exp \left[-\frac{(M - M_2)^2}{\sigma_{M_1}^2} \right]. \quad (5.5)$$

5.3.1 Distribuições a priori

Como foi discutido no capítulo 3, a distribuição *a priori* “carrega o subjetivismo” estatístico que a abordagem frequentista não insere na formulação dos modelos e na análise dos dados. Pode ser entendida como o conhecimento prévio a respeito de um determinado fenômeno que é baseado em uma hipótese. A análise é baseada nos trabalhos de [Finn \(1994\)](#) e [Schwab et al \(2010\)](#), onde a escolha da distribuição gaussiana na análise bayesiana é uma “natural escolha” [vide [Finn \(1994\)](#)]. Testamos modelos com duas distribuições *a priori*: uma com dois picos gaussianos centrados em $1.35M_{\odot}$ e $1.55M_{\odot}$ mais a análise da amplitude de um terceiro pico em $1.25M_{\odot}$ e um pico extenso com abrangência de todos os objetos centrado em $1.50M_{\odot}$.

³Onde $0 \leq a + a_0 \leq 1.0$.

O primeiro modelo é baseado no trabalho de Schwab et al (2010), onde foram analisadas quatorze EN's previamente selecionados que não incluíam medidas com grande incerteza, neste análise estão incluídos sistemas binários de raios-X, AN-EN's⁴ e EN-EN's. O primeiro pico em $1.35M_{\odot}$ é relativo aos objetos de baixa massa, enquanto o segundo pico centrado em $1.55M_{\odot}$ é um valor médio entre os objetos de massas maiores nos sistemas binários de raios-X, AN-EN's e EN-EN's. A idéia principal é abranger todos os objetos da base de dados. Com isso, também analisamos a hipótese de um pico extenso que abrange todos os valores. Para isso, ajustamos uma distribuição gaussiana sobre todos os objetos da base de dados (vide figura 5.2), o valor médio para os objetos é $1.50M_{\odot}$. Além da hipótese relativa à distribuição bimodal, analisamos também a existência de um subgrupo de objetos com massa em $1.25M_{\odot}$. O subgrupo é atribuído por Schwab et al (2010) está relacionado a formação de objetos a partir de caroços de O – Mg – Ne que produziriam estrelas de nêutrons de baixa massa. A existência deste subgrupo é avaliada a partir da amplitude (a_0) relativa do pico em relação aos dois principais picos, esta hipótese é inserida na likelihood.

A análise bayesiana permite avaliar as hipóteses assumidas na modelagem a partir dos dados observados. Os valores de M_1 e M_2 foram determinados pelo modelo junto com seus respectivos σ_{M_1} σ_{M_2} . As distribuições *a priori* no formato gaussiano e com a notação bayesiana é:

$$p(x|D, \bar{M}) = (1/\sigma_x\sqrt{2\pi})\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right], \quad (5.6)$$

onde $p(x|D, \bar{M})$ é a distribuição gaussiana e x é o parâmetro do modelo, D é o conjunto de dados observados e $\bar{M}$ representa o modelo.

A distribuição bimodal é para os picos $1.35M_{\odot}$, $1.55M_{\odot}$, M_1 , M_2 , a , σ_{M_1} , σ_{M_2} e a_0 .

A distribuição *a priori* para o pico extenso que ajusta todos os objetos da figura 5.2 é dada por:

$$p(M, \sigma_M|D, \bar{M}) = p(M|D, \bar{M}) \times p(\sigma_M|D, \bar{M}), \quad (5.7)$$

onde M é a massa em torno de $1.50M_{\odot}$ e σ_M é o desvio padrão para o ajuste. A comparação de um modelo versus outro é feita através do *Bayesian Information Criterion* (BIC), cuja expressão é:

$$\ln B_{ij} = \ln [\mathcal{L}_i(\theta, \phi)/\mathcal{L}_j(\theta)] - \frac{1}{2}m_{\phi}\ln N. \quad (5.8)$$

Onde $\mathcal{L}_i(\theta, \phi)$ e $\mathcal{L}_j(\theta)$ são os máximos das funções de verossimilhança para cada um dos modelos, ϕ é o parâmetro adicional, m_{ϕ} é a dimensão de ϕ e N é o número de dados. O BIC penaliza modelos com um número maior de parâmetros a favor de modelos mais simples e exprime a força de um modelo em relação a outro.

⁴Anãs Brancas (AN) e Estrelas de Nêutrons (EN).

5.4 Discussão dos resultados

Discutiremos nessa seção os resultados encontrados na análise bayesiana para a distribuição de massas dos objetos da base de dados apresentada na figura 5.1. Nas duas seções anteriores mostramos como a modelagem estatística foi desenvolvida a partir dos dados e de hipóteses assumidas previamente. Os objetos apresentados na figura 5.1 e representados esquematicamente no histograma da figura 5.2. Cada objeto é representado por um ponto em uma função gaussiana e seu respectivo desvio⁵ e ao contrário de outros autores, não selecionamos os objetos, assumimos apenas os valores de massas e os desvios. Os resultados são apresentados a seguir.

5.4.1 A distribuição bimodal

A análise para a distribuição *a priori* bimodal multiplicados pela função de verossimilhança aproximam os valores com massa inferior e superior resultaram em picos gaussianos centrados em $1.37M_{\odot}$ e $1.73M_{\odot}$, como é ilustrado na figura 5.3. A maximização é feita encontrando os valores dos parâmetros no máximo valor da verossimilhança. Os sistemas binários podem ter acrecido entre $0.1 - 0.2M_{\odot}$ de matéria em suas massas totais. E cada EN pela modelagem adotada, “prefere” um dos picos da distribuição. Os trabalhos de [van der Meer et al \(2007\)](#) e [Rawls et al \(2011\)](#) mostram que deve existir um extremo inferior de massa em torno de $1M_{\odot}$ [[Clark et al \(2002\)](#) e [Freire et al \(2008\)](#)], enquanto [Demorest et al \(2010\)](#) apresenta um objeto com $1.97M_{\odot} \pm 0.04M_{\odot}$, alguns poucos candidatos massivos, como pode ser visto na figura 5.1.

A figura 5.4 ilustra os desvios associados às massas mostradas na figura 5.3. Os intervalos de massas de $M_1 = 1.37M_{\odot} \pm 0.06M_{\odot}$ e $M_2 = 1.73M_{\odot} \pm 0.36M_{\odot}$ não são diferentes dos valores encontrados por [Schwab et al \(2010\)](#). Isso não é surpresa, desde que conhecidos os sistemas AN - EN e os sistemas binários de raios-X que têm valores elevados para as incertezas associados às massas das EN's.

Em nossa análise, objetos com massas acima de $2.0M_{\odot}$ não são esperados ou podem ser raros e podem estar no intervalo do pico superior de massa $M_2 = 1.73M_{\odot} \pm 0.36M_{\odot}$. Objetos de baixa massa, podem compor o pico centrado em $M_1 = 1.37M_{\odot} \pm 0.06M_{\odot}$, algo compatível com o que foi encontrado por [Schwab et al \(2010\)](#). Um objeto com valor elevado da massa, recentemente anunciado por [Demorest et al \(2010\)](#) com $1.97M_{\odot} \pm 0.04M_{\odot}$ sugere acreção de décimos de $\simeq M_{\odot}$, ou também, objetos remanescentes de estrelas com massas $> 20M_{\odot}$ [[Timmes et al \(1996\)](#) e [van den Heuvel \(2004\)](#)]. Um ponto importante que deve ser ressaltado, é que o modelo considera cada valor dos dados medidos individualmente, sendo que cada ponto provê sua contribuição no valor final da distribuição bimodal. A distribuição em torno de M_1 é mais estreita devido à maior concentração de dados nas proximidades desse valor. O desvio associado à M_2 é de $\sim 20\%$ por conta do menor número de objetos com massas acima de $1.55M_{\odot}$.

⁵Os valores foram medidos por técnicas diferentes e, portanto os desvios associados apresentam valores distintos.

Figura 5.3: A figura ilustra o modelo para uma distribuição a priori bimodal versus a função de verossimilhança. O resultado são duas massas centradas em $1.37M_{\odot}$ e $1.73M_{\odot}$ como foi publicado em [Valentim et al \(2011b\)](#).

O terceiro aspecto que analisamos é a existência de um subgrupo de objetos com massas em $\sim M = 1.25M_{\odot}$. O modelo do subgrupo foi inserido na likelihood que analisou a distribuição bimodal dos objetos e é mostrada na figura 5.5.

A função de verossimilhança não normalizada e o valor máximo para $a_0 \simeq 0.025$,

Figura 5.4: Desvios associados à distribuição a priori com massas centradas em $M_1 = 1.37M_\odot$ e $M_2 = 1.73M_\odot$ [Valentim et al (2011b)]. Nota-se que o σ_{M_1} é menor que σ_{M_2} porque há um menor número de objetos com valores elevados de massas.

o que evidencia a baixa probabilidade da existência de uma distribuição de massas em torno desse valor. A distribuição cai monotonicamente para zero para a amplitude (a_0) em torno do pico $1.25M_\odot$. Se existir uma “concentração” de valores próxima à $1.25M_\odot$ sua amplitude é muito baixa. Estatística Bayesiana analisa a plausibilidade da hipótese, no caso dessa distribuição, podemos dizer que é pouco plausível. Podemos concluir que há uma pequena evidência de um subgrupo de baixa massa e que quatro objetos no intervalo devem ser membros do pico $1.37M_\odot$. Entretanto, a confirmação desse resultado teria importantes consequências desde que estrelas dos progenitores fossem completamente abundante. A falta de uma evidência mais concreta para

Figura 5.5: Probabilidade da existência da distribuição centrada em $1.25M_{\odot}$ [Valentim et al \(2011b\)](#).

a existência do pico $1.25M_{\odot}$ pode apontar para uma amostra muito pequena de objetos com massas próximas a esse valor ou também, pode significar que estrelas com massas entre $8 - 11M_{\odot}$ podem se tornar AGB. Em um trabalho recente de [Ozel et al \(2012\)](#) mostra que estrelas de nêutrons podem nascer com massas médias de $1.28M_{\odot} \pm 0.24M_{\odot}$, que seriam provenientes de acreção de massa em sistemas binários de altas massas. Estes resultados são consistentes com nossa análise, pois abrangem tanto os objetos de baixa massa ($\sim 1.25M_{\odot}$), que atestamos ser pouco provável, quanto ao primeiro pico ($\sim 1.37M_{\odot}$) da distribuição bimodal. [Ozel et al \(2012\)](#) também encontraram uma segunda distribuição centrada em $1.33M_{\odot} \pm 0.06M_{\odot}$ que também pode abranger o primeiro pico. Para os objetos com altas massas, eles encontraram $1.48M_{\odot} \pm 0.2M_{\odot}$, diferentemente do encontrado neste trabalho ($1.73M_{\odot} \pm 0.36M_{\odot}$) e não explica a existência de objetos de mais alta massa como o enunciado por [Demorest et al \(2010\)](#) algo que nossa análise explica na existência do segundo pico.

5.4.2 Teste estatístico BIC

Uma análise complementar foi a comparação usando o BIC para a existência de dois picos centrados em $1.37M_{\odot}$ e $1.73M_{\odot}$ relativos à bimodalidade da formação de estrelas de nêutrons contra uma distribuição unimodal centrada em $1.50M_{\odot}$ com 3σ de largura [Valentim et al (2011a)]. A tabela 5.1 mostra os valores das likelihoods para os modelos que analisamos.

Tabela 5.1: Tabela com os valores das funções de verossimilhança para os modelos de distribuição de massas.

<i>Modelo</i>	<i>Parametros</i>	<i>Likelihood</i>
<i>Bimodal</i>	5	3.82×10^{-6}
<i>Unimodal</i>	2	5.84×10^{-11}

O cálculo do BIC através dos dados acima e da equação 5.11 é avaliado por meio da tabela 3.1 de Jaynes mostra que o resultado $\ln B_{ij} \simeq 5$ é forte a favor da distribuição bimodal contra a distribuição unimodal. Este resultado reforça a hipótese da bimodalidade [Valentim et al (2011a)]. Algumas conclusões atestadas por nossa análise são: pouca sustentabilidade da hipótese de distribuição unimodal, dado que a o approach bayesiano adota a inserção de parâmetros, pesos relativos às incertezas dos dados aplicados ao modelo de distribuição bimodal. O indicativo da existência de uma distribuição com duas populações de massas, com um pico para objetos de baixa massa ($< 8M_{\odot}$) e outro pico para objetos com alta massa ($8 - 11M_{\odot}$ na Sequência Principal), o que aponta mecanismos evolutivos distintos que permitem a formação de supernovas e posteriormente estrelas de nêutrons. A “forte” dependência do modelo com os dados observados. O modelo se mostra promissor, de tal modo que uma base de dados maior, com menores incertezas pode melhorar a análise. Sugerimos esse contínuo aprimoramento deste tipo de análise porque novos objetos serão descobertos e adicionados a base de dados, o que permitirá uma compreensão dos mecanismos de formação de objetos compactos, em especial, estrelas de nêutrons.

Discussão dos resultados

“The ability to perceive or think differently is more important than the knowledge gained.”

David Bohm

Conteúdo

6.1	Objetivos	110
6.2	Considerações finais sobre modelos de temperatura e raio de estrelas de nêutrons	110
6.2.1	Perspectivas	112
6.2.2	Modelagem estatística	113
6.2.3	Perspectivas	114

6.1 Objetivos

Apresentaremos as principais reflexões e conclusões acerca do trabalho apresentado nesta tese. Discutiremos brevemente toda construção estatística para a análise paramétrica, bem como, os resultados relativos a análise do sinal de neutrinos da SN1987A para modelos de temperatura e raio da neutrinosfera que foi mostrado no capítulo 4 e à distribuição de massas das estrelas de nêutrons remanescentes apresentada no capítulo 5. Algumas considerações são discutidas separadamente para cada parte relativa do trabalho, bem como a modelagem estatística, o que pode ser concluído e suas perspectivas futuras.

6.2 Considerações finais sobre modelos de temperatura e raio de estrelas de nêutrons

Analizamos sob a perspectiva Bayesiana os neutrinos da supernova SN1987A da Grande Nuvem de Magalhães observados pelos detectores Kamiokande II, IMB e Baskan. Através do formalismo estatístico desenvolvido por [Loredo & Lamb \(2002\)](#) que permite a modelagem e a análise paramétrica para a temperatura (T) de emissão dos neutrinos e o raio da neutrinosfera (R). Diferentemente de outras análises encontradas na literatura [[Bahcall & Glashow \(1987\)](#), [Sato & Suzuki \(1987\)](#), [Arnett & Rosner \(1987\)](#), [Burrows & Lattimer \(1987\)](#) entre outros], a abordagem proposta por [Loredo & Lamb \(2002\)](#) utiliza a construção de funções likelihoods através de modelos de emissão, propagação através do espaço e captura em detectores terrestres levando em consideração eventos relativos aos ruídos dos experimentos. A estrela de nêutrons remanescente da explosão da SN1987A emite neutrinos como um espectro de um “corpo negro” de férmions. Na modelagem estatística são usadas taxas de emissão e captura que prioritariamente funções do tempo e da energia dos neutrinos, todo o formalismo foi mostrado no capítulo 3 e complementado no apêndice A. As expressões analíticas para taxas de emissão de neutrinos emergem de resultados numéricos para o colapso estelar [[Burrows & Lattimer \(1987\)](#), [Janka & Hillebrandt \(1989\)](#) entre outros] e são descritas pelo espectro térmico de Fermi-Dirac com a temperatura $T(t)$ dependente do tempo. Antineutrinos eletrônicos são emitidos de uma neutrinosfera (possivelmente dependente do tempo) com $R_\nu(t)$. A propagação dos neutrinos é feita através do cálculo do fluxo (taxa de emissão / quadrado da distância) que chega até a Terra. Por último na modelagem, a taxa de captura no detector que é função da energia dos neutrinos à quarta potência, da função de Fermi-Dirac (por conta da emissão térmica de férmions), de uma função relativa aos processos de interação neutrino-alvo (função da energia), parâmetro do raio da neutrinosfera e outro em função do raio da relativo (relativo ao fluxo $\sim R_\nu^2$). A modelagem da taxa de emissão/captura de neutrinos em detectores terrestres permite

construir a likelihood com a probabilidade da ocorrência de observação de um evento no detector. Um trabalho similar foi feito por [Pagliaroli et al \(2009\)](#) e consideram os além das energias e tempos de chegada a distribuição angular dos eventos. A função de verossimilhança é baseada em processos poissonianos, e presume-se que a probabilidade para a ocorrência de qualquer evento em um intervalo infinitesimal de tempo, volume, direção e energia é independente de qualquer outro evento que ocorra em outro intervalo, isso implica na descrição de uma probabilidade de Poisson.

Os modelos para temperatura $[T(t)]$ e raio $[R(t)]$ são basicamente fenomenológicos baseados no trabalho de [Loredo & Lamb \(2002\)](#) e usamos somente modelos de cooling inspirados em cálculos numéricos do colapso estelar para mecanismos prompt. O modelo utilizado como referência em nossa análise o o modelo de resfriamento exponencial (que possui três parâmetros: temperatura T_0 , tempo t e tempo de luminosidade constante τ) e fator de diluição ¹ $r(t)$ constante. Os valores de $\alpha = 4.1$, $T_0 = 3.6\text{MeV}$ e $\tau = 4.4\text{s}$ consistentes com os valores de [Loredo & Lamb \(2002\)](#). Apresenta uma tendência favorável para a distribuição a priori constante em relação as outras distribuições. Isto pode ser visto claramente na tabela 4.2 para dos dados de K-IMB-Baksan. Os valores próprios do máximo da likelihood não são de grande importância mas o aspecto fundamental é do valor relativo a outros modelos para o *Bayesian Information Criterion*. O modelo com duas temperaturas constantes (T_0 , $\alpha \times T_0$, Δt e α) apresenta quatro parâmetros, a temperatura do primeiro surto (T_1), o intervalo de tempo entre os surtos (Δt), o parâmetro de escala adimensional que fornece a temperatura do segundo surto (T_2) e o parâmetro do raio da neutrinosfera (α). A proposta deste modelo fenomenológico tem duas motivações: a primeira é relativa *gap temporal* entre o nono neutrino observado por KII e o décimo algo $\sim 7\text{s}$, algo que não fica muito evidente em IMB porque o experimento pode não ter observado alguns eventos, mas é mais claro nos dados de Baksan, pois a diferença de tempo $\sim 6\text{s}$ e a origem deste segundo surto ser proveniente da formação de matéria estranha no interior da estrela de nêutrons remanescente [[Benvenuto & Horvath \(1989\)](#)].

A distribuição temporal da chegada dos neutrinos se mostra muito favorável há existência dois surtos, isto pode ser visto claramente nos dados de KII e Baksan e não tão claramente nos dados de IMB. Em nossa modelagem, encontramos para a priori constante os seguintes valores: $R \sim 23\text{km}$, $T_1 \sim 4.3\text{MeV}$, $T_2 \sim 3.0\text{MeV}$, $\Delta t \sim 4.5\text{s}$, $E_{b1} \sim 1.31 \times (t/2.0\text{s}) \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do primeiro surto) e $E_{b1} \sim 0.44 \times (t/2.0\text{s}) \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do segundo surto) (KII-IMB-Baksan); $R \sim 38\text{km}$, $T_1 \sim 3.4\text{MeV}$, $T_2 \sim 2.7\text{MeV}$, $\Delta t \sim 6.5\text{s}$, $E_{b1} \sim 1.31 \times (t/2.0\text{s}) \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do primeiro surto) e $E_{b2} \sim 0.35 \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do segundo surto) (KII-IMB) e $R \sim 40\text{km}$, $T_1 \sim 3.4\text{MeV}$, $T_2 \sim 2.7\text{MeV}$, $\Delta t \sim 6.0\text{s}$, $E_{b1} \sim 1.45 \times (t/2.0\text{s}) \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do primeiro surto) e $E_{b2} \sim 0.89 \times 10^{53}\text{ergs}$ (energia do segundo surto) (KII-Baksan). Os valores da energia E_{b1} se mostram menores em relação à expectativa teórica [[Burrows & Lattimer \(1986\)](#)], isto porque o intervalo de tempo do primeiro surto é subestimado em $\sim 2.0\text{s}$ pois os dados parecem mostrar um valor maior para

¹Interpretado fisicamente como um fator que diminui o raio da neutrinosfera.

o surto ($\geq 2s$). Na tabela 4.3, inserimos um fator de correção $t/2.0s$ para os valores da energia do primeiro surto. Se o tempo do primeiro surto for $> 2.0s$, o valor de E_{b1} será maior, enquanto que E_{b2} não sofrerá alteração porque o fator ap vai diminuir sozinho e se ajustar, de tal forma que a emissão do segundo surto continuará sendo de $\sim 3s$. A inserção do fator $t/2.0s$ faz a correção necessária para o tempo de surto ajustando também os valores da energia do primeiro surto (E_{b1}) e, consequentemente a energia total (E_b).

Esses valores são condizentes e apontam uma tendência favorável para a distribuição a priori constante. O mesmo se verifica para o modelo de resfriamento exponencial, sendo os valores relativos a esta priori apresentados por [Loredo & Lamb \(2002\)](#). O trabalho de [Benvenuto & Horvath \(1989\)](#) apresenta temperatura prevista teoricamente para o segundo surto de $\sim 1.78MeV \pm 0.6MeV$, os resultados encontrados por nós estão condizentes com esse trabalho, mas há uma diferença fundamental: esse valor foi obtido somente sobre os dados KII, cuja a energia média é mais baixa e, consequentemente, a temperatura também. O teste BIC aponta que o modelo com dois surtos de neutrinos é muito forte comparado com o modelo de resfriamento exponencial. Isto foi mostrado no capítulo 4 na seção que trata do Bayesian Information Criterion, e apresenta a força do modelo com duas temperaturas em relação ao modelo de resfriamento exponencial. O fato de Bayes se mostra muito favorável $\ln > 5$ a existência do segundo surto de neutrinos. Este resultado é importante e se mostra muito promissor na modelagem fenomenológica de dois surtos.

6.2.1 Perspectivas

O trabalho apresenta perspectivas no aprimoramento da função de verossimilhança bayesiana procurando modelar a dependência angular das funções de eficiência [[Loredo & Lamb \(2002\)](#) & [Pagliaroli et al \(2009\)](#)] e dos eventos individualmente. Tais aprimoramentos podem melhorar a metodologia de análise. Outra sugestão que consideramos importante, é a inclusão dos dados de LSD que foram descartados na época por conta da diferença temporal, mas que recentemente, em uma reanálise ganharam força como sendo considerados verdadeiros e portanto, podem ser utilizados na base de dados e melhorando a análise. Outra possibilidade que se mostrou promissora é o teste de modelos com duas temperaturas, que exige um aprimoramento adicional e testes com um maior número de parâmetros e a inclusão de de uma função temporal para $r(t)$ relativo ao raio da neutrinosfera.

Outra sugestão importante fazer uma revisão do trabalho [Benvenuto & Horvath \(1989\)](#) incluindo os dados de IMB, Baksan e possivelmente LSD. Esta revisão encontrará valores para a temperatura do segundo surto mais altas, pois a energia média dos neutrinos dos dados de IMB e Baksan são mais altas que os valores de KII.

Em trabalhos futuros, temos a intenção de estender a modelagem bayesiana para outros detectores de neutrinos com a finalidade de testar mais modelos para a descrição da temperatura e raio da neutrinosfera. Outra perspectiva possível

é a extensão da metodologia de modelagem para detectores de raios cósmicos do experimento Pierre Auger através de análises paramétricas para mecanismos de aceleração, propagação e composição.

6.2.2 Modelagem estatística

Este trabalho desenvolveu a metodologia estatística bayesiana para a base de dados compilada das estrelas de nêutrons no site <http://stellarcollapse.org/>. A análise compreendeu somente a massa medida/inferida da estrela de nêutrons e o desvio padrão associado. Construímos um modelo com uma distribuição bimodal e um terceiro pico centrado em $1.25M_{\odot}$. Diferentemente de outras análises feitas por outros autores. Schwab et al (2010) analisaram quatorze objetos com massas bem conhecidas e concluíram que a existência da população de baixa massa está em $\sim 1.25M_{\odot}$ proveniente de captura de elétrons, enquanto que a distribuição relativa aos objetos de alta massa está em $\sim 1.35M_{\odot}$ que seria relativa ao colapso do caroço de Fe. Consideramos esta análise incompleta, pois utilizaram poucos objetos (~ 14) e praticamente não consideram objetos com massas mais elevadas, logo a análise está compreendida no intervalo de massas de $\sim 1.33 - 1.43M_{\odot}$ para objetos com EN's de massa reciclada e $\sim 1.24 - 1.38M_{\odot}$ EN's de massas jovens. O que é argumentado neste e em outros trabalhos é o fato das incertezas que envolvem as massas dos objetos, e portanto, objetos com massas bem determinadas são mais confiáveis para serem analisados.

Estes autores fizeram um tratamento bayesiano estimando o erro das massas das estrelas do sistema binário e usaram o produto de duas distribuições a priori: uma estimando o valor médio da massa e outra estimando o erro na media dos objetos. O tratamento deste trabalho difere do nosso no aspecto que usamos a idéia “dados observados vs. modelo para os dados”, ao contrário daquele que insere o modelo como parte dos dados. O valor inferior para o pico encontrado por Kiziltan et al (2010) ($1.35M_{\odot}$) é coincidente com o valor encontrado por nós ($1.37M_{\odot}$) dentro de $1\sigma_M$. O segundo pico encontrado por eles $1.50M_{\odot}$ também é consistente com o valor encontrado em nossa análise, pois obtivemos $1.73M_{\odot} \pm 0.36M_{\odot}$ que está no intervalo de confiança. Em nossa análise objetos como o encontrado por Demorest et al (2010) estão naturalmente dentro do segundo pico de massa, algo que a análise deles não permite tão diretamente. No trabalho muito recente de Ozel et al (2012) foram obtidas três populações distintas para estrelas de nêutrons: a primeira em torno de $1.28M_{\odot} - 0.28M_{\odot}$ para HMXBS + Slow PSRs, uma distribuição mais estreita em $1.33M_{\odot} - 0.06M_{\odot}$ para a população de sistemas de EN's duplas $1.48M_{\odot} - 0.20M_{\odot}$ que não acretam matéria depois da sua formação e uma terceira e última população de estrelas com matéria acretada. Neste trabalho eles mostram que a distribuição das três populações estão próximas e que possivelmente, objetos centrados em $1.33M_{\odot}$ pertençam a uma das duas outras distribuições. Ozel et al (2012) montam sua análise estatística sobre os parâmetros observacionais das medidas de massas das estrelas e os dados observados. Essa análise também encontrou resultados que concordam com nossas conclusões e portanto, apontam na direção da bimodalidade e não para

uma massa única. Nas conclusões estes autores argumentam que a distribuição das massas das estrelas de nêutrons nascentes é de natureza bimodal, e que não há uma clara evidência de unimodalidade. Mostramos nesta Tese que a bimodalidade é claramente mais provável que a unimodalidade. Fizemos isto sem impor nenhum viés na escolha da amostra, ou seja, explorando de forma plena as vantagens do tratamento para incertezas díspares e com umas a priori mínimas. Acreditamos que a convergência dos nossos resultados e os resultados dos estudos referenciados elimina de vez a possibilidade de uma massa única para todas as EN observadas que paira na literatura e nos textos gerais.

6.2.3 Perspectivas

Uma continuação natural do trabalho é a reanálise para uma base de dados mais atualizada. Novos dados provavelmente modificarão os valores da distribuição bimodal ($M_1 \sim 1.37M_\odot$ e $M_2 \sim 1.73M_\odot$), bem como o valor da amplitude para o pico centrado em $M \sim 1.25M_\odot$. Mesmo assim a evidência da distribuição bimodal não pode ser descartada, isto pode ser reforçado com mais dados coletados de novos objetos.

Outra perspectiva interessante, é analisar as populações de estrelas de nêutrons isoladamente, isto é dividir o conjunto de dados em grupos: estrelas binárias de raios-X de baixa massa com objetos até $M \sim 1.25M_\odot$, binárias de raios-X de massa intermediária com objetos compreendidos entre $1.35M_\odot < M < 1.55M_\odot$ e objetos com massas superiores à $M > 1.55M_\odot$ que englobariam objetos de alta massa. Esta análise pode tentar estabelecer limites inferior e superior para as massas das estrelas de nêutrons no limiar de formação de AB-EN's e EN-BN, algo que Finn (1994) e Özel et al (2010) e Özel et al (2012) procuram fazer em seus trabalhos.

Construção da função de verossimilhança

A.1 Função de verossimilhança

Derivaremos a função de probabilidade bayesiana [Loredo & Lamb (2002)] para os dados de neutrinos provenientes da supernova SN1987A. Partiremos da definição do conjunto de proposições $\{B_i\}$ e do cálculo da probabilidade de A assumindo C verdadeiro, temos então:

$$p(A|C) = \sum_i p(A, B_i|C). \quad (\text{A.1})$$

A probabilidade acima não pode ser calculada diretamente mas através da relação mostrada no capítulo 2, a probabilidade $p(A|C)$ pode ser escrita:

$$p(A|C) = \sum_i p(A|B_iC)p(B_i|C). \quad (\text{A.2})$$

A construção da função de probabilidade na descrição de um detector de neutrinos é feita pelo produto entre as probabilidades das detecções e das não detecções. As primeiras dizem respeito somente, quando uma fotomultiplicadora é disparada pela ocorrência de um evento, por ruído de fundo, etc. A probabilidade relativa as não detecções diz respeito apenas “a não ocorrência” de um evento, isto é, somente quando não há disparo das fotomultiplicadoras, também podendo envolver os limites inferior e superior de energia do detector.

Denotaremos a probabilidade de não detecção por $p(\bar{d}_j|\mathcal{P}, \mathcal{M})$, $\mathcal{S}^m$ explicita o sinal para o número m de eventos observados e $\mathcal{B}^n$ para n eventos relativos ao ruído de fundo ocorridos.

$$p(\bar{d}_j|\mathcal{P}, \mathcal{M}) = \sum_0 \sum_0 p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^m, \mathcal{B}^n|\mathcal{P}, \mathcal{M}). \quad (\text{A.3})$$

Cada termo envolverá distribuições de probabilidades poissonianas para m eventos, proporcionais a $(R\delta t)^m$, e n eventos de ruído de fundo, proporcionais $(B\delta t)^m$. Desde que os intervalos δt sejam muito pequenos (onde $R\delta t \ll 1$ e $B\delta t \ll 1$), onde são negligenciadas as possibilidades que envolvem a ocorrência de mais de um evento por intervalo de tempo δt . Feitas essas considerações, temos

$$p(\bar{d}_j|\mathcal{P}, \mathcal{M}) \approx p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^0|\mathcal{P}, \mathcal{M}) + p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0|\mathcal{P}, \mathcal{M}) + p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^1|\mathcal{P}, \mathcal{M}). \quad (\text{A.4})$$

Para calcular o primeiro termo, aplicamos a regra do produto mostrada no capítulo 3:

$$p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) p(\bar{d}_j, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}). \quad (\text{A.5})$$

O termo $\mathcal{P}$ sai do lado direito da barra na primeira probabilidade, desde que este é irrelevante para $\bar{d}_j$, uma vez que especificamos a não ocorrência de eventos. Fatoramos também a probabilidade em $\mathcal{S}^0$ e $\mathcal{B}^0$ como produto das probabilidades independentes, isto resulta nos dois últimos fatores. O primeiro fator, probabilidade que reporta a não detecção, se nenhum sinal ou nenhum evento de fundo ocorre. Os segundo e terceiro fatores fornecem simplesmente, as probabilidades poissonianas para a não ocorrência de um evento, dado que o número esperado para δt , é:

$$p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = e^{-[B+R(t)]\delta t}. \quad (\text{A.6})$$

O cálculo do segundo termo na equação A4 é dado pela integral abaixo, pois $\mathcal{S}^1$ no contínuo torna-se $\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ é dada por:

$$\begin{aligned} p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) &= \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} p(\bar{d}_j, \mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon), \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) \\ &= \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} p(\bar{d}_j, \mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon), \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) p(\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) | \mathcal{P}, \mathcal{M}) p(\mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

O primeiro fator na integral é a probabilidade de ocorrência de um evento para uma posição, com uma energia e direção e conduzirá para a não detecção. Presumimos ser possível calcular essa probabilidade através da modelagem detalhada do detector, talvez incluindo resultados de calibração para as medidas. Isto é a simplesmente a probabilidade que um evento produzirá de disparos nas fotomultiplicadoras não satisfazendo os critérios de detecção. Essa probabilidade pode ser escrita:

$$p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon), \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = 1 - \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon). \quad (\text{A.8})$$

Onde $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ é a a função eficiência de detecção para eventos com posição, energia e direção especificados. O segundo fator da integral A7 é a probabilidade de detecção de um evento especificado e não de outro no intervalo de tempo δt_j , isto é dado por uma distribuição de Poisson:

$$p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon), \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = \frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_j)}{V} e^{-R(t_j)\delta t}. \quad (\text{A.9})$$

O terceiro fato na integral da equação A7 é a probabilidade para a não detecção de um sinal de ruído que é necessário para o primeiro termo da probabilidade de não detecção, este termo é igual à $\exp(-B\delta t)$. Temos agora todos os fatores necessários

para calcular a equação A7, a função da eficiência depende de $\mathbf{r}$, logo este termo pode ser calculado integrando sobre todo o volume do detector:

$$\begin{aligned} p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) &= \delta t e^{B+R(t_j)\delta} \int d\mathbf{n} \int d\varepsilon R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_j) [1 - \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon)] \\ &= e^{[B+R_{ef}(t_j)]\delta t} [R(t_j)\delta t - \delta t \int d\mathbf{n} \int d\varepsilon R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_j) \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A eficiência definida como média no volume é:

$$\bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon) = \int \frac{dV}{V} \eta(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \varepsilon). \quad (\text{A.11})$$

A taxa efetiva de detecção de sinal pode ser escrita:

$$R_{ef}(t_j) = \int d\mathbf{n} \int d\varepsilon \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t). \quad (\text{A.12})$$

Usando estes fatores definidos acima, temos para a equação A10:

$$p(\bar{d}_j, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0 | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = e^{-[B+R_{ef}(t_j)]\delta t} \delta t (B + B_{ef}). \quad (\text{A.13})$$

A taxa de background efetiva é:

$$B_{ef} = \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon). \quad (\text{A.14})$$

Não podemos usar $\bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon)$ aqui porque $B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ é uma função da posição no detector¹. Assumimos que toda a eficiência para detectar um sinal de ruído em uma certa posição, direção e energia é a mesma para detectar um evento com as mesmas propriedades. Um outro ponto importante é o fato do detector não distinguir entre um sinal de ruído e um evento relativo a passagem de um neutrino. Podemos agora escrever a probabilidade para a não detecção de um sinal:

$$p(\bar{d}_j | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = e^{-[B+R_{ef}(t_j)]\delta t} \{1 + \delta t [R(t_j) + B] - \delta t [R_{ef}(t_j) + B_{ef}]\}. \quad (\text{A.15})$$

O produto de todas as probabilidades de não detecção será uma função exponencial com as somas de todas as efetivas taxas sobre todos os intervalos de não detecção. Esta soma é apenas a integral das taxas efetivas sobre os intervalos de não detecção, tal produto pode ser escrito como:

$$\prod_{i=1} p(\bar{d}_j | \mathcal{P}, \mathcal{M}) = \exp [B_{ef} T_{nd} - \int_{T_{nd}} dt R_{ef}(t_j)]. \quad (\text{A.16})$$

¹A função que descreve o ruído é relativa à radiatividade das rochas nas vizinhanças do detector.

Onde a integral em T_{nd} denota a o cálculo em todos os intervalos de tempo onde não há detecção de eventos. Agora vamos calcular as probabilidades para a detecção de eventos, isso é feito de forma idêntica ao cálculo anterior e pode ser reportado como um evento ou um sinal de ruído.

$$p(d_i|\mathcal{P}, \mathcal{M}) = p(d_i, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0|\mathcal{P}, \mathcal{M}) + p(d_i, \mathcal{S}^0, \mathcal{B}^1|\mathcal{P}, \mathcal{M}). \quad (\text{A.17})$$

O cálculo do primeiro termo é feito, introduzindo $\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ e aplicando a regra do produto, a expressão é:

$$p(d_i, \mathcal{S}^1, \mathcal{B}^0|\mathcal{P}, \mathcal{M}) = \delta t \times \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) \frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i)}{V} \exp -[R(t_j) + B]\delta t. \quad (\text{A.18})$$

Um evento individual é definido pela função de verossimilhança de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) \equiv p(d_i, \mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon), |\mathcal{M}). \quad (\text{A.19})$$

Esta é apenas a probabilidade de observar os dados detectados assumindo a posição no espaço, a direção e a energia do lépton. Os valores observados “entram” nessa função que infere as propriedades particulares de cada evento detectado. O conhecimento detalhado de cada experimento permite os pesquisadores calcular essa função para cada evento. $\mathcal{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$ é a probabilidade para a ocorrência de cada evento i e não precisa ser normalizada quando integrada sobre $(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)$. A função $\mathcal{L}_i$ pode ser multiplicada por quaisquer constantes sem afetar as inferências. O segundo termo da equação A17 pode ser calculado através do mesmo caminho usado para a taxa de ruído. Combinando este termo com a equação A18 temos a probabilidade de detecção:

$$p(d_i|\mathcal{P}, \mathcal{M}) = \delta t e^{[R(t_j)+B]\delta t} \times \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) \left[\frac{R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i)}{V} + B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Podemos assumir a homogeneidade da taxa de sinal pela integral:

$$\int d\varepsilon \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i), \quad (\text{A.21})$$

onde a função de verossimilhança para a taxa de eventos é a média integrada sobre o volume do detector, isto é dado por:

$$\mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon) = \int dV \frac{\mathcal{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \varepsilon)}{V}. \quad (\text{A.22})$$

Introduzimos também a taxa de ruído B_i dada por:

$$B_i = \int d\varepsilon \int dV \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon) B(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \varepsilon). \quad (\text{A.23})$$

A probabilidade de detecção de uma taxa de eventos é dada por:

$$p(d_i|\mathcal{P}, \mathcal{M}) = \delta t \exp -[R_i(t_i) + B] \delta t \left[B_i \delta t + \int d\varepsilon \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t_i) \right]. \quad (\text{A.24})$$

Combinando as probabilidades de detecção com as de não detecção temos a função de verossimilhança completa dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}) = (\delta t)^N \exp \left[-B_{ef} T - \int_T dt \int d\varepsilon \int d\mathbf{n} \bar{\eta}(\mathbf{n}, \varepsilon) R(\mathbf{n}, \varepsilon, t) \right] \\ \times \prod_{i=1}^N \left[B_i + \int d\varepsilon \int d\mathbf{n} \mathcal{L}_i(\mathbf{n}, \varepsilon_i) R(\mathbf{n}, \varepsilon_i, t_i) \right]. \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

Acima obtivemos a função de verossimilhança para a taxa de eventos observados e os não observados. Levamos em consideração a taxa de ruído (B) e negligenciamos entre as taxas totais e efetivas de eventos nos N intervalos, isto porque, a diferença é muito pequena que $\delta t \ll T$.

Programa da análise estatística da distribuição de massas dos objetos compactos remanescentes

B.1 Análise estatística das massas dos objetos remanescentes da explosão de supernovas

O código que calcula as funções de probabilidades bayesianas que analisa a distribuição de massa dos objetos compactos remanescentes é apresentando a seguir:

```
#include <cstdio >
#include <cstdlib>
#include <cmath >

#include <vector>
#include <ctime>
#define NP 200

using namespace std;

#define Integra( r, ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1); x <= (x2); )
{ r = r + (dx) * ( ff )/6.0 ;
  x+=(dx)/2.0 ; r = r + 4*(dx) * ( ff )/6.0; x+=(dx)/2.0 ;
  r = r + (dx) * ( ff )/6.0; };

#define Dump( ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1);
  x <= (x2); x+=(dx) ){ printf(">%f %f \n",x, ( ff ) );};

#define H 7.0

//regiao de calculo da massa dos distribuicoes M1 e M2

#define Mmin 1.1
#define Mmax 2.0
#define ddM 0.025

//Numero de estrelas observadas:

#define npoint 55

//intensidade relativa de pico M1

#define Amin 0.1
#define Amax 1.0
#define ddA 0.1

// Largura das gaussianas da distribuicao de mass:

#define Smin 0.03
#define Smax 0.60
#define ddS 0.05

// G= amplitude do pico em 1.25 que aparentemente nao aparece nos dados:
```

Apêndice B. Programa da análise estatística da distribuição de massas 122 dos objetos compactos remanescentes

```
#define Gmin 0.01
#define Gmax 0.90
#define ddG 0.1

vector <double> vM1 , vM2 ,vA , vS1 , vS2 ,vG ;
//vetores que armazenam os parametros

double *****Lk; //vetor que armazena a likelihood base para todos
double *****L_sl2; //vetor que armazena a likelihood S1 e S2

double *****L_g; //vetor que armazena a likelihood g

double ***L_a; //vetor que armazena a likelihood a

//***** Data *****

//double Mm[3] = {1.666430, 1.57982, 1.51026 };
//double sigmaM[3] = {0.014965, 0.34091, 0.29600 };

double Mm[56] = {1.666430, 1.57982, 1.51026,1.69882,1.48249,1.34219,1.55261,1.26246,
.2.74723,1.49925,1.24354,1.40914,1.4102,1.46893,1.72616,1.26918,1.76268,1.26246,
1.70621,1.56819,1.26702,1.53347,1.38008,1.25867,1.3121,1.24585,
1.33729,1.35067,1.35174,1.38747,1.44346,1.34686,1.34035,2.00111,
0.719284,1.62249,1.69373,0.937788,1.61189,1.60488,1.33468,
1.54317,1.96242,1.4717,1.53136,1.40197,1.4717,1.34035,
1.25006,1.06155,0.963333,1.71286,1.86047,2.08435,2.43703};

double sigmaM[56] = {0.014965, 0.34091, 0.29600,0.29267,
0.29934,0.079735,0.54878,0.390365,0.209535,0.24751,0.109755,
0.059865,0.058205,0.02661,0.099775,0.014985,0.199335,0.139535,
0.12306,0.114745,0.12653,0.06992,0.079735,0.018315,0.01998,
0.01163,0.01497,0.013305,0.00997,0.01498,0.014965,0.01335,
0.01164,0.547725,0.540466,0.357933,0.347938,0.4033295,0.33592,
0.17314,0.1683315,0.463965,0.35588,0.151495,0.3596,0.09989,
0.151495,0.149665,0.109755,0.1047695,0.1766665,0.209535,
0.15947,0.34628,0.271065};

double** gen_matrix2( int n ,int m)
{
    double **d;

    d= (double** )malloc(sizeof(double* )*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= (double* )malloc(sizeof(double )*m) ;
    }

    return d;
}

double*** gen_matrix3( int n,int m, int m2 )
{
    double ***d;

    d= (double***)malloc(sizeof(double**)*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix2( m,m2 );
    }

    return d;
}

double**** gen_matrix4( int n,int m, int m2, int m3 )
{
    double ****d;

    d= (double****)malloc(sizeof(double***)*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix3( m,m2,m3 );
    }

    return d;
}

double***** gen_matrix5( int n,int m, int m2, int m3, int m4 )
{
    double *****d;

    d= (double*****)malloc(sizeof(double****)*n) ;
```

```

        for(int i4 =0 ; i4<n;i4++)
        { d[i4]= gen_matrix4( m,m2,m3,m4 );
        }

        return d;
    }

double***** gen_matrix6( int n,int m, int m2, int m3,int m4,int m5 )
{
    double *****d;

    d= (double*****)malloc(sizeof(double*****)*n) ;

    for(int i5 =0 ; i5<n;i5++)
    { d[i5]= gen_matrix5( m,m2,m3,m4,m5 );
    }

    return d;
}

double Integra_1( double *y , vector<double> x1 )
{
    double soma=0.0;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        soma+=( y[i]+4*y[i+1]+y[i+2] )*(x1[i+2]-x1[i] );
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_2( double **yf , vector<double> x1 , vector<double> x2)
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_1( yf[0] , x2 );
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_1( yf[i+1] , x2 );
        yc= Integra_1( yf[i+2] , x2 );
        soma+=( ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_3( double ***y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3)
{
    double soma=0.0;
    double ylast, ya, yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_2( y[0] , x2 , x3 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_2( y[i+1] , x2, x3 );
        yc= Integra_2( y[i+2] , x2 ,x3);
        soma+=( ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_4( double ****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 )
{
    double soma=0.0;
    double ylast, ya ,yb,yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_3( y[0] , x2, x3,x4 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_3( y[i+1] , x2, x3 ,x4);
    }
}

```

Apêndice B. Programa da análise estatística da distribuição de massas 124 dos objetos compactos remanescentes

```
yc= Integra_3( y[i+2] , x2 ,x3, x4 );
soma+=(ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
ya = yc ;
}
return soma/6.0;
```

```
}
```

```
double Integra_5( double *****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 ,
vector<double> x5 )
{
double soma=0.0;
double ylast , ya ,yb,yc ;
int i;
int ifinal = x1.size();
ya = Integra_4( y[0] , x2 , x3,x4,x5 );
for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
{
yb= Integra_4( y[i+1] , x2 , x3, x4,x5 );
yc= Integra_4( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5);
soma+=(ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
ya = yc ;
}
return soma/6.0;
```

```
}
```

```
double Integra_6( double *****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 ,
vector<double> x5,vector<double> x6 )
{
double soma=0.0;
double ylast , ya , yb,yc;
int i;
int ifinal = x1.size();
ya = Integra_5( y[0] , x2 , x3,x4,x5,x6 );
for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
{
yb= Integra_5( y[i+1] , x2 , x3, x4,x5 , x6);
yc= Integra_5( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5, x6 );
soma+=(ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
ya = yc ;
}
return soma/6.0;
```

```
}
```

```
double gaussian( double x , double x0 , double sigma ){
if (fabs(x-x0) < sigma * H )
return (1.0 / (sqrt(2 * 3.1415928 * sigma*sigma ))) *
exp(- 0.5 * pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );
return 0.0;
```

```
}
```

```
double gaussian_n( double x , double x0 , double sigma ){
if (fabs(x-x0) < sigma * H )
return exp( - 0.5 * pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );
return 0.0;
```

```
}
```

```
double obs_sample_statistic_err(double mu)
{ int i;
double soma;
soma=0;
for (i = 0 ; i < npoint ; i+=1 )
{
```

```

        soma+= gaussian(mu, Mn[i], sigmaM[i]);
    }

    return soma;
}

double obs_sample_statistic(double mu,double dm)
{ int i;
  double soma;
  soma=0;
  for (i = 0 ; i < npoint ; i+=1 )
  {
      if ( fabs(Mn[i] - mu) < dm/2.0 ) soma+= 1;
  }

  return soma;
}

//***** Defined functions *****/

double cov_gauss(double x1,double q1 , double x2, double q2)
{
    // calcula a covolucao de duas gaussianas
    double a1,a2;
    double ss;
    double u;
    a1=max( x1- H*q1 , x2-H*q2 );
    a2=min( x1+ H*q1 , x2+H*q2 );
    if (a2<a1) return 0;

    ss=0;
    Integra(ss, ( gaussian(u, x1, q1) *
    gaussian(u, x2, q2)), u , a1, a2, (a2-a1)/4.0 );
    return ss;
}

double np(double uu, double M1, double M2,double a,
double s1, double s2, double gg ){

    double result =0.0;
    if ((a+gg)>1) return 1e-40;

    result = (a)*gaussian( uu ,M1, s1 ) ;
    result += (gg)*gaussian( uu,1.25 , 0.07 ) ;
    result += (1.0- (a+ gg))*gaussian( uu, M2 , s2 ) ;

    return 1e-12 + result ;
}

//***** Priori functions *****/

double prior1(double M, double M2,double a,
double s1, double s2,double gg){

    return gaussian(gg, 0.05,0.3)*(gaussian(s1, 0.05,0.3)*
gaussian(s2, 0.05,0.3))*(gaussian(M, 1.35,0.3)*gaussian(M2, 1.55,0.3)) ;

    return gaussian(M,1.25,0.06)+ gaussian(M, 1.45,0.18);
}

//***** Likelihood's Calculus *****/

double Likelihood_func(double M, double M2, double a,
double s1, double s2,double gg){

    int i;
    double soma, prod, termo1, termo2, u ;
    double M_a, M_b;

    prod = 1.0;
    soma = 0.0;

```

Apêndice B. Programa da análise estatística da distribuição de massas 126 dos objetos compactos remanescentes

```

// n = npoint;
termo1 = 0.0;

if (M >= M2) return 0.0;
if (gg+a > 1) return 0.0;

Integra( termo1 , np( u, M ,M2,a,s1,s2,gg ) , u , 0.0 , 3.0 ,
min(s1,s2)/3.0 );

for (i = 0 ; i < npoint ; i+=1 ){

termo2 = 1e-12;

termo2+= a*cov_gauss( M,s1 , Mn[i] , sigmaM[i] );
termo2+= (1.0-(a+gg))*cov_gauss( M2,s2 , Mn[i] , sigmaM[i] );
termo2+= gg*cov_gauss( 1.25,0.07 , Mn[i] , sigmaM[i] );

prod = prod * termo2;
}

return soma = exp(-3.0*termo1 + log(prod));
}

//***** Predictive's calculus *****

// Prior 1 --> two gaussians:

double predictive1(void){

double x;
static double soma =0.0;
double a, b,y1,y2;
double Mi, Mf, dM;
double dsoma ;

double sg;

if (soma!=0.0) return soma ;

Mi = Mmin;
Mf = Mmax;
dM = ddM;
soma = 0.0;

return soma;
}

double predictive2(void){

double i;
static double soma = 0.0;
double a, b,y1,y2;
double Mi, Mf, dM;

if (soma!=0.0) return soma ;

Mi = Mmin;
Mf = Mmax;
dM = ddM;
soma = 0.0;
return 0.0;
}

//***** Probabilities calculus *****

//Probability 1:

double Probability1(int i1,int i2,int i3 ){

double c1,c2,c3;

c1=1;// priori1(vM1[i1],vM2[i2],vS1[i3] );

c2=1;//Lk[i1][i2][i3];
c3=1;// predictive1();

return c1*c2 /c3;
}

```



```

}

double mass_dist( double M)
{
    double soma,sg;
    soma =0.0;

    return soma;
}

double sigma_dist(double sg)
{
    double soma,u;
    soma=0.0;

    return soma;
}

int main(){

    FILE *arquivo ;
    double i , x,y, z ;

    double x1,x2,x3,x4,x5;
    double lmax1,lmax2,lmax3,lzmax;
    double predi;
    double eiM1,eiM2,eiS1,eiS2,eiA,eiG;

    double tmp_max=0;

    printf("Start ! \n");


    eiM1=0;
    eiM2=0;
    eiS1=0;
    eiS2=0;
    eiA=0;
    eiG=0;

    srand( time(NULL));

for(x= 1.2 ; x <= 1.6; x=x+ddM) vM1.push_back(x);
for(x= 1.4 ; x <= 2.0; x=x+ddM) vM2.push_back(x);
for(x= Amin ; x <= Amax; x=x+ddA) vA.push_back(x);
for(x= Smin ; x <= 0.2; x=x+ddS) vS1.push_back(x);
for(x= Smin ; x <= Smax; x=x+ddS) vS2.push_back(x);
for(x= Gmin ; x <= Gmax; x=x+ddG) vG.push_back(x);


printf("Pts =%i %i %i %i %i %i \n", vM1.size(),vM2.size(),
vA.size(), vS1.size(),vS2.size(),vG.size() );
printf("Size =%i \n", vM1.size()*vM2.size()* vA.size()*
vS1.size() *vS2.size() *vG.size() );

Lk= gen_matrix6( vM1.size(),vM2.size(), vA.size(),
vS1.size(),vS2.size(),vG.size());
L_sl2= gen_matrix6( vS1.size(),vS2.size(), vM1.size(),
vM2.size(),vA.size(),vG.size() );
L_a= gen_matrix3( vA.size(),vM1.size(),vM2.size() );
L_g= gen_matrix6( vG.size(), vM1.size(),vM2.size(),
vA.size(), vS1.size(),vS2.size() );
time_t t_inicial;
time_t t_atual;
t_inicial= time(NULL);
for(int il=0;il < vM1.size(); il++)
{
    for(int i2=0;i2 < vM2.size(); i2++)
        for(int i3=0;i3 < vA.size(); i3++)
            for(int i4=0;i4 < vS1.size(); i4++)
                for(int i5=0;i5 < vS2.size(); i5++)
                    for(int i6=0;i6 < vG.size(); i6++)
                        {
                            Lk[il][i2][i3][i4][i5][i6]= Likelihood_func( vM1[i1],
vM2[i2],vA[i3],vS1[i4],vS2[i5],vG[i6]);
                        }
}

t_atual= time(NULL);

```

Apêndice B. Programa da análise estatística da distribuição de massas 128 dos objetos compactos remanescentes

```

printf(" %i %i restam %4.1f minutos \n", i1,vM1.size(),
(vM1.size()-(i1+1))*(((t_atual-t_inicial)/60.0)/(i1+1)) );
}

predi = Integra_6(Lk,vM1,vM2,vA,vS1,vS2,vG);

// Normaliza a preditiva, aplica a priori, e translada as matrizes

for(int i1=0;i1 < vM1.size(); i1++){
    for(int i2=0;i2 < vM2.size(); i2++){
        for(int i3=0;i3 < vA.size(); i3++){
            for(int i4=0;i4 < vS1.size(); i4++){
                for(int i5=0;i5 < vS2.size(); i5++){
                    for(int i6=0;i6 < vG.size(); i6++){
                        {
                            Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6]= Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6]*
                            prioril(vM1[i1],vM2[i2],vA[i3],vS1[i4], vS2[i5], vG[i6])/predi ;
                            L_s12[i4][i5][i1][i2][i3][i6] = Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6];
                            L_g[i6][i1][i2][i3][i4][i5]=Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6];
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    L_a[i3][i1][i2] = Integra_3(Lk[i1][i2][i3],vS1,vS2,vG) ;
}
}
lmax=0.0 ;
lmax1= vM1[0];
lmax2= vM2[0];
lmax3= vS1[0];

//=====//Computa os sigmas
double **RS12;
double **RS21;

RS12= gen_matrix2( vS1.size(),vS2.size() );
RS21= gen_matrix2( vS2.size(),vS1.size() );

FILE *fs12 ;
fs12=fopen("sigma12.dat","w");
tmp_max=0;
for(int i_s1=0;i_s1 < vS1.size(); i_s1++)
{
    for(int i_s2=0;i_s2 < vS2.size(); i_s2++)
    {
        RS12[i_s1][i_s2]=Integra_4(L_s12[i_s1][i_s2], vM1,vM2,vA,vG );
        RS21[i_s2][i_s1]= RS12[i_s1][i_s2];
        fprintf(fs12,"%f %f %f \n", vS1[i_s1],vS2[i_s2], RS12[i_s1][i_s2]);

        if (RS12[i_s1][i_s2] > tmp_max){ eiS1 = i_s1 ;eiS2 = i_s2;
        tmp_max=RS12[i_s1][i_s2] ; }
    }
    fprintf(fs12,"\n" );
}
fclose(fs12);

FILE *fm12 ;
fm12=fopen("mass12.dat","w");
tmp_max=0;
for(int i_m1=0;i_m1 < vM1.size(); i_m1++)
{
    for(int i_m2=0;i_m2 < vM2.size(); i_m2++)
    {
        double tmp;
        tmp= Integra_4(Lk[i_m1][i_m2], vA,vS1,vS2,vG);
        fprintf(fm12,"%f %f %f \n", vM1[i_m1],vM2[i_m2], tmp );

        if (tmp > tmp_max){ eiM1 = i_m1 ;eiM2 = i_m2; tmp_max=tmp; }
    }
    fprintf(fm12,"\n" );
}
fclose(fm12);

FILE *fg ;
fg=fopen("low_mass.dat","w");
tmp_max=0;
for(int i_g=0;i_g < vG.size(); i_g++)
{
    double tmp;
    tmp= Integra_5(L_g[i_g],vM1,vM2, vA,vS1,vS2 );
    fprintf(fg,"%f %f \n", vG[i_g], tmp );
}

```

```

if (tmp > tmp_max){ eiG = i_g; tmp_max=tmp; }
}
fclose (fg);

FILE *fa ;
fa=fopen("amplitude.dat","w");
tmp_max=0;
for (int i_a=0; i_a < vA.size(); i_a++)
{
    double tmp;
    tmp=Integra_2(L_a[i_a],vM1,vM2);
    fprintf(fa,"%f %f\n", vA[i_a], tmp );

    if (tmp > tmp_max){ eiA = i_a; tmp_max=tmp; }
}
fclose (fa);

//===== // Cria as estimativas

FILE *fmm ;
fmm=fopen("e_mass.dat","w");
double int_np_estimate=0;
double Mu;

Integra( int_np_estimate , np( Mu, vM1[eiM1] ,vM2[eiM2] ,vA[eiA] ,
vS1[eiS1] ,vS2[eiS2] ,vG[eiG] ) , Mu, 0 , 4.0 , ddM );

for( Mu=0 ;Mu <= 4.0 ;Mu+=ddM/2.0)
{double tmp;
tmp = np( Mu, vM1[eiM1] ,vM2[eiM2] ,vA[eiA] ,
vS1[eiS1] ,vS2[eiS2] ,vG[eiG] );

    fprintf(fmm,"%f %f\n",Mu, tmp/int_np_estimate );
}
fclose (fmm);

fmm=fopen("params.txt","w");
{
    fprintf(fmm,"M1=%f \nM2=%f \nA=%f \nS1=%f
\nS2=%f \nG=%f\n", vM1[eiM1] ,vM2[eiM2] ,vA[eiA] ,
vS1[eiS1] ,vS2[eiS2] ,vG[eiG] );
}
fclose (fmm);

double obs_norm = 0;
fmm=fopen("obs_mass_err.dat","w");
Integra( obs_norm, obs_sample_statistic_err(Mu),Mu,
0 , 4.0 , ddM/2.0 );
for (Mu=0 ;Mu <= 4.0;Mu+=ddM/2.0 )
{double tmp;
tmp = obs_sample_statistic_err(Mu)/obs_norm;
fprintf(fmm,"%f %f\n",Mu, tmp );
}
fclose (fmm);

obs_norm = 0;
fmm=fopen("obs_mass.dat","w");
Integra( obs_norm, obs_sample_statistic(Mu,0.1) ,Mu,
0 , 4.0 , ddM/2.0 );
for (Mu=0.0 ;Mu <= 4.0;Mu+=ddM/2.0 )
{double tmp;
tmp = obs_sample_statistic(Mu,0.1)/obs_norm;
fprintf(fmm,"%f %f\n",Mu, tmp );
}
fclose (fmm);

return 0;
}

```


Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

C.1 Código para o modelo com duas temperaturas

Neste apêndice apresentaremos os códigos referentes aos modelos com duas temperaturas cujos resultados foram apresentados no capítulo 4. Os códigos a seguir são referentes ao modelo com a função degrau e o modelo com decaimento exponencial.

C.1.1 Modelo de duas temperaturas com função degrau

A seguir apresentaremos o código elaborado neste trabalho que calcula as funções de probabilidade para o modelo com duas temperaturas na forma de uma função degrau:

```
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>

#include <vector>
#include <ctime>
#define NP 400

#define Q 1.29
#define me 0.511
#define eta 0.0
#define Mk 2.14 // Kamiokande detector mass (kton).
#define Mimb 6.8 // IMB detector mass (kton).
#define Mbaksan 0.28 // Baksan detector mass (kton).
#define fk 1.0
#define fimb 0.9055
#define fb 1.0
#define Cn 1/(4 * 3.1416)
#define lnVk 14.56
#define lnVimb 15.73
#define delt 1.0//2.3
#define timeK 20.0//10.43
#define timeIMB 16.0 //5.9

//#define time_delay 60;

using namespace std;

#define Integra( r, ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1) ; x <= (x2) ; x+=0 )
{ r = r + (dx) * ( ff )/6.0 ; x+=(dx)/2.0 ; r = r + 4*(dx) *
( ff )/6.0; x+=(dx)/2.0 ;
r = r + (dx) * ( ff )/6.0; };

#define Dump( ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1) ; x <= (x2) ; x+=(dx) )
{ printf(">%f %f \n",x, ( ff ) );};
```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```
#define H 6.0

//regiao de calculo da massa dos distribuicoes T
#define Tmin 0.1
#define Tmax 6.0
#define ddT 0.4

#define sigma_tp 1.0

// tempo
#define tpmin 3.0
#define tpmax 10.0
#define ddt 0.5

// alpha
#define Amin 0.1
#define Amax 6.0
#define ddA 0.4

// eps
#define epsmin 1.0
#define epsmax 50.0
#define ddeps 0.5

//Scale parameter
#define apmin 0.1
#define apmax 1.5
#define ddap 0.1

// Noise's parameters
#define pk 1.0
#define pim 1.0
#define pb 1.0
#define effK 1e-5
#define effIMB 1e-5

double Meff;

vector <double> vAlpha, vAlpha2, vTemp, vDeltaTp, vAp, vG;
//vetores que armazenam os parametros

double ****L;

double ****Lk; //vetor que armazena a likelihood K
base para todos

double ****Limb; // vetor que armazena a likelihood
IMB base para todos

double ****L_s12; //vetor que armazena a
likelihood S1 e S2

double ****L_g; //vetor que armazena a
likelihood g

double ***L_a; //vetor que armazena a
likelihood a

double Lmax;

//***** Data *****

//Kamikande events:

double tk[17] = {0.0, 0.0, 0.107, 0.303, 0.324, 0.507, 0.686, 1.541,
1.728, 1.915, 9.219, 10.433, 12.439, 17.641, 20.257, 21.355,
23.814}; // times of events;
double Ek[17] = {0.0, 20.0, 13.5, 7.5, 9.2, 12.8, 6.3, 35.4, 21, 19.8,
8.6, 13, 8.9, 6.5, 5.4, 4.6, 6.5}; // energy of events;
double Sigmak[17] = {0.0, 2.9, 3.2, 2.0, 2.7, 2.9, 1.7, 8, 4.2, 3.2,
2.7, 2.6, 1.9, 1.6, 1.4, 1.3, 1.6}; // standard deviation by events;
double Bk[17] = {1, 1.6e-5, 1.9e-3, 2.9e-2, 1.2e-2, 2.1e-3, 3.7e-2,
```

```

4.5e-5, 8.2e-5, 1.5e-5, // detector's noise;
1.5e-2, 1.9e-3, 1.6e-2, 3.8e-2, 2.9e-2, 2.8e-2, 3.8e-2};

// IMB events:

double timb[9] = {0.0, 0.0, 0.412, 0.650, 1.141, 1.562,
2.684, 5.010, 5.582};
double Eimb[9] = {0,38,37,28,39,36,36,
19,22}; // energy of events;
double Sigmaimb[9] = {0,7,7,6,7,9,6,
5,5}; // standard deviation by events;
double Bimb[9] = {0,0,0,0,0,0,0,
0,0}; // detector's noise;

// Defined functions and matrixes:

double** gen_matrix2( int n ,int m)
{
    double **d;

    d= (double** )malloc(sizeof(double* )*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= (double* )malloc(sizeof(double )*m) ;
    }

    return d;
}
double*** gen_matrix3( int n,int m, int m2 )
{
    double ***d;

    d= (double***)malloc(sizeof(double**)*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix2( m,m2 );
    }

    return d;
}
double**** gen_matrix4( int n,int m, int m2, int m3 )
{
    double ****d;

    d= (double****)malloc(sizeof(double***)*n) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix3( m,m2,m3 );
    }

    return d;
}
double***** gen_matrix5( int n,int m, int m2, int m3, int m4 )
{
    double *****d;

    d= (double*****)malloc(sizeof(double****)*n) ;

    for(int i4 =0 ; i4<n;i4++)
    { d[i4]= gen_matrix4( m,m2,m3,m4 );
    }

    return d;
}
double***** gen_matrix6( int n,int m, int m2,
int m3,int m4,int m5 )
{
    double *****d;

    d= (double*****)malloc(sizeof(double****)*n) ;

    for(int i5 =0 ; i5<n;i5++)
    { d[i5]= gen_matrix5( m,m2,m3,m4,m5 );
    }

    return d;
}

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```
}

double Integra_1( double *y , vector<double> x1 )
{
    double soma=0.0;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        soma+=( y[i]+4*y[i+1]+y[i+2] )*(x1[i+2]-x1[i] );
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_2( double **yf , vector<double> x1 ,
vector<double> x2)
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_1( yf[0] , x2 );
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_1( yf[i+1] , x2 );
        yc= Integra_1( yf[i+2] , x2 );
        soma+=( ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_3( double ***y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3)
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_2( y[0] , x2 , x3 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_2( y[i+1] , x2 , x3 );
        yc= Integra_2( y[i+2] , x2 , x3 );
        soma+=( ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_4( double ****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 )
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb,yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_3( y[0] , x2 , x3,x4 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_3( y[i+1] , x2 , x3 ,x4);
        yc= Integra_3( y[i+2] , x2 ,x3 , x4 );
        soma+=( ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_5( double *****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 ,
vector<double> x5 )
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb,yc ;
    int i;
```



```

    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_4( y[0] , x2, x3,x4,x5 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_4( y[i+1] , x2, x3, x4,x5 );
        yc= Integra_4( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5);
        soma+= (ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;

}

double Integra_6( double *****y , vector<double> x1 ,
vector<double> x2 , vector<double> x3,vector<double> x4 ,
vector<double> x5,vector<double> x6 )
{
    double soma=0.0;
    double ya , yb,yc;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_5( y[0] , x2, x3,x4,x5,x6 );
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_5( y[i+1] , x2, x3, x4,x5 , x6);
        yc= Integra_5( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5, x6 );
        soma+= (ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;

}

double gaussian( double x , double x0 , double sigma ){

    if (fabs(x-x0) < sigma * H )
return (1.0 / (sqrt(2 * 3.1415928* sigma*sigma ))) *
exp( - 0.5*pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );

    return 0.0;

}

double gaussian_n( double x , double x0 , double sigma ){

    if (fabs(x-x0) < sigma * H )
return exp( - 0.5*pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );

    return 0.0;

}

double obs_sample_statistic_err(double mu)
{
    double soma;
    soma=0;

    return soma;
}

double obs_sample_statistic(double mu,double dm)
{
    double soma;

    return soma;
}

//***** Defined functions *****

double Temp(double T, double ap, double tp, double Delta_tp){

    double durac = 2.0 ;

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```

//    return T;

    if(tp >= 0.0 && tp <= 1.0) return T;

    if(tp >= 2.0 && tp <= 2.0+Delta_tp) return 0.01;

    if (tp >=2.0+Delta_tp && tp <= 2.0+durac+Delta_tp )
return  ap*T+0.01;

    if (tp >= 2.0+durac+Delta_tp) return 0.01;

return 0.01;

}

double r(double ap, double tp, double Delta_tp){

    //return exp(-Delta_tp/(tp+0.1));

    return 1.0;

}

double cov_gauss(double x1,double q1 , double x2,
double q2)
{
    // calcula a covolucao de duas gaussianas
    double a1,a2;
    double ss;
    double u;
    a1=max( x1- H*q1 , x2-H*q2 );
    a2=min( x1+ H*q1 , x2+H*q2 );
    if (a2<a1) return 0;
    ss=0;
    Integra(ss, (gaussian(u, x1, q1) *
gaussian(u, x2, q2)), u , a1, a2, (a2-a1)/4.0 );
    return ss;
}

double f_fermi(double eps, double T, double ap, double tp,
double Delta_tp){

    // if(eps/T > 5){return 0.0;}
    // if(eps/T < -5){return 1;}
    double To;
    To = Temp(T,ap,tp,Delta_tp);

    if (To < 0.1) return 0;
    return 1.0/( exp((eps + Q)/To) + 1.0 );
}

// Corrections function

double kappa(double eps){
    double a, b, c, E;
    E=eps+Q;
    a = 1 - Q/ E ;
    b = 1 - (2 * Q/E) ;
    c= (pow(Q,2) - pow(me,2))/ pow(E,2);

    if ((b+c) < 0.0) return 0.0;

    return a * sqrt(b + c);
}

// Rate's neutrino - cooling component=

double Rcol(double eps, double alpha, double T, double ap,
double tp, double Delta_tp){

    double fm;
    double kp;
    double saida=0;

    fm = f_fermi(eps,T,ap,tp,Delta_tp);
    // if (fm == 0.0){return 0.0;}
    kp = kappa(eps);
    saida = (1.22e-5) * pow(alpha, 2) * Meff *

```

```

(pow((eps + Q), 4)) * fm * kp * pow(r(ap,tp,Delta_tp),2)    ;
    if (saida <0); //printf("ERROR Rcol \n");
    return saida;

}

//----- Kamiokande -----

double noiseK( double eps )
{
    double gs;

    gs = effK* (gaussian(eps, 6 ,1) +0.01 );

    return gs;
}

double etabarK(double eps){

    double c;

    c = 0.95*(1.0 - exp(-pow((eps -Q)/9.3,4)));

    if (c < 0.0) return 0.0;
    return c;

    double eK;
    double y1,y2,x1,x2;
    y1=0;
    y2=0.9;
    // x1 = 4.0;
    //x2 = 10.0;
    x1 = 10.0;
    x2 = 12.0;

    if (eps < 4.0) return 0.0 ;
    if (eps > 10.0) return 0.9 ;
    return (y2-y1)/(x2-x1)+y1;
    // return 0.9 ;

    if (eps < 5.0){return 0.0;}
    eK = (0.35) * atan(0.49 * eps - 4.0) + 0.43;
    if (eK < 0.0 ){return 0.0;}
    return eK;
}

// Step function

double StepK(double eps){

    if (eps > 5.0){
        return 1;}
    else {return 0.0;}
}

// IMB

double LikelihoodK(double alpha, double T, double ap,
double Delta_tp){

    int i;
    int j;
    double soma;

    double termol, termo2;
    double prod;
    double eps;
    double ti;

    soma = 0.0;
    Meff = Mk;

    termol=0.0 ;

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```

        for( ti=0 ; ti <=20.0; ti= ti+ddtp )
        {
            Integra( termo1 , ddtp * etabarK(eps) *
(Cn*Rcol(eps, alpha, T, ap, ti, Delta_tp ) +
1.0*noiseK(eps) ) , eps , epsmin, epsmax, ddeps ) ;
        }

        if (termo1<0 )printf("termo1= %f \n", termo1 );

        prod=0.0;

        for ( i= 1 ; i <= 12 ; i++ )
        {
            if ( i==6) continue;

            termo2=0.0 ;

            Integra( termo2 , StepK(eps)* Cn * lnVk *
gaussian( eps, Ek[i] , Sigmak[i] )*Cn*
(Rcol( eps, alpha, T, ap, tk[i], Delta_tp ) + 1.0*noiseK(eps) ),
eps , epsmin , epsmax , Sigmak[i]/2.0 ) ;

            prod =prod + log(termo2 );
        }

        soma = exp(-1.0 * delt * timeK * termo1+prod);

        if (soma > Lmax ) Lmax= soma;
        return soma;
    }

//----- IMB -----

double noiseIMB( double eps )
{
    double gs;
    gs = effIMB* (gaussian(eps, 6 ,1) + 0.1);

    return pimb*gs;
}

double etabarIMB(double eps){
    double c;
    double eIMB;

    c = (1.0 - 3.0*exp(-(eps - Q)/16.0));

    if (c < 0.0) return 0.0;
    return c;

    c = 1.0;
    if (eps > 30) c = 5.0;//2.885;
    if (eps > 60.0) {return 1.0;}
    if (eps < 20.0) {return 0.0;}

    return c*(0.1*sqrt(6*eps+1)-1.0);
}

double StepIMB(double eps){

    if (eps > 19.0){
        //if (eps > 17.11){
            return 1;}
        else {return 0.0;}
    }

```

```

}

double LikelihoodIMB(double alpha, double T, double ap,
double Delta_tp){
    int i;
    double soma;

    double termo1, termo2;
    double prod;
    double eps;
    double ti;
    double time_delay;

    time_delay = 20;

    soma = 0.0;
    Meff = Mimb;

    termo1=0.0 ;

    for(ti=0 ; ti <= 20 ; ti= ti+ddtp ){
        Integra( termo1 , ddtp*etabarIMB(eps) *
(Cn*Rcol(eps, alpha, T, ap, ti, Delta_tp) +
noiseIMB( eps )) , eps , epsmin, epsmax, ddeps ) ;
        prod=1.0;
        for (i= 1 ;i <= 8 ; i++ )
        {

            if (termo1<0 )printf("termo1= %f \n", termo1 );

            termo2=0.0 ;

            Integra( termo2 , StepIMB(eps) *Cn
*lnVimb* gaussian( eps, Eimb[i] , Sigmaimb[i] ) *
(Cn*Rcol(eps, alpha, T, ap, timb[i]+time_delay, Delta_tp)
+ noiseIMB(eps)) , eps , epsmin , epsmax , Sigmaimb[i]/2.0 ) ;

            prod = prod * termo2 ;
        }

        soma = exp(-1.0 * deltat * timeIMB * termo1 ) * prod;
        if (soma > Lmax ) Lmax= soma;
        return soma;
    }

//----- Combined likelihood -----

double Likelihood_combined(double alpha, double T,
double ap, double Delta_tp){

    return LikelihoodK(alpha,T,ap,Delta_tp) *
LikelihoodIMB(alpha,T,ap,Delta_tp);

}

//***** Priori functions *****

double prior1(double alpha,double T,
double delta_tp, double ap){

    return 1.0 / pow(T,4) ;
}

//***** Likelihood's Calculus *****

//***** Predictive's calculus *****

double predictive1(void){

    double soma = 1.0;

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```
        return soma;
    }

double predictive2(void){

    return 0.0;
}

//***** Probabilities calculus*****

//Probability 1:

double Probability1(int i1,int i2,int i3 ){
    return 1;
}

int main(){

    FILE *arquivo ;
    double i, x,y, z ;

    double x1,x2,x3,x4,x5;
    double lmax1,lmax2,lmax3,lzmax;
    double predi;
    double ei1,ei2,ei3,ei4,ei5,ei6;

    double tmp_max=0;

    printf(" Start ! \n");

    Lmax    = 0.0;

    ei1=0;
    ei2=0;
    ei3=0;
    ei4=0;
    ei5=0;
    ei6=0;

    srand( time(NULL));

    for(x = Amin ; x <= Amax; x=x+ddA) vAlpha.push_back(x);

    for(x = Tmin ; x <= Tmax; x=x+ddT) vTemp.push_back(x);
    for(x = tpmin ; x <= tpmax; x=x+ddtp) vDeltaTp.push_back(x);
    for(x = apmin ; x <= apmax; x=x+ddap) vAp.push_back(x);

    printf(" Pts =%i %i %i %i \n", vAlpha.size(),vTemp.size(),
    vDeltaTp.size(),vAp.size() );
    printf(" Size =%i \n", vAlpha.size()* vTemp.size()*
    vDeltaTp.size()*vAp.size() );

    Lk = gen_matrix4( vAlpha.size(), vTemp.size(),
    vDeltaTp.size(),vAp.size() );

    L_s12= gen_matrix4( vDeltaTp.size(),vAp.size(),
    vAlpha.size(),vTemp.size() );

    time_t t_inicial;
    time_t t_atual;
    t_inicial= time(NULL);
    for(int i1=0;i1 < vAlpha.size(); i1++)
    {
        for(int i3=0;i3 < vTemp.size(); i3++)
            for(int i4=0;i4 < vDeltaTp.size(); i4++)
                for(int i5=0;i5 < vAp.size(); i5++)

    {
        Lk[i1][i3][i4][i5] = Likelihood_combined( vAlpha[i1],vTemp[i3],
        vAp[i5],vDeltaTp[i4]);
    }
    }
    t_atual= time(NULL);
```

```

printf(" %i %i      restam %4.1f minutos \n", i1,vAlpha.size(),
(vAlpha.size()-(i1+1))*(((t_atual-t_inicial)/60.0)/(i1+1)) );
}

predi = Integra_4(Lk ,vAlpha,vTemp,vDeltaTp,vAp);

lzmax=0.0;
for(int i1=0;i1 < vAlpha.size(); i1++){
  for(int i3=0;i3 < vTemp.size(); i3++){
    for(int i4=0;i4 < vDeltaTp.size(); i4++){
      for(int i5=0;i5 < vAp.size(); i5++){

{
Lk[i1][i3][i4][i5] = Lk[i1][i3][i4][i5] *
priori1(vAlpha[i1],vTemp[i3],vDeltaTp[i4], vAp[i5] );
}}

      lzmax=0.0 ;
      lmax1= vAlpha[0];

      lmax3= vDeltaTp[0];

      FILE *fmm ;

      fmm=fopen("Lat.dat","w+");

      for(int i1=0;i1 < vAlpha.size(); i1++)
      { for(int i3=0;i3 < vTemp.size(); i3++)
      { double soma =0;
        for(int i4=0;i4 < vDeltaTp.size(); i4++)
          for(int i5=0;i5 < vAp.size(); i5++)
        { soma += ddap * ddtP * Lk[i1][i3][i4][i5] ;
          fprintf(fmm,"%f %f %g \n",vAlpha[i1],vTemp[i3], soma );
        }
        fprintf(fmm,"\n");
      }
      fclose(fmm);

      fmm=fopen("Lap.dat","w+");

      for(int i4=0;i4 < vDeltaTp.size(); i4++)
      { for(int i5=0;i5 < vAp.size(); i5++)
      { double soma =0;
        for(int i1=0;i1 < vAlpha.size(); i1++)
          for(int i3=0;i3 < vTemp.size(); i3++)
        { soma += ddT * ddA * Lk[i1][i3][i4][i5] ;
        }

        fprintf(fmm,"%f %f %g \n",vDeltaTp[i4], vAp[i5] , soma );
      }
      fprintf(fmm,"\n");
    }

    fclose(fmm);

    printf( "Likelihood = %g \n",Lmax);

    fmm=fopen("rcol.dat","w+");
    for(double e =1;e < 50 ; e+=0.2 )
    {
      for(double Te = 0.1 ; Te < 20 ; Te +=0.2 )
      { fprintf( fmm , " %f %f %e \n", e, Te, etabarK(e)*
Rcol( e , 2, Te , 0, 1.0 , 8.0 ));
      }
      fprintf( fmm , "\n");
    }
    fclose(fmm);

    return 0;

}

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de 142 neutrinos da SN1987A

C.1.2 Modelos de Temperaturas com decaimento exponencial

O código confeccionado para o modelo com duas temperaturas que decaem exponencialmente é apresentado a seguir:

```
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>

#include <vector>
#include <ctime>
#define NP 400

#define Q 1.29
#define me 0.511
#define eta 0.0
#define Mk 2.14 // Kamiokande detector mass (kton).
#define Mimb 6.8 // IMB detector mass (kton).
#define Mbaksan 0.28 // Baksan detector mass (kton).
#define fk 1.0
#define fimb 0.9055
#define fb 1.0
#define Cn 1/(4 * 3.1416)
#define lnVk 14.56
#define lnVimb 15.73
#define delt 1.0//2.3
#define timeK 20.0//10.43
#define timeIMB 16.0 //5.9

using namespace std;

#define Integra( r, ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1) ; x <= (x2) ; x+=0)
{ r = r + (dx) * ( ff )/6.0 ;
  x+=(dx)/2.0 ; r = r + 4*(dx) * ( ff )/6.0; x+=(dx)/2.0 ; r = r + (dx) * ( ff )/6.0; };

#define Dump( ff, x, x1, x2, dx ) for(x = (x1) ; x <= (x2) ; x+=(dx)
){ printf(">%f %f \n",x, ( ff ) );};

#define H 6.0

//regiao de calculo da massa dos distribuicoes T
#define Tmin 0.1
#define Tmax 5.0
#define ddT 0.5

#define sigma_tp 1.0

// tempo
#define tpmin 0.1
#define tpmax 20.0
#define ddtp 1.0

// alpha
#define Amin 0.1
#define Amax 5.0
#define ddA 0.5

// eps
#define epsmin 4.0
#define epsmax 50.0
#define ddeps 1.0

// tau1
#define taulmin 0.1
#define taulmax 20.0
#define ddtau1 2.0

// tau2
#define tau2min 0.1
#define tau2max 20.0
```



```

#define ddtau2 2.0

//Scale parameter
#define apmin 0.1
#define apmax 1.0
#define ddap 0.1

// Noise's parameters

#define pk 1.0
#define pimb 1.0
#define pb 1.0
#define effK 1e-5
#define effIMB 1e-5

//double PARMS[5];
//(FILE*)FILES[5];
//int NUPARAM=5;

double Meff;

//vector <double> vAlpha, vAlpha2 ,vTemp , vDeltaTp , vAp ,vG ;
//vetores que armazenam os parametros

vector <double> vAlpha, vAlpha2 ,vTemp , vtp, vAp, vtau1 ,vtau2 ;
//vetores que armazenam os parametros

double *****L;

double *****Lk; //vetor que armazena a likelihood K base para todos

double ****Limb; // vetor que armazena a likelihood IMB base para todos

double *****L_s12; //vetor que armazena a likelihood S1 e S2

double *****L_g; //vetor que armazena a likelihood g

double ***L_a; //vetor que armazena a likelihood a

double Lmax;

//***** Data *****

//Kamikande events:

double tk[17] = {0.0, 0.0, 0.107, 0.303, 0.324, 0.507, 0.686, 1.541,
1.728,1.915, 9.219, 10.433, 12.439, 17.641, 20.257, 21.355,
23.814}; // times of events;

double Ek[17] = {0.0, 20.0, 13.5, 7.5, 9.2, 12.8, 6.3, 35.4, 21, 19.8, 8.6, 13,
8.9, 6.5, 5.4, 4.6, 6.5}; // energy of events;

double Sigmak[17] = {0.0, 2.9, 3.2, 2.0, 2.7, 2.9, 1.7, 8, 4.2, 3.2, 2.7,
2.6, 1.9, 1.6, 1.4, 1.3, 1.6}; // standard deviation by events;

double Bk[17] = {1, 1.6e-5, 1.9e-3, 2.9e-2, 1.2e-2, 2.1e-3, 3.7e-2, 4.5e-5,
8.2e-5, 1.5e-5, 1.5e-2, 1.9e-3, 1.6e-2, 3.8e-2, 2.9e-2, 2.8e-2,
3.8e-2}; // detector's noise;

// IMB events:

double timb[9] = {0.0, 0.0, 0.412, 0.650, 1.141, 1.562, 2.684, 5.010, 5.582};
double Eimb[9] = {0.38,37.28,39.36,36.19,22}; // energy of events;
double Sigmaimb[9] = {0.7,7.6,7.9, 6.5,5}; // standard deviation by events;
double Bimb[9] = {0,0,0,0,0,0,0,0,0}; // detector's noise;

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```
// Defined functions and matrixes:
```

```
double** gen_matrix2( int n ,int m)
{
    double **d;

    d= (double** ) malloc( sizeof( double* )*n ) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= (double* ) malloc( sizeof( double )*m ) ;
    }

    return d;
}
double*** gen_matrix3( int n,int m, int m2 )
{
    double ***d;

    d= (double***) malloc( sizeof( double**)*n ) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix2( m,m2 );
    }

    return d;
}
double**** gen_matrix4( int n,int m, int m2, int m3 )
{
    double ****d;

    d= (double****) malloc( sizeof( double***)*n ) ;

    for(int i3 =0 ; i3<n;i3++)
    { d[i3]= gen_matrix3( m,m2,m3 );
    }

    return d;
}
double***** gen_matrix5( int n,int m, int m2, int m3, int m4 )
{
    double *****d;

    d= (double*****) malloc( sizeof( double****)*n ) ;

    for(int i4 =0 ; i4<n;i4++)
    { d[i4]= gen_matrix4( m,m2,m3,m4 );
    }

    return d;
}
double***** gen_matrix6( int n,int m, int m2, int m3,int m4,int m5 )
{
    double *****d;

    d= (double*****) malloc( sizeof( double****)*n ) ;

    for(int i5 =0 ; i5<n;i5++)
    { d[i5]= gen_matrix5( m,m2,m3,m4,m5 );
    }

    return d;
}
double***** gen_matrix7( int n,int m, int m2, int m3,int m4,int m5, int m6 )
{
    double *****d;

    d= (double*****) malloc( sizeof( double****)*n ) ;

    for(int i6 = 0 ; i6 < n ;i6++)
    { d[i6]= gen_matrix6( m,m2,m3,m4,m5,m6 );
    }

    return d;
}
```

```

double Integra_1( double *y , vector<double> x1 )
{
    double soma=0.0;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        soma+=( y[i]+4*y[i+1]+y[i+2] )*(x1[i+2]-x1[i] );
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_2( double **yf , vector<double> x1 , vector<double> x2)
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_1( yf[0] , x2 );
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_1( yf[i+1] , x2 );
        yc= Integra_1( yf[i+2] , x2 );
        soma+= (ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_3( double ***y , vector<double> x1 , vector<double> x2 ,
vector<double> x3)
{
    double soma=0.0;
    double ya, yb, yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_2( y[0] , x2 , x3 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_2( y[i+1] , x2, x3 );
        yc= Integra_2( y[i+2] , x2 ,x3);
        soma+= (ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_4( double ****y , vector<double> x1 , vector<double> x2 ,
vector<double> x3, vector<double> x4 )
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb,yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_3( y[0] , x2, x3,x4 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_3( y[i+1] , x2, x3 ,x4);
        yc= Integra_3( y[i+2] , x2 ,x3, x4 );
        soma+= (ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;
}

double Integra_5( double *****y , vector<double> x1 , vector<double> x2 ,
vector<double> x3, vector<double> x4 , vector<double> x5 )
{
    double soma=0.0;
    double ya ,yb,yc ;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_4( y[0] , x2, x3,x4,x5 );

    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {

```

```

        yb= Integra_4( y[i+1] , x2, x3, x4,x5 );
        yc= Integra_4( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5);
        soma+=(ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;

}

double Integra_6( double *****y , vector<double> x1 , vector<double> x2 ,
vector<double> x3, vector<double> x4 , vector<double> x5,vector<double> x6 )
{
    double soma=0.0;
    double ya , yb,yc;
    int i;
    int ifinal = x1.size();
    ya = Integra_5( y[0] , x2, x3,x4,x5,x6 );
    for(i=0;i< ifinal-2 ;i+=2 )
    {
        yb= Integra_5( y[i+1] , x2, x3, x4,x5 , x6);
        yc= Integra_5( y[i+2] , x2 ,x3,x4,x5, x6 );
        soma+=(ya + 4*yb + yc )*(x1[i+2]-x1[i] );
        ya = yc ;
    }
    return soma/6.0;

}

double gaussian( double x , double x0 , double sigma ){

    if (fabs(x-x0) < sigma * H )
    return (1.0 / (sqrt(2 * 3.1415928* sigma*sigma ))) *
    exp( - 0.5*pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );

    return 0.0;

}

double gaussian_n( double x , double x0 , double sigma ){

    if (fabs(x-x0) < sigma * H )
    return exp( - 0.5*pow( (x - x0)/sigma, 2.0 ) );

    return 0.0;

}

double obs_sample_statistic_err(double mu)
{
    double soma;
    soma=0;

    return soma;
}

double obs_sample_statistic(double mu,double dm)
{
    double soma;

    return soma;
}

//***** Defined functions *****

double Temp(double tu ,double T, double ap, double tp,
double tau1, double tau2){

    double t_saida;
    t_saida = T * exp(-tu / tau1) +0.1 ;

    if (tu >= tp ) t_saida += T * ap * exp(-(tu-tp) / tau2) ;

    return t_saida;
}

```

```

    }

double r(double ap, double tp, double tau1, double tau2){
    //return exp(-Delta_tp/(tp+0.1));

    //return 1.0;

    return exp(- tp / 15 * tau1) + 0.1;

}

double cov_gauss(double x1,double q1 , double x2, double q2)
{
    // calcula a convolucao de duas gaussianas
    double a1,a2;
    double ss;
    double u;
    a1=max( x1- H*q1 , x2-H*q2 );
    a2=min( x1+ H*q1 , x2+H*q2 );
    if (a2<a1) return 0;
    ss=0;
    Integra(ss, (gaussian(u, x1, q1) * gaussian(u, x2, q2)), u , a1, a2, (a2-a1)/4.0 );
    return ss;
}

double f_fermi(double eps, double tu, double T, double ap, double tp,
double tau1, double tau2){
    // if(eps/T > 5){return 0.0;}
    // if(eps/T < -5){return 1;}
    double To;
    To = Temp(tu, T,ap,tp,tau1,tau2);

    if (To < 0.1) return 0;
    return 1.0/( exp((eps + Q)/To) + 1.0 );
}

// Corrections function

double kappa(double eps){
    double a, b, c, E;
    E=eps+Q;
    a = 1 - Q/ E ;
    b = 1 - (2 * Q/E) ;
    c = (pow(Q,2) - pow(me,2))/ pow(E,2);

    if ((b+c) < 0.0) return 0.0;

    return a * sqrt(b + c);
}

// Rate's neutrino - cooling component=

double Rcol(double eps, double alpha, double tu, double T, double ap,
double tp, double tau1, double tau2){

    double fm;
    double kp;
    double saida=0;

    fm = f_fermi(eps,tu,T,ap,tp,tau1,tau2);
    if (fm ==0.0){return 0.0;}
    kp = kappa(eps);
    if (kp ==0.0 ) return 0.0;
    saida = (1.22e-5) * pow (alpha, 2) * Meff * (pow((eps + Q), 4)) *
    fm * kp * pow(r(ap,tp,tau1,tau2),2) ;
    if (saida <0) printf("ERROR Rcol \n");
    return saida;
}

//----- Kamiokande -----

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```

double noiseK( double eps )
{
    double gs;
    // gs = effK*(gaussianK(eps, 6 ,1)+ 0.01875*gaussianK(eps,20,10));
    gs = effK* ( gaussian(eps, 6 ,1) +0.01 );
    // <----- noise parameter

    // if (eps > 45 ) return (0.0 + gs)*pk ;
    // if (eps < 5) return (0.0001 +gs)*pk ;
    // if (eps < 20 ) return (gs+ 0.0016 * (eps/20.0))*pk;
    // return (0.0016 *(eps - 20.0)/( 30.0 ) + gs)*pk ;
    // if (eps < 10.0) return 0.01;

    return gs;
}

double etabarK(double eps){

    double c;

    c = 0.95*(1.0 - exp(-pow((eps -Q)/9.3,4)));

    if (c < 0.0) return 0.0;
    return c;

    // return 80*atan(eps/80);
    //return tanh(eps / 10);
    // return 0.9;
    double eK;
    double y1,y2,x1,x2;
    y1=0;
    y2=0.9;
    // x1 = 4.0;
    //x2 = 10.0;
    x1 = 10.0;
    x2 = 12.0;

    if (eps < 4.0) return 0.0 ;
    if (eps > 10.0) return 0.9 ;
    return (y2-y1)/(x2-x1)+y1;
    // return 0.9 ;

    if (eps < 5.0){return 0.0;}
    eK = (0.35) * atan(0.49 * eps - 4.0) + 0.43;
    if (eK < 0.0 ){return 0.0;}
    return eK;
}

// Step function

double StepK(double eps){

    if (eps > 5.0){
        return 1;}
    else {return 0.0;}
}

// IMB

```

```

double LikelihoodK(double alpha, double T, double tp, double ap,
double tau1, double tau2){

    int i,j;
    double soma;

    double termol, termo2;
    double prod;
    double eps;
    double ti;

    double e1,e2;

    soma = 0.0;
    Meff = Mk;

```

```

termol=0.0 ;
// Integra( termol , 0.73 * StepK( eps - 5 ) * (Rcol(alpha , T, eps, tp ) +
noiseK( eps )) , eps , epsmin, epsmax, ddeps ) ;

for( ti=0 ; ti <=30.0; ti= ti+ddtp )
{
    Integra( termol , ddt * etabarK(eps) *(Cn*Rcol(eps, alpha,ti, T,
ap, tp, tau1, tau2) + 1.0 * noiseK(eps) ), eps , epsmin, epsmax, ddeps ) ;
}

if (termol<0 )printf("termol= %f \n", termol );

prod=0.0;
//printf("-----\n");
for (i= 1 ; i <= 12 ; i++)
{
    if (i==6) continue;

    // if(Ek[i] < 10.0) continue ;
    termo2=0.0 ;

    e1= max( epsmin , Ek[i]- 3*Sigmak[i]/2.0);
    e2= min( epsmax , Ek[i]+ 3*Sigmak[i]/2.0);
    Integra( termo2 , StepK(eps)* Cn * lnVk * gaussian( eps, Ek[i] ,
Sigmak[i] ) * Cn * (Rcol( eps, alpha, tk[i], T, ap, tp, tau1, tau2 ) +
1.0*noiseK(eps) ) , eps , e1 , e2 , Sigmak[i]/2.0 ) ;

    prod =prod + log(termo2 );
}
// soma = exp(-23.0*Integral_rateK(alpha,T,tp)) * ProdKa(alpha,T,tp);
// if (prod < 1e-7 )printf("prod= %f \n", prod );
soma = exp(-1.0 * delt * timeK * termol+prod);

//printf("integral rate=%e \n", Integral_rateK(alpha,T,tp) );
//printf("Exp integral rate=%e \n", exp(-Integral_rateK(alpha,T,tp))
);
// printf("prod K= %e \n",ProdKa(alpha,T,tp) );
// printf("Like K , a=%e T=%e = %e\n", alpha,T, soma );

if (soma > Lmax ) Lmax= soma;
return soma;
}

//----- IMB -----
double noiseIMB( double eps )
{
    double gs;
    gs = effIMB* (gaussian(eps, 6 ,1) + 0.1);

    return pim*gs;
}

double etabarIMB(double eps){
    double c;
// double eIMB;

    c = (1.0 - 3.0*exp(-(eps - Q)/16.0));

    if (c < 0.0) return 0.0;
    return c;

    c = 1.0;
    if (eps > 30) c = 5.0;//2.885;
    if (eps > 60.0) {return 1.0;}
    if (eps < 20.0) {return 0.0;}

    return c*(0.1*sqrt(6*eps+1)-1.0);
}

```

```

double StepIMB(double eps){

    if (eps > 19.0){
        //if (eps > 17.11){
            return 1;
        }
        else {return 0.0;}
    }

double LikelihoodIMB(double alpha, double T, double tp, double ap,
double tau1, double tau2){

    int i;
    double soma;

    double termol, termo2;
    double prod;
    double eps;
    double ti;

    soma = 0.0;
    Meff = Mimb;

    termol=0.0 ;

    for(ti=0 ; ti <= 20 ; ti= ti+ddtp ){
        Integra( termol , ddtp*etabarIMB(eps) * (
        Cn*Rcol(eps, alpha, ti, T,ap, tp, tau1, tau2 )
        + noiseIMB( eps )) , eps , epsmin, epsmax, ddeps ) ;
    }
    prod=1.0;
    for (i= 1 ;i <= 8 ; i++) {
        // if (i==7) continue;
        // if (i==8) continue;

        if (termol<0 )printf("termol= %f \n", termol );

        // if (i==8) continue;
        // if (Ek[i] < 10.0) continue ;
        termo2=0.0 ;

        //for( ti= timb[i] - 3 * sigma_tp ; ti <= timb[i] + 3*sigma_tp ; ti= ti + ddtp )
        // termo2=0.0 ;
        Integra( termo2 , StepIMB(eps) *Cn*lnVimb*
        gaussian( eps, Eimb[i] , Sigmaimb[i] ) *
        (Cn*Rcol(eps, alpha, timb[i], T, ap, tp, tau1, tau2 )
        + noiseIMB(eps)) , eps , epsmin , epsmax , Sigmaimb[i]/2.0 ) ;

        prod = prod * termo2 ;
    }

    soma = exp(-1.0 * delt * timeIMB * termol ) * prod;
    if (soma > Lmax ) Lmax= soma;
    return soma;
}

//----- Combined likelihood -----

double Likelihood_combined(double alpha, double T, double ap, double tp,
double tau1, double tau2){

    // return LikelihoodK(alpha,T,ap, tp,tau1,tau2) *
    LikelihoodIMB(alpha,T,ap,tp,tau1,tau2);

    return LikelihoodK(alpha,T,ap, tp,tau1,tau2);

    // return LikelihoodIMB(alpha,T,ap,Delta_tp);
}

```



```
//*****Priori functions *****

double prior1(double alpha,double T, double tp, double ap,
double tau1, double tau2){

//      return 1.0/ alpha ;
//      return 1.0 / pow(T,2);

}

//*****Likelihood's Calculus *****

//***** Predictive's calculus *****

// Prior 1 --> two gaussians:

double predictive1(void){

    double soma = 1.0;

    return soma;

}

// Prior 2 --> 1 / M:

double predictive2(void){

    return 0.0;

}

//***** Probabilities calculus *****

//Probability 1:

double Probability1(int i1,int i2,int i3, int i4, int i5, int i6, int i7 ){

    return 1.0;

}

int main(){

    FILE *arquivo ;
    double i, x,y, z ;

    double x1,x2,x3,x4,x5;
    double lmax1,lmax2,lmax3,lzmax;
    double predi;
    double ei1,ei2,ei3,ei4,ei5,ei6, ei7;

    double tmp_max=0;

    printf("Start ! \n");

    Lmax = 0.0;

    ei1=0;
```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```

ei2=0;
ei3=0;
ei4=0;
ei5=0;
ei6=0;
ei7=0;

srand(time(NULL));

    for(x = Amin ; x <= Amax; x=x+ddA) vAlpha.push_back(x);

    for(x = Tmin ; x <= Tmax; x=x+ddT) vTemp.push_back(x);

    for(x = tpmin ; x <= tpmax; x=x+ddtp) vtp.push_back(x);

    for(x = apmin ; x <= apmax; x=x+ddap) vAp.push_back(x);

    for(x = taulmin; x <= taulmax; x = x + ddtau1) vtau1.push_back(x);

    for(x = tau2min; x <= tau2max; x = x + ddtau2) vtau2.push_back(x);


    printf("Pts =%i %i %i %i %i %i \n", vAlpha.size(),vTemp.size(),
        vAp.size(),vtp.size(), vtau1.size(), vtau2.size() );
    printf("Size =%i \n", vAlpha.size()* vTemp.size()* vtp.size() *
        vAp.size() *vtau1.size() * vtau2.size() );

    Lk = gen_matrix6( vAlpha.size(), vTemp.size(), vAp.size(),
        vtp.size(), vtau1.size(), vtau2.size() );
    //Limb = gen_matrix4( vAlpha.size(), vTemp.size(),
        vDeltaTp.size(),vAp.size() );

    L_s12 = gen_matrix6(vAlpha.size(), vTemp.size(), vAp.size(),
        vtp.size(), vtau1.size(),vtau2.size() );

    //L_s12= gen_matrix5( vAp.size(), vAlpha.size(), vTemp.size(),
        vtau1.size(),vtau2.size() );

    time_t t_inicial;
    time_t t_atual;
    t_inicial= time(NULL);

    for(int i1 = 0; i1 < vAlpha.size(); i1++)
    {
        for(int i2 = 0; i2 < vTemp.size(); i2++)
            for(int i3 = 0; i3 < vAp.size(); i3++)
                for(int i4 = 0; i4 < vtp.size(); i4++)
                    for (int i5 = 0; i5 < vtau1.size(); i5++)
                        for (int i6 = 0; i6 < vtau2.size(); i6++)
                            {
                                //printf(" %i %i %i %i %i \n", i1,i2,i3,i4,i5);
                                Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] = Likelihood_combined( vAlpha[i1],vTemp[i2],
                                    vAp[i3], vtp[i4],vtau1[i5], vtau2[i6]);

                                //Limb[i1][i3][i4][i5] = LikelihoodIMB( vAlpha[i1],vTemp[i3],vAp[i5] ,
                                    vDeltaTp[i4]);

                                //L[i1][i2][i3][i4] = LikelihoodK( vAlpha[i1],vTemp[i3],vAp[i5] ,
                                    vDeltaTp[i4]) *LikelihoodIMB( vAlpha[i1],vTemp[i3],vAp[i5] ,vDeltaTp[i4]);

                            }

        t_atual= time(NULL);
        printf(" %i %i restam %4.1f minutos \n", i1,vAlpha.size(),
            (vAlpha.size()-(i1+1))*(((t_atual-t_inicial)/60.0)/(i1+1)));

    }

    predi = Integra_6(Lk,vAlpha,vTemp,vAp,vtp,vtau1,vtau2);

    // Normaliza a preditivTemp, aplica a priori, e translada as matrizes

lzmax=0.0;
    for(int i1 = 0;i1 < vAlpha.size(); i1++){
        for(int i2=0;i2 < vTemp.size(); i2++)

```

```

        for (int i3 = 0; i3 < vAp.size(); i3++)
        {
            for (int i4=0;i4 < vtp.size(); i4++)
                for (int i5 = 0; i5 < vtau1.size(); i5++)
                    for (int i6 = 0; i6 < vtau2.size(); i6++)

Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] = Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] *
priori1(vAlpha[i1], vTemp[i2],
vAp[i3], vtp[i4], vtau1[i5], vtau2[i6] );
//Limb[i1][i3][i4][i5] = Limb[i1][i3][i4][i5] * priori1(vAlpha[i1],vTemp[i3],
vDeltaTp[i4], vAp[i5] );

        }}

        lzmax=0.0 ;
        lmax1= vAlpha[0];

        lmax3= vtp[0];

        FILE *fmm ;

printf(" Finalizado\n ");

        fmm=fopen(" Lat.dat ","w+");

        for (int i1 = 0;i1 < vAlpha.size(); i1++)
            {for (int i2 = 0; i2 < vTemp.size(); i2++)

                { double soma =0;

for (int i3 = 0; i3 < vAp.size(); i3++)
    for (int i4 = 0; i4 < vtp.size(); i4++)
        for (int i5 = 0; i5 < vtau1.size(); i5++)
            for (int i6 = 0; i6 < vtau2.size(); i6++)
                soma += ddap * ddtp * ddttau1 * ddttau2 * Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] ;

fprintf(fmm,"%f %f %g \n",vAlpha[i1],vTemp[i2], soma );

                }

            fprintf(fmm,"\n");

        }

        fclose(fmm);

        fmm=fopen(" tau12.dat ","w+");

for (int i5 = 0;i5 < vtau1.size(); i5++)
{for (int i6 = 0; i6 < vtau2.size(); i6++)
{ double soma =0;
    for (int i1 = 0;i1 < vAlpha.size(); i1++)
        for (int i2 = 0; i2 < vTemp.size(); i2++)
            for (int i3 = 0; i3 < vAp.size(); i3++)
                for (int i4 = 0; i4 < vtp.size(); i4++)

{
soma += ddap * ddtp * ddA* ddT* Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] ;
}
    fprintf(fmm,"%f %f %g \n", vtau1[i5] , vtau2[i6], soma );

        }

        fprintf(fmm,"\n");

    }

        fclose(fmm);

        fmm=fopen(" Lap.dat ","w+");

```

Apêndice C. Programa da análise estatística da distribuição do sinal de neutrinos da SN1987A

```
        for (int i4 = 0; i4 < vtp.size(); i4++)
        {
for(int i3 = 0; i3 < vAp.size(); i3++)
{double soma = 0;
    for(int i6 =0; i6 < vtau2.size(); i6++)
        for(int i5 =0;i5 < vtau1.size(); i5++)
            for(int i2 = 0; i2 < vTemp.size(); i2++)
                for(int i1 = 0; i1 < vAlpha.size(); i1++)
                    { soma += ddtaul * ddtau2*ddT * ddA * Lk[i1][i2][i3][i4][i5][i6] ;
                }
}

fprintf(fmm,"%f %f %g \n", vtp[i4], vAp[i3] , soma );

        }
    fprintf(fmm,"\n");
}

fclose(fmm);

printf( "Likelihood = %g \n",Lmax);

fmm=fopen("rcol.dat","w+");
for(double e =1;e < 50 ; e+=0.2 )
{
    for(double Te = 0.1 ; Te < 20 ; Te +=0.2 )
    { fprintf( fmm , " %f %f %e \n", e, Te, etabarK(e)*
Rcol( e , 2, 0, Te , 0, 1.0 , 8.0, 8.0 ));
    }
    fprintf( fmm , "\n");
}

fclose(fmm);

return 0;

}

}
```

Trabalho publicado em revista indexada

D.1 Trabalho publicado

Neste apêndice apresentamos o publicado no periódico *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* em agosto de 2011. O artigo foi submetido em janeiro de 2011 sendo aceito depois de algumas modificações sugeridas pelo referee em fevereiro. No artigo há a descrição da análise bayesiana para o conjunto de dados referentes às massas de anãs brancas e NE's.

On the mass distribution of neutron stars

R.Valentim, E. Rangel and J.E. Horvath

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Universidade de São Paulo, 05570-010 Cidade Universitária SP, Brazil

Abstract

The distribution of masses for neutron stars is analyzed using the Bayesian statistical inference, evaluating the likelihood of proposed gaussian peaks by using fifty-four measured points obtained in a variety of systems. The results strongly suggest the existence of a bimodal distribution of the masses, with the first peak around $1.37M_{\odot}$, a much wider second peak at $1.73M_{\odot}$. The results support earlier views related to the different evolutionary histories of the members for the first two peaks, which produces a natural separation (even if no attempt to “label” the systems has been made here), and argues against the single-mass scale viewpoint. The bimodal distribution can also accommodate the recent findings of $\sim M_{\odot}$ masses quite naturally. Finally, we explore the existence of a subgroup around $1.25M_{\odot}$, finding weak, if any, evidence for it. This recently claimed low-mass subgroup, possibly related to $O-Mg-Ne$ core collapse events, has a monotonically decreasing likelihood and does not stand out clearly from the rest of the sample.

Keywords Stars: neutron

1. Introduction

The measurements of masses and radii of neutron stars have the potential to constrain stellar evolution and dense matter physics alike. In fact, matching stellar evolution results and arguments to actual neutron star observations is crucial to test the whole theory. As is well-known, the standard Stellar Evolution theory suggests the mass at the main sequence to be the most important parameter for the final outcome of massive stars. The lowest end of $\sim 8 - 11M_{\odot}$ is expected to produce very degenerate $O - Mg - Ne$ cores which eventually collapse because of electron captures. Some possible systems in which the collapse can occur have been discussed in Siess (2007), Poelarends et al. (2008), Nomoto & Kondo (1991) Nomoto & Iben (1985) and Nomoto (1987), among other works. Podsiadlowski et al. (2005) elaborated on this problem and suggested that, due to the “characteristic mass” expected for the core, the equation of state and amount of ejected mass would produce low-mass neutron stars in the ballpark of $\sim 1.25M_{\odot}$, also expected to receive small natal kicks in their birth events and therefore showing a low eccentricity. Further evidence in favor of this proposal has been presented by Schwab, Podsiadlowski & Rappaport (2010) after analyzing a sample of 14 well-measured neutron stars. In addition, a group of $\sim 1.35M_{\odot}$ has been also identified and associated with the standard scenario of iron core collapse. This group features a much higher natal kick, and comprises some of the binary pulsar systems such as PSR 1913+16.

On the other hand, increasing evidence for massive neutron stars has been mounting, with several systems in the range $\sim 1.6 - 1.8M_{\odot}$ and the very recent report of a $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ (Demorest et al. 2010). Interestingly enough, most of these neutron stars typically have a white dwarf companion, and thus a distinct evolutionary history. However, systems in HMXRB and in a binary pulsar also exist. The mass could be the direct result of the existence of massive iron cores for $M \geq 19M_{\odot}$ in the Main Sequence (Timmes, Woosley & Weaver 1996), a view advocated by van den Heuvel (2010) and others.

The knowledge of this mass distribution is therefore fundamental to understand the mechanisms involved in the final stages of stellar evolution. In this work, we consider the sample of known neutron star masses. We applied a Bayesian analysis for all set of masses overcome an *a priori distribution*. This work is motivated by a similar earlier approach by Finn (1994), who applied the Bayesian approach for to estimate the upper and lower limit for the neutron star masses, using one small set of data with only four well-measured neutron star binary pulsar systems. He observed the coincidence that all binary pulsar systems have constrained the masses close to $1.35M_{\odot}$. Schwab, Posiadlowski & Rappaport (2010) recently argued for the existence of two distinct neutron stars populations, the first with high-mass $\sim 1.35M_{\odot}$ and the second with low-mass $\sim 1.25M_{\odot}$, in a work that analyzed fourteen well-measured objects with uncertainties of $\leq 0.025M_{\odot}$. They interpreted these two populations as to be result of distinct evolutionary formation scenarios: low-mass populations originates in electron-capture SNe and feature low kicks, while the high-mass population is the result of iron core collapse SNe. Both the situations, the authors proposed that masses are bounded the formation mechanisms restrict the range of neutron stars and the existence of the two channels for the production of neutron stars. Work by Thorsett and Chakrabarti (1999) a decade ago concluded that a very narrow range of masses around $\sim 1.35M_{\odot}$ was found analyzing a sample of 50 objects, ruling out accretion at the level of $\Delta M \geq 0.1M_{\odot}$ for the binary pulsars known at that time. Very recently, Zhang et al. (2010) concluded that a substantial accretion was present in recycled objects using an enlarged sample. Clearly, a reanalysis of this subject is in order.

2. Neutron star sample

Our adopted sample is the compilation by Lattimer and collaborators, publicly available at <http://stellarcollapse.org/nsmasses>. After finding the central values for each source (Fig. 1), we included the 55 neutron stars with error bars varying between $0.009M_{\odot}$ and $0.548M_{\odot}$ in our work. The full references to the original works, including the label letter employed in the compilation are listed in the References. The uncertainties for each mass are quite different because the methods of measurement were distinct at different times, and the methods had been improved in many cases.

3. Statistical methodology

In this work the analysis the sample of neutron star masses has been studied using Bayesian Statistics based on conditional probabilities, usually stated as $p(H_i|D, I) = \frac{p(H_i|I)p(D|H_i, I)}{p(D|I)}$, where $p(H_i|I)$ is the probability *priori*, $p(D|H_i, I)$ is the *likelihood function*, $p(H_i|D, I)$ is the

Figure 1: Neutron Stars masses sample. The corresponding uncertainties vary widely and have been included in the analysis. Data taken from stellarcollapse.org.

posteriori probability and $p(D|I)$ is the *predictive probability*. This approach has been shown to be particularly powerful for the treatment of scarce/inaccurate data, yielding nonetheless quite accurate estimate of the parameters in most cases. One of the main tools to evaluate the quality of the results is the *Bayesian Information Criterion* (BIC), which considers the ratio of the likelihood models, the available data and models, and explicitly penalizes the model having more parameters. A crucial (and often criticized) ingredient is the *a priori* expectations from theoretical inference which is weighed by the BIC. An earlier study by Finn (1994) used radio observations for four neutron star binary pulsar systems and employed Bayesian Statistics, approximating each observed point by a gaussian function (on mass and standard deviation). He used one flat *a priori* distribution between an assumed upper limit of mass m_u and the lower limit m_l . The values found were $1.01 < m_l/M_\odot < 1.34$ (lower limit) and $1.43 < m_u/M_\odot < 1.64$ (upper limit). We aimed to improve this kind of analysis by working with the much larger sample and exploiting the potential of the Bayesian formalism.

3.1 Likelihood

Our tasks in this section is to construct the likelihood function. The likelihood distribution is the key point of Bayesian analysis because it considers the data and the theoretical knowledge about the measurements together. Here, we assumed that the likelihood function is simply the product of independent probabilities for what was measured and what was expected to be measured

$$L(\theta|D, M) = \left[\prod_i^N p(m_i|D, M) \right] \prod_j p(m_j|D, M).$$

Where θ represents the space of parameters, D is the data set, M the models, $p(m_i|D, M)$ is the probability of the data to be measured and $p(m_j|D, M)$ is the expected probability for

the measured data. The likelihood weights the sampling probability given the data (D) and assuming the model (M). The likelihood in our case is

$$L(\theta|D, M) = -\exp \int n_p(M, M_1, M_2, a_p, \sigma_1, \sigma_2, G) dM$$

$$\prod a_p \times g(M_1, \sigma_1, M_i, \xi_i) + (1 - a_p - a_0) \times$$

$$\times g(M_2, \sigma_2, M_i, \xi_i) + a_0 \times g(1.25, 0.07, M_i, \xi_i)$$

Where n_p is a function that involves the peak masses M_1 , M_2 , a_p is the relative amplitude of the first peak, a_0 ¹ is the amplitude centered on the $1.25M_\odot$, with assumed standard deviation ~ 0.07 , σ_1 , σ_2 are the standard deviations of the theoretical peaks and g is a gaussian function (actually the product of two gaussian distribution integrated).

$$g = \int_{a_1}^{a_2} \exp \left[-\frac{(u - x_1)^2}{2q_1^2} \right] \times \exp \left[-\frac{(u - x_2)^2}{2q_2^2} \right] du$$

Where a_1 and a_2 are

$$a_1 = \max[x_1 - H \times q_1, x_2 - H \times q_2]$$

and

$$a_2 = \max[x_1 + H \times q_1, x_2 + H \times q_2];$$

H is the scale parameter, q_1 , q_2 are the standard deviations of the x_1 and x_2 . Finally, n_p is

$$n_p(M, M_1, M_2, a_p, \sigma_1, \sigma_2, g) = a_p \times \exp \left[-\frac{(M - M_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] +$$

$$+ G \times \exp \left[-\frac{(M - 1.25)^2}{2(0.07^2)} \right] + [1 - (a_p + a_0)] \times \exp \left[-\frac{(M - M_2)^2}{2\sigma_1^2} \right]$$

3.2 The *a priori* distributions

The *a priori* distribution is the assumed knowledge about the phenomenon that is treated. In many previous works, notably those of Finn (1994) and Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010), gaussian distributions were employed, and are a “natural” choice employed in our work (see Finn 1994 for a discussion of this gaussian form within the Bayesian approach). We then assumed, to make contact with the work of Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010), a distribution peaked on two masses, around $M_1 = 1.35M_\odot$, and $M_2 = 1.55M_\odot$. Those authors restricted their analysis to a set of 14 well-measured NS, and did not include the large error bar points of the X-ray binaries and several WD-NS systems, consistently with their frequentist approach. With the aim of exploring the full distribution, we have chosen a second, higher value of M_2 to match the plain mean value of the NS in WD-NS

¹Where $0 \leq a_p + a_0 \leq 0$.

and X-ray binary systems of the sample first but, as we shall see below, the precise value is not too important at this point. We performed a first run within this two-value hypothesis, and compared it with the occurrence of a *single* mass peak for all objects, including NS-NS binaries, WD-NS binaries, X-ray binaries and MS-NS systems. The motivation for this first bold comparison was to see whether a single mass scale was still possible with the present data, as many works insisted on till a few years ago.

After this “first run”, and still working within the two-peak hypothesis, and adopting the same values as Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010) for M_1 and σ_1 , we looked for evidence of a subgroup attributed by them to $O-Mg-Ne$ cores producing low-mass neutron stars. In addition to the main peaks, we examined the distribution to identify the presence of this subgroup by defining a_0 as the peak amplitude of a $1.25M_\odot$, that is, relative to the two main identified peaks. Again, since the claimed masses lie at the low end, the calculation is not sensitive to the precise value of M_2 . We defined and calculated the relevant likelihood of a third peak, physically related to the formation of light NS out of $O-Mg-Ne$ cores of the lighter progenitors, of this second run.

In a third run we left the values of the masses M_1 and M_2 to be determined directly by the raw available data, together with their standard deviations values σ_1 and σ_2 . That is, while still imposing the distribution to be composed of two gaussian forms, we sought for the optimal values without restrictions as driven by the data sample. The purpose here is to let the Bayesian tools to indicate which are the possible values given the full error bars and within a definite gaussian hypothesis.

4. Results and Conclusions

We first address the basic results provided by the first run: the likelihood of still a single mass-scale as an explanation of all the data points is much lower than (at least) two peaks in them, in spite of the introduction of extra parameters penalized by the Bayesian approach. This results may not be meaningful for some, since it has been known for years that the more massive systems should have accreted $\sim 0.1-0.2M_\odot$ or more, and therefore detach from the original mass value. However, the first run is important to overcome the idea that a single value of the NS mass will be enough: even if the two peaks are quite close, this distribution is preferred to a single wide peak. This is somewhat expected, since the extremes of the determined masses, around $1M_\odot$, (van der Meer et al. 2007, see the recent work by Rawls et al. 2011 released after the completion of this work) at the lowest and $1.97 \pm 0.04M_\odot$ (Demorest et al. 2010), with a few more massive candidates (Clark et al. 2002, Freire et al. 2008b), are now separated by at least $1M_\odot$.

The results of the second run are summarized in Fig.2. The calculated likelihood of the third peak is a monotonically falling function of the amplitude, being maximal around zero amplitude (relative to the prominent main peaks). Therefore, we conclude that there is little evidence for the presence of a low-mass subgroup, and that the four objects in this range may be in fact members of the $1.35M_\odot$ peak. However, the confirmation of this result would have important consequences, since the progenitor stars are quite abundant. The lack of strong evidence of a peak $\sim 1.25M_\odot$ could be due to still poor sample/bias, or it could alternatively mean that most of the $8-11M_\odot$ become AGB, an issue that deserves serious consideration.

Figure 2: The likelihood of a third, low-mass peak. The existence of this third peak has a decreasing likelihood except for a nearly constant value near $a_0 \sim 0$

The results of the third run rendered two masses, as shown in Fig.3. The first mass is not substantially different from the result of Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010), a fact we interpret as the robustness of the distribution at this scale; while the second one is now around $1.73M_{\odot}$. This is not surprising, since the known WD-NS and X-ray binary systems have large uncertainties but also high values of the central NS masses. The full advantage of the Bayesian techniques suggest here that masses around $2M_{\odot}$ are not unexpected, even less when considering the obtained value of $\sigma_2 = 0.25$ (for comparison, the value of $\sigma_1 = 0.042$ is very narrow, as expected). The recently announced value of the object in the system, $1.97 \pm 0.04M_{\odot}$ according to Demorest et al. 2010 (not included in the sample), is just an example of this higher figure for the systems of this kind, and suggests a mean accreted mass of several tenths of $M_{\odot}$, although the precise value is model-dependent and should be estimated for each individual case. This subgroup may also include members coming from $\geq 20M_{\odot}$ masses in the Main Sequence (Timmer, Woosley and Weaver 1996, van den Heuvel 2004), born with higher masses without suffering any substantial accretion..

In summary, we have presented an analysis of an available NS mass sample which indicates a) a bimodal distribution with a narrow peak at $M_1 = 1.37M_{\odot}$ (fully compatible with the findings of Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010), and a higher peak at $M_1 = 1.73M_{\odot}$, the latter with a wide shape capable of accommodating $\geq 2M_{\odot}$ masses, b) little evidence for the expected low-mass NS descendants from the $8 - 11M_{\odot}$ range in the Main Sequence, and c) the unsustainability of the “one-mass-fits-all” picture, since the adopted Bayesian scheme properly weights the large uncertainties and extra parameters of the bimodal hypothesis applied to an imperfect dataset. Given the potential implications for the stellar evolution, the need of further pursuing these kind of analysis and a continuous improvement by incorporating new data can not be overstated.

After the completion of this work we noticed the public release of a Bayesian analysis by Kiziltan, Kottas and Thorsett (2010), tackling the same problem and with a very detailed treatment of the calibration. Also their sample is restricted to avoid the inclusion of WD-NS and X-ray binary systems with large error bars. Within this analysis, the authors find

Figure 3: The values of masses at which the distribution peaks. The numbers on the contours indicate the decreasing probabilities of finding M_1 , M_2 there.

two peaks, one at $M = 1.35M_\odot$, and a second one located at $M = 1.5M_\odot$. Given the different sampling and their reliance on simulated distributions (not performed by us), it is fair to say that there is enough room for a convergence of results. It is important to note that these authors warn against the inclusion of more uncertain points because of a possible contamination of the sample. While we agree with this judgement, we believe that unless the higher masses happen to be completely and systematically overestimated, the emergence of a bump at a mass even higher than $1.5M_\odot$ is strongly expected. Our value for that “second peak” should reflect to a large extent the difference of including these loose observational data as processed by the Bayesian formalism, acknowledged to handle this kind of situations better than well-known frequentist approaches. In addition, the quest for a low-mass bump remains in that work, since the peak at the lower $M = 1.35M_\odot$ hosts the low-mass systems attributed by Schwab, Podsiadwolski and Rappaport (2010) to the lower end of progenitor masses.

Finally, we acknowledge the works of Steiner, Lattimer and Brown (2010) and Zhang et al. (2010), the first aimed to reveal the nuclear equation of state and the second focusing on the evolutionary features of the systems. Steiner, Lattimer and Brown found independently, from an analysis of a subset of X-ray bursters, that the maximum mass had to be quite high, as demanded by the $2-M_\odot$ determination by Demorest et al. (2010) released shortly after their paper. We did not attempt any specific inference about the nuclear equation of state here, although our results also demand a theoretical description capable to accommodate the objects in the second peak. On the other hand, Zhang et al. used almost the same sample, but their calculations attempted to link the period to the mass, rather than discriminating

between single-peak and multimodal distributions. Even their statements about the NS-NS systems alone does not allow a firm conclusion about the existence of the low-mass peak at $1.25M_{\odot}$, since they focus just on the mean values and dispersions. In all cases the relatively high values of the latter dispersions seem to be a consequence of this methodology.

Acknowledgments

We would like to acknowledge the financial support of the FAPESP (São Paulo) Agency and CNPq (Brazil). Drs. M.G. Pereira and F. D'Amico are gratefully acknowledged for their scientific advice during this work. An anonymous referee is acknowledged for useful suggestions and criticisms that improved the first version of this work.

References

- Barziv, O., Karper, L., van Kerkwijk, M.H., Telging, J.H., van Paradijs, J. (b), 2001, *A&A*, 377, 925
- Bassa, C.G., van Kerkwijk, M.H., Koester, D., Verbunt, F. (O), 2006, *A&A* 456, 295
- Bhat, N.D.R., Bailes, M., Verbiest, J.P.W. (j), 2008, *Phys. Rev. D* 77, 124017
- Casares, J., González Hernández, J.I., Israelian, G., Rebolo, R. (d), 2010, *MNRAS*, 401, 2517
- Champion, D.J., Lorimer, D.R., McLaughlin, M.A., Xilouris, K.M., Arzoumanian, Z., Freire, P.C.C., Lommen, A.N., Cordes, J.M., Camilo, F. (z), 2005, *MNRAS*, 363, 929
- Clark, J.S. et al.(a), 2002, *A&A*, 392, 909
- Corongiu, A., Kramer, M., Lyne, A.G., Lohmer, O., D'Amico, N., Possenti, A. (A), 2004, *Mem. S. A. It. Suppl.* 5, 188
- Demorest, P., Pennucci, T., Ransom, S., Roberts, M., Hessels, J. 2010, *Nature*, 467, 1081
- Ferdman, R.D. (J), 2008, Ph.D. thesis, Univ. of British Columbia
- Finn, L.S., 1994, *Phys. Rev. Lett.*, 73, 1858
- Freire, P.C.C.(N), 2009, talk given at the Hirscheegg 2009:Nuclear Matter at High Density Workshop, available at <http://crunch.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhc/pages/events/hirscheegg/2009/prog-2009.1>
- Freire, P.C.C., Camilo, F., Kramer, M., Lorimer, D.R., Lyne, A.G., Manchester, R.N., D'Amico, N. (w), 2003, *MNRAS*, 340, 1359
- Freire, P.C.C., Ransom, S.M., Gupta, Y. (D), 2007, *ApJ* 662, 1177
- Freire, P.C.C., Wolszcan, A., van den Berg, M., Hessels, J.W.T (l), 2008a, *ApJ* 679, 1433

- Freire, P.C.C., Ransom, S.M., Bégin, S., Stairs, I.H., Hessels, J.W.T., Frey, L.H., Camilo, F. (H), 2008b, *ApJ*, 675, 670
- Freire, P.C.C., Jacoby, B.A., Bailes, M. (L), 2008, in 40 YEARS OF PULSARS: Millisecond Pulsars, Magnetars and More, AIP Conference Proceedings 983, 488
- Gelino, D.M., Tomsick, J.A., Heindl, W.A. (I), 2003, *Bull. Am. Astron. Soc.*, 34, 1199
- Hotan, A.W., Bailes, M., Ord, S.M. (u), 2006, *MNRAS* 369, 1502
- Jacoby, B.A., Cameron, P.B., Jenet, F.A., Anderson, S.B., Murty, R.N., Kulkarni, S.R. (x), 2006, *ApJL*, 644, L113
- Janssen, G.H., Stappers, B.W., Kramer, M., Nice, D.J., Jessner, A., Cognard, I., Purver, M.B.A (C), 2008, *A&A*, 490, 753
- Jonker, P.G., van der Klis, M., Groot, P.J. (n), 2003, *MNRAS*, 339, 663
- Kramer, M., Stairs, I.H., Manchester, R.H., McLaughlin, M.A., Lyne, A.G., Ferdman, R.D., Burgay, M., Lorimer, D.R., Possenti, A., D'Amico, N., Sarkisian, J.M., Hobbs, G.B., Reynolds, J.E., Freire, P.C.C., Camilo, F.(i), 2006, *Science* 314, 97
- Kiziltan, B., Kottas, A., Thorsett, S.E., [arXiv:1011.4291v1](https://arxiv.org/abs/1011.4291v1) (2010)
- Lange, Ch., Camilo, F., Wex, N., Kramer, M., Backer, D.C., Lyne, A.G., Doroshenko, O. (m), 2001, *MNRAS* 326, 274
- Lorimer, D.R., Stairs, I. H.; Freire, P. C.; Cordes, J. M.; Camilo, F.; Faulkner, A. J.; Lyne, A. G.; Nice, D. J.; Ransom, S. M.; Arzoumanian, Z.; Manchester, R. N.; Champion, D. J.; van Leeuwen, J.; McLaughlin, M. A.; Ramachandran, R.; Hessels, J. W.; Vlemmings, W.; Deshpande, A. A.; Bhat, N. D.; Chatterjee, S.; Han, J. L.; Gaensler, B. M.; Kasian, L.; Deneva, J. S.; Reid, B.; Lazio, T. J.; Kaspi, V. M.; Crawford, F.; Lommen, A. N.; Backer, D. C.; Kramer, M.; Stappers, B. W.; Hobbs, G. B.; Possenti, A.; D'Amico, N.; Burgay, M. (B), 2006, *ApJ*, 640, 428
- Mason, A.B., Norton, A.J., Clark, J.S., Negueruela, I., Roche, P. (f), 2010, *A&A*, 509, 79
- Nice, D.H.(M), 2004, in Proceedings of the IAU Symposium 218: Young Neutron Stars and their Environment, eds. F.M. Camilo & B.M. Gaensler, *Ast. Soc. Pac.*, San Francisco
- Nice, D.H., Splaver, E.M., Stairs, I.H. (h), 2001, *ApJ* 549, 516
- Nice, D.J., Splaver, E.M., Stairs, I. H. (g), 2003, in Radio Pulsars, ed. M. Bailes, D. J. Nice, and S. E. Thorsett (*Ast. Soc. Pac.* 302, San Francisco), 75
- Nice, D.J., Stairs, I.H., Kasian, L.E. (y), 2008, in 40 YEARS OF PULSARS: Millisecond Pulsars, Magnetars and More, AIP Conference Proceedings 983, 453

- Nomoto, K., 1987, *ApJ*, 322, 20
- Nomoto, K., Iben, I., Jr., 1985, *ApJ*, 297, 531
- Nomoto, K., Kondo, Y., 1991, *ApJ*, 367, L19
- Podsiadlowski, Ph., Langer, N., Poelarends, A. J. T., Rappaport, S., Heger, A., Pfahl, E., 2004, *ApJ*, 612, 1044
- Podsiadlowski, Ph., Dewi, J. D. M., Lesaffre, P., Miller, J. C., Newton, W. G., Stone, J. R., 2005, *MNRAS*, 361, 1243
- Poelarends, A. J. T., Herwig, F., Langer, N., Heger, A., 2008, *ApJ*, 675, 614
- Quaintrell, H., Norton, A.J., Ash, T.D.C., Roche, P., Willems, B., Bedding, T.R., Baldry, I.K., Fender, R.P. (c), 2003, *A&A*, 401, 303
- Ransom, S.M., Hessels, J.W.T., Stairs, I.H., Freire, P.C., Camilo, F., Kaspi, V.M., Kaplan, K.L. (t), 2005, *Science* 307, 892
- Schwab, J., Podsiadlowski, Ph., Rappaport, S., 2010, *ApJ*, 719, 722
- Siess, L., 2007, *A&A*, 476, 893
- Splaver, E.M., Nice, D.J., Stairs, I.H., Andrea, A.N., Backer, D.C. (r), 2005, *ApJ* 415, 405
- Stairs, I.H., Thorsett, S. E., Taylor, J.H., Wolszczan, A. (K), 2002, *ApJ*, 581, 501
- Steehls, D., Jonker, P.G. (F), 2007, *ApJL*, 669, L85
- Steiner, A.W., Lattimer, J.M., Brown, E.F., 2010, *ApJ*, 722, 33
- Thorsett, S. E., Chakrabarty, D. (e), 1999, *ApJ*, 512, 288
- Timmes, F. X., Woosley, S. E., Weaver, T.A., 1996, *ApJ* 457, 834
- van den Heuvel, E. P. J. 2004, in *ESA SP 552, 5th INTEGRAL Workshop on the INTEGRAL Universe*, eds. V. Schoenfelder, G. Lichti, & C. Winkler (Noordwijk: ESA), 185
- van den Heuvel, E. P. J. 2010, in , *Astrophysics of Neutron Stars 2010*, ed. E. Gogus et al. (AIP Conference Proceedings), in the press.
- van der Meer, A., Kaper, L., van Kerkwijk, M.H., Heermskerk, M.H.M., van den Heuvel, E.P.J. (E), 2007, *A&A*, 473, 523
- van Kerkwijk, M.H., van Paradijs, J., Zuiderwijk, E.J. (k), 1995, *A&A* 303, 497

Verbiest, J.P.W., Bailes, M., van Straten, W., Hobbs, G.B., Edwards, R.T., Manchester, R.N., Bhat, N.D.R., Sarkissian, J.M., Jacoby, B.A., Kulkarni, S.R. (p), 2008, ApJ 679, 675

Weisberg, J.M., Taylor, J.H. (q), 2005, in ASP Conf. Ser. 328, Binary Radio Pulsars, eds. F. A. Rasio & I. H. Stairs, Ast. Soc. Pac., San Francisco, 25

Zhang, C.M., Wang, J., Zhao, Y.H. Yin, H.X., Song, L.M., Menezes, D.P., Wickramasinghe, D.T., Ferrario, L., Chardonnet, P., 2010, A&A, in the press.

Bibliografia

- ALCOCK, C. & OLINTO, A.: Exotic phases of hadronic matter and their astrophysical application. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, volume 38; pp. 161, 1988; pp. 161. [22](#)
- ALEKSEEV, E. N.; ALEKSEEVA, L. N.; VOLCHENKO, V. I. & KRIVOSHEINA, I. V.: Possible detection of a neutrino signal on 23 February 1987 at the Baksan underground scintillation telescope of the Institute of Nuclear Research. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, volume 45; p. 589, 1987; p. 589. [78](#)
- ALEXEYEV, E. N.; ALEXEYEVA, L. N.; CHUDAKOV, A. E. & KRIVOSHEINA, I. V.: Status of the Baksan Experiment on the Search for Neutrino Bursts from Stellar Collapses. In *International Cosmic Ray Conference*, volume 6 of *International Cosmic Ray Conference*, pp. 277–+. 1987. [53](#)
- ANDREANI, P.; FERLET, R. & VIDAL-MADJAR, A.: The interstellar spectrum towards the supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Nature*, volume 326; pp. 770, 1987; pp. 770. [39](#)
- ARNETT, W. D.: Neutrino trapping during gravitational collapse of stars. *ApJ*, volume 218; pp. 815, 1977; pp. 815. [15](#)
- ARNETT, W. D. & ROSNER, J. L.: Neutrino mass limits from SN1987A. *Physical Review Letters*, volume 58; pp. 1906, 1987; pp. 1906. [110](#)
- ARNETT, W. D.; BAHCALL, J. N.; KIRSHNER, R. P. & WOOSLEY, S. E.: Supernova 1987A. *ARAA*, volume 27; pp. 629, 1989; pp. 629. [18](#), [39](#), [40](#), [53](#)
- BAADE, W. & ZWICKY, F.: On Super-novae. *Proceedings of the National Academy of Science*, volume 20; pp. 254, 1934; pp. 254. [3](#), [12](#), [22](#)
- BAHCALL, J. N. & GLASHOW, S. L.: Upper limit on the mass of the electron neutrino. *Nature*, volume 326; p. 476, 1987; p. 476. [110](#)
- BARON, E.; COOPERSTEIN, J. & KAHANA, S.: Type-II supernovae in 12-solar-mass and 15-solar-mass stars The equation of state and general relativity. *Physical Review Letters*, volume 55; pp. 126, 1985; pp. 126. [18](#)
- BENVENUTO, O. G. & HORVATH, J. E.: Evidence for strange matter in supernovae\? *Phys. Rev. Lett.*, volume 63; pp. 716, 1989; pp. 716. [22](#), [28](#), [78](#), [79](#), [82](#), [83](#), [85](#), [111](#), [112](#)
- BENVENUTO, O. G.; HORVATH, J. E. & VUCETICH, H.: Strange-Pulsar Models. *International Journal of Modern Physics A*, volume 6; pp. 4769, 1991; pp. 4769. doi:10.1142/S0217751X91002276. [22](#)
- BERGER, J. O.: *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. 1985. [65](#)
- BETHE, H. A.: Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, volume 62; pp. 801, 1990; pp. 801. [2](#), [12](#), [14](#), [16](#), [20](#), [98](#)
- BETHE, H. A.: SN 1987A - an empirical and analytic approach. *ApJ*, volume 412; pp. 192, 1993; pp. 192. [20](#)
- BILENKY, S. M.: Neutrinos. *ArXiv Physics e-prints*, 2001. [27](#)
- BIONTA, R. M.; BLEWITT, G.; BRATTON, C. B.; CASPER, D. & CIOCIO, A.: Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Physical Review Letters*, volume 58; pp. 1494, 1987; pp. 1494. [50](#), [52](#), [78](#)
- BROWN, G. & BETHE, H. A.: How a supernova explodes. *Scientific American*, volume 252; pp. 60, 1985; pp. 60. [17](#), [19](#), [20](#)
- BURAS, R.; JANKA, H.-T.; RAMPP, M. & KIFONIDIS, K.: Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. II. Models for different progenitor stars. *A&Ap*, volume 457; pp. 281, 2006; pp. 281. [17](#), [18](#)
- BURROWS, A.: Neutrinos from supernova explosions. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, volume 40; pp. 181, 1990; pp. 181. [7](#), [27](#)
- BURROWS, A. & LATTIMER, J. M.: The prompt mechanism of Type II supernovae. *ApJ*, volume 299; pp. L19, 1985; pp. L19. [18](#)
- BURROWS, A. & LATTIMER, J. M.: The birth of neutron stars. *ApJ*, volume 307; pp. 178, 1986; pp. 178. doi:10.1086/164405. [111](#)
- BURROWS, A. & LATTIMER, J. M.: Neutrinos from SN 1987A. *ApJ*, volume 318; pp. L63, 1987; pp. L63. [96](#), [110](#)
- BURROWS, A. & SAWYER, R. F.: Effects of correlations on neutrino opacities in nuclear matter. *Phys. Rev. C*, volume 58; pp. 554, 1998; pp. 554. [31](#)
- BURROWS, A.; KLEIN, D. & GANDHI, R.: The future of supernova neutrino detection. *Phys. Rev. D*, volume 45; pp. 3361, 1992; pp. 3361. [45](#)

- BURROWS, A.; HAYES, J. & FRYXELL, B. A.: On the Nature of Core-Collapse Supernova Explosions. *ApJ*, volume 450; pp. 830, 1995; pp. 830. [20](#)
- CHADWICK, J.: Possible Existence of a Neutron. *nat*, volume 129; pp. 312, 1932; pp. 312. [26](#)
- CHAN, T. C.; CHENG, K. S.; HARKO, T.; LAU, H. K.; LIN, L. M.; SUEN, W. M. & TIAN, X. L.: Could the Compact Remnant of SN 1987A BE a Quark Star? *ApJ*, volume 695; pp. 732, 2009; pp. 732. [41](#)
- CLARK, J. S.; GOODWIN, S. P.; CROWTHER, P. A.; KAPER, L.; FAIRBAIRN, M.; LANGER, N. & BROCKSOPP, C.: Physical parameters of the high-mass X-ray binary <ASTROBJ>4U1700-37</ASTROBJ>. *A&A*, volume 392; pp. 909, 2002; pp. 909. [104](#)
- COLLINS, J. C. & PERRY, M. J.: Superdense matter: Neutrons or asymptotically free quarks? *Physical Review Letters*, volume 34; pp. 1353, 1975; pp. 1353. [22](#)
- COOPERSTEIN, J.: Neutrinos in supernovae. *PhysRep*, volume 163; pp. 95, 1988; pp. 95. [16](#)
- COSTANTINI, M. L.; IANNI, A. & VISSANI, F.: SN1987A and the properties of the neutrino burst. *Phys. Rev. D*, volume 70, no. 4; 043006, 2004; 043006. [55](#)
- DADYKIN, V. L.; ZATSEPIN, G. T.; KORCHAGIN, V. B.; KORCHAGIN, P. V.; MAL'GIN, A. S.; RYAZHSKAYA, O. G.; RYASNYI, V. G.; TALOCHKIN, V. P.; KHAL'CHUKOV, F. F.; YAKUSHEV, V. F.; AGLIETTA, M.; BADINO, G.; BOLOGNA, G.; CASTAGNOLI, C. ET AL: Detection of a rare event on 23 February 1987 by the neutrino radiation detector under Mont Blanc. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, volume 45; pp. 593, 1987; pp. 593. [53](#)
- DE MORGAN, A.: *The Calculus of Inference, Neceffary and Probable* . 1847. [63](#)
- DE RÚJULA, A.: May a supernova bang twice? *Physics Letters B*, volume 193; pp. 514, 1987; pp. 514. [53](#)
- DEMOREST, P. B.; PENNUCCI, T.; RANSOM, S. M.; ROBERTS, M. S. E. & HESSELS, J. W. T.: A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. *NATURE*, volume 467; pp. 1081, 2010; pp. 1081. [99](#), [104](#), [107](#), [113](#)
- EWAN, G. T.: The Sudbury Neutrino Observatory. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, volume 314; pp. 373, 1992; pp. 373. [46](#)
- FINN, L. S.: Observational constraints on the neutron star mass distribution. *Physical Review Letters*, volume 73; pp. 1878, 1994; pp. 1878. [99](#), [102](#), [114](#)
- FOWLER, W. A. & HOYLE, F.: Neutrino Processes and Pair Formation in Massive Stars and Supernovae. *ApJS*, volume 9; pp. 201, 1964; pp. 201. [4](#)
- FREIRE, P. C. C.; RANSOM, S. M.; BÉGIN, S.; STAIRS, I. H.; HESSELS, J. W. T.; FREY, L. H. & CAMILO, F.: Eight New Millisecond Pulsars in NGC 6440 and NGC 6441. *ApJ*, volume 675; pp. 670, 2008; pp. 670. [104](#)
- GIUNTI, C. & CHUNG, W. K.: *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007. [26](#), [55](#)
- GLENDENNING, N. K.: Neutron stars are giant hypernuclei? *ApJ*, volume 293; pp. 470, 1985; pp. 470. [22](#)
- GOLDREICH, P. & WEBER, S. V.: Homologously collapsing stellar cores. *ApJ*, volume 238; pp. 991, 1980; pp. 991. [14](#)
- HANNESTAD, S. & RAFFELT, G.: Supernova Neutrino Opacity from Nucleon-Nucleon Bremsstrahlung and Related Processes. *ApJ*, volume 507; pp. 339, 1998; pp. 339. [31](#)
- HAXTON, W. C.: Nuclear response of water Cherenkov detectors to supernova and solar neutrinos. *Phys. Rev. D*, volume 36; pp. 2283, 1987; pp. 2283. [53](#)
- HILLEBRANDT, W.: An exploding 10 solar mass star - A model for the Crab supernova. *A&A*, volume 110; pp. L3, 1982; pp. L3. [18](#)
- HILLEBRANDT, W. & MEYER, F.: A common envelope model for SN 1987A. *A&A*, volume 219; pp. L3, 1989; pp. L3. [40](#)
- HIRATA, K.; KAJITA, T.; KOSHIBA, M.; NAKAHATA, M. & OYAMA, Y.: Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A. *Physical Review Letters*, volume 58; pp. 1490, 1987; pp. 1490. [47](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [78](#)
- HOYLE, F. & FOWLER, W. A.: Nucleosynthesis in Supernovae. *ApJ*, volume 132; pp. 565, 1960; pp. 565. [4](#)
- HUMPHREYS, R. M. & McELROY, D. B.: The initial mass function for massive stars in the Galaxy and the Magellanic Clouds. *ApJ*, volume 284; pp. 565, 1984; pp. 565. [39](#), [40](#)
- JANKA, H.-T. & HILLEBRANDT, W.: Neutrino emission from type II supernovae - an analysis of the spectra. *AAp*, volume 224; pp. 49, 1989; pp. 49. [38](#), [39](#), [96](#), [110](#)
- JANKA, H.-T. & MUELLER, E.: Neutrino heating, convection, and the mechanism of Type-II supernova explosions. *A&Ap*, volume 306; pp. 167, 1996; pp. 167. [17](#), [18](#)
- JANKA, H.-T. & MÜLLER, E.: Neutron Star Kicks and Multi-Dimensional Supernova Models. In H. Böhringer, G. E. Morfill, & J. E. Trümper, editor, *Seventeenth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, volume 759 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pp. 269—+. 1995. [20](#)

- JANKA, H.-T.; MAREK, A. & KITAURA, F.-S.: Neutrino-Driven Explosions Twenty Years After SN 1987A. In S. Immler, K. Weiler, & R. McCray, editor, *Supernova 1987A: 20 Years After: Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, volume 937 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 144–154. 2007. 17, 19, 20, 21
- JAYNES, E. T.: *The Logic of Science, The Probability Theory*. 1996. 64, 65
- JEFFREYS, W. H. & BERGER, J.: The American Scientist. *ASP*, 1992. 68
- KACHELRIESS, M.; TOMÁS, R. & VALLE, J. W. F.: Large lepton mixing and supernova 1987A. *Journal of High Energy Physics*, volume 1; p. 30, 2001; p. 30. 55
- KAPLAN, D. B. & NELSON, A. E.: Strange goings on in dense nucleonic matter. *Physics Letters B*, volume 175; pp. 57, 1986; pp. 57. 22
- KASS, R. E. & RAFTERY, A. E.: . *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1995. 67
- KASS, R. E. & WASSERMAN, L.: . *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1995. 68
- KEMP, E.: CARACTERIZACAO DA EMISSAO DE NEUTRINOS DE COLAPSOS ESTELARES COM O EXPERIMENTO LVD. 2000. 5, 42, 43, 45, 46, 53, 54
- KITAURA, F. S.; JANKA, H.-T. & HILLEBRANDT, W.: Explosions of O-Ne-Mg cores, the Crab supernova, and subluminoous type II-P supernovae. *A&Ap*, volume 450; pp. 345, 2006; pp. 345. 18
- KIZILTAN, B.; KOTTAS, A. & THORSETT, S. E.: The Neutron Star Mass Distribution. *ArXiv e-prints*, 2010. 113
- KLEISER, I. K. W.; POZNANSKI, D.; KASEN, D.; YOUNG, T. R.; CHORNOCK, R.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; GANESHALINGAM, M.; KIRSHNER, R. P.; LI, W.; MATHESON, T.; NUGENT, P. E. & SILVERMAN, J. M.: Peculiar Type II supernovae from blue supergiants. *MNRAS*, volume 415; pp. 372, 2011; pp. 372. 40
- KOSHIBA, M.: Observation of neutrinos from SN1987A by Kamiokande-II. In I. J. Danziger, editor, *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, volume 26 of *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, pp. 219–227. 1987. 46, 48, 52, 53
- LATTIMER, J. M. & PRAKASH, M.: Neutron Star Structure and the Equation of State. *ApJ*, volume 550; pp. 426, 2001; pp. 426. 24
- LATTIMER, J. M. & PRAKASH, M.: The Physics of Neutron Stars. *Science*, 2004a. 17, 22
- LATTIMER, J. M. & PRAKASH, M.: The Physics of Neutron Stars. *Science*, volume 304; pp. 536, 2004b; pp. 536. 24
- LATTIMER, J. M.; PRAKASH, M.; MASAK, D. & YAHIL, A.: Rapidly rotating pulsars and the equation of state. *ApJ*, volume 355; pp. 241, 1990; pp. 241. 23
- LEHMANN, E. L.: *The Theory of Point Estimation* . 1983. 65
- LINDLEY, D. V.: *The 1988 Wald Memorial Lectures, The Present Position in Bayesian Statistics*. 1990. 62
- LOREDO, T. J. & LAMB, D. Q.: Bayesian analysis of neutrinos observed from supernova SN 1987A. *Phys. Rev. D*, volume 65, no. 6; pp. 063002, 2002; pp. 063002. v, vii, 44, 47, 51, 52, 53, 55, 68, 73, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 94, 95, 96, 110, 111, 112, 115
- MARSHALL, L. A.: *The supernova story*. 1988. 2, 3
- MAYLE, R.; WILSON, J. R. & SCHRAMM, D. N.: Neutrinos from gravitational collapse. *ApJ*, volume 318; pp. 288, 1987; pp. 288. 37
- MIDDLEDITCH, J.; KRISTIAN, J. A.; KUNKEL, W. E.; HILL, K. M.; WATSON, R. D.; LUCINIO, R.; IMAMURA, J. N.; STEIMAN-CAMERON, T. Y.; SHEARER, A.; BUTLER, R. & REDFERN, M.: Rapid photometry of supernova 1987A: a 2.14 ms pulsar? *Nature*, volume 5; pp. 243, 2000; pp. 243. 41
- MYRA, E. S. & BURROWS, A.: Neutrinos from type II supernovae - The first 100 milliseconds. *ApJ*, volume 364; pp. 222, 1990; pp. 222. 38, 39
- NADYOZHIN, D. K. & OTROSHENKO, I. V.: Electron neutrino and antineutrino spectra associated with neutron star formation. *AZH*, volume 57; pp. 78, 1980; pp. 78. 37, 38
- NOMOTO, K.: Evolution of 8-10 solar mass stars toward electron capture supernovae. II - Collapse of an O + NE + MG core. *ApJ*, volume 322; pp. 206, 1987; pp. 206. 98
- NOMOTO, K. & KONDO, Y.: Conditions for accretion-induced collapse of white dwarfs. *ApJL*, volume 367; pp. L19, 1991; pp. L19. 98
- OLIVEIRA, T.: *Resumo das intervenções e comentários*. In *Atas do II Colóquio de Estatística e Investigação Operacional, Fundação. Nuclear Physics A*, 1981. 64
- ÖZEL, F.; PSALTIS, D.; NARAYAN, R. & MCCLINTOCK, J. E.: The Black Hole Mass Distribution in the Galaxy. *ApJ*, volume 725; pp. 1918, 2010; pp. 1918. 114

- OZEL, F.; PSALTIS, D.; NARAYAN, R. & SANTOS VILLARREAL, A.: On the Mass Distribution and Birth Masses of Neutron Stars. *ArXiv e-prints*, 2012. 107, 113, 114
- PAGE, D. & USOV, V. V.: Thermal Evolution and Light Curves of Young Bare Strange Stars. *Physical Review Letters*, volume 89, no. 13; pp. 131101, 2002; pp. 131101. 22
- PAGLIAROLI, G.; VISSANI, F.; COSTANTINI, M. L. & IANNI, A.: Improved analysis of SN1987A antineutrino events. *Astro-particle Physics*, volume 31; pp. 163, 2009; pp. 163. 111, 112
- PASTORELLO, A.; BARON, E.; BRANCH, D.; ZAMPIERI, L.; TURATTO, M.; RAMINA, M.; BENETTI, S.; CAPPELLARO, E.; SALVO, M.; PATAT, F.; PIEMONTE, A.; SOLLERMAN, J.; LEIBUNDGUT, B. & ALTAVILLA, G.: SN 1998A: explosion of a blue supergiant. *MNRAS*, volume 360; pp. 950, 2005; pp. 950. 40
- PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. & MURTEIRA, B.: *Estatística Bayesiana* . 2003. 64, 65
- PODSIADLOWSKI, P. & JOSS, P. C.: An alternative binary model for SN1987A. *Nature*, volume 338; pp. 401, 1989; pp. 401. 40
- PODSIADLOWSKI, P.; DEWI, J. D. M.; LESAFFRE, P.; MILLER, J. C.; NEWTON, W. G. & STONE, J. R.: The double pulsar J0737-3039: testing the neutron star equation of state. *MNRAS*, volume 361; pp. 1243, 2005; pp. 1243. 99
- POELAREND, A. J. T.; HERWIG, F.; LANGER, N. & HEGER, A.: The Supernova Channel of Super-AGB Stars. *ApJ*, volume 675; pp. 614, 2008; pp. 614. 99
- RAFFELT, G. G.: *Book Review: Stars as laboratories for fundamental physics / U Chicago Press, 1996*, volume 116. 1996. 15, 19, 43
- RAMSEY, F. P.: *The Truth and Probability, Reproduzido em Studies in Subjetctive Probability* , . 1980. 63
- RAWLS, M. L.; OROSZ, J. A.; MCCLINTOCK, J. E.; TORRES, M. A. P.; BAILYN, C. D. & BUXTON, M. M.: Refined Neutron Star Mass Determinations for Six Eclipsing X-Ray Pulsar Binaries. *ApJ*, volume 730; pp. 25, 2011; pp. 25. 104
- REINES, F. & COWAN, C. L.: A Proposed Experiment to Detect the Free Neutrino. *Physical Review*, 1953. 42
- SAIO, H.; NOMOTO, K. & KATO, M.: Why did the progenitor of SN 1987A undergo the blue-red-blue evolution? *ApJ*, volume 331; pp. 388, 1988; pp. 388. 40
- SATO, K. & SUZUKI, H.: Analysis of the neutrino burst from supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud. *Physical Review Letters*, volume 58; pp. 2722, 1987; pp. 2722. 110
- SCHWAB, J.; PODSIADLOWSKI, P. & RAPPAPORT, S.: Further Evidence for the Bimodal Distribution of Neutron-star Masses. *ApJ*, volume 719; pp. 722, 2010; pp. 722. 9, 99, 102, 103, 104, 113
- SISS, L.: Evolution of massive AGB stars. II. model properties at non-solar metallicity and the fate of Super-AGB stars. *AAP*, volume 476; pp. 893, 2007; pp. 893. 99
- STAVELEY-SMITH, L.; BRIGGS, D. S.; ROWE, A. C. H.; MANCHESTER, R. N.; REYNOLDS, J. E.; TZIOUMIS, A. K. & KESTEVEN, M. J.: Structure of the radio remnant of supernova 1987A. *Nature*, volume 366; pp. 136, 1993; pp. 136. 41
- STEINER, A. W.; PRAKASH, M. & LATTIMER, J. M.: Diffusion of neutrinos in proto-neutron star matter with quarks. *Physics Letters B*, volume 509; pp. 10, 2001; pp. 10. 34, 35, 36
- THOMPSON, T. A.; BURROWS, A. & HORVATH, J. E.: μ and τ neutrino thermalization and production in supernovae: Processes and time scales. *Phys. Rev. C*, volume 62, no. 3; pp. 035802, 2000; pp. 035802. 19, 29, 34
- TIMMES, F. X.; WOOSLEY, S. E. & WEAVER, T. A.: The Neutron Star and Black Hole Initial Mass Function. *ApJ*, volume 457; pp. 834, 1996; pp. 834. 99, 104
- UTROBIN, V. P. & CHUGAI, N. N.: Supernova 2000cb: high-energy version of SN 1987A. *A & A*, volume 532; pp. A100+, 2011; pp. A100+. 40
- VALENTIM, R.; HORVATH, J. E. & RANGEL, E. M.: Bayesian Analysis of the Mass Distribution of Neutron Stars. *International Journal of Modern Physics E*, volume 20; pp. 203, 2011a; pp. 203. 108
- VALENTIM, R.; RANGEL, E. & HORVATH, J. E.: On the mass distribution of neutron stars. *MNRAS*, volume 414; pp. 1427, 2011b; pp. 1427. 9, 100, 102, 105, 106, 107
- VAN DEN HEUVEL, E. P. J.: X-Ray Binaries and Their Descendants: Binary Radio Pulsars; Evidence for Three Classes of Neutron Stars? In V. Schoenfelder, G. Lichti, & C. Winkler, editor, *5th INTEGRAL Workshop on the INTEGRAL Universe*, volume 552 of *ESA Special Publication*, pp. 185+-. 2004. 104
- VAN DEN HEUVEL, E. P. J.: High space velocities of single radio pulsars versus low orbital eccentricities and masses of double neutron stars: Evidence for two different neutron star formation mechanisms. *New Astronomy Reviews*, volume 54; pp. 140, 2010; pp. 140. 99
- VAN DER MEER, A.; KAPER, L.; VAN KERKWIJK, M. H.; HEEMSKERK, M. H. M. & VAN DEN HEUVEL, E. P. J.: Determination of the mass of the neutron star in <ASTROBJ>SMC X-1</ASTROBJ>, <ASTROBJ>LMC X-4</ASTROBJ>, and <ASTROBJ>Cen X-3</ASTROBJ> with VLT/UVES. *A&A*, volume 473; pp. 523, 2007; pp. 523. 104

- WEAVER, T. A. & WOOSLEY, S. E.: Evolution and explosion of massive stars. In J. Ehlers, J. J. Perry, & M. Walker, editor, *Ninth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, volume 336 of *Annals of the New York Academy of Sciences*, pp. 335–357. 1980. [12](#)
- WEISS, A.; HILLEBRANDT, W. & TRURAN, J. W.: Rotation-induced mixing and the nitrogen abundance in SN 1987A. *A & A*, volume 197; pp. L11, 1988; pp. L11. [40](#)
- WILSON, J. R.: Supernovae and Post-Collapse Behavior. In J. M. Centrella, J. M. Leblanc, & R. L. Bowers, editor, *Numerical Astrophysics*, pp. 422–+. 1985. [20](#)
- WITTEN, E.: Cosmic separation of phases. *Phys. Rev. Lett.*, volume 30; pp. 272, 1984; pp. 272. [12](#), [22](#), [79](#), [80](#)
- WOOSLEY, S. E. & HEGER, A.: Nucleosynthesis and remnants in massive stars of solar metallicity. *Physics Reports*, volume 442; pp. 269, 2007; pp. 269. [6](#), [11](#)
- WOOSLEY, S. E. & WEAVER, T. A.: The Physics of Supernovae. In D. Mihalas & K.-H. A. Winkler, editor, *IAU Colloq. 89: Radiation Hydrodynamics in Stars and Compact Objects*, volume 255 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, p. 91. 1986. [12](#)
- WOOSLEY, S. E. & WEAVER, T. A.: The Evolution and Explosion of Massive Stars. II. Explosive Hydrodynamics and Nucleosynthesis. *ApJS*, volume 101; pp. 181, 1995; pp. 181. [18](#)
- WOOSLEY, S. E.; TAAM, R. E. & WEAVER, T. A.: Models for Type I supernova. I - Detonations in white dwarfs. *ApJ*, volume 301; pp. 601, 1986; pp. 601. [12](#), [82](#)
- WOOSLEY, S. E.; PINTO, P. A. & ENSMAN, L.: Supernova 1987A - Six weeks later. *ApJ*, volume 324; pp. 466, 1988; pp. 466. [40](#)
- WOOSLEY, S. E.; HEGER, A. & WEAVER, T. A.: The evolution and explosion of massive stars. *Reviews of Modern Physics*, volume 74; pp. 1015, 2002; pp. 1015. [6](#), [10](#)
- ZATSEPIN, G. I.: Probability of Determining the Upper Limit of the Neutrino Mass from the Time of Flight. *ZhETF Pis'ma Redaktsiiu*, volume 8; pp. 333, 1968; pp. 333. [54](#)
- ZHANG, C. M.; WANG, J.; ZHAO, Y. H.; YIN, H. X.; SONG, L. M.; MENEZES, D. P.; WICKRAMASINGHE, D. T.; FERRARIO, L. & CHARDONNET, P.: Study of measured pulsar masses and their possible conclusions. *Astronomy & Astrophysics*, volume 527; pp. A83+, 2011; pp. A83+. [99](#)