UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

FORMAÇÃO DO PREÇO DE OPÇÕES:
UTILIZAÇÃO DE UM MODELO ALTERNATIVO PARA A FORMAÇÃO DO
PREÇO DE OPÇÃO SOBRE FUTURO DE DÓLAR E COMPARAÇÃO COM O
MODELO DE BLACK

Alexandre Andrade de Mello

Orientador: Professor Doutor José Roberto Securato

SÃO PAULO

2005

Professor Doutor Adolpho Jose Melfi
Reitor da Universidade de São Paulo

Professora Doutora Maria Tereza Leme Fleury
Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Professor Doutor Eduardo Pinheiro Gondin de Vasconcellos
Chefe do Departamento de Administração

Professor Doutor Isak Kruglianskas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

ALEXANDRE ANDRADE DE MELLO

**FORMAÇÃO DO PREÇO DE OPÇÕES:
UTILIZAÇÃO DE UM MODELO ALTERNATIVO PARA A FORMAÇÃO DO
PREÇO DE OPÇÃO SOBRE FUTURO DE DÓLAR E COMPARAÇÃO COM O
MODELO DE BLACK**

Dissertação apresentada ao Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Administração.

Orientador: Professor Doutor José Roberto Securato

SÃO PAULO

2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Mello, Alexandre Andrade de

Formação do preço de opções : utilização de um modelo alternativo para a formação do preço de opção sobre futuro de dólar e comparação com o modelo de Black / Alexandre Andrade de Mello. -- São Paulo, 2005.

224 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2005.
Bibliografia.

1. Opções financeiras 2. Distribuição lognormal 3. Modelos para processos estocásticos 4. Análise do valor I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. II. Título.

CDD – 332.645

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor José Roberto Securato, por todo o apoio, orientação, incentivo, compreensão, amizade, exemplo de liderança nos mais vários campos, didática exemplar e todo o conhecimento transmitido que tanto me auxiliou na realização desta dissertação.

À Professora Doutora Celma de Oliveira Ribeiro e ao Professor Doutor Edson Ferreira de Oliveira, membros da banca, pelas valiosas críticas e sugestões quanto à apresentação do trabalho, aos assuntos que deveria abordar melhor e aos que deveria descartar.

Ao Professor Doutor Rubens Famá, pelo rigor acadêmico e pela indicação de preciosas referências bibliográficas; ao Professor Doutor Keyler Carvalho Rocha, pelo exemplo, grande sabedoria, companheirismo, conselhos e conhecimentos transmitidos; e ao Professor Doutor Abraham Sin Oih Yu, pelo exemplo de vida e pelo aprendizado proporcionado.

Aos professores do Departamento de Administração da FEA-USP, pelo aprendizado.

Aos colegas Alexandre Di Miceli da Silveira, André Oda, Júnio Juentes e Lucas Ayres Barros pelo exemplo de dedicação ao curso e determinação na constante busca por novos conhecimentos.

A todos os que compartilharam comigo idéias e pontos de vista durante as aulas, notadamente Cláudia Yoshinaga, Raquel Oliveira e, principalmente, Ana Paula Lanzana, pela ajuda.

Ao Ibmecc Business School, especialmente ao Professor e amigo Walter Emir Alba, pela constante ajuda, pelo exemplo de vida e pela experiência transmitida.

Ao Professor José Euclides de Melo Ferraz, pela genialidade, amizade e apoio; ao Professor Marcelo Guterman, pela forte amizade, conselhos e auxílio constantes; ao

Professor Paulo Fraletti e ao colega Fábio da Paz Ferreira, pela amizade e troca de conhecimento.

Ao amigo Alexandre Bona pela forte amizade, pelo apoio e pelas inúmeras discussões acerca de instrumentos derivativos.

Ao Banco Banif e à Treina Treinamentos, pela oportunidade de aplicar a teoria na prática.

Aos meus alunos, que com suas indagações me fazem crescer.

À Francisca e ao Franklin Evrard, pelo excelente trabalho de revisão bibliográfica e gramatical.

Aos meus avós e familiares pelo carinho, principalmente a meu avô Alberto de Mello, matemático e físico, pela sua eterna disposição.

Aos meus irmãos, Alfredo e Alberto, pela torcida sincera, pelo companheirismo fraternal e pela constante troca de experiências que tanto me engrandecem.

Aos meus pais, Alex e Regina, por estarem sempre presentes, pelo apoio incondicional, por terem me transmitido os valores mais importantes da vida, e por serem, acima de tudo, meus amigos.

À Carol, pelo amor, apoio, incentivo, compreensão e carinho, sempre!

A Deus.

“The mathematics of finance contains some of the most beautiful applications of probability and optimization theory. [...] But, of course, all that is beautiful in science need not also be practical. And surely, not all that is practical in science is beautiful. Here we have both.”

(MERTON, 1995, p. 7)

RESUMO

A utilização do modelo de Black-Scholes e suas extensões na precificação de opções é bastante difundida tanto na academia quanto no mercado financeiro. O objetivo deste trabalho foi avaliar o desempenho de um modelo alternativo de precificação de opções em relação ao do modelo de Black na precificação de opções sobre futuro de dólar. Mais especificamente, a partir de hipóteses sobre o comportamento agregado da economia, da trajetória de preços de ativos e das preferências a risco dos agentes econômicos, é possível reconciliar uma condição de equilíbrio parcial, necessária para a precificação de opções, com uma condição de equilíbrio geral da economia. Essa reconciliação é obtida a partir da escolha cuidadosa de pares de preferências a risco e distribuições e possibilita a obtenção do preço de equilíbrio livre de preferências de um derivativo lançado sobre um dado ativo-objeto. O presente estudo utiliza os resultados de uma generalização recente feita por Câmara (2003), que demonstrou como distribuições e preferências podem ser combinadas de forma que se obtenham fórmulas fechadas para precificação de opções. Particularmente, assume-se que os preços do contrato futuro de dólar possuem distribuição lognormal com assimetria negativa, hipótese que resulta em uma fórmula alternativa de precificação de opções lançadas sobre esse contrato. O modelo obtido foi matematicamente contrastado com o modelo de Black, o que possibilitou que as implicações nos preços das opções, resultantes da premissa de assimetria negativa, fossem evidenciadas. Os desempenhos dos modelos foram comparados com base nos preços de mercado das opções. Os resultados alcançados sugerem que, em geral, o modelo de Black apresenta desempenho melhor que o modelo alternativo na precificação de opções sobre futuro de dólar.

Palavras-chave: Opções, Precificação, Black-Scholes, Dólar, Assimetria Negativa.

ABSTRACT

The utilization of the Black-Scholes option pricing model is widespread, in both the academe and the market. Additionally, the literature related to its generalizations and adaptations is vast. Of particular importance are works concerning new sufficient conditions for existing risk-neutral option pricing equations. Under a new set of propositions on distributions and preferences, Câmara (2003) derived new analytical solutions for the price of European-style contingent claims. The objective of the present study was to adapt and test an option pricing model that was derived by Câmara (2003). Particularly, the tested model assumes that the underlying asset, in this case the US dollar futures contract traded on the Brazilian Mercantile & Futures Exchange, follows a negatively skew lognormal distribution. The performance of the alternative model was compared to that of the Black model, the standard model used in the market to price such options. More specifically, the performances of both models were measured against the market prices of US dollar futures options. Also, considerations about the validity of the negative skew lognormal hypothesis were made and a mathematical analysis of the differences in the prices generated by the two models was carried out. In the end, although the alternative model produces, in some cases, prices that are closer to the market's, the evidences suggest that, in general, the Black model performs better than the alternative one.

Keywords: Options, Pricing, Black-Scholes, US Dollar, Negative Skewness.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Teoria de Finanças: principais fases e características	20
Tabela 2 – Assimetria do preço e do retorno do dólar em 2004	113
Tabela 3 – Resumo dos resultados da regressão linear: dólar x tempo	114
Tabela 4 – Variação do dólar frente a outras moedas no ano de 2004	115
Tabela 5 – Opções sobre futuro de dólar negociadas na BM&F	117
Tabela 6 – Opções sobre futuro de dólar negociadas na BM&F: variação anual	118
Tabela 7 – Comparação de preços : opções dentro, fora e no dinheiro	126
Tabela 8 – Dados utilizados na construção dos gráficos de comparação dos modelos	127
Tabela 9 – Dados utilizados nos gráficos de variação de volatilidade implícita	130
Tabela 10 – Exemplo de dados coletados para análise	138
Tabela 11 – Classificação das opções quanto a <i>moneyness</i>	138
Tabela 12 – Número de opções por grupo	139
Tabela 13 – Síntese das volatilidades estimadas pelos três métodos	142
Tabela 14 – Síntese dos testes de normalidade	147
Tabela 15 – Precificação baseada na volatilidade implícita nos preços das opções	152
Tabela 16 – Precificação baseada na volatilidade histórica dos retornos contínuos	153
Tabela 17 – Precificação baseada na volatilidade histórica dos logaritmos dos preços	154

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A evolução da Teoria de Finanças	19
Figura 2 – Exemplos de assimetria	101
Figura 3 – Exemplo de distribuição leptocúrtica	102
Figura 4 – Densidades lognormais de assimetria positiva e negativa	104
Figura 5 – Cotação diária de fechamento do dólar e regressão linear	114
Figura 6 – Valores esperados idênticos e assimetrias opostas	122
Figura 7 – Sensibilidade das densidades: aumento de prazo e volatilidade	123
Figura 8 – Comparação genérica dos preços fornecidos pelos modelos	127
Figura 9 – Comparação dos modelos: volatilidade baixa e prazo curto	128
Figura 10 – Comparação dos modelos: volatilidade alta e prazo curto	128
Figura 11 – Comparação dos modelos: volatilidade baixa e prazo longo	129
Figura 12 – Comparação dos modelos: volatilidade alta e prazo longo	129
Figura 13 – Volatilidade implícita e prazo curto	131
Figura 14 – Volatilidade implícita e prazo longo	131

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A PESQUISA	1
1.1	Introdução	1
1.2	Escolha do tema	3
1.3	Situação-problema e objetivo	4
1.4	Pergunta e hipóteses	7
1.5	Originalidade e contribuições	7
1.6	Justificativa	9
1.7	Metodologia	13
1.8	Delimitação	14
1.9	Descrição dos capítulos	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	Evolução da Teoria de Finanças: necessidade de melhor precificação	17
2.2	Modernas Finanças: foco na precificação	21
2.3	Precificação de ativos: conceitos e definições	26
2.3.1	O papel da teoria da utilidade na precificação de ativos	28
2.3.2	O papel da arbitragem na precificação de derivativos	32
2.4	Opções: introdução ao instrumento-foco do estudo	36
2.4.1	Opções sobre futuros	38
3	ABORDAGEM DE PRECIFICAÇÃO DE ANTÔNIO CÂMARA	41
3.1	Considerações iniciais	41
3.2	Essência do modelo	42
3.3	Generalização de Antônio Câmara	48
3.3.1	Equações-padrão de precificação de ativos	50

3.3.2	Processos que regem os preços dos estados da natureza	56
3.3.3	Obtenção da relação de avaliação risco-neutra	71
3.4	Considerações sobre a generalização de Antônio Câmara	73
4	MODELOS DE BLACK-SCHOLES E CÂMARA	75
4.1	Modelo de Black-Scholes	75
4.1.1	Derivação do modelo de Black-Scholes	77
4.1.2	Derivação do modelo de Black	84
4.2	Testes empíricos e vieses conhecidos do modelo de Black-Scholes	89
4.3	Modelo de Câmara	100
4.3.1	A distribuição lognormal com assimetria negativa	101
4.3.2	O modelo de Câmara	104
5	METODOLOGIA DA PESQUISA	109
5.1	Métodos utilizados	109
5.1.1	Recursos computacionais utilizados	110
5.2	A escolha das opções sobre futuro de dólar	111
5.3	Determinação do parâmetro alfa do modelo de Câmara	118
5.4	Comparação matemática dos preços dos modelos	125
5.5	Testes empíricos realizados	133
5.5.1	Testes de normalidade	133
5.5.2	Comparação dos desempenhos dos modelos	135
5.6	Limitação do modelo	144
6	ANÁLISE DOS RESULTADOS	147
6.1	Testes de normalidade	147
6.2	Comparação dos desempenhos dos modelos	148

7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	155
7.1	Sobre os resultados alcançados	155
7.2	Outros estudos	156
7.3	Sobre o atendimento do objetivo proposto	156
	REFERÊNCIAS	159
	APÊNDICES	169
	ANEXOS	201

1 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A PESQUISA

“[...] option pricing theory is relevant to almost every area of finance. For example, virtually all corporate securities can be interpreted as portfolios of puts and calls on the assets of the firm.”

(COX et al., 1979, p. 230)

1.1 Introdução

Opções, em sua concepção mais simples, são instrumentos derivativos que garantem o direito, mas não a obrigação, de comprar ou de vender um ativo em (ou até) uma data futura por um preço previamente estipulado. Um instrumento derivativo é aquele cujo preço depende do preço de um outro ativo, denominado ativo subjacente ou ativo-objeto.

Conceitualmente, as opções existem desde a Antigüidade. Aristóteles as caracterizou como um serviço financeiro que abarca um princípio de aplicação universal (BERNSTEIN, 1996, p. 307). Em uma passagem, relatou que Tales de Mileto, filósofo, cientista e matemático grego que viveu no século VI antes de Cristo, depois de prever que haveria uma grande safra de azeitonas no ano seguinte, utilizou opções para garantir o monopólio das prensas com as quais se fazia óleo de oliva. Na verdade, Tales pagou um prêmio (uma pequena quantia) a todos os donos de prensas da região pela preferência no arrendamento das mesmas, por um preço previamente estipulado, na época da colheita das azeitonas. Como a previsão de grande safra de Tales se concretizou, ele exerceu sua opção, ou seja, arrendou todas as prensas, criando uma situação que obrigou os produtores de azeitonas a procurá-lo; então, o sábio filósofo alugou as prensas aos produtores, mas por um preço bem mais alto que o pago aos seus donos originais, e enriqueceu na ocasião (DIMSON; MUSSAVIAN, 1999, p. 1.745).

Apesar da longa existência das opções, somente em 1973 é que os pesquisadores Ficher Black e Myron S. Scholes desenvolveram um método consistente, conhecido como

modelo de Black-Scholes, para sua precificação¹, ou seja, para a formação do seu valor justo. No mesmo ano, Robert C. Merton generalizou esse método em importantes direções. Por último, foi também em 1973 que as opções passaram a ser negociadas em bolsa de valores, mais especificamente na Chicago Board Options Exchange (WILMOTT, 1998, p. 21). O desenvolvimento de um modelo de precificação e o início da negociação bursátil impulsionaram o mercado de opções.

Numa escala mais ampla, a globalização e o avanço tecnológico das últimas três décadas, a crescente desregulamentação dos anos setenta e oitenta no mercado norte-americano e o colapso do acordo de Bretton Woods (fim do padrão ouro) no início da década de setenta contribuíram para a explosão do mercado de derivativos. Vale lembrar que a desregulamentação dos anos setenta e oitenta ocorria à medida que o liberalismo econômico suplantava a ortodoxia keynesiana das décadas anteriores, mudança ideológica essa protagonizada por Milton Friedman da Universidade de Chicago (CHANCELLOR, 2000, p. 236-249).

Em suma, a partir dos anos setenta o mercado de opções vem apresentando crescimento significativo e, com isso, tem se consolidado como uma alternativa de investimento importante tanto aos *hedgers*, agentes financeiros que buscam proteção contra oscilações futuras de preços, como aos especuladores, aqueles que buscam aferir lucros com as oscilações de mercado.

Lançaram-se opções sobre os mais variados tipos de ativos, tais como ações, moedas, índices, *commodities* e futuros. Paralelamente, a negociação de opções rapidamente

¹ A palavra precificação não existe no vocabulário da língua portuguesa. No entanto, na literatura de finanças, esse neologismo é amplamente utilizado com o sentido de formação de preços de ativos financeiros, sentido que é empregado neste trabalho e que distingue precificação de apreçamento, que é o ato ou efeito de atribuir preço a algo.

transcendeu fronteiras e se espalhou pelo globo. No Brasil, a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) e a Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) oferecem uma ampla gama de contratos padronizados de opção. Ademais, o mercado de balcão, não padronizado, também oferece aos agentes financeiros a possibilidade de negociar opções moldadas às suas necessidades específicas.

Atualmente, o modelo de Black-Scholes e suas generalizações são utilizados em escala mundial para a determinação do preço justo de opções. Todavia, se por um lado esses modelos são utilizados pela grande maioria do mercado para a precificação dos diversos tipos de opção, por outro lado é importante que haja um questionamento constante sobre o atendimento às premissas inerentes a tais modelos e se outros modelos de precificação podem trazer melhores resultados em casos específicos e a um custo viável.

1.2 Escolha do tema

Conforme Galhardo e Guimarães (2000), a escolha do tema é influenciada por fatores tanto internos como externos. Dentre os fatores internos, os autores citam afetividade (grau de interesse pessoal) em relação ao tema, tempo disponível para a realização do trabalho e o limite das capacidades do pesquisador em relação ao assunto pretendido. Os fatores externos incluem a significação do tema escolhido, o limite de tempo disponível para a conclusão do trabalho e as disponibilidades de material de consulta e de dados.

O tema do presente estudo é precificação de opções, que atende aos fatores listados acima, com destaque para: (a) sua significação, que é cada vez maior, tendo em vista a crescente importância dos instrumentos derivativos no Brasil e no mundo; (b) há ampla disponibilidade de material de consulta, principalmente na literatura norte-americana, e a

obtenção de dados históricos para análise é possível, através tanto da BM&F como de corretoras de valores; (c) o autor tem especial interesse por ele. Em termos de significância e disponibilidade de literatura sobre o tema, ressalta-se que o artigo seminal de Black e Scholes (*The pricing of options and corporate liabilities*), publicado em 1973 e que traz o afamado modelo de Black-Scholes, está entre os estudos mais referenciados de todos os tempos (ARNOLD et al., 2001, p. 19).

1.3 Situação-problema e objetivo

O modelo de Black-Scholes de precificação de opções é utilizado quase que indiscriminadamente no mercado financeiro. As premissas utilizadas por Black e Scholes (1973), algumas das quais depois foram relaxadas por Brennan (1979), Merton (1973b) e Rubinstein (1976), na maioria das vezes são negligenciadas mesmo pelos mais assíduos usuários do modelo. Uma hipótese que não pode ser esquecida, pois é inerente ao modelo, relaciona-se à distribuição de probabilidade dos preços do ativo-objeto.

Black e Scholes (1973, p. 640), ao derivarem seu modelo original de precificação de opções sobre ações que não pagam dividendos, assumiram explicitamente que “[...] a distribuição dos possíveis preços da ação ao final de qualquer intervalo finito é lognormal.” Esclarece-se que assumir que a distribuição dos preços de um ativo financeiro possui distribuição lognormal ao final de qualquer intervalo finito de tempo é o mesmo que assumir que o logaritmo dos preços desse ativo possui distribuição normal ao final de qualquer intervalo finito de tempo (LUENBERGER, 1998, p. 301).

Igualmente, as extensões do modelo de Black-Scholes comumente utilizadas pelo mercado, como o modelo de Black para a precificação de opções sobre futuros, ou a adaptação de Merton ao caso de opções sobre ações que pagam dividendos constantes, ou

ainda o modelo de Garman-Kohlhagen para opções sobre moedas, mantêm a hipótese de lognormalidade da distribuição de preços do ativo-objeto (HULL, 1997, p. 263, 270 e 277).

Em resumo, sempre que se utiliza o modelo de Black-Scholes ou alguma das extensões mencionadas acima (doravante referidos como modelos padrão), automaticamente se assume que o preço do ativo-objeto segue uma distribuição lognormal. É claro que, no mundo real, os preços dos ativos não seguem perfeitamente uma distribuição lognormal. Entretanto, quanto mais próxima da distribuição lognormal for a distribuição real dos preços de um dado ativo, melhores serão os resultados alcançados pela utilização do modelo padrão apropriado (Black-Scholes original para precificação de opções sobre ações que não pagam dividendos, modelo de Black para precificação de opções sobre futuros etc.) na precificação de opções lançadas sobre esse ativo.

Imbuídos desse conhecimento, muitos pesquisadores testaram os modelos padrão, notadamente o de Black-Scholes, comparando os preços calculados segundo esses modelos com os preços de mercado. Em linhas gerais, os resultados sugerem que os modelos padrão apresentam vieses sistemáticos. Com o intuito de minimizá-los, estudiosos conceberam e/ou testaram modelos com hipóteses alternativas sobre a distribuição de preços do ativo-objeto. Nesses estudos, em geral, as evidências encontradas indicam que os vieses podem ser reduzidos ao custo de aumento da complexidade de estimação de parâmetros e do tempo computacional. Contudo, muitos resultados não apresentaram robustez num cenário mais realista, como quando são considerados na análise os custos transacionais e as diferenças entre os preços de compra e venda de mercado. Os resultados acima mencionados são descritos no item 4.2. Dessa forma, por não haver dados conclusivos sobre o tema, o exame caso a caso se faz necessário, principalmente quando um modelo alternativo captura alguma nova informação sobre a distribuição de preços do ativo-objeto que o modelo padrão ignora.

Recentemente, Câmara (2003), sob um conjunto de hipóteses sobre preferências de agentes econômicos e distribuições de probabilidade de preços, demonstra como é possível obter novas fórmulas para precificação de opções assumindo distribuições de probabilidade alternativas para os preços do ativo-objeto, conforme descrito no item 3.3. Para exemplificar os resultados que podem advir de sua formulação, o autor deriva duas novas fórmulas de precificação de opções, uma das quais pareceu ser aplicável na precificação de opções sobre futuro de dólar num cenário como o observado especialmente no fim de 2004, intuição cujo raciocínio detalhado se encontra no item 5.2. Sendo assim, a pergunta que se quer responder é: neste cenário específico, qual é o desempenho desse modelo alternativo (doravante referido como modelo de Câmara) em relação ao modelo de Black (utilizado pelo mercado) na precificação de opções lançadas sobre futuro de dólar? A situação-problema é implementar e testar, no mercado brasileiro, o modelo de Câmara, comparando seu desempenho com o do modelo de Black.

Portanto, o objetivo principal do presente estudo é o de averiguar se um modelo alternativo e relativamente novo de precificação de opções traz ganhos significativos em relação ao modelo de precificação comumente utilizado. A premissa central utilizada na formulação do modelo alternativo é que os preços do ativo-objeto, em qualquer intervalo finito, possuem distribuição de probabilidade distinta daquela utilizada na formulação dos modelos padrão.

1.4 Pergunta e hipóteses

Consoante Lakatos e Marconi (2004, p. 78, 132, 146 e 162-166), o conhecimento científico deve estar fundamentado em hipóteses verificáveis, que servem de guia à investigação. Caso contrário, não se faz ciência, pois ciência é essencialmente corrigível. Ademais, a hipótese científica deve abranger conceitos comunicáveis, expressar fatos reais, ser logicamente consistente e específica, apresentar poder preditivo e/ou explicativo e estar em conformidade com o conteúdo atual da ciência. Com base nesse raciocínio, elaboraram-se a pergunta e as hipóteses da pesquisa, listadas abaixo:

Pergunta: no período analisado, o modelo alternativo de precificação produz resultados melhores que o modelo de Black (modelo padrão) na precificação de opções sobre futuro de dólar?

$\left\{ \begin{array}{l} H_0 \text{ (hipótese nula): no período analisado, o modelo alternativo não produz resultados} \\ \text{melhores que o modelo padrão na precificação de opções sobre futuro de dólar;} \\ H_1 \text{ (hipótese alternativa): no período analisado, o modelo alternativo produz} \\ \text{resultados melhores que o modelo padrão na precificação de opções sobre futuro de} \\ \text{dólar.} \end{array} \right.$

1.5 Originalidade e contribuições

Severino (2002, p. 151-152 e 191) aclara que apesar de não se esperar de uma dissertação de mestrado o mesmo nível de originalidade que o de uma tese de doutorado, a primeira deve ter uma proposição clara e um tema único e delimitado, além de servir-se de um raciocínio rigoroso. O autor afirma que “O raciocínio consiste em obter um novo conhecimento a partir de um antigo.”

Severino (2002, p. 148) ainda ressalta que “[...] originalidade não quer dizer novidade. A originalidade diz respeito à volta às origens, explicitando assim um esclarecimento original ao assunto [...]”. A presente pesquisa busca apresentar o assunto em sua essência, resgatando suas origens e analisando sua evolução.

Lakatos e Marconi (2004, p. 132 e 172) expõem que um trabalho é original quando se apresenta provocante ao pensamento. Nesse sentido, a pesquisa é original porque os resultados dos testes de um novo modelo de precificação podem surpreender e, assim, têm o potencial de provocar novas indagações quanto à utilização dos modelos de precificação existentes versus a utilização de modelos de precificação alternativos. Além disto, os autores explicam que a característica de originalidade está relacionada ao fato de a hipótese de pesquisa não ser muito semelhante às já existentes, pois isso pode tornar a pesquisa inútil. Sob esse aspecto, a pesquisa é original porque testa um modelo de precificação de opções formulado a partir de uma hipótese alternativa sobre a distribuição dos preços do ativo-objeto, hipótese essa que não é semelhante à utilizada nos modelos padrão, como descrito no capítulo 4.

Com base no exposto, as principais contribuições deste estudo são:

- a) melhorar o entendimento sobre o desempenho de um modelo alternativo de precificação de opções aplicado a um caso particular no mercado brasileiro. Este estudo poderá ser utilizado como referência a testes futuros de modelos alternativos de precificação;
- b) facilitar o entendimento da metodologia de precificação de opções, resgatando o estado da arte da precificação de um instrumento derivativo e as hipóteses implícitas e necessárias presentes nos modelos de precificação;
- c) por último, aclarar como pode ser efetuada a reconciliação de um modelo de equilíbrio geral (equilíbrio de todos os preços), utilizado por Câmara (2003), com um

modelo de equilíbrio parcial (equilíbrio de alguns preços), utilizado por Black e Scholes (1973). No Brasil, não foi encontrada nenhuma pesquisa que ilustra essa reconciliação.

1.6 Justificativa

O tema precificação de opções é importante pelo destaque que as opções vêm ganhando nas últimas décadas. Para que sua utilização no mercado financeiro seja ampla, a existência de um modelo de precificação de opções consistente é imprescindível; caso contrário, não se estabelece a confiança necessária para que os agentes financeiros participem de sua negociação. Num sentido mais abrangente, por um lado, as opções contribuem para o aumento da eficiência do mercado de capitais, pois expandem o leque de alternativas disponíveis de investimento e de captação de recursos. Num mercado de capitais eficiente, o processo de intermediação de recursos entre tomadores e doadores é mais transparente e, em última instância, menos custoso. Por outro lado, as opções podem ser utilizadas como mecanismo de redução e diversificação de riscos, que são inerentes às operações financeiras. Segundo Dimson e Mussavian (1999, p. 1.748), numa economia em que os indivíduos podem se assegurar contra perdas, há maior probabilidade dos mesmos estarem dispostos a correr riscos.

Segundo Scholes (1997, p. 127 e 129), a metodologia de precificação de opções iniciada por Black e Scholes (1973) e Merton (1973b) impulsionou o desenvolvimento de três indústrias ao redor do mundo: a indústria bursátil de derivativos, a indústria de balcão de produtos sintéticos (ativos que são artificialmente criados pela combinação de outros ativos) e a indústria acadêmica de pesquisa em derivativos. Essas três indústrias

apresentaram crescimento explosivo nos anos que seguiram à publicação do modelo de Black-Scholes, crescimento que não foi previsto nem mesmo por Scholes em 1973.

Além disso, segundo o autor, a metodologia de precificação de opções é utilizada para produzir novos ativos que embutem opções a um custo menor do que aquele que seria possível se não houvesse a metodologia. Cumpre salientar que a introdução desses novos ativos no mercado cria novos padrões de retornos, efeito que expande a fronteira do conjunto disponível de investimentos.

Complementando Scholes (1997), Jarrow (1999, p. 229 e 240-242) acrescenta que a metodologia empregada no modelo de Black-Scholes proveu a base para avaliações econômicas em muitas áreas em finanças e em economia. Cita, por exemplo, que a metodologia pode ser empregada na avaliação da dívida de uma firma. Particularmente, Black e Scholes (1973) perceberam que o valor das ações, empréstimos e outros instrumentos de dívida de uma firma dependem do valor total da firma, de forma semelhante à que uma opção de compra depende do valor do ativo-objeto sobre o qual foi lançada. Uma opção de compra dá ao seu detentor o direito de comprar o ativo-objeto por um preço específico na (ou até a) data de vencimento. Os anos mostraram que o modelo de Black-Scholes forneceu a base de uma teoria unificada de avaliação das obrigações de uma firma.

Há também inúmeros exemplos de aplicação da metodologia de precificação de opções de venda na economia. Uma opção de venda dá ao seu detentor o direito de vender o ativo-objeto por um preço específico na (ou até a) data de vencimento. Merton (1998, p. 336-340) cita, por exemplo, que quando uma opção de venda é comprada juntamente com o ativo-objeto, seu detentor se assegura contra perdas econômicas advindas de declínio do preço do ativo-objeto abaixo de certo valor. O prazo desse seguro equivale ao prazo da

opção. Dessa forma, a metodologia de precificação de opções pode ser utilizada na precificação de contratos de seguro.

O autor também cita que o Federal Reserve, o banco central estadunidense, utiliza a volatilidade implícita em opções lançadas sobre títulos de seu governo, obtida a partir do modelo de Black-Scholes, como um dos indicadores da incerteza dos investidores sobre o rumo futuro das taxas de juros. Wilmott (1998, p. 31) explica que a volatilidade mede a incerteza ou a aleatoriedade contida no preço de um ativo. Conforme será explicitado nas equações dos capítulos 3 e 4, o valor da opção depende da volatilidade do ativo-objeto. A volatilidade implícita é a volatilidade do ativo-objeto que deve ser utilizada no modelo de Black-Scholes para que o preço fornecido pelo modelo iguale o preço de mercado da opção.

Além disso, o modelo de Black-Scholes estimulou o desenvolvimento do arcabouço matemático necessário à precificação de instrumentos derivativos em geral. Conforme Jarrow (1999, p. 237), o raciocínio utilizado por Black e Scholes (1973) na derivação de seu modelo é correto, mas os detalhes matemáticos desse raciocínio, como a formalização dos conceitos de não-arbitragem e de mercado completo, comentados no item 2.3, foram demonstrados por Harrison e Kreps (1979), ou seja, seis anos após a publicação do modelo de Black-Scholes.

Finalmente, muitas aplicações da metodologia de precificação de opções não envolvem instrumentos financeiros; são as chamadas opções reais, utilizadas principalmente pelas áreas de investimentos e de avaliação de projetos de empresas. O fator comum para o uso da metodologia de precificação de opções nesses casos é que o futuro é incerto e, num ambiente incerto, a possibilidade de decidir só depois que parte da incerteza é resolvida tem um valor. Aplicações comuns da metodologia de opções na

avaliação de projetos são: opção de iniciar ou expandir, opção de abandonar ou contrair, opção de parar, reduzir ou acelerar o ritmo de desenvolvimento.

Dessa forma, por um lado, o estudo de opções impulsionou o surgimento de teorias mais gerais de precificação de ativos e contribuiu bastante para o estado da arte atual desse campo de conhecimento. Por outro lado, a utilização de opções tem colaborado para o desenvolvimento do mercado financeiro pois, além de prestarem à proteção e à especulação, também possibilitam a obtenção de novos padrões de retorno e a disseminação de informações úteis, como a volatilidade implícita de ativos (SIQUEIRA, 1999, p. 9).

Em síntese, o tema precificação de opções é importante porque provê metodologia consistente para a formação do preço justo de opções. Como diversos ativos, negócios e até decisões podem ser vistos como opções, ou até mesmo ter opções embutidas, modelos de precificação de opções que produzam bons resultados têm o potencial de impactar benéficamente uma economia de diversas maneiras. Portanto, dada a vasta aplicabilidade das opções no mundo atual, modelos alternativos de precificação de opções devem ser constantemente formulados, analisados e testados, raciocínio esse que justifica a presente pesquisa.

Igualmente, pode-se justificar o presente estudo por não se conhecerem no Brasil pesquisas empíricas sobre o modelo de precificação analisado e testado nesta dissertação. Ademais, não se tem notícia de nenhuma pesquisa, no Brasil ou fora, que tenha adaptado e testado o modelo-foco deste trabalho em opções sobre futuro de dólar. Sobretudo, se há disponível alguma informação sobre as características da distribuição do ativo-objeto que pode ser incorporada na precificação (assimetria ou curtose da distribuição, por exemplo), é importante que essa informação seja considerada e o modelo daí resultante testado.

Por fim, o modelo de precificação testado neste trabalho é formulado a partir de hipóteses sobre as preferências a risco dos investidores, como ilustrado nos itens 4.1 e 4.2. É importante ressaltar que é crescente na literatura o interesse na relação existente entre preços de mercado de opções e preferências a risco (grau de aversão a risco). Recentemente, Aït-Sahalia e Lo (2000), Chabi-Yo et al. (2005) e Giamouridis (2005) utilizaram preços de mercado de opções para estimar a aversão a risco implícita dos investidores. Por um lado, esse tipo de procedimento é bastante útil na verificação de se a aversão a risco derivada de preços reais é consistente com a prescrita pela teoria econômica. Por outro lado, a aversão a risco implícita pode ser utilizada para precificar ativos ilíquidos, cujos preços não são facilmente observados no mercado, artifício que garante consistência, nesse quesito, dos preços assim determinados com os preços dos ativos líquidos.

1.7 Metodologia

A presente dissertação é primordialmente um estudo de caso. Silva e Menezes (2001, p. 22) aclaram que essa metodologia caracteriza-se pelo estudo profundo de um ou poucos objetos, permitindo seu amplo e detalhado conhecimento.

Especificamente, descreve-se e testa-se um modelo alternativo de precificação de opções. Os testes são feitos em opções sobre futuro de dólar, comparando-se o desempenho do modelo alternativo com o do modelo padrão.

A metodologia utilizada nesta pesquisa é pormenorizada no capítulo 5.

1.8 Delimitação

Citam-se duas principais delimitações desta pesquisa. A primeira refere-se ao fato de que não se examina a plausibilidade das hipóteses econômicas inerentes ao modelo de precificação testado. Por exemplo, não se fazem testes de equilíbrio de preços, eficiência de mercado ou ausência de arbitragem. Ademais, não se investigam nem se estimam as preferências a risco dos investidores; tampouco se verifica a existência de um agente econômico representativo. Por último, não se estima a distribuição (de probabilidade) da riqueza agregada da economia nem sua correlação com distribuições de ativos existentes. Cada uma dessas considerações poderia resultar, por si só, numa dissertação inteira. Dentro desse escopo delimitado, portanto, o modelo alternativo de precificação é apresentado em detalhe. Especificamente, o estudo concentra-se: (i) na análise da hipótese que é feita sobre a distribuição de preços do ativo-objeto; (ii) no desempenho do modelo alternativo de precificação de opções, analisado comparativamente ao do modelo padrão.

Como segunda delimitação, nota-se que o modelo alternativo é testado somente em opções sobre futuro de dólar. Ele não é avaliado em opções lançadas sobre outros ativos porque, para cada classe de ativo-objeto (ações, futuros etc.), uma nova adaptação se faz necessária, o que aumentaria muito o escopo do presente trabalho.

1.9 Descrição dos capítulos

No capítulo 2, é apresentada a fundamentação teórica da teoria de precificação de ativos. São discutidos os papéis da teoria de utilidade e da ausência de arbitragem na precificação de ativos. Por fim, são introduzidos os conceitos de opções e opções sobre futuros. No capítulo 3, detalha-se a abordagem de precificação de derivativos desenvolvida

por Câmara (2003). No capítulo 4, deduzem-se os modelos de precificação de Black e de Câmara. Estudos empíricos do modelo de Black-Scholes são sintetizados e os vieses conhecidos do modelo de Black-Scholes são discutidos. No capítulo 5, descrevem-se a metodologia da pesquisa, o raciocínio utilizado para a escolha das opções sobre futuro de dólar e os testes realizados. No capítulo 6, sintetizam-se os resultados encontrados e, no capítulo 7, tecem-se as considerações finais.

Os apêndices no final da obra são elementos de apoio importantes à pesquisa realizada, e constituem fonte de referência imediata sobre os assuntos tratados. No apêndice A, examina-se a distribuição lognormal. No apêndice B, são apresentadas algumas conseqüências das demonstrações feitas no apêndice A para as relações de conversão entre taxas de juros contínuas e discretas. No apêndice C, é feita a conexão entre os resultados apresentados nos dois apêndices anteriores e a premissa de que o preço de um ativo segue um movimento browniano geométrico. No apêndice D, resumem-se os principais conceitos de uma distribuição normal conjunta, necessários ao entendimento da metodologia de precificação estudada. No apêndice E, é fornecido o código do programa (escrito em Visual Basic) implementado para os cálculos dos preços, segundo o modelo de Câmara.

Por fim, o anexo A traz o contrato padrão de futuro de dólar da BM&F e o anexo B, o contrato de opção sobre futuro de dólar da BM&F.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

“We wish to find the mathematically complete principles which define ‘rational behavior’ for the participants in a social economy, and derive from them the general characteristics of that behavior.”

(MORGENSTERN; VON NEUMANN, 1947 apud COPELAND; WESTON, 1988, p. 77)

2.1 Evolução da Teoria de Finanças: necessidade de melhor precificação

Segundo Merton (1998, p. 323), “a esfera especial que Finanças ocupa na Economia refere-se ao estudo da alocação e do desembolso de recursos econômicos, no espaço e no tempo, num ambiente de incerteza.” Conforme Dimson e Mussavian (1999, p. 1.745), “Finanças é o ramo da economia que foca nos mercados de capitais.”

Nos últimos sessenta anos, a Teoria de Finanças sofreu profunda revolução conceitual e metodológica. Os financistas testemunharam a generalização e a utilização de conceitos abstratos, como o movimento browniano geométrico, originado na Física no início do século XX, em seu dia-a-dia. Por um lado, a evolução da informática possibilitou que cálculos complexos pudessem ser realizados tanto em ambientes acadêmicos como fora deles. De fato, análises de dados históricos, modelos preditivos, agregação e desagregação multifatorial e simulações, que demandavam tempo e recursos proibitivos nos anos cinquenta, passaram a ser efetuados, muitas vezes, em segundos.

Por outro lado, a expansão das fronteiras, o maior fluxo comercial e de investimentos entre países, a consolidação da globalização e a crescente regulamentação dos mercados pelos bancos centrais de todo o mundo (Acordos da Basiléia I, em 1988 e II, em 2004) impuseram a necessidade de aprimoramento de controles internos e aumento do leque de produtos financeiros disponíveis. Nesse cenário, houve crescente sofisticação na utilização de instrumentos derivativos pelos mais variados tipos de agentes econômicos, que

buscavam ora proteção contra a maior volatilidade dos mercados, ora alavancagem extra para se aproveitarem da mesma.

Paralelamente, a avaliação mais precisa das oportunidades de investimento se tornou prioritária. A precificação de ativos complexos, por vezes ilíquidos ou ainda não negociados, ganhou espaço na academia e nas tesourarias de bancos e empresas. Metodologias de marcação a mercado, estimação de volatilidade, risco de mercado, risco de liquidez, risco de crédito, risco legal, entre outros, são, ainda hoje, foco de muita pesquisa acadêmica. Padrões contábeis de mensuração tiveram que ser repensados e revistos. Escândalos financeiros, como os do Barings em 1995 e da Enron em 2001, surpreenderam o mundo com sua grandiosidade e seu distanciamento de padrões éticos mínimos e culminaram na necessidade de maior controle, governança corporativa, transparência e *disclosure* por parte de empresas ao redor do globo.

Particularmente nos anos noventa, finanças, economia, psicologia e estatística parecem ter trabalhado juntas para modelar o comportamento dos mercados e de seus agentes. A Teoria de Finanças ganhou corpo, acompanhando os desenvolvimentos da ciência de investimento e da teoria de decisão em condições de incerteza.

A partir da década de cinquenta, muitos pesquisadores se voltaram ao entendimento dos temas acima mencionados. Alguns deles alcançaram maior destaque e foram agraciados com o mais alto reconhecimento acadêmico existente na área: o Prêmio Nobel de Economia. Entre outros, foram os casos de Paul Samuelson – 1970, James Tobin – 1981, Franco Modigliani – 1985, Harry M. Markowitz, Merton H. Miller e William F. Sharpe – 1990, Robert C. Merton e Myron S. Scholes – 1997, Daniel Kahneman – 2002, e Robert Engle – 2003. Todos fizeram contribuições fundamentais ao aprimoramento e desenvolvimento da Teoria de Finanças.

Copeland e Weston (1988, p. III), ao comentarem sobre a evolução da Teoria de Finanças, explicam que, a partir de 1958, um ramo da microeconomia aplicada desenvolveu-se e especializou-se em o que atualmente se conhece por Modernas Finanças. Naquela época, Markowitz e Tobin trabalhavam na teoria de seleção de carteiras e Modigliani e Miller na estrutura de capital e avaliação de empresas. Haugen (1999a, p. 3-5) subdivide a evolução da Teoria de Finanças em três fases, como ilustrado na Figura 1. As Antigas Finanças se estenderam do início do século XX até meados dos anos sessenta. Em seus últimos anos, conviveram com as Modernas Finanças, cujo início se deu com o trabalho de Harry Markowitz intitulado *Portfolio selection*. A última e atual fase, que o autor chama de Novas Finanças, teve início nos anos noventa.

Figura 1 – A evolução da Teoria de Finanças

Fonte: Haugen (1999a, p. 5).

Primeiramente com enfoque na descrição do ambiente econômico e na análise individual de títulos, pouco a pouco a Teoria de Finanças adotou enfoque mais abrangente e especializado, utilizando inclusive conhecimentos de outras áreas, como a psicologia.

As Modernas Finanças fundamentam-se em três hipóteses básicas: mercados eficientes, investidores exploram potenciais oportunidades de arbitragem e investidores racionais. Com base nos desenvolvimentos que ocorreram na Teoria de Finanças ao longo das últimas cinco décadas, pode-se dizer que a Teoria de Finanças é uma ciência positiva. Dimson e Mussavian (1999, p. 1.746) corroboram essa assertiva, ao defenderem que “o

crescimento dos mercados derivativos só ocorreu porque houve progresso paralelo na Academia quanto ao desenvolvimento de modelos práticos de precificação de ativos.”

Este trabalho enfoca a teoria de precificação de opções, desenvolvida na década de setenta e, portanto, no âmbito das Modernas Finanças. Nessa época, houve um grande empenho acadêmico e prático no desenvolvimento de modelos de precificação de ativos.

As principais características de cada uma das fases mencionadas acima estão resumidas na Tabela 1. Pode-se perceber que a Teoria de Finanças foi gradativamente mudando seus paradigmas, com o passar do tempo.

Tabela 1 – Teoria de Finanças: principais fases e características

Características Fases	Temas	Paradigmas	Autores	Fundamentação
Antigas Finanças	Análise de balanços e da natureza de títulos financeiros	Análise de títulos mobiliários	Graham e Dodd	Contabilidade e Direito
		Usos e direitos relativos a títulos financeiros	Dewing	
Modernas Finanças	Avaliação baseada no comportamento econômico racional	Otimização	Markowitz	Finanças econômicas
		Irrelevância	Modigliani e Miller	
		<i>Capital asset pricing model</i>	Sharpe, Lintner e Mossin	
		Hipótese de mercado eficiente	Fama	
Novas Finanças	Mercados ineficientes	Modelos fatoriais indutivos <i>ad hoc</i> : retorno	Haugen	Estatística, Econometria e Psicologia
		Modelos fatoriais indutivos <i>ad hoc</i> : risco	Chen, Roll e Ross	
		Modelos comportamentais	Kahneman e Tversky	

Fonte: adaptada de Haugen (1999a, p. 3-5).

2.2 Modernas Finanças: foco na precificação

Conforme Copeland e Weston (1988, p. IV), existem seis teorias seminais e internamente consistentes que formam a base das Modernas Finanças, a saber:

- a) teoria da utilidade (*theory of choice*);
- b) teoria estado-preferência (*state-preference theory*);
- c) teoria da média-variância e do *capital asset pricing model* (CAPM);
- d) *arbitrage pricing theory* (APT);
- e) teoria de precificação de opções;
- f) teoremas de Modigliani e Miller.

Os autores colocam que essas teorias buscam identificar como os indivíduos e a sociedade alocam recursos escassos através de um sistema de preços baseado na avaliação de ativos com risco. A teoria da utilidade estabelece a base de como um investidor racional decide sob incerteza. Isto é, busca descobrir como as pessoas fazem escolhas. As alternativas de investimento são descritas pelas teorias *b* a *e*; cada qual representa o comportamento dos ativos sob um prisma diferente. Quando o método de escolha (teoria *a*) e as alternativas de investimento (teorias *b* a *e*) são combinados, pode-se determinar como os ativos de risco são avaliados, conhecimento que permite aos investidores tomar a decisão ótima de investimento, isto é, aquela que maximiza seu bem-estar no período em questão. Quando bem estabelecidos, os preços constituem bom indicador de como os recursos estão alocados na economia. Por sua vez, os teoremas de Modigliani e Miller (teoria *f*) investigam se a forma de financiamento de uma empresa altera seu valor e, portanto, se deve ser cuidadosamente estudada e planejada por seus administradores, encarregados de definir a estrutura de capital (proporção de capital próprio e capital de terceiros) e a política de dividendos. No caso mais simples, pressupondo ausência de

arbitragem, Modigliani e Miller (1958) demonstraram que o valor da firma independe da estrutura de capital escolhida. Os autores foram os primeiros a utilizar a hipótese de não-arbitragem como base de uma formulação teórica em finanças corporativas (DIMSON; MUSSAVIAN, 1999, p. 1.764).

Tendo em vista a importância conceitual das teorias estado-preferência, média-variância e CAPM no desenvolvimento da teoria de precificação de opções, a seguir descrevem-se os principais legados dessas teorias.

Conforme Copeland e Weston (1988, p. 109-128), a teoria estado-preferência, iniciada por K. Arrow e G. Debreu na década de cinquenta, volta-se à formação da carteira ótima de investimento numa economia de ativos com risco. Como o próprio nome diz, a escolha ótima de investimento é balizada por critérios de preferência dos investidores e pelos retornos dos ativos, contingentes aos possíveis estados da natureza que, por sua vez, são probabilisticamente definidos. Essa teoria introduziu a célebre idéia de que, em condições de equilíbrio na economia (ausência de arbitragem ou possibilidade de ganho certo), é possível determinar o preço de títulos puros², definidos hipoteticamente como títulos que apresentam retorno unitário em um, e somente um, dos possíveis estados da natureza e zero nos demais estados. Primeiramente numa versão discreta, essa idéia foi depois generalizada para versão contínua, resultando no que é atualmente conhecido como densidade de preço de estado (*state-price density*), que permite a determinação do preço atual de uma unidade monetária paga em cada estado de um conjunto contínuo de estados da natureza.

Aït-Sahalia e Lo (1998, p. 499-500) explicam que uma condição suficiente para obter os preços dos títulos puros é a de ausência de arbitragem no mercado. Além disso, pela

² Também conhecidos como títulos elementares de estado ou títulos Arrow-Debreu.

combinação linear dos títulos puros, podem-se obter quaisquer padrões de retornos. Na verdade, os títulos puros fazem o papel de uma base vetorial ortonormal no espaço definido pelos retornos dos ativos. Nessa linha, o processo de determinação do preço de um ativo é constituído dos seguintes passos: primeiramente, identifica-se o padrão de retorno do ativo, ou seja, seu retorno em cada um dos possíveis estados da natureza; em seguida, determina-se a combinação linear de títulos puros que replica esse padrão; por fim, para que não haja arbitragem, o preço do ativo deve ser igual à soma dos preços dos títulos puros linearmente combinados no passo anterior. Esse último resultado é enunciado pela lei do preço único (RUBINSTEIN, 1976, p. 408-409): uma condição básica para o equilíbrio nos mercados financeiros é a de que dois ativos que apresentam o mesmo padrão de retorno devem apresentar o mesmo preço. Em síntese, a existência de títulos puros numa economia permite a decomposição lógica de qualquer título financeiro em um conjunto de títulos puros; ademais, a teoria estado-preferência proveu uma base sólida para o desenvolvimento de modelos de alocação ótima de recursos e de precificação de ativos, contribuindo inclusive para o atual estado da arte da precificação de opções, como resumido no item 4.1.

Por sua vez, a teoria da média-variância foi formulada por Markowitz (1952) e trata de como um investidor, guiado por critérios de média e variância esperadas, pode determinar a carteira ótima de investimento. Elton e Gruber (1997, p. 1.744) adicionam que um importante fato advindo das idéias de Markowitz é que os ativos não devem ser escolhidos apenas por suas características únicas, devendo os investidores considerarem seu co-movimento (covariância) com todos os outros ativos. Dessa maneira, pode-se formar uma carteira com o mesmo retorno esperado e menor risco que uma carteira formada sem se considerarem as covariâncias entre os ativos. Na prática, para reduzir o risco da carteira, um investidor deve escolher ativos com baixa covariância entre si.

Portanto, Markowitz (1952) mostrou como o risco e o retorno dos ativos se relacionam numa carteira de investimento. Tobin (1958) introduziu na análise de Markowitz o ativo livre de risco (que chama de ativo-caixa ou ativo líquido). Nesse novo cenário, demonstrou que a análise de um investidor ao escolher sua carteira deve se basear somente na proporção entre ativos-caixa e ativos não-caixa, em que os ativos não-caixa representam a carteira de mercado (ativos de risco). No plano média-variância, a carteira de mercado deve ser determinada pelo ponto de tangência de uma reta traçada a partir do ativo livre de risco com a fronteira da região definida pelos ativos de risco, chamada fronteira eficiente. A carteira de mercado é livre de preferência, ou seja, é a mesma para todos os investidores; a proporção de cada ativo de risco é fixa e independente das preferências individuais (hipótese conhecida como Teorema da Separação). Segundo Dimson e Mussavian (1999, p. 1.749), com essa formulação, Tobin conseguiu dividir o problema de seleção de carteiras em dois estágios de diferentes níveis de agregação, primeiramente entre e depois dentro de categorias de ativos, abordagem-base para identificação da carteira eficiente. Depois do entendimento da relação entre risco e retorno, o surgimento de uma teoria geral de precificação, mais tarde nomeada CAPM, não tardou.

O CAPM foi formulado por Sharpe (1964) e é o modelo analítico resultante de uma teoria de equilíbrio de preços de ativos em condições de risco. Primordialmente, o autor deriva o preço do risco de mercado, estabelecendo sua relação com o retorno esperado dos ativos existentes para que o mercado esteja em equilíbrio. Especificamente, o modelo implica que só o risco sistemático (não diversificável) deve ser recompensado e que a relação entre risco sistemático e retorno é linear. Assim, quanto maior o risco sistemático de um ativo, maior deve ser seu retorno esperado. Tamanha é a importância do modelo que, ao longo dos anos, muitos estudiosos buscaram atestar sua validade (BLACK, 1993; CHAN; LAKONISHOK, 1993; FAMA; FRENCH, 1992; FAMA; MACBETH, 1973). Os

resultados alcançados são controversos. Pesquisadores também se dedicaram a generalizar o modelo para situações mais realistas, como foi o caso de Black (1972), que desenvolveu um modelo conhecido como CAPM beta-zero, pelo qual demonstrou teoricamente que as implicações do CAPM devem valer mesmo em situações em que o ativo livre de risco não existe. O CAPM é muito bem descrito por Copeland e Weston (1988, p. 193-212), Luenberger (1998, p. 173-192) e Sharpe (1964).

Por último, pesquisadores elaboraram extensões do modelo para tempo contínuo, como Merton (1973a), que desenvolveu um modelo conhecido como CAPM intertemporal (ICAPM). O autor estava em busca de uma formulação que fosse ao mesmo tempo mais realista e matematicamente mais tratável que sua contraparte discreta. Conforme Dimson e Mussavian (1999, p. 1.756), Merton (1973a) produziu o primeiro modelo de escolha da carteira ótima de investimento por um investidor racional num horizonte multiperíodo. Uma das implicações do ICAPM é que o CAPM tradicional (e estático) só vale sob hipóteses adicionais muito especiais; portanto, normalmente não vale num arcabouço dinâmico. Em particular, Merton (1973a) demonstrou que a satisfação de um agente em um dado instante não é função apenas de sua riqueza, mas também do estado geral da economia. Para um mesmo nível de riqueza, a satisfação individual será maior se a economia geral estiver indo bem do que se estiver indo mal. Conclui que a demanda agregada por um ativo de risco depende não só do componente de média-variância, mas também do componente de *hedging* contra choques adversos que impactam o conjunto de oportunidades de investimento.

Resumidamente, a teoria da média-variância e o CAPM mantiveram sua importância e relevância ao longo dos anos, compondo um dos principais pilares da ciência atual de investimento.

Foi num contexto de popularidade do CAPM que a teoria de precificação de opções foi desenvolvida. Essa teoria, além de prover a base para avaliações em inúmeras áreas de finanças e economia, originou abordagens mais gerais de precificação de ativos, como delineado nos itens 1.6 e 4.1.

Em suma, durante as Modernas Finanças, houve um desenvolvimento profícuo de teorias gerais de precificação que, por sua vez, elevaram a Teoria de Finanças para um novo patamar de conhecimento.

2.3 Precificação de ativos: conceitos e definições

Segundo Cochrane (2001, p. XIII-XV e 5-8), “A teoria de precificação de ativos volta-se à quantificação de preços ou valores de direitos ou obrigações sujeitos à incerteza” e busca explicar porque alguns ativos rendem em média mais que outros. Para tanto, os modelos de precificação consideram o tempo e o risco dos fluxos de caixa analisados. Muito embora os efeitos do tempo não imponham complexidade demasiada, correções para risco assumem papel muito importante, como será discutido no capítulo 3. O grande debate que surge em torno desses modelos é se descrevem a forma como o mundo funciona ou a forma como deveria funcionar. Duas decisões podem suceder:

- a) quando o mundo não obedece às previsões de um determinado modelo, pode-se decidir melhorá-lo;
- b) por outro lado, pode-se decidir que o mundo não funciona corretamente, que alguns ativos estão mal avaliados e que existem oportunidades de investimento para os investidores atentos.

Ainda segundo o autor, um conceito simples é comum aos modelos: “[...] preço iguala resultado esperado descontado.” A partir desse juízo, desenvolveram-se modelos de

precificação específicos, cada qual direcionado à solução de determinado problema; porém, todos são pautados no princípio de que preço baixo implica alta taxa de retorno e vice-versa.

Muitos autores enfatizam que modelos teóricos de avaliação de ativos têm um papel importantíssimo na determinação de preços de ativos ilíquidos, tais como potenciais investimentos públicos, novos instrumentos financeiros, derivativos complexos, entre outros (COCHRANE, 2001, p. XIII; LUENBERGER, 1998, p. 8; NEFTCI, 2000, p. 14).

De acordo com Dimson e Mussavian (1999, p. 1.765), os pilares das teorias de precificação de ativos são a otimização de carteiras, a análise em condições de equilíbrio e a condição de não-arbitragem. De fato, como será descrito no capítulo 3, sob condições gerais de equilíbrio, tipicamente o problema de precificação é desenvolvido a partir de um investidor que maximiza sua utilidade esperada diante das oportunidades de investimento que possui. Hipóteses sobre o equilíbrio de preços são introduzidas e os preços de equilíbrio dos ativos primitivos são expressos como função de variáveis macroeconômicas. A ausência de arbitragem permite que os preços dos derivativos sejam determinados a partir da combinação dos preços de ativos primitivos, que são assumidos conhecidos (exógenos ao modelo de precificação).

Luenberger (1988, p. 6-7 e 228) explica que a precificação de ativos é um problema típico da ciência do investimento porque os preços balizam a decisão do investidor de comprar ou vender este ou aquele ativo. O autor afirma que “Fundamentalmente, há duas maneiras de avaliar um fluxo de caixa aleatório”:

- a) diretamente, utilizando métricas como valores esperados de média e variância;
- b) indiretamente, reduzindo o fluxo a uma combinação de outros fluxos já avaliados.

A indireta, também conhecida como relativa, é típica da precificação de instrumentos derivativos, conforme mencionado acima. A teoria de utilidade e o conceito de arbitragem, ambos fundamentais à teoria de precificação, serão examinados a seguir.

2.3.1 O papel da teoria da utilidade na precificação de ativos

Dimson e Mussavian (1999, p. 1.745) explicam que a semente da teoria de precificação de ativos foi plantada por Bernoulli (1738 apud DIMSON e MUSSAVIAN, 1999, p. 1.746-1.747), em seu estudo *Exposição de uma nova teoria de mensuração do risco*, apresentado para a Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo, Rússia. Nele, Bernoulli defende que a determinação do valor de um bem não deve estar baseada em seu preço, mas sim na utilidade que proporciona. Também sugere que um aumento de riqueza resulta num aumento de utilidade que é inversamente proporcional às posses do indivíduo, ou seja, sugere que a utilidade marginal da riqueza é decrescente.

As idéias de Bernoulli foram utilizadas por Morgenstern e Von Neumann na década de 1940. Eles desenvolveram o conceito de utilidade esperada, que por sua vez propiciou avanços na teoria de decisão sob incerteza. Basicamente, a teoria de utilidade busca representar o processo decisório de indivíduos racionais num mundo incerto.

Mais especificamente, segundo Luenberger (1998, p. 228-230), a utilidade de uma alternativa de investimento é calculada através de uma função de utilidade u , de uma variável real a valores reais ($u: \Re \rightarrow \Re$). Normalmente, o domínio de u é constituído de possíveis valores de riqueza ou de consumo relacionados às alternativas disponíveis ao investidor. Essa função permite classificar, por ordem de preferência, valores aleatórios de riqueza (ou de consumo, dependendo de seu domínio), ordenando as alternativas de investimento com base em sua utilidade esperada: quanto maior for a utilidade esperada de uma alternativa, melhor ela será. O autor ainda cita que as funções de utilidade mais comumente empregadas em finanças são: exponencial, logarítmica, potência e quadrática.

Salienta-se que a teoria de utilidade procura representar a tomada de decisão de investimento através da utilização de modelos nos quais os agentes são racionais. Conforme Barberis e Thaler (2003, p. 1.055), racionalidade significa que, em primeiro lugar, quando os agentes recebem novas informações, são capazes de atualizar corretamente suas previsões, de forma consistente com as teorias bayesianas (inferência estatística a partir do condicionamento de informações). Em segundo lugar, que dadas suas previsões, os agentes fazem escolhas que são normativamente aceitáveis, ou seja, que são consistentes com a noção de utilidade esperada subjetiva.

A teoria supõe que indivíduos racionais, quando decidem sob incerteza, seguem cinco axiomas, conhecidos como axiomas cardeais da utilidade. Essas suposições fornecem as condições mínimas para um comportamento consistente e racional. Os axiomas cardeais da utilidade (com algumas variações de nomenclatura) são enunciados a seguir (CLEMEN; REILLY, 2001, p. 572-573; COPELAND; WESTON, 1988, p. 79-80; ELTON; GRUBER, 1995, p. 222):

- a) comparabilidade: seja $\{S\}$ o conjunto de todas as alternativas incertas. Para quaisquer dois resultados possíveis selecionados x e y , um indivíduo é capaz de dizer se x é melhor, pior ou equivalente a y . Assim, utilizando os símbolos $\succ$ e $\prec$ para ordenar preferências e $\sim$ para denotar equivalência, $x \succ y$, $x \prec y$ ou $x \sim y$;
- b) transitividade (ou consistência): se um indivíduo prefere x a y e y a z , então prefere x a z . Simbolicamente, se $x \succ y$ e $y \succ z \rightarrow x \succ z$; se um indivíduo é indiferente entre x e y e entre y e z , também o será entre x e z . Ou seja, se $x \sim y$ e $y \sim z \rightarrow x \sim z$;
- c) forte independência: seja J um jogo dado pela probabilidade α de receber x e $(1-\alpha)$ de receber z , em que x e z são resultados mutuamente exclusivos. Denota-se esse jogo por $J(x, z : \alpha)$. Forte independência significa que se existe um resultado y

equivalente ao resultado x , ou seja, o indivíduo é indiferente a x ou a y ($x \sim y$), então o indivíduo também é indiferente ao jogo dado pela probabilidade α de receber y e $(1-\alpha)$ de receber o mesmo resultado mutuamente exclusivo z e o jogo anterior $J(x, z : \alpha)$. Assim, se $x \sim y \rightarrow J(x, z : \alpha) \sim J(y, z : \alpha)$;

- d) mensurabilidade: se o resultado y é menos preferível que o resultado x porém mais preferível que o resultado z , então existe um único α (uma probabilidade) tal que o indivíduo é indiferente entre y e um jogo de resultado x com probabilidade α e z com $(1 - \alpha)$. Ou seja, se $x \succ y \succeq z$ ou $x \succeq y \succ z \rightarrow \exists$ um único $\alpha \mid y \sim J(x, z : \alpha)$.

Esse axioma implica que, dados três resultados diferentes quaisquer, é sempre possível estabelecer um jogo (e somente um) entre o melhor e o pior resultado que seja equivalente ao resultado intermediário;

- e) ordenação: sejam y e u resultados que estão, em termos de preferência, ordenados entre os resultados x e z , $x \succ z$. Se um indivíduo é indiferente entre y e um jogo de resultado x (com probabilidade α_1) e z , enquanto também é indiferente entre u e um segundo jogo, dessa vez entre x (com probabilidade α_2) e z , então se α_1 é maior que α_2 , então y é preferível a u . Portanto,

$$\text{se } x \succeq y \succeq z \text{ e } x \succeq u \succeq z \rightarrow \text{se } y \sim J(x, z : \alpha_1) \text{ e } u \sim J(x, z : \alpha_2) \rightarrow \text{se } \alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow y \succ u.$$

Isso é dizer que dados dois jogos com o mesmo par de resultados possíveis, o decisor escolhe o de maior probabilidade de apresentar o resultado preferível.

Copeland e Weston (1988, p. 80-82) demonstram que, num mundo incerto, investidores racionais (guiados pelos axiomas cardeais da utilidade) e que preferem mais riqueza a menos tomam decisões de investimento e consumo visando à maximização da utilidade esperada. Portanto, há ligação íntima entre a decisão do investidor e sua função

subjetiva de utilidade, pois é com base nessa última que as alternativas de investimento são classificadas em ordem de preferência.

Em síntese, os axiomas garantem, em primeiro lugar, que todos os indivíduos sempre tomam decisões completamente racionais. Em segundo lugar, que as pessoas são capazes de fazer escolhas racionais em face de milhares de alternativas.

Luenberger (1998, p. 231-234 e 254) ressalta que as funções de utilidade têm papel importante na modelagem do processo de decisão de investimento pois permitem levar em conta as preferências a risco dos investidores. De fato, assumindo que a função de utilidade u é derivável pelo menos até a segunda ordem, deve-se destacar que os indivíduos que preferem mais a menos (ambiciosos) apresentam utilidade crescente ($u' > 0$). Além disso, utilidade côncava ($u'' < 0$) denota aversão a risco; utilidade linear ($u'' = 0$), neutralidade a risco; e utilidade convexa ($u'' > 0$), propensão a risco. No item 4.1.1 será apresentado um exemplo de como o grau de aversão a risco de um investidor é medido, dada a função de utilidade que representa seu comportamento diante do risco.

Conforme Copeland e Weston (1988, p. 3-13), sob o conjunto de hipóteses simplificadoras de comportamento racional, juntamente com a hipótese de existência de um mercado de capitais (que possibilita troca intertemporal de consumo), as decisões dos investidores constituem-se de dois passos básicos independentes:

- a) determinação do nível ótimo de produção (investimento), que é obtido pelo aceite de todas as oportunidades de investimento com retorno maior que a taxa de juros de mercado. Quando o retorno marginal das oportunidades ainda disponíveis iguala a taxa de juros de mercado, deve-se parar de investir;

- b) escolha do nível ótimo de consumo, obtido pela tomada ou doação de recursos à taxa de mercado, até o ponto em que a taxa de substituição intertemporal (subjativa) iguala a taxa de mercado.

Por exemplo, no caso mais simples, economia de uma pessoa e um bem, um indivíduo tem que decidir se seu consumo deve ocorrer no presente ou no futuro. Sua decisão é balizada por sua função de utilidade (preferência intertemporal) e pelas oportunidades de produção (investimento) existentes. Implícita está a seguinte ponderação: menor consumo presente deve ser compensado por maior consumo futuro e vice-versa. Enquanto sua taxa de substituição (subjativa, mede a relação entre unidades futuras que deve receber para abrir mão de consumo presente) é menor que a taxa de remuneração de seu capital (que viabiliza maior consumo no futuro), decide postergar seu consumo e investir. Além disso, escolhe a proporção de consumo presente versus consumo futuro que maximiza sua utilidade (satisfação) esperada. Um raciocínio análogo a esse, apresentado no item 3.3.1, é utilizado por Câmara (2003) no estabelecimento das condições gerais de equilíbrio, procedimento que permite, em última instância, determinar os preços dos ativos da economia.

Portanto, a suposição de que a teoria de utilidade representa adequadamente o comportamento dos indivíduos viabiliza a obtenção dos preços de equilíbrio dos ativos, que são expressos com base na utilidade esperada do investidor.

2.3.2 O papel da arbitragem na precificação de derivativos

As opções são instrumentos derivativos. Hull (1997, p. 1) define derivativo como “[...] um instrumento financeiro cujo valor depende do valor de outras variáveis [...]”, como por exemplo o preço de uma ação. Os derivativos são também conhecidos como direitos contingentes. De fato, pela própria definição, o valor de um instrumento derivativo é contingente ao valor de uma ou mais variáveis-base, chamadas ativos-objetos.

Consoante Neftci (2000, p. 2), podem-se agrupar os instrumentos derivativos em três grandes grupos: futuros e termos, opções, e *swaps*. Por sua vez, os ativos-objetos podem ser subdivididos em cinco grupos principais, a saber: ações, moedas, taxas de juros, índices e *commodities*. Vale repetir que, nesta dissertação, avalia-se um modelo de precificação de opções sobre futuros; em específico, testa-se o modelo alternativo na precificação de opções sobre futuro de dólar.

Embora haja ampla variedade de instrumentos derivativos, o conceito de arbitragem é utilizado na precificação de todos eles. Na verdade, Neftci (2000, p. 13) explica que, independentemente do tipo do derivativo ou do ativo-objeto,

“Todos os métodos de precificação de derivativos utilizam o conceito de arbitragem. Nos métodos de precificação por arbitragem sua utilização é direta: os preços são obtidos sob condições que a precluem. Nos métodos de precificação por equilíbrio geral a ausência de oportunidades de arbitragem é parte das condições gerais de equilíbrio.”

Hull (1997, p. 12) explica que “Arbitragem envolve a obtenção de ganho certo em transações financeiras simultâneas em dois ou mais mercados.” Segundo Neftci (2000, p. 13), “Em sua mais simples acepção, arbitragem significa posicionamento simultâneo em diferentes ativos pelo qual se garante resultado maior que a taxa de retorno livre de risco [...]”.

Luenberger (1998, p. 4-5 e 240-242) aclara que a precificação de derivativos é feita com base na hipótese de ausência de arbitragem, suposição baseada na existência de mercados financeiros desenvolvidos. Ademais, o autor distingue dois tipos de arbitragem. A primeira é caracterizada pela obtenção de lucro imediato sem impacto em resultado futuro (positivo ou negativo). A segunda, por ser possível criar a possibilidade de obtenção de lucro futuro através de investimento nulo (ou negativo). Particularmente, o autor

demonstra que a condição de ausência do primeiro tipo de arbitragem implica em linearidade de preços:

$$ap(x) + bp(y) = p(ax + by),$$

onde a e b são constantes, x e y são títulos financeiros e $p(\cdot)$ o operador preço.

A equação acima implica que o preço de um ativo financeiro (lado direito da equação) é igual à soma dos preços dos elementos que o compõem (lado esquerdo da equação). Sua relação com os instrumentos derivativos deve ficar clara. Conforme Hull (1997, p. 51-52 e 333-334), um derivativo (por exemplo, uma opção de compra) pode ser sinteticamente construído a partir de uma quantidade do ativo-objeto ax e do título livre de risco by . Logo, conhecendo-se os preços do ativo-objeto e do título livre de risco, automaticamente determina-se o preço do derivativo, que será dado por $ap(x) + bp(y)$. Esse preço é único e independente das preferências a risco do investidor, basta que ele prefira mais a menos e explore as oportunidades de arbitragem. Nessas condições, se há ganho certo, qualquer investidor, independentemente de suas preferências a risco, se aproveita da oportunidade de arbitragem até sua exaustão (ou até seu desaparecimento), o que mantém o mercado arbitrado.

Cox e Ross (1976) foram os primeiros a utilizar, explicitamente, o fato de que o preço da opção independe das preferências a risco dos investidores: se a ausência de arbitragem e a linearidade de preços garantem que o preço da opção é único, então ele deve valer para qualquer investidor, inclusive para o neutro a risco. Ao considerarem que os investidores são neutros a risco, eles simplificaram enormemente o problema de precificação de opções. No item 4.1 a evolução histórica da precificação de opções será comentada.

Diz-se que o preço de um título financeiro está num nível justo, ou que o título está corretamente precificado, quando nenhuma das formas de arbitragem definidas acima existe (NEFTCI, 2000, p. 14). Os preços livres de arbitragem constituem o padrão de preços que devem ser observados no mercado; desvios em relação aos mesmos sinalizam oportunidade de aferição de retornos anormais. Dessa forma, suposição de ausência de arbitragem basta para a correta precificação de derivativos na economia.

Em suma, a hipótese de ausência de arbitragem possibilita que a precificação de derivativos seja baseada nos preços dos ativos-objetos, o que resulta em modelos de precificação que independem das preferências a risco dos investidores, como é o caso do modelo de Black-Scholes, que será deduzido no item 4.1.1.

Por fim, essa hipótese dispensa suposições bem mais fortes (e distantes da realidade) acerca dos mercados financeiros, como as de mercado completo, perfeito ou eficiente, conceitos que são definidos a seguir para fins de comparação relativa.

Copeland e Weston (1988, p. 111-113) explicam que um mercado é completo quando qualquer padrão de retorno pode ser criado a partir dos ativos existentes. Nesse mercado, os títulos puros podem ser criados e seus preços determinados.

Também esclarecem que um mercado financeiro perfeito é caracterizado por: ausência de custos transacionais, impostos ou controles; competição perfeita (todos os participantes decidem apenas com base em preços); eficiência informacional (não há custo informacional e as informações são recebidas simultaneamente por todos os indivíduos); indivíduos racionais e maximizadores da utilidade esperada (COPELAND; WESTON, 1988, p. 330-331).

Ribeiro Neto e Famá (2001, p. 1) aclaram que o mercado é eficiente quando “[...] os preços refletem todas as informações relevantes sobre um determinado ativo.”

2.4 Opções: introdução ao instrumento-foco do estudo

Segundo Black e Scholes (1973, p. 637), “Uma opção é um título que dá o direito de comprar ou vender um ativo, sob certas condições, por um período específico de tempo.” O preço pago pela opção é denominado prêmio e o preço pago pelo ativo quando a opção é exercida é chamado preço de exercício. O tipo mais simples de opção é a opção de compra, que dá ao titular (comprador da opção) o direito de adquirir do lançador (vendedor da opção) o ativo-objeto, por um preço preestabelecido, em (ou até) uma certa data, chamada data de vencimento. Diferentemente, a opção de venda dá ao titular o direito de vender o ativo-objeto por um preço preestabelecido, na (ou até a) data de vencimento. Quanto ao estilo, as opções podem ser americanas, exercíveis em qualquer momento até a data de vencimento, ou européias, exercíveis somente na data de vencimento. Hull (1997, p. 4-9, 156-174 e 177-191) explica as propriedades básicas das opções e discute os perfis de lucro – no vencimento – de estratégias bem difundidas de negociação de opções.

Merton (1973b, p.141) destaca que historicamente

“A teoria de opções começou em 1900, quando o matemático francês Louis Bachelier deduziu uma fórmula de precificação de opções baseada na suposição de que as ações seguem um movimento browniano de média zero. Desde então, inúmeros pesquisadores têm contribuído para o desenvolvimento da teoria.”

Fato curioso é o autor considerava questionável toda a atenção que a teoria de opções vinha recebendo, tanto na literatura acadêmica quanto na de mercado, dadas a especificidade e a pouca importância das opções entre os ativos financeiros. A única justificativa que via para a atenção que o estudo de opções atraía era que pelas opções serem um tipo particularmente simples de direito contingente, seu perfeito entendimento poderia resultar numa teoria geral de precificação de toda a classe de tais direitos. O

desenvolvimento da teoria de opções poderia auxiliar a responder questões sobre a precificação das obrigações de uma empresa, a estrutura a termo e de risco das taxas de juros, e a teoria de mercados especulativos. De fato, foi o que aconteceu (MERTON, 1998, p. 324).

O problema central na teoria de precificação de opções é calcular o valor de uma opção antes de seu vencimento ou, igualmente, determinar o valor justo do seu prêmio, balizador de seus preços de compra e venda no mercado (JARROW, 1999, p. 231). Black e Scholes (1973) foram os pioneiros a solucionar esse problema. Antes deles, muitos autores haviam se dedicado à precificação de opções, mais precisamente à precificação de *warrants*. Contudo, as fórmulas a que chegaram não eram completas, pois envolviam um ou mais parâmetros arbitrários (BLACK; SCHOLES, 1973, p. 639). Segundo Hull (1997, p. 153 e 244-246), *warrants* são opções emitidas por uma empresa ou instituição financeira e tipicamente possuem prazos de vencimento mais longos que as negociadas em bolsa de valores. Até os anos setenta, devido em parte à inexistência das bolsas de valores especializadas na negociação das opções hoje tradicionais, os *warrants* despertavam relativamente mais interesse econômico do que o fazem atualmente. Empresas norte-americanas freqüentemente lançam *warrants* de compra sobre suas próprias ações, numa operação casada com a emissão de um instrumento de dívida. Essa estratégia visa a aumentar a atratividade da emissão e, ao mesmo tempo, reduzir seu custo para a empresa.

Em síntese, Black e Scholes (1973) obtiveram uma fórmula que, dado o perfil de lucro no vencimento de uma opção européia de compra ou de venda, lançada sobre uma ação que não distribui dividendos, quantifica o prêmio justo que deve ser pago pelo comprador da opção pelo direito de exercício da mesma em seu vencimento.

Atualmente, nos mercados financeiros desenvolvidos, negociam-se opções lançadas sobre os mais diversos ativos: ações, futuros, moedas, índices etc., tanto em mercados

organizados (bolsas de valores) quanto nos de balcão. Há também opções cujos resultados têm cálculo mais complexo, por exemplo dependente dos preços de mais de um ativo ou da trajetória dos preços do ativo-objeto no tempo. Segundo Hull (1997, p. 457), essas opções são genericamente chamadas exóticas. Esses derivativos, quantitativamente mais sofisticados, são explorados em detalhe por Hull (1997, 457-486) e Wilmott (1998, p. 177-248).

Como este trabalho testa um modelo de precificação de opções sobre futuros, as características desses instrumentos derivativos são apresentadas a seguir.

2.4.1 Opções sobre futuros

Conforme Hull (1997, p. 3 e 139), as opções sobre futuros são aquelas cujo ativo-objeto é um contrato futuro, definido como um acordo entre duas partes para comprar ou vender um ativo, em data futura certa e por um preço pré-determinado. Os futuros são muito bem descritos por Cox et al. (1981), Cuthbertson e Nitzsche (2001, p. 83-100), Hull (1997, p. 3 e 45-71) e Wilmott (1998, p. 16-19). Quando, por exemplo, o titular de uma opção de compra sobre futuro exerce seu direito, recebe do lançador uma posição comprada no contrato futuro mais um montante equivalente à diferença entre o preço do contrato futuro e o preço de exercício. Inversamente, quando o titular de uma opção de venda sobre futuro exerce seu direito, recebe do lançador uma posição vendida no contrato futuro mais um montante equivalente à diferença entre o preço de exercício e o preço do contrato futuro. Nos dois casos, no momento em que a opção é exercida, o contrato futuro tem valor nulo e pode ser encerrado imediatamente. Dessa forma, o cálculo do resultado de uma opção sobre futuro é análogo ao de uma opção sobre ação, com a ação sendo substituída pelo futuro.

Hull (1997, p. 273-280) complementa que normalmente a opção sobre futuro vence na primeira data de entrega do ativo-objeto do contrato futuro, ou alguns dias antes. O

autor cita quatro pontos que corroboram a utilização das opções sobre futuros: (a) são mais atrativas que as opções lançadas sobre o ativo-objeto à vista porque é mais barato ou mais conveniente entregar contratos futuros do ativo-objeto que o próprio ativo-objeto, como no caso de animais vivos; (b) normalmente, o exercício da opção sobre futuro não leva à entrega do ativo-objeto do contrato futuro, porque este é, na maioria das vezes, encerrado antes do seu vencimento; conseqüentemente, essas opções são usualmente liquidadas por diferença, fato que é particularmente importante para os que possuem limitação de capital e apresentam dificuldade para levantar fundos suficientes para comprar o ativo-objeto quando a opção é exercida; (c) a negociação de futuros e opções sobre futuros ocorre em rodas de negociação dispostas lado-a-lado na mesma bolsa, o que facilita o *hedging*, a especulação e a arbitragem, tendendo a promover uma maior eficiência de mercado; (d) opções sobre futuros em geral envolvem custos transacionais menores que as opções sobre o ativo à vista.

Segundo Cuthbertson e Nitzsche (2001, p. 319), em relação às opções sobre o ativo à vista, as opções sobre futuros possuem a vantagem de resultarem na entrega de um contrato futuro, que é altamente líquido e pode ser encerrado a um baixo custo. Nessa mesma linha, Hull (1996, p. 312-313) afirma que o contrato futuro tem mais liquidez, é mais fácil de negociar que o ativo-objeto e, desde que as bolsas onde é transacionado estejam abertas à sua negociação, seu preço é conhecido imediatamente, o que pode não ocorrer com o preço à vista do ativo-objeto.

O modelo alternativo de precificação de opções de que trata esta dissertação foi testado em opções sobre futuro de dólar, negociadas na BM&F. Os contratos de futuro de dólar e de opção sobre futuro de dólar da BM&F são apresentados, nessa ordem, nos anexos A e B. Esses documentos incluem todas as informações relevantes à negociação organizada desses dois instrumentos derivativos.

3 ABORDAGEM DE PRECIFICAÇÃO DE ANTÔNIO CÂMARA

“It is common in financial economics, especially in the option pricing literature, to take a certain price dynamics of an ‘underlying asset’ as a primitive assumption. The results are then seemingly ‘preference free’, but it is known that, if one wishes to embed such a ‘partial equilibrium’ model in a general equilibrium framework, this can be obtained only with certain individuals’ preferences.”

(BICK, 1990, p. 673)

3.1 Considerações iniciais

Nos capítulos 3 e 4, será demonstrado como um modelo de precificação de opções pode ser obtido a partir de condições gerais de equilíbrio. Utilizando a abordagem geral de precificação de derivativos desenvolvida por Câmara (2003), serão deduzidos os dois modelos de precificação de opções utilizados nos testes deste trabalho: o modelo padrão, de Black, e o modelo alternativo, de Câmara. Frisa-se que as relações matemáticas intermediárias sobre preferências a risco e distribuições que serão apresentadas foram deduzidas por Câmara (2003). Todavia, muitos de seus resultados não são inteligíveis ao leitor comum, pois além de muitas passagens matemáticas não serem explicitadas, tanto as hipóteses-base dos modelos como os conceitos a elas intrínsecos são demasiadamente técnicos e fundamentados em outros trabalhos, cujos resultados são apenas referenciados. Nesse contexto, a obtenção de uma visão geral sobre o assunto torna-se ainda mais complexa. Tendo isso em mente, espera-se que o detalhamento com que o assunto é abordado e a forma conexa com que é apresentado permita a compreensão, por um leitor comum, de um tema tão importante e, na maioria das vezes, árido na Teoria de Finanças. Adicionalmente, acredita-se que o leitor com boa base quantitativa, auxiliado pelos conceitos de teoria de utilidade apresentados no capítulo 2 e pelas demonstrações e referências contidas nos apêndices A, B, C e D, especialmente elaborados pelo autor para

subsidiar os resultados demonstrados e discutidos, será capaz de compreender o assunto apresentado em sua magnitude.

3.2 Essência do modelo

Cochrane (2001, p. XIV) elucida que existem duas abordagens polares de precificação de ativos que são dignas de menção por sua abrangência: a absoluta e a relativa. A abordagem absoluta, utilizada em modelos de equilíbrio geral, baseia-se no entendimento e na mensuração das fontes de riscos macroeconômicos que influenciam os preços dos ativos. A abordagem relativa procura tirar conclusões sobre o preço de um ativo, dados os preços de alguns outros ativos. O modelo de Black-Scholes para precificação de opções constitui exemplo clássico dessa abordagem, pois o preço do ativo-objeto, sua volatilidade e a taxa de juros livre de risco são variáveis exógenas ao modelo.

Câmara (2003) parte de uma abordagem de precificação absoluta e obtém fórmulas de precificação típicas da abordagem relativa. A essência da abordagem absoluta do autor é descrita por Cochrane (2001, p. 5-47), através de duas equações básicas, que sintetizam uma pergunta central à teoria de precificação de ativos: qual é o preço atual de um resultado aleatório que será recebido um período à frente? Os conceitos que serão apresentados a seguir facilitarão o entendimento da abordagem de precificação desenvolvida por Câmara (2003).

Sejam $\{t; t+1\}$ os indexadores temporais que denotam, respectivamente, o início e o final de um período. As informações disponíveis ao agente financeiro estão condicionadas ao instante t . Seja p_t o preço de um resultado aleatório x_{t+1} . O resultado é o fluxo de caixa total que é recebido em $t+1$ pelo investimento em t . Por exemplo, no caso de uma ação

que não paga dividendos, ele é o preço (ainda não conhecido) da ação em $t+1$. No caso de uma opção de compra lançada sobre essa ação, ele é o maior entre zero e a diferença entre o preço da ação e o preço de exercício. Portanto, o resultado do investimento é um valor aleatório que pode assumir diferentes papéis nessa abordagem de precificação: pode se referir ao retorno bruto, ao retorno líquido, ao montante, ao lucro bruto ou a algum outro valor aleatório relacionado ao investimento em análise. Essa escolha é feita por conveniência de representação e depende da natureza do ativo precificado.

O preço e o resultado são relacionados por um fator de desconto apropriado, doravante referido como fator estocástico de desconto m_{t+1} , que deve ser aplicado ao resultado de modo que:

$$p_t = E[m_{t+1}x_{t+1}],$$

$$m_{t+1} = f(\text{dados}, \text{parâmetros}),$$

onde

$E[\cdot]$: esperança matemática.

A primeira equação implica que o preço atual de um fluxo de caixa aleatório deve ser igual ao valor esperado do produto do resultado do investimento pelo fator estocástico de desconto. Em outras palavras, conhecendo-se a distribuição de probabilidade conjunta do resultado do investimento e do fator estocástico de desconto, pode-se estimar o preço do fluxo (vide apêndice D para definição de probabilidade conjunta). Percebe-se assim que o conhecimento dessa distribuição de probabilidade assume papel primordial nesse processo. A esperança matemática considera todos os estados que a natureza pode assumir e soma a ponderação dos valores possíveis de $m_{t+1}x_{t+1}$ por suas respectivas probabilidades, procedimento que resulta numa estimativa do preço atual do fluxo p_t . Quando se trata de

uma variável contínua (infinitos estados), a esperança matemática comumente é representada por uma integral.

O fator estocástico de desconto, segunda equação, é função de dados macroeconômicos e parâmetros econométricos. Da mesma forma que o resultado do investimento, também é uma variável aleatória. Seu objetivo é descontar apropriadamente o resultado do fluxo de caixa aleatório, de forma que se tenha uma estimativa justa para o preço atual do fluxo. Esse fator pode assumir diversas representações: pode ser função da utilidade marginal relativa de um investidor (ou de um agente representativo) no modelo baseado no consumo ou uma combinação linear de índices ou fatores (tais como tamanho da empresa, setor de atuação, entre outros) num modelo fatorial. Qualquer que seja a representação, alguns parâmetros devem ser estimados. No CAPM, por exemplo, em que a representação do fator estocástico de desconto se dá através de um modelo de fator único, o beta é um parâmetro a ser estimado.

Essa forma de representação de preços permite a conveniente separação entre a especificação das hipóteses econômicas do modelo (fator estocástico de desconto) e a decisão de qual representação empírica se adotar para o resultado do ativo e para sua inter-relação com o fator estocástico.

Por exemplo, no modelo baseado no consumo (COCHRANE, 2001, p. 5-47), o fator estocástico de desconto é representado como função da utilidade marginal do consumo. A decisão do investidor reside em ajustar os níveis de consumo em face das alternativas de investimento a ele disponíveis, de forma a maximizar sua utilidade. É importante perceber que dois investidores com preferências a risco distintas atribuem à mesma alternativa preços que podem ser completamente diferentes.

Nesse modelo, a equação mais básica de formação de preços de ativos surge do equacionamento de quanto economizar, quanto consumir e em que investir. No ponto de

máxima utilidade, a perda marginal de utilidade de consumir um pouco menos no presente deve igualar o ganho marginal de utilidade de consumir um pouco mais no futuro e vice-versa. Se essa relação entre consumo presente e futuro não estiver em equilíbrio, o investidor deve ajustar a quantidade do ativo, comprando-o ou vendendo-o conforme o caso. Cochrane (2001, p. 5) enfatiza que “A utilidade marginal, não o consumo, é a medida fundamental de como um investidor se sente.” Ela mede a variação da utilidade para uma variação infinitesimal no consumo.

A lógica do modelo baseado no consumo (abordagem absoluta) é apresentada a seguir. Numa economia de uma pessoa e um ativo de preço atual p_t e resultado aleatório x_{t+1} , sejam $\{e_t; e_{t+1}\}$ os consumos do investidor imediatamente antes dele ajustá-los às últimas informações disponibilizadas em t . Sejam $\{c_t; c_{t+1}\}$ os consumos adaptados a essas informações, ou seja, aqueles que maximizam sua utilidade total esperada no horizonte de investimento. Seja $u(\cdot)$ a função de utilidade do investidor e β um fator subjetivo de desconto. Mantendo a mesma notação para as variáveis já apresentadas, o objetivo do investidor é:

$$\text{Max}\{u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})]\},$$

sujeito a

$$c_t = e_t - p_t \xi,$$

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1} \xi,$$

onde ξ representa a quantidade do bem a ser negociada imediatamente após o recebimento das informações em t .

A função-objetivo indica que a utilidade total de um investidor é equivalente à soma da utilidade de seu consumo presente com o valor esperado da utilidade de seu consumo

futuro descontado (trazido a valor presente) por um fator subjetivo. O fator subjetivo β captura a impaciência, ou seja, o quanto o fluxo futuro é penalizado por estar um período distante. Hipótese importante também nesse modelo é a de que a função de utilidade escolhida tem que atender ao requisito fundamental de ser monotônica estritamente crescente. Essa característica captura a premissa de que o investidor racional sempre prefere mais consumo a menos. Normalmente, assume-se também que a função utilidade é côncava (COPELAND; WESTON, 1988, p. 88; SHARPE, 1964, p. 428), característica que denota aversão a risco. Acrescenta-se que o consumo em $t+1$ é aleatório ou, em outras palavras, o investidor não sabe ao certo qual será sua riqueza no futuro. Portanto, não sabe quanto poderá consumir.

Em resumo, o investidor pode ajustar seu nível de consumo negociando ξ unidades do ativo, de forma a maximizar sua utilidade no horizonte de investimento. A função-objetivo apenas explicita esse propósito. Dessa forma, as duas variáveis de decisão do investidor são quanto consumir no presente c_t e quanto investir para consumo futuro ξ .

Como se assume derivabilidade da função utilidade no intervalo em questão, para que se encontre seu ponto de máximo, deve-se derivá-la em relação a ξ e igualar o resultado a zero (condição de primeira ordem). Assim, utilizando num primeiro momento a notação de Leibniz para facilitar o entendimento da derivação, tem-se:

$$\frac{du(c_t)}{dc_t} \frac{dc_t}{d\xi} + E_t \left[\beta \frac{du(c_{t+1})}{dc_{t+1}} \frac{dc_{t+1}}{d\xi} \right] = 0.$$

Substituindo-se c_t e c_{t+1} na equação acima:

$$\begin{aligned} \frac{du(c_t)}{dc_t} \frac{d(e_t - p_t \xi)}{d\xi} + E_t \left[\beta \frac{du(c_{t+1})}{dc_{t+1}} \frac{d(e_{t+1} + x_{t+1} \xi)}{d\xi} \right] &= 0, \\ -\frac{du(c_t)}{dc_t} p_t + E_t \left[\beta \frac{du(c_{t+1})}{dc_{t+1}} x_{t+1} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Voltando-se à notação usual:

$$-u'(c_t)p_t + E_t[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}] = 0,$$

portanto:

$$p_t = \frac{E_t[\mathbf{b}u'(c_{t+1})x_{t+1}]}{u'(c_t)} = E_t\left[\frac{\mathbf{b}u'(c_{t+1})x_{t+1}}{u'(c_t)}\right]. \quad (1)$$

Pela equação (1), percebe-se que o fator estocástico de desconto no modelo baseado no consumo é definido por

$$m_{t+1} = \frac{\mathbf{b}u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}.$$

Na literatura, esse fator é também conhecido como utilidade marginal relativa da riqueza ou *pricing kernel* (COCHRANE, 2001, p. 9).

O modelo acima explicita que $-u'(c_t)p_t$ é a perda de utilidade presente que o investidor incorre quando compra uma unidade adicional do ativo. $E_t[\mathbf{b}u'(c_{t+1})x_{t+1}]$ é o aumento de utilidade (descontada, esperada) por investir numa unidade extra do mesmo. Dessa forma, o investidor ajusta seu consumo, comprando ou vendendo a quantidade ξ do ativo, até que a condição de primeira ordem seja atendida. Nesse ponto, sua perda (conhecida) marginal de utilidade e seu ganho esperado marginal de utilidade se igualam.

Em síntese, sob as hipóteses assumidas, a equação (1) é a fórmula central de avaliação de ativos. Dadas as expectativas quanto ao resultado do investimento e ao fator estocástico de desconto, indica qual deve ser o preço justo do ativo. A generalização de Câmara (2003) é baseada no mesmo princípio.

3.3 Generalização de Antônio Câmara

Conforme Câmara (2003, p. 805), um resultado fundamental da teoria de avaliação sob incerteza é que os preços de equilíbrio dos ativos dependem da utilidade marginal dos investidores. Contudo, assumindo negociação em tempo discreto e preços com distribuição contínua, Brennan (1979), Câmara (2003) e Rubinstein (1976) obtiveram relações de avaliação risco-neutras (*risk neutral valuation relationships*), ou seja, independentes das preferências a risco dos investidores. Conforme Brennan (1979, p. 53), essas relações constituem elemento central da teoria de precificação de opções. Uma relação de avaliação é uma fórmula que relaciona o valor de um derivativo ao de seu ativo-objeto e de outros parâmetros exógenos. Se a relação de avaliação é risco-neutra, ela é compatível com a premissa de que os investidores são neutros a risco, na qual todos os ativos possuem o mesmo retorno esperado, equivalente à taxa de juros livre de risco. Ainda consoante o autor, relações de avaliação risco-neutras dependem apenas de parâmetros potencialmente observáveis, sendo fato marcante que elas podem ser derivadas a partir de premissas fracas sobre as preferências a risco dos investidores, como ratifica Merton (1973b, p. 161) na epígrafe apresentada no capítulo 4.

Câmara (2003, p. 805) explica que apesar desses resultados parecerem surpreendentes à primeira vista, simplesmente exploram a relação existente entre o derivativo e seu ativo-objeto, na qual o prêmio de risco do ativo-objeto pode ser anulado pelo prêmio de risco do derivativo. O ativo-objeto tem um preço absoluto e os derivativos sobre ele lançados têm preços relativos; em equilíbrio, todos dependem do prêmio de risco do ativo-objeto.

Resumidamente, será demonstrado que o preço de equilíbrio de um ativo-objeto pode ser expresso como função da distribuição da riqueza agregada, da distribuição do próprio

ativo-objeto e das preferências a risco dos investidores. Na verdade, sob um conjunto de hipóteses delimitadoras, esse preço é expresso como função de parâmetros, tais como média, variância e correlação, por meio de uma equação que, nos casos analisados, é inversível, ou seja, os parâmetros podem ser expressos como função do preço atual do ativo-objeto. Fato notável é que o preço de uma opção lançada sobre o ativo-objeto depende desses mesmos parâmetros. Pode-se, então, na equação de precificação da opção, substituí-los por uma função do preço atual do ativo-objeto (conhecido), obtendo-se uma relação de avaliação risco-neutra. A seguir, descrevem-se detalhadamente os passos dessa abordagem de precificação.

Câmara (2003) generalizou os resultados obtidos por Brennan (1979) e Rubinstein (1976) para a precificação de opções, obtendo a fórmula de Black e Scholes sob condições menos restritivas de preferências a risco (utilidade) e distribuições. Seus resultados também permitem obter novas fórmulas fechadas de precificação de opções. Mais especificamente, Câmara (2003) enfoca as condições (que serão descritas) a partir das quais se podem obter soluções fechadas (do tipo do modelo de Black-Scholes) para a precificação de opções.

As principais hipóteses de Câmara (2003, p. 806) em relação a distribuições e preferências são:

- a) as preferências a risco dos agentes econômicos têm representação exponencial (função de utilidade exponencial);
- b) a riqueza agregada da economia e o ativo-objeto possuem distribuição de probabilidade normal transformada, que podem ou não pertencer à mesma família de distribuições.

Segundo Johnson et al. (1994, p. 33), uma distribuição que pode ser transformada numa distribuição normal é aquela que pode ser mapeada, através de uma função ou

mapeamento, na distribuição normal. É a função logaritmo que faz esse mapeamento quando se assume que o ativo-objeto apresenta distribuição lognormal, premissa utilizada por Black e Scholes (1973). É a mesma função logaritmo que faz esse mapeamento quando se assume que o ativo-objeto apresenta distribuição lognormal com assimetria negativa, premissa empregada no modelo alternativo de precificação testado nesta dissertação.

Adicionalmente, Câmara (2003, p. 807) pressupõe mercado com negociação em tempo discreto (compra e venda de ativos não ocorre ininterruptamente) e ativos que apresentam retorno contínuo. Conforme Brennan (1979, p. 52-55), a premissa de que a negociação se dá em tempo discreto, em contrapartida com a de negociação em tempo contínuo, se aproxima mais da realidade, em que os mercados funcionam em horários determinados. Ademais, essa premissa permite a introdução de expectativas heterogêneas (dos agentes econômicos) quanto aos estados futuros da natureza e aos parâmetros das distribuições de preços, eliminando a limitação, presente nos modelos contínuos, de que todos os investidores concordam em relação aos parâmetros de volatilidade instantânea que regem os processos estocásticos dos preços do ativo-objeto e do título livre de risco, como definidos em Merton (1973b, p. 162-164). Já a premissa de retornos contínuos (e distribuições conhecidas) permite a obtenção de fórmulas fechadas de precificação de opções.

Em primeiro lugar, Câmara (2003, p. 807-808) deriva as equações-padrão de precificação de ativos, tanto primitivos como derivativos.

3.3.1 Equações-padrão de precificação de ativos

O autor assume situação de equilíbrio alocaional Pareto ótimo, economia discreta e horizonte de um período, de $t = 0$ a $t = 1$. Stockman (1999, p. 86 e 214) explica que o equilíbrio econômico ocorre quando a quantidade ofertada e a demandada de um bem são iguais. Adicionalmente, aclara que a situação alocaional Pareto ótimo é aquela em que

não é possível promover qualquer mudança na alocação de recursos de modo que pelo menos um agente econômico ganhe e nenhum perca. Segundo Merton (1998, p. 332), a ausência de arbitragem é uma condição necessária ao equilíbrio. Assim, as premissas de Câmara (2003, p. 807-808) pressupõem, indiretamente, ausência de arbitragem e equilíbrio de preços de ativos e derivativos.

Nessas condições, Brennan (1979, p. 56) explica que o problema de agregação (de preferências) no mercado de capitais é resolvido. Mais especificamente, o problema de agregação é resolvido se os preços dos ativos são independentes da alocação de riqueza entre os investidores. O autor elucida que uma das duas condições listadas a seguir é necessária para que se possam agregar as preferências: (i) todos os investidores possuem a mesma aversão a risco (mesma função utilidade) e as mesmas crenças; (ii) ou todos os investidores possuem utilidade com representação exponencial. Como Câmara (2003) assume na derivação de seu modelo que a situação de equilíbrio alocacional de recursos é Pareto ótimo (equilíbrio ótimo, preços bem determinados e independentes da distribuição de riqueza) e os indivíduos possuem utilidade com representação exponencial, ele resolve o problema de agregação de preferências em sua formulação. Conseqüentemente, hipotetiza a existência de um investidor (agente econômico) representativo (de utilidade exponencial), cujo papel é representar, de forma agregada, as preferências de todos os indivíduos na economia. É como se as preferências de todos os indivíduos fossem as mesmas e iguais às desse agente, mesmo que, na realidade, sejam idiossincráticas. Particularmente, esse agente representa como os investidores, de forma agregada, decidem num mundo incerto, isto é, diante de alternativas de investimento com risco.

Nessa situação, o objetivo do investidor representativo é maximizar a utilidade esperada de sua riqueza terminal w_1 , com respeito à medida de probabilidade real P .

Hipoteticamente, a economia é formada por J ativos, sobre cada qual são lançadas K_j opções. Simplificando a notação utilizada por Câmara (2003) e utilizando os conceitos apresentados na dedução da equação (1) no item 3.2, o investidor deve resolver o seguinte problema:

$$\max_{\{\xi\}} E^P[u(w_1)], \text{ sujeito a:}$$

$$w_1 = w_0 e^r + \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{K_j} \mathbf{x}_{jk} [x_{jk} - p_{jk} e^r],$$

onde:

$E[\cdot]$: esperança matemática;

P : medida de probabilidade real;

w_0, w_1 : riqueza agregada inicial, riqueza agregada terminal;

r : taxa de juros livre de risco, de $t = 0$ a $t = 1$;

$\mathbf{x}_{jk}$: unidades compradas da opção k lançada sobre o ativo j ;

x_{jk} : resultado (*payoff*), em $t = 1$, da opção k lançada sobre o ativo j ;

p_{jk} : preço, em $t = 0$, da opção k lançada sobre o ativo j .

Nessa notação, $k = 0$ representa o ativo-objeto; dessa forma:

x_{j0} : preço (aleatório) do ativo-objeto j em $t = 1$;

p_{j0} : preço (conhecido) do ativo-objeto j em $t = 0$.

Vale lembrar que, segundo Merton (1973b, p. 144), “o ativo-objeto é equivalente a uma opção americana perpétua com preço de exercício nulo.” Portanto, a notação acima não deixa de ser consistente. Adicionalmente, enfatiza-se que, salvo menção específica, as esperanças matemáticas que seguem são calculadas em relação à medida de probabilidade real P , informação que será omitida para simplificar a notação.

Nota-se que a decisão do investidor é escolher qual a alocação de recursos que maximiza sua utilidade esperada. Deve decidir quanto comprar de cada opção, isto é, as quantidades

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10} & \cdots & \mathbf{x}_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{J0} & \cdots & \mathbf{x}_{JK} \end{bmatrix}$$

que, em conjunto com as outras variáveis e parâmetros, maximizam sua utilidade esperada um período à frente. Para se encontrar o ponto de máxima utilidade, deve-se derivar a função-objetivo em relação a cada uma das variáveis $\mathbf{x}_{jk}$. De forma análoga ao ilustrado no item 3.2, cada uma das derivadas parciais resulta:

$$E[u'(w_1)[x_{jk} - p_{jk}e^r]] = 0,$$

$$E[u'(w_1)x_{jk}] - p_{jk}e^r E[u'(w_1)] = 0,$$

$$p_{jk} = e^{-r} \frac{E[u'(w_1)x_{jk}]}{E[u'(w_1)]},$$

e, portanto:

$$p_{jk} = e^{-r} E[\psi(w_1)x_{jk}], \quad (2)$$

onde

$$\psi(w_1) = \frac{u'(w_1)}{E[u'(w_1)]}, \quad (3)$$

$\psi(w_1)$: utilidade marginal relativa da riqueza.

A equação (2) implica que o preço de qualquer ativo primitivo ou derivativo da economia pode ser expresso como função da utilidade marginal relativa da riqueza e de seu resultado. O preço de um ativo é a expectativa do seu resultado (futuro, aleatório), ajustado pela distribuição da riqueza agregada (retorno e risco da economia, ou da carteira de

mercado), sob a ótica de um investidor representativo (preferências, utilidade), trazido a valor presente.

Algumas observações devem ser feitas:

- a) todas as esperanças acima foram tiradas com relação à probabilidade real P ;
- b) (2) é uma forma particular de (1), em que a taxa de juros livre de risco é expurgada do fator estocástico de desconto;
- c) $\psi(w_1)$ também é um fator estocástico de desconto; além disso, está implícito na precificação de todos os ativos da economia, é dependente da riqueza agregada e da preferência do investidor.

Para que se obtenha uma fórmula de precificação dependente de variáveis observáveis, o primeiro procedimento que se adota é condicionar a equação (2) a um ativo específico e assumir que a distribuição normal transformada do ativo e a distribuição normal transformada da riqueza agregada têm uma distribuição conjunta conhecida. Esse procedimento também resulta na redução da dimensionalidade do problema de precificação pois, ao invés de se resolver uma integral dupla com respeito à utilidade marginal relativa da riqueza e ao resultado do ativo, se resolve apenas uma integral com respeito ao resultado do ativo.

Nessa linha de raciocínio, utilizando-se a propriedade da torre (*tower property*) da probabilidade condicional, pode-se escrever:

$$p_{jk} = e^{-r} E[\psi(w_1)x_{jk}] = e^{-r} E[E[\psi(w_1) | x_{jk}]x_{jk}],$$

e portanto:

$$p_{jk} = e^{-r} E[\phi(x_{jk})x_{jk}] \quad (4)$$

onde

$$\phi(x_{jk}) = E[\psi(w_1) | x_{jk}], \quad (5)$$

$\phi(x_{jk})$: utilidade marginal relativa da opção k lançada sobre o ativo j .

Deve-se notar a diferença fundamental entre as equações (4) e (2). Enquanto (2) pode ser utilizada para precificar qualquer ativo na economia, (4) só pode ser utilizada para precificar o ativo utilizado no condicionamento de informações. Como os preços de um ativo j e de suas opções dependem do mesmo prêmio de risco, ou seja, do prêmio de j , a função $\phi(x_{jk})$ é a mesma para todas as opções lançadas sobre j . Especificamente, o prêmio de risco de um ativo é quantificado pela distribuição de probabilidade de seus preços; a mesma distribuição é utilizada na precificação do ativo e das opções sobre ele lançadas. A correta combinação de distribuições e preferências a risco faz com que a equação (4) seja uma fórmula fechada de precificação de opções, livre de preferências (risco-neutra). Uma fórmula fechada é aquela em que não há recorrência (dependência de valores que assumiu em instantes anteriores).

Desse ponto em diante, fixa-se um ativo-objeto e analisa-se uma opção qualquer sobre ele lançada. Especificamente, de forma mais simplificada, pode-se escrever:

$$p = e^{-r} E[\phi(x)f(x)], \quad (6)$$

onde

p : preço, em $t = 0$, da opção;

r : taxa de juros livre de risco, de $t = 0$ a $t = 1$;

x : preço (aleatório) do ativo-objeto em $t = 1$;

$f(x)$: resultado aleatório da opção, em $t = 1$, expresso como função de x ;

$\phi(x)$: utilidade marginal relativa do ativo-objeto fixado, bem como das opções sobre ele lançadas.

Para exemplificar o que $f(x)$ representa, no caso de uma opção de compra,

$$f(x) = \text{Max}(0; x - X),$$

onde X é o preço de exercício da opção.

A equação (6) implica que qualquer opção lançada sobre o ativo primitivo fixado pode ser precificada como função de um fator estocástico de desconto, dependente da riqueza agregada terminal (distribuição de w_1), das preferências a risco do investidor representativo (u') e do preço terminal aleatório do ativo-objeto (distribuição de x).

O procedimento adotado acima retrata a parte conceitual mais importante da reconciliação de uma condição de equilíbrio parcial com uma condição de equilíbrio geral. Em última instância, permite que a equação (6) seja escrita somente em função de parâmetros observáveis.

Em seguida, Câmara (2003, p. 808-811) deriva os processos que regem os preços dos estados da natureza.

3.3.2 Processos que regem os preços dos estados da natureza

De acordo com a hipótese de que a riqueza agregada terminal w_1 possui distribuição normal transformada, pode-se escrever:

$$g(w_1) \sim N(\mu_w; \sigma_w^2), \quad (7)$$

onde

g : função de mapeamento da distribuição de w_1 numa distribuição normal;

$N(\mu_w; \sigma_w^2)$: distribuição normal de média μ_w e variância σ_w^2 .

Notação: o símbolo $\sim$, doravante utilizado nas expressões do tipo $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, significa que a variável aleatória X possui distribuição normal de média μ e variância σ^2 .

Por hipótese, g é estritamente monotônica e diferenciável. A primeira condição, monotonicidade estrita, é necessária para garantir a correspondência biunívoca entre os valores de riqueza e de sua distribuição normal transformada. Diferenciabilidade permite que se obtenha a função densidade de probabilidade transformada da variável aleatória. No apêndice A, esse procedimento é detalhado para o caso em que a variável é lognormal.

Genericamente, conforme Câmara (2003, p. 808-809), a função densidade de probabilidade transformada de uma variável aleatória X , que possui mapeamento $g(X) \sim N(\mu; \sigma^2)$, é dada por:

$$h(X : g; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} |g'(X)| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (g(X) - \mu)^2\right), \quad (8)$$

onde $h(X : g; \mu; \sigma^2)$ é a função densidade de probabilidade (transformada) de X , definida pela função de mapeamento g e pelos parâmetros de locação μ e escala σ ;

$\exp(\cdot)$: exponencial de um número, isto é, $\exp(a) = e^a$.

Os parâmetros de locação e escala da distribuição normal transformada de X são, respectivamente, a média e o desvio-padrão da distribuição normal do mapeamento $g(X)$. O autor salienta que “A média e a variância da variável aleatória X são, em geral, função dos parâmetros μ e σ .” Esse fato é evidenciado nas expressões finais da média e da variância de uma variável lognormal (g é a função logaritmo), deduzidas no apêndice A.

Pela hipótese de que as preferências a risco dos indivíduos (e a do investidor representativo) possuem representação exponencial, escreve-se:

$$u'(w) = \exp(\gamma_w g(w)), \quad (9)$$

onde

w : riqueza agregada ao final de um intervalo temporal qualquer;

γ_w : parâmetro de curvatura da função utilidade, assumido constante;

g : é a mesma função de transformação da riqueza agregada utilizada em (7).

Nota-se que, nessa formulação, o investidor pode ter aversão, neutralidade ou propensão a risco, já que não se assume de antemão nada a respeito dos sinais de γ_w e $g'(w)$. Portanto, pode-se ter $u''(w) < 0$ (aversão a risco), $u''(w) = 0$ (neutralidade a risco) ou $u''(w) > 0$ (propensão a risco). Funções de utilidade e suas propriedades são descritas por Clemen e Reilly (2001, p. 530), Copeland e Weston (1988, p. 85-90), Elton e Gruber (1997, p. 226-228) e Luenberger (1998, p. 228-234).

O fato de g ser a mesma nas equações (7) e (9) é extremamente relevante na formulação. Essa hipótese implica que a utilidade marginal do investidor é função da distribuição transformada da riqueza agregada (satisfação do investidor depende do estado geral da economia). Além disso, implica que o logaritmo da utilidade marginal (representação exponencial) sempre terá distribuição normal. É através de g que se estabelece uma relação entre os estados da riqueza agregada, a satisfação dos investidores e o resultado aleatório do ativo precificado, todos eles relevantes à equação (6).

Muitas das relações matemáticas obtidas deste ponto em diante advêm diretamente dos resultados demonstrados no apêndice A: se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então $\exp(X)$ é lognormal, de média e variância dadas, respectivamente, por

$$\left(\exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right); \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) \right).$$

Com esse conhecimento, pode-se deduzir as características da distribuição da utilidade marginal relativa da riqueza, expressa na equação (3).

De (7) e (9) vem que

$$\ln u'(w_1) \sim N(\gamma_w \mu_w; \gamma_w^2 \sigma_w^2),$$

portanto

$$E[u'(w_1)] = \exp(\gamma_w \mu_w + \frac{1}{2} \gamma_w^2 \sigma_w^2). \quad (10)$$

De (3), (9) e (10) vem que

$$\psi(w_1) = \frac{u'(w_1)}{E[u'(w_1)]} = \exp\left(\gamma_w g(w_1) - \gamma_w \mu_w - \frac{1}{2} \gamma_w^2 \sigma_w^2\right),$$

e assim:

$$\ln(\psi(w_1)) \sim N\left(-\frac{1}{2} \gamma_w^2 \sigma_w^2; \gamma_w^2 \sigma_w^2\right). \quad (11)$$

A equação acima implica que a utilidade marginal relativa da riqueza segue uma distribuição lognormal, de parâmetros dependentes do risco da riqueza agregada (σ_w), ajustado pelas preferências a risco do agente (ou investidor) representativo (γ_w). Deve-se lembrar que a utilidade marginal da riqueza é utilizada na equação (2) (equação de preços) para descontar o valor do resultado aleatório do ativo. Percebe-se que esse desconto é diretamente relacionado ao risco da economia e às preferências a risco do investidor. Consoante Câmara (2003, p. 810), o fator $-\gamma_w \sigma_w$ é conhecido como preço do risco de mercado (*market price of risk*).

A partir de (11), é possível calcular a média e a variância da utilidade marginal da riqueza: $\psi(w_1)$ é lognormal, de média e variância dadas, respectivamente, por

$$(1; \exp(\gamma_w^2 \sigma_w^2) - 1).$$

Ou seja, a esperança do fator estocástico de desconto que é aplicado no resultado dos ativos é 1. Sua variância é função da variância da riqueza agregada e das preferências a risco do investidor representativo.

Como exemplo, pode-se aplicar esse resultado na determinação do preço atual de um título livre de risco. Simplificando-se a equação (2), o preço de um ativo é dado por:

$$p = e^{-r} E[\psi(w_1)x] = e^{-r} \{E[\psi(w_1)]E[x] + Cov[\psi(w_1); x]\},$$

onde

p : preço, em $t = 0$, de um ativo qualquer;

r : taxa de juros livre de risco, de $t = 0$ a $t = 1$;

w_1 : riqueza agregada terminal;

x : preço (aleatório) do ativo em $t = 1$;

$\psi(w_1)$: utilidade marginal relativa da riqueza agregada;

$Cov[\psi(w_1); x]$: covariância entre $\psi(w_1)$ e x .

Nesse exemplo, baseado em Cochrane (2001, p. 10-19), por hipótese, o resultado do ativo livre de risco é 1 em $t = 1$, qualquer que seja o estado da natureza. Sendo assim, $E[x] = 1$. Da equação (11), concluiu-se que $E[\psi(w_1)] = 1$. Lembrando-se que a covariância do ativo livre de risco com qualquer outro ativo é nula por definição, tem-se:

$$p = e^{-r} \{E[\psi(w_1)]E[x] + Cov[\psi(w_1); x]\} = e^{-r} \times \{1 \times 1 + 0\} = e^{-r}.$$

Como era de se esperar, o preço atual do título livre de risco, que paga uma unidade monetária independentemente do estado da natureza, é o próprio fator de desconto da taxa de juros livre de risco. Esse exemplo ilustra a aplicação dos conceitos expostos em um caso simples. Ademais, atesta a robustez e coerência dos resultados obtidos na manipulação das distribuições das variáveis econômicas analisadas.

De acordo com as premissas elaboradas, as distribuições normais transformadas do ativo-objeto e da riqueza agregada seguem uma distribuição normal conjunta (nesse caso, bivariada). Esse procedimento consiste no primeiro passo para se expressar o preço da opção somente em função de parâmetros do ativo-objeto. Os principais conceitos relacionados a uma distribuição conjunta e necessários ao entendimento das resoluções a seguir são apresentados no apêndice D.

Dada a hipótese acima de distribuição normal conjunta e levando-se em conta a hipótese inicial de que o ativo-objeto, de resultado aleatório x em $t = 1$, tem distribuição normal transformada dada por

$$g_1(x) \sim N(\mu; \sigma^2),$$

pode-se escrever:

$$(g(w_1); g_1(x)) \sim N(\mu_w; \mu; \sigma_w^2; \sigma^2; \rho),$$

onde

x : preço (aleatório) do ativo-objeto em $t = 1$;

w_1 : riqueza agregada terminal;

g : função de mapeamento da distribuição de w_1 numa distribuição normal;

g_1 : função de mapeamento da distribuição de x numa distribuição normal;

ρ : correlação entre as distribuições normais transformadas da riqueza agregada e do ativo-objeto;

$N(\mu_w; \mu; \sigma_w^2; \sigma^2; \rho)$: distribuição normal bivariada, cujas variáveis têm distribuições normais de parâmetros $N(\mu_w; \sigma_w^2)$ e $N(\mu; \sigma^2)$, e correlação ρ .

Por hipótese, g_1 é estritamente monotônica e diferenciável.

Consoante Câmara (2003, p. 818), no caso de uma distribuição normal bivariada, é possível escrever a seguinte regressão linear:

$$\gamma_w g(w_1) = a + b g_1(x) + \varepsilon, \quad (12)$$

onde

$\varepsilon \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2)$, com distribuição independente de g_1 ; a e b são constantes.

Conforme Johnson e Wichern (2002, p. 156), qualquer combinação linear de variáveis que possuem distribuição normal conjunta é normal. Assim, na verdade, a

regressão linear é um caso específico de combinação linear das duas variáveis em que o termo de erro ε (que possui distribuição normal) tem média esperada zero e variância esperada mínima.

De (12), vem

$$E[\gamma_w g(w_1)] = \gamma_w \mu_w = a + b\mu \text{ e } Var[\gamma_w g(w_1)] = \gamma_w^2 \sigma_w^2 = b^2 \sigma^2 + \sigma_\varepsilon^2,$$

onde $Var[\cdot]$ representa a variância da variável nos colchetes.

Nas expressões acima, podem-se isolar a e σ_ε^2 em função das demais variáveis.

Utilizam-se as expressões resultantes no condicionamento de informações, como segue:

$$E[\gamma_w g(w_1) | x] = a + bg_1(x) = \gamma_w \mu_w - b\mu + bg_1(x),$$

$$Var[\gamma_w g(w_1) | x] = \sigma_\varepsilon^2 = \gamma_w^2 \sigma_w^2 - b^2 \sigma^2.$$

Ou seja,

$$E[\gamma_w g(w_1) | x] \sim N(\gamma_w \mu_w - b\mu + bg_1(x); \gamma_w^2 \sigma_w^2 - b^2 \sigma^2).$$

Com base na equação acima e lembrando que, pela equação (9)

$$\exp(\gamma_w g(w_1)) = u'(w_1),$$

pode-se escrever,

$$E[\exp(\gamma_w g(w_1) | x)] = E(u'(w_1) | x) = \exp(\gamma_w \mu_w - b\mu + bg_1(x) + \frac{1}{2}(\gamma_w^2 \sigma_w^2 - b^2 \sigma^2)). \quad (13)$$

Utilizando os resultados de (3), (5), (10) e (13), pode-se escrever:

$$\phi(x) = E\left[\frac{u'(w_1) | x}{E[u'(w_1)]}\right] = \exp(-b\mu + bg_1(x) - \frac{1}{2}b^2 \sigma^2). \quad (14)$$

De (12), sabe-se que

$$\text{Cov}[\gamma_w g(w_1); b g_1(x)] = b \sigma^2,$$

portanto:

$$b = \gamma_w \rho \sigma_w / \sigma.$$

Após substituir b em (14), a equação fica:

$$\phi(x) = \exp\left(-\gamma_w \rho \frac{\sigma_w}{\sigma} \mu + \gamma_w \rho \frac{\sigma_w}{\sigma} g_1(x) - \frac{1}{2} \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2\right). \quad (15)$$

Ou seja, a utilidade marginal relativa de um ativo-objeto específico $\phi(x)$ é função dos parâmetros das distribuições transformadas da riqueza agregada e do próprio ativo.

De (15), percebe-se que

$$\ln(\phi(x)) \sim N\left(-\frac{1}{2} \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2; \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2\right). \quad (16)$$

Em outras palavras, a utilidade marginal relativa de um ativo-objeto específico (que é a expectativa da utilidade marginal da riqueza a ele condicionada) possui distribuição lognormal. Nota-se que o resultado acima ainda é dependente de preferências.

A partir de (16), é possível calcular a média e a variância da utilidade marginal relativa de um ativo-objeto específico: $\phi(x)$ é lognormal, de média e variância dadas, respectivamente, por

$$\left(1; \exp(\gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2) - 1\right).$$

Ressalta-se que a única diferença dos parâmetros de média e variância das distribuições de $\phi(x)$ e $\psi(w_1)$ está no coeficiente de correlação ρ , presente na variância. Esse parâmetro quantifica o risco sistemático (não diversificável) do ativo, à luz das preferências a risco do investidor representativo, representadas pelo parâmetro γ_w .

Por sua vez, é importante notar que as utilidades marginais relativas esperadas da riqueza $E[\psi(w_1)]$, e de um ativo-objeto específico $E[\phi(x)]$, são iguais a um. Esse resultado já era esperado, pois advém da condição de maximização de utilidade esperada, que ocorre quando a perda esperada de utilidade, decorrente de decréscimo de riqueza disponível em consequência de um investimento, capitalizada pela taxa de juros livre de risco, deve ser inteiramente compensada pelo ganho esperado de utilidade por acréscimo de riqueza no futuro.

É fácil perceber essa consequência no caso mais simples, de investimento no ativo livre de risco, em que o resultado aleatório da opção $f(x)$ é, por exemplo, constante e unitário. Assim:

$$f(x) = x = 1.$$

Nesse caso, pode-se escrever a equação (6) como:

$$p = e^{-r} E[\phi(x)f(x)] = e^{-r} E[\phi(x)],$$

onde

p é o preço atual do ativo livre de risco e $pe^r = 1$.

Das equações (3) e (5), sabe-se que

$$\phi(x) = E\left[\frac{u'(w_1) | x}{E[u'(w_1)]}\right].$$

Assim,

$$pe^r = E[\phi(x)] = E\left[E\left[\frac{u'(w_1) | x}{E[u'(w_1)]}\right]\right] = E\left[\frac{u'(w_1)}{E[u'(w_1)]}\right] = E[\psi(w_1)] = 1,$$

ou, ainda,

$$pe^r E[u'(w_1)] = E[u'(w_1)].$$

A equação acima postula que a perda esperada de utilidade, por cada unidade monetária investida no ativo livre de risco (lado esquerdo da equação), deve ser inteiramente compensada pelo ganho esperado de utilidade proporcionado pelo investimento no ativo escolhido (lado direito da equação). Essa interpretação complementa o exemplo dado sobre determinação do preço de um ativo livre de risco.

O conhecimento de $\phi(x)$ permite a determinação teórica dos preços dos estados da natureza, condicionados ao ativo (primitivo) escolhido. Esses preços são determinados pelo produto da utilidade marginal relativa do ativo-objeto específico pela sua densidade de probabilidade (transformada). Segundo Aït-Sahalia e Lo (1998, p. 499-505), no caso contínuo, os preços dos estados da natureza recebem o nome especial de densidade de preço de estado. Essa densidade pode ser utilizada na precificação do ativo-objeto (primitivo) escolhido ou qualquer uma de suas opções. A integral do produto dessa densidade pela função de resultado, $f(x)$, fornece o preço da opção corrigido para seu prêmio de risco. Por fim, descontado-se esse valor pela taxa de juros livre de risco, obtém-se o preço de equilíbrio da opção. Esse procedimento é o passo final da abordagem de precificação, e é descrito a seguir.

Por (6), a precificação de uma opção pode ser efetuada da seguinte forma:

$$p = e^{-r} E[\phi(x)f(x)] = e^{-r} \int \phi(x)f(x)h(x)dx, \quad (17)$$

onde

$h(x)$: densidade de probabilidade de x .

Uma vez que, pelas hipóteses iniciais, x tem distribuição normal transformada, de (8) sabe-se que $h(x)$ é da forma:

$$h(x) = h(x; g_1; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} |g_1'(x)| \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(g_1(x) - \mu)^2\right),$$

onde $h(x : g_1; \mu; \sigma^2)$ é a função densidade de probabilidade transformada de x , definida por g_1, μ e σ^2 .

O próximo resultado demonstra que o produto da utilidade marginal relativa de um ativo-objeto específico pela sua densidade de probabilidade transformada é da mesma família que essa última, com a diferença de que o parâmetro de locação μ é ajustado pelo fator $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$. Essa correção é função do risco específico do ativo e das preferências a risco do investidor. Matematicamente, será demonstrado que:

$$\phi(x)h(x : g_1; \mu; \sigma^2) = h(x : g_1; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma^2).$$

Para tanto, a equação (15), $\phi(x)$, pode ser modificada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \exp\left(-\gamma_w \rho \frac{\sigma_w}{\sigma} \mu + \gamma_w \rho \frac{\sigma_w}{\sigma} g_1(x) - \frac{1}{2} \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2 \sigma^2\right), \\ \phi(x) &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (2\gamma_w \rho \sigma_w \sigma \mu - 2\gamma_w \rho \sigma_w \sigma g_1(x) + \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2 \sigma^2)\right\}, \\ \phi(x) &= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[-2\gamma_w \rho \sigma_w \sigma (g_1(x) - \mu) + \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2 \sigma^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Com isso, o produto $\phi(x)h(x : g_1; \mu; \sigma^2)$ fica:

$$\phi(x)h(x : g_1; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} |g_1'(x)| \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(g_1(x) - \mu)^2 - 2\gamma_w \rho \sigma_w \sigma (g_1(x) - \mu) + \gamma_w^2 \rho^2 \sigma_w^2 \sigma^2\right]\right\}.$$

Após fatorar o quadrado perfeito do expoente, a expressão final é:

$$\phi(x)h(x : g_1; \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} |g_1'(x)| \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [(g_1(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma)^2]\right\}, \text{ c.q.d.}$$

A função $h(x : g_1; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma^2)$ obtida é a densidade transformada de preço de estado (*state-price density*), que é própria de cada ativo-objeto (ou ativo primitivo) e é utilizada na precificação de todas as opções sobre ele lançadas.

Deve-se notar que a densidade transformada de preço de estado é a densidade transformada original com o parâmetro de locação corrigido para a covariância entre o ativo-objeto e a riqueza agregada $\rho\sigma_w\sigma$, ponderada pelas preferências a risco do investidor γ_w .

Portanto, a equação (17) pode ser escrita como:

$$p = e^{-r} \int f(x) h(x; g_1; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma^2) dx. \quad (18)$$

A equação (18) implica que o preço de qualquer opção p lançada sobre um ativo-objeto de preço futuro incerto x é dado pela esperança do produto do resultado dessa opção no vencimento $f(x)$ pela densidade transformada de preço de estado. Deve-se lembrar que essa equação vale, inclusive, para a precificação do ativo-objeto, caso em que $f(x) = x$. Como mencionado, o ativo-objeto é equivalente a uma opção americana perpétua com preço de exercício nulo.

Nesse modelo de precificação, é importante compreender a relação existente entre o preço da opção p , a correlação entre as distribuições transformadas do preço do ativo-objeto e da riqueza agregada ρ , e as preferências a risco do investidor representativo u' . Essa compreensão permite inferir como os preços de equilíbrio são afetados por mudanças nas expectativas dos investidores quanto ao desempenho do ativo em relação ao restante da economia (riqueza agregada), bem como por mudanças nas preferências a risco. Pela equação (9), sabe-se que

$$u'(w_1) = \exp(\gamma_w g(w_1)),$$

onde

w_1 : riqueza agregada ao final de um intervalo temporal qualquer;

γ_w : parâmetro de curvatura da função utilidade, assumido constante;

g : é a mesma função de transformação da riqueza agregada utilizada em (7).

Como mencionado no item 2.3.1, para um investidor ambicioso (não saciado), $u'(w_1)$ é sempre positiva, o que implica que maior riqueza traz maior satisfação (possui maior utilidade). Para um investidor averso ao risco, $u''(w_1) < 0$. Derivando a expressão acima em relação à riqueza agregada w_1 , obtém-se

$$u''(w_1) = \gamma_w g'(w_1) \exp(\gamma_w g(w_1)).$$

$u''(w_1) < 0$ quando γ_w ou $g'(w_1)$ é negativo, mas não ambos. Por hipótese, $g(w_1)$ é estritamente monotônica, assim $g'(w_1)$ é sempre negativa ou sempre positiva para qualquer valor de w_1 no domínio definido (não há troca de sinal). Se $g'(w_1) > 0$, então $\gamma_w < 0$ (mais adiante ficará claro que se $g'(w_1) < 0$ e $\gamma_w > 0$, a conclusão final não se altera).

O sinal do termo $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ ainda depende do sinal da correlação ρ entre $g(w_1)$ e $g(x)$ (os desvios σ_w e σ são positivos). Por hipótese, $g(x)$ é estritamente monotônica, e assim $g'(x)$ é sempre negativa ou sempre positiva para qualquer valor de x . Da mesma forma que acima, assume-se que $g'(x) > 0$ (sem prejuízo para a conclusão final).

Há três possibilidades: $\rho > 0$, $\rho = 0$ ou $\rho < 0$. Quando $\rho = 0$, o termo $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ é zero. Ou seja, simplesmente não há ajuste no parâmetro μ . Isto é:

$$\phi(x) h(x; g_1; \mu; \sigma^2) = h(x; g_1; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma^2).$$

Economicamente, esse resultado implica que o ativo-objeto não possui risco sistemático, mas apenas risco idiossincrático (suas opções também). Nesse caso, não há prêmio de risco cobrado pelo ativo (nem por suas opções) e a taxa utilizada no desconto do resultado (aleatório) $f(x)$ é a taxa de juros livre de risco. Inversamente, o preço esperado do ativo-objeto é seu preço atual capitalizado por essa taxa.

Nos outros dois casos, supõe-se que $f'(x)$, quando existir, é não negativa em todos os pontos de seu domínio, e estritamente positiva em pelo menos algum intervalo de seu domínio. Uma opção de compra, de preço de exercício X , se enquadra nesse perfil. Por exemplo, em seu vencimento:

$$\begin{cases} x > X \rightarrow f'(\max(0; x - X)) = 1 \\ x < X \rightarrow f'(\max(0; x - X)) = 0 \\ x = X \rightarrow f'(\max(0; x - X)) \text{ não é definida} \end{cases}$$

Sob esse conjunto de hipóteses, se $\rho > 0$, sabendo-se que $\gamma_w < 0$, o termo $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ possui sinal negativo. Pela equação (18), reproduzida novamente abaixo,

$$p = e^{-r} \int f(x) h(x; g_1; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma) dx$$

percebe-se que p também sofrerá redução (em relação a p quando $\rho = 0$). Isso significa que uma opção lançada sobre um ativo-objeto que possui correlação positiva com a riqueza agregada – isto é, um ativo-objeto que vai bem quando a economia vai bem e vai mal quando a economia vai mal – possui um prêmio de risco positivo em relação à taxa de juros livre de risco. Traçando-se um paralelo com o CAPM, essa opção possui beta (β) positivo.

Se $\rho < 0$, sabendo-se que $\gamma_w < 0$, o termo $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ possui sinal positivo. Nesse caso, percebe-se que p também sofrerá acréscimo (em relação a p quando $\rho = 0$). Isso mostra que uma opção lançada sobre um ativo-objeto que possui correlação negativa com a riqueza agregada – isto é, um ativo que vai bem quando a economia vai mal e vai mal quando a economia vai bem – possui um prêmio de risco negativo em relação à taxa de juros livre de risco. Na verdade, essa opção oferece um *hedge* contra oscilações adversas na economia e, por isso, a taxa pela qual seu resultado deve ser descontado é menor que a

taxa de juros livre de risco. Traçando um paralelo com o CAPM, essa opção possui beta (β) negativo. Merton (1973a) foi quem demonstrou pela primeira vez a relação entre o prêmio de risco de um ativo *vis-à-vis* sua correlação com a riqueza agregada. Cochrane (2001, p. 15-17), num arcabouço mais restrito que o de Câmara (2003), faz uma demonstração conceitualmente similar à apresentada acima, assumindo função de utilidade potência, ao invés de utilidade com representação exponencial.

Caso $f'(x)$ exista, seja não positiva em todos os pontos de seu domínio e estritamente negativa em pelo menos algum intervalo de seu domínio, como numa opção de venda, a análise anterior deve ser invertida.

Para um investidor propenso a risco, $u''(w) > 0$, as duas últimas conclusões são invertidas. Interessante notar que, nesse caso, o prêmio de risco recai justamente sobre a opção que oferece *hedge* contra choques adversos. O investidor propenso a risco não atribui tanto valor ao *hedge*. Por fim, para um investidor neutro a risco, $u''(w) = 0$, o parâmetro de curvatura da função utilidade γ_w é nulo e a análise se dá similarmente ao caso em que $\rho = 0$, ou seja, não há correção para risco. Para esse investidor, o retorno esperado de qualquer ativo é igual à taxa de juros livre de risco.

Complementando o raciocínio acima, deve-se notar que se $g'(w_1) < 0$ e $\gamma_w > 0$, e/ou $g'(x) < 0$, as conclusões acima não se alteram. Por exemplo, para um investidor averso a risco, assumindo-se $g'(w_1) < 0$, automaticamente $\gamma_w > 0$. Como na análise anterior, pressupõe-se $g'(x) > 0$ e $f'(x) > 0$. Nesse caso, uma opção lançada sobre um ativo que vai bem quando a economia vai mal e vice-versa possui resultado negativamente correlacionado com a riqueza agregada. Porém, a correlação que afeta a equação (18) é aquela entre as distribuições transformadas do ativo-objeto e da riqueza agregada, que será

positiva, pois assumiu-se que $g'(w_1) < 0$ e $g'(x) > 0$. Assim, o termo $\gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ possui sinal positivo e o preço da opção lançada sobre esse ativo será acrescido, como na análise anterior. Conclui-se que, qualquer que seja o caso, o investidor averso a risco aceita um retorno menor que a taxa de juros livre de risco de um ativo que oferece *hedge* contra choques econômicos adversos e demanda um retorno maior que a mesma em caso contrário.

3.3.3 Obtenção da relação de avaliação risco-neutra

A partir da equação (18), é possível obter relações de avaliação risco-neutras. Para tanto, basta que se expresse o parâmetro de locação $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ em função do preço atual do ativo-objeto e depois se substitua a expressão obtida na equação de precificação da opção. Esse procedimento, que será descrito a seguir, elimina as preferências a risco da fórmula de precificação.

Conhecendo-se a expressão geral da densidade transformada de preço de estado, dada pela equação (8), a equação (18) pode ser escrita como:

$$p = \frac{e^{-r}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} f(x) g_1'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2 \right\} dx, \quad (19)$$

onde g_1^{-1} é a função inversa de g_1 .

A equação (19) será especializada para a precificação de um ativo-objeto de preço atual conhecido S . Nesse caso, $f(x) = x$ e a equação fica:

$$S = \frac{e^{-r}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} x g_1'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2 \right\} dx. \quad (20)$$

A equação (20) depende das preferências a risco do investidor. Se a esperança (dada pela integral) puder ser expressa como função do parâmetro de locação, e se essa função for inversível, de forma que $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ possa ser escrito em função de S , as preferências

a risco poderão ser eliminadas da equação (19). Em outras palavras, se o parâmetro $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ puder ser extraído da equação (20) como função de S e substituído em (19), obter-se-á uma relação de avaliação risco-neutra. Essa seqüência é ilustrada abaixo:

$$\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma = f_1(S),$$

$$p = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} f(x) g_1'(x) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(x) - f_1(S)]^2\right\} dx, \quad (21)$$

$$p = e^{-r} E^Q[f(x)], \quad (22)$$

onde

$f_1(S)$: função do preço atual (conhecido) do ativo-objeto;

Q : medida de probabilidade risco-neutra.

A densidade de probabilidade transformada risco-neutra, assim chamada pois não envolve os parâmetros de preferências a risco, possui apenas o parâmetro de locação diferente daquele da densidade de probabilidade transformada real do ativo-objeto. Das equações (20) e (21), nota-se que:

$$Se^r = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} x g_1'(x) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(x) - f_1(S)]^2\right\} dx. \quad (23)$$

A equação (23) implica que o valor esperado do ativo-objeto é seu preço atual capitalizado pela taxa de juros livre de risco, resultado condizente com a hipótese de neutralidade a risco, na qual o retorno esperado de todos os ativos é igual à mesma.

A metodologia apresentada será utilizada para derivar os modelos de Black e de Câmara.

3.4 Considerações sobre a generalização de Antônio Câmara

Câmara (2003, p. 806) enfatiza que os resultados obtidos em seu artigo são importantes porque é crescente o interesse acadêmico na relação entre a função utilidade dos agentes econômicos e a distribuição de retornos dos ativos. O autor ainda destaca que é relevante analisar sob quais combinações de preferências a risco e distribuições os modelos existentes são válidos e/ou novas fórmulas fechadas podem ser obtidas. Um melhor entendimento das condições em que os modelos são válidos pode sugerir que sua aplicabilidade é maior do que se acredita. A derivação de novas fórmulas fechadas de precificação aumenta o leque de ferramentas práticas à disposição dos estudiosos e/ou negociadores de opções e tem o potencial de tornar o processo de precificação mais eficiente. Além disso, é importante obter fórmulas específicas de precificação de opções quando alguma informação sobre a distribuição real de preços do ativo-objeto, como características assimetria e curtose, sugere que a mesma não é bem aproximada por uma distribuição lognormal, pois os modelos assim obtidos podem reduzir os vieses conhecidos do modelo de Black-Scholes e de suas extensões. Destaca-se que Johnson et al. (1994, p. 43-50) demonstram que se pode obter uma distribuição normal transformada para quaisquer pares possíveis de assimetria e curtose, conhecimento que torna a abordagem desenvolvida por Câmara (2003) ainda mais promissora.

O sentimento de que é relevante reconciliar modelos existentes com preferências a risco e distribuições é também compartilhado por outros pesquisadores, inclusive de outras linhas de pesquisa em Finanças. Em particular, Markowitz (1991, p. 475) coloca que uma caracterização mais sistemática das funções de utilidade e das distribuições para as quais seus critérios de aproximação por média-variância são bons, ruins ou irrelevantes seria extremamente oportuna.

Em suma, Câmara (2003) demonstra que, em equilíbrio, para compensar o risco, certas combinações de preferências a risco e distribuições movem a locação da função densidade de probabilidade normal transformada do ativo-objeto, mantendo inalteradas suas demais características. Utilizando o preço de equilíbrio (baseado na utilidade esperada) do ativo-objeto, demonstra como é possível eliminar os parâmetros de preferências da fórmula final de precificação da opção. O preço da opção é então dado pelo valor esperado de seu resultado, calculado em relação à densidade de probabilidade transformada risco-neutra do ativo-objeto e descontado pela taxa de juros livre de risco. Dessa forma, o autor generaliza as condições a partir das quais modelos existentes de precificação de opções podem ser obtidos, e abre caminho para que novos modelos de precificação, baseados em relações de avaliação neutras ao risco, sejam elaborados e testados.

4 MODELOS DE BLACK-SCHOLES E CÂMARA

“An exact formula for an asset price, based on observable variables only, is a rare finding from a general equilibrium model, and care should be taken to analyze the assumptions with Occam’s razor to determine which ones are necessary to derive the formula.”

(MERTON, 1973b, p. 161)

4.1 Modelo de Black-Scholes

Segundo Scholes (1997, p. 130), sua pesquisa em opções foi influenciada principalmente por conceito de arbitragem, hipótese de mercado eficiente e CAPM, conceitos já discutidos nesta pesquisa. Sua idéia inicial era determinar o preço livre de arbitragem de uma opção que deveria ser coerente com o CAPM e, portanto, consistente com a hipótese de mercado eficiente. Em outras palavras, sua principal intuição foi que ativos de mesmo risco têm que apresentar o mesmo retorno para prevenir arbitragem e lucro certo.

Bernstein (1996, p. 315) assevera que a pesquisa de Black e Scholes (1973) é uma das mais influentes já publicadas nos campos de economia ou finanças. Merton (1998, p. 323) afirma que “o desenvolvimento de maior impacto na prática de Finanças foi o modelo de Black-Scholes para precificação de opções.” A Academia Real de Ciências da Suécia reconheceu o impacto do modelo no mundo das finanças e agraciou Myron Scholes e Robert Merton com o Prêmio Nobel de Economia de 1997 (Fisher Black faleceu em 1995, caso contrário teria sido laureado).

O modelo de Black-Scholes e suas extensões, tais como o modelo de Black, podem ser obtidos por três formas distintas. A primeira é pela resolução de uma equação diferencial parcial, sujeita a condições de contorno (valor da opção no vencimento), como fizeram os pioneiros Black e Scholes (1973). Essa metodologia é bem descrita por Wilmott (1998, p. 81-98), que ilustra inclusive a expansão em série de Fourier utilizada pelos

pesquisadores para solucionar tal equação. Mais especificamente, Black e Scholes (1973) serviram-se de um raciocínio que se tornou fundamental na precificação de derivativos: o de que é possível montar uma carteira livre de risco combinando-se opções de compra e ações do ativo subjacente. Essa carteira, negociada em tempo contínuo, deve conter posições contrárias em ações e opções, na razão tal que oscilações nas opções sejam perfeitamente contrabalançadas por oscilações de natureza contrária nas ações. Segundo Merton (1973b), na prática Black e Scholes (1973) assumiram que a correlação entre a ação e a opção de compra é perfeita e positiva (igual a um). Se o mercado está em equilíbrio (preços dos ativos), o retorno de tal carteira deve ser igual ao do ativo livre de risco; caso contrário, há oportunidades de arbitragem e ganho certo. A partir dessa idéia, Black e Scholes (1973) obtiveram a equação diferencial parcial mencionada, cuja solução é o consagrado modelo.

A segunda é pela abordagem de martingais, desenvolvida por Harrison e Kreps (1979). Conforme Dimson e Mussavian (1999, p. 1.762) e Jarrow (1999, p. 237), esses autores desenvolveram uma teoria geral de precificação de direitos contingentes que conciliou, sob a mesma égide, uma seqüência de contribuições importantes, todas fundamentadas na utilização da medida de probabilidade risco-neutra na precificação de derivativos. Dentre as mesmas, merecem destaque especial as feitas por Cox e Ross (1976) e Ross (1978). Jarrow (1999, p. 237) afirma que a abordagem de martingais formalizou os fundamentos matemáticos utilizados na precificação de derivativos, sobretudo os conceitos de ausência de arbitragem e de mercado completo. O autor aclara que, essencialmente, o conceito de não arbitragem implica que os preços dos ativos estão propriamente determinados e o de mercado completo garante que a medida de probabilidade risco-neutra é única, e que portanto o preço de um derivativo é singular. Isto é, só há um preço para o derivativo que é consistente com os preços dos ativos utilizados em sua construção, os

quais, pela condição de não-arbitragem, estão em equilíbrio. Baxter e Rennie (2003, p. 83-91) e Neftci (2000, p. 353-358) descrevem muito bem essa metodologia.

A terceira é partindo de condições gerais de equilíbrio e tempo discreto, como a abordagem descrita no capítulo 3. Essa é a abordagem-foco deste trabalho e, portanto, será utilizada a seguir na obtenção do modelo. Brennan (1979) e Rubinstein (1976) foram os idealizadores dessa metodologia. Fato marcante é que Rubinstein (1976, p. 408) expressa surpresa ao obter o modelo de Black-Scholes num arcabouço de negociação em tempo discreto, marcada pela impossibilidade de se criar o *hedge* perfeito, caracterizado por um ajuste contínuo que mantém o risco da carteira de ações e opções nulo até o vencimento destas últimas. Na verdade, esta terceira forma de precificação de derivativos resulta na abordagem de martingais quando a combinação de preferências a risco e distribuições leva à obtenção de uma relação de avaliação risco-neutra. A surpresa de Rubinstein (1976) se deveu ao fato de que, à época, a abordagem de martingais ainda não havia sido desenvolvida; conseqüentemente, a obtenção do modelo de Black-Scholes num contexto de tempo discreto era inesperada.

4.1.1 Derivação do modelo de Black-Scholes

As deduções que seguem mantêm a hipótese de horizonte de um período, feita no capítulo 3. Deve ficar claro que se pode fazer esse período arbitrariamente curto ou longo; conseqüentemente, os resultados que serão apresentados são válidos para qualquer horizonte de avaliação.

Black e Scholes (1973, p. 640) assumem que o preço do ativo-objeto segue um movimento browniano geométrico. Conforme as demonstrações contidas no apêndice C, tal premissa implica que o preço do ativo x , em qualquer intervalo de tempo, segue uma distribuição lognormal.

Logo:

$$g_1(x) = \ln(x) \sim N(\mu; \sigma^2).$$

Para a utilização da abordagem de Câmara, como apresentado no capítulo 3, além da hipótese sobre a distribuição dos preços do ativo-objeto, são necessárias hipóteses sobre a distribuição da riqueza agregada e sobre as preferências a risco do investidor agregado. Câmara (2003, p. 817) afirma que “Quando os preços do ativo-objeto são lognormalmente distribuídos, o modelo de Black-Scholes pode ser obtido com diferentes pares de distribuição de riqueza agregada e preferências a risco.” Na derivação a seguir, para que a aplicação da abordagem de Câmara (2003) seja ilustrada em um caso específico de distribuição da riqueza agregada e preferências a risco, adotam-se as mesmas premissas do pioneiro Rubinstein (1976, p. 416-420):

- a) a riqueza agregada w_1 possui distribuição lognormal;
- b) o investidor agregado exibe aversão relativa constante a risco.

Da equação (7), vem que

$$g(w_1) = \ln(w_1) \sim N(\mu_w; \sigma_w^2).$$

Da equação (9), vem que

$$u'(w_1) = \exp(\gamma_w \ln(w_1)) = w_1^{\gamma_w},$$

Integrando a equação acima, percebe-se que a função de utilidade do investidor agregado é do tipo:

$$u(w_1) = \frac{w_1^{1+\gamma_w}}{1+\gamma_w} + k,$$

onde k é uma constante.

Consoante Cochrane (2001, p. 6), o investidor acima possui função de utilidade potência. Conforme Copeland e Weston (1988, p. 88-90), Elton e Gruber (1997, p. 217-

221 e 226-228) e Luenberger (1998, p. 233 e 256), pode-se medir o grau de aversão a risco de um investidor pelos coeficientes de aversão a risco de Arrow-Pratt, definidos a seguir.

Aversão absoluta a risco:

$$AAR = -\frac{u''(w_1)}{u'(w_1)}.$$

Valores positivos do coeficiente indicam aversão absoluta a risco; valores negativos, propensão absoluta a risco; e valor nulo, neutralidade a risco.

Aversão relativa a risco:

$$ARR = -w_1 \frac{u''(w_1)}{u'(w_1)} = w_1 AAR.$$

Valores positivos do coeficiente indicam aversão relativa a risco; valores negativos, propensão relativa a risco; e valor nulo, neutralidade a risco.

Pode-se então calcular os coeficientes de aversão a risco do investidor agregado:

$$AAR = -\frac{u''(w_1)}{u'(w_1)} = -\frac{\gamma_w w_1^{\gamma_w - 1}}{w_1^{\gamma_w}} = -\frac{\gamma_w}{w_1},$$

$$ARR = w_1 AAR = -\gamma_w.$$

Para que o investidor tenha aversão relativa constante a risco, γ_w deve ser negativa: $\gamma_w < 0 \rightarrow -\gamma_w > 0$. Se $\gamma_w = 0$, o investidor é neutro a risco; se $\gamma_w > 0$, o investidor possui propensão relativa constante a risco.

Nota-se ainda que, no caso analisado ($\gamma_w < 0$):

$$AAR' = \frac{\gamma_w}{w_1^2} < 0, \quad AAR'' = -2\frac{\gamma_w}{w_1^3} > 0 \quad \text{e} \quad ARR' = 0.$$

À medida que a riqueza do investidor representativo cresce, sua aversão absoluta a risco diminui, cada vez a uma taxa menor, na medida exata para que sua aversão relativa a risco permaneça constante. Economicamente, esse comportamento indica que quanto

maior é sua riqueza, mais, em termos absolutos, o investidor está disposto a arriscar (investir). Em termos relativos, a razão entre a riqueza e o valor absoluto que está disposto a colocar em risco conserva-se constante.

Dessa forma, ao empregarem-se as premissas de Rubinstein (1976) na abordagem mais genérica de Câmara (2003), conclui-se que as preferências a risco do investidor agregado são representadas por uma função de utilidade potência, onde:

$$u'(w_1) = \exp(\gamma_w \ln(w_1)) = w_1^{\gamma_w},$$

com $\gamma_w < 0$.

Nesse contexto, a equação (20) (preço atual do ativo-objeto), transcrita abaixo,

$$S = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} x g_1'(x) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\} dx,$$

fica:

$$S = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\} dx.$$

Das demonstrações contidas no capítulo 3, sabe-se que a densidade transformada de preço de estado do ativo-objeto

$$h(x : g_1 = \ln; \mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma; \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\}$$

é lognormal, com parâmetro de locação igual a $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$. Pelas deduções contidas no apêndice A (propriedades da distribuição lognormal), segue que:

$$Se^r = \exp\left\{\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right\}. \quad (24)$$

Logo

$$\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma = \ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (25)$$

Pela equação (21), o preço de uma opção lançada sobre esse ativo-objeto é dado por:

$$p = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx. \quad (26)$$

Salienta-se que a fórmula acima é livre de preferências e a função

$$h(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\},$$

é a densidade de probabilidade lognormal risco-neutra do ativo-objeto, com parâmetros de locação e escala dados em função dos parâmetros de média e variância da densidade de probabilidade normal risco-neutra do logaritmo do preço do ativo-objeto.

Especializando a equação acima para precificar uma opção de compra de preço c , deduz-se o modelo de Black-Scholes (para opção de compra). Nesse caso

$$f(x) = \text{Max}(0; x - X),$$

onde X é o preço de exercício da opção. A equação torna-se

$$\begin{aligned} c &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \text{Max}(0; x - X) \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx = \\ &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} (x - X) \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx = \\ &= \left\{ e^{-r} \int_X^{+\infty} x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx - \right. \\ &\quad \left. X e^{-r} \int_X^{+\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx \right\}. \end{aligned}$$

As duas integrais acima podem ser resolvidas, respectivamente, conforme equações (1.a) e (1.c), contidas no apêndice A.

Nesse caso, os parâmetros de locação e escala da distribuição são, nessa ordem

$$\left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2}; \sigma \right).$$

A primeira integral fica

$$e^{-r} N \left(\frac{\ln(Se^r) - \sigma^2/2 - \ln X}{\sigma} + \sigma \right) \exp \left(\ln(Se^r) - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) = SN(d_1),$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)}{\sigma}.$$

A segunda integral fica

$$-Xe^{-r} N \left(\frac{\ln(Se^r) - \sigma^2/2 - \ln X}{\sigma} \right) = -Xe^{-r} N(d_1 - \sigma).$$

Logo, o preço da opção de compra é dado por

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r} N(d_1 - \sigma),$$

que é o modelo de Black-Scholes.

Quando os parâmetros r e σ são expressos para um horizonte diferente do prazo da opção, a equação acima assume a forma tradicional:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (27)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (28)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

onde

c : preço da opção de compra;

S : preço atual do ativo-objeto;

σ : volatilidade do preço do ativo-objeto (desvio-padrão de $\ln(x)$);

r : taxa de juros livre de risco;

X : preço de exercício;

$T - t$: prazo para o vencimento da opção;

$N(\cdot)$: distribuição normal acumulada.

A fórmula de precificação de uma opção de venda lançada sobre uma ação que não distribui dividendos pode ser obtida de forma similar, fazendo $f(x) = \text{Max}(0; X - x)$, ou pela paridade de preços das opções de compra e de venda, como exemplificado por Black e Scholes (1973, p. 646-647), Hull (1997, p. 167-168) e Wilmott (1998, p. 33-34). As demais extensões do modelo podem ser obtidas variando-se $f(x)$ conforme o caso.

Nota-se que o preço da opção de compra é dependente de cinco parâmetros. Seu valor teórico aumenta com o aumento do preço do ativo-objeto, da volatilidade, da taxa de juros livre de risco e do tempo; e diminui com o aumento do preço de exercício.

É importante notar que o modelo de Black-Scholes é representado por uma fórmula fechada, ou seja, não há recorrência (dependência de valores passados, por exemplo de seu valor em $t-1$). Adicionalmente, com exceção da volatilidade do preço do ativo-objeto, todas as variáveis (preço do ativo, taxa de juros livre de risco etc.) são observáveis. Esses dois pontos contribuem para a facilidade de implementação e utilização do modelo.

Outro fato notável é que o valor da opção não depende do retorno esperado do ativo-objeto nem das preferências a risco dos investidores. Isso porque o raciocínio utilizado por Black e Scholes (1973) para a montagem da carteira perfeitamente *hedgeada* fundamenta-se, puramente, em condições de não arbitragem, sendo válido independentemente da mudança no preço da ação ou da probabilidade dessa mudança (JARROW, 1999, p. 234).

Para maior discussão sobre as propriedades matemáticas mais conhecidas da fórmula de Black-Scholes, vide Ross (1999, p. 90-91) e Wilmott (1998, p. 74-78). O primeiro enfoca a equação final obtida e o segundo, a equação diferencial parcial solucionada por Black e Scholes (1973).

Por fim, Merton (1998, p. 327) explica que as pesquisas subseqüentes ao modelo de Black-Scholes seguiram três vertentes: “aplicações do modelo para outros tipos de ativos, testes empíricos da fórmula de precificação e, finalmente, tentativas de enfraquecer as hipóteses utilizadas na derivação do modelo.” Os estudos de Jarrow (1999), Merton (1998) e Scholes (1997) são excelentes referências sobre as origens e os impactos do modelo de Black-Scholes.

Vale mencionar que, segundo Bernstein (1996, p. 310-316), Merton teve papel muito importante no desenvolvimento do modelo obtido por Black e Scholes (1973). Consoante, Merton (1998, p. 326), além de ter nomeado o modelo, foi ele quem mostrou a Black e Scholes que a estratégia de negociação dinâmica por eles prescrita, para anular o risco da opção (delta *hedge*), resulta num *hedge* perfeito quando se tira o limite para negociação em tempo contínuo ($\Delta t \rightarrow 0$).

4.1.2 Derivação do modelo de Black

Conforme Hull (1997, p. 277), em 1976 Fisher Black desenvolveu um modelo para precificar opções européias lançadas sobre contratos futuros. Na verdade, o modelo de Black é uma adaptação do modelo de Black-Scholes ao caso em que o ativo-objeto é um contrato futuro, que pode ser o futuro de uma ação que distribui ou não dividendos, de uma moeda, de um índice etc.; em qualquer um desses casos, a fórmula de precificação obtida é a mesma. Afora isso, são mantidas as premissas utilizadas na formulação do modelo de Black-Scholes.

O modelo de Black pode ser obtido por um procedimento análogo ao utilizado no item 4.1.1, que será ilustrado, ou, como ensina Hull (1997, p. 261 e 269-279), através de uma adaptação simples no modelo de Black-Scholes, substituindo-se o preço atual do ativo-objeto à vista S pelo preço atual do contrato futuro F descapitalizado pela taxa de juros livre de risco – substitui-se S por $Fe^{-r(T-t)}$ – diretamente nas equações (27) e (28). Conforme Hull (1997, p. 287), esse procedimento se justifica porque, para o propósito de avaliação de derivativos lançados sobre um contrato futuro, o preço deste último pode ser tratado da mesma forma que o preço de uma ação que proporciona um rendimento de dividendos igual à taxa de juros livre de risco.

O modelo de Black baseia-se na hipótese de que o preço do ativo-objeto F , no caso o contrato futuro, segue um movimento browniano geométrico. Portanto, seu preço tem distribuição lognormal.

Conforme discutido no item 3.3, muitos pares possíveis de preferências a risco e distribuições de riqueza agregada podem ser escolhidos. Qualquer que seja a escolha, desde que as equações (7) e (9) sejam obedecidas, a utilidade marginal relativa do contrato futuro será dada pela equação (15), com a função logaritmo no papel de g_1 , e as demais relações matemáticas valerão.

Um cuidado a ser tomado é o de que, para a precificação da opção sobre futuro de dólar pela abordagem de Câmara (2003), deve-se inicialmente determinar $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ em função do ativo primitivo, que é o dólar, não o futuro de dólar. Nas extensões do modelo de Black-Scholes, quando o ativo-objeto possui rendimento, este é assumido constante e conhecido para todos os vencimentos (HULL, 1997, p. 261, 263, 272 e 277). Dessa forma, assume-se que a aplicação em dólar proporciona um rendimento (em dólar) constante e conhecido q (taxa de juros da moeda estrangeira), no horizonte de análise.

Segundo as premissas acima, o resultado total de um investimento em dólar com mesma data de vencimento da opção (um período) é formado por dois componentes: um componente aleatório S_1 , que é a cotação do dólar em reais em $t=1$, e outro relativo à taxa de juros da moeda, que atua como um rendimento continuamente capitalizado à taxa q . Dessa forma, o resultado (bruto) do investimento em um dólar é dado por $S_1 e^q$.

Para a determinação de $\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma$ em função do dólar, deve-se conhecer sua distribuição de probabilidade no vencimento da opção. Hull (1997, p. 221) demonstra que se o preço do futuro segue um movimento browniano geométrico, o preço do ativo-objeto também segue, e vice-versa. Para tanto, basta a aplicação do lema de Itô para determinar a equação diferencial estocástica do futuro dF , dada a equação diferencial estocástica do ativo-objeto dS . Outro raciocínio é perceber que o preço do futuro F , num dado instante e num mercado arbitrado, é dado pelo produto de uma constante de capitalização pelo preço do ativo-objeto à vista S (HULL, 1997, p. 51-54). No caso de um contrato futuro de uma moeda, tem-se

$$F = S e^{r-q}, \quad (29)$$

onde r é a taxa de juros livre de risco doméstica e q a taxa de juros livre de risco da moeda estrangeira, ambas assumidas constantes e conhecidas até a data de vencimento do futuro. A equação (29) também pode ser obtida da equação (23), quando se assume que o ativo-objeto distribui dividendos à taxa q .

Nesse contexto, quando o ativo-objeto possui distribuição lognormal, o futuro também possui e vice-versa. Para provar essa propriedade, basta perceber que se Y e Z são variáveis aleatórias e k uma constante, tal que $Z = Y e^k$, então

$$\ln Z = \ln Y + k,$$

$$\text{sendo } \ln Y \sim N(\mu_Y; \sigma_Y^2) \leftrightarrow \ln Z \sim N(\mu_Y + k; \sigma_Y^2).$$

Adicionalmente, como o contrato futuro é liquidado pelo preço à vista do ativo-objeto, ambos possuem a mesma distribuição de probabilidade na data de liquidação do futuro. Como a opção sobre futuro de dólar vence na mesma data que o contrato futuro de dólar, ela pode ser precificada diretamente em função da distribuição do dólar em seu vencimento, cuja cotação é apurada conforme contrato apresentado no anexo A.

Visto isso, seja S_1 o preço (aleatório) do dólar no vencimento da opção e do contrato futuro, de forma que

$$\ln(S_1) \sim N(\mu; \sigma^2).$$

Seja S a cotação (preço) atual da moeda. Supondo ainda que as equações (7) e (9) são atendidas, a equação (20) fica

$$S = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} S_1 e^q \frac{1}{S_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(S_1) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2 \right\} dS_1.$$

Logo,

$$\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma = \ln(Se^{r-q}) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln F - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (30)$$

A equação acima demonstra que o parâmetro de locação da densidade lognormal de preço de estado também pode ser expresso em função do preço do contrato futuro.

Portanto, o preço de uma opção de compra sobre futuro de dólar c , de preço de exercício X , é dado por:

$$\begin{aligned} c &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \text{Max}(0; S_1 - X) \frac{1}{S_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(S_1) - \left(\ln(Se^{r-q}) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dS_1 = \\ &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} (S_1 - X) \frac{1}{S_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(S_1) - \left(\ln(F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dS_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Empregando o mesmo procedimento utilizado no item 4.1.1, fundamentado nas equações (1.a) e (1.c) contidas no apêndice A, obtém-se

$$c = e^{-r} [FN(d_1) - XN(d_2)], \quad (32)$$

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)}{\sigma}, \quad (33)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma,$$

que é o modelo de Black. Quando os parâmetros r e σ são expressos para um horizonte diferente do prazo da opção, a equação acima assume a forma tradicional (função do tempo), dada por Hull (1997, p. 277).

O desempenho desse modelo, utilizado pelo mercado para precificar opções sobre futuro de dólar, será comparado ao desempenho do modelo de Câmara.

Uma premissa utilizada deve ser salientada: quando o vencimento da opção e do futuro coincidem, a volatilidade do preço do contrato futuro no vencimento da opção é igual à volatilidade do preço do dólar, que foi assumida através de

$$\ln(S_1) \sim N(\mu; \sigma^2).$$

Se os vencimentos não coincidissem, a equação (30) seria obrigatoriamente da forma

$$c = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_X^{+\infty} (F_1 - X) \frac{1}{F_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(F_1) - \left(\ln(F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dF_1, \quad (34)$$

onde F_1 é o preço (aleatório) do contrato futuro no vencimento da opção e σ sua volatilidade (desvio-padrão de $\ln(F_1)$) para o prazo da opção. Essa é uma diferença sutil e leva em conta que, quando os vencimentos do futuro e da opção não coincidem, as distribuições do futuro de dólar e do dólar não têm o mesmo valor esperado. No entanto, essas distribuições são sempre iguais no vencimento do contrato futuro, já que este último,

por definição, é liquidado pelo preço do ativo à vista. Logo, se a equação (30) é obtida para o prazo do contrato futuro, determina-se a relação risco-neutra que é válida para a precificação de qualquer derivativo de dólar em função do preço do contrato futuro. Essa relação é função do parâmetro σ^2 , que é proporcional ao tempo (vide apêndice C), podendo ser calculada para qualquer outro prazo. Desse modo, assumindo-se conhecidos os parâmetros de média e variância da distribuição de $\ln(F_1)$, as opções sobre futuros serão precificadas de acordo com a equação (34), que por sua vez resulta no modelo de Black.

Em síntese, duas opções com os mesmos vencimento e preço de exercício, uma sobre o ativo à vista e outra sobre um contrato futuro com vencimento posterior à opção, possuem preços diferentes. Todavia, o modelo de Black é válido qualquer que seja a data de vencimento do contrato futuro.

4.2 Testes empíricos e vieses conhecidos do modelo de Black-Scholes

Antes de iniciar a apresentação dos vieses do modelo, é importante que se tenha em mente as premissas de Black e Scholes (1973, p. 640) na sua concepção:

- a) a taxa de juros de curto prazo é conhecida e constante ao longo do tempo;
- b) o preço da ação, ativo-objeto da opção, segue um passeio aleatório em tempo contínuo, com variância proporcional ao quadrado de seu preço. Logo, a distribuição dos possíveis preços do ativo para qualquer intervalo finito é lognormal. A variância do retorno do ativo-objeto é constante;
- c) a ação não distribui dividendos nem qualquer outro tipo de proventos;
- d) a opção é Européia, isto é, só pode ser exercida no vencimento;
- e) não há custos de transação para a compra ou venda de ações ou opções;

- f) é possível tomar emprestado qualquer quantia de recursos à taxa de juros livre de risco;
- g) não há penalidades à venda a descoberto.

Conforme Hull (1997, p. 510), imperfeições do modelo de Black-Scholes são evidenciadas pelo fato de que os usuários do modelo têm que adequar frequentemente o parâmetro de volatilidade de forma que reflita as últimas informações de mercado. Outra evidência de imperfeição é que a volatilidade implícita depende tanto do preço de exercício como do prazo da opção. Essas evidências contrariam a hipótese (b) utilizada na derivação do modelo. Muitos testes empíricos foram desenvolvidos para documentar esses e outros vieses do modelo.

Segundo Copeland e Weston (1988, p. 282-292), as pesquisas empíricas do modelo de Black-Scholes são, na verdade, testes conjuntos do modelo e de eficiência de mercado. Isso ocorre porque o princípio fundamental utilizado por Black e Scholes (1973), o de ausência de arbitragem, é uma condição de equilíbrio de preços bem aproximada em mercados líquidos e informacionalmente eficientes, isto é, em que os preços refletem as últimas informações disponíveis sobre os ativos e sobre a economia. Portanto, deve-se ter em mente que quando se testa a hipótese nula de que os preços de mercado observados e os preços teóricos do modelo de Black-Scholes não apresentam diferenças sistemáticas, tal hipótese pode ser rejeitada por qualquer uma das seguintes razões: (a) os parâmetros do modelo não foram corretamente estimados; (b) o mercado de opções não é eficiente; (c) a formulação matemática do modelo não é correta (os preços não são lognormalmente distribuídos, a variância instantânea dos retornos não é constante etc.).

Imbuídos desse conhecimento, muitos pesquisadores testaram o modelo de Black-Scholes. Os testes, que podem ser classificados em três grandes grupos, investigam: (a) se o modelo fornece preços tendenciosos em relação aos preços de mercado, e se é possível

estabelecerem-se regras lucrativas de negociação de carteiras de opções mal precificadas; (b) se os limites máximo e mínimo esperados para os preços de opções são respeitados no mercado; (c) finalmente, se carteiras perfeitamente *hedgeadas*, construídas pela combinação da opção com seu ativo-objeto, apresentam retorno anormal, isto é, significativamente diferente da taxa de juros livre de risco.

Em linhas gerais, os testes sugerem que o modelo de Black-Scholes fornece preços que diferem, de forma sistemática, dos preços de mercado. Esses vieses são, em sua maioria, atribuídos às fortes premissas de que: (i) a variância instantânea dos retornos do ativo-objeto é constante; (ii) o preço do ativo-objeto possui distribuição lognormal em qualquer intervalo finito de tempo.

A seguir, descrevem-se testes empíricos importantes do modelo de Black-Scholes, com base nos quais algumas conclusões serão tecidas ao final deste item. Particularmente, são descritos os modelos de Cox e Ross (1976) e Jarrow e Rudd (1982), que relaxam, nessa ordem, as premissas (i) e (ii) mencionadas no parágrafo anterior. Antes dessa síntese, é importante que se tenha em mente os conceitos de opção dentro do dinheiro, no dinheiro e fora do dinheiro. Wilmott (1998, p. 26) aclara que uma opção no dinheiro é aquela que possui valor intrínseco positivo (para o comprador). O valor intrínseco é o resultado que seria recebido se o preço do ativo-objeto estiver em seu nível atual no vencimento da opção. Diferentemente, uma opção fora do dinheiro possui valor intrínseco nulo. Uma opção no dinheiro possui preço de exercício muito (arbitrariamente) próximo do preço atual do ativo-objeto, podendo estar ligeiramente dentro ou fora do dinheiro. Os autores dos trabalhos comentados a seguir (BLACK; SCHOLES, 1972; JARROW; RUDD, 1982; MACBETH; MERVILLE, 1979, 1980) fizeram essa classificação com base na comparação do preço atual do ativo-objeto com o preço de exercício da opção descontado pela taxa de juros livre de risco. Assim, sendo S o preço atual do ativo-objeto da opção,

X seu preço de exercício, r a taxa de juros livre de risco, T a data de vencimento da opção e t a data atual, uma opção de compra pode estar:

- a) no dinheiro $\rightarrow S \cong Xe^{-r(T-t)}$;
- b) dentro do dinheiro $\rightarrow S > Xe^{-r(T-t)}$;
- c) fora do dinheiro $\rightarrow S < Xe^{-r(T-t)}$.

Black e Scholes (1972) testaram seu modelo com dados de negociação de opções no mercado de balcão. Sua amostra consistiu de opções de compra lançadas sobre 545 ações, negociadas entre 1966 e 1969. Tendo em vista que o mercado secundário de opções de balcão virtualmente inexistia, os pesquisadores adotaram um procedimento que durava até o vencimento das opções analisadas. Primeiramente, utilizando os preços fornecidos pelo modelo e comparando-os com os preços de emissão das opções, eles dividiram as opções em sub e sobreavaliadas; o primeiro grupo foi comprado e o segundo, vendido. Depois, para cada opção comprada (subavaliada) ou vendida (sobreavaliada), foi construída uma posição *hedgeda* através da venda ou da compra de uma quantidade ideal (delta *hedge*) de ações do ativo-objeto. Cada posição foi ajustada diariamente, até o vencimento da opção a que se referia. Com esse procedimento, os autores esperavam não obter retorno diário anormal sobre a taxa de juros livre de risco, já que cada posição era muito próxima do que seria um *hedge* perfeito (as carteiras eram ajustadas diária e não continuamente).

Utilizando os conceitos do CAPM, Black e Scholes (1972) calcularam o risco sistemático, medido pelo beta da carteira *hedgeda* e concluíram que esse parâmetro não é significativamente diferente de zero, como era esperado. Os testes também indicaram que existem desvios sistemáticos dos preços do modelo em relação aos preços de mercado: compradores de opções pagam, em geral, preços maiores que os previstos pelo modelo, enquanto vendedores de opções recebem aproximadamente o valor previsto pelo modelo.

Adicionalmente, o estudo sugere que a estratégia de comprar opções subavaliadas e vender opções sobreavaliadas, efetuando-se o delta *hedge* em cada posição assumida, resulta em retornos anormais positivos significantes sobre a taxa de juros livre de risco. Todavia, quando os altos custos transacionais desse mercado são considerados, os retornos anormais desaparecem.

Macbeth e Merville (1979) compararam os preços calculados pelo modelo de Black-Scholes aos preços de mercado. Sua amostra consistiu nos preços diários de fechamento de todas as opções de compra lançadas sobre seis ações durante todo o ano de 1976 (mais de 12.000 preços) e negociadas na Chicago Board of Trade Options Exchange. Os autores substituíram o preço de mercado das opções na fórmula de Black-Scholes, calculando numericamente a variância implícita nos preços. Para qualquer dia escolhido, constataram que preços de mercado de diferentes opções lançadas sobre a mesma ação resultam em variâncias implícitas diferentes, e que essas variâncias, para a mesma opção, mudam com o tempo. Todavia, as diferenças nas variâncias implícitas são sistematicamente relacionadas aos valores relativos do preço do ativo-objeto e do preço de exercício, bem como ao valor absoluto do tempo para o vencimento. Conseqüentemente, essas diferenças nas variâncias se traduzem em diferenças sistemáticas entre os preços de mercado e os preços do modelo de Black-Scholes. Assumindo que o modelo precifica corretamente opções no dinheiro com até 90 dias para o vencimento, os pesquisadores estimaram a volatilidade a ser utilizada na precificação de opções dentro e fora do dinheiro e de opções no dinheiro com mais de 90 dias para o vencimento. Resumidamente, os resultados do estudo sugerem que:

- a) o modelo de Black-Scholes fornece preços que são, em média, menores (maiores) que os preços de mercado para opções dentro (fora) do dinheiro;

- b) a diferença, em módulo, entre o preço do modelo e o preço de mercado tende a aumentar quanto mais dentro ou fora do dinheiro está a opção, e tende a diminuir com o decréscimo do prazo de vencimento.

Os autores citam que seus resultados são completamente opostos aos encontrados por alguns outros pesquisadores. Propõem que essa evidência empírica conflitante pode, pelo menos parte, ser consequência de uma variância não estacionária do ativo-objeto. De fato, a variância real, implícita nos preços de mercado, pode ser maior ou menor que a variância calculada a partir de dados históricos. Assim, se a mesma pesquisa é feita para dois períodos diferentes e, em um deles, a variância esperada é maior do que a histórica e, no outro, ocorre o contrário, o preço de opções de compra no dinheiro calculado pelo modelo seria menor que o preço de mercado no primeiro caso e maior no segundo. De qualquer forma, essa explicação só resolve parte do conflito, pois não justifica a inversão que ocorre nos preços de opções fora do dinheiro, já que maior (menor) variância deveria sempre implicar em maior (menor) preço, independentemente de a opção estar dentro (fora) do dinheiro. Deve-se lembrar que o preço de uma opção, de compra ou de venda, calculado pelo modelo de Black-Scholes é função monotônica estritamente crescente da variância do ativo-objeto.

Macbeth e Merville (1980), com a mesma amostra que foi utilizada por Macbeth e Merville (1979), compararam o desempenho do modelo de Black-Scholes ao do modelo de Cox e Ross (1976), que é um modelo mais geral de precificação de opções, obtido a partir de um processo de difusão de elasticidade constante da variância do preço (*constant elasticity of price variance*). A elasticidade da variância é medida pelo quociente entre as variações percentuais instantâneas da variância e do preço (a variação percentual do preço é o retorno). Matematicamente, segundo Macbeth e Merville (1980, p. 286), denotando o preço de um ativo no instante t por S e sua variação num intervalo de tempo infinitesimal

dt por dS , a família de processos de difusão de elasticidade constante da variância do preço pode ser representada pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = \mu S dt + \delta S^{\theta/2} dW ,$$

onde δ , μ , e θ são constantes, com $\delta > 0$, e W é um processo de *Wiener*, definido conforme Hull (1997, p. 210-212).

A variância instantânea do preço σ_s^2 é dada por

$$\sigma_s^2 = \delta^2 S^\theta ,$$

e a variância instantânea do retorno σ_r^2 é dada por:

$$\sigma_r^2 = \delta^2 S^{(\theta-2)} .$$

A elasticidade da variância do preço, que no caso é constante, é calculada como:

$$\frac{d\sigma_s^2 / \sigma_s^2}{dS / S} = \frac{\theta \delta^2 S^{(\theta-1)} dS / \delta^2 S^\theta}{dS / S} = \theta .$$

Com o mesmo conceito, pode-se calcular a elasticidade da variância do retorno:

$$\frac{d\sigma_r^2 / \sigma_r^2}{dS / S} = \frac{(\theta - 2) \delta^2 S^{(\theta-3)} dS / \delta^2 S^{(\theta-2)}}{dS / S} = \theta - 2 .$$

Com $\theta = 2$, o processo de difusão acima torna-se o processo de difusão utilizado por Black e Scholes (1973). Nesse caso particular, a variância instantânea do preço é proporcional ao seu quadrado, e a variância instantânea do retorno é constante.

Se, por exemplo, $\theta = 1$, para cada 1% de aumento no preço da ação, há 1% de aumento na variância instantânea do preço e 1% de diminuição da variância instantânea do retorno. Esse é um processo de difusão em que a variância do preço é proporcional ao preço, e não ao quadrado do preço. Ademais, a variância do retorno cai (sobe) com o aumento (diminuição) do preço. Economicamente, esse processo descreve um

comportamento de preços mais (menos) suave que o utilizado por Black e Scholes (1973) numa fase de crescimento (declínio) econômico.

Em resumo, o modelo de Cox e Ross (1976) é formulado a partir de um processo estocástico que pode descrever mais precisamente o comportamento real apresentado pelos preços dos ativos, já que permite que a elasticidade da variância do processo seja quantificada. Além disso, esse modelo não é incompatível com o modelo de Black-Scholes; pelo contrário, o modelo de Black-Scholes é obtido em um caso particular ($\theta = 2$). Portanto, se bem parametrizado, esse modelo pode apresentar desempenho melhor que o do modelo de Black-Scholes, com o potencial, inclusive, de explicar alguns dos vieses já relatados.

Para o cálculo do preço das opções pelo modelo de Cox e Ross (1976), Macbeth e Merville (1980, p. 286) estimaram δ e θ por métodos numéricos baseados nos retornos históricos das seis ações. Para todas as elas, os valores de θ encontrados foram menores que dois. Deve-se notar que para $\theta < 2$, a variância instantânea do retorno diminui diante de um aumento de preço, evidência que está em concordância com o observado por Black (1976) apud Copeland e Weston (1988, p. 287). Ou seja, um aumento no preço da ação seria acompanhado de uma diminuição da variância dos retornos da mesma, e uma diminuição no preço da ação teria o efeito oposto. Conforme Hull (1997, p. 497), num sentido econômico, pode-se justificar esse comportamento da seguinte forma: quando o preço de uma ação aumenta, a proporção de capital próprio no capital total da empresa aumenta e, conseqüentemente, sua alavancagem financeira diminui, situação que, teoricamente, leva à redução da variância dos retornos do negócio para os acionistas e, em última instância, da variância dos retornos das ações (redução do risco de investimento nessas ações). Uma diminuição do preço da ação causa o inverso.

Os resultados dos testes de Macbeth e Merville (1980) sugerem que o modelo de Cox e Ross (1976) fornece preços mais aderentes aos preços de mercado que os fornecidos pelo modelo de Black-Scholes, reduzindo os vieses encontrados em Macbeth e Merville (1979). Portanto, a um maior custo de estimação de parâmetros, aumentou-se a aderência do modelo de precificação.

Jarrow e Rudd (1982) examinaram, explicitamente, o impacto da distribuição empírica dos preços do ativo-objeto, sumarizada por seus momentos, no preço de uma opção sobre ele lançada. Para tanto, criaram um modelo de precificação de opções fundamentado no conceito de que a distribuição real dos preços do ativo-objeto, que não é perfeitamente lognormal, pode ser bem aproximada por uma distribuição lognormal ajustada para as diferenças dos momentos de segunda a quarta ordens dessas distribuições, isto é, relacionados, respectivamente, à variância, assimetria e curtose³; essas diferenças, que resultam em termos de ajuste, são calculadas pela comparação dos momentos da distribuição empírica dos preços do ativo-objeto aos da distribuição lognormal. Conseqüentemente, seu modelo de precificação de opções considera características adicionais e relevantes da distribuição real dos preços do ativo-objeto. Resumidamente, os autores partiram da seguinte situação-problema: o modelo de Black-Scholes apresenta vieses sistemáticos na precificação de opções, vieses que são, em grande parte, decorrentes do fato da distribuição de preços do ativo-objeto não ser, na verdade, lognormal. Para reduzirem esses vieses, os autores desenvolveram uma fórmula de precificação baseada numa distribuição de probabilidade de preços do ativo-objeto mais próxima da real, obtida pelo emprego de uma generalização da expansão em série de Edgeworth. Jarrow e Rudd (1982, p. 349-358) e Johnson et al. (1994, p. 28-33) descrevem essa expansão,

³ Os conceitos de assimetria e curtose são discutidos no item 4.3.1.

essencialmente utilizada com o mesmo princípio que a expansão de Taylor, com a diferença de que, ao invés de aproximar uma função analítica ao redor de um valor conhecido, aproxima uma distribuição de probabilidade de momentos conhecidos, mas de função densidade de probabilidade desconhecida, por uma distribuição de função densidade de probabilidade conhecida, à qual são adicionados termos de correção que a aproximam da distribuição real. Vale lembrar que o i -ésimo momento M_i da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é definido por:

$$M_i = E[X^i].$$

Em seu estudo, Jarrow e Rudd (1982) utilizaram a distribuição lognormal, cuja densidade de probabilidade é conhecida, para a aproximação da distribuição real de preços, de momentos conhecidos (calculados empiricamente). A escolha da distribuição lognormal como função de aproximação deveu-se, principalmente, à sua ampla aceitação no mercado financeiro para representação do comportamento de preços de ativos (que, em geral, não podem ser negativos). A fórmula de precificação de opções derivada por Jarrow e Rudd (1982) ajusta o preço fornecido pelo modelo de Black-Scholes a três termos, que quantificam, respectivamente, as diferenças de variância, assimetria e curtose das distribuições real e lognormal. Especificamente, a vantagem dessa abordagem é que permite avaliar o impacto no preço da opção causado pelas características de assimetria e curtose da distribuição de preços do ativo-objeto.

Os resultados dos testes de Jarrow e Rudd (1982) sugerem que os termos de ajuste de diferenças de variância e curtose têm influência dominante, em relação ao termo de ajuste de diferença de assimetria, na precificação de opções no dinheiro. Opostamente, o termo de ajuste de diferença de assimetria tem influência dominante, em relação aos demais, na precificação de opções muito dentro ou fora do dinheiro. Essa evidência pode ser utilizada

para reconciliar os resultados conflitantes na literatura de que o modelo de Black-Scholes tanto precifica opções dentro (fora) do dinheiro sistematicamente abaixo (acima) do mercado, como o inverso. Especificamente, os autores destacam que o número de ações que possuem distribuição com assimetria negativa e com positiva é aproximadamente o mesmo. Dessa forma, dependendo da amostra selecionada, o ajuste para assimetria pode ser positivo ou negativo. Se esse argumento for verdadeiro, obtiveram-se conclusões opostas sobre o viés do modelo de Black-Scholes na precificação de opções dentro ou fora do dinheiro porque foram tomadas amostras de opções cujos ativos-objetos possuíam, em média, distribuições com assimetria oposta. Se esses pesquisadores tivessem efetuado algum ajuste para assimetria, provavelmente o viés do modelo de Black-Scholes teria sido corrigido na direção certa.

Hull (1997, p. 509-510) afirma que as extensões mais imediatas do modelo de Black-Scholes, tais como o modelo de Black (precificação de opções sobre futuros) e o modelo de Garman-Kohlhagen (precificação de opções sobre moedas), também apresentam vieses sistemáticos: por exemplo, há evidências de que as opções sobre moedas, dentro ou fora do dinheiro, são em geral precificadas abaixo dos preços de mercado. No entanto, quando os custos transacionais e as diferenças de preços de compra e venda são considerados, as oportunidades de arbitragem e ganho certo desaparecem.

Em suma, os resultados obtidos nos estudos não são conclusivos nem válidos para todos os tipos de ativos-objetos. Por um lado, estudos voltados a apontar oportunidades de arbitragem e lucro certo não alcançaram o sucesso almejado quando custos transacionais foram considerados. Assim, num sentido econômico, o modelo de Black-Scholes e suas extensões apresentam boa aderência aos preços observados.

Por outro lado, o modelo de Black-Scholes apresenta vieses conhecidos, constatação que estimula o teste de modelos alternativos. Ademais, os resultados apresentados também

sugerem que análises caso a caso podem trazer bons resultados, já que os vieses do modelo estão intimamente ligados a características específicas de cada ativo-objeto. Hull (1997, p. 509) salienta que nenhum modelo alternativo testado logrou, até o presente, explicar todos os vieses conhecidos do modelo de Black-Scholes em todas as situações analisadas e, complementa: “Possivelmente, os preços de opções são afetados por variáveis macroeconômicas de uma forma ainda não completamente entendida.”

4.3 Modelo de Câmara

O mesmo procedimento utilizado nos itens 4.1.1 e 4.1.2 pode ser empregado para determinar o preço de uma opção lançada sobre um ativo-objeto com distribuição diferente da lognormal. Particularmente, Câmara (2003, p. 814-816) ilustra como sua metodologia pode ser utilizada para a obtenção de um modelo de precificação de opções quando o preço do ativo-objeto possui distribuição lognormal com assimetria negativa. Mais precisamente, assumindo também que a riqueza agregada segue uma distribuição normal, que o investidor apresenta aversão absoluta a risco constante e (implicitamente) que o ativo-objeto é uma ação que não distribui dividendos, o autor apresenta as equações intermediárias, tais como as distribuições da utilidade marginal relativa da riqueza agregada e do ativo-objeto específico, juntamente com as equações finais de precificação.

Em nossa derivação, além de apresentarmos todas as passagens, assumimos as mesmas premissas quanto a preferências e distribuições utilizadas nos itens 4.1.1 e 4.1.2. Além disso, a partir da abordagem de precificação de Câmara (2003), obtivemos uma fórmula fechada para precificação de opções sobre futuros, assumindo que seu preço possui distribuição lognormal com assimetria negativa. A seguir, a distribuição lognormal

com assimetria negativa será descrita e, na sequência, a dedução do modelo de Câmara realizada.

4.3.1 A distribuição lognormal com assimetria negativa

Para a correta compreensão do que será abordado a seguir, primeiramente serão definidos os conceitos de assimetria e curtose de uma distribuição de probabilidade.

Segundo Brys et al. (2004, p. 753), a assimetria indica o quão assimétrica é uma distribuição de probabilidades. Uma distribuição simétrica, como a distribuição normal, possui assimetria nula. Uma distribuição com uma cauda longa à direita (sentido crescente do eixo das abscissas), como a distribuição lognormal (vide apêndice A), possui assimetria positiva. Uma distribuição com uma cauda longa à esquerda possui assimetria negativa. A seguir, ilustram-se três funções densidade de probabilidade genéricas, representativas dos casos mencionados.

Figura 2 – Exemplos de assimetria

Matematicamente, a assimetria A de uma variável aleatória X é dada por:

$$A = \frac{E[(X - E[X])^3]}{\{E[(X - E[X])^2]\}^{3/2}}.$$

Brys et al. (2004, p. 753) explicam que a curtose mede o peso das caudas de uma distribuição de probabilidade em relação à distribuição normal. Uma distribuição com as caudas mais pesadas que as da distribuição normal é denominada leptocúrtica. Já uma

distribuição com as caudas menos pesadas que as da distribuição normal chama-se platicúrtica. Uma distribuição com a mesma curtose que a distribuição normal, ou seja $K = 3$, é denominada mesocúrtica. Valores de K menores que três caracterizam uma distribuição platicúrtica e maiores uma distribuição leptocúrtica.

A figura a seguir ilustra a distribuição t de Student com oito graus de liberdade, leptocúrtica, em comparação com a distribuição normal padrão. Ressaltam-se as caudas mais pesadas que a distribuição t de Student possui quando comparada à distribuição normal. Pindyck e Rubinfeld (1997, p. 35-36) descrevem essa distribuição.

Figura 3 – Exemplo de distribuição leptocúrtica

Matematicamente, a curtose K de uma variável aleatória X é dada por:

$$K = \frac{E[(X - E[X])^4]}{\{E[(X - E[X])^2]\}^2}.$$

Visto isso, seja X uma variável aleatória. Conforme Johnson et al. (1994, p. 207-209), se existe um número α tal que $\ln(X - \alpha) \sim N(\mu; \sigma^2)$, a variável X possui distribuição lognormal. Para que isso ocorra, duas condições são necessárias: (a) X pode assumir qualquer valor maior que α ; (b) a probabilidade de X assumir algum valor menor

que α é nula. Ainda segundo o autor, o termo lognormal também pode ser aplicado à distribuição de X quando $\ln(\alpha - X)$ possui distribuição normal, caso em que a probabilidade de X exceder α é nula. Entretanto, a simples substituição de X por $-X$ (e α por $-\alpha$) reduz essa situação à primeira.

Salienta-se que, na segunda situação, X possui distribuição lognormal com assimetria negativa. Na verdade, a distribuição lognormal com assimetria negativa é um espelho da distribuição lognormal padrão.

Consoante Johnson (1994, p. 208), a densidade de probabilidade lognormal é dada por:

$$f(X) = \left[(X - \alpha)\sqrt{2\pi\sigma} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(X - \alpha) - \mu]^2 \right\}, \quad X > \alpha.$$

No caso da distribuição lognormal com assimetria negativa, a densidade é dada por:

$$f(X) = \left[(\alpha - X)\sqrt{2\pi\sigma} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(\alpha - X) - \mu]^2 \right\}, \quad X < \alpha.$$

Ainda segundo o autor, dada uma distribuição lognormal, uma mudança em α só altera a média da distribuição de X , não afetando suas variância e forma. Câmara (2003, p. 814) complementa que a distribuição lognormal com assimetria negativa possui a mesma curtose que a lognormal com assimetria positiva de mesmos parâmetros μ e σ^2 .

Com o intuito de exemplificar o que foi descrito, a Figura 4 a seguir ilustra duas distribuições lognormais arbitrárias, uma com assimetria positiva e outra negativa. Em ambos os casos, $\alpha = 10$, $\mu = 2,0$ e $\sigma = 0,3$.

Pela figura, percebe-se que α faz o papel de um limite superior (supremo) de X na densidade lognormal com assimetria negativa e inferior (ínfimo) no outro caso. Ademais, nota-se que uma é o espelho da outra, sendo até intuitivo que seus momentos centrais pares (variância, curtose etc.) sejam idênticos.

Figura 4 – Densidades lognormais de assimetria positiva e negativa

4.3.2 O modelo de Câmara

O modelo de Câmara, conforme definido neste estudo, precifica opções sobre futuros. Pelas mesmas razões fornecidas no item 4.1.2, consideramos que o ativo-objeto do futuro é uma moeda que distribui dividendos conhecidos à taxa contínua q (para o prazo da opção).

As premissas sobre preferências e distribuições são:

- a) o preço do contrato futuro possui distribuição lognormal com assimetria negativa;
- b) a riqueza agregada w_1 possui distribuição lognormal;
- c) o investidor agregado exibe aversão relativa constante a risco.

Seja S_1 o preço (aleatório) do dólar no vencimento da opção e do contrato futuro, de forma que

$$\ln(\alpha - S_1) \sim N(\mu; \sigma^2).$$

Em sua data de liquidação, o preço do futuro é dado por S_1 que, por sua vez, é usado na apuração do resultado da opção sobre futuro. Seja S a cotação (preço) atual da moeda. Considerando que as equações (7) e (9) são atendidas, a equação (20) fica

$$S = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} S_1 e^q \frac{1}{\alpha - S_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(\alpha - S_1) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\} dS_1.$$

Salienta-se que os limites de integração mudaram em relação aos anteriores porque na distribuição lognormal com assimetria negativa $S_1 < \alpha$.

Para facilitar a visualização da solução, faz-se a seguinte mudança de variável:

$$\begin{cases} \alpha - S_1 = x; & dS_1 = -dx \\ S_1 = -\infty; & x = +\infty \\ S_1 = \alpha; & x = 0 \end{cases}$$

A integral fica

$$Se^{r-q} = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^0 -(\alpha - x) \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\} dS_1,$$

ou ainda melhor

$$Se^{r-q} = \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (\alpha - x) \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x) - \mu - \gamma_w \rho \sigma_w \sigma]^2\right\} dS_1.$$

Logo,

$$Se^{r-q} = \alpha - \exp\left(\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma + \frac{\sigma^2}{2}\right),$$

$$\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma = \ln(\alpha - Se^{r-q}) - \frac{\sigma^2}{2} = \ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2}, \quad (35)$$

onde F é o preço atual do contrato futuro.

Ressalta-se que a relação entre os preços do futuro e do ativo-objeto à vista é dada puramente por condição de não-arbitragem, conforme a equação (29), sendo independente da distribuição real do preço do ativo-objeto (HULL, 1997, p. 52-55; WILMOTT, 1998, p. 16-20). Por isso que a substituição de Se^{r-q} por F pôde ser feita na equação (35).

Finalmente, pela equação (21), o preço de uma opção de compra sobre futuro de dólar c , de preço de exercício X , é dado por:

$$\begin{aligned} c &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \text{Max}(0; S_1 - X) \frac{1}{\alpha - S_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(\alpha - S_1) - \left(\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dS_1 = \\ &= \frac{e^{-r}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_X^{\alpha} (S_1 - X) \frac{1}{\alpha - S_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(\alpha - S_1) - \left(\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dS_1. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{cases} \alpha - S_1 = x; & dS_1 = -dx \\ S_1 = X; & x = \alpha - X \\ S_1 = \alpha; & x = 0 \end{cases}$$

a equação fica

$$c = \left\{ \begin{aligned} &e^{-r} \int_0^{\alpha-X} -x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx - \\ &(\alpha - X) e^{-r} \int_0^{\alpha-X} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(x) - \left(\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dx \end{aligned} \right\}.$$

As integrais acima podem ser resolvidas com o auxílio das equações (1.b) e (1.d) contidas no apêndice A, procedimento do qual resulta:

$$c = e^{-r} [(F - \alpha)N(d_1) - (X - \alpha)N(d_2)], \quad (36)$$

$$d_1 = \frac{\ln[(\alpha - X)/(\alpha - F)] - (\sigma^2 / 2)}{\sigma}, \quad (37)$$

$$d_2 = d_1 + \sigma,$$

que é o modelo de Câmara. Quando os parâmetros r e σ são expressos para um horizonte diferente do prazo da opção, a equação acima assume a forma tradicional (função do tempo).

Câmara (2003, p. 814-815) apresenta o seguinte modelo de precificação para uma opção lançada sobre uma ação que não distribui dividendos, cujo preço segue distribuição lognormal com assimetria negativa:

$$c = (S - \alpha e^{-r(T-t)})N(d_1) - e^{-r(T-t)}(X - \alpha)N(d_2), \quad (38)$$

$$d_1 = \frac{\ln[(\alpha - X)/(\alpha - S e^{r(T-t)})] - (\sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T-t},$$

onde

c : preço da opção de compra;

S : preço atual do ativo-objeto;

σ : volatilidade do preço da ação;

r : taxa de juros livre de risco;

X : preço de exercício;

$T - t$: prazo para o vencimento da opção;

α : constante positiva.

Nesse caso, a constante α deve respeitar a seguinte relação:

$$\alpha > S e^{r(T-t)}.$$

O preço da opção sobre futuro poderia ter sido obtido a partir da equação (38), substituindo S por $Fe^{-r(T-t)}$, como mencionado no item 4.1.2. No entanto, para que a abordagem de precificação de Câmara (2003) se tornasse mais transparente ao leitor, optou-se por exemplificá-la uma vez mais.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

“The mathematics of financial models can be applied precisely, but the models are not at all precise in their application to the complex real world. Their accuracy as a useful approximation to that world varies significantly across time and place. The models should be applied in practice only tentatively, with careful assessment of their limitations in each application.”

(MERTON, 1998, p. 343)

5.1 Métodos utilizados

Conforme Silva e Menezes (2001, p. 20-22), pode-se classificar uma pesquisa científica sob os seguintes pontos de vista: natureza, forma de abordagem do problema, objetivos e procedimentos técnicos.

Sob o ponto de vista da natureza, a presente pesquisa é aplicada, pois objetiva promover a geração de conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. Mais especificamente, nesta pesquisa examina-se o desempenho de um modelo alternativo de precificação de opções sobre futuro de dólar no mercado brasileiro. Dessa forma, busca-se identificar, num caso particular, se a aplicação desse modelo pode ser, em alguma instância, justificável.

Sob o ponto de vista da forma de abordagem do problema, esta pesquisa é quantitativa. Nela, são utilizadas técnicas estatísticas para classificação e análise dos dados. Mais especificamente, empregam-se estatísticas descritivas, o intervalo de confiança da média e do desvio-padrão da diferença, a análise de variância aplicada à regressão linear e o teste de normalidade de Jarque-Bera.

Conforme definido por Lakatos e Marconi (2004, p. 53-63, 71 e 93), trata-se de uma pesquisa empírico-analítica de caráter indutivo, na qual se utilizam técnicas estatísticas para se extraírem conclusões sobre uma população, a partir de uma amostra. O objetivo do método indutivo é levar a conclusões de conteúdo mais amplo do que o das premissas nas

quais se basearam. O método estatístico possibilita que fenômenos econômicos sejam reduzidos a termos quantitativos e a manipulação estatística permite que suas relações sejam comprovadas e generalizadas. De fato, com base na análise estatística, esta pesquisa objetiva dar um passo na direção de possíveis generalizações dos resultados obtidos, fundamentados numa amostra restrita de preços de opções sobre futuro de dólar.

Consoante Silva e Menezes (2001, p. 21), sob o ponto de vista de seus objetivos, a pesquisa é exploratória e explicativa. Exploratória porque nela é explicitado o impacto, no preço da opção, decorrente da hipótese que se faz sobre a distribuição de preços do ativo-objeto. Esse impacto é analisado através da comparação dos preços fornecidos pelos modelos de Black e de Câmara para opções dentro, fora e no dinheiro. Explicativa porque se busca parcialmente explicar, para o caso particular de opções sobre futuro de dólar, as discrepâncias existentes entre os preços fornecidos pelo modelo padrão e seus correspondentes preços de mercado. Para essa explicação, utiliza-se um modelo alternativo de precificação de opções, fundamentado na premissa de que a distribuição dos preços do ativo-objeto é lognormal com assimetria negativa.

Por fim, sob o ponto de vista dos procedimentos técnicos, a pesquisa é um estudo de caso. Conforme Silva e Menezes (2001, p. 22), esse tipo de pesquisa envolve a descrição ampla, detalhada e objetiva de um assunto. No presente contexto, os temas estudados são a abordagem de precificação de derivativos (opções) de Câmara (2003) e o modelo de Câmara de precificação de opções. Ademais, o desempenho desse modelo é testado na precificação de opções sobre futuro de dólar, ou seja, num âmbito bastante específico.

5.1.1 Recursos computacionais utilizados

Na elaboração desta pesquisa, foram utilizados os seguintes programas:

- a) Matlab 6.5: programa utilizado para a construção dos gráficos de função densidade de probabilidade e de comparação de modelos e para a realização dos testes

estatísticos, com exceção da análise de variância aplicada à regressão linear, realizada no Microsoft® Excel 2003;

- b) Visual Basic (for applications) 6.3 (VBA): linguagem de programação em que as funções de cálculo dos modelos de Black e de Câmara foram escritas. As funções de precificação de opções de compra e de venda de futuros pelo modelo de Câmara são apresentadas no apêndice E;
- c) Bloomberg®: provedora de notícias e de cotações financeiras;
- d) Reuters®: provedora de notícias e de cotações financeiras.

5.2 A escolha das opções sobre futuro de dólar

A escolha das opções sobre futuro de dólar para a comparação dos modelos fundamentou-se em três pontos: primeiro, empiricamente as distribuições históricas dos preços do dólar e de seu retorno contínuo apresentaram, em vários períodos de 2004, assimetria negativa; segundo, o ativo-objeto da opção, o contrato futuro de dólar, exibe elevada liquidez, principalmente nos três primeiros vencimentos; terceiro, o mercado de opções sobre futuro de dólar vem ganhando importância e há disponibilidade de preços para tal análise.

Antes de detalhar o primeiro ponto, vale lembrar que, pelo exposto nos itens 4.1.2 e 4.3.2, a premissa de que o preço do dólar possui distribuição lognormal com assimetria negativa implica que o preço do futuro do dólar também possui. Ademais, como o contrato futuro é liquidado pelo preço do dólar à vista, apurado conforme o disposto no contrato que se encontra no anexo A, a opção sobre futuro de dólar é, na verdade, precificada em função do risco (dispersão da distribuição do preço) do dólar, que é o ativo primitivo de ambos os derivativos (futuro e opção). Visto isso, para corroborar o primeiro ponto (distribuições

históricas com assimetria negativa), foram calculadas as assimetrias das distribuições históricas dos preços do dólar e do seu retorno contínuo para os meses, trimestres, semestres e ano de 2004. As cotações diárias de fechamento da moeda foram obtidas do banco de dados da Bloomberg (código BRL CRNCY Px Last). Sendo S_t o preço de fechamento num dia e S_{t-1} o preço de fechamento no dia anterior, o retorno contínuo do dólar é dado por $\ln(S_t/S_{t-1})$. A assimetria de cada amostra foi calculada com a utilização da função *skewness* do Matlab, com correção para a tendenciosidade. Para uma amostra de N elementos, cada qual representado por X_i , de média $\bar{X}$ e desvio-padrão s , a assimetria A foi calculada como:

$$A = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \bar{X})^3}{s^3}.$$

Os resultados são apresentados na Tabela 2. Valores negativos de assimetria foram destacados em negrito. As distribuições dos preços apresentaram assimetria negativa nos meses de maio, julho e outubro e em todos os trimestres analisados. As dos retornos apresentaram assimetria negativa em janeiro, março, agosto, novembro e dezembro, em três trimestres do ano e no último semestre. Esses resultados sugerem que, ao longo do tempo, há mudanças importantes na assimetria das distribuições de preços e retornos. Além disso, dependendo do horizonte considerado, a agregação ou desagregação de dados faz até com que o sinal da assimetria mude. Por exemplo, muito embora tenha sido constatada assimetria negativa nas distribuições dos preços em todos os trimestres de 2004, o mesmo não ocorreu para os semestres e para o ano.

Nota-se ainda que a característica de assimetria negativa pareceu mais marcante na metade final do ano. Com efeito, nesse período, nas amostras mensais dos preços houve duas incidências em seis, na dos retornos, três em seis. Nas trimestrais, tanto para os preços

como para os retornos, foi constatada em todos os períodos. Finalmente, caracterizou a amostra semestral do retorno. Adicionalmente, no segundo semestre do ano, foram apuradas relativamente muitas assimetrias positivas próximas a zero, fato que fortalece a hipótese de que houve, nesse período, uma preponderância de queda de preços ou de baixos preços do dólar.

Tabela 2 – Assimetria do preço e do retorno do dólar em 2004

Ano 2004	Preço do dólar	Retorno	N
janeiro	0,8569127	-0,6341016	21
fevereiro	0,4235739	0,6961184	20
março	0,2915735	-0,2901825	23
abril	0,7574405	0,9735784	22
maio	-0,7704279	0,1219892	21
junho	0,0110076	0,0413565	22
julho	-0,2809403	0,2982923	22
agosto	0,0007012	-0,8938831	22
setembro	0,3418899	0,2123858	22
outubro	-0,3203253	0,0052403	21
novembro	0,0070815	-0,1652553	22
dezembro	0,0870914	-0,0100061	23
jan./mar.	-0,5767625	-0,2541489	64
abr./jun.	-0,3694832	0,7255236	65
jul./set.	-0,3189984	-0,1059330	66
out./dez.	-0,2637503	-0,0471522	66
jan./jun.	0,6377017	0,7802365	129
jul./dez.	0,0086713	-0,0661467	132
jan./dez.	0,1935642	0,7707638	261

Com base nessas constatações empíricas, examinou-se mais detalhadamente o último trimestre do ano. Com o objetivo de saber se houve tendência de queda das cotações da moeda, fez-se uma regressão linear do preço do dólar contra o tempo t (medido em dias, no instante inicial $t = 0$), cujos resultados são apresentados na Figura 5 e na Tabela 3. A Figura 5 claramente indica uma tendência de queda de preços. Adicionalmente, a Tabela 3 traz o resumo dos resultados da análise de variância aplicada à regressão linear, bem como os valores da estatística t de Student dos coeficientes da regressão. O alto R^2 ajustado de

0,876, o baixíssimo F de significação (quase nulo) e o sinal negativo do coeficiente angular da reta de regressão ($-0,0027$), estatisticamente significativa ao nível de 0,1%, confirmam que os preços do dólar apresentaram tendência de queda no último trimestre de 2004. Elevadas probabilidades de quedas acentuadas e baixas probabilidades de altas acentuadas são típicas de uma distribuição com assimetria negativa.

Figura 5 – Cotação diária de fechamento do dólar e regressão linear

Fonte: elaborada com base em cotações da Bloomberg.

Tabela 3 – Resumo dos resultados da regressão linear: dólar x tempo

Estatísticas de regressão								
R múltiplo	0,93688							
R-Quadrado	0,87774							
R-quadrado ajustado	0,87632							
Erro padrão	0,02603							
Observações	88							
ANOVA								
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F</i> de significação			
Regressão	1	0,41842	0,41842	617,43751	5,174E-41			
Resíduo	86	0,05828	0,00068					
Total	87	0,47670						
	Coeficientes	Erro padrão	Stat <i>t</i>	valor-p	95% inferiores	95% superiores	Inferior 99,9%	Superior 99,9%
Interseção	2,93131	0,00560	523,66338	1,873E-152	2,92018	2,94243	2,91223	2,95038
Coeficiente angular	-0,00271	0,00011	-24,84829	5,174E-41	-0,00293	-0,00250	-0,00309	-0,00234

Dos fatos observados, surge a seguinte indagação: será que nesse período a assimetria negativa observada na distribuição histórica de preços do dólar é incorporada nas expectativas do mercado na formação do preço de opções de futuro de dólar? Se as expectativas de mercado forem influenciadas pelos dados históricos de forma tal que contemplem a característica de assimetria negativa, um modelo de precificação que leva em conta essa informação poderá fornecer preços mais próximos dos praticados no mercado que outro concebido a partir de uma premissa oposta, como é o caso do modelo de Black. Assim surgiu a idéia de comparar os desempenhos dos modelos de Black e de Câmara na precificação de opções de futuro de dólar. Na verdade, houve uma escolha simultânea de ativo-objeto e modelo, isto é, dentre os modelos de precificação de opções exemplificados por Câmara (2003), elegeu-se aquele obtido a partir da hipótese de que os preços do ativo-objeto possuem distribuição lognormal com assimetria negativa, que por sua vez poderia ser utilizado na precificação de opções sobre futuro de dólar, tendo em vista as observações empíricas citadas.

Finalmente, num contexto mais amplo, em 2004 o dólar se depreciou em relação às principais (mais negociadas) moedas fortes do mundo (euro, iene, dólar canadense, franco suíço, libra esterlina e dólar australiano) e também em relação ao real, como ilustra a tabela abaixo.

Tabela 4 – Variação do dólar frente a outras moedas no ano de 2004

2004	Euro	Iene	Dólar canadense	Franco suíço	Libra esterlina	Dólar australiano	Real
Variação do dólar	-7,34%	-3,99%	-1,60%	-0,12%	-1,09%	-4,45%	-8,13%

Fonte: elaborada com base em cotações da Bloomberg.

Diversas análises financeiras publicadas ao longo desse ano, que traziam informações públicas sobre a economia dos Estados Unidos, como expectativa de

investimentos, confiança dos investidores, folha de pagamentos, relatórios do Federal Reserve, entre outros, apontavam para uma política de maior disciplina fiscal e menor ritmo de crescimento econômico. Diante desse cenário macroeconômico, a hipótese de que a distribuição do preço do dólar pudesse ser coerentemente representada por uma distribuição com assimetria negativa, que apontasse para uma maior probabilidade de depreciação acentuada da moeda frente ao real do que o contrário, pareceu ser razoável. Essa distribuição não precisaria ser a lognormal com assimetria negativa. No entanto, a mesma foi escolhida tendo em vista que sua adoção permite obter uma fórmula fechada de precificação facilmente implementável e testável, obtida recentemente por Câmara (2003). A crítica a essa distribuição como modelo representativo de preços é tecida no item 5.6.

O segundo ponto que corroborou a escolha das opções sobre futuro de dólar foi a elevada liquidez que o contrato futuro possui, principalmente no curto prazo, até o terceiro vencimento. Num mercado líquido, a diferença entre os preços de compra e venda tende a ser pequena e as oportunidades de arbitragem infreqüentes, condição que possibilita melhor formação de preços dos ativos nele negociados. A correta formação dos preços dos futuros de dólar, por sua vez, favorece o desenvolvimento e o amadurecimento do mercado de opções sobre futuro e viabiliza a correta formação dos preços das opções. Ressalta-se que a maior liquidez dos contratos futuros de dólar em relação à moeda à vista é propiciada pela negociação dos primeiros na BM&F, condição que possibilita maior riqueza e dinamismo na incorporação de um fluxo informacional (quase) contínuo em seus preços. Esse fato contribuiu para que as opções com risco cambial fossem lançadas sobre os futuros, e não sobre a moeda à vista. De fato, Garcia e Urban (2004), através da aplicação do teste de causalidade de Granger, constataram que a taxa de câmbio é formada primeiramente no mercado futuro da BM&F, para depois ser transmitida, por condição de não-arbitragem, ao mercado à vista. Os autores explicam que esse resultado empírico

encontra bastante respaldo na literatura internacional pois, além do capital necessário para participar de operações nos mercados futuros ser significativamente menor do que o exigido nos mercados à vista, os primeiros possuem maior liquidez e possibilitam maior alavancagem que os segundos (GARCIA; URBAN, 2004, p. 38).

O terceiro ponto que motivou a escolha das opções sobre futuro de dólar foi seu expressivo crescimento nos últimos cinco anos, fato que aumentou o interesse sobre esse ativo. As Tabelas 5 e 6 abaixo se referem às opções negociadas via sistema de pregão (viva voz e eletrônico) da BM&F; não incluem operações que ocorrem via sistema de balcão em que o registro é feito na BM&F. Analisando a Tabela 5, o total de contratos negociados em 2004 foi praticamente o dobro do em 2000. Ademais, o montante movimentado em prêmios sextuplicou em reais e quadruplicou em dólares entre esses anos (as variações anuais são exibidas na Tabela 6). Ademais, os dados do primeiro trimestre de 2005 (Tabela 5) indicam uma tendência que, se permanecer até o final do ano, serão estabelecidos novos patamares de volumes de contratos negociados e de prêmios pagos.

Tabela 5 – Opções sobre futuro de dólar negociadas na BM&F

	2000			2001			2002		
Tipo da opção	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)
Compra	1.068.719	883.496	481.000	908.454	3.712.612	1.501.090	790.657	4.429.925	1.501.132
Venda	259.496	115.534	63.438	303.147	357.836	148.045	157.102	455.125	168.540
Total	1.328.215	999.030	544.438	1.211.601	4.070.448	1.649.135	947.759	4.885.050	1.669.672
C/V	4,118	7,647	7,582	2,997	10,375	10,139	5,033	9,733	8,907

	2003			2004			jan.-mar. 2005		
Tipo da opção	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)	Contratos negociados	Prêmios (R\$ mil)	Prêmios (US\$ mil)
Compra	1.906.264	7.412.191	2.464.816	2.086.211	5.625.197	1.931.038	1.211.742	3.209.522	1.199.233
Venda	242.176	598.737	197.076	622.750	870.036	306.939	236.732	642.455	245.390
Total	2.148.440	8.010.928	2.661.892	2.708.961	6.495.233	2.237.977	1.448.474	3.851.977	1.444.623
C/V	7,871	12,380	12,507	3,350	6,465	6,291	5,119	4,996	4,887

Contratos negociados: volume total de contratos negociados da opção no período; prêmios: total de prêmios pagos em reais e dólares americanos no período; C/V: quociente entre os números fornecidos para as opções de compra e de venda.

Fonte: Resumo (2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005).

Tabela 6 – Opções sobre futuro de dólar negociadas na BM&F: variação anual

Var a/a	Contratos Negociados				Prêmios (R\$ mil)				Prêmios (US\$ mil)			
	01/00	02/01	03/02	04/03	01/00	02/01	03/02	04/03	01/00	02/01	03/02	04/03
Compra	-15%	-13%	141%	9%	320%	19%	67%	-24%	212%	0%	64%	-22%
Venda	17%	-48%	54%	157%	210%	27%	32%	45%	133%	14%	17%	56%

Fonte: Resumo (2000, 2001, 2002, 2003, 2004).

Sobretudo, ressalta-se o aumento na proporção de contratos e de prêmios pagos de opções de venda (queda do índice C/V) em 2004 e no primeiro trimestre de 2005. Esse dado indica um aumento da demanda por opções de venda, ou seja, que o mercado buscou mais proteção contra a depreciação do dólar frente ao real do que o fez em períodos anteriores. Novamente, isso fortalece a hipótese de que as expectativas de mercado no fim de 2004 incorporaram uma maior tendência de depreciação do dólar em relação ao real, e remete a uma suposição levantada anteriormente: se, em algum período, as expectativas de mercado contemplam uma distribuição de preços do dólar com assimetria negativa, o modelo de Câmara pode apresentar um bom resultado na precificação de opções sobre futuro de dólar, fato que eleva o interesse na verificação de seu desempenho.

5.3 Determinação do parâmetro alfa do modelo de Câmara

Para a formulação do modelo de Câmara, assume-se que a distribuição dos preços do contrato futuro é lognormal com assimetria negativa, em qualquer intervalo de tempo (item 4.3.2). Sendo F_1 o preço (aleatório) do contrato futuro em seu vencimento, tem-se que

$$\ln(\alpha - F_1) \sim N(\mu; \sigma^2).$$

Automaticamente, pela definição de distribuição lognormal, a probabilidade de F_1 exceder α é nula (item 4.3.1). Além disso, o parâmetro α , presente na relação acima e também na fórmula final de precificação, como pode ser verificado na equação (38), deve

ser determinado antes que a precificação seja efetuada. A seguir, isso será realizado segundo dois raciocínios distintos. O primeiro utiliza apenas as relações desenvolvidas neste trabalho e o segundo, uma propriedade bem difundida advinda do conceito de mundo risco-neutro.

Primeiramente, deve-se lembrar que o preço atual de um contrato futuro F , a cada instante e num mercado em equilíbrio, é determinado puramente por condição de não-arbitragem, a partir do preço atual do ativo-objeto. Conforme discutido nos itens 4.1.1 e 4.1.2, para um contrato futuro de moeda, F é dado pela equação (29), escrita novamente abaixo:

$$F = Se^{r-q},$$

onde S é o preço atual da moeda, no caso o dólar, r é a taxa de juros livre de risco doméstica e q a taxa de juros livre de risco da moeda estrangeira, ambas assumidas constantes e conhecidas até a data de vencimento do futuro.

Pelas equações (23) e (30) e do que foi demonstrado no item 4.1.2, pode-se escrever que

$$Se^{r-q} = F = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{g_1^{-1}(-\infty)}^{g_1^{-1}(+\infty)} S_1 g_1'(S_1) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [g_1(S_1) - f_1(S)]^2\right\} dS_1.$$

A relação acima é livre de preferências a risco, portanto é uma relação de avaliação risco-neutra. Como no vencimento do contrato futuro $F_1 = S_1$, no mundo risco-neutro $E[F_1] = F$. Essa igualdade deve valer qualquer que seja a distribuição de probabilidade escolhida para F_1 , inclusive quando for lognormal com assimetria negativa. Nesse caso, a equação (35) fornece o parâmetro de locação da distribuição lognormal risco-neutra com assimetria negativa:

$$\mu + \gamma_w \rho \sigma_w \sigma = \ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2}$$

Logo, a esperança de F_1 é dada por

$$E[F_1] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} F_1 (\alpha - F_1)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\ln(\alpha - F_1) - \left(\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2 \right\} dF_1 = F.$$

Pelas resoluções já efetuadas no capítulo 4 e pelas propriedades da distribuição lognormal apresentadas no apêndice A, a solução da esperança (integral) acima é dada pela diferença entre o parâmetro α e a exponencial da soma do parâmetro de locação, $\ln(\alpha - F) - \sigma^2/2$, com a metade do quadrado do parâmetro de escala σ , ou seja

$$E[F_1] = \exp \left\{ \left[\ln(\alpha - F) - \frac{\sigma^2}{2} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \right\} = \alpha - F = F.$$

Assim,

$$\alpha = 2F.$$

Caso contrário, o preço do contrato futuro não está em equilíbrio e há oportunidade de arbitragem e ganho certo. Esse resultado pode parecer um pouco estranho à primeira vista, mas só reforça que qualquer que seja a distribuição do preço de um contrato futuro, seu preço esperado no mundo risco-neutro (livre de preferências a risco), em qualquer horizonte de tempo, é dado pelo seu preço atual.

Para que haja compreensão do sentido prático de toda essa discussão, a seguir será dado um exemplo real: em 30.11.2004, a volatilidade implícita no preço de fechamento de uma opção sobre futuro de dólar no dinheiro com vencimento em sessenta e três dias úteis foi de 7,59% a.a. (dado fornecido pela Reuters). Nesse dia, o preço do contrato futuro F utilizado na chamada (*call*) de fechamento das opções com vencimento em 1.3.2005, liquidadas portanto pela PTAX800 de venda do dia 28.2.2005 (prazo total de sessenta e

dois dias úteis) foi de 2.841 (dado fornecido pela Liquidez Distribuidora de Títulos e Valores Mobiliários). A chamada de fechamento é um procedimento diário da BM&F que visa a estabelecer o preço de mercado (preço ou curva de referência) dos contratos negociados (futuros, opções etc.) e é especialmente importante para contratos ilíquidos (negócios podem ser efetivamente fechados durante uma chamada de fechamento). Com esses dados, podem-se construir os gráficos das densidades lognormais risco-neutras com assimetrias positiva e negativa do preço do contrato futuro, correspondentes aos modelos de Black e Câmara, nessa ordem. A volatilidade que será utilizada é a que foi divulgada pela Reuters, já anualizada, corrigida pelo prazo da opção:

$$\sigma = 7,59\% \times \sqrt{62/252} = 3,76\% .$$

Função densidade lognormal risco-neutra com assimetria positiva:

$$h_p(F_1) = \frac{1}{3,76\% F_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(3,76\%)^2} \left[\ln(F_1) - \left(\ln(2.841) - \frac{(3,76\%)^2}{2} \right) \right]^2 \right\}, F_1 > 0 .$$

Função densidade lognormal risco-neutra com assimetria negativa. Nesse caso,

$$\alpha = 2F = 2 \times 2.841 = 5.682 :$$

$$h_n(F_1) = \frac{1}{3,76\%(5.682 - F_1) \sqrt{2\pi}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(3,76\%)^2} \left[\ln(5.682 - F_1) - \left(\ln(5.682 - 2.841) - \frac{(3,76\%)^2}{2} \right) \right]^2 \right\}, F_1 < 5.682,$$

ou seja

$$h_n(F_1) = \frac{1}{3,76\%(5.682 - F_1) \sqrt{2\pi}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(3,76\%)^2} \left[\ln(5.682 - F_1) - \left(\ln(2.841) - \frac{(3,76\%)^2}{2} \right) \right]^2 \right\}, F_1 < 5.682.$$

As duas densidades foram plotadas no gráfico abaixo:

Figura 6 – Valores esperados idênticos e assimetrias opostas

Nota-se, em primeiro lugar, que a média das duas distribuições é igual a 2.841. Além disso, para o horizonte de sessenta e dois dias úteis, a diferença entre as densidades é pequena; todavia, quanto maior for esse intervalo ou a volatilidade, mais significativa ela será. Por último, nessas condições, a probabilidade de F_1 assumir valor menor que zero quando a assimetria é negativa é praticamente nula (na verdade, seu valor é tão pequeno que nem mesmo o Matlab, programa de enorme precisão, pôde quantificá-la).

Para que se tenha uma idéia da sensibilidade dessas densidades a mudanças de prazo e volatilidade, as mesmas funções são plotadas na Figura 7, com prazo de um ano (252 dias úteis) e volatilidade de 20% a.a., mantidos os valores de F e α . Cumpre a ressalva de que esse valor de volatilidade implícita é realista, pois foi divulgado pela Reuters para opções no dinheiro de seis meses de prazo, em 30.9.2003.

Figura 7 – Sensibilidade das densidades: aumento de prazo e volatilidade

Nesse caso, salienta-se que a média das duas distribuições permanece igual a 2.841. No entanto, para o horizonte de um ano, a diferença entre as densidades já é bem maior. Mais ainda, quando a assimetria é negativa, a probabilidade de F_1 assumir valor menor que zero é 0,01814% (valor calculado no Matlab através da função *logncdf.m*).

O segundo raciocínio que pode ser utilizado na determinação de α é o de que, conforme Hull (1997, p. 277 e 286-287), no mundo risco-neutro um contrato futuro equivale a um ativo que distribui dividendos à taxa de juros livre de risco r . Cumpre lembrar que o resultado de um investimento é formado pelos ganhos de capital (valorização no preço) e pelos dividendos recebidos. Como no mundo risco-neutro o valor esperado do retorno de qualquer investimento é a taxa de juros livre de risco, um investimento num contrato futuro não possuirá ganho de capital, pois todo ganho será proveniente do dividendo. Ou seja, o valor esperado de F_1 é seu valor atual: $E[F_1] = F$. Visto que $E[F_1] = \alpha - F$, tendo em vista a densidade lognormal risco-neutra com assimetria negativa e parâmetro de locação dado pela equação (35), deduz-se que $\alpha = 2F$.

A analogia referenciada no parágrafo anterior entre o contrato futuro e um ativo-objeto que distribui dividendos à taxa r pode ser obtida, por exemplo, pela aplicação do lema de Itô à função $F = Se^{r-q}$ quando o preço do ativo-objeto S segue um movimento browniano geométrico com taxa de variação instantânea μ e variância σ^2 (esse processo estocástico é definido no apêndice C). Na equação final obtida, deve-se igualar $\mu + q$ a r (no mundo risco-neutro o retorno total esperado é dado por r). Hull (1997, p. 221) ilustra um caso similar, deduzindo tal relação para um futuro lançado sobre um ativo que não distribui dividendos.

Esse segundo raciocínio é também empregado por Jarrow e Rudd (1982, p. 353) quando impõem que o primeiro momento central (média) da distribuição alternativa que testam deve atender à condição de neutralidade a risco.

De acordo com tudo que foi exposto, o parâmetro α pode ser unicamente determinado e será substituído por $2F$ nas equações (36) e (37) do capítulo 4, cujas versões finais, que foram empregadas neste estudo para precificação das opções sobre futuro de dólar analisadas, são apresentadas a seguir:

$$c = e^{-r(T-t)} [(-F)N(d_1) - (X - 2F)N(d_2)], \quad (39)$$

$$d_1 = \frac{\ln[(2F - X)/(F)] - (\sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (40)$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{T - t},$$

onde

c : preço da opção de compra;

F : preço atual do contrato futuro;

σ : volatilidade do preço do contrato futuro;

r : taxa de juros livre de risco;

X : preço de exercício;

$T - t$: prazo para o vencimento da opção;

A fórmula acima é o modelo de Câmara de precificação de opções sobre futuros, expresso na forma tradicional, com a variância e a taxa de juros livre de risco proporcionais ao prazo da opção.

5.4 Comparação matemática dos preços dos modelos

Para que se saiba de antemão qual dos dois modelos, de Black ou de Câmara, fornecerá o maior preço para uma dada opção de compra, basta o conhecimento de se ela está dentro ou fora do dinheiro. Para as opções analisadas neste estudo, define-se:

- a) no dinheiro $\rightarrow F = X$;
- b) dentro do dinheiro $\rightarrow F > X$;
- c) fora do dinheiro $\rightarrow F < X$.

Os preços fornecidos pelos dois modelos serão iguais quando as opções sobre futuro estiverem exatamente no dinheiro, situação em que as médias das duas distribuições (com assimetria positiva e negativa) são idênticas e iguais aos preço de exercício e preço atual do contrato futuro.

Para os demais casos, Hull (1997, p. 492-494) ensina qual deve ser o raciocínio para análise: para que uma opção de compra muito fora do dinheiro tenha valor positivo em seu vencimento, o preço do ativo-objeto deve sofrer uma grande elevação. Na distribuição com assimetria positiva, essa probabilidade é maior do que na negativa, pois sua cauda direita é mais pesada, como se pode notar na Figura 7. Logo, o modelo de Black precifica opções de compra fora do dinheiro a maior que o modelo de Câmara. Quando uma opção de compra

está fora do dinheiro, uma opção de venda de mesmas características está dentro do dinheiro. Pela paridade de opções de compra e venda, obtida puramente por condição de não-arbitragem, quanto maior for o preço de uma, maior será o preço da outra (HULL, 1997, p. 167-170 e 278-279). Assim, para uma opção de venda dentro do dinheiro, o mesmo resultado ocorre, isto é, o modelo de Black também precifica a maior uma opção de venda dentro do dinheiro que o de Câmara. Partindo de uma opção de venda muito fora do dinheiro e refazendo o raciocínio acima, conclui-se que o modelo de Câmara precifica opções de venda fora do dinheiro e opções de compra dentro do dinheiro a maior que o modelo de Black. A magnitude dessas diferenças é função das variáveis e dos parâmetros dos quais depende o preço da opção. Os gráficos que serão analisados apoiarão as conclusões finais a respeito desse assunto. Eles foram elaborados no Matlab com o uso da função *blkprice.m* (calcula o preço de uma opção pelo modelo de Black), que o programa dispõe, e de sua adaptação para o modelo de Câmara. A tabela abaixo resume esse comportamento:

Tabela 7 – Comparação de preços : opções dentro, fora e no dinheiro

Tipo \ Estado	No dinheiro	Fora do dinheiro	Dentro do dinheiro
Opção de compra	Black = Câmara	Black > Câmara	Câmara > Black
Opção de venda	Black = Câmara	Câmara > Black	Black > Câmara

A Figura 8 dá uma primeira idéia do que é genericamente observado na precificação de uma opção de compra de preço c . O índice F/X indica o quanto dentro ou fora do dinheiro está a opção. Quando $F/X = 1$, os modelos produzem o mesmo preço. Para opções fora do dinheiro, nas quais $F/X < 1$, os preços do modelo de Black são maiores que os de Câmara. Para opções dentro do dinheiro, nas quais $F/X > 1$, os preços do modelo de Black são menores que os de Câmara.

Figura 8 – Comparação genérica dos preços fornecidos pelos modelos

Nos gráficos a seguir, para que fosse transmitida uma noção mais próxima do que foi observado no mercado no final de 2004 (ordem de grandeza), fixou-se o preço de exercício: $X = 2.800$. O preço do contrato futuro F flutuará em torno de X . A tabela abaixo resume os dados utilizados:

Tabela 8 – Dados utilizados na construção dos gráficos de comparação dos modelos

Referência	X	Taxa de juros livre de risco	Volatilidade	Vida (dias úteis)	Objetivo
Figura 9	2.800	16,1%	10%	25	Representar opções de vida curta, num cenário de volatilidade baixa
Figura 10	2.800	16,1%	10%	252	Representar opções de vida longa, num cenário de volatilidade baixa
Figura 11	2.800	16,1%	40%	25	Representar opções de vida curta, num cenário de volatilidade alta
Figura 12	2.800	16,1%	40%	252	Representar opções de vida longa, num cenário de volatilidade alta

Figura 9 – Comparação dos modelos: volatilidade baixa e prazo curto

Figura 10 – Comparação dos modelos: volatilidade alta e prazo curto

Figura 11 – Comparação dos modelos: volatilidade baixa e prazo longo

Figura 12 – Comparação dos modelos: volatilidade alta e prazo longo

A Figura 9 indica que, para opções curtas num cenário de baixa volatilidade, a diferença entre os preços dos dois modelos é pequena. Pelas Figuras 10 a 12, fica claro que, para variações da ordem de 15% no quanto dentro ou fora do dinheiro está a opção, aumentos na volatilidade ou no prazo da opção causam diferenças significativas nos preços dos modelos.

As Figuras 13 e 14 que seguem, objetivam ilustrar a diferença de volatilidade implícita fornecida pelos dois modelos, dado um preço de mercado. As volatilidades implícitas para os dois modelos foram calculadas no Matlab. Para ambos, adaptou-se a função existente *blsimpv.m* (calcula a volatilidade implícita do modelo de Black-Scholes com precisão de 10^{-6}). A Tabela 9 resume os dados utilizados em cada caso.

Tabela 9 – Dados utilizados nos gráficos de variação de volatilidade implícita

Referência	X	Taxa de juros livre de risco	Volatilidade F=X	Vida (dias úteis)	c	Objetivo
Figura 13	2.800	16,1%	10%	25	34,45	Representar a variação da volatilidade implícita numa opção de vida curta
Figura 14	2.800	16,1%	20%	252	189,87	Representar a variação da volatilidade implícita numa opção de vida longa

Pelas Figuras 13 e 14, nota-se que quando a opção está no dinheiro, a volatilidade implícita nos preços fornecidos pelos dois modelos é a mesma. Na Figura 13, representativa de uma opção de prazo curto, quando $F = X = 2.800$, a volatilidade implícita é 10%. Nessas condições, percebe-se que pequenas variações no quanto uma opção está dentro ou fora do dinheiro implica em pequenas diferenças de volatilidade implícita. Por outro lado, na Figura 14, em que se representam opções de prazo longo, no cenário em que $F = X = 2.800$, a volatilidade implícita é 20%. Nessas condições, a volatilidade implícita de opções dentro ou fora do dinheiro difere de maneira mais marcante.

Figura 13 – Volatilidade implícita e prazo curto

Figura 14 – Volatilidade implícita e prazo longo

Com base em tudo que foi exposto, são tecidas as seguintes conclusões. Por assumirem distribuições de probabilidade diferentes para os preços do ativo-objeto e, conseqüentemente, atribuírem pesos distintos para os possíveis valores que podem assumir no futuro, os modelos de Black e de Câmara fornecem, na maioria dos casos, preços diferentes para opções sobre futuros. Pelas comparações realizadas, o comportamento dessa diferença pode ser assim resumido:

- a) quando a opção está no dinheiro, os preços fornecidos pelos dois modelos são idênticos, independentemente das outras variáveis e parâmetros;
- b) a diferença está relacionada a quanto dentro ou fora do dinheiro está a opção (conceito também conhecido como *moneyness* da opção). Partindo de $F/X = 1$ e variando F para mais e para menos, mantendo X constante, a diferença de preços aumenta até certo ponto e depois cai, já que o preço da opção tende a zero quanto mais fora do dinheiro ela está e tende ao valor presente da diferença entre F e X em caso oposto;
- c) a volatilidade da opção não altera o padrão resumido acima. Quanto maior a volatilidade do ativo-objeto, mais pronunciada é a diferença de preços fornecidos pelos modelos, para pequenas variações em F/X ;
- d) com o aumento do tempo para o vencimento, observa-se um aumento da diferença dos preços calculados pelos modelos, para pequenas variações em F/X .

Vale ressaltar que esses resultados advêm apenas das diferenças das distribuições do ativo-objeto. Mais especificamente, o preço da opção é uma esperança tomada em relação à distribuição do ativo-objeto adotada na construção do modelo. Como no mundo risco neutro a forma dessa distribuição é mantida, conforme demonstrado no capítulo 3, quando

se altera a distribuição, altera-se ao mesmo tempo o resultado da esperança e também o preço da opção.

5.5 Testes empíricos realizados

Nos próximos itens deste capítulo, serão descritas as metodologias empregadas na execução dos testes de normalidade e na comparação dos desempenhos dos modelos de Black e de Câmara.

5.5.1 Testes de normalidade

Antes de comparar os desempenhos dos modelos, julgou-se importante averiguar, para ambos, a plausibilidade das hipóteses que são feitas sobre a distribuição dos preços do ativo-objeto. Os testes descritos neste item foram aplicados com esse objetivo.

Salienta-se que o contrato futuro de dólar e a opção vencem na mesma data e ambos são liquidados pelo preço do ativo à vista. Tendo em vista que o preço da opção depende da distribuição do dólar à vista em seu vencimento, os testes de normalidade (para assimetria positiva) foram efetuados com base na distribuição histórica do dólar (e não do futuro de dólar).

A utilização do modelo de Black pressupõe que $\ln(F_1/F) \sim N(\mu - \ln F; \sigma^2)$ e também que $\ln F_1 \sim N(\mu; \sigma^2)$. Foi testada a hipótese de que o retorno contínuo possui distribuição normal:

$$\begin{cases} H_0: \text{o retorno contínuo diário do dólar possui distribuição normal;} \\ H_1: \text{o retorno contínuo diário do dólar não possui distribuição normal.} \end{cases}$$

Seja então S_t o preço de fechamento do dólar no dia t e S_{t-1} seu valor no dia útil anterior. O retorno do dia t r_t será definido como o logaritmo de S_t/S_{t-1} . Portanto

$$r_t = \ln \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \right].$$

Os retornos foram calculados com base nas cotações de fechamento do dólar de 30.9.2004 a 31.12.2004, obtidas da Bloomberg (sessenta e sete cotações, sessenta e seis retornos). Escolheu-se esse período para teste em virtude das observações discutidas no item 5.2.

Por outro lado, o emprego do modelo de Câmara assume que:

$$\ln(\alpha - F_1) \sim N(\mu; \sigma^2) \text{ e também que } \ln\left(\frac{\alpha - F_1}{F}\right) \sim N(\mu - \ln F; \sigma^2).$$

No item 5.2, provou-se que $\alpha = 2F$. Baseado nesse resultado, definiu-se a variável:

$$Cr_t = \ln \left[\frac{2F_{t-1} - F_t}{F_{t-1}} \right].$$

Com essa definição, objetiva-se identificar se a hipótese de lognormalidade negativa pode ser rejeitada no período analisado. Como cada vencimento de futuro relaciona-se a um α diferente, testou-se a hipótese de lognormalidade negativa diretamente através da aplicação do teste nos preços dos contratos futuros. Foram coletados sessenta e dois preços diários de fechamento, dos três contratos mais líquidos vigentes durante todo o período de análise, que foi de 30.9.2004 a 31.12.2004. Mais especificamente, foram eleitos os contratos de janeiro, fevereiro e março de 2005; seus preços foram obtidos da Bloomberg. A diferença no número de preços observados em relação ao dólar se deve ao fato de que houve cinco feriados no período, dias em que não houve pregão na BM&F, mas houve cotação de fechamento do dólar.

As seguintes hipóteses foram formuladas para o teste:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \text{a distribuição dos preços dos futuros de dólar é lognormal com assimetria} \\ \text{negativa;} \\ H_1: \text{a distribuição dos preços dos futuros de dólar não é lognormal com assimetria} \\ \text{negativa.} \end{array} \right.$$

Nas distribuições históricas de r_t e Cr_t , aplicou-se o teste de normalidade de Jarque-Bera, no qual os coeficientes de assimetria e curtose são utilizados conjuntamente, de acordo com a seguinte equação (PINDYCK; RUBINFELD, 1997, p. 47):

$$JB = \frac{N}{6} [A^2 + (K - 3)^2 / 4],$$

onde

JB : estatística de Jarque-Bera;

N : número de observações;

A : assimetria;

K : curtose.

Os autores explicam que a estatística de Jarque-Bera (JB) possui distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Sempre que JB exceder o valor crítico, deve-se rejeitar a hipótese nula. Os testes foram realizados no Matlab, pela aplicação direta da função *jbttest.m* (realiza o teste de Jarque-Bera) às amostras, com 5% de significância. Os resultados serão analisados no capítulo 6.

5.5.2 Comparação dos desempenhos dos modelos

Conforme Copeland e Weston (1988, p. 282), há duas questões práticas que devem ser consideradas nas pesquisas empíricas do modelo de Black-Scholes: (a) os dados históricos devem permitir a estimação não tendenciosa dos parâmetros do modelo; (b) na amostragem, o preço da opção deve ser tomado em sincronia com o preço do ativo-objeto.

Enquanto a primeira questão é de interpretação direta, pois parâmetros tendenciosos resultam em modelos inadequados, a segunda é mais sutil. Ela implica que não basta se tomarem, por exemplo, os preços dos últimos negócios de uma opção e de seu ativo-objeto numa análise de desempenho do modelo de Black-Scholes, pois os mesmos podem ser relativos a diferentes circunstâncias de mercado; há que se garantir que esses preços estejam em sincronia.

Mais especificamente, suponha que, num determinado dia, o último negócio da opção tenha ocorrido às 13 horas, num momento de relativa estabilidade, ao passo que o último negócio com o ativo-objeto tenha ocorrido às 17 horas, após uma alta acentuada de preços causada por um fluxo informacional não antecipado pelo mercado. Nessas circunstâncias, o preço do último negócio da opção está defasado em relação ao do último negócio do ativo-objeto. Logo, um teste que compare o preço teórico da opção, função do preço do ativo-objeto das 17 horas, ao seu preço das 13 horas, deverá produzir resultados inconsistentes, pois as expectativas de mercado dos dois horários em questão eram completamente distintas.

As questões levantadas acima foram consideradas na elaboração da metodologia de comparação dos modelos e serão oportunamente comentadas. Tendo em vista que α é função de F , o preço de uma opção, segundo os modelos de Black e de Câmara, é função de X , $T-t$, r , F e σ , todos definidos nos itens 4.1 e 5.3. Descreve-se abaixo a amostra utilizada e os valores dos parâmetros e variáveis que foram empregados na comparação dos modelos.

Os modelos foram comparados no período de 17.11.2004 a 30.12.2004, que reflete as indagações sobre o sinal da assimetria da distribuição da moeda, levantadas no item 5.2. Foram considerados todos os preços diários finais das séries de opções que foram negociadas na chamada (*call*) de fechamento matinal da BM&F (preços de fechamento do

call). Para esclarecer melhor, todos os dias, no final da manhã, ocorre a chamada de fechamento das opções sobre futuro de dólar, que baliza as operações com esses ativos para o restante do dia. Esse procedimento visa a gerar liquidez para os contratos disponíveis. Na chamada, não são todas as séries de opções que são efetivamente negociadas. Para cada vencimento de opções, dado o preço de mercado do contrato futuro, a chamada é feita série a série e ofertas de compra ou venda são colocadas pelos participantes.

Com base num resumo diário da chamada de fechamento, elaborado pela Liquidez Distribuidora de Títulos e Valores Mobiliários, os preços dos contratos futuros e das opções foram consolidados numa amostra que totalizou quinhentos e sete preços (um mil e quatorze cotações simultâneas do contrato futuro e da opção), dentre os quais quatrocentos e oitenta se referiam às opções de compra e o restante às de venda. Tenho em vista que essas últimas exibem, em geral, menor liquidez que as outras e, além disso, que o número de observações em sua amostra foi pequeno, os desempenhos dos modelos foram comparados apenas na precificação de opções de compra. Ressalta-se que esse procedimento de coleta de preços contornou o problema de sincronia mencionado.

A Tabela 10 ilustra os dados coletados para o dia 17.11.2004. Utilizou-se a média dos preços de compra e venda como a base para a comparação dos desempenhos dos modelos. Quanto mais longo é o contrato futuro, maior o seu preço, fato que pode ser explicado pela análise da equação (29). Quando a taxa de juros interna r é maior do que a taxa de juros externa q , como ocorre na relação real-dólar, a hipótese de não-arbitragem implica que o preço do futuro cresce com o prazo. Opções de mesmo vencimento possuem o mesmo ativo-objeto; por isso que, para elas, o preço do futuro é igual.

Tabela 10 – Exemplo de dados coletados para análise

Data-base	Mês	Tipo	Exercício	Compra	Venda	Vol. compra	Vol. venda	Futuro
17/11/2004	dez.	C	2850	4,5	5,0	10,3882%	10,7788%	2794
17/11/2004	dez.	C	2900	1,2	1,9	11,7188%	12,8906%	2794
17/11/2004	jan.	C	2800	52,0	53,0	8,8135%	9,0881%	2832
17/11/2004	jan.	C	2850	28,0	29,0	9,2743%	9,5337%	2832
17/11/2004	jan.	C	2900	16,0	16,5	10,4248%	10,5835%	2832
17/11/2004	fev.	C	2800	85,0	86,0	8,9111%	9,1461%	2868
17/11/2004	fev.	C	2900	38,0	39,0	10,1990%	10,4004%	2868
17/11/2004	fev.	C	3000	18,0	19,0	11,9507%	12,2192%	2868
17/11/2004	mar.	C	2900	60,0	63,0	10,1440%	10,6567%	2901
17/11/2004	abr.	C	2900	90,0	93,0	10,7513%	11,2122%	2937
17/11/2004	abr.	C	3100	34,0	36,0	13,2629%	13,6292%	2937
17/11/2004	mai.	C	3000	79,0	79,5	12,4451%	12,5153%	2971
17/11/2004	jun.	C	3000	99,5	102,5	12,3596%	12,7365%	3002
17/11/2004	ago.	C	3100	111,0	114,0	13,3759%	13,7054%	3073
17/11/2004	out.	C	3200	121,0	125,5	14,0259%	14,4684%	3145
17/11/2004	nov.	C	3200	141,0	146,0	14,2792%	14,7507%	3175

Mês: vencimento da opção (primeiro dia útil); Tipo: C – opção de compra; Compra: preço de compra; Venda: preço de venda; Vol. compra: volatilidade implícita no preço de compra (modelo de Black); Vol. venda: volatilidade implícita no preço de venda (modelo de Black).

Fonte: Liquidez Distribuidora de Títulos e Valores Mobiliários.

Seguindo a mesma linha de raciocínio de Jarrow e Rudd (1982) e Macbeth e Merville (1979, 1980), a amostra foi dividida em grupos, de acordo com dois critérios: o quanto dentro ou fora do dinheiro estava a opção, e o prazo da mesma.

Tendo em vista o primeiro critério, definiu-se o indicador m (*moneyness*), tal como

$$m = \frac{F - X}{X},$$

onde F é o preço do contrato futuro e X o preço de exercício. A Tabela 11 resume o método de classificação.

Tabela 11 – Classificação das opções quanto a *moneyness*

Classificação	Muito fora do dinheiro	Fora do dinheiro	Perto do dinheiro	Dentro do dinheiro	Muito dentro do dinheiro
m	[-13%; -3%]	] -3%; -0,5%]	] -0,5%; 0,5% [	[0,5%; 3% [	[3%; 9%]

Os limites dos intervalos foram determinados arbitrariamente. O grupo com o menor número de elementos, vinte e seis, foi o de opções muito dentro do dinheiro, e com o maior, cento e oitenta e dois, o de opções fora do dinheiro.

A amostra foi classificada quanto ao prazo em dois grupos: opções curtas, prazo menor ou igual a quarenta dias úteis, e longas, caso contrário. A idéia de quarenta dias úteis surgiu do fato de que os dois primeiros vencimentos do futuro possuem maior liquidez (dois meses ou, aproximadamente, quarenta e dois dias úteis). Portanto, opções com esse prazo podem estar melhor precificadas que as outras. Tendo em vista que as opções muito dentro do dinheiro eram todas longas, obtiveram-se nove grupos de análise.

A Tabela 12 sintetiza os grupos finais e o número de opções em cada um deles.

Tabela 12 – Número de opções por grupo

Classificação	Muito fora do dinheiro	Fora do dinheiro	Perto do dinheiro	Dentro do dinheiro	Muito dentro do dinheiro	Total
Curta	36	58	21	28	-	143
Longa	69	124	79	39	26	337
Total	105	182	100	67	26	480

A seguir, serão tecidas considerações sobre os parâmetros utilizados no cálculo dos preços das opções segundo os dois modelos.

O preço de exercício X é função da opção analisada, não cabendo mais nenhum comentário a seu respeito. O preço do contrato futuro F foi apurado juntamente como o preço de mercado da opção. O prazo da opção $T-t$ corresponde ao número de dias úteis (expresso em anos, para isso é dividido por duzentos e cinquenta e dois) entre a data em que a opção é precificada (inclusive) e a data de apuração da PTAX800 pela qual vence o contrato da opção (exclusive). É importante notar que, por questões de padronização, o prazo, a volatilidade do ativo-objeto e a taxa de juros livre de risco são anualizados. A taxa de juros livre de risco r foi calculada com base na curva diária de fechamento de mercado

PRE x DI da BM&F. As curvas referenciais da BM&F, dia-a-dia, estão disponíveis em <ftp://ftp.bmf.com.br/TaxasReferenciaisSwap/>. Foi utilizada a interpolação exponencial para a estimação da taxa (discreta) correspondente ao prazo da opção. A taxa interpolada, expressa na base 252 dias úteis, foi somada ao número um, e o logaritmo natural dessa soma foi calculado. O valor assim obtido corresponde à estimativa de r , recalculada diariamente, para cada opção, ao longo do período em que as opções foram precificadas pelos dois modelos.

Os parâmetros descritos acima não impõem, em geral, dificuldade demasiada para uma boa estimação (taxa de juros livre de risco) ou para seu conhecimento (os demais). No entanto, Hull (1997, p. 157 e 507) explica que a estimação da volatilidade do preço do ativo-objeto é uma questão prática que deve ser cuidadosamente considerada, já que ela não é diretamente observada. De fato, Wilmott (1998, p. 30-31, 71-72 e 287-288) complementa que a volatilidade influencia bastante o preço da opção. Além disso, é imprevisível, difícil de ser estimada e não permanece constante.

Conseqüentemente, foi dada maior ênfase na estimação da volatilidade que será utilizada nos modelos de precificação. Para dar maior robustez aos resultados da comparação, estimou-se a volatilidade por três critérios. O primeiro segue um raciocínio delineado por Macbeth e Merville (1980). Assumiu-se que para opções curtas e perto do dinheiro, o modelo de Black fornece um preço justo. Assim, a correta volatilidade do preço do ativo pode ser calculada a partir dos preços de mercado dessas opções e utilizadas no modelo de Black para precificar as demais opções. Como os modelos de Black e de Câmara fornecem preços similares para opções perto do dinheiro (iguais quando elas estão no dinheiro), a volatilidade encontrada também pode ser utilizada na precificação de todas as opções pelo modelo de Câmara. Esse procedimento também permite que se concentre

nas opções em que os modelos sabidamente diferem, as que estão razoavelmente dentro ou fora do dinheiro.

A volatilidade implícita, em cada dia, foi obtida a partir das opções curtas (prazo menor ou igual a quarenta) em que $|F - X| \leq 25$, cerca de 1% (de X) em termos relativos. Esse intervalo foi escolhido de forma que houvesse poucas opções a cada dia e que elas realmente estivessem perto do dinheiro. A busca nos dados retornou quarenta opções (havia dados de vinte e nove dias úteis). Para o dia 22.11.2004, a procura não retornou nenhuma opção. No banco de dados, selecionou-se as duas opções mais próximas ao critério escolhido, uma com $F - X = 70$ e outra com $F - X = -30$. A volatilidade adotada foi a média aritmética das volatilidades de compra e venda de ambas. Nos demais casos, a busca retornou os seguintes pares (número de dias; número de opções): (17; 1), (10; 2), (1;3), totalizando quarenta. Em cada dia, a volatilidade adotada foi a média aritmética das volatilidades de compra e venda das opções selecionadas. A Tabela 13 sintetiza as estimativas.

Nos outros dois critérios, utilizou-se a cotação de fechamento do dólar (obtida da Bloomberg) para estimar a volatilidade histórica, calculada tanto pelo desvio-padrão do logaritmo dos preços de fechamento da moeda (desvio de $\ln S_t$), como pelo desvio-padrão do retorno contínuo do ativo-objeto (desvio de $\ln (S_t/S_{t-1})$). O valor encontrado foi anualizado (multiplicado pela raiz quadrada de duzentos e cinquenta e dois). Para esse procedimento, é necessária a estipulação do tamanho da janela histórica de preços. Num primeiro momento, decidiu-se pelo emprego de uma regra prática que, segundo Hull (1997, p. 233-235), é de largo uso: a janela temporal utilizada para o cálculo da volatilidade deve ser igual ao prazo da opção precificada. Infelizmente, para opções longas, essa regra produziu valores de volatilidade bem maiores do que as volatilidades

implícitas. Para contornar essa situação, decidiu-se empregar uma janela curta, de dez dias úteis (arbitrariamente determinada), que refletiu um histórico recente, em relação à data-base, das oscilações de preços do dólar. Por exemplo, para uma opção cuja data-base foi dia 17.11.2004, utilizou-se a janela histórica de dez dias úteis, com término em 16.11.2004. As volatilidades encontradas são dispostas na Tabela 13.

Tabela 13 – Síntese das volatilidades estimadas pelos três métodos

Data-base	Implícita	Retorno	Log(preço)
17/11/2004	9,4040%	7,3560%	10,0980%
18/11/2004	10,3088%	7,6454%	13,6531%
22/11/2004	10,7419%	8,7801%	14,7846%
23/11/2004	11,0382%	8,7501%	14,6868%
24/11/2004	10,9383%	8,7968%	15,0784%
25/11/2004	9,4177%	9,5823%	13,1475%
26/11/2004	9,2560%	9,5935%	11,0743%
29/11/2004	10,0494%	8,7343%	11,3955%
30/11/2004	10,3424%	9,1606%	9,9324%
01/12/2004	10,2295%	10,1411%	10,3474%
02/12/2004	10,8063%	9,3013%	12,6787%
03/12/2004	10,7849%	10,0868%	11,7553%
06/12/2004	11,5631%	10,1698%	9,9977%
07/12/2004	10,5499%	9,6267%	9,5699%
08/12/2004	12,2314%	12,0716%	10,4469%
09/12/2004	12,0262%	11,8707%	10,8182%
13/12/2004	11,2030%	12,0715%	15,2395%
14/12/2004	11,0914%	12,5301%	15,4933%
15/12/2004	10,1633%	11,0851%	15,3989%
16/12/2004	10,2783%	13,6130%	14,2623%
17/12/2004	10,1318%	13,2899%	13,9933%
20/12/2004	10,4980%	13,6988%	13,6270%
21/12/2004	11,1389%	14,9721%	18,3321%
22/12/2004	11,4014%	13,5011%	19,8946%
23/12/2004	11,3220%	13,5870%	20,2985%
27/12/2004	11,3022%	12,5894%	16,8759%
28/12/2004	10,7473%	12,6369%	15,2014%
29/12/2004	10,7773%	12,2839%	10,8697%
30/12/2004	10,7910%	10,9832%	11,8988%

Em resumo, procurou-se reduzir os problemas inerentes à estimação da volatilidade através da adoção de três métodos para sua estimação. Constatações similares quanto aos desempenhos dos modelos, independentemente do método adotado, indicam com maior segurança qual deles é o melhor.

A comparação dos desempenhos dos modelos foi efetuada em função do erro de precificação D e do erro relativo de precificação Dr , definidos como:

$$D = c_{mercado} - c_{modelo},$$

$$Dr = \frac{c_{mercado} - c_{modelo}}{c_{modelo}},$$

onde

$c_{mercado}$: preço de mercado da opção;

c_{modelo} : preço calculado pelo modelo (Black ou Câmara) para a opção.

Calcularam-se os intervalos de confiança da média e do desvio-padrão de D para os nove grupos de opções. O seguinte raciocínio balizou a análise dos resultados: se os modelos não apresentam viés na precificação de opções, D possui distribuição normal, com média zero. Como efeito, o intervalo de confiança calculado para a média $m(D)$, em cada caso, deve conter o valor zero. Se o limite inferior do intervalo (ic-) é positivo, o modelo consistentemente subestima o preço das opções do grupo em análise. Por outro lado, se o limite superior do intervalo (ic+) é negativo, o modelo em média superestima o preço das opções do grupo. Tanto para as médias como para os desvios-padrão, intervalos de confiança mais estreitos denotam maior aderência do modelo aos preços de mercado.

As estimativas foram calculadas no Matlab, através da função *normfit.m* (para um conjunto de dados com distribuição normal, retorna a média, o desvio-padrão e os intervalos de confiança de ambos, no nível de significância fornecido). O nível de significância escolhido foi 5%. A média $m(D)$, o desvio $s(D)$ e seus respectivos intervalos de confiança, calculados a partir dos preços fornecidos por cada modelo, foram um a um comparados nas nove amostras.

Estimaram-se ainda a média $m(Dr)$ e o desvio-padrão $s(Dr)$ do erro relativo de precificação. Tomou-se cuidado especial com preços (de opções) excessivamente baixos, típicos das opções curtas muito fora e fora do dinheiro. Em alguns casos, Dr assumiu valores bastante elevados, que distorciam as conclusões da análise. Para minimizar esse problema, foram excluídas dessa análise (de Dr) opções cujos preços eram menores ou iguais a R\$ 0,15 (por mil dólares), o que resultou, nos casos extremos, em apenas cinco eliminações de preços de opções curtas muito fora do dinheiro e três de curtas fora do dinheiro. Em compensação, os resultados passaram a apresentar maior coerência quando analisados em conjunto.

Por último, calculou-se o erro quadrático médio de D $EQM(D)$ dos preços dos modelos para todas as amostras. Essa estatística é a raiz quadrada da média de D^2 .

O objetivo de analisar conjuntamente as estatísticas descritas, bem como os intervalos de confiança inferior e superior ($ic-$ e $ic+$) da média $m(D)$ e de seu desvio $s(D)$, foi o de responder as seguintes perguntas: (a) os modelos de Black e de Câmara apresentam vieses, de forma sistemática, na precificação de opções de futuro de dólar?; (b) entre os dois modelos de precificação, há o que fornece preços consistentemente mais aderentes aos preços de mercado?

Os resultados dos testes são apresentados no capítulo 6.

5.6 Limitação do modelo

A principal limitação do modelo é que ele admite que o preço do ativo-objeto pode assumir valores negativos, o que é uma hipótese irreal, tendo em vista as opções analisadas neste estudo. No entanto, considerando os atuais níveis de preço e volatilidade do ativo-objeto e também os prazos das opções analisadas (até um ano), a probabilidade de o preço

ser negativo é muito próxima de zero, como calculado no item 5.3. Consequentemente, na prática ela pode ser desprezada. Opções mais longas ou maior volatilidade certamente agravariam esse problema, o que pediria considerações adicionais sobre a questão.

Ressalta-se que Copeland e Weston (1988, p. 208) utilizam argumentação similar à apresentada acima ao advogarem a favor do CAPM, já que os retornos discretos dos ativos, assumidos normalmente distribuídos, implicam que os preços dos ativos podem assumir valores negativos em condições adversas de mercado. Contudo, o modelo é amplamente utilizado, pois a probabilidade disso ocorrer é praticamente nula.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

“Former student: professor, this is the same examination you gave to my class when I was a student twenty years ago. Don’t you ever change the questions?”

Professor: the questions don’t change – just the answers.”

(COPELAND; WESTON, 1988, p. 401)

6.1 Testes de normalidade

A Tabela 14 sintetiza os resultados dos testes de normalidade. Os possíveis valores para a hipótese resultante são zero e um. Zero indica que a hipótese nula não pode ser rejeitada; um indica o contrário.

Tabela 14 – Síntese dos testes de normalidade

Dado	Dólar	Futuro jan. 05	Futuro fev. 05	Futuro mar. 05
Tamanho da amostra	66	61	61	61
Hipótese resultante	0	0	0	0
Valor-p	76,12%	35,75%	36,15%	35,26%
Estatística de Jarque-Bera	0,5458	2,0574	2,0348	2,0850
Valor crítico	5,9915	5,9915	5,9915	5,9915

A hipótese nula não foi rejeitada em nenhum dos testes. Ademais, nota-se que as estatísticas de Jarque-Bera estão bem abaixo do valor crítico de 5,9915, correspondente a 5% de significância. Pelos valores-p encontrados, aparentemente a variável r_t possui maior aderência à distribuição normal do que cada uma das variáveis C_{r_t} definidas para os contratos futuros, que apresentaram valores-p próximos. Essa observação sugere que os preços dos futuros podem não ser tão bem representados por uma distribuição lognormal com assimetria negativa como o são por uma lognormal com assimetria positiva.

Em síntese, ao nível de 5% de significância, não se pode rejeitar a hipótese nula em nenhum dos casos. Para o modelo de Black, isso significa que não se pode rejeitar a hipótese de que os preços do dólar possuem distribuição lognormal. Analogamente, para o modelo de Câmara, não se pode rejeitar a suposição de que os preços do ativo-objeto possuem distribuição lognormal com assimetria negativa. Portanto, *a priori*, nada impede a utilização dos modelos de Black e de Câmara para a precificação de opções sobre futuro de dólar.

6.2 Comparação dos desempenhos dos modelos

Para cada um dos três critérios de estimação da volatilidade dos preços do dólar foi elaborada uma tabela comparativa dos desempenhos dos modelos. As mesmas encontram-se no fim do capítulo. Especificamente, a Tabela 15 mostra os resultados da comparação dos desempenhos dos modelos para o primeiro critério de estimação: volatilidade implícita nos preços das opções curtas perto do dinheiro. Para essas opções, os desempenhos dos modelos foram similares. Isso era esperado, pois os modelos fornecem preços próximos quando $F/X \cong 1$ (Figura 8). Para os dois modelos, os intervalos de confiança de $m(D)$ incluem o valor zero. Assim, no nível de 5% de significância, os modelos não subestimam ou superestimam consistentemente os preços das opções nesse grupo. As estatísticas dos dois modelos, analisadas em conjunto, apontam para uma ligeira superioridade do modelo de Black (menores média e desvio-padrão, intervalos de confiança mais estreitos e menor erro quadrático médio).

Para opções longas perto do dinheiro, os modelos também apresentaram desempenho parecido. Pelas mesmas razões apontadas no parágrafo acima (menores média e desvio-padrão, intervalos de confiança mais estreitos e menor erro quadrático médio), o modelo de

Black foi superior. No entanto, constatou-se um viés de subestimação de preços nos dois modelos, já que os limites inferiores dos intervalos de confiança de $m(D)$ são maiores que zero, o que também implica em não aderência dos preços dos modelos aos de mercado (D não possui média zero). Esse mesmo padrão de resultados foi observado para opções fora e muito fora do dinheiro, com a ressalva de que as diferenças absolutas de todas as estatísticas aumentaram (tornaram-se mais a favor do modelo de Black). Por exemplo, o erro quadrático médio do modelo de Black nas opções longas muito fora do dinheiro foi 25,7, cerca de 10% menor que o apresentando pelo modelo de Câmara. A média do erro relativo de precificação do modelo de Black, nas opções curtas muito fora do dinheiro, foi aproximadamente 40% menor que a do modelo de Câmara.

Nas opções longas dentro do dinheiro e muito dentro do dinheiro, a tendência de subestimação de preços dos modelos permaneceu. Os limites inferiores dos intervalos de confiança de $m(D)$ foram maiores que zero. Curiosamente, o modelo de Câmara passou a apresentar estatísticas em geral melhores que o modelo padrão (para opções muito dentro do dinheiro, todas as estatísticas calculadas para o modelo alternativo são melhores).

Nas opções curtas dentro do dinheiro, a tendência de os modelos subestimarem os preços de opções foi revertida. Nesse caso, os limites superiores dos intervalos de confiança de $m(D)$ são menores que zero, indicando que os modelos em média superestimam os preços dessas opções. As estatísticas do modelo de Black são novamente superiores, com exceção de $s(Dr)$, igual para os dois.

Os resultados da Tabela 15 sugerem que os desempenhos dos dois modelos foram muito aquém do que era esperado, pois só em um caso, de nove analisados, os intervalos de confiança de $m(D)$ incluíram o valor zero, justamente na amostra das opções que serviu de base para a estimação da volatilidade implícita. Mais ainda, evidencia-se que os modelos só produziriam melhores resultados se fosse utilizada uma volatilidade diferente

para cada amostra analisada, o que claramente contraria a hipótese de volatilidade constante e conhecida do ativo-objeto. Na verdade, esse fato aponta para uma falha de ambos os modelos, quando utilizados para precificar opções sobre futuro de dólar. Deixando de lado os vieses constatados, o modelo de Black apresentou melhor desempenho em sete das nove amostras (praticamente em todas as estatísticas), o que foi surpreendente, tendo em vista que a amostra foi propositadamente coletada em um período que supostamente refletiu uma tendência de assimetria negativa da distribuição do ativo-objeto. Os resultados encontrados levam a crer que essa suposição foi equivocada.

A análise da Tabela 16 corrobora o que foi descrito. Entretanto, analisando as estatísticas em conjunto, dessa vez o modelo de Black foi melhor em seis das nove amostras, e de forma menos acentuada. Na amostra de opções curtas perto do dinheiro, os desempenhos dos modelos foram praticamente iguais, o que não ocorreu na análise anterior. O fato de os intervalos de confiança de $m(D)$ conterem o valor zero um número maior de vezes (Black, três casos; Câmara, dois) foi a maior alteração em relação ao padrão observado na Tabela 15 (em que isso ocorreu apenas nas opções curtas perto do dinheiro, para os dois modelos). De fato, com a nova volatilidade, o modelo de Black precificou melhor opções curtas dentro do dinheiro e longas muito dentro do dinheiro, casos em que o valor zero está contido nos intervalos de confiança estimados. O modelo de Câmara precificou melhor opções longas muito dentro do dinheiro. Essas constatações, por sua vez, depõem a favor da estimação da volatilidade através da utilização do desvio-padrão dos retornos do ativo-objeto (ao invés da volatilidade implícita). Talvez outros métodos de estimá-la levassem a resultados ainda melhores. Adicionalmente, percebe-se que os modelos passaram a superestimar opções curtas perto do dinheiro. Todavia, uma análise mais cautelosa mostra que o valor de $m(D)$ encontrado não é significativamente diferente de zero, o que mantém o resultado anterior. Por último, mais uma vez os

desempenhos dos modelos situaram-se abaixo das expectativas, haja vista o alto número de vezes que os intervalos de confiança estimados não contiveram o valor zero.

A Tabela 17 traz um panorama diferente dos anteriores. No entanto, o fato de os intervalos de confiança estimados para as opções curtas perto do dinheiro não incluírem o valor zero foi um mau sinal. Isso porque o pressuposto básico (e aceito) em relação ao modelo de Black-Scholes é o de que precifica corretamente opções no dinheiro quando a volatilidade é bem estimada (MACBETH; MERVILLE, 1980, p. 290). Dessa forma, por ter havido uma mudança radical em relação aos padrões anteriores e por uma premissa importante não ter sido respeitada, os resultados apresentados na Tabela 17 foram considerados imprecisos, o que sugere que a estimação da volatilidade pelo desvio-padrão do logaritmo dos preços não foi um bom método.

Por fim, a observação de que os modelos tendem a subestimar opções muito dentro ou muito fora do dinheiro sugere que o mercado trabalha com volatilidades mais altas para precificar essas opções. Assim, um modelo que considere esse efeito tem o potencial de trazer melhores resultados que os obtidos com o modelo alternativo. Ademais, essa observação também explica em parte porque o modelo de Black é, em geral, melhor para opções muito fora do dinheiro e pior para as muito dentro: como o modelo padrão precifica opções fora do dinheiro a maior que o modelo de Câmara e o inverso ocorre para opções dentro do dinheiro, se a hipótese acima quanto à volatilidade de mercado estiver correta, o modelo de Black errará, em média, menos ao precificar opções muito fora do dinheiro e mais ao precificar as muito dentro, como de fato ocorreu.

Em face de tudo que foi exposto, conclui-se que a hipótese nula deste estudo não pode ser rejeitada, ou seja, no período analisado, o modelo de Câmara (alternativo) não produz resultados melhores que o modelo de Black (padrão) na precificação de opções sobre futuro de dólar.

Tabela 15 – Precificação baseada na volatilidade implícita nos preços das opções

Comparação dos modelos: diferenças em relação aos preços de mercado (utilização da volatilidade implícita nos preços das opções curtas perto do dinheiro)																			
Muito fora do dinheiro					Fora do dinheiro					Perto do dinheiro					Dentro do dinheiro				
Curtas Longas					Curtas Longas					Curtas Longas					Curtas Longas				
Black	Câmara	Black	Câmara		Black	Câmara	Black	Câmara		Black	Câmara	Black	Câmara		Black	Câmara	Black	Câmara	
m(D)	3,412	3,910	21,335	23,827	2,260	2,647	29,072	30,247		0,114	0,129	17,042	17,066		-1,127	-1,712	11,155	10,341	
ic-	2,710	3,078	17,857	20,050	1,756	2,088	26,464	27,558		-0,085	-0,074	14,340	14,356		-1,717	-2,350	6,946	6,107	
ic+	4,114	4,742	24,814	27,604	2,765	3,207	31,679	32,936		0,312	0,332	19,744	19,776		-0,536	-1,074	15,364	14,575	
s(D)	2,075	2,459	14,480	15,723	1,918	2,128	14,668	15,128		0,437	0,445	12,065	12,098		1,524	1,646	12,984	13,062	
ic-	1,683	1,994	12,402	13,467	1,622	1,799	13,042	13,450		0,334	0,341	10,432	10,461		1,205	1,302	10,611	10,675	
ic+	2,707	3,207	17,400	18,894	2,348	2,606	16,762	17,287		0,631	0,643	14,307	14,346		2,074	2,241	16,733	16,834	
EQM(D)	3,978	4,601	25,726	28,484	2,954	3,385	32,536	33,792		0,441	0,453	20,836	20,875		1,873	2,355	16,991	16,528	
m(Dr)	1,870	2,678	1,658	2,624	0,321	0,397	0,405	0,431		0,003	0,004	0,216	0,216		-0,016	-0,024	0,114	0,104	
s(Dr)	1,617	2,393	1,362	2,815	0,315	0,384	0,154	0,165		0,019	0,020	0,120	0,121		0,024	0,024	0,122	0,123	

Tabela 16 – Precificação baseada na volatilidade histórica dos retornos contínuos

		Comparação dos modelos: diferenças em relação aos preços de mercado (utilização do desvio-padrão histórico dos retornos contínuos do ativo-objeto)																	
		Muito fora do dinheiro				Fora do dinheiro				Perto do dinheiro				Dentro do dinheiro				Muito dentro do dinheiro	
		Curtas		Longas		Curtas		Longas		Curtas		Longas		Curtas		Longas		Longas	
		Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara
m(D)	2,751	3,292	20,601	23,059	1,371	1,775	29,233	30,413	-1,707	-1,690	14,905	14,931	-1,729	-2,328	8,894	8,073	3,284	0,655	
ic-	1,768	2,278	16,788	19,036	0,025	0,431	25,438	26,594	-3,960	-3,943	11,361	11,384	-3,932	-4,595	4,486	3,628	-0,634	-2,961	
ic+	3,733	4,307	24,413	27,082	2,717	3,120	33,027	34,231	0,546	0,563	18,449	18,478	0,474	-0,060	13,301	12,517	7,203	4,271	
s(D)	2,904	2,998	15,870	16,747	5,119	5,114	21,346	21,481	4,949	4,949	15,824	15,835	5,681	5,848	13,597	13,710	9,701	8,952	
ic-	2,355	2,431	13,593	14,344	4,328	4,323	18,979	19,099	3,786	3,786	13,683	13,693	4,492	4,623	11,112	11,204	7,608	7,021	
ic+	3,788	3,910	19,070	20,124	6,267	6,261	24,393	24,546	7,147	7,147	18,765	18,778	7,733	7,959	17,523	17,669	13,391	12,358	
EQM(D)	3,970	4,425	25,934	28,427	5,257	5,371	36,146	37,184	5,122	5,117	21,665	21,691	5,841	6,196	16,101	15,758	10,063	8,803	
m(Dr)	1,555	2,342	2,187	3,458	0,640	0,781	0,472	0,499	-0,028	-0,026	0,212	0,213	-0,017	-0,025	0,106	0,096	0,017	0,000	
s(Dr)	2,045	3,274	2,091	4,037	1,581	1,916	0,362	0,374	0,184	0,185	0,219	0,219	0,089	0,090	0,149	0,149	0,063	0,061	

Tabela 17 – Precificação baseada na volatilidade histórica dos logaritmos dos preços

	Comparação dos modelos: diferenças em relação aos preços de mercado (utilização do desvio-padrão histórico do logaritmo dos preços do ativo-objeto)																		
	Muito fora do dinheiro				Fora do dinheiro				Perto do dinheiro				Dentro do dinheiro				Muito dentro do dinheiro		
	Curtas		Longas		Curtas		Longas		Curtas		Longas		Curtas		Longas		Longas		
	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	Black	Câmara	
m(D)	-0,798	0,014	11,060	14,610	-3,624	-3,096	6,147	7,682	-9,220	-9,199	-3,043	-3,013	-9,237	-9,985	-5,983	-7,065	-3,878	-6,935	
ic-	-2,846	-1,898	6,555	9,926	-5,568	-5,020	2,120	3,686	-13,872	-13,847	-8,070	-8,046	-13,299	-14,126	-12,816	-13,983	-9,856	-13,098	
ic+	1,249	1,927	15,564	19,293	-1,681	-1,173	10,174	11,678	-4,569	-4,550	1,984	2,021	-5,174	-5,845	0,850	-0,147	2,099	-0,772	
s(D)	6,052	5,652	18,751	19,497	7,392	7,316	22,653	22,481	10,218	10,212	22,444	22,470	10,477	10,678	21,078	21,341	14,800	15,259	
ic-	4,909	4,584	16,061	16,700	6,249	6,185	20,142	19,989	7,817	7,813	19,408	19,430	8,284	8,442	17,226	17,441	11,607	11,967	
ic+	7,894	7,372	22,532	23,429	9,050	8,957	25,886	25,690	14,756	14,747	26,616	26,647	14,261	14,534	27,165	27,504	20,430	21,064	
EQM(D)	6,020	5,573	21,652	24,250	8,175	7,885	23,384	23,672	13,581	13,562	22,509	22,530	13,826	14,480	21,649	22,219	15,022	16,492	
m(Dr)	0,652	1,125	0,873	1,513	-0,122	-0,081	0,101	0,120	-0,208	-0,207	-0,004	-0,004	-0,113	-0,121	-0,048	-0,057	-0,028	-0,045	
s(Dr)	1,521	2,354	1,295	2,339	0,395	0,423	0,284	0,291	0,190	0,190	0,228	0,228	0,126	0,126	0,190	0,190	0,090	0,090	

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Sobre os resultados alcançados

O objetivo central do presente estudo foi explicar, demonstrar e testar um modelo alternativo de precificação de opções. O trabalho culminou com a comparação dos preços fornecidos pelo modelo de Câmara (alternativo) aos fornecidos pelo modelo de Black (padrão).

Mostrou-se, com sucesso, que um desvio na hipótese de lognormalidade da distribuição dos preços do ativo-objeto resulta em diferenças muitas vezes relevantes para os preços das opções lançadas sobre o ativo. Com base na metodologia de Câmara (2003), também foi demonstrado como, partindo de condições gerais de equilíbrio, uma fórmula de precificação de opções sobre futuros pode ser obtida.

Por fim, vale ressaltar que os resultados obtidos estão em linha com a literatura, no sentido de que é raro concluir com êxito que um modelo alternativo é melhor que o modelo de Black-Scholes (ou que suas extensões mais comumente empregadas), de forma a eliminar, consistentemente, seus conhecidos vieses. Na prática, a eliminação de parte dos vieses do modelo se dá através de algumas adaptações à idéia original de Black e Scholes (1973), como a utilização de uma volatilidade obtida a partir de uma matriz de volatilidades, relacionada ao prazo e ao *moneyness* da opção. Com isso, o mercado alinha os preços do modelo às suas expectativas, mantendo ao mesmo tempo a facilidade de uso que lhe é característica e que o distingue de modelos alternativos mais complexos, que por vezes demandam maiores recursos computacionais e possuem parâmetros de difícil estimação. Com efeito, não é por acaso que o modelo de Black-Scholes é o modelo padrão

de precificação de opções há mais de trinta anos. Surpreendente seria se tivéssemos constatado o inverso.

7.2 Outros estudos

Novos estudos poderiam utilizar esta dissertação como uma fonte de referência aos assuntos discutidos, por vezes demonstrados. Por exemplo, apesar dos testes de normalidade (do logaritmo) serem um indicador importante de se a hipótese de lognormalidade de preços é coerente, uma análise mais aprofundada da distribuição real dos preços do ativo-objeto pode revelar que outras distribuições conhecidas são melhores candidatas à sua representação. Modelos de precificação mais robustos poderiam então ser desenvolvidos.

Ainda nessa linha, se a distribuição empírica do preço do ativo não puder ser bem aproximada por uma distribuição conhecida, que resulte numa fórmula fechada de precificação, métodos numéricos, como o desenvolvido por Jarrow e Rudd (1982), podem ser estudados, desenvolvidos e testados.

Por fim, estudos sobre como a liquidez das opções analisadas afeta seus preços de mercado poderiam esclarecer parte dos vieses por nós constatados, já que a liquidez pode estar diretamente relacionada ao *moneyness* e ao prazo das opções sobre futuro de dólar.

7.3 Sobre o atendimento do objetivo proposto

O objetivo proposto, que foi o de averiguar se um modelo alternativo e relativamente novo de precificação de opções traz ganhos significativos em relação ao modelo de precificação comumente utilizado, foi plenamente atendido.

Além do modelo de Câmara ter sido testado, a metodologia de precificação de Câmara (2003) foi pormenorizada nos capítulos 3 e 4. Conceitos importantes e fundamentais à prática atual da Teoria de Finanças, como os papéis da teoria de utilidade e da ausência de arbitragem na precificação de ativos, foram discutidos. Além disso, muitos estudos célebres foram referenciados ao longo desta dissertação, o que trouxe uma visão histórica da evolução da Teoria de Opções. Por fim, o modelo alternativo foi adaptado a opções sobre futuros e matematicamente comparado ao modelo de Black. Concluiu-se que a hipótese nula do estudo (item 1.4) não pode ser rejeitada.

REFERÊNCIAS

AÏT-SAHALIA, Y.; LO, A. W. Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. **Journal of Finance**, v. 53, n. 2, p. 499-547, 1998.

_____. Nonparametric risk management and implied risk aversion. **Journal of Econometrics**, v. 94, p. 9-51, 2000.

ARNOLD, T.; BUTLER, A. W.; CRACK, T. F.; ALTINTIG, A. **Impact**: what influences finance research?, 2001. Disponível em: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=271661>. Acesso em: 5 mar. 2005.

BAI, J.; NG, S. Tests for skewness, kurtosis, and normality for time series data. **Boston College Working Papers in Economics n. 501**, 2001. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/boc/bocoec/501.html>>. Acesso em: 28 dez. 2004.

BARBERIS, N.; THALER, R. A survey of behavioral finance. In: CONSTANTINIDES, G. M.; HARRIS, M.; STULZ, R. (Eds.). **Handbook of the economics of finance**. Chicago: Elsevier Science, 2003. cap. 18, p. 1.053-1.123. Disponível em: <<http://gsbwww.uchicago.edu/fac/richard.thaler/research/survey%20of%20behaviorial.pdf>>. Acesso em: 6 fev. 2005.

BAXTER, M.; RENNIE, A. **Financial calculus**: an introduction to derivative pricing. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

BERNSTEIN, P. L. **Against the Gods**: the remarkable story of risk. New York: John Wiley & Sons, 1996.

BICK, A. On the consistency of the Black-Scholes model with a general equilibrium framework. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 22, n. 3, p. 259-275, 1987.

_____. On viable diffusion price processes of the market portfolio. **Journal of Finance**, v. 45, n. 2, p. 673-689, 1990.

BLACK, F. Beta and return. **Journal of Portfolio Management**, v. 20, n. 1, p. 8-18, 1993.

_____. Capital market equilibrium with restricted borrowing. **Journal of Business**, v. 45, n. 3, p. 444-455, 1972.

BLACK, F; SCHOLES, M. The valuation of option contracts and a test of market efficiency. **Journal of Finance**, v. 27, p. 497-505, 1972.

_____. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973.

BREALEY, R. A.; MYERS, S. C. **Principles of corporate finance**. 6th ed. Boston: McGraw Hill, 2000.

BREEDEN, D. T. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 265-296, 1979.

BREEDEN, D. T.; GIBBONS, M. R.; LITZENBERGER, R. H. Empirical test of the consumption-oriented CAPM. **Journal of Finance**, v. 44, n. 2, p. 231-262, 1989.

BRENNAN, M. J. The pricing of contingent claims in discrete time models. **Journal of Finance**, v. 34, n. 1, p. 53-68, 1979.

BRYN, G.; HUBERT, M.; STRUYF, A. A robustification of the Jarque-Bera test of normality. In: **COMPSTAT'2004 Symposium**, 2004. Disponível em: <<http://wis.kuleuven.be/stat/Papers/tailweightCOMPSTAT04.pdf>>. Acesso em: 25 nov. 2004.

CÂMARA, A. A generalization of the Brennan-Rubinstein approach for the pricing of derivatives. **Journal of Finance**, v. 58, n. 2, p. 805-820, 2003.

CHABI-YO, F.; GARCIA, R.; RENAULT, E. State dependence in fundamentals and preferences explains risk aversion puzzle. **Bank of Canada Working Paper 2005-9**, 2005. Disponível em: <<http://www.bankofcanada.ca/publications/working.papers/2005/wp05-9.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2005.

CHAN, L. K. C.; LAKONISHOK, J. Are reports of beta's death premature? **Journal of Portfolio Management**, v. 19, n. 4, p. 51-62, 1993.

CHANCELLOR, E. **Devil take the hindmost**: a history of financial speculation. New York: Penguin, 2000.

CLEMEN, R. T.; REILLY, T. **Making hard decisions**: with DecisionTools®. Duxbury: Duxbury Thomson Learning, 2001.

COCHRANE, J. H. **Asset pricing**. New Jersey: Princeton University Press, 2001.

COPELAND, T. E.; WESTON, J. F. **Financial theory and corporate policy**. 3rd ed. New York: Addison-Wesley, 1988.

COURTAULT, J. M.; KABANOV, Y.; BRU, B.; CRÉPEL, P.; LEBON, I.; MARCHAND, A. L. Louis Bachelier: on the centenary of the théorie de la spéculation. **Mathematical Finance**, v. 10, n. 3, p. 341-353, 2000.

COX, J. C.; ROSS, S. A. The valuation of options for alternative stochastic processes. **Journal of Financial Economics**, v. 3, p. 145-166, 1976.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 229-263, 1979.

COX, J. C.; INGERSOLL JR., J. E.; ROSS, S. A. The relation between forward prices and futures prices. **Journal of Financial Economics**, v. 9, p. 321-346, 1981.

CUTHBERTSON, K.; NITZSCHE, D. **Financial engineering**: derivatives and risk management. New York: John Wiley & Sons, 2001.

DIMSON, E.; MUSSAVIAN, M. Three centuries of asset pricing. **Journal of Banking & Finance**, v. 23, p. 1.745-1.769, 1999.

ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. Modern portfolio theory, 1950 to date. **Journal of Banking & Finance**, v. 21, p. 1743-1759, 1997.

_____. **Modern portfolio theory and investment analysis**. 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical works. **Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383-417, 1970.

_____. Efficient capital markets II. **Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1575-1617, 1991.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. The cross section of expected stocks return. **Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.

FAMA, E. F.; MACBETH, J. D. Risk, return, and equilibrium: empirical tests. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 607-636, 1973.

GALHARDO, E.; GUIMARÃES, J. L. **Introdução à metodologia científica**. 2000. Disponível em: <<http://www.assis.unesp.br/~egalhard/metcien.htm#e>>. Acesso em: 3 mar. 2005.

GARCIA, M. G. P.; URBAN, F. **O mercado interbancário de câmbio no Brasil**. 2004. Disponível em: <<http://www.econ.puc-rio.br/Mgarcia/Papers/Garcia&Urban040325.PDF>>. Acesso em: 25 nov. 2004.

GIAMOURIDIS, D. Inferring investors' risk preferences from option prices and asset returns. **Applied Financial Economics**, v. 15, n. 7, p. 479-488, 2005. Disponível em: <[http://www.aislab.aueb.gr/hfaa/ar/DGiamouridis\(HFAA\).pdf](http://www.aislab.aueb.gr/hfaa/ar/DGiamouridis(HFAA).pdf)>. Acesso em: 10 mar. 2005.

GIBBONS, M. R. The interrelations of finance and economics: empirical perspectives. **The American Economic Review**, v. 77, n. 2, p. 35-41, 1987.

HAIR JR., J. F.; ANDERSON, R. E.; TATHAM, R. L.; BLACK, W. C. **Multivariate data analysis**. New York: Macmillan, 1998.

HARRISON, J. M.; KREPS, D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. **Journal of Economic Theory**, v. 2, n. 3, p. 381-408, 1979.

HAUGEN, R. A. **The inefficient stock market: what pays off and why** (Apresentação em Power Point). New Jersey: Prentice Hall, 1999a. Disponível em: <<http://www.newfinance.com/books>>. Acesso em: 15 fev. 2005.

_____. **The new finance**. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999b.

HULL, J. C. **Introdução aos mercados futuros e de opções**. 2. ed. São Paulo: Cultura, 1996.

_____. **Options, futures and other derivatives**. 3th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

ITÔ, KIIYOSI. On a formula concerning stochastic differentials. **Nagoya Mathematics Journal**, v. 3, p. 55-65, 1951.

JARROW, R. In honor of the Nobel laureates Robert C. Merton and Myron S. Scholes: a partial differential equation that changed the world. **Journal of Economic Perspectives**, v. 13, n. 4, p. 229-248, 1999.

JARROW, R.; RUDD, A. Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes. **Journal of Financial Economics**, v. 10, p. 347-369, 1982.

JOHNSON, A. J.; WICHERN, D. W. **Applied multivariate statistical analysis**. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous univariate distributions**. 2nd ed. New York: Wiley, 1994. v. 1.

JORION, P. **Value at risk: a nova fonte de referência para a gestão do risco financeiro**. 2. ed. São Paulo: BM&F, 2003.

KENDALL, M. G. The statistical approach. **Economica**, v. 17, n. 66, p. 127-145, 1950.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. **Metodologia científica**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

LEWIS, M. **Liar's poker**. New York: Penguin, 1990.

LIU, X.; SHACKLETON, M. B.; TAYLOR, S. J.; XU, X. Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. **EFA 2003 Annual Conference Paper n. 144**, 2003. Disponível em: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=424420>. Acesso em: 6 fev. 2005.

LUENBERGER, D. G. **Investment science**. New York: Oxford University Press, 1998.

MACBETH, J. D.; MERVILLE, L. J. An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. **Journal of Finance**, v. 34, n. 5, p. 1.173-1.186, 1979.

_____. Tests of the Black-Scholes and Cox call option valuation models. **Journal of Finance**, v. 35, n. 2, p. 285-301, 1980.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v. 7, p. 77-91, 1952.

_____. Foundations of portfolio theory. **Journal of Finance**, v. 46, n. 2, p. 469-477, 1991.

MERTON, R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. **The Review of Economics and Statistics**, v. 51, n. 3, p. 247-257, 1969.

_____. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. **Journal of Economic Theory**, v. 3, p. 373-413, 1971.

_____. An intertemporal capital asset pricing model. **Econometrica**, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973a.

_____. Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973b.

_____. Influence of mathematical models in finance on practice: past, present, and future. **Financial Practice & Education**, p. 7-15, 1995.

_____. Applications of option-pricing theory: twenty-five years later. **The American Economic Review**, v. 88, n. 3, p. 323-349, 1998.

MILEVSKY, M. A.; POSNER, S. E. Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 33, n. 3, p. 409-422, 1998.

MODIGLIANI, F; MILLER, H. M. The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment. **American Economic Review**, v. 48, n. 3, p. 261-297, 1958.

NEFTCI, S. N. **An introduction to the mathematics of financial derivatives**. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 2000.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Econometric models and economic forecasts**. 4th ed. Boston: McGraw-Hill, 1997.

RESUMO das operações: volume geral – janeiro a dezembro. **Resenha BM&F**, São Paulo, n. 142, 2000; n. 147, 2001; n. 152, 2002; n. 158, 2003; n. 162, 2004.

RESUMO das operações: volume geral – janeiro a março. **Resenha BM&F**, São Paulo, n. 163, 2005.

RIBEIRO NETO, R. M.; FAMÁ, R. Eficiência de mercado: um estudo de evento – o impacto da nova lei das sociedades anônimas na análise do comportamento das ações do IBOVESPA no período de 02/01/2001 a 09/04/2001. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO – SEMEAD, 5., 2001. **Anais...** São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Administração – FEA/USP, 2001.

RISKGLOSSARY.COM. **Option pricing theory**. 1996. Disponível em: <http://www.riskglossary.com/link/option_pricing_theory.htm>. Acesso em: 7 fev. 2005.

RISKMETRICS. **RiskMetrics™**: technical document. 4th ed. New York, 1996.

ROSS, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing. **Journal of Economic Theory**, v. 13, p. 341-360, 1976.

_____. A simple approach to the valuation of risky streams. **Journal of Business**, v. 51, n. 3, p. 453-475, 1978.

ROSS, S. M. **An introduction to mathematical finance**: options and other topics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES. **Press Release**: the Sveriges Riksbank (Bank of Sweden) prize in economics sciences in memory of Alfred Nobel, 1997. Disponível em: <<http://nobelprize.org/economics/laureates/1997/press.html>>. Acesso em: 2 fev. 2005.

RUBINSTEIN, M. Displaced diffusion option pricing. **Journal of Finance**, v. 38, n. 1, p. 213-217, 1983.

_____. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. **Bell Journal of Economics**, v. 7, n. 2, p. 407-425, 1976.

SCHOLES, M. Derivatives in a dynamic environment. (**Prize lecture**, Suécia, 1997). Disponível em: <<http://nobelprize.org/economics/laureates/1997/scholes-lecture.pdf>>. Acesso em: 2 fev. 2005.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. **Management Science**, v. 9, n. 2, p. 277-293, 1963.

_____. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

SHILLER, R. J. From efficient markets theory to behavioral finance. **Cowles Foundation Discussion Paper**, New Haven, n. 1.385, 2002.

SILVA, L. DA; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 3. ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001. 121p. Disponível em: <<http://projetos.inf.ufsc.br/arquivos/Metodologia%20da%20Pesquisa%203a%20edicao.pdf>>. Acesso em: 6 fev. 2005.

SIQUEIRA, J. de O. Existência e unicidade da medida de probabilidade risco-neutro sob a hipótese de mercado completo uniperíodo. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO – SEMEAD, 4., 1999. **Anais...** São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Administração – FEA/USP, 1999.

SIQUEIRA, J. de O.; SASSATANI, R. Nova demonstração da fórmula do preço único e livre de arbitragem da opção de compra européia simples ordinária sob a hipótese de mercado dinamicamente completo: uma abordagem empírica. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO – SEMEAD, 4., 1999. **Anais...** São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Administração – FEA/USP, 1999.

STAPLETON, R. C; SUBRAHMANYAM. The valuation of multivariate contingent claims in discrete time models. **Journal of Finance**, v. 39, n. 1, p. 207-228, 1984.

STOCKMAN, A. C. **Introduction to Economics**. 2nd ed. Fort Worth: Dryden, 1999.

TOBIN, J. Liquidity preference as behavior toward risk. **The Review of Economic Studies**, v. 25, p. 65-86, 1958.

WILMOTT, P. **Derivatives: the theory and practice of financial engineering** (University Edition). Chichester: John Wiley & Sons, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – A DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

APÊNDICE B – CAPITALIZAÇÕES CONTÍNUA E DISCRETA

APÊNDICE C – APLICAÇÃO DO LEMA E DA INTEGRAL DE ITÔ NA
DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE UM PREÇO
REGIDO POR UM MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

APÊNDICE D – A DISTRIBUIÇÃO NORMAL CONJUNTA

APÊNDICE E – CÓDIGO DE CÁLCULO DO MODELO DE CÂMARA

APÊNDICE A – A DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

É comum se assumir que o preço de uma ação (às vezes com alguns ajustes, como por exemplo para dividendos) segue uma distribuição lognormal (HULL, 1997, p. 228-230; LUENBERGER, 1998, p. 301-302 e 308-312). Neste capítulo, apresentar-se-ão dois resultados muito utilizados na precificação de ativos que advêm diretamente das propriedades das distribuições normal e lognormal: dadas a média e a variância de uma variável aleatória normalmente distribuída x , deduzem-se a média e a variância esperadas da variável aleatória s dada por e^x .

Por definição, uma variável que apresenta distribuição lognormal é aquela cujo logaritmo natural apresenta distribuição normal (LUENBERGER, 1998, p. 301).

Seja x uma variável aleatória que apresenta distribuição normal com média μ e variância σ^2 . Usualmente representa-se $x \sim N(\mu; \sigma^2)$.

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de x é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Adicionalmente, é sabido que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1.$$

A equação acima representa a área sob a f.d.p de uma variável aleatória de distribuição normal de média μ e variância σ^2 . Ademais, implica que a soma das probabilidades de todos os valores que x pode assumir é um.

Seja $s = e^x$ outra variável aleatória. Como $\ln s = \ln e^x = x$ possui distribuição normal, s possui distribuição lognormal.

O valor esperado de s é:

$$E[s] = \int_0^{+\infty} s f_1(s) ds .$$

A distribuição de probabilidade de s , representada por $f_1(s)$, pode ser obtida por uma mudança de variável na integral da distribuição normal. Genericamente, a mudança de variável na integral da distribuição normal deve ser realizada da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{g^{-1}(-\infty)}^{g^{-1}(+\infty)} f(g(s)) g'(s) ds ,$$

onde

$$x = g(s) .$$

Para a obtenção da f.d.p. lognormal, efetua-se a mudança de variável $x = \ln s$, como ilustrado a seguir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{s} ds ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \ln s ; dx = s^{-1} ds \\ x = -\infty ; s = 0 \\ x = +\infty ; s = +\infty \end{array} \right.$$

Assim, se a variável aleatória s segue uma distribuição lognormal, sua f.d.p. é:

$$f_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{s} ds .$$

Finalmente, pode-se proceder o cálculo do valor esperado de s .

$$E[s] = \int_0^{+\infty} s f_1(s) ds = \int_0^{+\infty} s \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{s} ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} ds .$$

São necessárias algumas manipulações na integral acima para que se obtenha a integral de uma variável com distribuição normal, cujo resultado é conhecido.

Primeiramente, expressa-se novamente a integral em função de x :

$$E[s] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln s - \mu}{\sigma}\right)^2} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} e^x dx,$$

$$\begin{cases} s = e^x; ds = e^x dx \\ s = 0; x = -\infty \\ s = +\infty; x = +\infty \end{cases}$$

Nota-se que a integral acima poderia ter sido obtida diretamente, sem as passagens intermediárias para a obtenção da função densidade de probabilidade da distribuição lognormal, pois o que se quer é a esperança de e^x , com $x \sim N(\mu; \sigma^2)$, portanto de f.d.p conhecida. Porém, optou-se por detalhar cada passagem, de forma que a f.d.p de uma variável lognormal fosse devidamente explicitada.

Desse ponto em diante, os limites de integração não são indicados na integral, já que o intervalo de integração é sempre $]-\infty; +\infty[$. Para proceder o cálculo da esperança, manipula-se a equação acima como segue:

$$E[s] = \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} e^x dx = \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2 + x} dx.$$

Multiplica-se a última expressão por $e^{-\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)} e^{\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)} = 1$.

Dessa forma, cria-se um quadrado perfeito no expoente do integrando, separando-se os termos restantes:

$$E[s] = \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2 + x} e^{-\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)} e^{\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)} dx = e^{\left(m+\frac{1}{2}s^2\right)} \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(m+s^2)}{s}\right)^2} dx.$$

A integral da última expressão acima representa a área sob a f.d.p. de uma variável aleatória com distribuição normal. Portanto, seu valor é um.

Assim, conclui-se que:

$$E[s] = e^{\left(m + \frac{1}{2}s^2\right)}.$$

Luenberger (1998, p. 304-305) aclara que o termo extra $s^2/2$ ajusta a distribuição lognormal. Por exemplo, quando a variância de x aumenta e sua média μ se mantém constante, a distribuição lognormal de $s = e^x$ é deslocada para direita. Esse ajuste se dá então através de $s^2/2$.

Para se encontrar a variância de s , procede-se de maneira análoga.

$$\begin{aligned} Var[s] &= \int (s - E[s])^2 f_1(s) ds = \int \left(e^x - e^{\left(m + \frac{1}{2}s^2\right)} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \int \left(\underbrace{e^{2x}}_1 - 2 \underbrace{e^{\left(m + \frac{1}{2}s^2\right) + x}}_2 + \underbrace{e^{2\left(m + \frac{1}{2}s^2\right)}}_3 \right) \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Dividir-se-á o problema em três integrais, 1, 2 e 3, originadas da distribuição dos três elementos dentro do primeiro parênteses.

A primeira integral fica:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2 + 2x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(2s^2+m)}{s}\right)^2 + 2s^2 + 2m} dx = \\ &= e^{2s^2 + 2m} \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(2s^2+m)}{s}\right)^2} dx = e^{2s^2 + 2m}. \end{aligned}$$

A segunda integral fica:

$$\begin{aligned} \int -2e^{\left(\frac{m+\frac{1}{2}s^2}{2}\right)+x} \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx &= -2 \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(m+s^2)}{s}\right)^2 + 2m+s^2} dx = \\ &= -2e^{2m+s^2} \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(m+s^2)}{s}\right)^2} dx = -2e^{2m+s^2}. \end{aligned}$$

A terceira integral fica:

$$\int e^{2\left(\frac{m+\frac{1}{2}s^2}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx = e^{2\left(\frac{m+\frac{1}{2}s^2}{2}\right)} \int \frac{1}{\sqrt{2ps}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2} dx = e^{2\left(\frac{m+\frac{1}{2}s^2}{2}\right)}.$$

Por fim, o resultado final, que é a soma das três integrais, é:

$$= e^{2s^2+2m} - 2e^{2m+s^2} + e^{2m+s^2} = e^{2m+s^2} (e^{s^2} - 1).$$

Em resumo, se x é uma variável aleatória com distribuição normal $\sim N(\mu; \sigma^2)$, a variável $s=e^x$ terá distribuição lognormal, de média e variância dadas, respectivamente, por

$$\left(e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}; e^{2\mu+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \right).$$

Segundo Luenberger (1998, p. 478), pode-se demonstrar que o produto e a potência de variáveis com distribuição lognormal também têm distribuição lognormal. Por exemplo, se x e y são lognormais e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são constantes, então $x^{\mathbf{a}} y^{\mathbf{b}}$ é lognormal.

A densidade de probabilidade de uma variável aleatória lognormal possui a forma abaixo.

O gráfico acima foi elaborado com $s = e^x$, em que $x \sim N(2,0000;0,0625)$. Portanto, nesse caso, s possui distribuição lognormal, de média e variância dadas, respectivamente, por:

$$\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \right) = \left(e^{2 + \frac{1}{2}0,0625}; e^{2 \times 2 + 0,0625}(e^{0,0625} - 1) \right) = (7,6236; 3,7484).$$

O desvio-padrão de s é

$$\sqrt{3,7484} = 1,9361.$$

Nos passos finais das derivações dos modelos de precificação analisados (capítulo 4), utiliza-se o valor esperado truncado de uma variável aleatória com distribuição lognormal, resultado que partiu da seguinte demonstração (RUBINSTEIN, 1976, p. 422):

$$\int_X^{+\infty} e^x f(x) dx = N\left(\frac{\mu - X}{\sigma} + \sigma\right) e^{\mu + \sigma^2/2},$$

onde $N(\cdot)$ é a distribuição normal acumulada.

Sendo z uma variável normal padrão, a igualdade acima é obtida através do conhecimento de que

$$\int_X^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{(X-\mu)}{\sigma}}^{+\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\frac{(X-\mu)}{\sigma}} f(z)dz = N\left(\frac{-X+\mu}{\sigma}\right),$$

e de uma manipulação similar à feita neste apêndice para a obtenção dos parâmetros de média e variância de uma variável aleatória lognormal, de forma que a equação seja expressa em função da integral de uma distribuição normal padrão.

Fazendo a mudança de variável $e^x = s$, constata-se que

$$\int_X^{+\infty} e^x f(x)dx = \int_{e^X}^{+\infty} s f_1(s)ds = N\left(\frac{\mu - X}{\sigma} + \sigma\right) e^{\mu + \sigma^2/2}.$$

Similarmente, pode-se provar que

$$\int_{-\infty}^X e^x f(x)dx = \int_0^{e^X} s f_1(s)ds = N\left(\frac{X - \mu}{\sigma} - \sigma\right) e^{\mu + \sigma^2/2},$$

devendo-se, nesse caso, partir do seguinte resultado

$$\int_{-\infty}^X f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{(X-\mu)}{\sigma}} f(z)dz = N\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right).$$

Corolário: se s é uma variável lognormal de densidade de probabilidade lognormal $f_1(s)$, com parâmetros de locação e escala dados pela média e pelo desvio-padrão da distribuição normal do logaritmo de s , respectivamente μ e σ , então os valores esperados truncados de s são

$$\int_a^{+\infty} s f_1(s)ds = N\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma} + \sigma\right) e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad (1.a)$$

$$\int_0^a s f_1(s)ds = N\left(\frac{\ln a - \mu}{\sigma} - \sigma\right) e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad (1.b)$$

onde a é uma constante positiva.

Por fim, ressalta-se que

$$\int_{\ln a}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} f_1(s) ds = N\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma}\right), \quad (1.c)$$

$$\int_{-\infty}^{\ln a} f(x) dx = \int_0^a f_1(s) ds = N\left(\frac{\ln a - \mu}{\sigma}\right). \quad (1.d)$$

APÊNDICE B – CAPITALIZAÇÕES CONTÍNUA E DISCRETA

Neste apêndice, apresentar-se-ão algumas consequências imediatas das demonstrações feitas no apêndice A para as relações de conversão entre taxas de juros contínuas e discretas.

B.1 Mundo determinístico: relação entre taxas de juros com capitalização contínua e com capitalização discreta

Num mundo determinístico, como não existe aleatoriedade, os fluxos de caixa e taxas de retorno são conhecidos *a priori*. Conseqüentemente, a conversão entre taxas de juros com capitalização contínua e com capitalização discreta é elementar.

Como ambas são conhecidas em cada instante para qualquer prazo, é fácil perceber que (para um período):

$$e^{r_c} - 1 = r_d,$$

ou, inversamente:

$$r_c = \ln(1 + r_d), \text{ onde:}$$

r_c : taxa de juros com capitalização contínua;

r_d : taxa de juros com capitalização discreta.

Sendo S_0 e S_1 os preços inicial e final, respectivamente, de um ativo remunerado pelas taxas acima (prazo da taxa é o prazo do investimento), pode-se expressar:

$$r_d + 1 = S_1/S_0 = e^{r_c} \Leftrightarrow S_1 = S_0(1 + r_d) = S_0 e^{r_c} \Leftrightarrow r_c = \ln(S_1/S_0) = \ln(r_d + 1).$$

É importante ressaltar que a taxa contínua, por definição, não tem unidade temporal (ao semestre, ao ano etc.). Sendo assim, é convencional lhe atribuir a unidade da taxa discreta equivalente com a qual se trabalha. Adicionalmente, assumir que o mundo é determinístico é o mesmo que extinguir a incerteza e a aleatoriedade futuras. Logo, essa

hipótese implica que não existem variáveis aleatórias e que o desvio-padrão (risco) esperado é sempre zero.

B.2 O mundo com aleatoriedade: relação entre taxas de juros com capitalização contínua e com capitalização discreta

No mundo com aleatoriedade (ou estocástico), tanto a taxa de juros capitalizada continuamente como a discretamente são variáveis aleatórias. Assim, para se realizarem previsões em relação ao seu comportamento futuro, deve-se, em primeiro lugar, atribuir-lhes uma distribuição de probabilidade. Diferentes distribuições de probabilidade levam a diferentes relações de conversão de uma taxa para outra.

Por exemplo, ao se assumir que a taxa de juros com capitalização contínua segue distribuição normal (em qualquer intervalo de tempo), pelo que foi exposto anteriormente, a taxa com capitalização discreta somada a um terá distribuição lognormal, pois:

$$r_d + 1 = e^{r_c},$$

$$E[r_d + 1] = E[r_d] + 1 = E[e^{r_c}].$$

A expressão $r_d + 1$ é denominada taxa de juros bruta com capitalização discreta.

Se $r_c \sim N(\mu; \sigma^2)$, então, utilizando os resultados enunciados no apêndice A, obtêm-se:

$$E[r_d] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - 1, \text{ e}$$

$$Var[r_d] = Var[e^{r_c} - 1] = Var[e^{r_c}] \text{ (pois 1 é constante), ou seja}$$

$$Var[r_d] = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \quad (1.b)$$

Dessa forma, dados os parâmetros μ e σ^2 da distribuição normal da taxa de juros capitalizada continuamente, obtêm-se a esperança e a variância da taxa com capitalização discreta. Em suma, quando se assume que a taxa de juros com capitalização contínua

possui distribuição normal, a taxa bruta $r_d + 1$ possui distribuição lognormal. É importante que fique claro que, nessas condições, a taxa líquida r_d não possui distribuição lognormal nem distribuição normal.

Também é possível proceder-se inversamente: dados os parâmetros m e s^2 , respectivamente média e variância da taxa com capitalização discreta, obtêm-se a esperança e a variância da taxa com capitalização contínua. Esse resultado pode ser obtido através de simples manipulação das equações acima, como segue:

$$E[r_d] = m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - 1, \text{ logo}$$

$$\sigma^2 = 2[\ln(m + 1) - \mu].$$

Substituindo-se σ^2 na equação (1.b), tem-se:

$$Var[r_d] = s^2 = e^{2\mu + 2[\ln(m+1) - \mu]} (e^{2[\ln(m+1) - \mu]} - 1) = e^{2\ln(m+1)} (e^{-2\mu + 2\ln(m+1)} - 1),$$

$$\frac{s^2}{(m + 1)^2} + 1 = e^{-2\mu} (m + 1)^2,$$

$$e^\mu = \frac{m + 1}{\left(1 + (s/(m + 1))^2\right)^{1/2}},$$

e finalmente,

$$\mu = \ln \left[\frac{m + 1}{\left(1 + (s/(m + 1))^2\right)^{1/2}} \right].$$

Para se expressar σ^2 como função dos parâmetros da taxa com capitalização discreta, procede-se analogamente:

$$m = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} - 1,$$

logo

$$\mu = \ln(m+1) - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Substituindo-se μ na equação (1.b), tem-se:

$$s^2 = e^{2\ln(m+1) - \sigma^2 + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = (m+1)^2 (e^{\sigma^2} - 1),$$

$$e^{\sigma^2} = 1 + \left(\frac{s}{m+1} \right)^2,$$

e, por fim,

$$\sigma^2 = \ln \left[1 + \left(\frac{s}{m+1} \right)^2 \right].$$

Esses resultados são muito importantes, pois mostram que, sob incerteza, as relações de conversão entre taxas contínuas e taxas discretas são completamente diferentes das obtidas no mundo determinístico. Adicionalmente, uma vez conhecidas essas relações, a modelagem matemática pode ser conduzida em tempo contínuo para que depois, caso necessário, os resultados sejam convertidos para tempo discreto. Em RiskMetrics (1996, p. 49), por exemplo, a utilização de retornos contínuos se justifica pela facilidade de agregação temporal e cruzada (entre ativos).

Por fim, quando taxas de juros aleatórias remuneram um investimento de valor inicial conhecido S_0 , seu valor final S_1 não é sabido no presente. Para o caso em que a taxa de juros contínua possui distribuição normal (em qualquer intervalo de tempo), e seu prazo coincide com o prazo do investimento, podem-se estabelecer as seguintes relações:

$$r_c = \ln \frac{S_1}{S_0} \sim N(\mu; \sigma^2) \leftrightarrow \ln S_0 + r_c = \ln S_1 \sim N(\mu + \ln S_0; \sigma^2).$$

Portanto, tanto o logaritmo da taxa bruta discreta de juros $\ln(S_1/S_0)$, como o logaritmo do valor futuro $\ln S_1$, possuem distribuição normal, de diferentes médias e mesma variância.

Nesse cenário, com base nos resultados apresentados no apêndice A, pode-se afirmar que tanto S_1/S_0 como S_1 possuem distribuição lognormal (em qualquer intervalo de tempo), de média e variância dadas, respectivamente, por:

$$S_1/S_0 : \left(e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \right), \quad (2.b)$$

$$S_1 : \left(S_0 e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; S_0^2 e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \right). \quad (3.b)$$

Logo, quando se assume que as taxas de juros com capitalização contínua possuem distribuição normal, de média μ e variância σ^2 , os preços (ou valores futuros) dos investimentos por elas remunerados possuem distribuição lognormal, de parâmetros média e variância que podem ser expressos como função do valor presente do investimento S_0 , de μ e de σ^2 .

Por último, salienta-se que o prazo da taxa foi assumido coincidente ao do investimento por motivo de simplicidade na demonstração, sem prejuízo ao conceito discutido. O caso mais geral, em que o prazo do investimento não coincide com o prazo da taxa, mantidas as demais premissas, é demonstrado por Hull (1997, p. 230-232): taxas contínuas normalmente distribuídas implicam em preços lognormais e vice-versa.

B.3 Aproximação do retorno contínuo pelo retorno discreto

Usualmente, aproxima-se a taxa de juros com capitalização contínua pela taxa de juros com capitalização discreta. A seguir, serão apresentados a fundamentação teórica dessa aproximação e os cuidados que devem ser tomados na utilização da mesma.

Mais especificamente, seja S_t o preço de um ativo no instante t . Seja $\ln(S_t/S_0) = \ln S_t - \ln S_0$ a taxa contínua de retorno do ativo entre t ($t > 0$) e o instante inicial ($t = 0$). Para intervalos de tempo infinitesimais, ou seja $t \rightarrow 0$, pode-se aplicar a fórmula de Taylor para calcular a variação aproximada de $\ln S_0$. Quando se faz essa aproximação até os termos de primeira ordem, obtém-se a relação comumente empregada. Mais precisamente, qualquer função diferenciável pode ser aproximada localmente por uma função afim. A função afim obtida conforme a fórmula de Taylor é a única de sua classe que goza da propriedade de seu erro de aproximação tender a zero mais rapidamente que $x - x_0$. Utilizando-se a fórmula de Taylor, pode-se aproximar a variação em torno de x_0 de uma função diferenciável da seguinte forma:

$$\Delta f(x) \cong f'(x_0)(x - x_0).$$

Dessa forma, para uma variação do preço do ativo entre $t = 0$ e t , pode-se escrever:

$$\ln S_t - \ln S_0 = \ln \frac{S_t}{S_0} \cong f'(S_0)(S_t - S_0) = \frac{1}{S_0}(S_t - S_0) = \frac{\Delta S}{S_0}.$$

Denotando-se r_c a taxa contínua de retorno e r_d a discreta, ambas para o intervalo de tempo definido, tem-se a aproximação comumente utilizada, pois:

$$r_c = \ln \frac{S_t}{S_0} \cong r_d = \frac{S_t}{S_0} - 1, \text{ ou ainda}$$

$$S_t = S_0 e^{r_c} \cong S_t = S_0 (1 + r_d).$$

O resultado acima sugere que para pequenos intervalos de tempo ($\Delta t \rightarrow 0$) e, conseqüentemente, para pequenas variações do preço do ativo, as taxas de retorno com capitalização contínua e com capitalização discreta são aproximadamente iguais, isto é:

$$\Delta \ln S \cong \frac{\Delta S}{S}.$$

Essa relação também pode ser apresentada graficamente.

Pelo gráfico acima, nota-se que, para pequenas variações de S_t em relação a S_0 , a função logarítmica é bem aproximada pela função afim.

Por tudo que foi exposto, o cuidado a ser tomado ao se fazer essa aproximação é diferente nos mundos determinístico e aleatório. No primeiro, deve-se garantir que $S_t/S_0 \cong 1$. No segundo, deve-se, além disso, garantir que tanto σ^2 como s^2 são suficientemente pequenos, pois esses parâmetros impactam diretamente a relação de conversão de taxas. Essa relação, no caso em que r_c é normalmente distribuída, foi equacionada no item anterior. Distribuições alternativas produzem outras relações de conversão, nas quais os parâmetros σ^2 e s^2 podem ter maior ou menor influência. Qualquer que seja o caso, o impacto desses parâmetros deve ser cuidadosamente analisado, para que a aproximação represente, de fato, a realidade incerta das taxas.

Com isso, verifica-se sob quais condições a aproximação das taxas de retorno contínua e discreta pode ser feita sem prejuízo de resultado.

Por fim, ressalta-se que os conceitos ora abordados são utilizados implicitamente na modelagem financeira, tanto na determinística quanto na aleatória. Nesta última, atualmente emprega-se um conjunto de ferramentas advindas do cálculo estocástico, tais como o lema e a integral de Itô, que permitem estabelecer, de forma mais direta, o correto relacionamento entre processos estocásticos que regem diferentes variáveis aleatórias.

**APÊNDICE C – APLICAÇÃO DO LEMA E DA INTEGRAL DE ITÔ NA
DETERMINAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE UM PREÇO
REGIDO POR UM MOVIMENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO**

Neftci (2000, p. 45, 58-59) define cálculo estocástico como um conjunto de métodos internamente consistentes que resultam em novas fórmulas para derivação, integração, aproximação e modelagem dinâmica de funções de variáveis aleatórias em tempo contínuo. Além disso, salienta que o propósito do cálculo estocástico é o mesmo que o do cálculo padrão, todavia as regras são diferentes.

O lema de Itô pode ser entendido como uma metodologia que utiliza a equação diferencial estocástica do preço do ativo no instante t , S_t , para determinar a equação diferencial estocástica de qualquer função do preço do ativo e do tempo, $F(S_t; t)$ (NEFTCI, 2000, p. 240). O autor dá a seguinte definição:

Lema de Itô: seja $F(S_t; t)$ uma função duplamente diferenciável de t (tempo) e do processo randômico S_t (preço do ativo), definido como

$$dS_t = a(S_t; t)dt + b(S_t; t)dW_t, t \geq 0, \quad (1.c)$$

onde:

$a(S_t; t)$: parâmetro de média (*drift*); é também representado por a ;

$b(S_t; t)$: parâmetro de difusão; é também representado por b ;

W_t : processo de Wiener, definido conforme Hull (1997, p. 210-212) e Neftci (2000, p. 177).

Nessas condições, pode-se provar que:

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b^2 dt .$$

Substituindo-se dS_t na equação acima pela expressão equivalente dada pela equação (1.c), obtém-se:

$$dF_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} b dW_t. \quad (2.c)$$

Segundo Hull (1997, p. 214) e Luenberger (1998, p. 308), o processo estocástico S_t é conhecido como processo de Itô. Hull (1997, p. 222-223) explica que, num processo de Itô, a mudança em S_t num intervalo temporal infinitesimal é normalmente distribuída, mas essa mudança, em intervalos temporais mais longos, tende a ser não normal.

Neftci (2000, p. 240) explica que o lema de Itô é útil na precificação de derivativos pois, ao se assumir um processo estocástico para o ativo-objeto, pode-se determinar o processo estocástico que rege o derivativo. Esse conhecimento possibilita a construção de uma carteira livre de risco composta pelo derivativo e pelo ativo-objeto que, em última instância, viabiliza a determinação do preço do derivativo. Pela equação (2.c) fica claro que o processo de Wiener dW_t do ativo-objeto é herdado pelos derivativos sobre ele lançados (como uma opção de compra). Isso se deve ao fato de que o ativo primitivo e seus derivativos estão sujeitos à mesma fonte de incerteza (risco do ativo-objeto). Num modelo de precificação de derivativos que parte de condições gerais de equilíbrio, como o exposto no capítulo 3, esse mesmo princípio permite que se utilize a utilidade marginal relativa do ativo-objeto específico na precificação de qualquer derivativo (opção) sobre ele lançado.

Tomando um caso específico, inúmeros autores, tais como Black e Scholes (1973, p. 640), Hull (1997, p. 215-219), Luenberger (1998, p. 308-312) e Wilmott (1998, p. 53), assumem que os preços de uma ação seguem um passeio aleatório em tempo contínuo, com variância proporcional ao quadrado do preço. Esse modelo de comportamento de preços é também conhecido como movimento browniano geométrico. Nesse tipo de

processo estocástico (geométrico), os incrementos instantâneos, normalmente distribuídos, são continuamente capitalizados ao valor do processo do instante anterior. Ademais, o valor esperado do logaritmo do processo varia linearmente com o tempo. Segundo Luenberger (1998, p. 301-302 e 308-309), esse modelo assume que a distribuição do logaritmo dos preços, em qualquer intervalo finito de tempo, pode ser caracterizada através de uma soma de logaritmos normal e independentemente distribuídos. Nesse contexto, o preço do ativo, em qualquer instante, é uma função exponencial do preço inicial.

No movimento browniano geométrico, o processo estocástico que rege, no instante t , o preço S_t de um ativo é dado por

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (3.c)$$

onde:

μ : constante que representa o retorno instantâneo (esperado) do processo;

σ : constante que representa o desvio-padrão instantâneo do processo;

W_t : processo de Wiener, definido conforme Hull (1997, p. 210-212).

Percebe-se que a equação acima é um caso específico do processo de Itô, em que

$$a(S_t; t) = \mu S_t \text{ e } b(S_t; t) = \sigma S_t.$$

Ademais, a equação acima implica que o retorno instantâneo dS_t/S_t é normalmente distribuído, com média e variância instantâneas dadas, respectivamente, por μ e σ^2 .

Segundo Hull (1997, p. 216) e Wilmott (1998, p. 53) esse é o modelo de representação de preços mais largamente utilizado em Finanças. Hull (1997, p. 219) adiciona que, em geral, o preço de um derivativo não depende do retorno instantâneo esperado do ativo-objeto μ ; no entanto, é criticamente dependente da variância instantânea

desse retorno σ^2 . Tal fato pode ser verificado nas equações de precificação de opções analisadas neste estudo.

Segundo Black e Scholes (1973, p. 640), a adoção desse modelo de representação para os preços de ativos implica que: (a) a distribuição de preços em qualquer intervalo temporal finito é lognormal; (b) a variância instantânea do retorno do ativo é constante. Conforme Hull (1997, p. 215-216), sua adoção também implica que o retorno instantâneo do ativo é independente do seu preço (μ constante). Consoante Johnson et al. (1994, p. 207-211), pela própria definição de distribuição lognormal, uma variável aleatória S lognormalmente distribuída, tal que

$$\ln S \sim N(\mu; \sigma^2),$$

nunca é menor que zero. Colocando de outra forma, a probabilidade de S ser menor que zero é nula. Logo, a adoção do movimento browniano geométrico como modelo de representação de preços implica que a probabilidade do preço do ativo ser menor que zero é nula, fato que é economicamente condizente com a condição de obrigação limitada do detentor de um título (ativo), em que o menor valor do título é zero. Essa condição é muito observada na prática (investimento em ações, debêntures, empréstimos etc.). Um título de valor negativo configura uma situação em que seu detentor possui uma obrigação, e não um direito.

No caso do movimento browniano geométrico, através da aplicação do lema de Itô, pode-se deduzir que a distribuição de S_t , em qualquer intervalo finito, é lognormal. Especificamente, segundo Neftci (2000, p. 208), a correta utilização das ferramentas do cálculo estocástico (lema e integral de Itô) permite que se transformem equações diferenciais estocásticas (do tipo dS_t), válidas num intervalo infinitesimal, em equações estocásticas de variação ou diferença (do tipo ΔS_t), válidas num intervalo finito de tempo.

A aplicação do lema de Itô ao processo $F(S_t, t) = \ln S_t$ permite obter a solução da equação (3.c). Em última instância, almeja-se expressar o preço do ativo S_t ao final de um intervalo finito de tempo, como função de seu preço atual S_0 , do tempo t e dos elementos presentes na equação (3.c), tais como o retorno instantâneo esperado μ , sua variância σ^2 e o processo de Wiener W_t . Matematicamente, almeja-se obter S_t , tal que:

$$S_t = f(\mu; \sigma^2; S_0; t; W_t).$$

Na equação (2.c), substituindo a e b pelos parâmetros do movimento browniano geométrico, obtém-se:

$$dF_t = d \ln S_t = \left[\frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t.$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2},$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= \left[\frac{1}{S_t} \mu S_t + 0 - \frac{1}{2 S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right] dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t, \\ d \ln S_t &= \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (4.c)$$

A equação acima implica que o logaritmo do preço no instante t , $\ln S_t$, segue um movimento browniano aritmético. Nesse tipo de processo estocástico (aritmético), os incrementos instantâneos, normalmente distribuídos, são continuamente somados ao valor

do processo do instante anterior. Ademais, o valor esperado do processo varia linearmente com o tempo.

Antes do próximo passo, é importante lembrar que, pela definição do processo de Wiener

$$W_0 = 0,$$

$$E[W_t] = 0,$$

$$Var[W_t] = E[W_t^2] = t.$$

Sendo $t = 0$ o instante inicial e utilizando o conceito de integral de Itô (NEFTCI, 2000, p. 204-228 e 261-262), a equação (4.c) implica que:

$$\int_0^t d \ln S_u = \int_0^t \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] du + \int_0^t \sigma dW_u,$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W_t. \quad (5.c)$$

Sendo assim, a solução da equação diferencial estocástica do movimento browniano geométrico é:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W_t \right\}. \quad (6.c)$$

Salienta-se que essa solução é válida qualquer que seja o intervalo de tempo finito escolhido t . Para se verificar a validade dessa solução, isto é, se dS_t obtido a partir dela é igual ao definido na equação (3.c), pode-se aplicar-lhe o lema de Itô. Para tanto, deve-se observar que S_t é função do tempo e do processo de Wiener W_t . Assim, dado o processo de Itô dW_t , em que $a = 0$ e $b = 1$, pode-se determinar dS_t . Utilizando-se a equação (2.c), obtém-se

$$dS_t = \left[\frac{\partial S_t}{\partial W_t} 0 + \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_t}{\partial W_t^2} 1^2 \right] dt + \frac{\partial S_t}{\partial W_t} 1 dW_t,$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] S_0 \exp \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W_t \right\} = \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] S_t,$$

$$\frac{\partial^2 S_t}{\partial W_t^2} = \sigma^2 S_0 \exp \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W_t \right\} = \sigma^2 S_t,$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial W_t} = \sigma S_0 \exp \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma W_t \right\} = \sigma S_t,$$

e, por fim:

$$dS_t = \left[\left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t \right] dt + \sigma S_t dW_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

De fato, aplicando o lema de Itô à solução encontrada, obtém-se a equação diferencial estocástica original.

Duas últimas observações a respeito de distribuições de probabilidade devem ser feitas. Em primeiro lugar, a equação (5.c) implica que tanto o logaritmo do quociente do preço em t pelo preço inicial, $\ln(S_t/S_0)$, como o logaritmo do preço em t , $\ln S_t$, são normalmente distribuídos:

$$\ln(S_t/S_0) \sim N\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)t; \sigma^2 t\right) \leftrightarrow \ln(S_t) \sim N\left(\left(\ln S_0 + \mu - \sigma^2/2\right)t; \sigma^2 t\right).$$

Em segundo lugar, das equações (5.c) e (6.c) e dos conceitos discutidos no apêndice A, tanto o quociente do preço em t pelo preço inicial, S_t/S_0 , como o preço em t , S_t , são lognormalmente distribuídos, com média e variância dadas, respectivamente, por:

$$S_t/S_0 : \left(e^{\mu t}; e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \right), \quad (7.c)$$

$$S_t : \left(S_0 e^{\mu t}; S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1) \right). \quad (8.c)$$

Portanto, eleger o movimento browniano geométrico como representativo do processo estocástico dos preços possui o mesmo efeito, em termos de distribuição de preços, que assumir que o investimento é remunerado por uma taxa de juros com capitalização contínua, normalmente distribuída, de média e variância proporcionais ao tempo de investimento.

No caso específico de comparação das distribuições (2.b) com (7.c), e (3.b) com (8.c), para $t = 1$, nota-se que os pares não são iguais porque os retornos esperados (médias das taxas de juros com capitalização contínua) utilizados como base, em cada caso, ou seja, $E[\ln(S_1/S_0)]$, diferem pelo fator $\sigma^2/2$. Não fosse essa diferença, as distribuições seriam idênticas.

A consistência entre as demonstrações exibidas nos apêndices A, B e C está no fato de que o retorno esperado discreto instantâneo

$$E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \mu dt$$

é maior que

$$E[d \ln S_t] = \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt ,$$

em justamente

$$\frac{1}{2} \sigma^2 dt .$$

Em síntese, percebe-se que a utilização de ferramentas do cálculo estocástico facilita a obtenção de relações entre distribuições de variáveis aleatórias e garantem consistência com resultados matemáticos obtidos através do cálculo diferencial e integral clássico (newtoniano).

APÊNDICE D – A DISTRIBUIÇÃO NORMAL CONJUNTA

Johnson e Wichern (2002, p. 149) afirmam que a distribuição normal conjunta é útil na prática, por duas razões: primeiro, serve como modelo populacional genuíno; segundo, como consequência do teorema do limite central, a distribuição amostral de muitas estatísticas multivariadas (duas ou mais variáveis analisadas conjuntamente) são aproximadamente normais, independentemente da distribuição da população da qual são extraídas. Dessa forma, complementa que muitos problemas do mundo real se encaixam nos modelos de distribuição normal. Ademais, é importante ressaltar que a distribuição normal conjunta é matematicamente atrativa, pois é analiticamente tratável e bons resultados podem ser obtidos. No caso específico deste trabalho, os modelos de Brennan (1979), Rubinstein (1976) e Câmara (2003) fazem suposições sobre a distribuição conjunta da riqueza agregada da economia e dos preços dos ativos.

Os conceitos necessários para o entendimento das derivações realizadas pelos autores serão dados a seguir.

Probabilidade conjunta é a probabilidade de dois ou mais eventos acontecerem simultaneamente. $f(X, Y | \theta)$ é a probabilidade do par X, Y ocorrer, dados os parâmetros θ da distribuição.

Densidade de probabilidade conjunta é a função densidade de probabilidade de duas ou mais variáveis aleatórias contínuas consideradas conjuntamente. A função densidade de probabilidade normal conjunta é totalmente definida por um vetor de média e uma matriz de covariâncias. Por exemplo, a densidade de probabilidade normal conjunta de p variáveis aleatórias é definida como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\mathbf{S}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

onde:

$\mathbf{x}$: vetor de p variáveis aleatórias;

S : matriz de covariâncias;

$\mathbf{m}$: vetor de valores esperados de $\mathbf{x}$.

A função densidade de probabilidade normal conjunta caracteriza uma distribuição normal conjunta de variáveis contínuas. A distribuição normal conjunta também é conhecida na literatura como distribuição normal multivariada.

Densidade de probabilidade marginal de uma variável é um conceito utilizado quando se estudam duas ou mais variáveis contínuas conjuntamente. É a densidade de probabilidade de uma variável aleatória calculada com base nos possíveis valores que as demais variáveis aleatórias podem assumir. Por exemplo, supondo-se que X e Y sejam conjunta e normalmente distribuídas, a densidade de probabilidade marginal de X é obtida integrando-se a função densidade de probabilidade conjunta de X e Y em Y (para todos os valores possíveis de Y).

Densidade de probabilidade condicional é a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua, dados valores específicos de outras variáveis aleatórias. A probabilidade condicional é a base para dependência ou independência estatística. Diz-se que duas variáveis aleatórias são independentes se, para cada uma delas, as probabilidades incondicional e condicional forem iguais.

Johnson e Wichern (2002, cap. 4) resumizam as principais propriedades de uma distribuição normal conjunta (multivariada). Em alguns casos, os autores demonstram tais propriedades e em outros, indicam onde as demonstrações podem ser encontradas.

A seguir, as principais propriedades de uma distribuição normal conjunta são citadas. Suas demonstrações estão fora do escopo do presente trabalho.

Para um vetor $\mathbf{X}$ com distribuição normal conjunta, pode-se provar que:

- a) combinações lineares dos componentes de $\mathbf{X}$ são normalmente distribuídas;
- b) todos os subconjuntos de $\mathbf{X}$ têm distribuição normal (conjunta);
- c) covariância zero entre dois componentes quaisquer de $\mathbf{X}$ implica que os mesmos são independentemente distribuídos (estatisticamente independentes);
- d) as distribuições condicionais dos componentes de $\mathbf{X}$ são (conjuntamente) normais.

Das afirmações acima, segue que se quaisquer combinações lineares de n variáveis aleatórias normais $X_1, X_2, \dots, X_n$ ou, equivalentemente, de quaisquer componentes do vetor aleatório $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_n]$, forem conjunta e normalmente distribuídas, então o vetor $\mathbf{X}$ possuirá distribuição normal conjunta. O inverso também é verdadeiro.

Pelo exposto acima, vale frisar que a combinação linear de duas variáveis aleatórias unidimensionais normalmente distribuídas não implica, necessariamente, que essas variáveis têm distribuição normal bivariada (distribuição normal conjunta bidimensional).

De forma geral, seja o vetor aleatório $\mathbf{Y}$, definido como um polinômio vetorial linear:

$$\mathbf{Y} = b\mathbf{X} + a,$$

onde $\mathbf{X}$ é um vetor aleatório n -dimensional, com vetor de média $\mathbf{m}$ e matriz de covariância S ; b e a são vetores constantes. Além disso, cada componente de $\mathbf{X}$ tem distribuição marginal normal.

Para que $\mathbf{Y}$ possua distribuição normal n -dimensional, é necessário que $\mathbf{X}$ possua distribuição normal conjunta, isto é, qualquer combinação linear não trivial do vetor aleatório deve ter distribuição normal.

Por outro lado, a suposição que duas variáveis aleatórias unidimensionais têm distribuição normal bivariada implica que cada uma delas é, necessariamente, normal.

Por isso que, nas derivações encontradas em Brennan (1979), Rubinstein (1976) e Câmara (2003), os autores assumem que a distribuição conjunta dos mapeamentos da riqueza agregada da economia e dos preços dos ativos é normal bivariada. Assumir normalidade separadamente não implicaria normalidade conjunta.

Quanto à independência estatística, é importante destacar que se a probabilidade conjunta $P[X_i \leq x_i \text{ e } X_k \leq x_k]$ puder ser escrita como o produto das probabilidades marginais correspondentes

$$P[X_i \leq x_i \text{ e } X_k \leq x_k] = P[X_i \leq x_i]P[X_k \leq x_k]$$

para todos os pares de valores x_i, x_k , então X_i e X_k são estatisticamente independentes.

Quando X_i e X_k são variáveis aleatórias contínuas de densidade conjunta $f_{ik}(x_i, x_k)$ e densidades marginais $f_i(x_i)$ e $f_k(x_k)$, a condição de independência implica que

$$f_{ik}(x_i, x_k) = f_i(x_i)f_k(x_k)$$

para todos os pares.

As n variáveis aleatórias contínuas $X_1, X_2, \dots, X_n$ são mútua e estatisticamente independentes se sua densidade conjunta puder ser representada como

$$f_{12..n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

para qualquer ênupla.

APÊNDICE E – CÓDIGO DE CÁLCULO DO MODELO DE CÂMARA

A seguir, apresentam-se os códigos escritos em Visual Basic para a precificação de opções de compra e de venda sobre futuro de dólar através da adaptação da generalização de Câmara para o caso em que o ativo-objeto segue uma trajetória lognormal com assimetria negativa e o mesmo é um contrato futuro.

Opção de compra:

```
Function CMFcall(futurePrice As Double, exercisePrice As Double, expirationTime _  
                As Double, interestRate As Double, volatility As Double, Optional alpha)  
  
    Dim z1 As Double, z2 As Double, n1 As Double, n2 As Double, a As Double  
  
    If IsMissing(alpha) Then  
        a = 2 * futurePrice  
    Else  
        a = alpha  
    End If  
  
    If (expirationTime > 0) Then  
        z1 = (Log((a - exercisePrice) / (a - futurePrice)) - (volatility ^ 2 _  
            / 2) * expirationTime) / (volatility * Sqr(expirationTime))  
        z2 = z1 + volatility * Sqr(expirationTime)  
        n1 = Application.NormSDist(z1)  
        n2 = Application.NormSDist(z2)  
        CMFcall = ((futurePrice - a) * n1 - (exercisePrice - a) * _  
            n2) * Exp(-interestRate * expirationTime)  
    ElseIf expirationTime = 0 Then  
        If futurePrice >= exercisePrice Then  
            CMFcall = futurePrice - exercisePrice  
        Else  
            CMFcall = 0  
        End If  
    Else  
        CMFcall = 0  
    End If  
End Function
```

Opção de venda:

```

Function CMFput(futurePrice As Double, exercisePrice As Double, expirationTime _
    As Double, interestRate As Double, volatility As Double, Optional alpha)

    Dim z1 As Double, z2 As Double, n1 As Double, n2 As Double, a As Double

    If IsMissing(alpha) Then
        a = 2 * futurePrice
    Else
        a = alpha
    End If

    If (expirationTime > 0) Then
        z1 = (Log((a - exercisePrice) / (a - futurePrice)) - (volatility ^ 2 _
            / 2) * expirationTime) / (volatility * Sqr(expirationTime))
        z2 = z1 + volatility * Sqr(expirationTime)
        n1 = Application.NormSDist(-z1)
        n2 = Application.NormSDist(-z2)
        CMFput = -((futurePrice - a) * n1 - (exercisePrice - a) * _
            n2) * Exp(-interestRate * expirationTime)
    ElseIf expirationTime = 0 Then
        If futurePrice >= exercisePrice Then
            CMFput = 0
        Else
            CMFput = -(futurePrice - exercisePrice)
        End If
    Else
        CMFput = 0
    End If
End Function

```

ANEXOS

ANEXO A – CONTRATO DE FUTURO DE DÓLAR DA BM&F

ANEXO B – CONTRATO DE OPÇÃO SOBRE FUTURO DE DÓLAR DA BM&F

ANEXO A – CONTRATO DE FUTURO DE DÓLAR DA BM&F

Especificações do Contrato Futuro de Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial

1. Objeto de negociação

A taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, para entrega pronta, contratada nos termos da Resolução 1690/90, do Conselho Monetário Nacional-CMN.

2. Cotação

Reais por US\$1.000,00, com até três casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,001 por US\$1.000,00.

4. Oscilação máxima diária

5% sobre o valor do vencimento negociado, calculados sobre o preço de ajuste do pregão anterior.

Os dois primeiros vencimentos abertos à negociação não estão sujeitos a limites de oscilação.

A Bolsa poderá, a qualquer momento, alterar os limites de oscilação, bem como sua aplicação aos diversos vencimentos, inclusive para aqueles que habitualmente não têm limites.

5. Unidade de negociação

US\$50.000,00 para os vencimentos até outubro/97, inclusive, e US\$100.000,00 para os vencimentos posteriores.

6. Meses de vencimento

Todos os meses.

7. Número de vencimentos em abertos

No máximo 24 meses, conforme autorização da BM&F.

8. Último dia de negociação

Último dia útil (dia de pregão) do mês anterior ao mês de vencimento do contrato.

9. Data de vencimento

Primeiro dia útil (dia de pregão) do mês de vencimento do contrato.

10. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (*day trade*), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

11. Ajuste diário

As posições em aberto ao final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, estabelecido conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1. Para os dois primeiros vencimentos, o preço de ajuste será estabelecido pela média ponderada dos negócios realizados nos últimos 15 minutos do pregão ou por um preço arbitrado pela BM&F; para os demais, o preço de ajuste será estabelecido no *call* de fechamento.

O ajuste diário será calculado de acordo com as seguintes fórmulas:

- a) ajuste das operações realizadas no dia
$$AD = (PA^t - PO) \times M \times n$$
- b) ajuste das posições em aberto no dia anterior
$$AD = (PA^t - PA^{t-1}) \times M \times n$$

onde:

- AD = valor do ajuste diário;
- PA^t = preço de ajuste do dia;
- PO = preço da operação;
- M = multiplicador do contrato, estabelecido em 50 para os vencimentos até outubro/97, inclusive, e em 100 para os vencimentos posteriores;
- n = número de contratos;
- PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior.

O valor do ajuste diário, se positivo, será creditado ao comprador e debitado ao vendedor. Caso o valor seja negativo, será debitado ao comprador e creditado ao

vendedor.

12. Condições de liquidação no vencimento

Na data de vencimento, as posições em aberto serão liquidadas financeiramente pela Bolsa, mediante o registro de operação de natureza inversa (compra ou venda) à da posição, na mesma quantidade de contratos, pelo valor de liquidação, de acordo com a seguinte fórmula:

$VL = (TC \times 1.000) \times M$ onde:

VL = valor de liquidação por contrato;

TC = taxa de câmbio de reais por dólar dos Estados Unidos, para entrega pronta, contratada nos termos da Resolução 1690/90, do CMN, definida como a taxa média de venda apurada pelo Banco Central do Brasil-Bacen, segundo critérios por ele definidos, e divulgada através do Sisbacen, transação PTAX800, opção "5-L" (cotação de fechamento), e que será utilizada com até quatro casas decimais. A taxa de câmbio será aquela verificada no último dia do mês imediatamente anterior ao mês de vencimento do contrato, independentemente de, nesse dia, haver ou não pregão na BM&F;

M = conforme definido no item 11.

Os resultados financeiros da liquidação serão movimentados no mesmo dia, ou seja, na data de vencimento.

• Condições especiais

Se, por qualquer motivo, o Bacen não divulgar a taxa de câmbio correspondente ao último dia do mês imediatamente anterior ao mês de vencimento deste contrato, a BM&F poderá, a seu critério:

- prorrogar a liquidação do contrato até a divulgação oficial; ou
- utilizar como valor de liquidação o preço de ajuste do último dia de negociação ou um valor por ela arbitrado, caso entenda não ser representativo o referido preço.

Em ambos os casos, a BM&F poderá corrigir o valor de liquidação por um custo de oportunidade, por ela arbitrado, desde a data de vencimento até o dia de sua efetiva liquidação financeira.

Ainda, se o Bacen suspender a divulgação diária da taxa de câmbio objeto deste contrato ou em caso de força maior, que comprometa o livre funcionamento do mercado físico, a BM&F encerrará a negociação deste contrato, liquidando as posições em aberto com base no preço de ajuste do último pregão ou por um valor por ela arbitrado, a seu critério.

A BM&F poderá ainda, em qualquer caso, arbitrar um preço para liquidação deste contrato se, a seu critério, julgar não serem representativos tanto a cotação divulgada pelo Bacen quanto o último preço de ajuste disponível.

13. Hedgers

Instituições autorizadas pelo Bacen a operar no mercado de câmbio comercial e outras pessoas jurídicas, cuja atividade básica esteja relacionada com as transações, regulamentadas pelo Bacen, nesse mercado.

14. Margem de garantia

Valor fixo por contrato, devida em D+1, com redução de 20% para *hedgers*. A margem de garantia é alterável a qualquer momento, a critério da Bolsa.

15. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

16. Custos operacionais

• Taxa operacional básica

Operação normal: 0,12%; *day trade*: 0,06%.

A taxa operacional básica por contrato, sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa, incide sobre a seguinte base de cálculo:

$$BC = (PA^{t-1} \times M)$$

onde:

BC = base de cálculo;

PA^{t-1} = preço de ajuste do dia anterior, referente ao primeiro vencimento em

aberto;

M = conforme definido no item 11.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

1,47% e 0,9% da taxa operacional básica para operações normais e *day trade*, respectivamente, para os vencimentos até outubro/97, inclusive; para os vencimentos posteriores, 1,2% e 0,75%, respectivamente. Para as operações realizadas exclusivamente nos dois últimos dias de negociação e para a liquidação do contrato no vencimento, as taxas da Bolsa serão calculadas com base na corretagem mínima.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão.

Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% dos demais custos operacionais (taxas da Bolsa).

Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas Bolsa.

17. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções firmado entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25.5.88, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

ULTIMA ATUALIZAÇÃO: OFÍCIO CIRCULAR 082/97-SG, DE 2.7.97

OFÍCIO CIRCULAR

Corretoras de Mercadorias, Membros de Compensação, Operadores Especiais e Permissionárias Correspondentes Membros da BM&F, BMRS, BMP, BMSC, BML, BMM, BMMS, BMB, BMPA e Brasbolsa

Ref.: **Alteração do Tamanho dos Contratos Futuros de Dólar Comercial e Cupom Cambial e de Opções sobre Disponível e sobre Futuro de Dólar comercial.**

Prezados Senhores

Em face da recente mudança da política cambial, alterou-se substancialmente a volatilidade da taxa de câmbio. Esse fato, dentre outros, causou diminuição nos volumes negociados com os contratos referenciados nessa taxa, o que fez a BM&F a considerar a possibilidade de reduzir seu tamanho para US\$50.000,00.

Antes de deliberar sobre essa decisão, a BM&F ouviu vários participantes do mercado e levou o assunto a apreciação da Câmara de Ativos Financeiros, que sugeriu a alteração, com base nas seguintes razões, dentre outras:

1) Mesmo reduzindo-se à metade a unidade de negociação e considerando-se que o que realmente se transaciona e a volatilidade aplicada ao *notional*, o novo lote de negociação, ainda assim, será maior que o lote anterior, haja vista a pequena volatilidade existente antes da mudança na política cambial;

2) A redução do tamanho dos contratos possibilitará mais giro e, em consequência, maior liquidez, um *call* de fechamento mais competitivo e melhor preço de ajuste;

3) A redução para US\$50.000,00, aliada ao crescimento da demanda por *hedge* cambial, cria condições para a entrada de novos participantes no mercado, principalmente empresas.

Isso posto, comunicamos que o Conselho de Administração da Bolsa decidiu que, a partir do pregão de 01/03/99, inclusive, os contratos em referência terão suas unidades de negociação alteradas para US\$50.000,00, para os vencimentos de abril/99 e posteriores. Dessa forma, o multiplicador dos referidos contratos passará a ser 50, já que a forma de cotação será mantida, ou seja, R\$/US\$1000,00.

As posições em aberto após o pregão de 26/02/99, para os vencimentos de abril/99 e posteriores, serão ajustadas, em 01/03/99, pela multiplicação do número de contratos por 2 (dois).

Em função dessa alteração, os valores de margem para os contratos futuros, a partir do pregão de 01/03/99, para atendimento em 02/03/99, passarão a ser os seguintes:

Contrato	Normal		Posições Opostas	
	Comum	Hedger	Comum	Hedger
	(valores em R\$1,00)			
Todos os vencimentos	18.750,00	15.000,00	9.375,00	7.500,00

Os valores das margens de garantia dos demais contratos futuros permanecem inalterados.

Atenciosamente,
Dorival Rodrigues Alves
Superintendente Geral
23 de fevereiro de 1999
050/99-SG

OFÍCIO CIRCULAR

Corretoras de Mercadorias, Membros de Compensação, Operadores Especiais e Permissionárias Correspondentes Membros da BM&F, BMRS, BMP, BMM, BMSC, BMPA, BMMS, BML, BMB e Brasbolsa

Ref.: **Limites de Oscilação de Preços – Contratos Futuros de Ibovespa, DI 1, Dólar Comercial e DDI.**

Prezados Senhores

Comunicamos que, a partir de 24/02/99, até novo aviso, os limites de oscilação de preços para os contratos em referência serão os seguintes:

Mercado Futuro de Ibovespa:

Todos os vencimentos: 15%

Mercado Futuro de DI1:

Primeiro vencimento – 1,0%

Segundo vencimento – 1,5%

Terceiro vencimento – 2,0%

Quarto vencimento – 2,5%

Quinto vencimento – 3,0%

Sexto vencimento em diante – 3,5%

Mercados Futuros de Dólar Comercial e Cupom Cambial:

Todos os vencimentos – 10%

Comunicamos também que, nos três últimos dias de negociação de qualquer dos contratos em referência, não haverá limites de oscilação de preços.

Ressaltamos que a BM&F poderá alterar ou revogar o limite de oscilação de preços de qualquer vencimento e de qualquer contrato, mesmo no decurso do pregão, mediante comunicação ao mercado com 30 minutos de antecedência.

Esclarecimentos adicionais poderão ser obtidos junto às Superintendências Técnica (Marco Aurélio, Verdi, Sergio, Vânia e Álvaro), de Liquidação e Custódia (Edemir e Nestor) e de Operações (Garbato, Branco e Marco) e Escritório Rio (Tatá, Galvão e Gonzaga).

Atenciosamente,
Dorival Rodrigues Alves
Superintendente Geral

Limites de Oscilação de Preços - Contratos Futuros Cambiais

Comunicamos que, a partir do pregão de 28/03/2002, será de 7,5% o limite de oscilação diária de preços para os Contratos Futuro e Futuro Fracionário de Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial, e Futuro de Cupom Cambial, para todos os vencimentos. Para o primeiro vencimento em aberto, o limite de oscilação será suspenso nos três últimos dias de negociação.

Salientamos que a BM&F poderá alterar ou revogar o limite de oscilação de preços de qualquer vencimento e de qualquer contrato, mesmo no decurso do pregão, mediante comunicação ao mercado com 30 minutos de antecedência.

Esclarecimentos adicionais poderão ser obtidos com as Diretorias Técnica e de Planejamento (Marco Aurélio, Álvaro, Sérgio e Vânia), de Operações e Desenvolvimento de Mercado (Branco, Edson e Marcos) e da Câmara de Derivativos (Nestor, Verdi e Radislau) ou com o Escritório Rio (Galvão).

ÚLTIMA ATUALIZAÇÃO: OFÍCIO CIRCULAR 039/2002-DG, DE 25/3/2002

ANEXO B – CONTRATO DE OPÇÃO SOBRE FUTURO DE DÓLAR DA BM&F

Especificações do Contrato de Opções de Compra sobre Futuro de Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial

1. Objeto da opção

O contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, com vencimento no mês de vencimento da opção.

2. Cotação

Prêmio da opção, em reais por US\$1.000,00, com até três casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,001 por US\$1.000,00.

4. Oscilação máxima diária

Não há limites de oscilação diária, podendo a Bolsa, excepcionalmente e a seu critério, estabelecê-los.

5. Unidade de negociação

Cada opção refere-se a um contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, cuja unidade de negociação (tamanho do contrato) é estabelecida pela BM&F.

6. Preços de exercício

As séries de preços de exercício serão estabelecidas e divulgadas pela BM&F, sendo expressas em reais por US\$1.000,00, para cada mês de vencimento.

7. Meses de vencimento

Todos os meses.

8. Número de vencimentos em aberto

No máximo 24 meses, conforme autorização da BM&F.

9. Último dia de negociação

Último dia útil (dia de pregão) do mês anterior ao mês de vencimento do contrato.

10. Data de vencimento

Primeiro dia útil (dia de pregão) do mês de vencimento do contrato.

11. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (day trade), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

12. Movimentação financeira do prêmio

Pagamentos e recebimentos de prêmios são efetuados no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão, cujo valor é calculado de acordo com a seguinte fórmula:

$$VL = P \times M,$$

onde:

VL = valor de liquidação do prêmio por contrato;

P = prêmio da opção, expresso em reais por US\$1.000,00, conforme definido no item 2;

M = multiplicador que define o tamanho do contrato.

13. Horário de exercício

Conforme determinação da BM&F.

14. Exercício

As opções poderão ser exercidas pelos titulares a partir do primeiro dia útil seguinte à data de abertura da posição, até o último dia de negociação da opção. Os resultados financeiros do exercício serão movimentados no dia útil subsequente.

15. Condições de liquidação no exercício

No exercício das opções, o titular assume uma posição comprada no contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, pelo preço de exercício da opção, e o lançador assume uma posição vendida no contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial pelo preço de exercício da opção.

O ajuste referente às posições assumidas no mercado futuro de taxa de câmbio de reais por

dólar comercial, em decorrência do exercício da opção, será, de acordo com as especificações daquele contrato, movimentado financeiramente no dia subsequente ao de exercício.

16. Critério de escolha das posições lançadoras para atendimento de exercício

Por sorteio.

17. Margem de garantia do lançador

A margem é determinada pela BM&F, com base no prêmio médio de cada pregão, sujeita a valor mínimo estabelecido e depositada em D+1, podendo ser alterada a qualquer momento, a critério da Bolsa.

18. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro, cotas do FIF e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

19. Custos operacionais

- **Taxa operacional básica**

Operação normal: 0,4%; *day trade*: 0,2%; exercício: 0,2%.

Nas operações (normal e *day trade*), a taxa operacional básica é calculada sobre seu respectivo valor. No exercício, a incidência é sobre o valor de liquidação, multiplicado pelo número de contratos.

Nos casos abaixo, a taxa operacional básica será de 0,1% em cada ponta, desde que as operações sejam de um mesmo cliente (ou operador especial), realizadas, no mesmo dia, através da mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação:

- a) exercer uma opção de compra e ser exercido em outra opção de compra;
- b) exercer uma opção de compra e exercer uma opção de venda;
- c) ser exercido numa opção de compra e ser exercido numa opção de venda.

A taxa operacional básica está sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

6,32% da taxa operacional básica.

- **Taxa de registro**

Valor fixo divulgado pela BM&F.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão ou do exercício.

Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa).

Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas de registro e da Bolsa.

20. Sistema de garantia da BM&F

O modelo de salvaguardas financeiras da Bolsa de Mercadorias & Futuros e os aspectos operacionais de seu sistema de garantia encontram-se detalhados no Ofício Circular 040/98-SG, de 31 de março de 1998, que divulga cláusula contratual que é parte integrante deste contrato.

21. Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções firmado entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25 de maio de 1988, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

OFÍCIO CIRCULAR 057/98-SG, DE 30.6.98

Especificações do Contrato de Opções de Venda sobre Futuro de Taxa de Câmbio de Reais por Dólar Comercial

1. Objeto da opção

O contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, com vencimento no mês de vencimento da opção.

2. Cotação

Prêmio da opção, em reais por US\$1.000,00, com até três casas decimais.

3. Variação mínima de apregoação

R\$0,001 por US\$1.000,00.

4. Oscilação máxima diária

Não há limites de oscilação diária, podendo a Bolsa, excepcionalmente e a seu critério, estabelecê-los.

5. Unidade de negociação

Cada opção refere-se a um contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, cuja unidade de negociação (tamanho do contrato) é estabelecida pela BM&F.

6. Preços de exercício

As séries de preços de exercício serão estabelecidas e divulgadas pela BM&F, sendo expressas em reais por US\$1.000,00, para cada mês de vencimento.

7. Meses de vencimento

Todos os meses.

8. Número de vencimentos em aberto

No máximo 24 meses, conforme autorização da BM&F.

9. Último dia de negociação

Último dia útil (dia de pregão) do mês anterior ao mês de vencimento do contrato.

10. Data de vencimento

Primeiro dia útil (dia de pregão) do mês de vencimento do contrato.

11. Day trade

São admitidas operações de compra e venda para liquidação diária (day trade), desde que realizadas no mesmo pregão, pelo mesmo cliente (ou operador especial), intermediadas pela mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação. Os resultados auferidos nessas operações são movimentados financeiramente no dia útil seguinte ao de sua realização.

12. Movimentação financeira do prêmio

Pagamentos e recebimentos de prêmios são efetuados no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão, cujo valor é calculado de acordo com a seguinte fórmula:

$$VL = P \times M,$$

onde:

VL = valor de liquidação do prêmio por contrato;

P = prêmio da opção, expresso em reais por US\$1.000,00, conforme definido no item 2;

M = multiplicador que define o tamanho do contrato.

13. Horário de exercício

Conforme determinação da BM&F.

14. Exercício

As opções poderão ser exercidas pelos titulares a partir do primeiro dia útil seguinte à data de abertura da posição, até o último dia de negociação da opção. Os resultados financeiros do exercício serão movimentados no dia útil subsequente.

15. Condições de liquidação no exercício

No exercício das opções, o titular assume uma posição vendida no contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, pelo preço de exercício da opção, e o lançador assume uma posição comprada no contrato futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, pelo preço de exercício da opção.

O ajuste referente às posições assumidas no mercado futuro de taxa de câmbio de reais por dólar comercial, em decorrência do exercício da opção, será, de acordo com as especificações daquele contrato, movimentado financeiramente no dia subsequente ao de exercício.

16. Critério de escolha das posições lançadoras para atendimento de exercício

Por sorteio.

17. Margem de garantia do lançador

A margem é determinada pela BM&F, com base no prêmio médio de cada pregão, sujeita a valor mínimo estabelecido e depositada em D+1, podendo ser alterada a qualquer momento, a critério da Bolsa.

18. Ativos aceitos como margem

Dinheiro, ouro, cotas do FIF e, a critério da Bolsa, títulos públicos e privados, cartas de

fiança, apólices de seguro, ações e cotas de fundos fechados de investimento em ações.

19.Custos operacionais

- **Taxa operacional básica**

Operação normal: 0,4%; *day trade*: 0,2%; exercício: 0,2%.

Nas operações (normal e *day trade*), a taxa operacional básica é calculada sobre seu respectivo valor. No exercício, a incidência é sobre o valor de liquidação, multiplicado pelo número de contratos.

Nos casos abaixo, a taxa operacional básica será de 0,1% em cada ponta, desde que as operações sejam de um mesmo cliente (ou operador especial), realizadas, no mesmo dia, através da mesma corretora de mercadorias e registradas pelo mesmo membro de compensação:

- a) exercer uma opção de venda e ser exercido em outra opção de venda;
- b) exercer uma opção de venda e exercer uma opção de compra;
- c) ser exercido numa opção de venda e ser exercido numa opção de compra.

A taxa operacional básica está sujeita a valor mínimo estabelecido pela Bolsa.

- **Taxas da Bolsa (emolumentos e fundos)**

6,32% da taxa operacional básica.

- **Taxa de registro**

Valor fixo divulgado pela BM&F.

Os custos operacionais são devidos no dia útil seguinte ao de realização da operação no pregão ou do exercício.

Os sócios efetivos pagarão no máximo 75% da taxa operacional básica e 75% dos demais custos operacionais (taxas de registro e da Bolsa).

Os investidores institucionais pagarão 75% das taxas de registro e da Bolsa.

20.Sistema de garantia da BM&F

O modelo de salvaguardas financeiras da Bolsa de Mercadorias & Futuros e os aspectos operacionais de seu sistema de garantia encontram-se detalhados no Ofício Circular 040/98-SG, de 31 de março de 1998, que divulga cláusula contratual que é parte integrante deste contrato.

21.Normas complementares

Fazem parte integrante deste contrato a legislação em vigor e as normas e os procedimentos da BM&F, definidos em seus Estatutos Sociais, Regulamento de Operações e ofícios circulares, bem como no Protocolo de Intenções firmado entre as bolsas de valores, de mercadorias e de mercados de liquidação futura, de 25 de maio de 1988, observadas, adicionalmente, as regras específicas do Banco Central do Brasil.

OFÍCIO CIRCULAR 057/98-SG, DE 30.6.98