

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

COMPARAÇÃO ENTRE MÉTRICAS DE RISCO PARA OTIMIZAR  
CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS EM AÇÕES

Alcides Carlos de Araújo

Orientadora: Profa. Dra. Alessandra de Ávila Montini

SÃO PAULO  
2011

Prof. Dr. João Grandino Rosas  
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Reinaldo Guerreiro  
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Adalberto Américo Fischmann  
Chefe do Departamento de Administração

Prof. Dr. Lindolfo Galvão de Albuquerque  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

**ALCIDES CARLOS DE ARAÚJO**

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTRICAS DE RISCO PARA OTIMIZAR  
CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS EM AÇÕES**

Dissertação apresentada ao Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Administração.

**Orientadora: Profa. Dra. Alessandra de Ávila Montini**

Versão Corrigida  
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

**SÃO PAULO  
2011**

Dissertação defendida e aprovada no Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo – Programa de Pós-graduação em Administração, pela seguinte comissão examinadora:

---

Profa. Dra. Alessandra de Ávila Montini (Presidente)

---

Prof. Dr. Adolpho Walter Pimazoni Canton – FEA/USP

---

Prof. Dr. André Luiz Oda – FIA

---

### **FICHA CATALOGRÁFICA**

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Araújo, Alcides Carlos de

Comparação entre métricas de risco para otimizar carteiras de investimentos em ações / Alcides Carlos de Araújo – São Paulo, 2011.

166p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2012.

Bibliografia.

1. Finanças 2. Ações 3. Investimentos 4. Risco I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade.  
II. Título.

CDD 332

Aos meus pais

## Agradecimentos

- À Deus, por iluminar o meu caminho e pela força no desempenho de todas as minhas atividades;
- Ao meu pai, José Carlos e minha mãe, Sueli, pela força diária e apoio constante durante toda a minha vida;
- Aos meus familiares tia Maria Cícera (tia Liu), Henrique, Fernando, Fernanda e Fabiana pelo apoio constante durante o curso de mestrado;
- A Profa. Dra. Alessandra Montini que se dedicou muito no seu papel de orientador, e a quem sou muito grato por todo o aprendizado obtido no curso de Mestrado;
- À banca examinadora da Dissertação, ao Professor titular Adolpho Walter Pimazoni Canton e Prof. Dr. André Oda, por todas as contribuições dadas e por todo o apoio durante a execução do trabalho;
- Ao corpo docente da FEA/USP, em especial aos Profs. Drs. Abraham Yu, Ronaldo Zwicker, César Alexandre, José Roberto Securato, Rosana Tavares e Bernadete Marinho, com quem tive oportunidade de fazer matérias e engrandecer meus conhecimentos nas diversas áreas lecionadas;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro que possibilitou a realização do curso;
- Aos meus amigos (Prof. Dr. A.C.S. Costa, Prof. Ms. Eduardo, Júlio Barbosa, Raony Justo, Thales Nilton, Allana, Luiz B.O., Maxsuel (Macasuel), Henrique “Nêgo”, Madal, Allan, Igor, Erich Feitosa, Bruno “Cachorrão”, Bruna Silva, Luzi, Haila Chagas, Nayara Abreu, Kaio Sosa e Gabriel Verlangieri) que tiveram participação importante em diversas fases da minha vida;
- Aos meus colegas de Mestrado/Doutorado da Universidade de São Paulo com quem tive grande oportunidade de aprendizado durante o curso (Lemilson Almeida, Bruno Carls, Martín Hernani, Afonso Lima, Thiago Rocha, Luciana Rizzi, Edison Simoni, Léo Raifur, Ângelo Danese, Ana Carolina Shinoda e Cristina Chu, entre outros);

“An individual will seek to reduce as far as is possible the chance of such a catastrophe occurring”.

A. D. Roy

## RESUMO

O trabalho de Markowitz (1952) modificou a forma de analisar o problema de formação de portfólios de ações. Pesquisadores clássicos como Sharpe (1964) e Lintner (1965) ampliaram as discussões, além de provocarem o levantamento de dúvidas e questionamentos a respeito do assunto. Quanto aos parâmetros para otimização dos portfólios, além do modelo de média-variância desenvolvido por Markowitz, outras abordagens paralelas desenvolvidas, alguns dos mais importantes foram os modelos baseados no chamado downside risk e aqueles focados na perda esperada dado um valor  $\alpha$  (percentis das distribuições de probabilidades). Nestes modelos, as seleções dos ativos ocorrem a partir da avaliação de distribuições de probabilidades assimétricas; o foco estaria em avaliar um dos lados da distribuição, ou seja, o lado das perdas, visto como a verdadeira parte da distribuição que significa risco. Alguns destes modelos são LPM (*Lower Partial Moment*), VaR (*Value at Risk*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*); os referidos modelos, viabilizados pelas capacidades computacionais da atualidade conjuntamente com os avanços na teoria, constituem a chamada *Post-Modern Portfolio Theory*. Jarrow (2006) cita algumas justificativas para a crescente atenção nas medidas de *downside risk*, por exemplo, os correntes debates devido às numerosas catástrofes financeiras e os acordos da Basileia I e II; nestas discussões, medidas de *downside risk* como o *Value-at-Risk* possuíram importância considerável. O crescente uso de derivativos na gestão de portfólios resulta numa mudança na forma de observar a distribuição de probabilidade da carteira, isto é, de uma distribuição simétrica para assimétrica. Por último, a utilização de ativos de renda fixa é crucial em períodos de desaceleração do mercado; entretanto, a existência de “caudas pesadas” nas distribuições de probabilidade destes produtos dificulta a análise por média-variância. A partir destas considerações, o objetivo da dissertação é comparar os modelos de otimização por Média-Variância (M.V.), *Lower Partial Moment* (L.P.M.) e *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) para estudar suas diferentes formas de alocações em carteiras de investimentos formadas por ações da bolsa de valores do Brasil. Os resultados mostraram que os pesos das carteiras tenderam a ser parecidos, porém existem diferenças quando são comparadas ações com taxas de retorno com distribuição normal e não normal. Quanto aos riscos, os testes apresentaram características similares entre os modelos; em relação aos retornos, os modelos que minimizaram o L.P.M. e o CVaR demonstraram, em comparação ao M.V., que os retornos de suas carteiras foram maiores.

## ABSTRACT

The study of Markowitz (1952) modified the way to analysis the problem to build asset portfolios. Classic researchers as Sharpe (1964) and Lintner (1965) extended discussions, and induce doubt and questions about the subject. Regarding the parameters for portfolio optimization, others approaches have been developed beyond the mean-variance model originated by Markowitz, probably the most important have been the models based in downside risk and those focused on the expected loss given a value  $\alpha$  (percentiles of probability distributions). In this models, the portfolio selection occurs from the assessment of asymmetric probability distributions; the focus should be assess one of distributions' sides, in other words, only the losses side is showed as the true part of the distribution that's risk means. Some of these models are LPM (Lower Partial Moment), VaR (Value at Risk) and CVaR (Conditional Value at Risk); these models enabled by actual computational capacity together with advances on the theory constitute the Post-Modern Portfolio Theory. Jarrow (2006) cites some justifications for the crescent attention in downside risk measures, for example, the current debate because of the numerous financial disasters and Basel accord I and II; in these discussions, downside risk measures as the Value-at-Risk possessed considerable importance. The crescent use of derivatives in portfolio management resulted a change in the way to see the portfolio probability distribution, symmetrical distribution to asymmetric. For last, the use of fixed income assets is crucial in periods of downturn in the market; however, the existence of fat-tails in the probability distribution these goods difficults the analysis by mean-variance. From these considerations, the objective of this study was comparing the optimization models by Mean-Variance (MV), Lower Partial Moment (LPM) and Conditional Value-at-Risk (CVaR) to understand the different ways to allocate in a portfolio of investments formed by stocks at Brazilian market. The results showed that the portfolio weights tended to be similar, but there are differences when returns stocks rate with normal and non-normal distribution are compared. Regarding the risks, the tests showed similar characteristics between the models; regarding the returns, the models that minimized the L.P.M. and CVaR demonstrate, in comparison to M.V., that the returns of yours portfolios were the best.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivos . . . . .	8
1.2	Problemas de pesquisa . . . . .	9
1.3	Justificativas . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>12</b>
2.1	Medidas de risco . . . . .	12
2.1.1	Dominância estocástica e coerência . . . . .	13
2.2	Análise de média-variância (MV) . . . . .	16
2.2.1	Carteiras formadas com ativos de risco . . . . .	18
2.2.2	Carteiras formadas com ativos de risco e um ativo livre de risco . .	20
2.3	<i>Downside Risk</i> . . . . .	21
2.3.1	A semivariância e a família LPM . . . . .	23
2.3.2	A cosemivariância . . . . .	24
2.4	Valor em Risco (VaR) e Valor em Risco Condicional (CVaR) . . . . .	26
2.4.1	Otimização do Valor em Risco Condicional . . . . .	29
2.5	Comparação entre as medidas de risco na otimização de carteiras de ativos	30
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>33</b>
3.1	Etapa 1 - Modelos de otimização e divisão dos períodos . . . . .	34
3.2	Etapa 2 - Divisão dos ativos e análises . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Análises e Resultados</b>	<b>41</b>
4.1	Análise Descritiva . . . . .	41
4.2	Composições das carteiras . . . . .	42
4.3	Análises de retornos e riscos . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Referências</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice - Assimetria da matriz de cosemivariância</b>	<b>70</b>
<b>B</b>	<b>Apêndice - Ações com retornos com distribuição normal</b>	<b>73</b>
<b>C</b>	<b>Apêndice - Ações com retornos com distribuição não normal</b>	<b>78</b>
<b>D</b>	<b>Apêndice - Composições das carteiras (grupo distribuição normal)</b>	<b>83</b>
<b>E</b>	<b>Apêndice - Composições das carteiras (distribuição não normal)</b>	<b>110</b>

<b>F Apêndice - Análise das medidas de risco</b>	<b>137</b>
<b>G Apêndice - Análise dos retornos por carteira</b>	<b>148</b>
<b>H Apêndice - Análise dos retornos geral</b>	<b>154</b>

## Lista de Figuras

1	Comparações de funções de probabilidades acumuladas F(R) . . . . .	14
2	Relação média-variância . . . . .	19
3	Relação Média-Variância com ativo livre de risco . . . . .	20
4	Distribuições assimétricas . . . . .	22
5	Esquema metodológico . . . . .	33
6	Comportamento índice Bovespa 2002 a 2010 . . . . .	35
7	Comportamento do índice RMSDI . . . . .	44
8	Comportamento do índice conforme aumento de ações analisadas . . . . .	45
9	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2008 . . . . .	51
10	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2006 . . . . .	137
11	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2006 . . . . .	138
12	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2007 . . . . .	139
13	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2007 . . . . .	140
14	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2008 . . . . .	141
15	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2009 . . . . .	142
16	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2009 . . . . .	143
17	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2010 . . . . .	144
18	Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2010 . . . . .	145
19	Níveis descritivos teste F - 2006 a 2008 . . . . .	146
20	Níveis descritivos teste F - 2009 a 2010 . . . . .	147
21	Retornos médios por carteira - 2006 e 2007 . . . . .	148
22	Retornos médios por carteira - 2008 e 2009 . . . . .	149
23	Retornos médios por carteira - 2010 . . . . .	150
24	Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2006 e 2007 . . . . .	151
25	Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2008 e 2009 . . . . .	152
26	Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2010 . . . . .	153

## Lista de Tabelas

1	Avaliação das medidas de risco . . . . .	16
2	Diferenças de valores LPM em relação a ordem . . . . .	24
3	Proposições de cálculos . . . . .	26
4	Extensão das piores perdas . . . . .	28
5	Modelos de otimização estudados . . . . .	34
6	Processo de otimização . . . . .	38
7	Quantidade de retornos de ações analisados por período . . . . .	42
8	Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.1 e M.2 . . . . .	47
9	Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.1 e M.3 . . . . .	48
10	Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.2 e M.3 . . . . .	49
11	Comparação dos retornos dos modelos M.1 e M.2 . . . . .	53
12	Comparação dos retornos dos modelos M.1 e M.3 . . . . .	54
13	Comparação dos retornos dos modelos M.2 e M.3 . . . . .	55
14	Ações do ano de 2006 . . . . .	73
15	Ações do ano de 2007 . . . . .	74
16	Ações do ano de 2008 . . . . .	75
17	Ações do ano de 2009 . . . . .	76
18	Ações do ano de 2010 . . . . .	77
19	Ações do ano de 2006 . . . . .	78
20	Ações do ano de 2007 . . . . .	79
21	Ações do ano de 2008 . . . . .	80
22	Ações do ano de 2009 . . . . .	81
23	Ações do ano de 2010 . . . . .	82
24	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.1) . . . . .	83
25	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.2) . . . . .	84
26	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.3) . . . . .	85
27	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.1) . . . . .	86
28	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.2) . . . . .	87
29	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.3) . . . . .	88
30	Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.1) . . . . .	89
31	Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.2) . . . . .	90
32	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.1) . . . . .	91
33	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.2) . . . . .	92
34	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.3) . . . . .	93
35	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.1) . . . . .	94
36	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.2) . . . . .	95
37	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.3) . . . . .	96

38	Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.1)	97
39	Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.2)	97
40	Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.3)	97
41	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.1)	98
42	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.2)	99
43	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.3)	100
44	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.1)	101
45	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.2)	102
46	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.3)	103
47	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.1)	104
48	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.2)	105
49	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.3)	106
50	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.1)	107
51	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.2)	108
52	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.3)	109
53	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.1)	110
54	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.2)	111
55	Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.3)	112
56	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.1)	113
57	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.2)	114
58	Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.3)	115
59	Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.1)	116
60	Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.2)	117
61	Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.3)	118
62	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.1)	119
63	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.2)	120
64	Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.3)	121
65	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.1)	122
66	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.2)	123
67	Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.3)	124
68	Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.1)	125
69	Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.2)	126
70	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.1)	127
71	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.2)	127
72	Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.3)	127
73	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.1)	128
74	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.2)	129
75	Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.3)	130
76	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.1)	131

77	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.2) . . . . .	132
78	Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.3) . . . . .	133
79	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.1) . . . . .	134
80	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.2) . . . . .	135
81	Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.3) . . . . .	136
82	Comparações retornos das carteiras M.1 x M.2 (dist. normal) . . . . .	154
83	Comparações retornos das carteiras M.1 x M.3 (dist. normal) . . . . .	155
84	Comparações retornos das carteiras M.2 x M.3 (dist. normal) . . . . .	156
85	Comparações retornos das carteiras M.1 x M.2 (dist. não normal) . . . . .	156
86	Comparações retornos das carteiras M.1 x M.3 (dist. não normal) . . . . .	157
87	Comparações retornos das carteiras M.2 x M.3 (dist. não normal) . . . . .	157

# 1 Introdução

Um artigo pioneiro de Markowitz (1952) provocou uma mudança radical na forma de analisar o problema da formação de portfólios (grupos ou carteiras) de ativos financeiros, conceituados por Elton *et al.* (2002) como um conjunto de ações e títulos (debêntures, certificados de depósitos bancários e títulos públicos). Diversos direcionamentos formados na teoria, conjuntamente explorados por outros pesquisadores clássicos como Sharpe (1964) e Lintner (1965), provocaram dúvidas, discussões e questionamentos, tendo como produto uma gama de livros e artigos que formaram a moderna teoria do portfólio.

Em relação aos problemas encontrados nos estudos sobre a gestão de carteiras, Roman e Mitra (2009) citam três áreas gerais de pesquisa neste campo. A primeira é o estudo das distribuições de probabilidade dos retornos dos ativos; a segunda, a obtenção dos pesos dos componentes da carteira com objetivos de maximizar retorno ou minimizar risco; e a terceira, a maneira de rebalancear as composições dos ativos no tempo.

No que concerne à tarefa de administrar carteiras, autores como Macedo *et al* (1998) levantam algumas questões fundamentais como: saber se a carteira está diversificada, se a proporção entre ações e títulos está otimizada, como as proporções se modificam no tempo, quais os níveis de risco e se a estratégia de investimentos está proporcionando o retorno desejado. Tais proposições são alvo de discussões nos estudos da área financeira.

Conforme Securato (1999), ambientes econômicos com elevadas taxas de juros e bolsa de valores em baixa contribuem para valorização dos títulos. Deste modo, administradores de fundos são atraídos por tais papéis, ativos de taxa livre de risco de mercado e com liquidez. Além disso, eles possibilitam rentabilidade maior em relação às metas exigidas. Pereira Filho (2007) constata que, em tais condições, pode-se gerir a carteira da instituição de forma mais simplificada. Entretanto, quando o cenário econômico apresenta taxas de juros em declínio e bolsa de valores em alta, os papéis federais, com baixa rentabilidade, geram menor atratividade para os investidores (CORAZZA, 2007).

Diante dessas mudanças de cenário, em determinados momentos os gestores possuem a necessidade de migrar seus investimentos para os títulos de renda fixa ou para títulos de renda variável, ou seja, a depender das condições de mercado devem assumir menos riscos (títulos de renda fixa) ou devem assumir mais riscos (títulos de renda variável) para atingir suas metas (CORAZZA, 2007). Desse modo, são obrigados a selecionar e diversificar a alocação de seus investimentos para continuarem o desenvolvimento da carteira.

Além da formação da carteira, a forma de gestão possui relação direta na maneira com

que a atividade de administração de portfólios é realizada. Segundo Alexander (2008), nos casos em que a gestão dos fundos ocorre de forma passiva, basicamente, as carteiras somente precisam seguir os retornos de alguma referência (*benchmarking*). Diante disto, as medidas que replicam algum índice de referência - também denominadas de medidas de *tracking error* - possuem peso importante nas tomadas de decisões e relacionamento com clientes. No caso da administração ativa, ou seja, uma gestão que busca retornos acima de algum referencial, existe maior atenção para gerir as carteiras, sendo necessário o estudo de outras formas de mensuração de riscos. Deste modo, Alexander (2008) cita a importância de analisar cada uma das métricas para mensuração de risco.

Podem ser citadas medidas, como, por exemplo, o modelo de Markowitz (1952) e o modelo intertemporal (MERTON, 1973), modelos baseados em lógica *fuzzy*, redes bayesianas e algoritmos genéticos. Diante das diversas métricas de risco, Kato (2004) cita argumentos relacionados à busca para selecionar as melhores medidas para o caso otimização de carteiras de investimentos. Segundo o autor, deve existir a necessidade de os investidores compararem o desempenho dos variados modelos existentes.

Outras abordagens paralelas em relação aos modelos mais conhecidos (baseados no desvio-padrão como medida de risco) seriam os modelos fundamentados no lado das perdas na distribuição de probabilidade dos retornos. Nestes casos, as seleções dos ativos ocorrem a partir da avaliação de distribuições de probabilidades assimétricas dos retornos, além de focarem somente num dos lados da distribuição, ou seja, o lado das perdas.

Alguns desses modelos que consideram o *downside risk* e distribuições de retornos assimétricas são o LPM (*Lower Partial Moment*), VaR (*Value at Risk*) e o CVaR (*Conditional Value at Risk*), que são viabilizados pelas capacidades computacionais da atualidade conjuntamente. Eles constituem a chamada *Post-Modern Portfolio Theory* (ROM e FERGUSON, 1994; GROOTVELD e HALLERBACH, 1999; ROMAN e MITRA, 2009). Por meio das argumentações levantadas, desenvolveram-se os problemas e objetivos deste trabalho.

## 1.1 Objetivos

Objetivo geral: Comparar as alocações de investimentos em ações com uso de diferentes métricas de minimização de riscos.

Objetivos específicos:

- a) Realizar um levantamento bibliográfico sobre métricas de otimização de carteiras de ações.

- b) Apresentar os principais conceitos e diferenças entre as métricas de seleção de carteiras.
- c) Comparar as composições das carteiras otimizadas nos diferentes modelos, em períodos distintos.
- d) Comparar os retornos das carteiras otimizadas nos diferentes modelos, em períodos distintos.

## 1.2 Problemas de pesquisa

Os objetivos citados partiram das seguintes perguntas específicas formando a pergunta geral:

Específicas:

- a) Quais as diferenças entre as métricas de risco na otimização de carteiras de ações?
- b) Quais as principais métricas para mensuração de risco utilizadas na otimização de portfólios?
- c) Métricas de risco diferentes para otimização de carteiras de ações podem formar composições muito divergentes?
- d) As métricas de risco para de otimização de carteiras de ações podem apresentar retornos e riscos diferentes?
- e) As métricas de risco na otimização de carteiras apresentam resultados diferentes quando as distribuições de probabilidade dos retornos das ações são diferentes?

Geral: Quais as características (composição e retornos) das carteiras de ações quando são utilizadas diferentes métricas de mensuração de riscos?

## 1.3 Justificativas

Um ponto de acirrada discussão em modelos de otimização de carteiras é o uso da variância e desvio-padrão como medidas de risco. Entretanto, segundo Markowitz (1959), a utilização de outras medidas chamadas semivariâncias e semidesvios produziriam composições de carteiras que minimizariam os riscos e apresentariam retornos maiores em relação as medidas baseadas no desvio-padrão. A partir disto, diversos pesquisadores iniciam seus inúmeros questionamentos e análises sobre estas métricas.

A sugestão de Markowitz (1959) foi baseada nas próprias limitações de seu modelo inicial, como a suposição de racionalidade dos investidores e distribuição normal dos ativos.

Contudo, outras suposições em relação ao comportamento dos investidores em relação ao risco foram descritas. Por exemplo, Roy (1952) apresenta o conceito de *safety first*, preferir a primeira alternativa que minimize a chance do desastre (perda), ou seja, o foco de maximizar riqueza é modificado para um comportamento de manter a riqueza existente e aceitar um retorno maior desde que o patrimônio atual não seja comprometido.

A respeito da racionalidade dos investidores, Kahneman e Tversky (1979) apresentam a aparente falta de racionalidade de investidores quanto à estruturação, ou seja, um problema demonstrado como “ganhos” pode levar a escolhas diferentes em relação ao mesmo problema estruturado como “perdas”. Quanto à suposição da normalidade, pode-se destacar o trabalho de Castro Junior e Silveira (2009). Segundo esses autores, os testes sobre as distribuições dos retornos das ações no mercado brasileiro, mesmo utilizando um período de tempo extenso, não demonstraram aderência à normalidade. Deste modo, existiu uma recomendação sobre não utilizar pressuposições sobre as distribuições dos retornos.

Além das razões apresentadas acima, Jarrow (2006) ainda cita mais três justificativas para a crescente atenção às medidas de *downside risk*. A primeira diz respeito aos debates correntes por causa das numerosas catástrofes financeiras e aos accordos da Basileia. Nessas discussões, mensurações de *downside risk*, como o VaR, possuem importância considerável. A segunda se relaciona com as utilizações mais frequentes de derivativos na gestão de portfólios, que alteram a distribuição de probabilidade da carteira, passando de simétrica para assimétrica. Por último, em momentos de desaceleração do mercado de capitais, a utilização de ativos de renda fixa é crucial. Contudo, nesses produtos verifica-se a existência de “caudas pesadas” nas distribuições de probabilidade, o que dificulta a análise por média-variância.

Mediante tais implicações, a variância como uma medida de risco é amplamente criticada tanto pela forma de explicar comportamento do investidor quanto pelas medidas estatísticas. O primeiro questionamento seria pela capacidade de considerar como risco tanto os retornos acima da média (*upside*) quanto as taxas abaixo da média (*downside*), sendo que investidores avaliam como alternativa arriscada somente as variações abaixo de um valor especificado (*downside*). Em relação às medidas estatísticas, a variância se torna adequada quando a distribuição dos retornos é normal, contudo, a maioria dos testes empíricos não evidenciam que a distribuição dos retornos dos ativos sejam normais (HOGAN e WARREN, 1972; CHOOBINEH e BRANTING, 1986; JARROW e ZHAO, 2006; ESTRADA, 2007; ESTRADA, 2008).

Diante desses fatos, foram utilizadas as como métricas de riscos na otimização de carteiras a Variância, LPM (*Lower Partial Moment*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*)

para estudar suas diferentes formas de alocação em carteiras de investimento formadas por ações da bolsa de valores. Costa e Assunção (2005) mencionam a existência de limitações destas medidas, principalmente devido a seus resultados serem baseados em distribuições de séries históricas que mudam com o tempo. Entretanto, as métricas mencionadas tornam-se apropriadas quando o pesquisador/gestor busca estimar os parâmetros de forma a se adaptar à conjuntura econômica.

Outro ponto que chama atenção ao se estudar métricas de otimização é a questão levantada por Kato (2004): “Um investidor necessita montar o portfólio e encontra-se diante de uma gama de medidas. Qual destas deverá escolher?”. Deste modo, torna-se necessário conhecer qual o desempenho relativo entre eles, isto é, alguma forma de compará-los.

Diante do que foi exposto, foram pesquisados os principais conceitos das medidas de risco: variância, LPM e CVaR, buscando comparar o desempenho das carteiras formadas no mercado brasileiro quando tais métricas foram utilizadas na otimização.

## 2 Revisão Bibliográfica

Para entender os diversos conceitos para atingir os objetivos traçados, torna-se necessário a apresentação dos principais elementos a serem utilizados neste estudo. Diante disso, serão tratados assuntos relacionados aos seguintes tópicos: classificação das medidas de mensuração de risco, medidas média-variância (carteiras somente com ativos de risco e carteiras contendo ativos livres de risco) e métricas *downside risk*, além de uma revisão sobre VaR e CVaR.

### 2.1 Medidas de risco

A história do risco fascina o mundo financeiro. Um dos principais trabalhos nessa linha é o *best seller Against the Gods The Remarkable Story of Risk*, de Peter L. Berstein (1996). Outros pesquisadores publicaram artigos interessantes, como Nawrocki (1999), que realizou uma revisão bibliográfica para descrever o desenvolvimento das mensurações do chamado *downside risk*. Roman e Mitra (2009), que também fazem um breve histórico das medidas de risco.

No Brasil, existem trabalhos como o elaborado por Saito *et al* (2006), que descreve toda a evolução da função financeira, desde os primeiros artigos de Markowitz, Sharpe e Tobin até a ascensão das finanças comportamentais através do célebre trabalho de Kahneman e Tversky (1979). Kato (2004) em sua dissertação faz uma breve revisão do desenvolvimento das medidas de risco.

Segundo Kato (2004), a chamada “teoria do risco” teve origem no estudo de Tetens (1789), que realizou ordenamentos através de média e desvio-padrão. Também cita Keynes (1937) ao descrever sobre o risco ser medido a partir dos desvios em relação ao um retorno médio, sendo que um prêmio pelo risco deveria ser atribuído aos investimentos nos ativos representados com altas dispersões. Outros autores, como Domar e Musgrave (1944), definem o risco como condição de incerteza e possibilidades de perdas.

Como se percebe, os diversos autores associam termos como variação, dispersão, perda e incerteza ao risco. Entretanto, o conhecimento de como representar este “risco” em uma forma que seja possível ordená-lo é alvo de discussões entre pesquisadores. Segundo Kato (2004), não existe um consenso entre os autores sobre uma medida de risco financeiro adequada. Desta forma, pesquisadores descreveram algumas propriedades matemáticas para formalizar as mensurações, como tratado no tópico 2.1.1.

Em relação às mensurações de risco existentes, Roman e Mitra (2009), Alexander (2008) e Kato (2004) citam a divisão de duas categorias para mensuração do risco financeiro na

otimização de portfólios. A primeira categoria é caracterizada pelas medidas que consideram a dispersão em relação a um retorno-alvo e pode somente assumir valores positivos. Neste caso, a categoria é dividida em dois grupos: medidas simétricas e assimétricas.

O primeiro grupo, o das medidas simétricas, é representado pela variância (ou desvio-padrão) e o desvio médio absoluto. Como retorno alvo, utiliza-se o valor esperado. Neste caso, os riscos são considerados como dispersões acima ou abaixo das expectativas. No segundo grupo, o risco é mensurado somente em relação aos desvios abaixo do retorno alvo (*downside risk*), podendo ser o valor esperado ou algum *benchmarking*. Os principais representantes do grupo são a semivariância e o conjunto de medidas *Lower Partial Moment*, tratados no tópico 2.3.1.

A segunda categoria é formada pelas medidas de risco baseadas em quantis (percentis). Neste campo são classificados as medidas *Value-at-Risk* - VaR e *Conditional Value-at-Risk* - CVaR. A dimensão é caracterizada pelo foco no chamado “tail risk measures”, ou seja, o objetivo é calcular o risco a partir da área da cauda esquerda da distribuição de probabilidade dos retornos do ativo, dado certo nível de confiança (1%, 5% ou 10%). O foco na cauda esquerda é explicado pela capacidade desta área da distribuição de representar as maiores perdas do ativo.

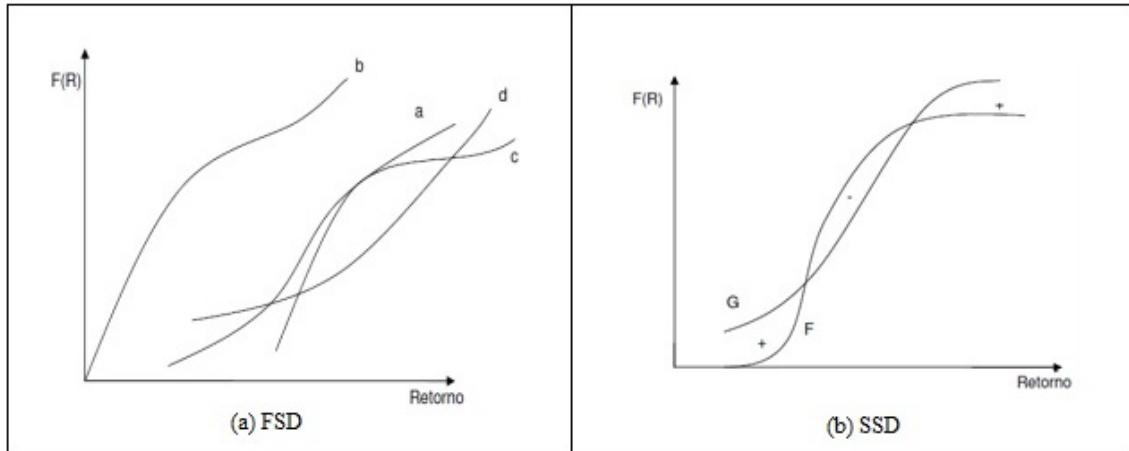
### **2.1.1 Dominância estocástica e coerência**

Roman e Mitra (2009) utilizaram algumas propriedades matemáticas das medidas de risco para verificar conceitualmente a consistência de cada uma delas, sendo os conceitos norteadores os de dominância estocástica (D.E.) e coerência. Estas propriedades foram discutidas por autores como Haddar e Russell (1969), Aharony e Loeb (1977), Artzner (1999), Clemen e Reilly (2001) e Kato (2004), o que mostra uma devida atenção dos pesquisadores através dos anos.

Clemen e Reilly (2001) apresentam a ideia básica do que seria dominância estocástica, ou seja, comparar retornos esperados de diferentes investimentos se torna inadequado devido à natureza dos riscos associados, como é o caso do investimento em ações. Dessa forma, através dos perfis de risco, criados a partir das funções de distribuições de probabilidades acumuladas (f.d.p.a.) dos ativos, torna-se possível realizar as comparações.

Diante disto, pode-se utilizar o trabalho de Roman e Mitra (2009) para conceituar dominância estocástica como um processo realizado para classificar variáveis aleatórias abaixo de suposições gerais do comportamento econômico modelado através da função utilidade. Segundo Baran (2004), existem três regras principais relacionadas ao conceito de dominância estocástica, sendo que no presente texto serão ressaltadas apenas duas delas. São

as seguintes: dominância estocástica de primeira ordem (FSD - *first-degree stochastic dominance*) e dominância estocástica de segunda ordem (SSD - *second-degree stochastic dominance*).



**Figura 1: Comparações de funções de probabilidades acumuladas  $F(R)$**

FONTE: Adaptado de Baran (2004), pág. 35 e 37.

Na Figura 1 apresentado o exemplo demonstrado em Baran (2004), em que  $F(R)$  é uma função de probabilidade acumulada. Na parte (a), é apresentado o caso de dominância estocástica de primeira ordem (FSD - *first-degree stochastic dominance*), em que retorno é a variável aleatória (v.a.) e a, b, c, e d são f.d.p.a. e percebe-se que  $a > b$  - lê-se “a” domina “b”, dado que “a” possui maior probabilidade de receber retorno melhor em relação a “b”.

No caso em que as funções se cruzam - parte (b) - não é possível aplicar a regra de FSD. Desse modo, deve-se utilizar a regra da dominância estocástica de segunda ordem (SSD - *second-degree stochastic dominance*). Ao observar as f.d.p.a  $F$  e  $G$ , percebe-se que  $F$  domina  $G$  devido ao fato de a área abaixo de  $G$  ser maior em relação à área abaixo de  $F$ .

Formalmente, essas duas regras podem ser citadas seguindo as convenções de Haddar e Russell (1969) e Aharony e Loeb (1977):

- $F(X)$  e  $G(X)$  são funções de probabilidade acumuladas das carteiras  $F$  e  $G$ , em que  $X$  é uma variável aleatória que representa os retornos.
- O portfólio  $F$  possui FSD em relação a  $G$  se  $F(X) \leq G(X)$ .
- O portfólio  $F$  possui SSD em relação a  $G$  se  $\int_{\infty}^x [G(t) - F(t)] dt \geq 0$ .

No caso de seleção de ativos, a carteira  $F$  será eficiente em relação a  $G$  se  $G$  nunca apresentar as seguintes características:

$$E_G(X) \geq E_F(X) \text{ e } Var_G(X) < Var_F(X),$$

ou

$$E_G(X) > E_F(X) \text{ e } Var_G(X) \leq Var_F(X),$$

Ou seja,  $F$  será eficiente se  $G$  não possuir retorno esperado maior e variância menor que  $F$ . Esta relação é caracterizada exatamente pela dominância estocástica de segunda ordem.

O segundo conceito norteador a respeito das propriedades matemáticas das medidas de risco é a coerência. Segundo Rockafellar e Uryasev (2000), o trabalho de Artzner (1999) é a principal referência sobre os axiomas (propriedades) de uma medida de risco coerente, Kato (2004) os descreve detalhadamente. Ao todo são quatro, em que  $\rho$  é um estimador de risco:

1. Subaditividade: para todos os  $X$  e  $Y$ ,  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ . Esta propriedade ocorre pela diversificação, isto é, o risco de dois ativos combinados não deve ser maior que os riscos individuais.
2. Homogeneidade positiva: para todo  $X$  e  $\lambda \geq 0$ ,  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$  O risco de uma variável aleatória (como a taxa de retorno em %) multiplicada por um escalar (como algum valor monetário) deve ser o mesmo que multiplicar o escalar pelo risco individual da v.a.
3. Monotonicidade: para todos os  $X$  e  $Y$  tais que  $X \leq Y$ ,  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ . Caso um ativo  $X$  sempre apresente retornos menores em relação a outro ativo  $Y$ , esse ativo  $X$  deve possuir risco menor em relação ao  $Y$ .
4. Invariância à translação: para todo  $X$  e  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\rho(X + \alpha r_f) = \rho(X) + \alpha$ . Adicionar a quantia inicial um valor  $\alpha$  e investir em algum outro ativo (como por exemplo, um ativo livre de risco). Simplesmente basta somar a medida de risco por  $\alpha$ .

Mediante as diversas medidas de risco existentes na otimização de carteiras, Roman e Mitra (2009) apresentam um quadro demonstrativo das principais propriedades atendidas destas mensurações. Segundo os autores, a avaliação segue as definições de dominância estocástica (D.E.) e coerência (Tabela 1).

Como se percebe na Tabela 1, somente o CVaR atende as três características, conforme Roman e Mitra (2009), de uma medida de risco confiável. Tanto o VaR quanto a família

**Tabela 1: Avaliação das medidas de risco**

Medida de risco	Consistência D.E. 1 <sup>a</sup> ordem	Consistência D.E. 2 <sup>a</sup> ordem	Coerência
Desvio-padrão	Não	Não	Sim*
Desvio médio absoluto	Não	Não	Sim*
Semivariância	Não	Não	Sim*
L.P.M.	Sim	Sim	Não
VaR	Sim	Não	Não
CVaR	Sim	Sim	Sim

\*Coerentes ao supor distribuição normal.

**FONTE:** ROMAN e MITRA; 2009, pág. 83.

L.P.M. apresentam problemas de coerência, sendo que o desvio-padrão demonstrou limitações na dominância estocástica, não obtendo críticas negativas em relação à coerência, devido à suposição de normalidade.

Segundo Kato (2004), a família L.P.M. não atende a quarta propriedade (invariância a translação). Quanto ao VaR, Oliveira (2009) demonstra que a medida nem sempre satisfaz a primeira propriedade (Subaditividade). Além de Roman e Mitra (2009), outros autores como Rockafellar e Uryasev (2000) e Acerbi (2002) apresentam o CVaR como uma medida de risco coerente.

A partir das informações citadas na Tabela 1, os próximos tópicos serão dedicados à descrição das medidas de risco na otimização de carteiras. São elas: variância (por ser a mais reconhecida e utilizada), L.P.M (por ser consistente com o conceito de dominância) e o CVaR (por possuir a melhor avaliação de acordo com a Tabela 1).

## 2.2 Análise de média-variância (MV)

Uma das métricas mais comentadas na atividade de administração de carteiras e literatura (SAITO *et al*, 2006) foi apresentado por Markowitz (1952). Este autor menciona que investidores devem formar seus portfólios visando maximizar seus retornos e minimizar os seus riscos. Entende-se tal afirmação de forma simplificada e lógica. Contudo foi este conceito que proporcionou as principais bases para a moderna teoria do portfólio.

Desta forma, Assaf Neto (2003), dentro desta abordagem, trata das três fases envolvidas na formação de carteiras: análise individual dos títulos, análises das carteiras (simulações) e seleção. Buscando, como descreve o conceito, maximizar o retorno e minimizar os riscos. Podemos perceber que no mercado de ações os riscos e os retornos dos títulos não são fatores a serem avaliados de forma determinística, principalmente devido ao componente de incerteza existente. Desse modo, o enfoque da análise dos riscos e dos retornos dos ativos consistirá na descrição de suas distribuições de probabilidades. Um dos métodos mais

conhecidos é o modelo Média-Variância (VARIAN, 2006). Luenberger (1998) discute, de forma minuciosa, os aspectos deste modelo.

No que tange ao retorno, deve-se aplicar os conceitos estatísticos sobre média para encontrá-lo, mais especificamente a fórmula do valor esperado (equação 1):

$$E(r_c) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) \quad (1)$$

Em que:

$E(r_c)$ : retorno esperado da carteira.

$E(r_i)$ : retorno esperado do ativo  $i$ .

$w_i$ : percentual do valor total investido no ativo  $i$ .

Assim, percebe-se que o retorno da carteira pode ser analisado a partir dos retornos passados dos títulos individuais e dos respectivos percentuais alocados nos ativos.

Quanto aos riscos, estes podem ser calculados a partir da dispersão dos resultados das ações em relação aos seus retornos médios, ou seja, o nível de variância dos retornos define o grau de risco do investimento. Da mesma forma que os retornos dos ativos individuais influenciam o retorno esperado do portfólio, a variância dos retornos de cada título influenciam o risco total da carteira. A variância da carteira é dada pela expressão 2.

$$\sigma_c^2 = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j} w_i w_j, \quad (2)$$

em que:

$\sigma_c^2$ : variância da carteira.

$\sigma_{i,j}$ : covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ .

Também destaca-se na expressão 2 um componente de poderosa influência no risco de uma carteira: as covariâncias. Estas demonstram que a variabilidade de um portfólio também dependerá da forma como seus componentes se inter-relacionam (ASSAF NETO, 2003). Mediante isto, observa-se a definição de outro aspecto na teoria, o conceito de diversificação; segundo Luenberger (1998), o processo de incluir diversos ativos de investimentos numa carteira é chamado de diversificação, este processo se torna mais eficiente quando

seleciona-se ativos não correlacionados para compor o portfólio.

Quanto ao número de ativos a serem incluídos, Lins *et al* (2007) recomendam a devida atenção a esta atividade, principalmente ao se construir carteiras formadas somente por ações, pois existem limites quando se adicionam títulos numa carteira. Uma quantidade excessiva de ativos impossibilita a boa gerência (acompanhamento), compra de ações de fraco desempenho e altos custos de corretagem.

Diante disso, Gitman e Joehnk (2005) recomendam carteiras contendo entre oito a quinze títulos, Francis (2001) aconselha entre dez a quinze ativos. No Brasil, Oliveira e Paula (2008) realizaram um estudo sobre o mesmo tema, assim como os outros autores mencionados, esse número atingiu a quantidade de 12 ações para serem incluídas numa carteira.

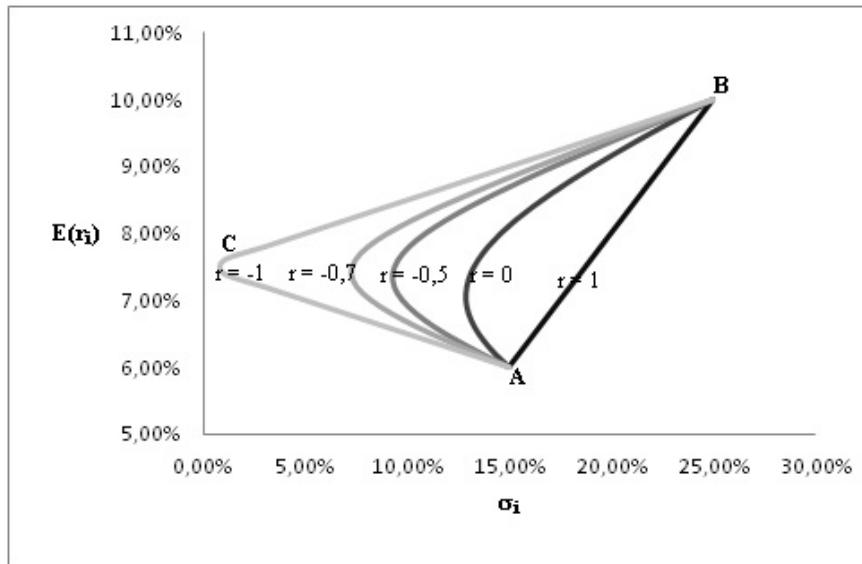
A partir destas suposições e recomendações, percebe-se a dificuldade de construção e administração de carteiras de ativos. Ou seja, ao se formar um portfólio, um investidor buscará um alto retorno, porém desejando um baixo nível de risco, sendo ainda necessário concentrar-se na quantidade de títulos e ações a serem investidos. Este esforço pode ser chamado de “Problema de Portfólio” ou, segundo Luenberger (1998), o “Problema de Markowitz”.

### **2.2.1 Carteiras formadas com ativos de risco**

Maximizar a utilidade média-variância torna-se complicado, pois, segundo Cassaroto Filho e Kopittke (1998), “as duas coisas não podem ser obtidas simultaneamente”, dado que riscos e retornos apresentam relação positiva, ou seja, à medida que um nível de retorno sobe, seu respectivo risco também aumenta.

Frijns *et al* (2006) apresentam mais alguns dos principais atributos a serem considerados quando um investidor constrói uma carteira: o montante de retorno dado um risco total e o nível de aversão ao risco. Ou seja, na primeira característica, para grandes quantias investidas existe o risco de grandes perdas. Na segunda característica, o comportamento psicológico do investidor quanto ao nível de risco a ser incorrido determina a forma da criação da carteira. Diante destas pressuposições, torna-se possível observar o problema de maximização entre risco e retorno num diagrama (Figura 2).

A Figura 2 é conhecida como “Modelo de Markowitz” (LUENBERGER, 1998; COSTA JÚNIOR e GÜTTLER, 2003). No eixo da abscissa temos o risco ( $\sigma_i$ ). No eixo da ordenada temos o retorno -  $E(R_i)$ . Mediante o gráfico, percebemos o crescimento da taxa de retorno à medida que se aumenta o risco. No ponto C, encontramos a posição chamada de



**Figura 2: Relação média-variância**

**FONTE:** Adaptado de Adaptado de ELTON *et al*; 2002, p. 77.

“variância mínima”, dado que representa o ponto de maior retorno em relação ao menor risco possível na combinação dos ativos.

A curva ligando os ativos A e B é chamada de “Fronteira Eficiente”. Recebe essa nomenclatura por representar as posições de máximo retorno possível em relação ao nível de risco. Na Figura 2, também se percebe o efeito da diversificação. Como se observa, os valores de  $r$  (-1, -0,7, -0,5, 0 e 1) representam o grau de correlação entre os ativos A e B à medida que aumenta a correlação cresce o nível de risco da carteira. Na existência de associação perfeita ( $r = 1$ ) não é possível estabelecer um ponto de risco mínimo, o contrário ocorre nos demais graus de correlação, sendo que  $r = -1$  permite a melhor combinação possível.

A resolução do problema torna-se possível através de programação quadrática, buscando-se otimizar o modelo representado na equação 3. (CASSAROTO FILHO e KOPITTKE, 1998; LUENBERGER, 1998; COSTA e ASSUNÇÃO, 2005).

$$\text{Min} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j} w_i w_j, \quad (3)$$

Sujeito as restrições apresentadas nas expressões (4) e (5):

$$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = E(r_c), \quad (4)$$

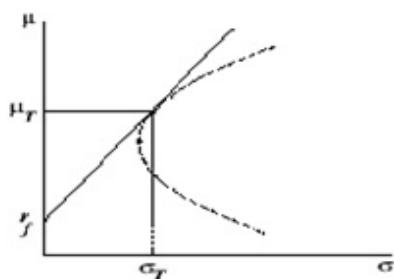
$$\sum_{i=1}^n = 1 \quad (5)$$

O modelo acima resulta na minimização do risco, dado um nível de retorno desejado, sendo que os percentuais alocados devem obter somatório igual a 1.

### 2.2.2 Carteiras formadas com ativos de risco e um ativo livre de risco

Buscando ampliar o modelo de Markowitz, Sharpe (1964) apresenta um problema de portfólio envolvendo, além dos ativos de risco, os ativos livres de risco ( $r_f$ ). Luenberger (1998) cita que ativos livres de risco são tipos de investimentos com retornos determinísticos, isto é, não há incertezas quanto ao prêmio a ser recebido no futuro. Desta forma, sua variância (risco) possui valor igual a zero.

Através da introdução destes novos casos, o modelo de Média-Variância sofre algumas alterações no diagrama da relação de risco e retorno (Figura 3).



**Figura 3:** Relação Média-Variância com ativo livre de risco  
FONTE: COSTA; 2005, p. 35.

A nova “Fronteira Eficiente” é caracterizada por uma reta partindo do ponto  $r_f$ , tangenciando a curva de otimização dos ativos de risco. Nota-se que o novo ponto de “variância mínima” é formado pela alocação total nos ativos livres de risco (ponto  $r_f$ ). Entretanto, devem ser ressaltados dois cenários no modelo, o primeiro não permitindo-se obtenção de empréstimo para mais investimentos, o segundo admitindo-se a obtenção de empréstimo (alavancagem). No primeiro caso, a fronteira eficiente alonga-se do ponto  $r_f$  até o ponto  $(\sigma_T, \mu_T)$  que tangencia a curva dos ativos de risco.

Desse modo, uma alocação visando o risco mínimo seria  $r_f = 100\%$  e uma alocação visando um retorno máximo seria 100% no ponto  $(\sigma_T, \mu_T)$ . No segundo caso, o uso do valor emprestado para alavancar os rendimentos futuros, a fronteira eficiente estende-se

além do ponto tangente, ou seja, significa combinações mais arriscadas, porém com retornos maiores (LUENBERGER, 1998; COSTA e ASSUNÇÃO, 2005; SECURATO, 2007). O modelo é apresentado através das expressões 6, 7, 8.

$$\text{Min} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{i,j} w_i w_j, \quad (6)$$

$$w_i E(r_i) + (1 - w_i) r_f = E(r_c), \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0 \quad (8)$$

### 2.3 Downside Risk

A ideia da análise focada no lado das perdas (*downside risk*), quando se trata de investimentos em ações, remonta ao ano de 1952, quando Roy escreveu sobre o critério *safety first* (NAWROCKI, 1999). Segundo Mitra e Roman (2009), foi a primeira vez que o termo risco abaixo do retorno-alvo foi citado.

Em termos conceituais, Roy (1952), ao criticar a função utilidade e o comportamento do investidor, tratou da preferência por investimentos que possuam as menores chances de evidenciar retornos abaixo de algum nível esperado. Em forma de função, isso pode ser visto do seguinte modo (equação 9):

$$\text{Min } P(R_i < \tau), \quad (9)$$

em que:

$P$ : probabilidade.

$R_i$ : retorno do ativo  $i$ .

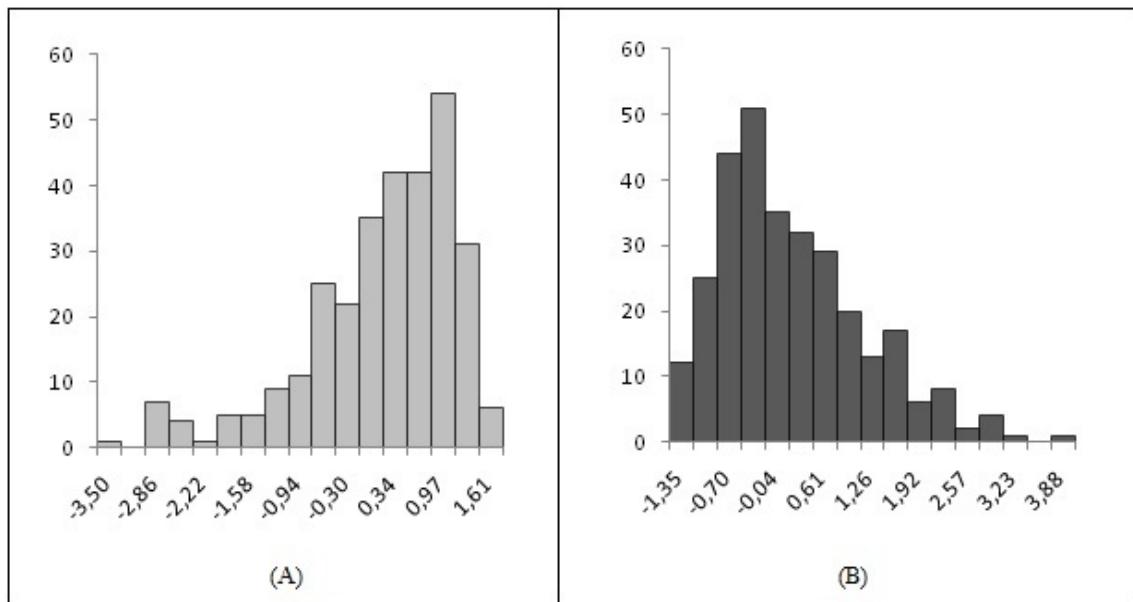
$\tau$ : retorno alvo.

Segundo Nawrocki (1999), Markowitz reconheceu a ideia em 1959, quando propôs a semi-variância (expressão 10) como uma medida de risco mais adequada, tanto por representar algo mais aproximado do comportamento do investidor quanto por melhor se adequar no momento em que os retornos dos ativos não são normais. Contudo, no período das publicações de Markowitz e Roy, as otimizações necessitavam de um tempo computacional

inviável, de modo que o modelo por média-variância foi aceito mais rapidamente.

$$SV(X) = E \{ \min [X - E(X), 0]^2 \} \quad (10)$$

Na Figura 4, são comparadas duas distribuições assimétricas de probabilidades dos ativos A e B. No exemplo (criado a partir de simulações), baseado em Markowitz (1959) e Kato (2004), pode-se observar as decisões quanto à seleção dos ativos ao utilizar medidas de risco diferentes.



**Figura 4: Distribuições assimétricas**

FONTE: Baseado em MARKOWITZ; 1959.

Apesar de os formatos das distribuições de probabilidades dos ativos A e B serem diferentes, apresentam mesmas médias e variâncias ( $\mu = 0$ ;  $\sigma^2 = 1$ ). Entretanto, ao se calcularem as semivariâncias, são encontrados os valores 0,69 e 0,37 para A e B, respectivamente. Diante disso, percebe-se que o ativo B possui menor variabilidade em relação às perdas (ativo B é considerado a melhor escolha), avaliação não possibilitada quando é observada somente a variância (seleção indiferente para os ativos). Ou seja, a variância penaliza os desvios em relação à média tanto para as perdas quanto para os ganhos. Contudo, a medida de *downside risk* avalia o risco especificamente do lado das perdas.

Nos últimos anos, as discussões sobre o assunto *downside risk* cresceram substancialmente, principalmente com os avanços computacionais da atualidade. Diversos modelos, como Semivariância e LPM - *Lower Partial Moment*, desenvolvidos a partir dessas ideias

originárias dos anos 50, sendo que nos últimos anos os pesquisadores estão tratando o tema como PMPT - *Post Modern Portfolio Theory* (ROM e FERGUSON, 1994; SORTINO e SATCHELL, 2001; ROMAN e MITRA, 2009).

### 2.3.1 A semivariância e a família LPM

Pesquisadores como Sing e Ong (2000) e Nawrocki (2007) tratam a semivariância sob a ótica da família LPM. No caso contínuo, Bawa e Lindenberg (1977) sugerem a medida LPM apresentada na expressão 11:

$$LPM_{n,t}(X) = \int_{\alpha}^{\tau} (\tau - x)^n dP(x), \alpha = \inf \{x\}, n = 0, 1, 2 \dots \quad (11)$$

Fishburn (1977) traça uma versão mais simplificada (equação 12): o modelo alfa- $\tau$ .

$$\text{Modelo } \alpha - \tau = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - x)^{\alpha} dP(x), \alpha > 0. \quad (12)$$

Segundo Kato (2004), artigos mais recentes utilizam ambos os modelos com a mesma definição, quando o parâmetro  $n$  da fórmula de Bawa e Lindenberg é um número real positivo. Sortino (2001) cita uma simples mudança na definição do parâmetro  $\tau$ . Enquanto Fishburn (1977) o apresenta como taxa de retorno-alvo, Sortino (2001) defende como MAR - *minimal acceptable return*, dado que a expressão “taxa de retorno alvo” pode induzir investidores a especificarem taxas de retorno muito altas. No caso discreto, o modelo pode ser representado pela expressão 13:

$$LPM_{k,\tau}(X) = E \left\{ [\min(X - \tau, 0)]^k \right\}^{\frac{1}{k}}, \quad (13)$$

em que:

$X = R_i$ : retorno do ativo  $i$ ;

$\tau$ : retorno mínimo aceitável;

$k$ : ordem do modelo (grau de aversão ao risco).

Dessa forma, a família LPM pode ser estimada a partir de um retorno-alvo  $\tau$  que pode ser representado pela média do ativo, uma taxa livre de risco, um *benchmarking* (como o Ibovespa) ou mesmo o zero.

Andrade (2006) e Alexander (2008) citam algumas ordens específicas:  $LPM_{0,\tau}$  (*safety*

*first)*,  $LPM_{1,\tau}$  (*regret*),  $LPM_{2,\tau}$  (*second order*),  $LPM_{3,\tau}$  (*semi-skewness*),  $LPM_{4,\tau}$  (*semi-kurtosis*). Quanto maior a ordem, menor o nível de aversão ao risco do investidor. A semivariância (equação 10) também é visualizada como um caso específico, sendo  $k = 2$  e  $\tau =$  valor esperado, como pode ser demonstrado na equação 14:

$$LPM_{2,E(x)}(X) = E \left\{ [min(X - E(X), 0)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Alexander (2008) apresenta numa tabela diversos valores de LPM em relação a ordem e retorno-alvo. Os resultados podem ser vistos na Tabela 2. Percebe-se que o valor de LPM tende a aumentar a partir da ordem 2.

**Tabela 2: Diferenças de valores LPM em relação a ordem**

$LPM_k$	$\tau = 0\%$	$\tau = 2\%$
1	2,06%	3,11%
2	1,84%	2,05%
3	2,09%	2,23%
4	2,28%	2,41%
5	2,41%	2,54%
10	2,69%	2,84%
20	2,84%	3,00%

FONTE: ALEXANDER; 2008.

### 2.3.2 A cosemivariância

Como foi apresentado anteriormente, no modelo de Markowitz (1952) é possível combinar ativos para formar carteiras com mínimo risco. No caso do LPM, isto também é possível. Entretanto, a forma de resolução não é tão simples como no caso da média-variância (MV). O principal problema é definir o grau de associação entre os ativos. No modelo MV, é utilizada a covariância, mas o que seria o nível de associação quando é utilizada a semivariância?

Hogan e Warren (1974), com o objetivo de encontrar um modelo de equilíbrio de mercado a partir da semivariância, algo como o CAPM - *Capital Asset Princing Model* (SHARPE, 1964) expressão 16, derivam a estrutura apresentada na equação 15 (detalhes no Apêndice A):

$$E(r \cdot x) = T + \frac{CSV[(r \cdot w), (r \cdot x)]}{SV(r \cdot w)} [E(r \cdot w - T)] \quad (15)$$

$$E(r \cdot x) = T + \frac{Cov[(r \cdot w), (r \cdot x)]}{\sigma^2(r \cdot w)} [E(r \cdot w - T)] \quad (16)$$

Ao observar a expressão 15 e comparar com o modelo de Sharpe (1964) - expressão 16, percebe-se T como a taxa de retorno livre de risco, a variância como  $\sigma^2(r \cdot w)$  e a semivariância como  $SV(r \cdot w)$ , a covariância como  $Cov[(r \cdot w), (r \cdot x)]$  e a expressão  $CSV[(r \cdot w), (r \cdot x)]$  como o grau de associação *downside risk*, sendo denominada cosemivariância. Estrada (2010) apresenta a cosemivariância de Hogan e Warren através da expressão 17:

$$CSV_{i,j} = 1/n \sum_{i=1}^{R_f} [(R_i - R_f) \operatorname{Min}(R_j - R_f, 0)]. \quad (17)$$

Athayde (2001) também abordou o problema da cosemivariancia, apresentando mais algumas formulações (equações 18, 19 e 20) para definir o que seria o grau de associação entre os ativos no contexto do *downside risk*:

$$CSV_{i,j} = 1/n \sum_{i=1}^n [\operatorname{Min}(r_a^i - \mu_a, 0) (r_b^i - \mu_b)]. \quad (18)$$

$$CSV_{i,j} = 1/n \sum_{i=1}^n [(r_a^i - \mu_a) \operatorname{Min}(r_b^i - \mu_b, 0)]. \quad (19)$$

$$CSV_{i,j} = 1/n \sum_{i=1}^n \operatorname{Min}[(r_a^i - \mu_a, 0) (r_b^i - \mu_b, 0)]. \quad (20)$$

A partir da observação dos modelos acima, percebe-se que  $CSV_{ij} \neq CSV_{ji}$ , ou seja, a matriz de semivariâncias e cosemivariâncias (CSV) se torna assimétrica, o que dificulta a implementação do modelo convencional de otimização proposto por Markowitz. Outro problema é apresentado por Estrada (2008). No caso em questão, a semivariância é estimada diretamente para o portfólio, como é visto na expressão 21.

$$SV = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{\tau} [\operatorname{Min}(RP_i - \tau, 0)]^2 \quad (21)$$

Neste caso, o cálculo se torna problemático, porque, a cada diferente composição de carteiras, novos semi-desvios ocorrem. Isso se torna complicado quando é necessário conhecer de antemão a matriz CSV. Diante das proposições acima, Athayde (2001) e Estrada (2008) descrevem o problema da cosemivariância, ou seja, a matriz CSV é assimétrica e endógena.

A assimetria dificulta uma pré e pós multiplicação dos pesos pelos riscos dos ativos. Quanto à matriz CSV ser endógena, cada composição gera uma nova matriz. Sendo assim, o valor mínimo encontrado não é a mínima semivariância. Diante do problema apresentado, diversos pesquisadores propõem variadas formas de resolução, desde cálculos

exatos até simplificações. Na tabela 3, são listados alguns desses trabalhos:

**Tabela 3: Proposições de cálculos**

Autores	Propostas
Hogan e Warren (1972)	Algoritmo de Frank-Wolf
Ang (1975)	Programação linear
Elton, Gruber e Padberg (1976)	Heuristica correlação constante
Nawrocki (1983)	Uso de matriz diagonal com semivariâncias
Markowitz (1993)	Transforma o problema da semivariância num problema quadrático
Athayde (2001)	Abordagem não paramétrica
Ballesteros (2005)	Aplica métodos de programação quadrática paramétrica

**FONTE:** NAWROCKI, 2010; ESTRADA, 2008.

Mediante os diversos casos apresentados na tabela 3, percebe-se os variados modelos existentes. Assim, a proposição de mais um modelo poderia ser pouco significativa. Contudo, o modelo de Estrada (2008) se torna importante pelo conjunto de trabalhos que utilizaram a heurística (nomeada *Downside Risk*) para calcular o chamado *Downside Beta*. O próprio Estrada faz uma sequência de artigos nos anos de 2002, 2006 e 2007, utilizando a simplificação. Somente em 2008, ele discute especificamente sobre o modelo.

No Brasil, encontram-se os trabalhos de Lucena e Motta (2004), Lucena e Figueiredo (2008) e Fortunato *et al* (2010), que também utilizaram a heurística. Porém, eles não comentam as especificidades do modelo. A formulação é visualizada na expressão 22.

$$CSV_{ij} = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{\tau} [Min(R_i - \tau) \cdot Min(R_j - \tau)] \quad (22)$$

Como se percebe, os problemas da assimetria e da matriz endógena foram resolvidos a partir disso. Portanto, torna-se possível a otimização conforme os direcionamentos de Markowitz.

## 2.4 Valor em Risco (VaR) e Valor em Risco Condisional (CVaR)

De acordo com as descrições da subseção 2.1, as medidas de risco VaR e CVaR são classificadas como medidas de risco baseadas em quantis. Segundo Uryasev (2000), as funções de quantis (percentis) são normalmente utilizadas para análise de modelos que possuem variabilidades ou incertezas. Em diversas áreas existem aplicações para este tipo de função como, por exemplo, probabilidade de sucesso numa aplicação financeira, viagem aérea ou mesmo explosão de usina nuclear.

Segundo Alexander (2008), o quantil correspondente para alguma probabilidade  $\alpha$ , e dada

uma função de distribuição de probabilidade, pode ser representado por  $x_\alpha = Z_\alpha$ . Para valores pequenos, um quantil se torna uma métrica de *downside risk*. Geralmente são adotados valores-padrão, como 1%, 5% e 10%. Um exemplo disso é quando uma variável aleatória  $X$  possui distribuição normal padrão -  $X \sim N(0, 1)$ . Quando  $\alpha = 10\%$ , ocorre  $x_{10\%} = Z_{10\%} = -1,2816$ .

Na área de finanças, o percentil das perdas é chamado de Valor em Risco (*Value at Risk* - VaR). A principal questão do cálculo é conhecer a qual a máxima perda, dado um específico nível de confiança. Existem diversas abordagens para cálculo do VaR, como aproximações lineares assumindo distribuição normal ou *Student t* dos parâmetros de risco, levantamento de séries históricas e simulações pelo método Monte-Carlo. O *Risk Metrics* (1996) é uma das descrições mais conhecidas de estimativa (URYASEV, 2000).

Um exemplo na área de finanças, adaptado de Alexander (2008), pode ser encontrado ao se responder a seguinte pergunta: “Qual o valor em risco ao nível de confiança de 90% com horizonte de um ano para uma carteira de ações constituída de 1 milhão de reais, dado um retorno médio anual de 5%, desvio padrão 12% e assumindo distribuição normal?” Neste caso, deseja-se encontrar o VaR para uma  $\alpha = 90\%$  na função  $x_\alpha = Z_\alpha$ . Deste modo, tem-se que:

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = Z_\alpha, \quad (23)$$

$$x_\alpha = \mu + \sigma Z_\alpha. \quad (24)$$

Considerando que  $VaR = x_\alpha$ , tem-se que

$$VaR = Z_\alpha \sigma + \mu \quad (25)$$

Ao utilizar os dados do problema, pode-se apresentar os resultados por:

$$VaR = Z_{90\%} 0,12 - 0,05; Z_{90\%} = 1,2816 \dots VaR = 1,2816 \cdot 0,12 - 0,05 = 0,1038$$

Diante do resultado, o valor em risco a 10% de uma carteira com valor de 1 milhão de reais seria R\$103.786,19, ou seja, há evidências, com 90% de confiança, de que a perda num horizonte de um ano não será maior que R\$103.786,19.

Segundo Alexander (2008), o VaR não apresenta informações quanto à extensão das perdas em momentos que podem ser excedidos. Desta forma, o Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk* - CVaR) torna possível conhecer esta informação através da média das perdas desde o pior resultado até o percentil (VaR) selecionado (geralmente 1%, 5% ou 10%). Um modelo formal pode ser o seguinte:  $CVaR_{h,\alpha} = -E(X_h | X_h \leq -VaR_{h,\alpha})$ . Um exemplo disso pode ser descrito a partir da visualização da Tabela 4.

**Tabela 4: Extensão das piores perdas**

Date	Portfolio Rtn
31/ago/98	-6,13%
17/set/01	-6,03%
14/abr/00	-5,69%
20/set/01	-5,23%
12/out/00	-4,24%
12/mar/01	-3,89%
14/jan/99	-3,86%
14/mar/01	-3,80%
07/mar/00	-3,73%
<b>15/out/99</b>	<b>-3,55%</b>

**FONTE:** ALEXANDER; 2008, pág. 37.

A Tabela 4 apresenta os valores da cauda esquerda da distribuição dos retornos do Portfolio RTN, desde o menor retorno até o VaR a 1% (3,549%). O CVaR é representado como a média dos valores contidos na Tabela 4. Ao se fazer o cálculo, o resultado é 4,616%. A partir do exemplo, é possível demonstrar o CVaR para o caso de distribuição contínua (equação 25).

$$CVaR_\alpha(X) = -\alpha^{-1} \int_{-\infty}^{x_\alpha} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (26)$$

Assim como o VaR possui diversas abordagens para seu cálculo, para o CVaR também podem ser utilizadas metodologias como as simulações por Monte-Carlo ou séries históricas. Também é possível realizar aproximações de distribuições de probabilidade na função  $f(x)$ , como pode ser visto nas expressões 27 e 28 (ALEXANDER, 2008). Quando  $f(x)$  assume ser distribuição normal:

$$CVaR_{h,\alpha}(X) = -\alpha^{-1} \cdot \varphi[\Phi^{-1}(\alpha)] \cdot \sigma_h - \mu_h, \quad (27)$$

em que:

$\Phi^{-1}(\alpha)$ : percentil da distribuição normal padronizada.

$\varphi[\Phi^{-1}(\alpha)]$ : função de densidade gaussiana.

Quando  $f(x)$  assume ser distribuição de  $t$  de *Student*:

$$CVaR_{h,\alpha,\nu}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR(\alpha)}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\nu\pi\sigma_t} \left[1 + \frac{(t-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right]^{\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}} dt, \quad (28)$$

em que:

$\nu$ : graus de liberdade.

#### 2.4.1 Otimização do Valor em Risco Condisional

O modelo mais famoso para a otimização do CVaR para carteiras de investimentos foi proposto por Rockafellar e Uryasev (2000). Alguns trabalhos no Brasil também utilizaram a metodologia, como os de Montini (2003) e Ribeiro (2007). O método possui bastante praticidade, por minimizar o CVaR e calcular o VaR ao mesmo instante. Os próximos parágrafos são dedicados à apresentação do modelo.

No tópico anterior, o parâmetro  $\alpha$  foi utilizado para o cálculo do VaR e CVaR, geralmente assumindo valores 1%, 5% e 10%. No modelo proposto por Rockafellar e Uryasev (2000), este parâmetro é trocado pelo valor  $\beta$ , nomeado nível de confiança. Neste caso, são atribuídos valores de 90%, 95% e 99%. A partir desta definição, o VaR pode ser representado pela equação 29:

$$VaR = \alpha_\beta(x) = \min [\alpha \in \mathbf{R} : \Psi(x, \alpha) \geq \beta]. \quad (29)$$

A representação do CVaR também sofre uma pequena modificação. A fórmula demonstrada como  $CVaR_\alpha(X) = -\alpha^{-1} \int_{x_\alpha}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$  é visualizada na expressão 30:

$$\phi_\beta(x) = (1-\beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} f(x, y) \cdot p(y) \cdot dy. \quad (30)$$

Através da definição das fórmulas do VaR e CVaR, Rockafellar e Uryasev (2000) propuseram a combinação dos modelos em termos de uma função  $F_\beta$ , como é demonstrada na equação 31.

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{y \in \mathbf{R}^m} [f(x, y) - \alpha]^+ \cdot p(y) \cdot dy. \quad (31)$$

O modelo 31 é aplicado no caso de distribuições contínuas de probabilidade. No caso discreto, a fórmula possui algumas modificações (equação 32):

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{n(1 - \beta)} \sum_{i=1}^n [f(x_i, y_i) - \alpha]^+, \quad (32)$$

em que:

$y$ : vetor dos retornos dos ativos.

$x$ : vetor da proporção dos ativos na carteira.

$n$ : tamanho da amostra.

A fim de simplificar a fórmula 32, define-se  $f(x, y) = -[x_1 y_1 + \dots + x_n y_n] = -x^T y$ . Assim, a medida é apresentada nas equações 33 ou 34:

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{n(1 - \beta)} \sum_{i=1}^n [-x^T y_k - \alpha]^+, \quad (33)$$

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{n(1 - \beta)} \sum_{i=1}^n u_i, \quad (34)$$

em que:

$u_i$ : vetor dos retornos dos ativos.

Diferentemente da análise por média-variância proposta por Markowitz (1952), em que a otimização ocorre por programação quadrática; a otimização de um problema de portfólio, definindo como medida de risco o CVaR, ocorre por meio de programação linear.

## 2.5 Comparação entre as medidas de risco na otimização de carteiras de ativos

Nos últimos tópicos foram apresentados os conceitos dos modelos de otimização utilizados no presente trabalho. Nesta seção, focalizam-se artigos que pesquisaram a mesma temática. Vale ressaltar que somente no trabalho de Konno *et al* (2002) foi encontrada a análise das três medidas. Contudo, as comparações com os resultados da média-variância (MV) foram omitidas, pelo fato de as diferenças não serem significativas. Entretanto,

em outros trabalhos (quando compararam MV v.s. LPM ou MV v.s. CVaR), os autores mencionam a existência de diferenças significativas.

Um dos trabalhos a serem citados sobre a comparação entre MV v.s. LPM (no trabalho chamado de *downside risk*) quanto à eficiência da carteira foi realizado por Rom e Ferguson (1994). Neste trabalho foi utilizada, possivelmente pela primeira vez, a expressão “teoria do portfólio pós-moderna”. Um dos grandes pontos deste trabalho são os resultados sobre a fronteira eficiente. Neste caso, a curva no gráfico “Retorno x Risco” demonstrou maior domínio quando utilizou-se o modelo de otimização contendo a medida LPM. Também se verificaram maiores alocações, no modelo LPM, nos ativos de renda variável, enquanto o MV realizou maiores posições em ativos de renda fixa. Isso foi explicado pelo maior grau de assimetria positiva dos ativos de renda variável, demonstrando-se a superioridade do LPM quando carteiras são formadas com ativos com a característica citada.

Também foram encontrados trabalhos que defendem os resultados apresentados por Rom e Ferguson (1994). Podem ser citados Grootveld e Hallerbach (1999) e Nawrocki e Cumova (2010) ao mencionarem o fato de os retornos das carteiras serem maiores quando os riscos (caracterizado pelo LPM) são minimizados. No Brasil, há o artigo de Andrade (2006). Contudo, a defesa ocorre quanto aos retornos *ex-post* das carteiras, isto é, o retorno das carteiras após o período de implementação, foram maiores pelo LPM em relação ao MV.

Apesar dos resultados a favor do LPM, em pesquisas de outros autores as análises demonstram o contrário. Uma das críticas mais fortes é encontrada em Estrada (2008). Segundo esse autor, a fronteira eficiente formada pelo LPM aparenta ser mais eficaz em relação ao MV. Todavia, isto ocorre simplesmente pelo fato de o “semidesvio” ser somente uma mensuração de risco focado em um único lado da distribuição, ou seja, é indiferente o uso de um modelo ou outro. Dessa forma, tudo deve ser resumido ao que determinado investidor perceber como a medida de risco mais adequada. Quanto à formação das carteiras e às fronteiras eficientes, os trabalhos de Brito Neto (2001), Andrade (2006) e Jarrow (2006) não encontraram diferenças significativas.

Quanto à comparação MV v.s. CVaR, podem ser apresentados os trabalhos de Rockafellar e Uryasev (2000) e Bertsimas (2004). No primeiro artigo foram gerados retornos por meio de simulação, e as comparações ocorreram pela composição da carteira através dos níveis de confiança selecionados (90%, 95% e 99%) e pelo cálculo do VaR e CVaR em ambos modelos de otimização. Pelos resultados de Rockafellar e Uryasev (2000), as carteiras e cálculos do VaR e CVaR tenderam à convergência em ambos os métodos.

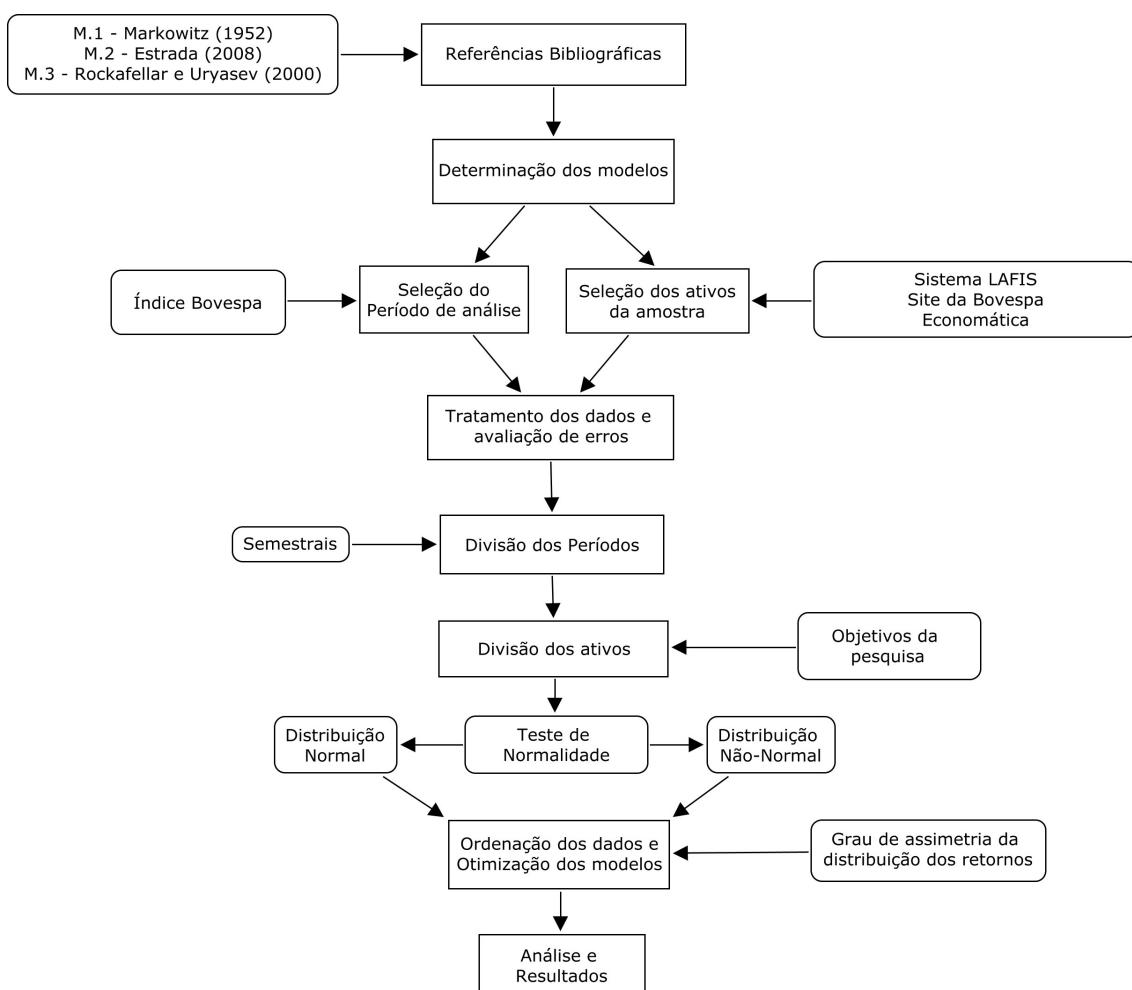
No trabalho de Bertsimas (2004), o autor buscou maior aprofundamento nas análises

ao variar, através de simulações, o grau de assimetria das distribuições dos retornos dos ativos a serem impostos na carteira. Quando foram utilizadas distribuições simétricas, o modelo com CVaR apresentou maior volatilidade em relação ao MV, principalmente quando níveis de significância ( $\alpha$ ) baixos foram determinados. As carteiras tenderam à semelhança quando o número da amostra aumentou. Ao simular distribuições assimétricas, o modelo com CVaR demonstrou dominância em relação ao MV, sendo que as diferenças foram consideradas significativas. Contudo, as distâncias variaram altamente quando valores de ( $\alpha$ ) foram modificados.

O último trabalho a ser descrito neste tópico é Konno *et al* (2002), como comentado no início, os autores compararam as três medidas. Entretanto, omitiram os resultados entre MV v.s. LPM/CVaR, alegando não existir diferenças significativas. Porém, as comparações entre LPM v.s. CVaR puderam ser apresentadas detalhadamente. As análises foram realizadas com dados entre 1995 a 1999 em ativos da bolsa de Tóquio. Assim como foi visto nas demais comparações, ambos os modelos se destacaram quando os retornos dos ativos foram assimétricos, além de demonstrar eficácia ao controlar o *downside risk*. Todavia, as diferenças entre ambos não foram significativas.

### 3 Metodologia

Este trabalho possui o objetivo de comparar as alocações de investimentos através do uso de diferentes modelos de otimização, além de avaliar o desempenho das carteiras de ativos formadas pelos próprios modelos. Busca dar resposta a uma questão sobre as características (composição e retornos) das carteiras de ações, quando utilizadas diferentes métricas de mensuração de riscos. Na Figura 5 é apresentado o resumo do processo de pesquisa.



**Figura 5:** Esquema metodológico

O processo de pesquisa pode ser dividido em duas grandes etapas: a primeira, desde a fase de determinação dos modelos a serem estudados até a fase de divisão dos períodos; a segunda, desde a divisão dos ativos (distribuição normal e não-normal) até a análise e descrição dos resultados. Portanto, buscou-se organizar uma forma de análise dos dados e uma forma de apresentá-los.

### 3.1 Etapa 1 - Modelos de otimização e divisão dos períodos

Após a revisão bibliográfica, foi possível identificar alguns dos modelos de estimativa de risco mais conhecidos. Por meio da Tabela 1, pode-se apresentar as propriedades matemáticas (dominância estocástica e coerência) que possibilitaram o foco de investigação teórica dos modelos. Por meio do marco teórico levantado, definiram-se as funções objetivo e restrições suficientes para otimização dos modelos M.1, M.2 e M.3, apresentados na Tabela 5.

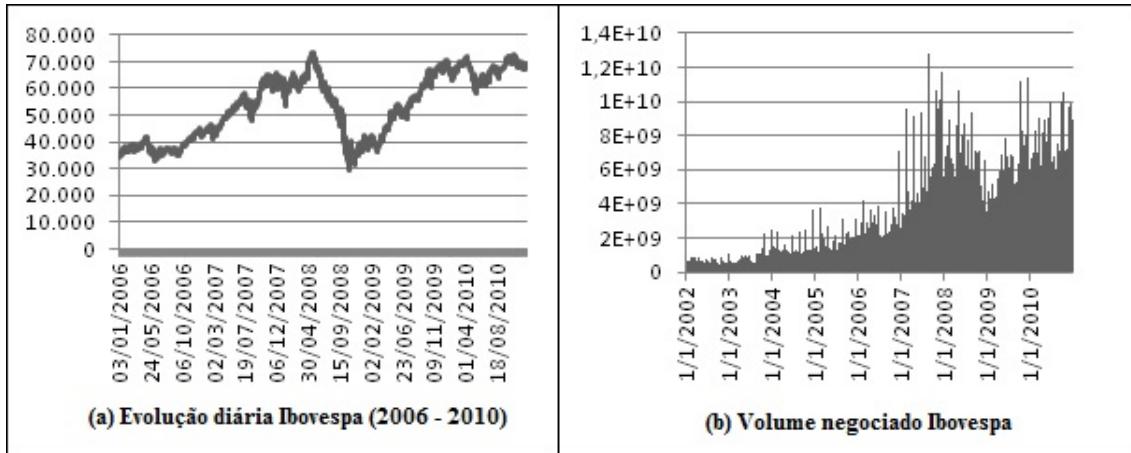
**Tabela 5: Modelos de otimização estudados**

M.1 - Markowitz (1952)	M.2 - Estrada (2008)	M.3 - Rockafellar e Uryasev (2000)
$\text{Min} : \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j$	$\text{Min} : \sum_{j,i=1}^n CSV_{ij} w_i w_j$	$\text{Min} : \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q [-w_i^T y_k - \alpha]^+$
<b>Sujeito a:</b>	<b>Sujeito a:</b>	<b>Sujeito a:</b>
$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = E(r_c)$	$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = E(r_c)$	$\sum_{i=1}^n w_i E(r_i) = E(r_c)$
$\sum_{i=1}^n w_i = 1$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1$
$0,001 \leq w_i \leq 1$	$0,001 \leq w_i \leq 1$	$0,001 \leq w_i \leq 1$

A partir do momento em que os modelos foram estruturados, foi necessário estabelecer o período de estudo. Entre os trabalhos anteriores realizados no Brasil, destaca-se um artigo de Andrade (2006). Neste estudo, o autor utilizou uma série entre 1995 a 2001. No trabalho de Brito Neto e Volkmer (2001), os autores utilizaram um período entre 2000 e 2001. Por último, Araújo *et al* (2010) analisaram um espaço de tempo entre 2009 e 2010. Contudo, as carteiras formadas possuíram somente cinco ativos, exclusivamente compostas por ações.

Dadas estas informações, o período escolhido abrangeu os anos de 2006 a 2010. Nesse espaço de tempo, ocorreram diversas variações no mercado financeiro brasileiro, representado pelo índice Bovespa, o Ibovespa, desde períodos de crescimento até momentos de quedas significativas, como é apresentado na Figura 6(a). O período entre os anos de 2002 a 2005 não foi analisado por dois motivos. Primeiramente, desejou-se analisar um período mais recente (a pesquisa supôs os últimos cinco anos, tendo 2010 como o ano mais recente). O segundo motivo foi o baixo volume negociado no período - Figura 6(b) - em relação ao espaço de tempo escolhido (2006-2010).

Como é visualizado na Figura 5, ao mesmo tempo em que se escolheu o período, também foram selecionados os ativos que formariam as carteiras a serem analisadas. Participaram das análises os preços de ações de empresas presentes no índice Bovespa do 4º trimestre 2010. Estas ações foram escolhidas por representarem as principais negociações no período em análise. As informações sobre a composição do Ibovespa foram levantadas através do site da Bovespa (<http://www.bmfbovespa.com.br>). Os preços das ações foram coletados no sistema ECONOMATICA e no sistema LAFIS.



**Figura 6: Comportamento índice Bovespa 2002 a 2010**  
FONTE: ECONOMÁTICA.

Após as fases de escolha do período e levantamento dos ativos, foi necessário realizar o tratamento dos dados. Conforme Hair *et al* (2005), o processo de examinar os dados é um passo que consome tempo. Contudo, é estritamente necessário, já que permite ao pesquisador entender a dimensionalidade das análises a serem realizadas posteriormente.

Nesta fase, primeiramente foram calculadas as taxas de retorno dos ativos por meio da expressão 35. A partir de então, foi realizado o exame dos dados, avaliando dados faltantes, erros na base e análise de ativos com baixa negociação no período (mesmos preços durante vários dias).

$$R_i = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad (35)$$

em que:

$P_t$ : Preço da ação no tempo  $t$ .

Como última fase da primeira etapa, existiu a divisão dos períodos. Isso ocorreu devido à necessidade de analisar o desempenho dos modelos (M.1, M.2 e M.3) em diversos momentos econômicos. Neste caso, foram analisados períodos que possuíssem no mínimo 100 dias. Dado que alguns dos testes estatísticos utilizados possuem propriedades assintóticas, um número menor poderia afetar seus desempenhos.

Outro ponto é o limite máximo do tamanho da janela de estimação dos parâmetros. Segundo Souza (1999), a seleção de períodos longos estimaria parâmetros que poderiam não representar o comportamento atual do ativo. Diante disto, a escolha de períodos

semestrais possibilitou atingir os objetivos traçados com a análise de 10 semestres (1º semestre de 2006, 2º semestre de 2006; 1º semestre de 2007, 2º semestre de 2007; 1º semestre de 2008, 2º semestre de 2008; 1º semestre de 2009, 2º semestre de 2009; 1º semestre de 2010, 2º semestre de 2010).

### **3.2 Etapa 2 - Divisão dos ativos e análises**

Como descrito anteriormente, o estudo possuiu duas etapas. Na primeira, o objetivo foi formar as bases do trabalho e organizar o banco de dados. Assim como descreve a Figura 5, na segunda etapa buscou-se delinear como obter informações a partir dos dados. Diante disso, as análises dos dados foram selecionadas.

Mediante a necessidade de escolher as ferramentas de análises, tornou-se importante lembrar as perguntas da pesquisa:

- a) Quais características são encontradas nas métricas de risco na otimização de carteiras de ações?
- b) Quais as principais métricas para mensuração de risco utilizadas na otimização de portfólios?
- c) Métricas de risco diferentes para otimização de carteiras de ações podem formar composições muito divergentes?
- d) As métricas de risco para de otimização de carteiras de ações podem apresentar retornos e riscos diferentes?
- e) As métricas de risco na otimização de carteiras apresentam resultados diferentes quanto distribuição de probabilidade dos retornos das ações são diferentes?

As perguntas “a” e “b” puderam ser respondidas durante o levantamento bibliográfico. A partir disto, as análises foram delineadas para apresentar possíveis soluções para as perguntas “c” e “d”. Ao se contemplar todas as perguntas respondidas, foi possível traçar algumas respostas para a pergunta geral.

Num primeiro momento, os dados foram divididos por períodos, devido à necessidade de responder a pergunta “d”. Contudo, através das leituras do trabalho de Bertsimas (2004), em que o autor comparou os modelos a partir de simulações de ativos que possuem distribuições de probabilidades simétricas (normais) e assimétricas, pode-se incluir nas análises a verificação de diferenças entre ativos com as mesmas características do trabalho de Bertsimas (2004).

Também foi levantado no artigo de Araújo e Montini (2011) a necessidade de pesquisas futuras a respeito do comportamento dos modelos quanto a forma da distribuição de probabilidade dos retornos. Diante disto, foi incluída a pergunta “e” nos objetivos da pesquisa, desta forma, a segunda etapa foi iniciada com a divisão do banco de dados em retornos dos preços das ações que possuíram distribuição normal e não normal.

Para dividir os retornos com distribuições normais e não normais, foram realizados testes de normalidade. No caso, o teste escolhido foi a estatística de Jarque-Bera (Jbtest). Segundo Brooks (2008), o JBtest é o teste de normalidade comumente utilizado nos trabalhos da área econômico-financeira. Um exemplo disso pode ser encontrado no trabalho de Pereira *et al* (2009). A estatística utiliza as propriedades do terceiro (assimetria - *skewness*) e do quarto (*curtose - kurtosis*) momentos da distribuição normal, como pode ser visto na expressão 36. As hipóteses associadas ao teste são:  $H_0$ : variável aleatória possui distribuição normal contra a hipótese alternativa  $H_1$ : variável aleatória não possui distribuição normal.

$$W = n \left[ \frac{b_1^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)^2}{24} \right] \quad (36)$$

Em que  $b_1$  e  $b_2$  são apresentados pelas expressões 37 e 38.

$$b_1 = \frac{E(x^3)}{(\sigma^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

$$b_2 = \frac{E(x^4)}{(\sigma^2)^2}. \quad (38)$$

Em que,  $n$  é o tamanho da amostra,  $b_1$  e  $b_2$  são os coeficientes de assimetria e curtose respectivamente, e  $W \sim \chi^2(2)$  assintoticamente, sob  $H_0$ . Foi considerado na pesquisa um nível descritivo de 10%.

Após a divisão dos ativos (retornos das ações) foi necessário realizar uma ordenação nos dados, este passo teve o objetivo de realizar o procedimento apresentado na Figura 5, em que duas distribuições assimétricas de probabilidades dos ativos A e B foram analisadas na ótica do *downside risk* através de simulações. Na presente pesquisa, as simulações foram trocadas por retorno de ações do mercado, ou seja, os modelos foram comparados utilizando características reais dos ativos (ações). Deste modo, pode-se comparar as carteiras sem a necessidade de permutar todos os ativos entre si.

A expressão 36 foi utilizada para estimar o grau de assimetria suficiente para auxiliar

no ordenamento dos dados. O processo de otimização dos modelos descritos na Tabela 5 foi simplificado através da ordenação, isto é, na primeira iteração foi construída uma carteira de mínimo risco analisando duas ações (a de maior assimetria positiva com a de maior assimetria negativa). Na segunda iteração, analisou-se três ações (as duas de maior assimetria positiva com a de maior assimetria negativa). Isto se repetiu em todos os semestres. A Tabela 6 descreve o processo.

**Tabela 6: Processo de otimização**

Iteração	nº de ações analisadas	Característica
1	2	1 maior assimetria positiva e 1 maior assimetria negativa
2	3	2 maiores assimetrias positivas e 1 maior assimetria negativa
3	4	2 maiores assimetrias positivas e 2 maiores assimetrias negativas
4	5	3 maiores assimetrias positivas e 2 maiores assimetrias negativas
5	6	3 maiores assimetrias positivas e 3 maiores assimetrias negativas
...	...	...

O processo de análises e descrição dos resultados foi o último passo apresentado na Figura 5. As escolhas dos testes seguiram as recomendações de Siegel (1975) e Field (2005). Os principais detalhes a serem observados na seleção dos testes são o poder (probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta deve ser rejeitada), a maneira como a amostra foi extraída, a natureza da população e o tipo de escala utilizada.

As composições das carteiras foram comparadas pelo índice RMSDI - *Root Mean Squared Dispersion Index* (ver GROOTVELD; HALLERBACH, 1999).

$$RMSDI = \sqrt{\frac{1}{n \cdot p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (w_{ij}^{M_x} - w_{ij}^{M_y})^2}, \quad (39)$$

em que

$n$ : tamanho da amostra.

$p$ : número de ativos na carteira.

$w_{ij}^{M_x}$ : proporção dos ativos na carteira utilizando modelo  $x$ .

O índice apresenta resultados entre 0 e 1, sendo 0 carteiras muito semelhantes e 1 nada semelhante. Na presente pesquisa o índice foi subtraído por 1, ou seja, a interpretação ocorre por 0 - carteiras nada semelhantes e 1 - completa semelhança.

O índice RMSDI foi utilizado para comparar os pesos das medidas com retornos com distribuição normal e não normal. O teste de Wilcoxon para amostras independentes foi

realizado para testar se as medianas do  $1 - RMSDI$  no grupo normalmente distribuído é igual ao grupo que não apresentou normalidade nos retornos. O teste de Wilcoxon é baseado nos postos (rank) dos valores obtidos, a ordenação ocorre utilizando os valores do menor para o maior.

A estatística do teste é a soma dos postos associados aos valores amostrados de uma população. Conforme Kvam e Vidakovic (2007), o teste é utilizado no caso de amostras pequenas, e não há necessidade de supor alguma forma de distribuição dos dados. No caso das amostras não serem independentes, a versão do teste de Wilcoxon para amostras pareadas foi utilizada.

Para verificar a independência entre os grupos formados por retornos com distribuição normal e não normal, foi utilizado o coeficiente de correlação de Spearman. Esta análise é uma extensão não-paramétrica da correlação de Pearson, sendo uma das estatísticas mais amplamente utilizadas (Borkowf, 2000; Borkowf, 2002). Andrés *et al* (1995) citam a correlação de Spearman como apropriada em testes de interdependência, quando a distribuição das variáveis estudadas não segue padrão de normalidade. Quando a hipótese de independência foi rejeitada, realizaram-se os testes para amostras pareadas.

Além de avaliar o grau de similaridade entre as composições das carteiras, também se buscou conhecer as características de riscos e retornos das carteiras formadas em cada um dos modelos. Sendo assim, os retornos e riscos, ao longo do tempo, de cada carteira de cada medida foram transpostos em um mesmo plano e comparados.

Dado que os pesos que minimizam o risco podem ser encontrados para cada um dos modelos através das análises das composições, as séries dos retornos das ações podem ser analisadas novamente ao estimar  $R_i w_i$  - que forma a série da carteira. Desta forma, pode-se obter o desvio-padrão, o LPM grau 2 com retorno mínimo aceitável igual a zero ( $LPM_{2,0}$ ) e o a 95% de confiança ( $CVaR_{95\%}$ ) de cada uma das carteiras otimizadas. Para comparar as medidas de risco, utilizou-se o teste F (equação 40) para verificar a igualdade de variâncias - vale ressaltar que esta análise foi realizada somente no banco de dados contendo as ações que apresentaram retornos com distribuição normal.

$$W = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad (40)$$

Mediante o que foi apresentado em termos de como os testes foram escolhidos no banco de dados contendo os retornos das ações que apresentaram distribuição de probabilidade normal, foi utilizado o teste t para amostras relacionadas. A estatística foi escolhida para

avaliar se os retornos das carteiras baseadas na medidas de risco descritas na Tabela 5 são diferentes. O teste ocorre sobre a hipótese nula de que a diferença das médias dos retornos seja igual a zero. A estatística do teste é representada nas equações 41, 42 e 43.

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \mu_D)}{S_D}. \quad (41)$$

Em que:

$$\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i; D_i = X_i - Y_i, \quad (42)$$

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2 \quad (43)$$

Para o caso dos retornos das ações que não apresentaram distribuição normal, foi realizado o teste dos postos sinalizados de Wilcoxon. Segundo Moretin e Bussab (2010), o teste ocorre sobre a hipótese de que a diferença entre os retornos de duas carteiras ( $X$  e  $Y$ ) possuem mediana zero, ou seja, a diferença entre os retornos é igual. Kvam e Vidakovic (2007) ainda ressaltam que o teste não avalia a igualdade de medianas, mas, se a mediana da diferença é zero, a estatística é apresentada na expressão 44:

$$z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \quad (44)$$

Em que  $n$  - tamanho da amostra e  $T = \sum_{i=1}^n I(X_i > Y_i)$  - número total de vezes quando  $X_i > Y_i$ . Segundo Siegel (1975), a fórmula 44 utiliza informações sobre o sentido da diferença dentro de cada par, além de considerar o valor da diferença. Principalmente porque atribui maior ponderação a um par que acusa grande diferença entre as condições, do que a um par em que essa diferença seja pequena. As análises foram viabilizadas através dos programas MATLAB (otimização das carteiras e análises) e Excel (edição dos gráficos).

## 4 Análises e Resultados

Nesta etapa, são discutidas as análises delineadas durante o processo metodológico: análises descritivas, procedimento para dividir os grupos em com distribuição normal e com distribuição não normal, análise das composições das carteiras. Além disso, serão discutidos sobre os resultados relacionados aos riscos e retornos dos portfólios.

### 4.1 Análise Descritiva

Como descrito na metodologia, por meio do teste de Jarque-Bera (nível descritivo de 10%) o banco de dados foi dividido em dois grupos: o primeiro sendo formado pelos retornos que apresentaram distribuição normal (grupo 1); o segundo, pelas ações que não aderiram à normalidade (grupo 2).

Nos apêndices B e C podem ser visualizados os resultados, sendo encontradas as análises relacionadas ao retorno individual da ação, ao grau de assimetria e ao valor  $p$  (nível descritivo da estatística de Jarque-Bera).

A divisão dos grupos em distribuição normal e não normal teve como critério a utilização do nível descritivo do teste de Jarque-Bera. Os testes que apresentaram nível descritivo abaixo de 10% consideraram as ações com distribuições de retornos não normais. Acima de 10%, considerou como distribuição normal.

Na Tabela 7 são apresentadas as quantidades de ações presentes em cada grupo, por semestre. O número de carteiras analisadas por semestre corresponde à quantidade de ações no grupo menos 1. Por exemplo, no primeiro semestre de 2006, observa-se que no grupo 1 são analisadas 26 ações e 25 carteiras, no grupo 2, 14 ações e 13 carteiras.

Ao analisar as tabelas dos apêndices B e C, pode-se brevemente citar algumas características das ações analisadas. Durante o ano de 2006, as ações apresentaram retornos positivos nos dois grupos de análise. Quanto aos índices de assimetria, como esperado, no grupo dos retornos normais os índices não ultrapassaram 0,5, ao contrário dos não normais, que apresentaram valores entre -3,40 e 2,48.

Durante o ano de 2007, as ações apresentaram comportamento similar a 2006, a maioria delas demonstrou taxa de retorno positiva. Os maiores graus de assimetria são encontrados no primeiro semestre. Nos anos seguintes, os retornos demonstraram a volatilidade percebida durante a crise: maior proporção de retornos negativos em 2008, taxas positivas em 2009 e queda em 2010 (no caso das ações com taxas de retorno com distribuição normal).

**Tabela 7: Quantidade de retornos de ações analisados por período**

Semestre	Ano	Quant. ações analisadas (Grupo 1)	Quant. ações analisadas (Grupo 2)
1º	2006	26	14
2º	2006	22	18
1º	2007	19	22
2º	2007	30	11
1º	2008	18	23
2º	2008	4	37
1º	2009	31	9
2º	2009	16	26
1º	2010	24	18
2º	2010	21	21

## 4.2 Composições das carteiras

Após observar o comportamento individual dos ativos, foram realizadas otimização dos modelos descritos na Tabela 5. No presente tópico, são descritos os resultados encontrados das análises sobre a composição (os  $w_i$ 's) das carteiras. Estas análises contemplam a necessidade de atingir o objetivo “c” e responder a pergunta “e” mutuamente. Um resumo dos resultados é apresentado nas Tabelas 8, 9 e 10.

Na Figura 8, é visualizado o comportamento geral do índice RMSDI (Equação 39, ressalta-se que o índice foi subtraído por 1:  $1 - RMSDI$ ) para a carteira com o número variando entre 2 até o máximo de ações que possuir o semestre, ou seja, na primeira otimização são analisados dois retornos das 2 ações que apresentaram maiores graus de assimetria positiva e negativa; depois são analisados três retornos até  $n$  (conforme descrição na Tabela 6).

Percebe-se que tanto as ações com retornos normalmente distribuídos quanto não normalmente distribuído demonstraram características semelhantes. Quando a quantidade de ativos utilizados nas otimizações foi aumentado, o grau de similaridade entre as composições formadas pelos modelos tendeu a crescer.

Esta ocorrência também pode ser vista ao observar os coeficientes de correlação nas Tabelas 8, 9 e 10, em que a maioria das relações foram positivas (apesar de algumas não significativas).

Contudo, vale ressaltar que o coeficiente somente informa o grau de associação, não mostra se os grupos 1 e 2 tenderam ao crescimento ou decréscimo mútuo, isto é, a Figura 8 ainda explica melhor o comportamento.

Na Figura 7, pode-se comparar os comportamentos dos RMSDI por semestre segundo

a forma da distribuição dos retornos das ações utilizadas nas otimizações. Observa-se que o Grupo 1 (distribuições normais) apresentou maior grau de similaridade entre composições nas comparações das carteiras formadas pelos modelos M.1 contra M.2 e M.1 contra M.3.

Nas Tabelas 8, 9 e 10 são apresentados os testes para verificar se as diferenças entre os grupos 1 e 2, conforme as comparações entre os modelos, são significativas. De acordo com as descrições na metodologia, dado que analisou-se o índice segundo o crescimento do número de ativos utilizados nas otimizações, também pode-se obter o grau de associação (índice de correlação de Spearman) entre os grupos.

Caso o coeficiente de correlação linear demonstrasse significância, o Teste 1 (teste de Wilcoxon para amostras pareadas) pode ser aplicado. Caso contrário, a validade está com o Teste 2, isto é, o teste de Wilcoxon para amostras independentes deve ser aplicado. Foram utilizados testes não paramétricos devido ao pequeno tamanho da amostra. Considerou-se que a correlação foi significativa a níveis descritivos abaixo de 10%. As diferenças foram consideradas significativas quando o teste apresentou nível descritivo abaixo de 10%.

Na Tabela 8, são apresentados os principais resultados para das composições dos modelos M.1 e M.2. Um ponto importante é comparar estes resultados com os trabalhos de Rom e Ferguson (1994), Grootveld e Hallerbach (1999) e Estrada (2008). Tais autores apresentaram os pesos encontrados em suas otimizações, mas somente Grootveld e Hallerbach (1999) aplicam o índice RMSDI. Deste modo, nos demais trabalhos, o índice foi estimado a partir dos pesos apresentados nos respectivos trabalhos.

Rom e Ferguson (1994) utilizaram cinco formas de alocação (*small caps stocks, large caps stocks, foreign stocks, bonds, cash*) para encontrar a carteira de mínimo risco. A partir dos pesos, pode-se estimar o valor de  $1 - RMSDI$  como 83,96%. Grootveld e Hallerbach (1999) dividiram a amostra de seu estudo em três períodos e otimizaram carteiras de 100 ativos. Os valores encontrados foram: a) 1980-1984 como 98,79%; b) 1985-1989 como 96,04%; c) 1990-1994 como 99,23%.

No trabalho de Estrada (2008), foram apresentados pesos com carteiras possuindo 3, 4 e 5 ativos (USA - índice de ações dos Estados Unidos; EAFFE - índice formado pelas ações Europa, Australia e Far East; EMI - índice formado pelas ações de países emergentes, BONDS, NAREIT - *National Association of Real Estate Investment Trusts*). Para a carteira com três ativos, estimou-se o índice com valor de 92,79%. Na carteira com quatro ativos, o índice apresentou valor de 94,46%; e na carteira com cinco ativos o valor de 91,80%.

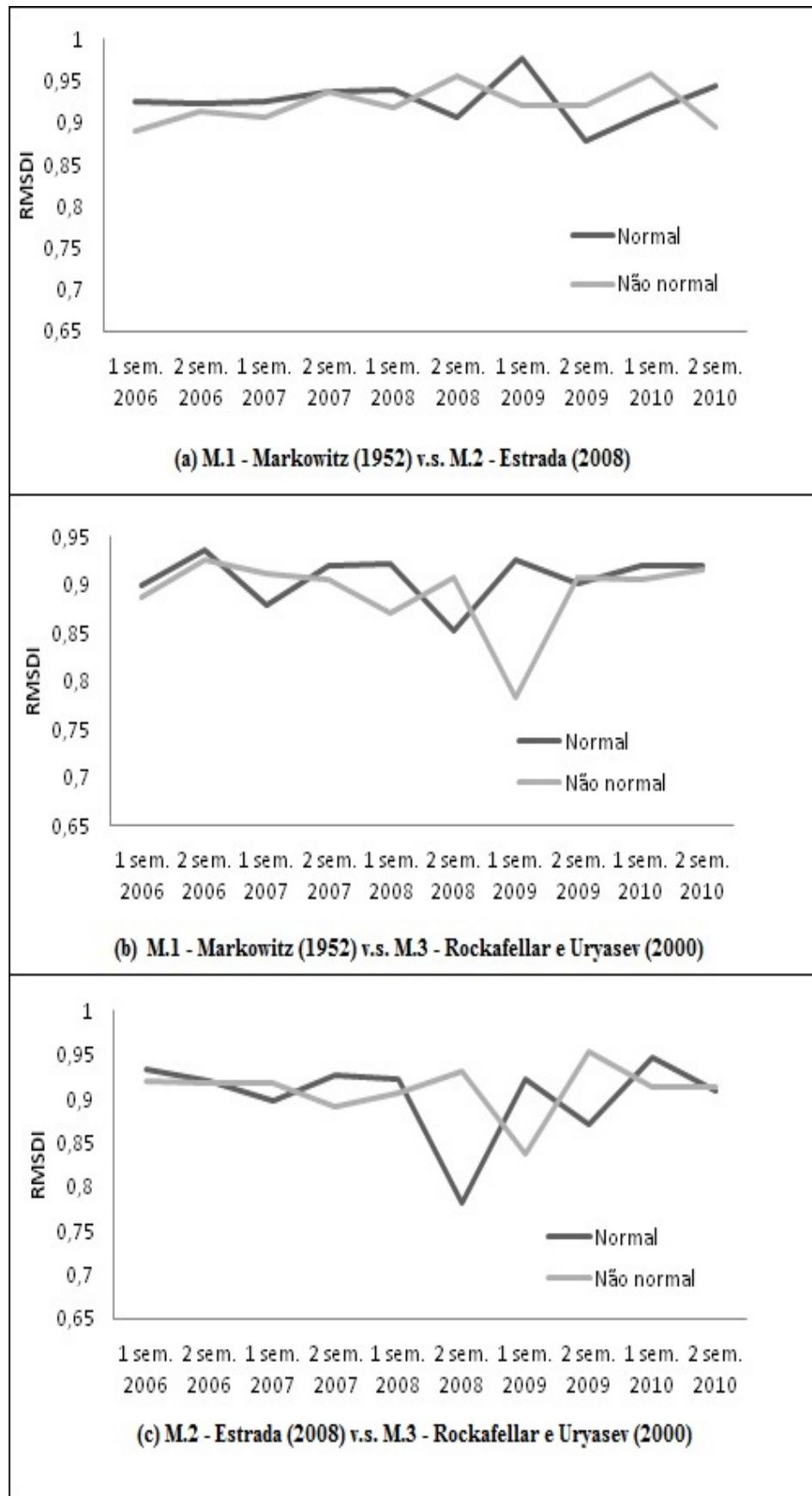
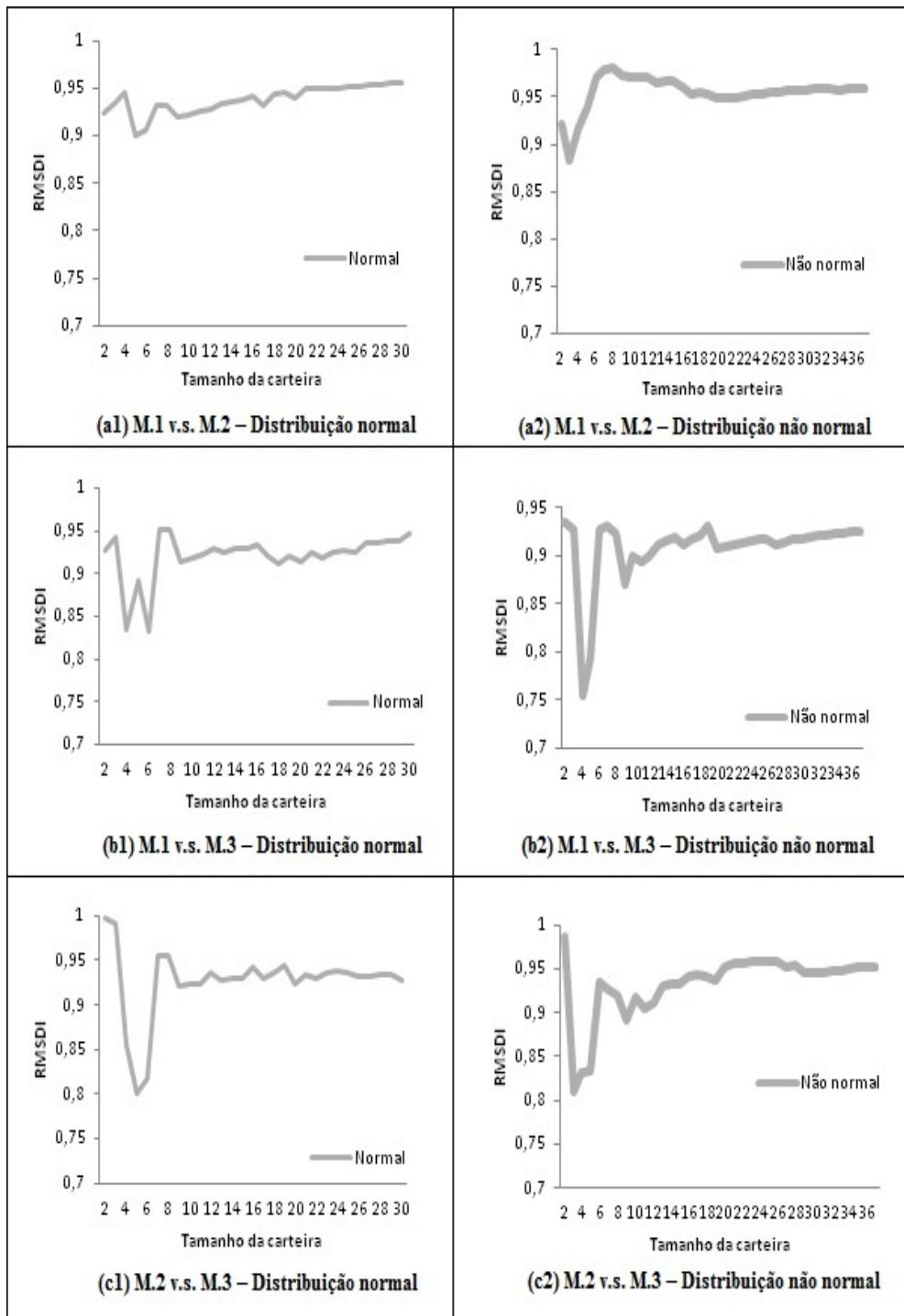


Figura 7: Comportamento do índice RMSDI



**Figura 8:** Comportamento do índice conforme aumento de ações analisadas

Ao se comparar os resultados da Tabela 8 com os destes autores, percebem-se valores parecidos, principalmente com os trabalhos de Grootveld e Hallerbach (1999) e Estrada (2008), em que os índices estiveram acima dos 90%. Deste modo, observa-se, ainda que de forma superficial, a convergência dos modelos, mesmo utilizando amostras de países diferentes. Os resultados encontrados demonstram alguns indícios sobre o comportamento

do grau de alocação dos modelos em amostras de países diferentes.

Um avanço nas análises das composições das carteiras foi comparar o índice em amostras contendo retornos de ações com distribuição normal e não normal. Ressalta-se que os autores citados não realizaram este tipo de análise.

Por meio da Tabela 8, pode-se destacar as diferenças significativas em cinco dos nove semestres (1º semestre de 2006 e os anos de 2009 e 2010). Isso demonstra evidências de que o índice de similaridade das composições das carteiras nos modelos M.1 e M.2 - formadas por ações com retornos com distribuições de probabilidades normal e não normal - tende a ser diferente.

Estes resultados demonstram que existem diferenças entre as carteiras formadas pelos modelos M1 e M2, sendo que em três das cinco diferenças significativas há uma tendência para o crescimento quando são utilizadas distribuições de probabilidades não normais.

No que diz respeito às comparações entre os modelos M.1 e M.3, pode-se destacar o trabalho de Rockafellar e Uryasev (2000). Estes autores apresentaram os pesos de carteiras com três ativos (*S&P*, *Bonds* e *Small caps*), variando o tamanho da série através de simulação monte-carlo.

Através desses dados, pode-se estimar o índice RMSDI. Desta forma, com uma série de tamanho de 1000 observações, o índice apresentou o valor de 93,92%, com tamanho de 3000 observações valor de 93,10%, com 5000 observações valor de 90,88% e 10.000 valor de 98,64%.

Ao se comparar estes números com os encontrados na Tabela 9, observa-se que os índices RMSDI tenderam a ser semelhantes, algo que também ocorreu na comparação entre M.1 e M.2. Também se percebe que o índice tende a apresentar valores acima dos 90%, o que informa que os modelos apresentam carteiras muito semelhantes. Algo não realizado por outros pesquisadores foi comparar o comportamento do índice entre os modelos de Markowitz (1952), M.1 e o de Rockafellar e Uryasev (2000), M.3, quando as amostras apresentam características de normalidade e não normalidade.

Desta forma, por meio da Tabela 9, buscou apresentar os testes de diferenças em relação ao RMSDI entre os modelos M.1 e M.3. Destacam-se as diferenças significativas nas amostras do 2º semestre de 2007, do 1º semestre de 2008, do ano de 2009 e do 1º semestre de 2010.

Observa-se que em seis dos nove semestres analisados são encontradas evidências de que o

**Tabela 8: Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.1 e M.2**

Ano	Semestre	Distribuição	Media	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	Normal	0,9265	0,9314	0,659 (0,01)	0,028	-
2006	1	Não normal	0,8909	0,9015			
2006	2	Normal	0,923	0,9177	0,549 (0,02)	0,981	-
2006	2	Não normal	0,9128	0,928			
2007	1	Normal	0,9257	0,9257	0,441 (0,06)	0,215	-
2007	1	Não normal	0,9073	0,9188			
2007	2	Normal	0,9377	0,9391	0,188 (0,60)	-	0,748
2007	2	Não normal	0,9382	0,9468			
2008	1	Normal	0,9403	0,9333	-0,858 (0,00)	0,407	-
2008	1	Não normal	0,9186	0,9442			
2008	2*	Normal	-	-	-	-	-
2008	2	Não normal	-	-			
2009	1	Normal	0,9777	0,9798	-0,143 (0,74)	-	0,000
2009	1	Não normal	0,9199	0,9253			
2009	2	Normal	0,8782	0,8822	0,764 (0,00)	0,004	-
2009	2	Não normal	0,921	0,9247			
2010	1	Normal	0,9134	0,9507	0,721 (0,00)	0,000	-
2010	1	Não normal	0,9594	0,9609			
2010	2	Normal	0,9436	0,9391	-0,075 (0,75)	-	0,000
2010	2	Não normal	0,8958	0,9169			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

índice de similaridade das composições das carteiras nos modelos M.1 e M.3 tendem a ser diferentes. Deste modo, demonstrou-se que na maioria dos casos existem diferenças entre as carteiras formadas pelos modelos M.1 e M.3, tendendo ao decréscimo da similaridade quando são utilizadas distribuições de probabilidades não normais.

Quanto às comparações entre os modelos M.2 e M.3, não foram encontrados trabalhos que informassem os dados das composições quando se compara minimização do L.P.M. e CVaR. Porém, no trabalho de Konno *et al* (2002), os autores comentam que os modelos tendem a ser similares, algo corroborado pela análise do RMSDI, com a maioria dos valores acima dos 90%. Assim como nas comparações anteriores, buscou-se avaliar as diferenças dos índices quanto ao comportamento probabilístico.

Através da Tabela 10, pode-se destacar diferenças significativas em seis dos nove semestres analisados (1º semestre de 2006, 1º e 2º semestres de 2007, ano de 2009 e 1º semestre de 2010). Através dessas análises, observam-se evidências de que o índice de similaridade das composições das carteiras nos modelos M.2 e M.3 são diferentes. Assim como nas avaliações dos modelo M.1 e M.2, percebe-se que os modelos M.2 e M.3 também demonstram diferenças que tendem a crescer quando são utilizadas distribuições de probabilidades não

**Tabela 9: Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.1 e M.3**

Ano	Semestre	Distribuição	Media	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	Normal	0,8984	0,9202	0,780 (0,00)	0,028	-
2006	1	Não normal	0,8878	0,9111			
2006	2	Normal	0,9356	0,9405	-0,301 (0,24)	-	0,355
2006	2	Não normal	0,926	0,9394			
2007	1	Normal	0,8789	0,8753	0,567 (0,01)	0,006	-
2007	1	Não normal	0,9118	0,9139			
2007	2	Normal	0,9211	0,9256	-0,273 (0,45)	-	0,007
2007	2	Não normal	0,905	0,8957			
2008	1	Normal	0,9212	0,919	0,598 (0,01)	0,000	-
2008	1	Não normal	0,8707	0,8883			
2008	2*	Normal	-	-	-	-	-
2008	2	Não normal	-	-			
2009	1	Normal	0,9259	0,9308	-0,381 (0,35)	-	0,000
2009	1	Não normal	0,7833	0,8185			
2009	2	Normal	0,8733	0,8809	0,375 (0,17)	-	0,023
2009	2	Não normal	0,9069	0,9204			
2010	1	Normal	0,9164	0,9408	0,054 (0,84)	-	0,159
2010	1	Não normal	0,9066	0,9283			
2010	2	Normal	0,9209	0,9332	0,617 (0,00)	0,391	-
2010	2	Não normal	0,9164	0,9471			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

normais, pelo menos quando as composições das carteiras são estudadas.

### 4.3 Análises de retornos e riscos

Em conformidade com a forma proposta por Markowitz (1952) para avaliar carteiras de ativos, no presente trabalho buscou-se analisar as características dos portfólios segundo seus riscos e retornos. Neste processo, foram verificadas as diferenças entre os modelos propostos na Tabela 5. Desse modo, dado que os modelos foram baseados em medidas de risco diferentes, foi necessário estimar o risco da carteira formada nas três bases delineadas no estudo: modelo de Markowitz (M.1), sendo o desvio-padrão o estimador; Estrada (M.2), sendo o estimador a semivariância ou LPM de grau 2, com retorno mínimo aceitável como zero ( $LPM_{2,0}$ ); e Uryasev (M.3), tendo como estimador o CVaR com 95% de confiança.

Na Figura 9, podem ser visualizados os resultados do 1º semestre de 2008 (os demais são apresentados no Apêndice F). Resultados semelhantes são encontrados nas análises dos demais semestres. Como explicado anteriormente, os modelos M.1, M.2 e M.3 foram otimizados com objetivo de minimizar o risco, desde o caso contendo duas ações no port-

**Tabela 10: Comparações dos índices RMSDI dos modelos M.2 e M.3**

Ano	Semestre	Distribuição	Média	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	Normal	0,9334	0,9342	-0,280 (0,35)	-	0,072
2006	1	Não normal	0,9209	0,9249			
2006	2	Normal	0,9199	0,9192	-0,346 (0,17)	-	0,649
2006	2	Não normal	0,9183	0,9122			
2007	1	Normal	0,8985	0,8965	-0,399 (0,10)	-	0,003
2007	1	Não normal	0,9193	0,9287			
2007	2	Normal	0,9266	0,932	-0,345 (0,33)	-	0,002
2007	2	Não normal	0,8914	0,8865			
2008	1	Normal	0,9219	0,9204	0,088 (0,74)	-	0,113
2008	1	Não normal	0,9076	0,9067			
2008	2*	Normal	-	-	-	-	-
2008	2	Não normal	-	-			
2009	1	Normal	0,9223	0,9304	0,024 (0,95)	-	0,000
2009	1	Não normal	0,8386	0,8556			
2009	2	Normal	0,8719	0,8671	-0,221 (0,43)	-	0,000
2009	2	Não normal	0,9541	0,9567			
2010	1	Normal	0,9483	0,9544	0,142 (0,59)	-	0,000
2010	1	Não normal	0,8873	0,9108			
2010	2	Normal	0,9103	0,9111	0,123 (0,61)	-	0,829
2010	2	Não normal	0,9142	0,9087			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

fólio até o máximo de ações presente no banco de dados, no caso do 1º semestre de 2008, 18 ações com distribuição normal e 22 com distribuição não normal.

Dado que os pesos que minimizam o risco (apêndices D e E ) foram encontrados para cada um dos modelos, as séries podem ser analisadas novamente ao estimar  $R_i w_i$ . Deste modo, pode-se obter o desvio-padrão, o  $LPM_{2,0}$  e o  $CVaR_{95\%}$  das carteiras otimizadas. Pela observação da Figura 9, bem como nos demais semestres, verifica-se que tanto nas análises com as ações com distribuição normal quanto nas ações com distribuição não normal o comportamento do risco estimado tendeu a ser parecido. Dado que os pesos que minimizam o risco (apêndices D e E ) foram encontrados para cada um dos modelos, as séries podem ser analisadas novamente ao estimar  $R_i w_i$ . Deste modo, pode-se obter o desvio-padrão, o  $LPM_{2,0}$  e o  $CVaR_{95\%}$  das carteiras otimizadas. Pela observação da Figura 9, bem como nos demais semestres, verifica-se que tanto nas análises com as ações com distribuição normal quanto nas ações com distribuição não normal o comportamento do risco estimado tendeu a ser parecido.

O teste para igualdade de variâncias (teste F) também apresentou evidências para não

rejeitar a hipótese de que as variâncias dos retornos das carteiras são iguais (Apêndice F, Figura 19). Ou seja, quando o objetivo foi minimizar a variância, o Modelo M.1 apresentou os menores desvios-padrões em relação aos outros dois modelos. Quando houve a necessidade de minimizar o L.P.M., o modelo de Estrada foi melhor comportado. No caso de encontrar a carteira de menor valor em risco condicional, o modelo de Uryasev apresentou os menores valores, sendo que este comportamento foi visualizado tanto no banco de dados das ações com distribuição normal quanto nas de retorno não normal.

Os resultados encontrados estão em parte de acordo com os comentários de Estrada (2008). Segundo o autor, seria indiferente o uso de algum modelo baseado em medidas de risco diferenciadas. Ou seja, o modelo de Markowitz (1952) deve minimizar o desvio-padrão. Portanto, nenhum outro modelo baseado em qualquer medida de risco deveria apresentar uma carteira com desvio-padrão inferior, e a mesma interpretação ocorre para os demais modelos. Ao se observar a Figura 9, percebe-se claramente quando o Modelo M.1 demonstra menor desvio-padrão, M.2 menor L.P.M. e M.3 menor CVaR.

Entretanto, quando Estrada (2008) comenta que “tudo deve ser resumido ao que determinado investidor perceber como a medida de risco mais adequada”, pode-se demonstrar algumas contraposições. Ao se realizar o Teste F, percebe-se que a hipótese de igualdade de variâncias é corroborada. Diante disto, observa-se que o grau de risco é similar mesmo às carteiras, sendo formadas por medidas de risco diferentes.

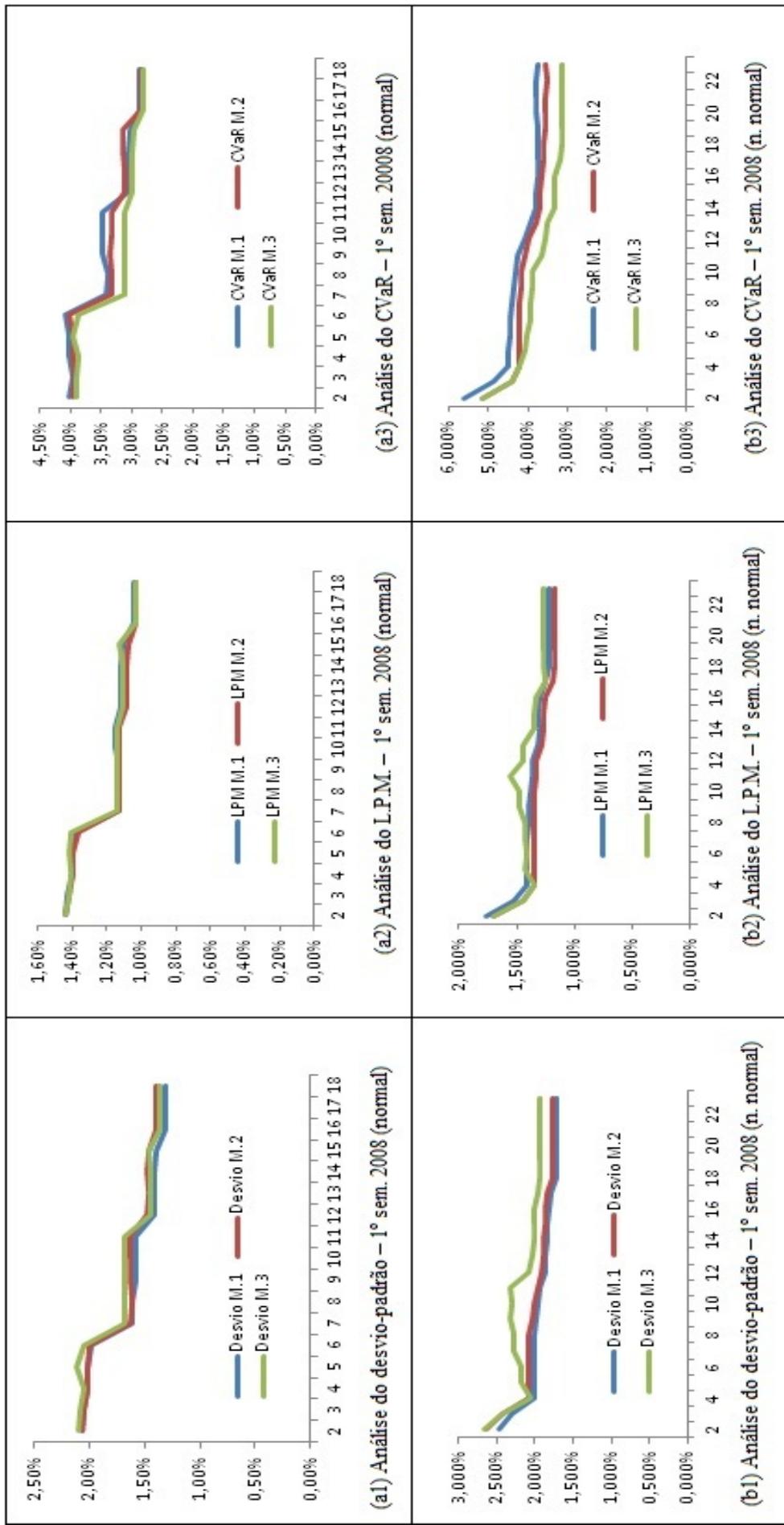


Figura 9: Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2008

Dado que a análise de carteiras é baseada na relação “retorno x risco”, torna-se necessário avaliar o quanto de retorno cada carteira apresentou. Desta forma, ainda não se pode afirmar que a seleção de um modelo de otimização de carteiras está resumida na percepção do investidor sobre a “medida mais adequada”. Uma vez que o grau de risco é similar nos modelos, um investidor precisaria testar se os retornos tendem a ser iguais. Caso isto ocorra, certamente o comentário de Estrada (2008) pode ser mantido e difundido.

Após verificar o comportamento das carteiras quanto ao grau de risco, buscou-se verificar suas características quanto aos retornos encontrados, isto é, quais dos modelos formaram as carteiras com retorno maior no período analisado. Os principais resultados são apresentados através das tabelas 11, 12 e 13. Os resultados detalhados podem ser acessados no Apêndice G. Antes de discutir os resultados das tabelas, é válido citar alguns dos resultados encontrados por outros pesquisadores.

Ao proceder à revisão bibliográfica a respeito de comparações entre os modelos por média-variância (M.1) e L.P.M. (M.2), verificou-se um grupo de pesquisadores que encontraram diferenças significativas entre os modelos (ROM & FERGUSON, 1994; GROOTVELD & HALLERBACH, 1999; ANDRADE, 2006; NAWROCKI & CUMOVA, 2010) e outro que não encontrou significância estatística (BRITO NETO, 2001; KONNO *et al*, 2002; JARROW, 2006).

O grupo que apresentou diferenças significativas defende o domínio do modelo L.P.M. em relação ao modelo de média-variância (M.V.), isto é, em suas análises, seus resultados demonstraram que o modelo L.P.M. apresenta retornos maiores em relação ao M.V. quando se deseja minimizar o risco. Entretanto, estes autores não testaram a igualdade de variâncias das carteiras formadas. Como apresentado no Apêndice F, verificou-se que as variâncias das carteiras tenderam à igualdade. Portanto, buscou-se testar as diferenças entre os retornos dos modelos.

Na Tabela 11 são visualizadas as análises dos retornos nos modelos M.1 e M.2. Vale ressaltar que estão contidos na tabela os resultados gerais. E também pode-se acessar os resultados dos retornos médios, os testes de independência (correlação de Spearman), além dos níveis descritivos por carteira, no Apêndice H. Diante destes resultados, o presente trabalho pode ser adicionado ao grupo de estudos que afirmam que o Modelo L.P.M. apresenta retornos superiores ao M.V.

Contudo, vale ressaltar que a formação das carteiras foi baseada na combinação de ações que apresentaram assimetria negativa e positiva (como explicado na metodologia), algo não realizado nos trabalhos citados. Este resultado também foi encontrado no estudo de

**Tabela 11: Comparação dos retornos dos modelos M.1 e M.2**

Ano	Sem.	Modelos	Normal			Não normal			Teste 2 (p) <sup>3</sup>
			n	Mediana	Teste 1 (p) <sup>1</sup>	n	Mediana	Teste 1 (p) <sup>2</sup>	
2006	1	M.1	25	-0,01%	0,000	13	0,08%	0,004	-
2006	1	M.2	25	0,03%		13	0,10%		
2006	2	M.1	21	0,22%	0,000	17	0,27%	0,001	-
2006	2	M.2	21	0,29%		17	0,31%		
2007	1	M.1	18	0,12%	0,845	21	0,10%	-	0,000
2007	1	M.2	18	0,10%		21	0,18%		
2007	2	M.1	25	-0,02%	0,000	10	-0,05%	0,005	-
2007	2	M.2	25	0,03%		10	0,01%		
2008	1	M.1	17	-0,04%	0,004	22	-0,04%	0,000	-
2008	1	M.2	17	0,02%		22	0,02%		
2008	2*	M.1	3	-	-	36	-0,21%	0,000	-
2008	2	M.2	3	-		36	-0,14%		
2009	1	M.1	25	0,07%	0,137	8	0,10%	0,012	-
2009	1	M.2	25	0,07%		8	0,12%		
2009	2	M.1	15	0,21%	0,001	25	0,25%	0,000	-
2009	2	M.2	15	0,36%		25	0,31%		
2010	1	M.1	23	-0,07%	0,000	17	-0,05%	0,000	-
2010	1	M.2	23	-0,03%		17	-0,03%		
2010	2	M.1	20	0,21%	0,001	20	0,18%	0,000	-
2010	2	M.2	20	0,21%		20	0,30%		

<sup>1</sup>Teste t para amostras relacionadas, <sup>2</sup>Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste de Wilcoxon para amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

Araújo e Montini (2011). Porém o trabalho destes autores contemplou carteiras formadas por cinco ativos.

Quanto as comparações entre M.V. e CVaR, há os trabalhos de Rockafellar e Uryasev (2000) e Bertsimas (2004). No primeiro, os autores apresentaram resultados em que os retornos praticamente não se diferenciavam. No trabalho de Bertsimas (2004), o autor complementa as análises ao verificar as diferenças entre os retornos nos casos em que as distribuições são simétricas e assimétricas. Com suas análises, o autor demonstrou que, no caso em que a distribuição foi assimétrica, os retornos não se diferenciaram. Contudo, ao verificar as assimétricas, o modelo baseado no CVaR apresentou retornos maiores.

No presente trabalho, foi realizado um procedimento semelhante ao de Bertsimas (2004) ao dividir a amostra em distribuição normal e não normal. Na Tabela 12, são demonstradas as comparações entre os modelos M.1 e M.3. Observa-se que em oito dos nove semestres analisados o Modelo M.3 apresentou medianas superiores ao Modelo M.1, sendo que em sete períodos as diferenças foram significativas. No caso das distribuições não normais, o

**Tabela 12: Comparação dos retornos dos modelos M.1 e M.3**

Ano	Sem.	Modelos	Normal		Não normal			
			n	Mediana	Teste 1 (p) <sup>1</sup>	n	Mediana	Teste 1 (p) <sup>3</sup>
2006	1	M.1	25	-0,01%	0,000	13	0,08%	0,003
2006	1	M.3	25	0,06%		13	0,11%	
2006	2	M.1	21	0,22%	0,000	17	0,27%	0,004
2006	2	M.3	21	0,32%		17	0,29%	
2007	1	M.1	18	0,12%	0,845	21	0,10%	-
2007	1	M.3	18	0,12%		21	0,13%	0,000
2007	2	M.1	25	-0,02%	0,000	10	-0,05%	0,114
2007	2	M.3	25	0,04%		10	-0,08%	
2008	1	M.1	17	-0,04%	0,004	22	-0,04%	0,028
2008	1	M.3	17	-0,01%		22	0,01%	
2008	2*	M.1	3	-	-	36	-0,25%	0,000
2008	2	M.3	3	-		36	-0,18%	
2009	1	M.1	25	0,07%	0,276	8	0,10%	0,012
2009	1	M.3	25	0,06%		8	0,16%	
2009	2	M.1	15	0,21%	0,001	25	0,25%	0,000
2009	2	M.3	15	0,28%		25	0,36%	
2010	1	M.1	23	-0,07%	0,000	17	-0,05%	0,001
2010	1	M.3	23	-0,02%		17	-0,04%	
2010	2	M.1	20	0,21%	0,001	20	0,18%	0,007
2010	2	M.3	20	0,22%		20	0,19%	

<sup>1</sup>Teste t para amostras relacionadas, <sup>2</sup>Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste de Wilcoxon para amostras independentes.

\*Amostra insuficiente para análises.

Modelo M.3 apresentou retornos superiores ao Modelo M.1 em todos os períodos, sendo que em somente um deles a diferença não foi significativa.

Através das análises, percebem-se algumas diferenças nos resultados em relação ao estudo de Bertsimas (2004), ou seja, houve diferenças significativas em ambos os grupos de análises, algo que somente ocorreu nas distribuições assimétricas no trabalho citado. Estes resultados também foram diferenciados em relação ao estudo de Araújo e Montini (2011). No estudo destes autores, o modelo por média-variância apresentou maiores retornos no período analisado: 2009 e 2010.

Foram encontrados poucos trabalhos em que os modelos L.P.M. e CVaR são comparados. O trabalho em que os resultados são detalhados é o de Konno *et al* (2002). Em sua pesquisa, o autor demonstra que as diferenças entre ambos os modelos não foram significativas. Tais resultados foram justificados pelas características dos modelos, que buscam minimizar o *downside risk*, variando somente a forma de estimação.

**Tabela 13: Comparação dos retornos dos modelos M.2 e M.3**

Ano	Sem.	Modelos	n	Normal			n	Não normal	
				Mediana	Teste 1 (p) <sup>1</sup>	Teste 2 (p) <sup>2</sup>		Mediana	Teste 1 (p) <sup>3</sup>
2006	1	M.2	25	0,03%	0,005	-	13	0,10%	0,001
2006	1	M.3	25	0,06%			13	0,11%	
2006	2	M.2	21	0,29%	0,001	-	17	0,31%	0,013
2006	2	M.3	21	0,32%			17	0,29%	
2007	1	M.2	18	0,10%	0,001	-	21	0,18%	0,000
2007	1	M.3	18	0,12%			21	0,13%	
2007	2	M.2	25	0,03%	0,968	-	10	0,01%	0,005
2007	2	M.3	25	0,04%			10	-0,08%	
2008	1	M.2	17	0,02%	0,463	-	22	0,02%	0,006
2008	1	M.3	17	-0,01%			22	0,01%	
2008	2*	M.2	3	-	-	-	36	-0,14%	0,000
2008	2	M.3	3	-			36	-0,10%	
2009	1	M.2	25	0,07%	0,339	-	8	0,12%	0,017
2009	1	M.3	25	0,06%			8	0,16%	
2009	2	M.2	15	0,36%	-	0,000	25	0,31%	0,000
2009	2	M.3	15	0,28%			25	0,36%	
2010	1	M.2	23	-0,03%	-	0,684	17	-0,03%	0,407
2010	1	M.3	23	-0,02%			17	-0,04%	
2010	2	M.2	20	0,21%	0,007	-	20	0,30%	0,000
2010	2	M.3	20	0,22%			20	0,19%	

<sup>1</sup>Teste t para amostras relacionadas, <sup>2</sup>Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas.

\* Amostra insuficiente para análises.

Na Tabela 13, são apresentadas as comparações entre os modelos M.2 e M.3. No caso das distribuições normais, em cinco semestres o modelo M.3 foi superior. Contudo, em dois deles as diferenças não foram significativas. No caso das distribuições não normais, em sete semestres o Modelo M.2 apresentou superioridade quanto aos retornos, sendo todas as diferenças significativas. Estes resultados indicam que, apesar de os modelos buscarem minimizar o *downside risk*, a forma de estimativa pode alterar o comportamento das carteiras.



## 5 Considerações finais

O presente trabalho iniciou sua discussão mostrando que o artigo de Markowitz (1952) provocou uma mudança radical na forma de analisar o problema de seleção de ativos, o que formou a Moderna Teoria do Portfólio (MTP). Posteriormente, outros modelos para seleção de ativos foram desenvolvidos. Diante do vasto conteúdo de pesquisas, num primeiro momento foi necessário situar o trabalho em um dos campos gerais de estudo demonstrados por Roman e Mitra (2009):

- a) Estudo das distribuições de probabilidade dos retornos dos ativos.
- b) Obtenção dos pesos dos componentes da carteira com objetivos de maximizar retorno ou minimizar risco.
- c) Compreender maneiras de rebalancear as composições dos ativos no tempo.

A partir destes comentários, pode-se caracterizar o presente trabalho no segundo campo de estudo. Mediante a classificação da área de estudo a ser realizada, buscou-se contextualizar a atividade de gestão de carteiras. Neste caso foram apresentadas algumas discussões levantadas por Macedo *et al* (1998), Securato (1999) e Corazza (2007).

Um comentário que fomentou a criação dos objetivos deste trabalho foi o de Alexander (2008), quando cita a importância da gestão ativa a partir dos anos 1990 e a não existência de uma medida única para mensuração dos riscos na gestão de portfólios. Outro argumento importante foi o de Kato (2004), quando menciona a necessidade dos investidores buscarem formas de comparar os modelos desenvolvidos para a otimização de carteiras, dado que o modelo de Markowitz (1952) foi revisto durante os anos.

Na literatura utilizam-se algumas medidas de risco como: L.P.M. (*Lower Partial Moment*), VaR (*Value at Risk*) e o CVaR (*Conditional Value at Risk*), a estimativa destas medidas foram facilitadas pelas capacidades computacionais da atualidade. Diante disso, os estudos das formas para comparar o desempenho de modelos de seleção de ativos forma a bases da P.M.P.T. - *Post-Modern Portfolio Theory* (ROM e FERGUSON, 1994; GROOTVELD e HALLERBACH, 1999; ROMAN e MITRA, 2009).

Mediante a contextualização do trabalho, delimitou-se os objetivos da pesquisa, sendo o principal comparar as alocações de investimentos com uso de diferentes modelos de otimização, mais especificamente a minimização da variância (M.1), do *Lower Partial Moment* (M.2) e do *Conditional Value at Risk* (M.3).

Mediante o objetivo geral, buscou-se atender objetivos específicos, como compreender

o processo de formação de carteiras de ativos, apresentar os principais conceitos e diferenças entre os modelos de seleção, comparar as composições das carteiras otimizadas nos diferentes modelos em períodos distintos e avaliar os retornos das carteiras otimizadas.

Foram apresentadas as revisões bibliográficas sobre cada modelo. O modelo de Markowitz (M.V.) possui como parâmetro de risco a variância, sendo este o conceito mais conhecido como risco. Entretanto, diversas críticas foram citadas, principalmente sobre a capacidade de impor risco tanto às perdas quanto aos ganhos. Diante dessas limitações outras medidas de risco foram propostas. Aquelas que receberam maior atenção foram as voltadas para a mensuração do *downside risk*, caracterizadas pela metodologia do VaR (JARROW, 2006).

Com o intuito de atingir os objetivos, foram analisados três pontos:

1. Avaliar as diferenças entre os grupos 1 e 2, as distribuições normais e não normais quanto ao grau de similaridade das composições.
2. Avaliar o comportamento das medidas de risco nas carteiras formadas por cada um dos modelos.
3. Avaliar o comportamento dos retornos em cada um dos modelos.

Em relação às análises do grau de similaridade das composições das carteiras, percebeu-se que os valores do RMSDI não se diferenciaram em relação aos estudos de Grootveld e Hallerbach (1998) e Estrada (2008). Também foi possível estabelecer que o grau de similaridade das composições dos modelos “M.2 e M.3” foi maior; em segundo ficou “M.1 e M.2”, e por último, os modelos “M.1 e M.3”. Parte desses resultados pode ser explicada pelo objetivo dos modelos M.2 e M.3 em minimizar o *downside risk*.

Ao levar em consideração as diferenças quanto à forma de distribuição dos retornos das ações, pode-se observar que as carteiras formadas pelas ações que apresentaram distribuição normal demonstraram maior grau de similaridade entre os modelos em relação as carteiras formadas pelo grupo dos retornos não normais. Entretanto, dado que não foram encontrados trabalhos suficientes que realizaram este tipo de análise, somente o de Grootveld e Hallerbach (1998), é importante aprofundar estudos para que resultados mais conclusivos possam ser obtidos.

Quanto ao comportamento das medidas de risco nas carteiras geradas pelos modelos, percebeu-se, através dos testes F, que as variâncias das carteiras tendem a ser iguais, algo que reforçou a importância de se analisar o grau de retorno dos portfólios. Ressalta-se que o teste foi realizado somente no grupo que apresentou distribuição normal.

Desta forma, para completar o último objetivo, buscou-se analisar o grau de retorno das carteiras. Como demonstrado nas análises, existiram diferenças significativas entre os retornos das carteiras formadas pelos modelos estudados. Através das comparações dos grupos 1 e 2, percebe-se que as diferenças tendem a crescer quando são utilizadas distribuições não normais, algo levantado por Bertsimas (2004) no caso das comparações entre M.V. e CVaR. O presente trabalho aumentou o grau de abrangência ao comparar M.V. e L.P.M., além de L.P.M. e CVaR.

Diante dos resultados, foi possível avaliar o comentário de Estrada (2008), quando ele afirma que na seleção de um modelo de otimização de carteiras está resumida a percepção do investidor sobre a “medida mais adequada”. Todavia, ao perceber que as carteiras minimizadas tenderam a apresentar mesma variância e retornos diferenciados, há indícios de que esta citação precisa ser revista de forma mais aprofundada. Portanto, mediante a pesquisa realizada, torna-se possível estabelecer alguns *insights* a respeito da pergunta geral que delineou o estudo:

- Quais as características (composição e retornos) das carteiras de ações, quando utilizadas diferentes métricas para a mensuração de riscos?

A partir dos resultados encontrados, percebeu-se que, em relação às composições das carteiras, o grau de similaridade foi relativamente alto (em média acima dos 90%), algo também relatado por outros pesquisadores. Caso seja levada em consideração a forma de distribuição dos retornos, também se pode verificar que o grau de similaridade tenta a diminuir. Contudo, ainda não ultrapassa o nível de 80%.

Quanto aos retornos, as carteiras apresentaram características diferenciadas, dado que, dependendo da forma como a medida de risco foi mensurada, os retornos foram menores em um dos modelos e maiores nos outros testados. Desse modo, estes resultados expressam que diferentes métricas para a mensuração de riscos levam a resultados diferenciados nos casos de seleção das ações de bolsas de valores. Ou seja, os investidores realmente precisam analisar detalhadamente os modelos de otimização para implementá-los na prática de gestão de carteiras.

O presente trabalho contribui a bibliografia a respeito do tema por contribuir com as análises dos pesos por meio do índice RMSDI, nos demais trabalhos, os autores somente estimam o valor, porém não realizaram comparações. Neste trabalho, o índice foi utilizado para verificar as diferenças entre as carteiras normalmente distribuídas e não normalmente distribuídas. Também contribuiu por aprofundar a discussão levantada por Estrada (2008) ao citar que não importa a medida de risco na seleção de ativos; ou seja, na presente pesquisa foram obtidos resultados que apresentam a importância de escolher

a métrica correta na otimização de carteira de ações. Como contribuição prática, gestores de carteiras podem utilizar a metodologia realizada no trabalho para avaliarem seus resultados num ambiente dinâmico.

Apesar dos resultados encontrados, verificam-se diversas limitações no estudo, sendo uma delas o período analisado. Somente entre 2006 e 2010, dividindo o período por semestres, existe uma necessidade de avaliar os comportamentos dos modelos em outros espaços de tempo, como subdivisões anuais, mensais ou trimestrais. Outro ponto foi a utilização somente de ações presentes no índice BOVESPA. É interessante, nos próximos trabalhos, incluir outros tipos de ativo (renda-fixa, câmbio) e uso de ações *small caps*.

Ainda a respeito das limitações, é possível citar o próprio índice RMSDI, que não possui fins estatísticos (testes para demonstrar diferenças), mas somente objetivos de comparação relativa. Grootveld e Hallerbach (1999) não apresentaram as propriedades assintóticas deste estimador. Por último, o estudo focou a análise do desempenho relativo entre os modelos, mas não buscou comparar o resultado com algum *benchmark*.

Ainda sobre trabalhos futuros, como o artigo não comparou o desempenho das carteiras com algum *benchmark*, os próximos estudos podem verificar se os retornos das carteiras superam algum *benchmark* selecionado (IBOVESPA, IBR-X) nos períodos de estimação. Outro possível caminho de pesquisa é analisar os modelos num período de estimação (*in-the-sample*) e observar o desempenho num período de avaliação (*out-of-sample*).

Também, percebe-se uma falta de complementação dos resultados com estudos sobre outros mercados no mundo que possuíram os mesmos objetivos. Dessa forma, existe uma necessidade de comparar os testes realizados com um número maior de trabalhos que podem ter realizado as comparações. Vale ressaltar que os modelos L.P.M. e CVaR foram estimados somente nos casos de  $LPM_{2,0}$  e o  $CVaR_{95\%}$ . É importante, em futuros trabalhos, analisar o L.P.M. a partir de outros graus e retornos mínimos aceitáveis (como o CDI, o retorno médio do ativo ou de algum índice *benchmark*) e o CVaR, com níveis de confiança a 90% e 99%.

## 6 Referências

- ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. **Journal of Banking & Finance**. Vol. 26, Issue 7, p.p. 1487-1503, July, 2002.
- ANDRÉS, A. M. TEJEDOR, HERRANZ, I. MATO, A. S. The Wilcoxon, Spearman, Fisher,  $\chi^2$ , Student and Pearson tests and 2 x 2 tables. **The Statistician**. Vol. 44, No. 4 (1995), pp. 441-450.
- AHARONY, J.; LOEB, M. Mean-Variance vs. Stochastic dominance: some empirical findings on efficient sets. **Journal of Banking and Finance**. N. 01, p.p 95-102, 1977.
- ALEXANDER, C. **Market risk analysis volume IV: Value at Risk Models**. London: John Wiley & Sons, 2008.
- ANDRADE, F. W. M. Alocação de ativos no mercado acionário brasileiro segundo o conceito de *downside risk*. **Revista de Gestão USP**. Vol. 13, n. 02, p. 27-36, abril/junho, 2006.
- ANG, J. A note on the E, SL portfolio selection model. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol. 10, n. 05, p. 849-857, December, 1975.
- ARAUJO, A. C.; MONTINI, A. A.; SECURATO, J. R. Teoria do portfólio pós-moderna: um estudo sobre a semivariância. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO - SEMEAD, 13, 2010, São Paulo. Anais... São Paulo: SEMEAD, 2010.
- ARAUJO, A. C.; MONTINI. Teoria do portfólio: comparações entre modelos alternativos para alocação de recursos em ativos de risco. In: ENCONTRO DA ANPAD - ENANPAD, 25, 2011, Rio de Janeiro. Anais... São Paulo: ENANPAD, 2011.
- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEATH, D. Coherent measures of risk. **Mathematical Finance**. Vol. 09, n. 03, p. 203-228, July, 1999.
- ASSAF NETO, A. **Finanças corporativas e valor**. São Paulo: Atlas, 2003.
- ATHAYDE, G. **Building a mean-downside risk portfolio frontier**. In: **Managing Downside Risk in Financial Markets**. Edited by F. Sortino and Satchell Eds. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

BAIMA, F. R. **Estratégias e desempenho de investimentos dos fundos de pensão no Brasil.** Florianópolis, 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina.

BALLESTERO, E. Mean-semivariance efficient frontier: a downside risk model for portfolio selection. **Applied Mathematical Finance.** Vol. 12, n. 01, p. 1-15, March, 2005.

BARAN, R. **Análise de desempenho de fundos de gerenciamento ativo: um estudo comparativo.** Rio de Janeiro, 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

BAWA, V.; LINDENBERG, B. Capital market equilibrium in a mean, lower partial moment framework. **Journal of Financial Economics.** Vol. 5, p. 189-200, 1977.

BERNSTEIN, P. L. **Against the gods: the remarkable story of risk.** New York: John Wiley and Sons, 1996.

BERTSIMAS, D.; LAUPRETE, G.; SAMAROV, A. Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. **Journal of Economic Dynamics & Control.** N. 28, p.p. 1353 - 1381, 2004.

BORKOWF, Craig B. A new nonparametric method for variance estimation and confidence interval construction for Spearman's rank correlation. **Computational Statistics & Data Analysis.** 34 (2000), 219(241).

BORKOWF, Craig B. Computing the nonnull asymptotic variance and the asymptotic relative efficiency of Spearman's rank correlation. **Computational Statistics & Data Analysis.** 39 (2002), 271-286.

BRITO NETO, C. T.; VOLKMER, J. F. As carteiras de investimento e a semivariância. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 21, 2001, Salvador. **Anais...** Bahia: ENEGEP, 2001.

BROOKS, C. **Introductory econometrics for finance.** 2nd edition. New York, Cambridge University Press, 2008.

CASTRO JUNIOR, F. H. F.; SILVEIRA, H. P. Modelagem das distribuições das taxas

de retorno dos índices Ibovespa e S&P500. **Revista de Administração Mackenzie - RAM.** Vol. 10, n. 01, jan./fev., 2009.

CASSAROTTO FILHO, N.; KOPITTKE, B. H. **Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial.** 8 ed. São Paulo: Atlas, 1998.

CHEREMUSHKIN, S. V. Why D-CAPM is a big mistake? The incorrectness of the cosemivariance statistics. Working Paper Series. Fevereiro, 2009. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=1336169>>. Acesso em: 02/03/2010.

CHOOBINEH, F. BRANTING, D. A single approximation for semivariance. European. **Journal of Operational Research.** Vol. 27, pag. 364-370, North Holland, 1986.

CLEMEN, R. T.; REILLY, T. **Making hard decisions with decision tools.** 2 ed. Thompson Learning, 2001.

CORAZZA, M. E. Política de investimentos cruza a fronteira do risco. **Revista Fundos de Pensão - ABRAPP.** Ano XXVI, n. 329, jun. 2007.

COSTA JR, N. C. A.; GÜTLER, C. N. Diversificação e avaliação de carteiras nos mercados de capitais dos principais países Latino-Americanos. **Revista de Ciências da Administração.** Santa Catarina, v.5, n.10, jul./dez., 2003.

COSTA, O. L. V.; ASSUNÇÃO, H. G. V. **Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros.** 1. ed. São Paulo: Manole, 2005.

DOMAR, E.; MUSGRAVE, R.A. **Proportional Income Taxation and Risk Taking.** Quarterly Journal of Economics, Vol.57, May, 1944.

ELTON, E.; GRUBER, M.; PADBERG, M. Simple criteria for optimal portfolio selection. **Journal of Finance.** Vol. 31, n. 05, p. 1341-1357, December, 1976.

ELTON, E., J. E.; GRUBER, M. J.; BROWN, S. J.; GOETZMANN, W. N. **Modern portfolio theory and investment analysis.** 6th ed. John Wiley and Sons: New York, 2002.

ESTRADA, J. Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM. **Emerging Markets Review.** Vol. 3, p.p. 365-379, 2002.

ESTRADA, J. Downside risk in practice. **Journal of Applied Corporate Finance**. Vol. 18, number 1, Winter, 2006.

ESTRADA, J. Mean-semivariance behavior: downside risk and asset price. **International Review of Economics and Finance**. Vol. 16, p.p. 169-185, 2007.

ESTRADA, J. Mean-semivariance optimization: a heuristic approach. **Journal of Applied Finance**. Vol. 18, n.1, Spring-Summer, 2008.

FRANCIS, J. C. **Investments: Analysis and Management**. 5th ed, McGraw-Hill, 2001.

FIELD, Andy. **Discovering statistics using SPSS**. 2ed. Sage: London, 2005.

FISHBURN, P. C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns. **American Economic Review**. Vol. 67, n. 2, 116-126, 1977.

FORTUNATO, G. X.; MOTTA, L. F. J.; RUSSO, G. Custo de capital próprio em mercados emergentes: uma abordagem empírica no Brasil com o *downside risk*. **Revista de Administração Mackenzie**. Vol. 11, n. 1, São Paulo, jan./fev., 2010.

FRIJNS, B.; KOELLEN, E.; LEHNERT, T. On the determinants of portfolio choice. **Journal of Economic Behavior and Organization**. Vol. 66, pag. 373-386, 2008.

GITMAN, L. J. JOEHNK, M. D. **Princípios de Investimentos**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2005.

GROOTVELD, H.; HALLERBACH, W. Variance vs downside risk: is there really that much difference? **European Journal of Operational Research**. Vol. 114, p.p. 304-319, 1999.

HADAR, J.; RUSSELL, W. R. Rules for ordering uncertain prospects. **The American Economic Review**. Vol. 59, n. 01, p.p. 25-34, 1969.

HAIR, Jr., J.F.; ANDERSON, R.E.; TATHAM, R.L.; BLACK, W.C. **Análise Multivariada de Dados**. 5.ed., Porto Alegre: Bookman, 2005.

HOGAN, W. W.; WARREN, J. M. Computation of the efficient boundary in the E-S portfolio selection model. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol. 7,

p.p. 1881-1896, September, 1972.

HOGAN, W. W.; WARREN, J. M. Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol. 09, n. 1, p. 1-11, January, 1974.

JARROW, R.; ZHAO, F. Downside loss aversion and portfolio management. **Management Science**. Vol. 52, n.04, April, 2006.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. An analysis of decision under risk. **Econometrica**. Vol. 47, n. 02, p. 263-291, March, 1979.

KATO, F. H. **Análise de carteiras em tempo discreto**. São Paulo, 2004. Dissertação (Mestrado em Administração) - Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

KEYNES, J.M. **The General Theory of Employment Interest and Money**. Macmillan: London, 1937.

KONNO, H.; WAKI, H.; YUUKI, A. Portfolio optimization under lower partial risk measures. **Asia-Pacific Financial Markets**. Vol. 09, pág. 127-140, 2002.

KVAM, P. H.; VIDAKOVIC, B. **Nonparametric statistics with applications to science and engeneering**. New Jersey: John Wiley and Sons, 2007.

LINS, A. G.; SILVA, W. V.; GOMES, L. MARQUES, S. Formulação de carteiras hipotéticas de ativos financeiros usando a técnica de análise de cluster. In: ENCONTRO DA ANPAD - ENANPAD, 31, 2007, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ENANPAD, 2007.

LINTNER, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. **The Review of Economics and Statistics**. Vol. 47, n. 1. pág. 13-37, February, 1965.

LUCENA, P.; MOTTA, L. F. J. Aplicação de um novo modelo de análise de risco na Bovespa: o D-CAPM. **REAd - Revista Eletronica de Administração**. Vol. 10, n. 5, Porto Alegre, set./out., 2004.

LUCENA, P.; FIGUEIREDO, A. C. Prevendo retornos de ações através de movimentos passados: uma modificação no modelo de Grinblatt e Moskowitz. **REAd - Revista Eletronica de Administração**. Vol. 14, n. 2, Porto Alegre, mai./ago., 2008.

LUENBERGER, D. G. **Investment Science**. New York: Oxford University Press, 1998.

MACEDO, L. A. B. et al. **Técnicas de gestão de risco dos investimentos aplicadas aos fundos de pensão**. Rio de Janeiro, 1998. Monografia (MBA COM ESPECIALIZAÇÃO EM FUNDOS DE PENSÃO) - Fundação Petrobras de Seguridade Social, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v.7, n.1 Mar. 1952.

MARKOWITZ, H. M. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. New York: John Wiley & Sons, 1959.

MARKOWITZ, H. M.; TODD, P.; XU, G.; YAMANE, Y. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm. **Annals of Operations Research**. Vol. 45, n. 01, p. 307-317, December, 1993.

MERTON, R. C. An intertemporal capital asset pricing model. **Econometrica**. Vol. 41, n. 5, pág. 867-887, September, 1973.

MONTINI, A. A. **Análise Bayesiana da volatilidade da distribuição dos retornos de ativos financeiros e otimização do valor em risco condicional - CVaR**. São Paulo, 2003. Tese (Doutorado em Administração) - Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

MORETIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística Básica**. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

NAWROCKI, D. A comparison of risk measures when used in a simple portfolio selection heuristic. **Journal of Business Finance and Accounting**. Vol. 10, n. 02, p. 183-194, June, 1983.

NAWROCKI, D. A brief history of downside risk measures. **Journal of Investing**. Vol. 8, p.p. 9-25, Fall, 1999.

NAWROCKI, D; CUMOVA, D. A Symmetric LPM Model for Heuristic Mean-Semivariance Analysis. *Journal of Economics Business. Accepted Manuscript.* 2010.

OLIVEIRA, E. P. **Medidas coerentes de risco.** Rio de Janeiro, 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

OLIVEIRA, F. N.; PAULA, E. L. Determinando o grau ótimo de diversificação para investidores usuários de Home Brokers. **RBF - Revista Brasileira de Finanças.** Vol. 6, n. 3, pag. 437-461, São Paulo, 2008.

PEREIRA, B. B.; PEREIRA, R. B.; SAVOIA, J.R.F. Vale a pena investir em fundos no Brasil? In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO - SEMEAD, 12, 2009, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SEMEAD, 2009.

PEREIRA FILHO, J. R. Investimentos: uma visão estratégica para os fundos de pensão. **Revista Fundos de Pensão - ABRAPP.** Ano XXVI, n. 334, Nov. 2007.

PONTES, A. C. F. **Análise de variância multivariada com a utilização de testes não paramétricos e componentes principais baseados em matrizes de postos.** 2005. Tese (Doutorado) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/11/11134/tde09082005123633/publico/AntonioPontes.pdf>>. Acesso em: 22/12/2010.

RIBEIRO, C. O.; FERREIRA, F. A. C.; SANTOS, B. L. M. O valor em risco condicional na otimização de carteiras com derivativos. In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, 27, 2007, Foz do Iguaçu. **Anais...** Paraná: ENEGEP, 2007.

Risk MetricsTM. Technical Document. 4th Edition, New York, NY, J. P. Morgan Inc., December, 2000.

ROCKAFELLAR, R.T.; URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. **Journal of Risk**, n. 2, vol. 3, pág. 21-41, 2000.

ROM, B. M., FERGUSON, K.W. Post-modern portfolio theory comes of age. **Journal of Investing**, p. 11-17, Fall, 1994.

ROMAN, D.; MITRA, G. Portfolio selection models: a review and new directions. **Willmott Journal.** Vol 1, Issue 02, p.p. 69-85, April, 2009.

ROY, A. D. Safety first and the holding of assets. **Econometrica**. Vol. 20, n.03, p. 431-449, 1952.

SAITO, A. T.; SAVOIA, J. R.; FAMÁ, R. A evolução da função financeira. **REGE - Revista de Gestão USP**. Vol. 13, n. especial, pag. 31-44, São Paulo, 2006.

SHARPE, W. F. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. **The Journal of Finance**. Vol. 19, n. 3, pag. 425-442, September, 1964.

SECURATO, J. R. et al. Avaliação de Desempenho de Fundos de Investimentos - O Guia de Fundos de Renda Fixa da FIA/FEA/USP. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO - SEMEAD, 04, 1999, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SEMEAD, 1999.

SECURATO, J. R. et al. **Decisões financeiras em condições de risco**. 2 ed. São Paulo: Saint Paul, 2007.

SIEGEL, Sidney. **Estatística não-paramétrica para ciências do comportamento**. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.

SING, T.; ONG, S. Asset allocation in a downside risk framework. **Journal of Real Estate Portfolio Management**. Vol. 6, n.3, p.p. 213-223, 2000.

SOUZA, L., A. R. **Valor em risco em épocas de crise**. São Paulo, 1999. Dissertação (Mestrado em Economia) - Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo.

SORTINO, A. F. **From alpha to omega**. In: **Managing Downside Risk in Financial Markets**. Edited by F. Sortino and Satchell Eds. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

SORTINO, A. F.; SATCHELL, S. Managing downside risk in financial markets. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.

TETENS, J.N. **Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften**. Leipzig, 1789.

URYASEV, S. P. **Introduction to the theory of probabilistic functions and percentiles (Value-at-Risk)**. In: Probabilistic constrained optimization: methodology and applications. Kluwer Academic Publishers, pag. 1-25, 2000.

URYASEV, S. P; PALMQUIST, J.; KROKHMAL, P. Portfolio optimization with Conditional Value-at-Risk objective and constraints. Submitted to The Journal of Risk. 2001. Disponível em: [www.ise.ufl.edu/uryasev/pal.pdf](http://www.ise.ufl.edu/uryasev/pal.pdf).

VARIAN, H. R. **Microeconomia: conceitos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

## A Apêndice - Assimetria da matriz de cosemivariância

Hogan e Warren (1974) discutem sobre o modelo de especificação de ativos (o CAPM) ser baseado na variância. Entretanto, os autores se questionam sobre como resultaria o modelo caso a semivariância fosse imposta como a medida de risco. Diante disso, eles revisaram os conceitos da “linha de mercado de capitais” (a representação da linha pode ser vista no gráfico 2). Portanto, a “Fronteira Eficiente” é caracterizada pela reta, partindo do ponto  $r_f$  (taxa de retorno do ativo livre de risco) e tangenciando a parábola formada da combinação dos ativos de risco.

Segundo Hogan e Warren (1974), a linha de mercado de capitais discutida por Sharpe (1964), baseada na variância, poderia ser replicada para o caso da semivariância. Desse modo, com objetivo de conhecer o relacionamento entre a reta e a parábola, os pesquisadores combinaram os coeficientes angulares de ambas, formando a expressão 45:

$$\frac{S_t(r \cdot w)}{E(r \cdot w) - T} = \frac{dS_t[r \cdot z(a)]}{dE[r \cdot z(a)]}, \quad (45)$$

em que,

$w$ : portfolio do ponto que tangencia a reta de mercado.

$r \cdot w$ : retorno da carteira  $w$ .

$z(a) = ax + (1 - a)w$ : carteira formada por um ativo  $x$  e portfolio  $w$ .

$S_t[r \cdot z(a)] = \{E[\min(0, r \cdot z(a) - T)]^2\}^{\frac{1}{2}}$ .

A partir da relação estabelecida é necessário conhecer as derivadas de  $\frac{dS_t[r \cdot z(a)]}{dE[r \cdot z(a)]}$ ; desta forma para  $dE[r \cdot z(a)]$  têm-se a expressão 46.

$$\frac{dE[r \cdot z(a)]}{da} = \frac{dE\{r \cdot [ax + (1 - a)w]\}}{da} = \frac{dE(rax + rw - raw)}{da} = E(rx) - E(rw) \quad (46)$$

Para  $dS_t[r \cdot z(a)]$  utilizando a regra da cadeia e realizando operações nas equações 47 e 48 encontra-se a expressão 49:

$$\frac{dS_t[r \cdot z(a)]}{da} = \frac{d\{E[\min(0, r \cdot z(a) - T)]^2\}^{\frac{1}{2}}}{da} = \quad (47)$$

$$\frac{1}{2} \{E[\min(0, r \cdot z(a) - T)]^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dE[\min(0, r \cdot z(a) - T)]^2}{da} = \quad (48)$$

$$\frac{1}{2}S_t[r \cdot z(a)]^{-1} \cdot \frac{dSV[r \cdot z(a)]}{da} \quad (49)$$

Vale ressaltar que  $SV[r \cdot z(a)] = E[min(0, r \cdot z(a) - T)^2]$ ; a respectiva derivação é demonstrada em Hogan e Warren (1972), sendo  $2 \cdot E \{[min(0, r \cdot z(a) - T)r] \cdot (x - w)\}$ . Deste modo, o resultado final é a expressão 50:

$$\frac{dS_t[r \cdot z(a)]}{da} = S_t[r \cdot z(a)]^{-1} \cdot E \{[min(0, r \cdot z(a) - T)r] \cdot (x - w)\} \quad (50)$$

O ponto de tangência entre a parábola e a reta deve ocorrer quando  $z(0) = w$ , pois  $w$  é a carteira que tangencia a reta; então ao fazer  $a = 0$  encontra-se a expressão 51:

$$\left| \frac{dS_t[r \cdot z(a)]}{d} \right|_{a=0} = \frac{S_t(r \cdot w)^{-1} \cdot E \{[min(0, r \cdot w - T)r]\}}{E(rx) - E(rw)} \quad (51)$$

Ao igualar os respectivos coeficientes angulares e realizar algumas manipulações, chega-se à expressão 52:

$$\begin{aligned} \frac{S_t(r \cdot w)}{E(r \cdot w) - T} &= \frac{S_t(r \cdot w)^{-1} \cdot E \{[min(0, r \cdot w - T)r] \cdot (x - w)\}}{E(rx) - E(rw)} = \\ &= S_t(r \cdot w)^2 \cdot [E(rx) - E(rw)] = [E(r \cdot w - T)] \cdot \{[min(0, r \cdot w - T)] \cdot [E(r \cdot x) - E(r \cdot w)]\} = \\ &= \frac{[E(r \cdot x) - E(r \cdot w)]}{[E(r \cdot x) - E(r \cdot w)]} = \frac{[E(r \cdot w) - T] \cdot E[min(0, r \cdot w - T)]}{S_t(r \cdot w)^2} = \\ &= 1 = \frac{[E(r \cdot w) - T] \cdot E[min(0, r \cdot w - T)]}{S_t(r \cdot w)^2} \end{aligned} \quad (52)$$

Nesta fase, Hogan e Warren (1974) estabeleceram “ $1 = \frac{[E(r \cdot x) - T]}{[E(r \cdot x) - T]}$ ”; então é possível estabelecer a equação 53:

$$\begin{aligned} \frac{[E(r \cdot x) - T]}{E(r \cdot x) - T} &= \frac{[E(r \cdot w) - T] \cdot E[min(0, r \cdot w - T)]}{S_t(r \cdot w)^2} = \\ &= E(r \cdot x) - T = \frac{[E(r \cdot w) - T] \cdot E[min(0, r \cdot w - T)] \cdot [E(rx) - T]}{S_t(r \cdot w)^2} \\ &= E(r \cdot x) = T + \frac{E[min(0, r \cdot w - T)] \cdot [(r \cdot x) - T]}{S_t(r \cdot w)^2} [E(r \cdot w) - T] = \end{aligned}$$

$$= E(r \cdot x) = T + \frac{E[min(0, r \cdot w - T)] \cdot [(r \cdot x) - T]}{E[min(0, r \cdot w - T)]^2} [E(r \cdot w) - T] \quad (53)$$

A última equação seria o modelo de apreçamento, quando é considerada como medida de risco a semivariância; a partir desta definição, é possível comparar os modelos 54 e 55 com as expressões 15 e 16 apresentadas na seção 2.3.2:

$$E(r \cdot x) = T + \frac{Cov[(r \cdot w), (r \cdot x)]}{\sigma^2(r \cdot w)} [E(r \cdot w) - T] \quad (54)$$

$$E(r \cdot x) = T + \frac{CSV[(r \cdot w), (r \cdot x)]}{SV(r \cdot w)} [E(r \cdot w) - T] \quad (55)$$

Desta forma, podem ser visualizadas as seguintes definições: a variância -  $\sigma^2(r \cdot w)$  se torna  $SV(r \cdot w)$  - a semivariância. A covariância  $Cov[(r \cdot w), (r \cdot x)]$  é redefinida como cosemivariância, ou seja,  $CSV[(r \cdot w), (r \cdot x)]$ .

Portanto,  $CSV[(r \cdot w), (r \cdot x)] = E \{[min(0, r \cdot w - T)] \cdot [r \cdot x - T]\}$ ; ao avaliar esta relação se percebe a assimetria na matriz de cosemivariâncias  $CSV_{i,j} \neq CSV_{j,i}$ . O respectivo modelo (equação 56) foi apresentado por Estrada (2008) como a equação 17 (seção 2.3.2):

$$CSV_{i,j} = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{R_f} [(R_i - R_f) \cdot min(R_i - R_f, 0)] \quad (56)$$

## B Apêndice - Ações com retornos com distribuição normal

**Tabela 14: Ações do ano de 2006**

n	1º semestre			2º semestre				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jbtest)
1	CMIG3-Cemig	0,06%	0,37	0,11	Vale5-Vale	-0,11%	0,43	0,1
2	Cyrela R. ON	0,13%	-0,39	0,12	NATU3	0,23%	-0,35	0,21
3	Sabesp ON	0,13%	0,34	0,2	CSNA3	0,16%	0,37	0,13
4	Gerdau ON	0,13%	-0,28	0,33	USIM5	0,05%	-0,35	0,22
5	Copel PNB	-0,02%	0,31	0,2	Gol PN	0,11%	0,31	0,18
6	Cosan ON	0,52%	-0,23	0,35	Tractebel ON	0,12%	-0,35	0,13
7	Klabin S.A. PN	0,12%	0,3	0,12	Marcopolo PN	0,35%	0,31	0,11
8	Braskem PNA	-0,29%	-0,11	0,5	Eletrobras PNB	0,08%	-0,31	0,21
9	Souza Cruz ON	0,09%	0,3	0,33	Copel PNB	0,44%	0,31	0,21
10	Suzano P. PNA	0,11%	-0,15	0,19	Klabin PN	0,44%	-0,11	0,5
11	ITUB4	-0,05%	0,29	0,28	AMBV4	0,98%	0,21	0,5
12	GGBR4	0,06%	-0,1	0,5	Usiminas ON	0,05%	-0,03	0,5
13	PCAR5	-0,24%	0,27	0,43	P. Seguro ON	0,06%	0,15	0,21
14	Petr4-Petrobras	0,04%	-0,04	0,5	BBAS3	0,22%	0,13	0,5
15	Eletrobras PNB	0,13%	0,26	0,3	PCAR5	0,15%	0,12	0,5
16	Vale ON	-0,01%	-0,04	0,5	Petrobras ON	0,14%	0,09	0,27
17	Embraer ON	0,10%	0,25	0,48	Tam S.A. PN	0,00%	0,09	0,5
18	CSNA3	0,32%	0,12	0,36	Vale ON	-0,03%	0,08	0,5
19	Vale5-Vale	-0,05%	0	0,5	Petr4	0,08%	0,06	0,5
20	ITSA4-Itau	0,03%	0,09	0,5	Cyrela R. ON	-0,15%	0,06	0,5
21	Petrobras ON	0,04%	-0,01	0,5	Localiza ON	0,21%	0,02	0,5
22	L. Renner ON	0,27%	0,07	0,5	Cosan ON	0,09%	0,02	0,11
23	AMBV4	-0,06%	0,05	0,5				
24	ELET3	0,12%	0,04	0,5				
25	USIM5	0,19%	0,02	0,5				
26	TNPL3	-0,05%	0	0,28				

**Tabela 15:** Ações do ano de 2007

n	1º semestre de 2007			2º semestre de 2007				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	Rossi R. ON	0,23%	0,27	0,36	NATU3	-0,28%	0,36	0,2
2	Gerdau ON	0,24%	-0,34	0,18	ELET3	-0,14%	-0,32	0,18
3	Petrobras ON	0,05%	0,17	0,5	Cyrela R. ON	0,18%	0,28	0,4
4	L.Renner ON	0,14%	-0,22	0,18	Eletrobras PNB	-0,18%	-0,3	0,3
5	Cyrela R. ON	0,11%	0,07	0,39	P. Seguro ON	-0,01%	0,28	0,4
6	ELET3	0,09%	-0,21	0,5	Copel PNB	-0,13%	-0,29	0,17
7	Souza C. ON	0,20%	0,06	0,5	Randon P. PN	0,09%	0,25	0,39
8	Cosan ON	-0,35%	-0,18	0,16	B2W ON	-0,14%	-0,26	0,45
9	Sabesp ON	0,09%	0,06	0,24	AMBV4	0,06%	0,17	0,27
10	ITSA4-Itau	0,13%	-0,17	0,5	Vale5-Vale	0,36%	-0,26	0,46
11	B2W V. ON	0,12%	0,04	0,5	L. American. PN	0,07%	0,17	0,5
12	Klabin PN	0,20%	-0,17	0,29	Vale ON	0,35%	-0,25	0,5
13	Elet. PNB	0,18%	0,04	0,5	Usiminas ON	0,02%	0,15	0,5
14	ITUB4	0,08%	-0,15	0,17	Klabin S.A. PN	0,06%	-0,21	0,5
15	BBAS3	0,17%	-0,09	0,5	ITUB4	0,12%	0,14	0,5
16	Tractebel ON	0,18%	-0,08	0,5	Sabesp ON	0,01%	-0,12	0,2
17	Tam S.A. PN	-0,08%	-0,05	0,5	CSNA3	0,44%	0,12	0,5
18	Copel PNB	0,23%	-0,01	0,11	L. Renner ON	0,09%	-0,11	0,32
19	AMBV4	0,23%	-0,01	0,44	Souza C. ON	0,15%	0,11	0,5
20					Braskem PNA	-0,10%	-0,09	0,11
21					Gerdau ON	0,10%	0,08	0,26
22					GGBR4	0,12%	-0,09	0,5
23					Marcopolo PN	-0,01%	0,06	0,5
24					PCAR5	-0,03%	-0,05	0,47
25					ITSA4	0,05%	0,04	0,36
26					Tam S.A. PN	-0,24%	-0,02	0,5
27					Rossi R. ON	0,22%	0,01	0,5
28					TNPL3	-0,20%	-0,01	0,41
29					USIM5	0,13%	0,01	0,5
30					Suzano P. PNA	0,14%	-0,01	0,5

**Tabela 16: Ações do ano de 2008**

n	1º semestre de 2008			2º semestre de 2008				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jtest)
1	ITSA4-Itau	0,06%	0,42	0,12	Gerdau ON	-0,72%	0,32	0,24
2	CMIG3	0,07%	-0,28	0,34	Embraer ON	-0,07%	-0,02	0,5
3	ITUB4	0,00%	0,39	0,15	Tam PN	-0,30%	0,14	0,5
4	GGBR4	0,34%	-0,19	0,5	Petr. ON	-0,50%	0,12	0,5
5	L.American. PN	-0,36%	0,38	0,16				
6	Gerdau ON	0,34%	-0,16	0,5				
7	Suzano P. PNA	-0,05%	0,34	0,19				
8	Tam S.A. PN	-0,28%	-0,15	0,5				
9	Souza Cruz ON	-0,04%	0,31	0,24				
10	Gol PN	-0,75%	-0,13	0,5				
11	B2W ON	-0,26%	0,23	0,5				
12	Embraer ON	-0,46%	-0,08	0,5				
13	USIM5	0,32%	0,18	0,5				
14	TCSL3-Tim	-0,31%	0,18	0,5				
15	Tractebel ON	0,08%	0,17	0,5				
16	P. Seguro ON	-0,14%	0,03	0,5				
17	Usiminas ON	0,28%	0,01	0,5				
18	Copel PNB	0,22%	0,01	0,5				

**Tabela 17: Ações do ano de 2009**

n	Empresa	1º semestre de 2009			2º semestre de 2009		
		Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	NATU3	0,13%	0,44	0,09	Randon P. PN	0,39%	0,32
2	Vale5-Vale	0,11%	-0,22	0,34	Usiminas ON	0,17%	-0,34
3	TNPL3	0,29%	0,4	0,11	Copel PNB	0,26%	0,3
4	GGBR4	0,10%	-0,1	0,38	USIM5	0,15%	-0,32
5	ELET3	0,00%	0,37	0,06	Souza C. ON	0,00%	0,25
6	PCAR5	0,29%	-0,1	0,5	Petrobras ON	-0,01%	-0,22
7	CSNA3	0,07%	0,32	0,26	Cosan ON	0,48%	0,23
8	USIM5	-0,01%	0,32	0,17	TNPL3	0,19%	-0,14
9	BBAS3	0,15%	0,3	0,21	Rossi R. ON	0,32%	0,22
10	ITUB4	0,10%	0,26	0,3	Petr4	0,07%	-0,07
11	Braskem FNA	-0,14%	0,23	0,5	Gerdau ON	0,24%	0,17
12	Souza C. ON	0,21%	0,22	0,5	BBDC3	0,18%	0,5
13	Cyrela R. ON	0,08%	0,19	0,5	Localiza ON	0,35%	0,5
14	Embraer ON	0,92%	0,16	0,4	CSNA3	0,19%	0,14
15	Petr4	0,18%	0,13	0,5	Cyrela R. ON	0,33%	0,11
16	Cosan ON	0,24%	0,12	0,36	Tam S.A. PN	0,48%	0,04
17	AMBVA4	0,08%	0,11	0,5			
18	Klabin PN	0,27%	0,11	0,5			
19	L. Americ. PN	0,19%	0,11	0,5			
20	L. Renner ON	0,15%	0,1	0,5			
21	Sabesp ON	-0,14%	0,1	0,11			
22	Tam S.A. PN	0,15%	0,09	0,15			
23	Vale ON	0,29%	0,08	0,21			
24	Tractebel ON	0,01%	0,07	0,5			
25	Suzano P. PNA	0,15%	0,07	0,5			
26	Localiza ON	0,05%	0,06	0,38			
27	P. Seguro ON	0,07%	0,05	0,5			
28	Marcopolo PN	-0,22%	0,05	0,5			
29	Eletrobras PNB	0,05%	0,03	0,5			
30	Gerdau ON	0,30%	0,02	0,2			
31	Usiminas ON	0,07%	0,02	0,3			

**Tabela 18: Ações do ano de 2010**

n	1º semestre de 2010			2º semestre de 2010				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	Embraer ON	-0,01%	0,38	0,13	Cia Hering On	0,42%	0,38	0,15
2	L. Americ. PN	-0,22%	-0,3	0,33	CMIG3	0,14%	-0,22	0,18
3	TCSL3-Tim	0,05%	0,34	0,11	Copel PNB	0,12%	0,38	0,17
4	Petr4	-0,26%	-0,3	0,29	B2W ON	0,11%	-0,16	0,19
5	Localiza ON	0,04%	0,34	0,13	L. Renner ON	0,20%	0,3	0,32
6	Petrobras ON	-0,24%	-0,24	0,4	Petr4	0,07%	-0,15	0,5
7	Klabin FN	0,01%	0,3	0,12	BBAS3	0,18%	0,3	0,23
8	PCAR5	-0,02%	-0,12	0,42	NATU3	0,22%	-0,01	0,5
9	Suzano P. PNA	-0,05%	0,26	0,41	GGBR4	0,03%	0,2	0,45
10	BBDC3	-0,17%	-0,03	0,18	Rossi R. ON	0,05%	-0,13	0,22
11	Gerdau ON	-0,22%	0,26	0,33	Usiminas ON	-0,03%	0,13	0,5
12	Copel PNB	-0,07%	-0,02	0,38	AMBV4	0,29%	-0,08	0,5
13	Sabesp ON	0,06%	0,21	0,5	Marcopolo PN	0,35%	0,12	0,5
14	GGBR4	-0,21%	0,19	0,5	Randon P. PN	0,13%	0,12	0,5
15	USIM5	-0,06%	0,18	0,5	Gerdau ON	0,02%	0,12	0,5
16	Cyrela R. ON	-0,20%	0,17	0,23	USIM5	-0,12%	0,11	0,25
17	ITSA4	-0,10%	0,16	0,5	BBDC3	0,17%	0,11	0,5
18	Usiminas ON	-0,05%	0,14	0,5	Braskem PNA	0,39%	0,1	0,5
19	L. Renner ON	0,16%	0,14	0,5	Tractebel ON	0,25%	0,07	0,5
20	Marcopolo PN	0,25%	0,1	0,5	Localiza ON	0,15%	0,06	0,5
21	CSNA3	-0,01%	0,09	0,5	Petrobras ON	0,05%	0,01	0,5
22	NATU3	0,04%	0,09	0,5				
23	CMIG3	-0,11%	0,06	0,43				
24	ITUB4	-0,17%	0,05	0,5				

## C Apêndice - Ações com retornos com distribuição não normal

Tabela 19: Ações do ano de 2006

n	1º semestre 2006			2º semestre 2006				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	Marcopolo PN	0,13%	0,92	0,00	Sabesp ON	0,37%	2,48	0,00
2	TCSL3	0,16%	-0,37	0,00	TNPL3	-0,11%	-3,4	0,00
3	BBA3	0,17%	0,77	0,00	ITUB4	0,17%	1,07	0,00
4	Randon P. PN	-0,08%	-0,11	0,00	L. Americ. PN	0,28%	-0,03	0,04
5	Gol FN	0,07%	0,74	0,00	B2W ON	0,34%	1,01	0,00
6	Tam S.A. PN	0,15%	0,69	0,01	TCSL3-Tim	0,33%	0,87	0,00
7	Usiminas ON	0,32%	0,59	0,00	Randon P. PN	0,20%	0,86	0,00
8	BBDC3	-0,05%	0,56	0,00	ITSA4-Itau	0,19%	0,85	0,00
9	Tractebel ON	0,08%	0,45	0,08	Souza Cruz ON	0,13%	0,74	0,00
10	NATU3	0,08%	0,43	0,00	Suzano P. PNA	0,44%	0,7	0,00
11	L. Americ. PN	0,01%	0,4	0,10	ELET3	0,08%	0,63	0,02
12	B2W ON	-0,11%	0,25	0,02	BBDC3	0,18%	0,61	0,01
13	P. Seguro ON	0,27%	0,13	0,01	Rossi R. ON	0,21%	0,52	0,05
14	Localiza ON	0,26%	0,13	0,09	GGBR4	0,05%	0,45	0,01
15					CMIG3	0,08%	0,33	0,09
16					L. Renner ON	0,23%	0,32	0,01
17					Gerdau ON	0,13%	0,23	0,02
18					Embraer ON	0,03%	0,1	0,03

**Tabela 20: Ações do ano de 2007**

n	1º semestre 2007			2º semestre 2007				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbttest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbttest)
1	CMIG3	0,33%	2,06	0,00	Petra4	-0,24%	0,57	0,02
2	NATU3	-0,13%	-2,14	0,00	BBDC3	-0,05%	-0,41	0,00
3	Embraer ON	0,08%	1,1	0,00	TCSL3-Tim	-0,16%	0,52	0,05
4	GGBR4	0,22%	-0,55	0,00	CMIG3	-0,16%	-0,39	0,02
5	Braskem PNA	0,10%	0,97	0,00	BBAS3	0,03%	0,5	0,01
6	Vale ON	0,25%	-0,37	0,01	Embraer ON	-0,06%	-0,19	0,01
7	Gol PN	0,00%	0,61	0,00	Cosan ON	0,56%	0,46	0,00
8	Vale5-Vale	0,24%	-0,35	0,00	Gol FN	0,53%	0,41	0,00
9	Localiza ON	0,08%	0,47	0,01	Petrobras ON	0,15%	0,32	0,02
10	Petra4	0,02%	-0,32	0,02	Tractebel ON	0,24%	0,31	0,09
11	L. Americ. PN	0,19%	0,19	0,01	Localiza ON	-0,11%	0,17	0,08
12	PCAR5	-0,02%	-0,32	0,03				
13	Marcopolo PN	0,15%	0,17	0,01				
14	Usiminas ON	0,22%	-0,28	0,01				
15	TCSL3-Tim	-0,15%	0,05	0,02				
16	TNPL3	0,26%	-0,27	0,07				
17	P. Seguro ON	0,07%	0,01	0,03				
18	USIM5	0,24%	-0,27	0,01				
19	CSNA3	0,38%	-0,19	0,02				
20	Randon P. PN	0,45%	-0,11	0,01				
21	Suzano P. PNA	0,14%	-0,07	0,01				
22	BBDC3	0,14%	-0,02	0,01				

**Tabela 21:** Ações do ano de 2008

n	1º semestre 2008			2º semestre 2008				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	ELLET3	0,22%	0,82	0,00	Braskem PNA	-0,68%	1,2	0,00
2	Vale5-Vale	-0,04%	-0,74	0,00	Rossi R. ON	-0,86%	-0,56	0,01
3	Localiza ON	0,09%	0,72	0,00	TNPL3	-0,08%	0,91	0,00
4	Sabesp ON	-0,11%	-0,32	0,01	CMIG3	-0,22%	-0,51	0,00
5	Lojas R. ON	-0,05%	0,7	0,02	ITSA4	-0,10%	0,85	0,00
6	Rossi R. ON	-0,71%	-0,28	0,02	P. Seguro ON	-0,31%	-0,38	0,00
7	Cyrela R. ON	-0,03%	0,69	0,01	ITUB4	-0,09%	0,8	0,00
8	Vale ON	-0,03%	-0,28	0,00	Randon P. PN	-0,89%	-0,19	0,01
9	BBAS3	-0,10%	0,58	0,03	Klabin PN	-0,52%	0,77	0,00
10	Petr4	0,04%	-0,06	0,07	TCSL3-Tim	-0,16%	-0,12	0,00
11	Braskem PNA	-0,03%	0,52	0,05	Tractebel ON	-0,14%	0,64	0,00
12	AMBV4	-0,22%	0,47	0,06	B2W ON	-0,66%	-0,05	0,00
13	Randon P. PN	-0,15%	0,44	0,02	BBDC3	-0,19%	0,59	0,00
14	NATU3	-0,01%	0,44	0,07	Vale ON	-0,52%	-0,95	0,01
15	Marcopolo PN	-0,19%	0,39	0,07	L. Americ. PN	-0,41%	0,58	0,00
16	Cosan ON	0,37%	0,39	0,00	Eletrobras PNB	-0,10%	0,55	0,00
17	PCAR5	0,03%	0,35	0,07	PCAR5	-0,06%	0,55	0,01
18	Klabin PN	-0,11%	0,34	0,02	Copel PNB	-0,25%	0,53	0,00
19	Eletrobras PNB	0,17%	0,31	0,07	Suzano P. PNA	-0,55%	0,43	0,00
20	BBDC3	-0,09%	0,26	0,05	NATU3	0,13%	0,41	0,09
21	CSNA3	0,29%	0,13	0,04	ELET3	-0,14%	0,4	0,00
22	TNPL3	-0,23%	0,06	0,01	BBAS3	-0,31%	0,4	0,01
23	Petrobras ON	0,05%	0,02	0,04	CSNA3	-0,68%	0,32	0,02
24					GGBR4	-0,71%	0,3	0,08
25					USIM5	-0,85%	0,29	0,01
26					Usiminas ON	-0,82%	0,27	0,08
27					Souza C. ON	-0,06%	0,27	0,04
28					Hering NM On	-0,11%	0,22	0,00
29					AMBV4	0,00%	0,22	0,01
30					Marcopolo PN	-0,42%	0,2	0,03
31					Cyrela R. ON	-0,67%	0,15	0,00
32					Gol FN	-0,33%	0,1	0,03
33					Cosan ON	-0,67%	0,1	0,01
34					L. Renner ON	-0,43%	0,08	0,01
35					Vale5-Vale	-0,48%	0,06	0,04
36					Localiza ON	-0,76%	0,06	0,00
37					Sabesp ON	-0,27%	0,03	0,05

**Tabela 22:** Ações do ano de 2009

n	1º semestre 2009			2º semestre 2009				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jbttest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor $p$ (Jbttest)
1	TCSL3-Tim	0,23%	2,58	0,00	P. Seguro ON	0,23%	1,74	0,00
2	BBDC3	0,07%	-0,51	0,01	TCSL3-Tim	0,06%	-3,89	0,00
3	B2W ON	0,24%	0,68	0,01	Hering On	0,73%	1,35	0,00
4	Copel PNB	0,06%	-0,39	0,01	Tractebel ON	0,13%	-0,76	0,00
5	Gol PN	-0,03%	0,44	0,04	Eletrobras PNB	0,17%	1,08	0,00
6	ITSA4	0,09%	0,23	0,04	ITSA4	0,23%	-0,28	0,01
7	Rossi R. ON	0,51%	-0,12	0,01	Marcopolo PN	0,39%	0,93	0,00
8	Hering On	0,40%	0,62	0,00	ITUB4	0,21%	-0,24	0,01
9	Randon P. PN	0,36%	0,41	0,01	PCAR5	0,39%	0,78	0,00
10					BBAS3	0,26%	-0,21	0,00
11					Braskem PNA	0,51%	0,63	0,01
12					Klabin S.A. PN	0,43%	-0,18	0,04
13					Suzano P. PNA	0,31%	0,62	0,01
14					NATU3	0,28%	-0,06	0,01
15					L. Renner ON	0,44%	0,59	0,00
16					B2W ON	0,14%	0,58	0,00
17					ELET3	0,14%	0,52	0,01
18					Gol FN	0,69%	0,47	0,04
19					Vale ON	0,26%	0,44	0,00
20					CMIG3	0,14%	0,38	0,03
21					Vale5	0,25%	0,35	0,00
22					L. Americ. PN	0,38%	0,32	0,06
23					Embraer ON	0,15%	0,25	0,00
24					GGBR4	0,24%	0,18	0,09
25					Sabesp ON	0,09%	0,16	0,06
26					AMBV4	0,29%	0,09	0,05

**Tabela 23:** Ações do ano de 2010

n	1º semestre 2010			2º semestre 2010				
	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)	Empresa	Retornos	Assimetria	Valor p (Jbtest)
1	Eletrobras PNB	-0,07%	0,83	0,00	Sabesp ON	0,30%	4,54	0,00
2	Tractebel ON	-0,06%	-0,72	0,00	L. Americ. PN	-0,04%	-2,63	0,00
3	Hering On	0,49%	0,81	0,00	Embraer ON	-0,02%	1,74	0,00
4	Cosan ON	-0,03%	-0,64	0,02	CSNA3	0,08%	-0,57	0,02
5	TNPL3	-0,07%	0,78	0,00	Klabin PN	0,19%	1,02	0,00
6	AMBV4	-0,35%	-0,5	0,03	PCAR5	0,33%	-0,43	0,01
7	Braskem PNA	-0,07%	0,63	0,00	Suzano P. PNA	0,19%	1,02	0,00
8	B2W ON	-0,06%	-0,42	0,06	Cyrela R. ON	-0,09%	-0,07	0,00
9	ELET3	-0,11%	0,46	0,00	ITUB4	0,28%	0,67	0,00
10	Randon P. PN	-0,09%	-0,1	0,04	Souza C. ON	0,34%	0,58	0,00
11	Tam S.A. PN	-0,07%	0,4	0,00	ITSA4	0,20%	0,55	0,02
12	P. Seguro ON	0,07%	-0,07	0,07	Cosan ON	0,20%	0,5	0,06
13	Gol PN	-0,34%	0,38	0,09	Vale ON	0,29%	0,48	0,03
14	Souza C. ON	-0,19%	0,37	0,05	Eletrobras PNB	0,29%	0,48	0,03
15	BBAS3	-0,11%	0,28	0,01	P. Seguro ON	0,03%	0,48	0,02
16	Vale5-Vale	-0,08%	0,15	0,02	Vale5-Vale	0,10%	0,47	0,00
17	Rossi R. ON	-0,18%	0,13	0,06	Gol PN	0,07%	0,46	0,03
18	Vale ON	-0,11%	0,11	0,05	ELET3	0,21%	0,43	0,01
19					TCSL3-Tim	0,24%	0,28	0,04
20					TNPL3	-0,06%	0,17	0,00
21					Tam S.A. PN	0,16%	0,03	0,06

D Apêndice - Composições das carteiras (grupo distribuição normal)

Tabela 24: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.1)

Tabela 25: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.2)

Tabela 26: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.3)

Tabela 27: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.1)

Tabela 28: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.2)

Tabela 29: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.3)

Tabela 30: Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.1)

Tabela 31: Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.2)

Tabela 32: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.1)

Tabela 33: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.2)

Tabela 34: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.3)

Tabela 35: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.1)

Tabela 36: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.2)

Tabela 37: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.3)

**Tabela 38: Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.1)**

M.1	1	2	3	4
Gerdau ON	0,00%	22,80%	17,20%	0,10%
Embraer ON	0,00%	77,20%	60,90%	57,10%
Tam S.A. PN	0,00%	0,00%	21,90%	16,70%
Petrobras ON	0,00%	0,00%	0,00%	26,10%

**Tabela 39: Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.2)**

M.2	1	2	3	4
Gerdau ON	0,00%	13,30%	8,10%	0,10%
Embraer ON	0,00%	86,70%	76,00%	70,00%
Tam S.A. PN	0,00%	0,00%	16,00%	11,90%
Petrobras ON	0,00%	0,00%	0,00%	18,10%

**Tabela 40: Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.3)**

M.3	1	2	3	4
Gerdau ON	0,00%	39,40%	25,30%	25,60%
Embraer ON	0,00%	60,60%	48,60%	48,80%
Tam S.A. PN	0,00%	0,00%	26,10%	25,50%
Petrobras ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,10%

Tabela 41: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.1)

Tabela 42: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.2)

Tabela 43: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.3)

Tabela 44: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.1)

Tabela 45: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.2)

Tabela 46: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.3)

Tabela 47: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.1)

Tabela 48: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.2)

Tabela 49: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.3)

Tabela 50: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.1)

Tabela 51: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.2)

Tabela 52: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.3)

## E Apêndice - Composições das carteiras (distribuição não normal)

Tabela 53: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.1)

Tabela 54: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.2)

**Tabela 55: Pesos 1º semestre de 2006 (modelo M.3)**

M.3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Marcopolo PN	0,00%	89,00%	83,40%	78,50%	64,00%	64,10%	66,70%	59,30%	52,80%	48,00%	47,60%	45,70%	46,00%	53,60%
TCSL3-Tim	0,00%	11,00%	8,30%	1,70%	4,10%	4,10%	5,60%	5,20%	5,80%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
BBAS3-B.Brasil	0,00%	0,00%	8,20%	4,10%	4,20%	4,10%	0,10%	0,20%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
Randon Part PN	0,00%	0,00%	15,70%	5,80%	5,70%	5,90%	8,70%	1,30%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
Gol PN	0,00%	0,00%	0,00%	21,90%	21,90%	17,00%	16,50%	19,80%	14,70%	14,60%	14,40%	10,80%	0,10%	0,10%
Tam S.A. PN	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
Usiminas ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	4,60%	3,10%	0,90%	6,80%	6,80%	6,60%	11,50%	12,00%
BBDC3-Bradesco	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	6,80%	0,10%	16,10%	15,90%	14,60%	15,10%	9,60%
Tractebel ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	19,00%	8,10%	8,30%	9,60%	5,10%	11,50%
NATU3-Natura	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5,90%	6,00%	6,00%	7,80%	6,10%	6,10%
Lojas Americanas PN	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,40%	2,50%	0,10%	0,10%	0,10%
B2W Varejo ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,10%	0,10%	0,10%
Porto Seguro ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	3,10%	0,10%	0,10%
Localiza ON	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	6,40%	6,40%

Tabela 56: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.1)

Tabela 57: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.2)

Tabela 58: Pesos 2º semestre de 2006 (modelo M.3)

Tabela 59: Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.1)

Tabela 60: Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.2)

Tabela 61: Pesos 1º semestre de 2007 (modelo M.3)

Tabela 62: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.1)

Tabela 63: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.2)

Tabela 64: Pesos 2º semestre de 2007 (modelo M.3)

Tabela 65: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.1)

Tabela 66: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.2)

Tabela 67: Pesos 1º semestre de 2008 (modelo M.3)

Tabela 68: Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.1)

Tabela 69: Pesos 2º semestre de 2008 (modelo M.2)

Tabela 70: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.1)

Tabela 71: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.2)

Tabela 72: Pesos 1º semestre de 2009 (modelo M.3)

Tabela 73: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.1)

Tabela 74: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.2)

Tabela 75: Pesos 2º semestre de 2009 (modelo M.3)

Tabela 76: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.1)

Tabela 77: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.2)

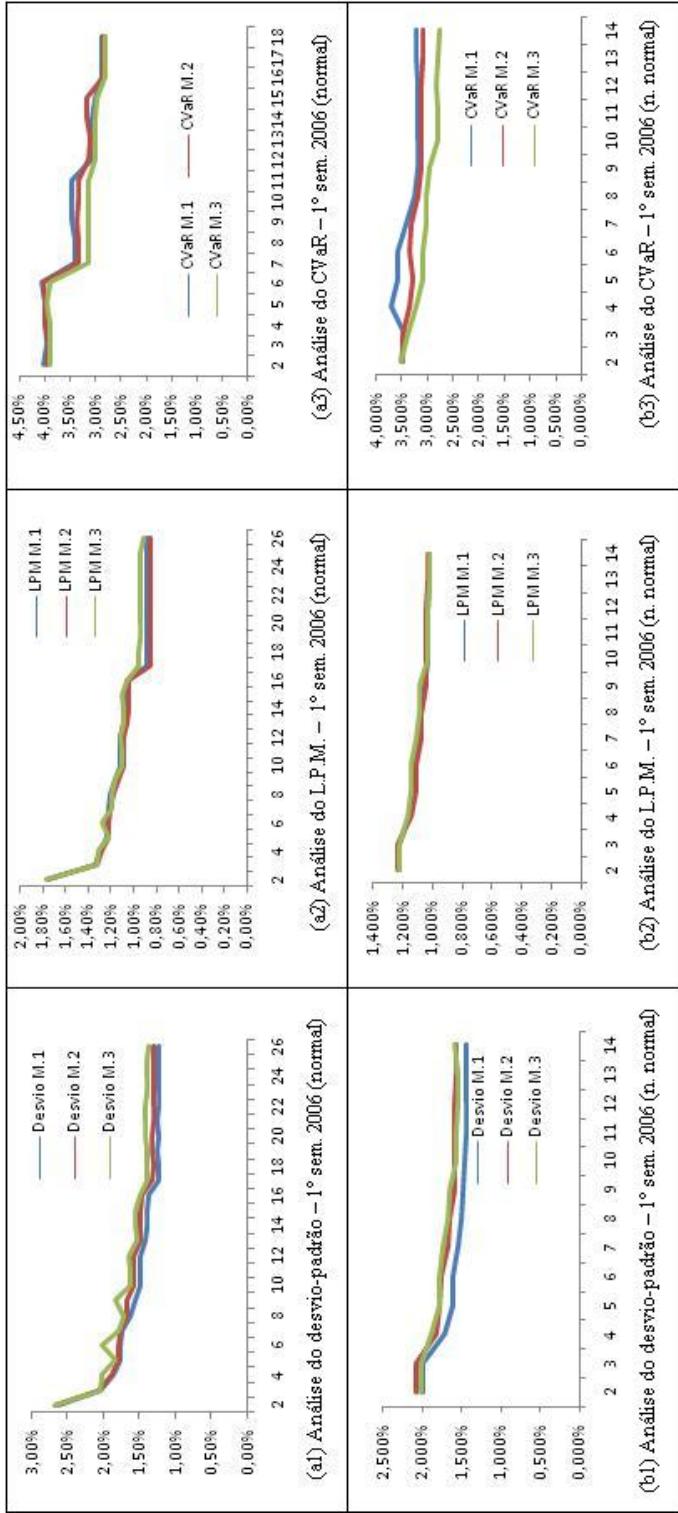
Tabela 78: Pesos 1º semestre de 2010 (modelo M.3)

Tabela 79: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.1)

Tabela 80: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.2)

Tabela 81: Pesos 2º semestre de 2010 (modelo M.3)

## F Apêndice - Análise das medidas de risco



**Figura 10:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2006

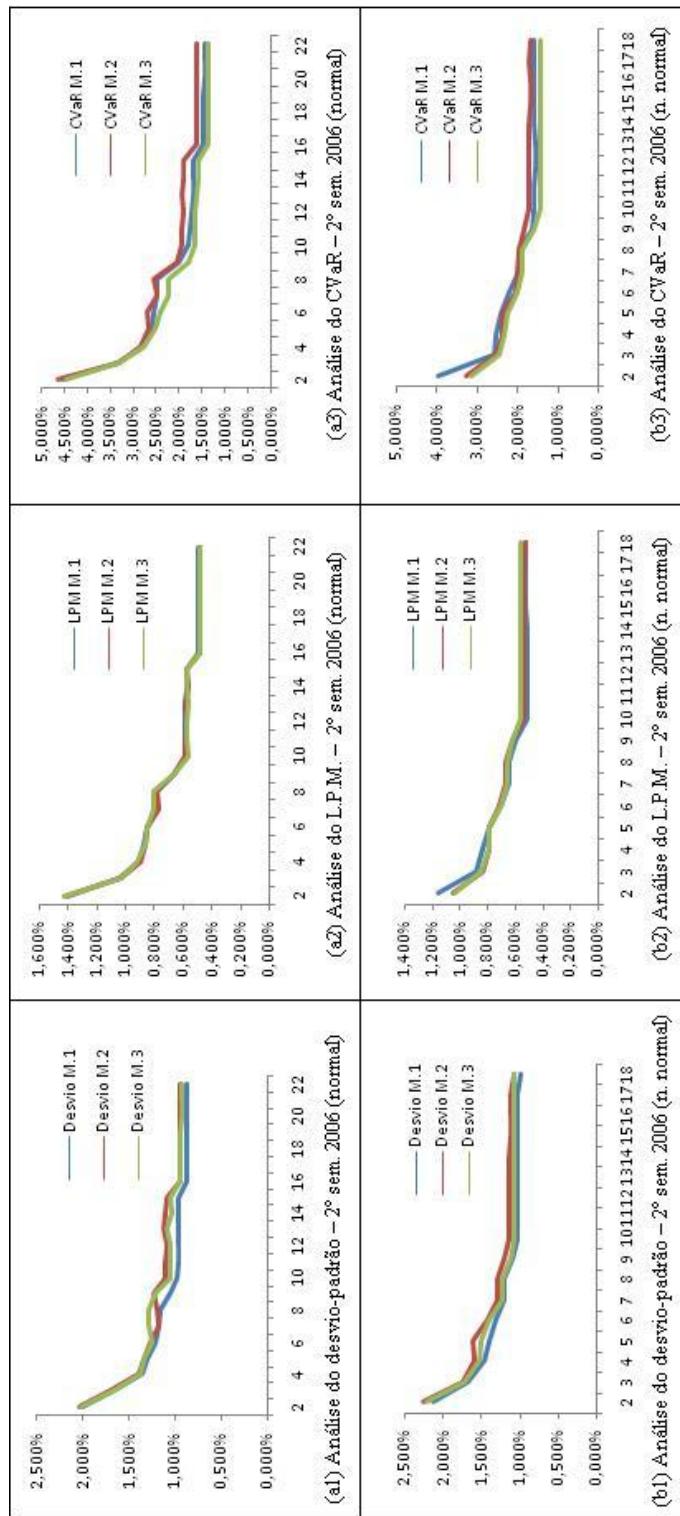
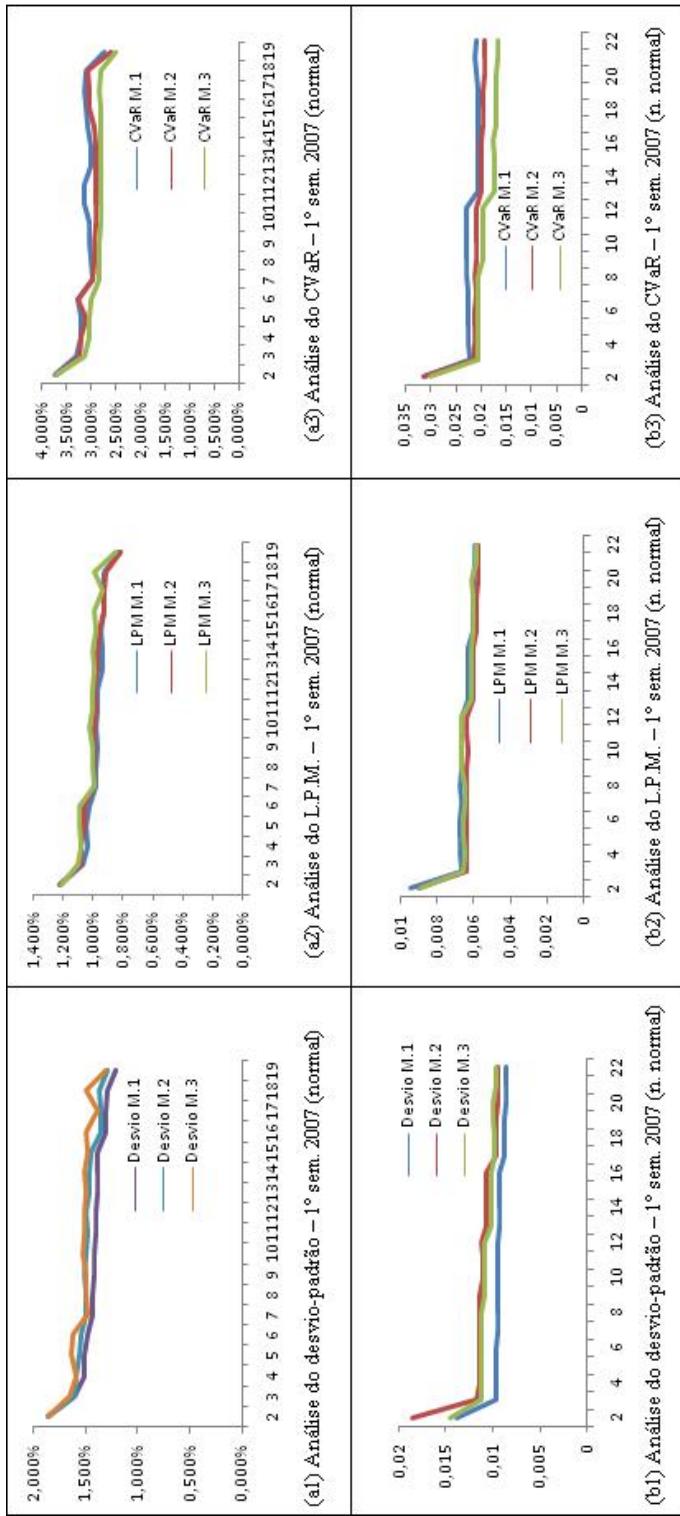
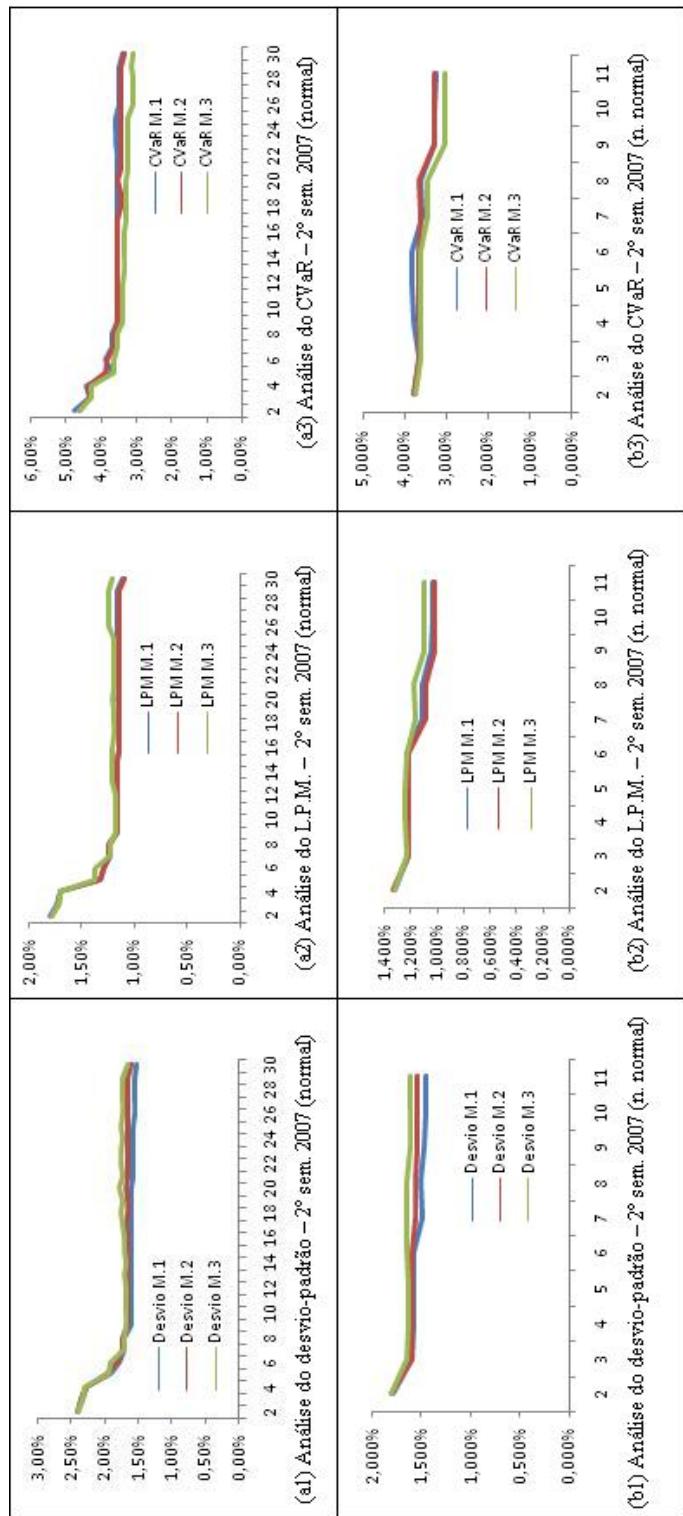


Figura 11: Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2006



**Figura 12:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2007



**Figura 13:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2007

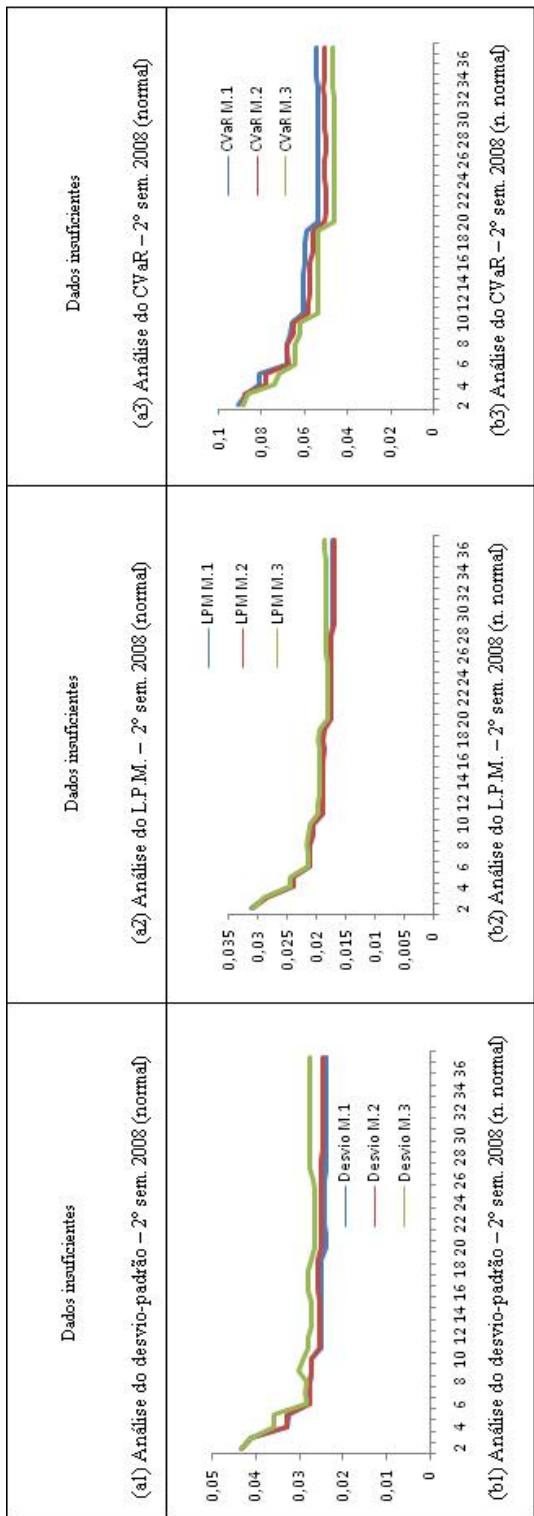
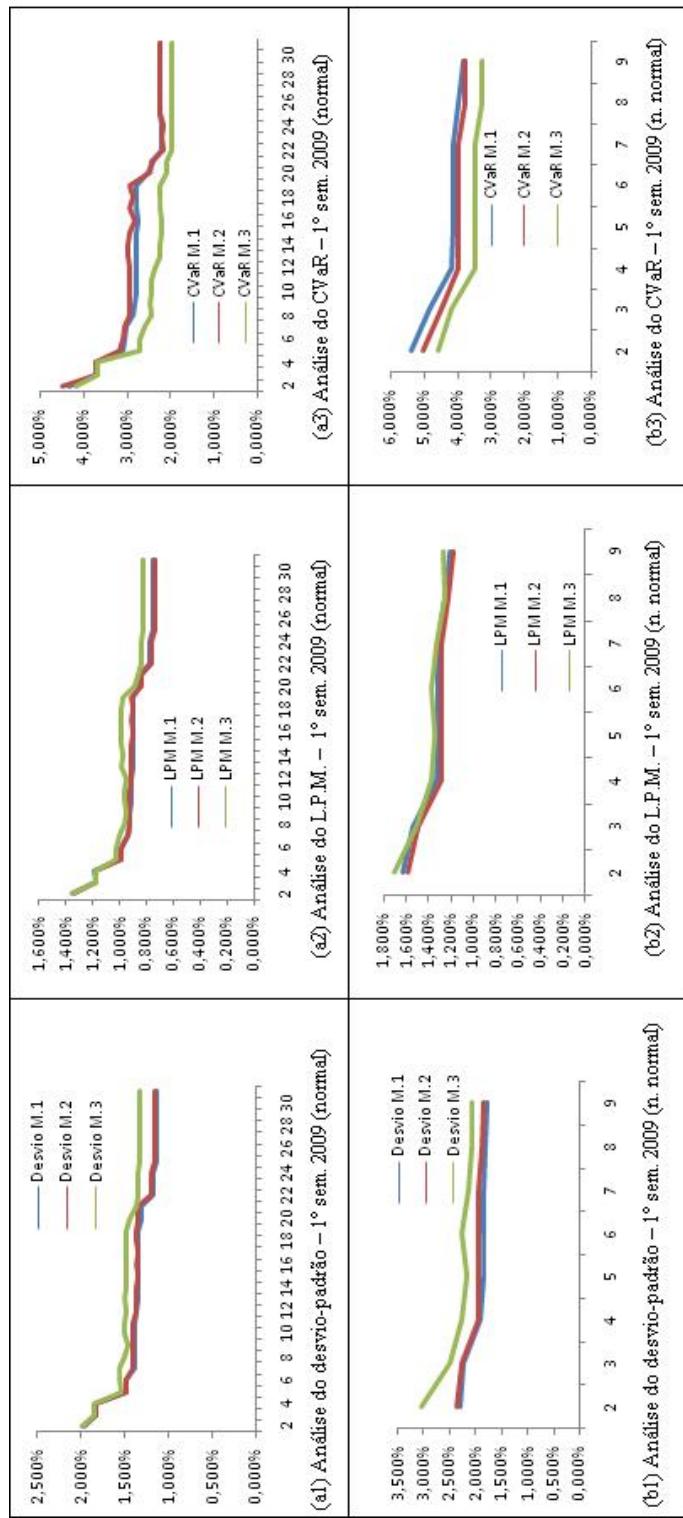
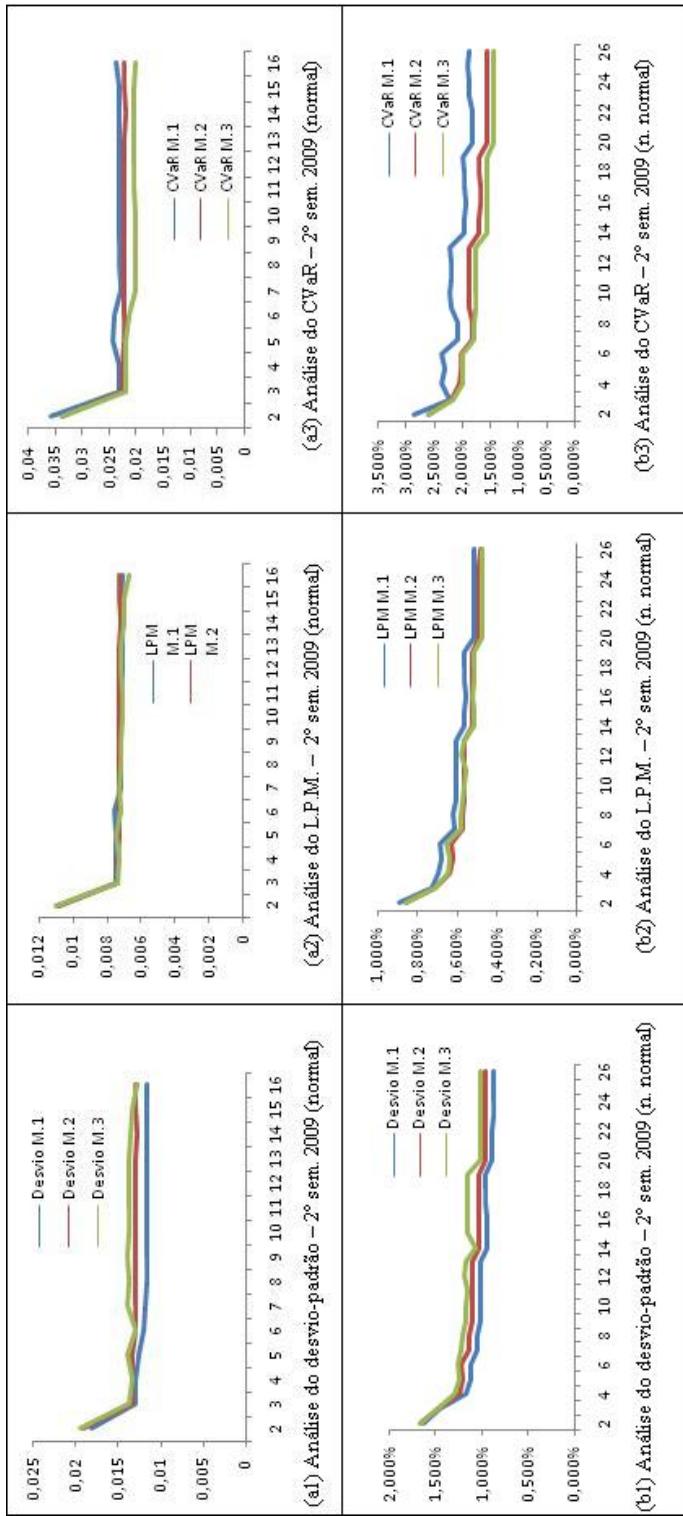


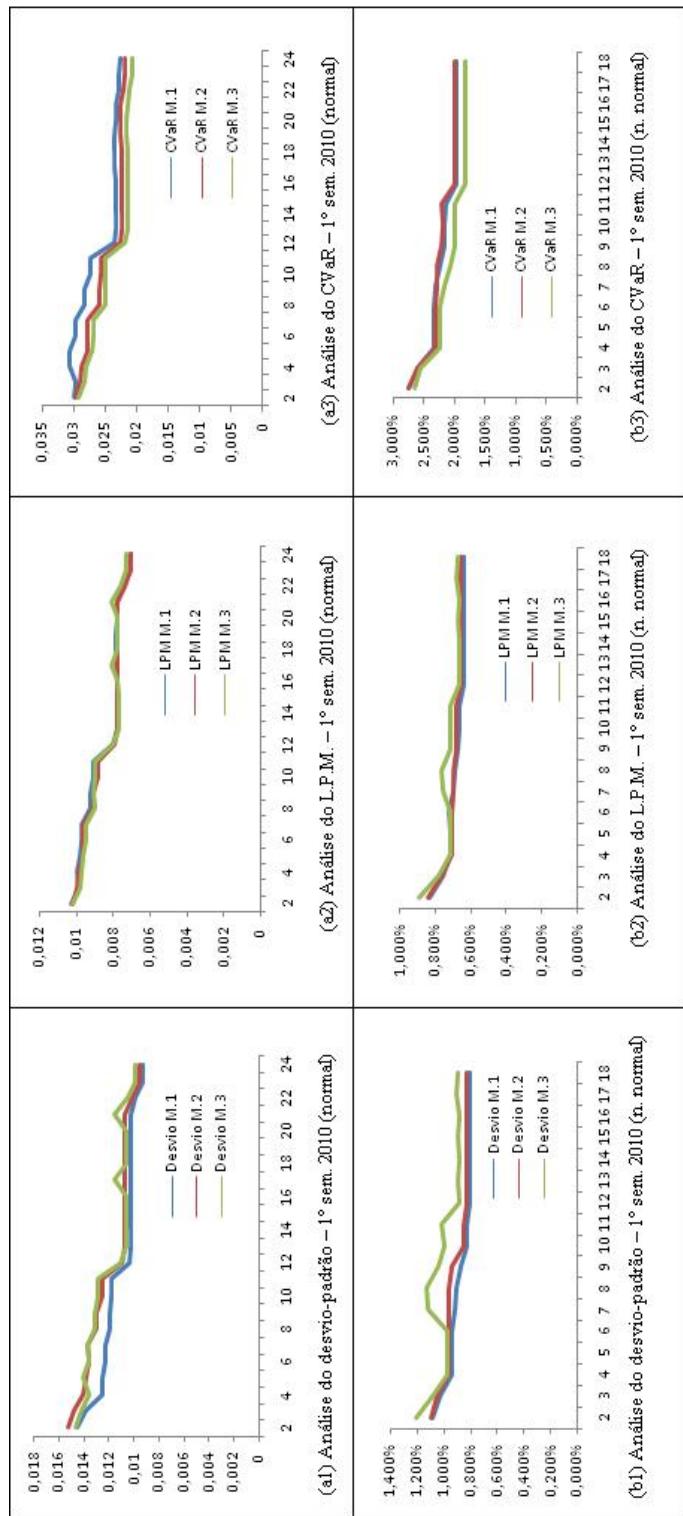
Figura 14: Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2008



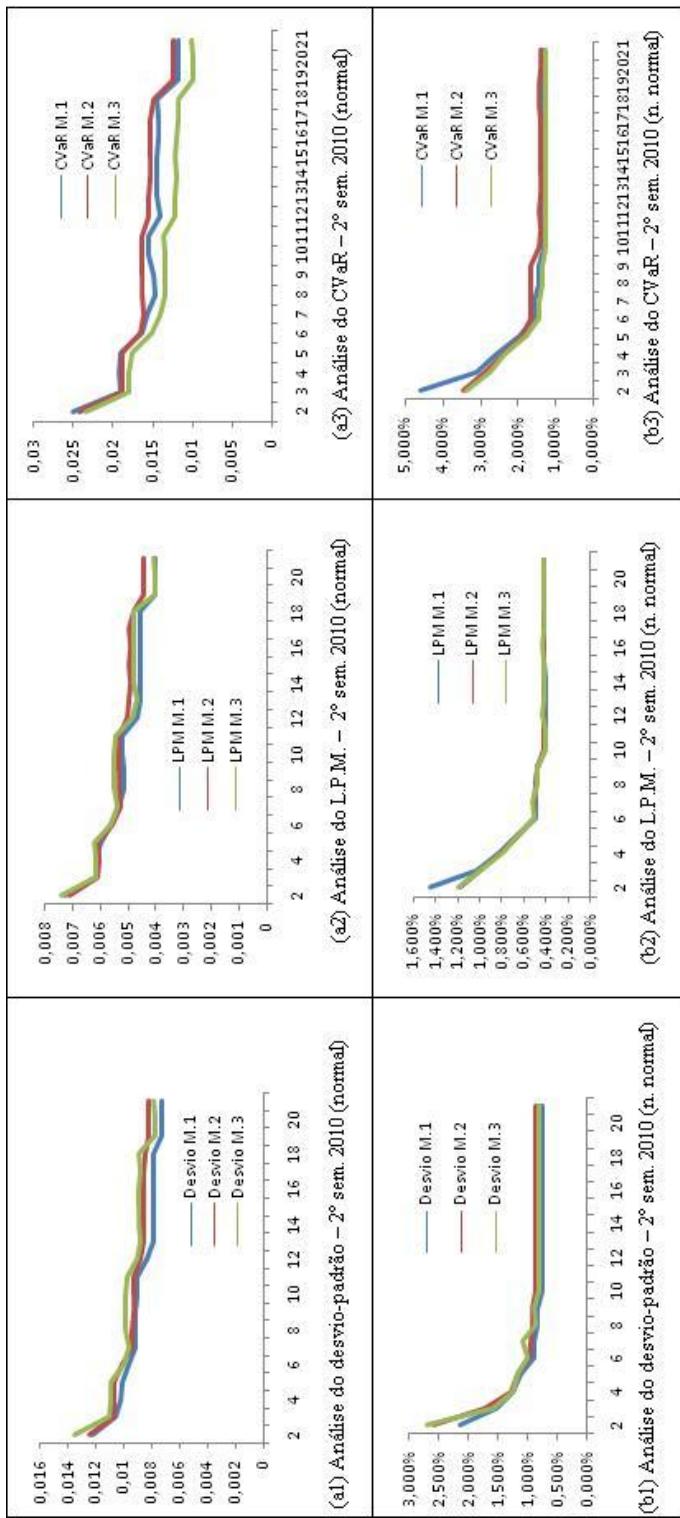
**Figura 15:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2009



**Figura 16:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2009



**Figura 17:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 1º semestre de 2010



**Figura 18:** Desvio-padrão, L.P.M. e CVaR para o 2º semestre de 2010

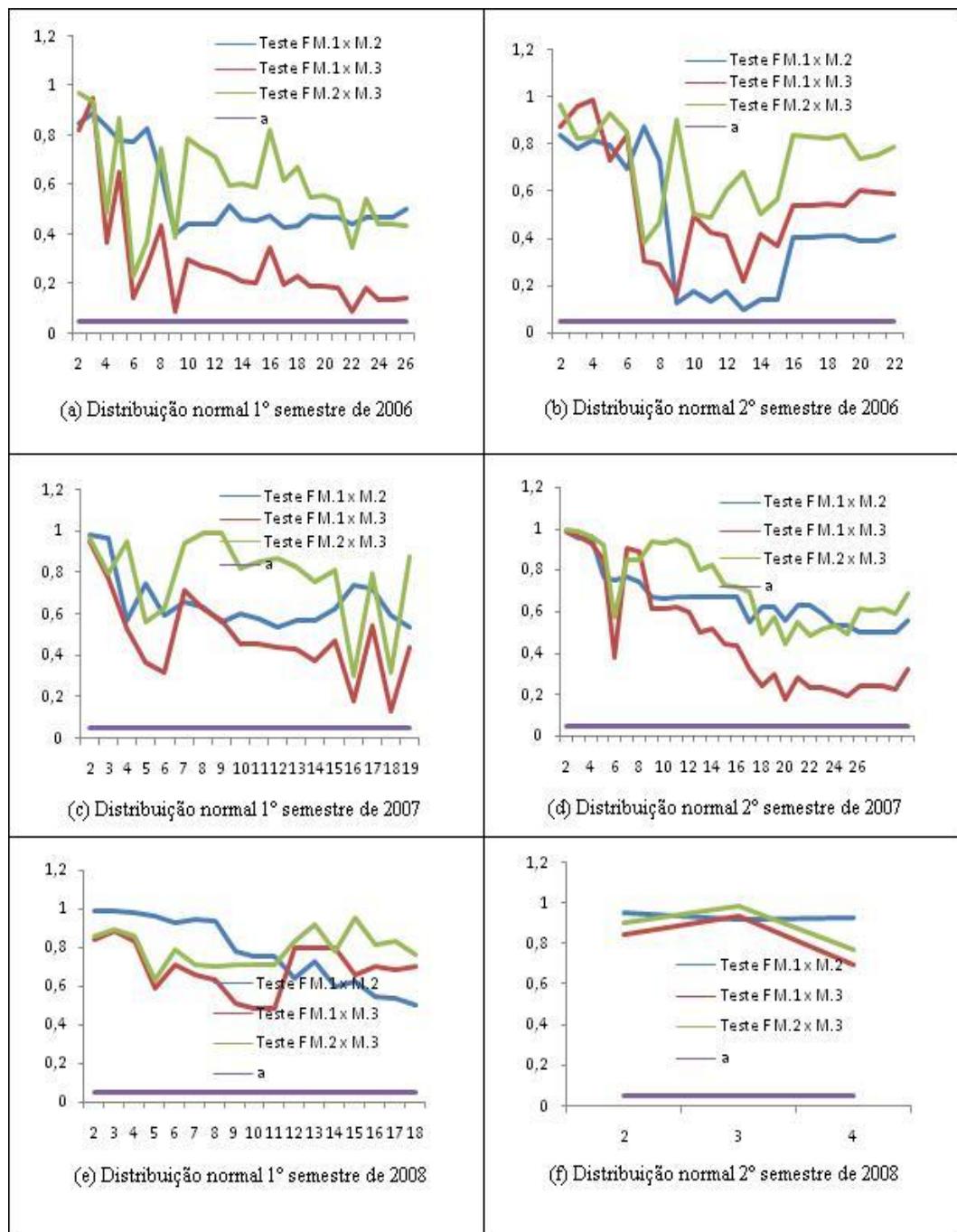
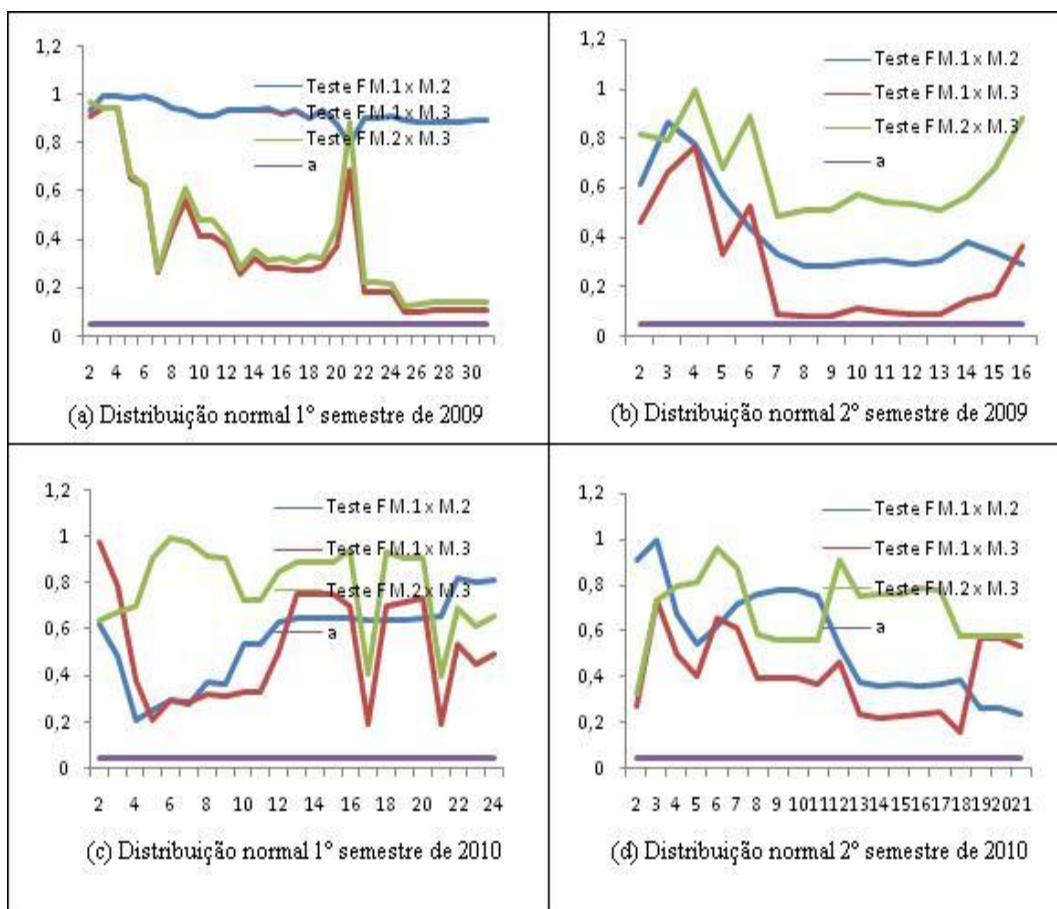


Figura 19: Níveis descritivos teste F - 2006 a 2008



**Figura 20:** Níveis descritivos teste F - 2009 a 2010

## G Apêndice - Análise dos retornos por carteira

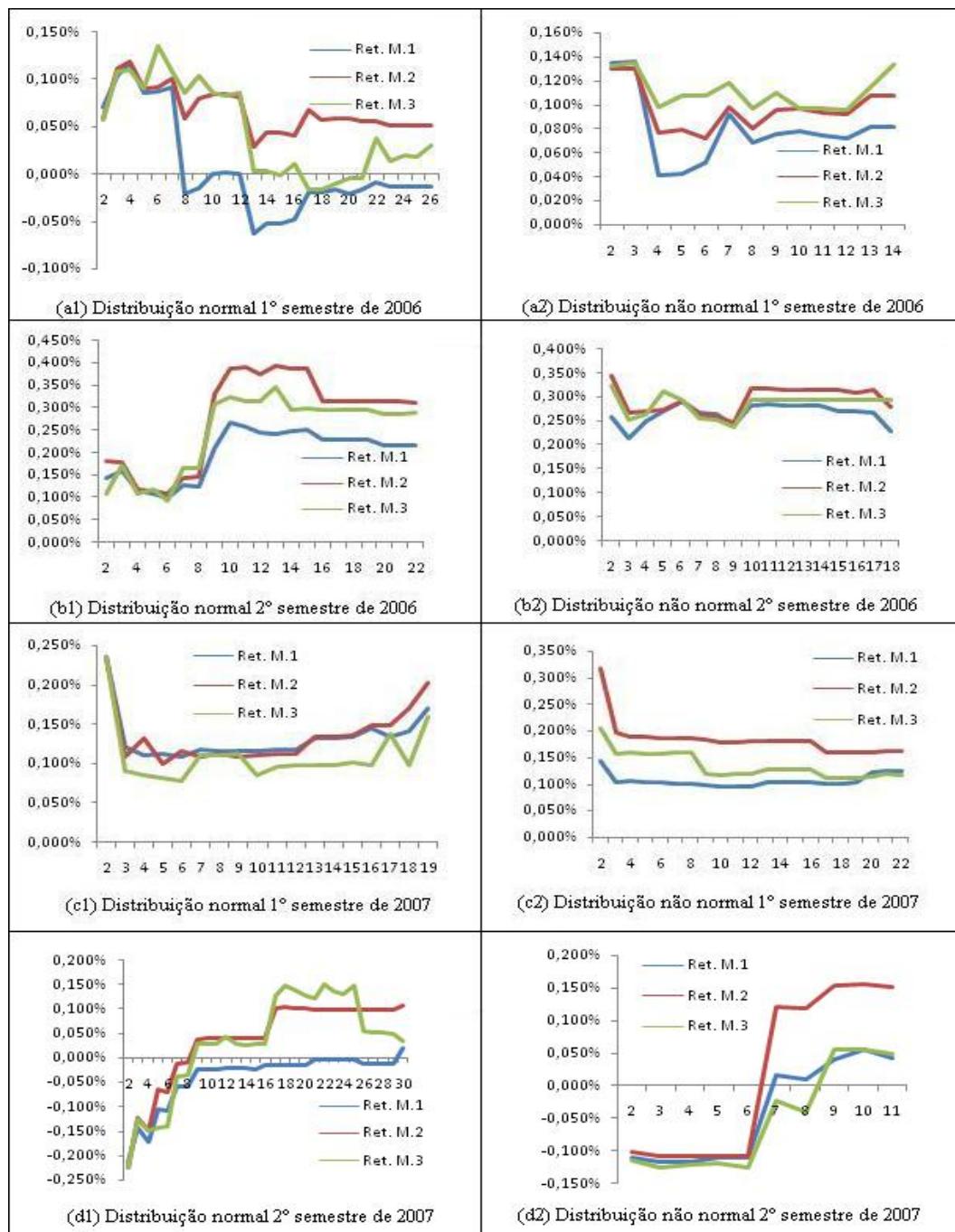
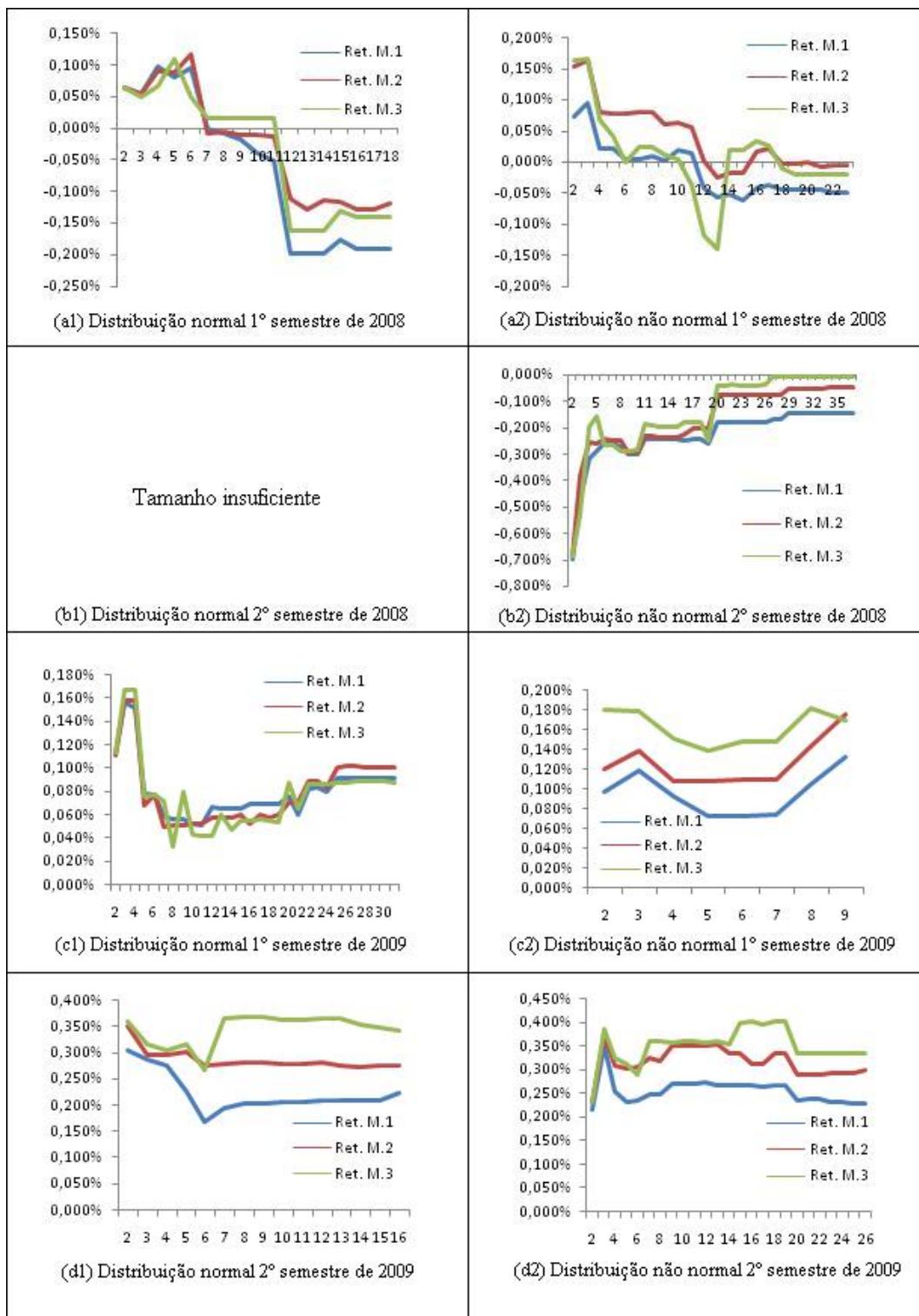


Figura 21: Retornos médios por carteira - 2006 e 2007



**Figura 22:** Retornos médios por carteira - 2008 e 2009

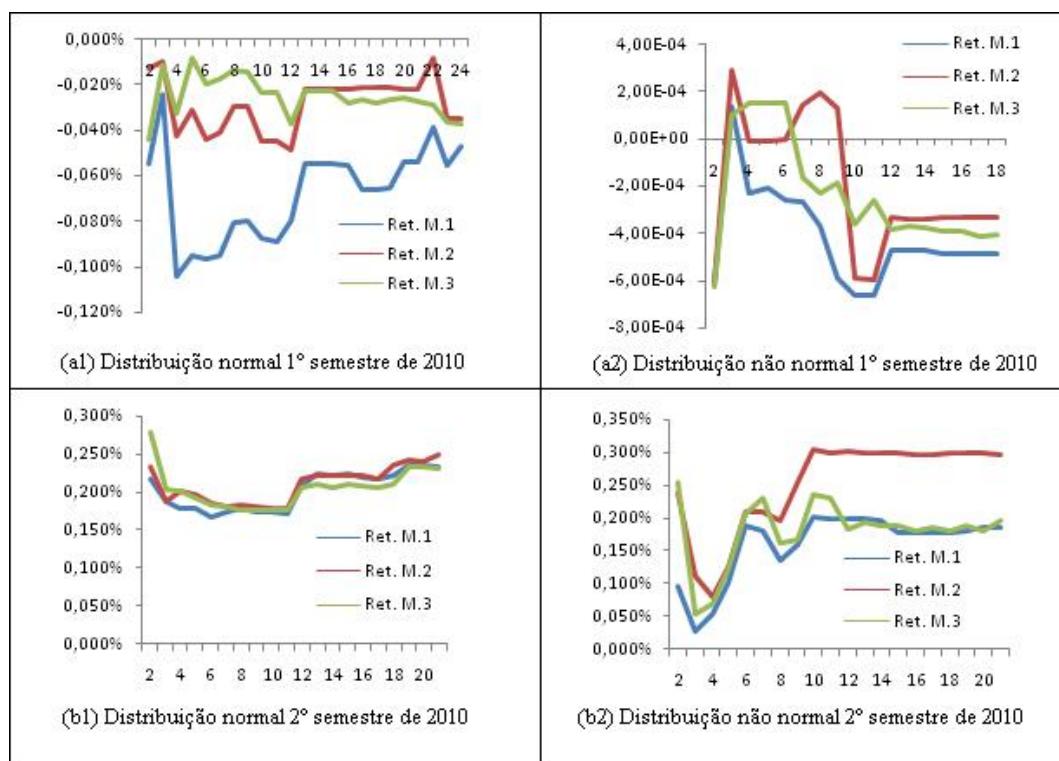


Figura 23: Retornos médios por carteira - 2010

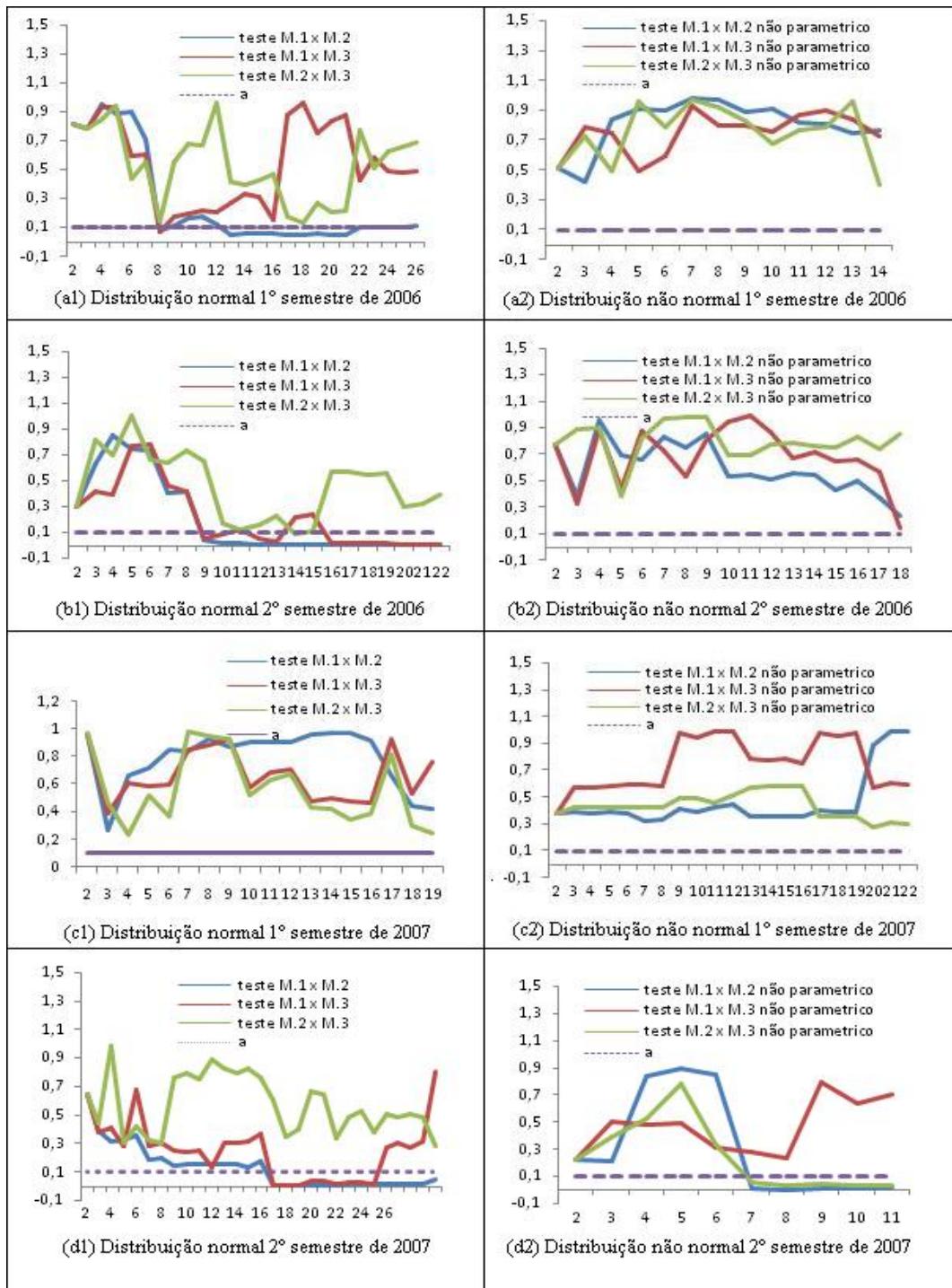


Figura 24: Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2006 e 2007

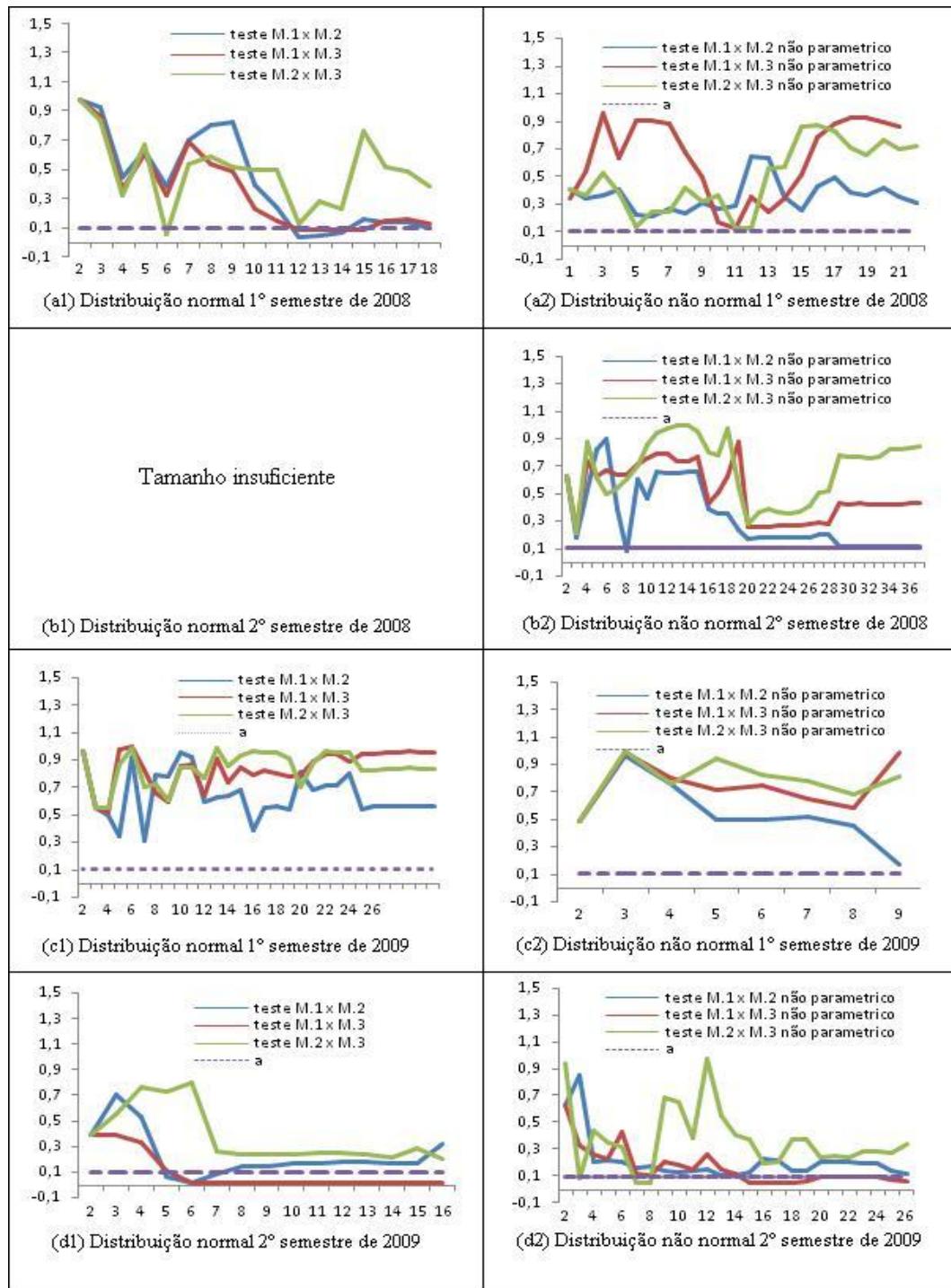
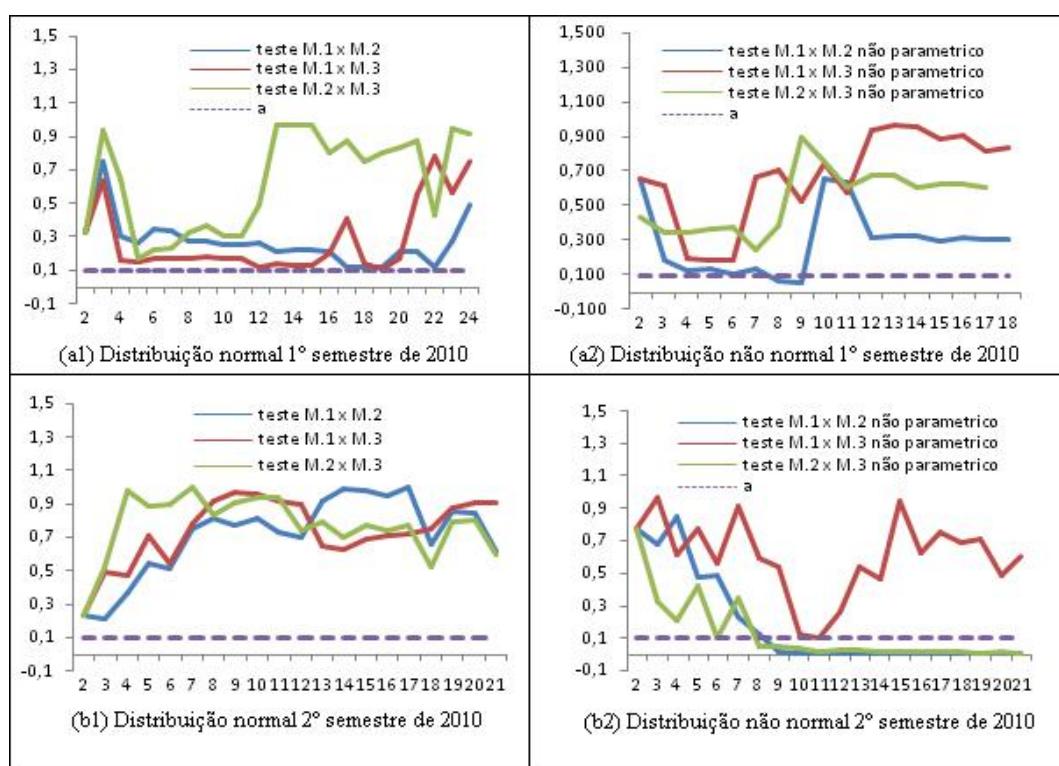


Figura 25: Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2008 e 2009



**Figura 26:** Níveis descritivos dos testes de diferenças - 2010

## H Apêndice - Análise dos retornos geral

Tabela 82: Comparações retornos das carteiras M.1 x M.2 (dist. normal)

Ano	Semestre	Distribuição	Média	Mediana	Correlação	Teste 1 (valor p)	Teste 2 (valor p)
2006	1	M.1	0,01%	-0,01%	0,784 (0,00)	0,000	-
2006	1	M.2	0,05%	0,03%	-	-	-
2006	2	M.1	0,20%	0,22%	0,862 (0,00)	0,000	-
2006	2	M.2	0,25%	0,29%	-	-	-
2007	1	M.1	0,13%	0,12%	0,612 (0,01)	0,000	-
2007	1	M.2	0,11%	0,10%	-	-	-
2007	2	M.1	-0,04%	-0,02%	0,905 (0,00)	0,000	-
2007	2	M.2	0,03%	0,03%	-	-	-
2008	1	M.1	-0,06%	-0,04%	0,963 (0,00)	0,009	-
2008	1	M.2	-0,04%	0,02%	-	-	-
2008	2	M.1	-	-	-	-	-
2008	2	M.2	-	-	-	-	-
2009	1	M.1	0,08%	0,07%	0,811 (0,00)	0,211	-
2009	1	M.2	0,08%	0,07%	-	-	-
2009	2	M.1	0,22%	0,21%	-0,429 (0,11)	-	0,000
2009	2	M.2	0,35%	0,36%	-	-	-
2010	1	M.1	-0,07%	-0,07%	-0,249 (0,25)	-	0,000
2010	1	M.2	-0,03%	-0,03%	-	-	-
2010	2	M.1	0,20%	0,21%	0,863 (0,00)	0,940	-
2010	2	M.2	0,20%	0,21%	-	-	-

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\*Amostra insuficiente para análises.

**Tabela 83: Comparações retornos das carteiras M.1 x M.3 (dist. normal)**

Ano	Semestre	Distribuição	Média	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	M.1	0,01%	-0,01%	0,772 (0,00)	0,000	-
2006	1	M.3	0,07%	0,06%			
2006	2	M.1	0,20%	0,22%	0,926 (0,00)	0,000	-
2006	2	M.3	0,28%	0,32%			
2007	1	M.1	0,13%	0,12%	0,750 (0,00)	0,840	-
2007	1	M.3	0,14%	0,12%			
2007	2	M.1	-0,04%	-0,02%	0,870 (0,00)	0,000	-
2007	2	M.3	0,03%	0,04%			
2008	1	M.1	-0,06%	-0,04%	0,909 (0,00)	0,000	-
2008	1	M.3	-0,03%	-0,01%			
2008	2*	M.1	-	-	-	-	-
2008	2	M.3	-	-			
2009	1	M.1	0,08%	0,07%	0,887 (0,00)	0,280	-
2009	1	M.3	0,08%	0,06%			
2009	2	M.1	0,22%	0,21%	0,496 (0,06)	0,000	-
2009	2	M.3	0,29%	0,28%			
2010	1	M.1	-0,07%	-0,07%	0,667 (0,00)	0,000	-
2010	1	M.3	-0,03%	-0,02%			
2010	2	M.1	0,20%	0,21%	0,907 (0,00)	0,000	-
2010	2	M.3	0,21%	0,22%			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

**Tabela 84: Comparações retornos das carteiras M.2 x M.3 (dist. normal)**

Ano	Semestre	Distribuição	Média	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	M.2	0,05%	0,03%	-0,655 (0,00)	0,010	-
2006	1	M.3	0,07%	0,06%			
2006	2	M.2	0,25%	0,29%	0,930 (0,00)	0,000	-
2006	2	M.3	0,28%	0,32%			
2007	1	M.2	0,11%	0,10%	0,472 (0,05)	0,000	-
2007	1	M.3	0,14%	0,12%			
2007	2	M.2	0,03%	0,03%	0,915 (0,00)	0,970	-
2007	2	M.3	0,03%	0,04%			
2008	1	M.2	-0,04%	0,02%	0,887 (0,00)	0,460	-
2008	1	M.3	-0,03%	-0,01%			
2008	2*	M.2	-	-	-	-	-
2008	2	M.3	-	-			
2009	1	M.2	0,08%	0,07%	0,797 (0,00)	0,340	-
2009	1	M.3	0,08%	0,06%			
2009	2	M.2	0,35%	0,36%	0,014 (0,96)	-	0,000
2009	2	M.3	0,29%	0,28%			
2010	1	M.2	-0,03%	-0,03%	-0,073 (0,74)	-	0,680
2010	1	M.3	-0,03%	-0,02%			
2010	2	M.2	0,20%	0,21%	0,952 (0,00)	0,010	-
2010	2	M.3	0,21%	0,22%			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

**Tabela 85: Comparações retornos das carteiras M.1 x M.2 (dist. não normal)**

Ano	Semestre	Modelos	Media	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p ) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p ) <sup>3</sup>
2006	1	M.1	0,08%	0,08%	0,956 (0,00)	0,004	-
2006	1	M.2	0,10%	0,10%			
2006	2	M.1	0,27%	0,27%	0,617 (0,01)	0,001	-
2006	2	M.2	0,30%	0,31%			
2007	1	M.1	0,11%	0,10%	0,165 (0,47)	-	0,000
2007	1	M.2	0,18%	0,18%			
2007	2	M.1	-0,04%	-0,05%	0,952 (0,00)	0,005	-
2007	2	M.2	0,02%	0,01%			
2008	1	M.1	-0,01%	-0,04%	0,936 (0,00)	0,000	-
2008	1	M.2	0,04%	0,02%			
2008	2	M.1	-0,23%	-0,21%	0,945 (0,00)	0,000	-
2008	2	M.2	-0,17%	-0,14%			
2009	1	M.1	0,10%	0,10%	0,810 (0,02)	0,012	-
2009	1	M.2	0,13%	0,12%			
2009	2	M.1	0,25%	0,25%	0,875 (0,00)	0,000	-
2009	2	M.2	0,32%	0,31%			
2010	1	M.1	-0,04%	-0,05%	0,721 (0,00)	0,000	-
2010	1	M.2	-0,02%	-0,03%			
2010	2	M.1	0,16%	0,18%	0,751 (0,00)	0,000	-
2010	2	M.2	0,25%	0,30%			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

**Tabela 86: Comparações retornos das carteiras M.1 x M.3 (dist. não normal)**

Ano	Semestre	Modelos	Média	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	M.1	0,08%	0,08%	0,725 (0,01)	0,003	-
2006	1	M.3	0,11%	0,11%			
2006	2	M.1	0,27%	0,27%	0,551 (0,02)	0,004	-
2006	2	M.3	0,28%	0,29%			
2007	1	M.1	0,11%	0,10%	0,206 (0,37)	-	0,000
2007	1	M.3	0,14%	0,13%			
2007	2	M.1	-0,04%	-0,05%	0,903 (0,00)	0,114	-
2007	2	M.3	-0,05%	-0,08%			
2008	1	M.1	-0,01%	-0,04%	0,579 (0,01)	0,028	-
2008	1	M.3	0,01%	0,01%			
2008	2	M.1	-0,23%	-0,21%	0,919 (0,00)	0,000	-
2008	2	M.3	-0,14%	-0,10%			
2009	1	M.1	0,10%	0,10%	0,762 (0,03)	0,012	-
2009	1	M.3	0,16%	0,16%			
2009	2	M.1	0,25%	0,25%	0,732 (0,00)	0,000	-
2009	2	M.3	0,35%	0,36%			
2010	1	M.1	-0,04%	-0,05%	0,650 (0,01)	0,001	-
2010	1	M.3	-0,02%	-0,04%			
2010	2	M.1	0,16%	0,18%	0,614 (0,00)	0,007	-
2010	2	M.3	0,18%	0,19%			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.

**Tabela 87: Comparações retornos das carteiras M.2 x M.3 (dist. não normal)**

Ano	Semestre	Modelos	Média	Mediana	Correlação <sup>1</sup>	Teste 1 (valor p) <sup>2</sup>	Teste 2 (valor p) <sup>3</sup>
2006	1	M.2	0,10%	0,10%	0,687 (0,01)	0,001	-
2006	1	M.3	0,11%	0,11%			
2006	2	M.2	0,30%	0,31%	0,813 (0,00)	0,013	-
2006	2	M.3	0,28%	0,29%			
2007	1	M.2	0,18%	0,18%	0,924 (0,00)	0,000	-
2007	1	M.3	0,14%	0,13%			
2007	2	M.2	0,02%	0,01%	0,915 (0,00)	0,005	-
2007	2	M.3	-0,05%	-0,08%			
2008	1	M.2	0,04%	0,02%	0,666 (0,00)	0,006	-
2008	1	M.3	0,01%	0,01%			
2008	2	M.2	-0,17%	-0,14%	0,887 (0,00)	0,000	-
2008	2	M.3	-0,14%	-0,10%			
2009	1	M.2	0,13%	0,12%	0,690 (0,06)	0,017	-
2009	1	M.3	0,16%	0,16%			
2009	2	M.2	0,32%	0,31%	0,648 (0,00)	0,000	-
2009	2	M.3	0,35%	0,36%			
2010	1	M.2	-0,02%	-0,03%	0,634 (0,00)	0,407	-
2010	1	M.3	-0,02%	-0,04%			
2010	2	M.2	0,25%	0,30%	0,423 (0,06)	0,000	-
2010	2	M.3	0,18%	0,19%			

<sup>1</sup>Nível descritivo em parênteses, <sup>2</sup>Teste Wilcoxon amostras relacionadas, <sup>3</sup>Teste Wilcoxon amostras independentes.

\* Amostra insuficiente para análises.