

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**APREÇAMENTO RACIONAL DE PROJETOS COM
FLEXIBILIDADE E INCERTEZAS EXÓGENAS:**

Uma Aplicação em Opções Reais

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia, Administração e Ciências Contábeis da Universidade de São Paulo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Administração.

Rodrigo Rodrigues Celoto

Orientador:

Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

Banca Examinadora/Julgadora – Qualificação:

Prof. Dr. José Roberto Securato
Prof. Dr. José Augusto Giesbrecht da Silveira

Banca Examinadora/Julgadora - Defesa:

Prof. Dr. Carlos Roberto Azzoni
Prof. Dr. Sérgio Giovanetti Lazzarini

AGOSTO, 2004

SUMÁRIO

1	Introdução	4
1.1	Mini Currículo	4
1.2	Agradecimentos	5
1.3	Resumo	6
1.4	Abstract	6
1.5	Lista de Acrônimos	7
1.6	Glossário	7
1.7	Situação-Problema	8
1.8	Objetivo do Trabalho	10
1.9	Estrutura do Trabalho	11
2	Avaliação de Projetos sem Flexibilidade.....	13
2.1	Apreçamento Absoluto e Apreçamento Relativo	13
2.2	Modelo de um Período.....	14
2.2.1	Condição de Não-Arbitragem e Valor do Projeto.....	20
2.2.2	Oportunidades de Arbitragem e Investimento	23
2.2.3	Valor e Medida Martingale.....	25
2.2.4	Beta: Uma Medida de Risco Relativo.....	28
2.3	Avaliação de Projetos em Vários Períodos.....	33
2.3.1	Estrutura de Avaliação em Vários Períodos	33
2.3.2	Opções Reais ou Projetos com Flexibilidade.....	37
2.4	Divisão entre Incertezas Privadas e de Mercado	38
3	Avaliação em Mercados sem Divisibilidade e Incompletos	41
3.1	Três Abordagens Equivalentes de Apreçamento	41
3.1.1	Preço-reserva.....	42
3.1.2	Preço-projeção	43
3.1.3	Preço-entrópico	46
3.2	Exemplo Ilustrativo em Mercados Completos e com Incertezas Replicáveis ..	48
3.2.1	Mercado Completo.....	48
3.2.2	Mercado Incompleto com Incertezas Replicáveis	52
3.3	Avaliação de Ativos sem Divisibilidade: o Preço-compra	53
3.4	Avaliação em Mercados Incompletos.....	54
3.5	Exemplo Ilustrativo em Mercados Incompletos	56
4	Estrutura Geral para Apreçamento de Ativos com Flexibilidade – Opções Reais ...	58
4.1	Exemplos de Opções Reais.....	58
4.1.1	Opção de Adiar	61
4.1.2	Opção de Expandir.....	62
4.1.3	Opção de Contrair	63
4.1.4	Opção de Fechar	64
4.1.5	Opção de Abandonar.....	64
4.1.6	Opção de Alternar Uso (Insumos e Produtos – “Inputs e Outputs”)	65
4.1.7	Opções de Crescimento.....	67
4.1.8	Opção de Esperar a Queda do Custo de Capital	68
4.2	Abordagem Geral: Mudanças de Modo de Operação.....	70

4.2.1	Exemplo	71
4.2.2	Valor dos Projetos com Tecnologia Rígida	73
4.2.3	Valor dos Projetos com Flexibilidade: Sem Custos de Mudança	73
4.2.4	Valor dos Projetos com Flexibilidade: Com Custos de Mudança	75
4.2.5	Valor dos Projetos com Flexibilidade: Uma Generalização	81
5	Modelagem das Incertezas	84
5.1	Modelando Processos Estocásticos	84
5.1.1	Movimento Browniano Geométrico	84
5.1.1.1	Custo de Capital e Taxa Média de Retorno	84
5.1.1.2	Modelando Incertezas	86
5.1.1.3	Características do Processo	86
5.1.1.4	Modelando Incertezas Correlacionadas	87
5.1.1.5	Modelando Incertezas Comercializadas Risco-Neutro	89
5.1.1.6	Modelando Incertezas Não-Comercializadas Risco-Neutro	90
5.1.2	Reversão à Média	91
5.1.2.1	Evolução do Fluxo de Caixa e Taxa de Desconto	91
5.1.2.2	Modelando Incertezas	92
5.1.2.3	Características do Processo	92
5.1.2.4	Modelando Incertezas Correlacionadas	94
5.1.2.5	Modelando Incertezas para Apreçamento Risco-Neutro	94
5.2	Decompondo a Estrutura de Risco do Projeto	95
5.2.1	Decompondo o Risco do Projeto	95
5.2.2	Modelagem de Risco do Fluxo de Caixa	98
5.2.2.1	Estrutura do Fluxo de Caixa	98
5.2.2.2	Risco da Margem de Contribuição	99
5.2.2.3	Risco do Resultado Operacional Líquido	102
5.2.2.4	Risco do Fluxo de Caixa Operacional	104
5.2.2.5	Risco do Fluxo de Caixa	107
5.2.2.6	Decomposição Final do Risco do Projeto	108
5.2.3	A Importância da Decomposição das Incertezas	109
5.3	Estimando Prêmios de Incertezas Não-Comercializadas	111
5.3.1	O Preço-Projeção	111
5.3.2	Calculando os Prêmios	112
6	Duas Abordagens de Modelagem de Opções Reais	115
6.1	Fórmula Geral	115
6.1.1	Abordagem do Fluxo de Caixa (AFC)	116
6.1.2	Abordagem do Valor Presente (AVP)	119
6.1.3	Equívocos Comuns na AVP	125
6.1.3.1	ACVP Usando o Exemplo	125
6.1.3.2	Ajustando o Exemplo para a Correta AVP	130
6.1.3.3	Estimando Corretamente a Volatilidade do Valor Presente	131
6.2	Escolhendo entre as Abordagens: AVP ou AFC?	133
7	Conclusão	134
	Bibliografia	136

1 Introdução

1.1 *Mini Currículo*

Nome: Rodrigo Rodrigues Celoto.

Data: 30/10/1975.

Local: São Paulo / SP – Brasil.

Formação Acadêmica:

- Bacharel em Economia, FEA/USP, Formatura em 1998.
- Ingresso no Curso de Mestrado do PPGA-FEA/USP: 2002.

Experiência Profissional: 5 anos de experiência em Consultoria Econômico-Financeira.

1.2 Agradecimentos

Agradeço especialmente ao meu orientador nesse trabalho, o Prof. José de Oliveira Siqueira. Além de sua inegável competência teórica para orientar meu trabalho, sua enorme dedicação me ajudou na busca de bibliografia e software, na estruturação e revisão do texto e no direcionamento para a solução de problemas teóricos que surgiram ao longo do trabalho. Sua dedicação à vida acadêmica é para mim uma referência.

Quero agradecer aos professores que ao longo do curso também me ajudaram a construir os fundamentos para essa dissertação. Ao Prof. José Roberto Securato, que me permitiu escolher temas relacionados a opções reais para os trabalhos de curso de suas três disciplinas de finanças que cursei. Ao Prof. Abraham Sin Oih Yu, que me desafiou a desvendar o trabalho de SMITH & NAU[37] no seu curso de Análise da Decisão em Condição de Incerteza Aplicada à Administração, que foi um marco importante no preparo teórico para este trabalho.

Agradeço a José Carlos Garcia Franco, da Onward Inc., pelos ensinamentos de modelagem de opções reais e processos estocásticos. Devido à sua generosidade, pude desfrutar de sua enorme experiência em modelagem de opções reais.

Também agradeço aos membros da banca de qualificação e defesa, os Profs. Carlos Roberto Azzoni, José Augusto Giesbrecht da Silveira, José Roberto Securato e Sérgio Giovanetti Lazzarini.

1.3 *Resumo*

Neste trabalho é apresentado o suporte teórico necessário para a aplicação do apuração de opções reais com incertezas exógenas, inclusive com incertezas não-comercializadas ou em mercados incompletos. Em seguida, o processo de modelagem de opções reais é analisado, sugere-se uma estrutura de modelagem de projetos com flexibilidade a partir de suas incertezas básicas, e comparam-se as duas principais abordagens atuais de modelagem de opções reais.

1.4 *Abstract*

In this work is presented the theoretical support needed for the application of real options pricing with exogenous uncertainties, include non-traded uncertainties and incomplete market uncertainties. It is also analyzed the process of real options modeling, suggesting a framework of project modeling with flexibility from its basic uncertainties, and it is compared the two main approaches for valuing real options.

1.5 Lista de Acrônimos

MBG – Movimento Browniano Geométrico

MRMG – Movimento de Reversão à Média Geométrico

AFC – Abordagem do Fluxo de Caixa

AVP – Abordagem do Valor Presente

ACVP – Abordagem Comum do Valor Presente

1.6 Glossário

Segue a definição de alguns dos termos que serão usados no texto com bastante frequência:

INCERTEZA EXÓGENA – incerteza de um projeto que não é afetada pela decisão do investidor, comum em mercados com concorrência perfeita. Quando a incerteza é afetada pela decisão do investidor, a incerteza é dita ENDÓGENA, comum em mercados não competitivos.

PROJETO – investimento em ativo real, que resulta na expectativa de recebimento futuro de fluxo de caixa decorrente de desembolso inicial para aquisição. Neste texto PROJETO será usado como sinônimo de ATIVO, que pode ser um investimento em um ativo financeiro. Ver MATOS[23].

FLEXIBILIDADE – possibilidade de tomar decisões futuras contingenciadas. Essas decisões contingenciadas criam o valor das opções reais. OPÇÕES REAIS e PROJETOS COM FLEXIBILIDADE serão usados como sinônimos neste trabalho. Ver TRIGEORGIS & KULATILAKA[41].

RISCO – incerteza do fluxo de caixa futuro do investidor associada a um projeto ou ativo. O trabalho de SIQUEIRA[35] discute exaustivamente as diferentes definições de

RISCO e INCERTEZA. No entanto, especialmente para efeito do escopo deste trabalho, INCERTEZA e RISCO serão usados como sinônimos. Ver MATOS[23].

PROBABILIDADE RISCO-NEUTRO – distribuição de probabilidade neutralizadora do preço da incerteza, que, se usada para cálculo da esperança do fluxo de caixa de um ativo, deixa um investidor averso ao risco indiferente a investir nesse ativo ou em um ativo livre de risco. Ver SIQUEIRA[34].

MERCADO COMPLETO – situação onde todas as incertezas de mercado podem ser protegidas ou replicadas. Como será apresentado com mais precisão no capítulo 2, isso implica em número de estados da natureza (k) igual ao número de ativos (n). Quando $n < k$ (mercado incompleto), parte das incertezas podem ser protegidas ou replicadas, tendo-se nessa situação mercado incompleto com incertezas replicáveis. Muitas vezes se confunde a possibilidade de replicação de incertezas com completude do mercado. Para evitar esse problema, usa-se nesse trabalho em alguns momentos para reforçar a situação em que $k=n$, o termo MERCADOS ESTRITAMENTE COMPLETOS. Ver MATOS[23].

1.7 Situação-Problema

O apreçamento de projetos com flexibilidade (com opções reais) é uma área relativamente nova de pesquisa em Finanças, Economia e Orçamento de Capital em Administração.

A utilização do Valor Presente Líquido (VPL) sempre foi questionada pelos administradores por ignorar o “valor estratégico” dos projetos. Isso porque o valor da flexibilidade administrativa no tempo é ignorada pelo VPL. Flexibilidade administrativa ou opção real consiste na capacidade de o administrador alterar a estratégia ou modo de operação do projeto à medida que surjam informações que suportem a mudança.

No VPL está implícita a hipótese de que o administrador está assumindo uma única estratégia até o final do projeto, sem mudança futura, mesmo que a informação se modifique no decorrer do tempo. Logicamente, essa hipótese traz problemas de apreçamento para grande parte dos projetos, subestimando seu valor.

Apesar do desenvolvimento da área de opções reais estar ligado às limitações no VPL, o crescimento da importância da área de opções reais está também ligado a outros três fatores, como apresentado em TRIGEORGIS & SCHWARTZ[42]:

- Desenvolvimento da teoria de apreçamento de opções financeiras que formaram a base teórica para o apreçamento dos ativos sob contingência;
- O desenvolvimento dos microcomputadores permitiu simulações e otimização numérica a custo baixo, o que tornou mais fácil e flexível o apreçamento de opções reais;
- O crescimento da importância na economia moderna de setores com alta incerteza (pesquisa farmacêutica, novos produtos de consumo, tecnologia etc.) combinada com flexibilidade de tomada de decisão (expandir, adiar, abandonar etc.), demandou dos administradores da área de orçamento de capital uma abordagem diferente do tradicional Valor Presente Líquido.

A visão tradicional de separar o orçamento de capital da definição estratégica nas empresas está muito associada à limitação do VPL. Usando a abordagem de opções reais, essa divisão não faz sentido. Isso porque, no apreçamento de opções, não somente determina-se o valor adequado do projeto mas também a estratégia ótima no tempo, à medida que surjam informações adicionais. Dessa forma, a nova abordagem permite ao administrador trabalhar melhor suas estratégias sob contingência, ou seja, buscar estratégias ótimas para um determinado conjunto de informação que resultem em um valor máximo para o investidor.

Um exemplo tradicional em administração é a estratégia utilizada pelo sistema Toyota de produção, que superou o sistema tradicional de Detroit. A flexibilidade de produção introduzida pelo novo sistema era pouco entendida quando se pensava na otimização de custos somente em termos de ganho de escala, ou seja, encontrar um nível de produção no ponto mínimo da curva de custo médio. A abordagem tradicional da Microeconomia, de trabalhar no ponto mínimo da curva de custo médio, era correta nos tempos nos quais a incerteza de mercado era relativamente pequena devido ao fato de o produto ser novo, de grande aceitação e relativa baixa concorrência.

Quando o mercado de automóveis amadureceu, o risco de um novo produto no mercado cresceu exponencialmente e a abordagem de criar um planta de grande escala

com baixo custo médio não era necessariamente a melhor abordagem econômica. Como calcular o valor econômico de plantas flexíveis com custo médio maior, relativamente a plantas rígidas com custo médio menor?

A metodologia de opções reais permite avaliar as flexibilidades desse tipo cada vez mais e em maior número de situações. Utiliza-se essa abordagem para apreçamento, escolha de alternativas e determinação da estratégia ótima à medida em que as incertezas se resolvem no tempo. Dessa forma, como argumentado em MYERS[27], a metodologia de apreçamento de opções reais deverá cada vez mais estar presente nas empresas, seja para efeito de orçamento de capital, seja para a definição de questões estratégicas.

1.8 Objetivo do Trabalho

O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia de apreçamento de projetos com flexibilidade administrativa ou com opções reais, que seja abrangente o suficiente para ser aplicável na maior parte das situações. Esse objetivo está limitado a projetos com incerteza exógena, ou seja, onde a ação do agente (investidor) não afeta as incertezas envolvidas. Isso é equivalente a dizer que os modelos aqui tratados são válidos em situações de concorrência perfeita, portanto, não embute jogos estratégicos presentes em modelos não competitivos.

Existe atualmente uma razoável quantidade de livros para aplicação de apreçamento de opções reais. No entanto, alguns livros pecam pela fraco suporte teórico das abordagens sugeridas ou pela limitação da abordagem a alguns casos específicos. Outros livros, apesar de teoricamente mais alicerçados, pecam em não apresentar uma abordagem facilmente aplicável.

Uma vez efetuada a estruturação teórica, o trabalho segue o seu objetivo final, que é a engenharia de apreçamento de projetos com flexibilidade. Será apresentada uma estrutura geral de apreçamento de projetos, delimitando todo o processo de apreçamento. A proposta sugerida se utilizará basicamente de simulação em lugar de soluções fechadas ou soluções numéricas, a partir de equações diferenciais por três motivos:

- Custo baixo do processamento (em termos de tempo e dinheiro) dessas simulações nos modernos microcomputadores;

- Facilidade e flexibilidade de modelagem e apreçamento de projetos com flexibilidade usando simulação em softwares ligados à planilha de cálculo, principalmente quando há várias incertezas subjacentes ao projeto;
- Dificuldade de se calcular equações diferenciais para um projeto com mais de duas incertezas.

Portanto, espera-se do resultado final do trabalho uma metodologia de apreçamento que seja teoricamente adequada e de fácil implementação prática na Avaliação de Projetos com Flexibilidade.

1.9 Estrutura do Trabalho

O segundo capítulo apresentará a fundamentação teórica para apreçamento de opções reais em mercados completos. Na primeira parte será apresentada a estrutura teórica para o apreçamento de projetos sem flexibilidade, ou seja, sem opções reais. Na segunda parte será considerado o apreçamento de projetos com flexibilidade. Na terceira parte serão feitas considerações acerca da divisão entre incertezas privadas e de mercado, divisão essa importante do ponto de vista prático.

No terceiro capítulo, apresentar-se as três alternativas de apreçamento-relativo equivalentes em mercados completos: Preço-reserva, Preço-projeção e Preço-entrópico. Também apresenta-se o problema de apreçamento em mercados sem divisibilidade e em mercados incompletos, sendo o último um dos principais problemas de apreçamento de opções reais. Pelo fato de não existir preço único de não-arbitragem em mercados incompletos, as três alternativas acima, que são equivalentes em mercados completos, tornam-se boas alternativas de apreçamento em mercados incompletos.

O quarto capítulo mostra como surgem as opções reais nas decisões de investimento das empresas, e apresenta as principais decisões de investimento que embutem opções reais, tais como expandir, contrair, abandonar etc. Também será apresentada uma estrutura geral de apreçamento de opções reais baseada em TRIGEORGIS & KULATILAKA[41], que consiste em modelar o projeto em modos de operação, com possibilidade de mudanças entre os modos de operação no decorrer do projeto.

No quinto capítulo serão feitas considerações sobre a modelagem das incertezas. O foco será dado nos dois processos estocásticos mais utilizados em projetos: movimento browniano geométrico e processo geométrico de reversão à média. Os objetivos neste serão:

- Apresentar a natureza de cada um dos três processos estocásticos acima;
- Como fazer o ajuste econômico do prêmio de risco (ou ajuste no “drift”), para que a simulação permita uma avaliação risco-neutro;
- Como modelar os processos estocásticos adequadamente, inclusive na presença de correlação entre os processos;

Além dos aspectos relacionados à modelagem de processos estocásticos, será considerada no capítulo cinco a questão da decomposição das incertezas de um projeto. Essa parte é uma contribuição do trabalho ao sugerir uma estrutura de modelagem a partir das incertezas básicas do projeto (preço, quantidade demandada e custo variável unitário), que são afetadas por três tipos de incertezas secundárias (alavancagem operacional, alavancagem de capital de giro e alavancagem financeira). A partir da modelagem sugerida, é possível identificar o efeito de cada fonte de incerteza (básica ou secundária) no custo de capital do projeto e no valor das opções reais.

O sexto capítulo se concentrará na questão prática de apreçamento de projetos com opções reais, focando-se no processo de apreçamento de projetos com flexibilidade. Serão comparadas as abordagens da Modelagem do Valor Presente e a Modelagem do Fluxo de Caixa. Há uma ausência na literatura da comparação entre as duas abordagens, e essa parte do trabalho faz uma contribuição neste aspecto. Conclui-se que as duas abordagens são equivalentes, mas que o procedimento mais popular (modelagem pelo Valor Presente) não é empregado corretamente e resulta em superestimação das opções reais.

2 Avaliação de Projetos sem Flexibilidade

2.1 Apreçamento Absoluto e Apreçamento Relativo

A decisão de investimento por parte do indivíduo é uma decisão complexa. Essa decisão consiste em investir em um projeto que envolve um desembolso inicial para adquirir o direito de recebimento futuro de um fluxo de caixa.

Primeiramente, o indivíduo deve considerar a taxa de troca (“trade-off”) entre seu consumo presente e futuro. Quanto mais investir hoje, mais poderá consumir amanhã, mas resultará em sacrifício do consumo presente. Portanto, o indivíduo deverá saber a sua taxa de troca entre consumo presente e futuro, ou determinar o mínimo de retorno que os investimentos terão que lhe proporcionar de modo a valer o sacrifício do consumo imediato.

Em seguida, o indivíduo deverá considerar o risco do fluxo de caixa do investimento, porque a maioria dos investimentos não tem fluxos de caixa previstos com certeza. A incerteza quanto ao futuro do fluxo de caixa do projeto representa o risco do consumo futuro do indivíduo. Este deverá tecer considerações sobre suas preferências não somente quanto ao consumo presente e futuro, mas também sobre suas preferências ao risco.

E, por fim, o investidor deverá considerar a relação entre o retorno e o risco dos projetos, inclusive seu efeito quando se compõe um portfólio de projetos ou ativos. Em lugar de considerar separadamente o risco do projetos, este também deverá considerar seu efeito num portfólio na presença de vários outros ativos.

A teoria de investimento tenta estruturar todas as questões da decisão de investimento acima e determinar os preços em equilíbrio de mercado. COCHRANE[3] apresenta uma divisão da teoria de investimento para a determinação dos preços dos ativos em dois segmentos: o apreçamento absoluto e o apreçamento relativo.

No apreçamento absoluto a teoria está preocupada com todo o processo de decisão do investidor, fazendo as considerações sobre a demanda de investimento (preferências dos investidores em termos de consumo presente e futuro e risco) e oferta de investimento (disponibilidades de projetos, fatores de risco macro e microeconômicos). Portanto, o preço de uma ativo na teoria embute várias questões, tais como:

- Preferências dos investidores em termos de custo de oportunidades de consumo presente e futuro;
- Preferências dos investidores em termos de utilidade marginal da renda ou aversão ao risco;
- Oportunidades de investimento ou projetos disponíveis na economia, em termos de retorno e risco (micro e macroeconômicos);
- Efeito da composição do risco dos investimentos quando considerados em conjunto, também chamado efeito diversificação.

No apreçamento relativo, a teoria de investimento é bem menos ambiciosa. Nessa abordagem procura-se apreçar um ativo *dado* o preço dos outros ativos. Não se questiona a origem ou os fatores de determinação dos preços, ou os seus fundamentos. A abordagem de apreçamento de Black-Sholes é um exemplo da abordagem de apreçamento relativo. Será utilizado nesse trabalho como sinônimo de apreçamento relativo o termo engenharia de apreçamento, uma vez que o apreçamento relativo passa a ser mais uma questão técnica do que uma questão teórica.

Apesar do enfoque desse trabalho ser o apreçamento relativo (engenharia de apreçamento), esse capítulo apresentará parte importante da estrutura teórica de apreçamento absoluto, por entender que esta dá suporte para discussões importantes nos capítulos seguintes, tais como apreçamento relativo em mercados incompletos. Portanto, esse capítulo poderá ser considerado “desconexo” dos demais, mas foi considerada importante sua presença porque sua estrutura teórica de apreçamento absoluto permeia as questões de engenharia de apreçamento dos capítulos seguintes.

2.2 Modelo de um Período

Essa seção e a seguinte estão baseadas no primeiro capítulo de MATOS[23]. Será assumido que o mercado de capitais existe e que a decisão do indivíduo é efetuada para um período.

Incerteza ou risco numa economia de um período significa que o indivíduo tem de decidir se investe no período $t=0$ para receber no período $t=1$ um fluxo de caixa incerto, dependendo das condições ao final do período.

A incerteza é descrita como sendo um conjunto de estados possíveis finitos, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, $k > 0$, sendo que cada estado ω_j ocorre com probabilidade $p(\omega_j)$, aqui descrita como p_j . Se $X \in R$, é uma variável aleatória em Ω , então:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] \equiv \sum_{j=1}^k x_j(\omega_j)p(\omega_j), \text{ sendo } \mathbb{P} = \{p(\omega_j)\}_{j=1}^k$$

$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ representa a esperança de X na medida de probabilidade \mathbb{P} .

A noção de utilidade em condição de certeza para a decisão sobre o consumo presente e futuro, deve ser redefinida sob condição de incerteza. Em condição de incerteza, o indivíduo deverá decidir entre consumo presente e futuro, mas também sua exposição ao risco.

A função de utilidade aqui considerada, $U(x, Y)$, é estritamente crescente e diferenciável com respeito ao consumo presente, x^1 , e ao consumo futuro, Y . Sob condições de incerteza, o consumo futuro, Y , é uma variável aleatória.

Seja $Y \in R$ o plano de consumo (ou seja, o vetor de possibilidades de consumo no período $t=1$), com o j -ésimo componente $Y_j \equiv Y(\omega_j)$ sendo o consumo no estado j . A função de utilidade desejada é uma função $U(x, Y)$ definida em R , permitindo definir preferências em diferentes possibilidades de consumo, de forma que se:

$$U(x, Y) > U(x, Z)$$

o indivíduo prefere o plano de consumo Y a Z .

Uma função utilidade bem aceita para representar decisões em condição de incerteza é a função de utilidade do tipo *von Neumann-Morgenstern*,

¹ x será representado em letra minúscula por não ser uma variável aleatória.

$$\mathbb{E}_p[U(x, Y)] = \sum_{j=1}^k U(x, y_j) p_j$$

também conhecida como *utilidade esperada*.

O equivalente certo de um plano de consumo incerto Y pode ser definido como um plano de consumo certo \tilde{y} com a mesma utilidade esperada que Y . Em outras palavras

$$\mathbb{E}[U(x, Y)] = U(x, \tilde{y})$$

Dessa forma:

$$\tilde{y} = U^{-1}\{E[U(x, Y)]\}$$

Um agente é considerado averso ao risco quando se, para um plano de consumo Y , o equivalente certo é menor que $\mathbb{E}[Y]$, ou seja:

$$\mathbb{E}[U(x, Y)] < U[x, \mathbb{E}(Y)]$$

Isso significa que a função de utilidade deve ser côncava. Se, por outro lado, um agente tem uma função de utilidade convexa, este é dito propenso ao risco. O agente risco-neutro é aquele indiferente entre uma cesta de consumo incerta e uma cesta de consumo certa (com certeza). Nesse caso a função de utilidade é linear.

Considerando as dotações do indivíduo, seja $Y_j \equiv Y(w_j)$ a dotação recebida em $t=1$ no estado $j=1,2,\dots,k$. Consideremos também que o indivíduo, ao invés de ter um único projeto de investimento, este tenha uma cesta de n diferentes projetos de um período. Cada projeto tem um valor inicial V_i , $i=1,\dots,n$, que no tempo $t=1$ pagam $\Gamma_i(w_j)$ no estado $j=1,2,\dots,k$. Por simplicidade de notação, seja $\Gamma_i(w_j)$ representado por Γ_{ij} .

Esses valores definem um vetor de valores $V_{(n \times 1)} \in R^N$ e a matriz de pagamentos, $\Gamma_{n \times k}$, dada por:

$$\Gamma_{(n \times k)} = (\Gamma_{1(n \times 1)}, \Gamma_{2(n \times 1)}, \dots, \Gamma_{K(n \times 1)}) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1k} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \dots & \Gamma_{Nk} \end{bmatrix}$$

Onde $\Gamma_{j(n \times 1)}$ é vetor coluna n-dimensional de pagamentos dos projetos no estado j .

Uma decisão de investimento consiste em escolher um portfólio de projetos, isto é, um vetor $\theta_{(n \times 1)} \in R^n$ com um componente para cada projeto. Esse portfólio tem um valor de mercado $V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} = \sum_i V_i \theta_i$ e o vetor de pagamentos $\Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \in R^k$. Em outras palavras, para uma dada escolha de $\theta_{(n \times 1)}$, o consumo em t=0 do indivíduo será:

$$x(\theta)_{(1 \times 1)} = x_{(1 \times 1)} - V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \quad (2.1)$$

e o consumo em t=1 será:

$$Y(\theta)_{(k \times 1)} = Y_{(k \times 1)} + \Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \quad (2.2)$$

onde Y é um vetor k-dimensional, como j-ésimo componente Y_j sendo o consumo no estado j .

Do ponto de vista de consumo, esses pagamentos incertos trazem novos problemas. Suponhamos que o agente tenha uma meta de consumo $Y^*_{(k \times 1)}$ para t=1, então a escolha de $\theta_{(n \times 1)}$ deveria ser feita de tal forma a satisfazer:

$$\Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} = Y_{(k \times 1)} - Y_{(k \times 1)}^*$$

ou, mais explicitamente,

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & \dots & \Gamma_{n1} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{1k} & \Gamma_{2k} & \dots & \Gamma_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 - Y_1^* \\ Y_2 - Y_2^* \\ \dots \\ Y_k - Y_k^* \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A hipótese é que existam n projetos disponíveis, mas quando se analisa o problema de consumo, é razoável considerar apenas os projetos com pagamentos linearmente independentes. Em outras palavras, suponhamos que há um projeto k tal que seus pagamentos possam ser descritos como um combinação de pagamentos de outros projetos disponíveis. Portanto, manter um investimento no projeto k não é relevante, uma vez que tal posição pode ser substituída por um portfólio que seja uma combinação linear de outros projetos.

Matematicamente, isso significa que os projetos linearmente independentes formam a base do espaço vetorial que compreende todas as possibilidades de investimento decorrentes de todas as combinações lineares dos projetos da base. Todos os outros projetos podem ser replicados via uma combinação linear dos projetos existentes nesta base.

A existência de uma solução de um sistema de k equações em n variáveis independentes, como descrito em (2.3), depende apenas do número de linhas linearmente independentes da matriz $\Gamma_{(k \times n)}^T$ (ou o número de colunas linearmente independentes). É um resultado de álgebra linear que uma solução única $\theta_{(n \times 1)}$ ao sistema de equações anterior existe para qualquer vetor $(Y_{(k \times 1)} - Y_{(k \times 1)}^*)$ se, e somente se, $k=n$. Quando uma única solução é possível, o mercado é dito completo no período $t=0$, de outra forma, o mercado é dito incompleto neste período de tempo.

Completeness de mercado é equivalente a existir um número de projetos com pagamentos linearmente independentes igual ao número de estados k . Ou seja, o número de ativos cobre todo o espaço de incertezas.

Considerando que os investidores maximizam suas funções de utilidade, estritamente crescentes e côncavas, a escolha do portfólio ótimo pode ser caracterizada como segue: Seja $U(x, Y)$ tal função de utilidade. Então o portfólio ótimo deve maximizar a utilidade:

$$\theta^* = \arg \max E\{U[x(\theta), Y(\theta)]\}$$

sujeito às restrições (2.1) e (2.2). As condições de primeira ordem implicam

$$\frac{\partial E(U)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} V^T + E\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \Gamma^T\right) = 0$$

A interpretação é que a utilidade marginal diminuída, ao se fazer o investimento no portfólio no momento $t=0$, deve ser compensada por um aumento da utilidade esperada no momento $t=1$, relacionada aos pagamentos do investimento no portfólio no momento $t=1$.

Em outras palavras, a escolha ótima relaciona o vetor n -dimensional do valor dos projetos $V_{(n \times 1)}$, com a matriz $\Gamma_{(n \times k)}$ de futuros pagamentos pela relação:

$$V_{(n \times 1)} = \Gamma_{(n \times k)} \psi_{(k \times 1)} \quad (2.4)$$

Onde:

$$p_j \frac{\partial U / \partial Y_j}{\partial U / \partial x} \equiv \psi_j > 0 \quad (2.5)$$

dada a hipótese que as utilidades são estritamente crescentes.

Foi definido Γ_{ij} como o pagamento do projeto i no estado j . Suponhamos que os pagamentos cresçam para $\Gamma_{ij} + 1$. Isso resultaria num aumento no valor do projeto de V_i para $V_i + \psi_j$. Portanto, ψ_j mede a mudança no valor do projeto para um incremento de uma unidade no pagamento do estado j . Por esta razão, o vetor k -dimensional $\psi_{(k \times 1)}$ é chamado de vetor de preços-estado e ψ_j é chamado de preço do estado j .

Em um mercado completo, todas as incertezas subjacentes aos ativos têm um preço ou preços-estado. Nesse caso, o apreçamento se resume na multiplicação do vetor de pagamentos do ativo pelo vetor de preços-estado. Observemos que as incertezas dos ativos devem estar totalmente contidas na base que formam os preços-estado, ou seja, estas não acrescentam nenhuma incerteza ao espaço vetorial de oportunidades de investimento.

2.2.1 Condição de Não-Arbitragem e Valor do Projeto

Uma oportunidade de arbitragem é um portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ que permita que o consumo no momento zero não se reduza de $x_{(1 \times 1)}$, e, mesmo assim, o consumo futuro possa ser maior que $Y_{(k \times 1)}$, para uma dotação inicial do indivíduo de $(x_{(1 \times 1)}, Y_{(k \times 1)})$. Conseqüentemente, para agentes com funções de utilidades crescentes, esse portfólio seria ideal, ou seja, satisfação sem custo.

Por construção, uma oportunidade de arbitragem é um portfólio $\theta_{(n \times 1)}$, tal que $V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \leq 0$ ², e, portanto, pelo menos uma das componentes de $\theta_{(n \times 1)}$ é negativa. Isto significa que um investidor, mantendo tal portfólio, poderia vendê-lo no momento $t=0$ sem ter obrigação de cumprir algum pagamento em $t=1$. Se todos os agentes fossem otimizadores do tipo definido acima, haveria uma oferta infinita pelo portfólio e demanda zero por este. Portanto, nessas circunstâncias não poderiam existir oportunidades de arbitragem por muito tempo.

² O investidor recebe dinheiro imediatamente pela estratégia.

A falta de oportunidade de arbitragem implica que qualquer portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ tal que o vetor k-dimensional de pagamentos $\Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)}$ seja positivo em todos os estados da natureza deve também satisfazer $V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \geq 0$. Há um resultado matemático conhecido como lema de Farka³ que afirma que $V^T \theta \geq 0$ é verdade se, e somente se, existe um vetor $\lambda_{(k \times 1)} \in R_+^K$ de componentes estritamente positivos tais que

$$V_{(n \times 1)} = \Gamma_{(n \times k)} \lambda_{(k \times 1)}$$

Deste modo, pode-se identificar facilmente cada componente λ_j com os preços-estado ψ_j , no caso da função utilidade ser diferenciável. Notemos que chegou-se aos “preços-estado” λ_j independentemente da hipótese de diferenciabilidade da função utilidade assim como sua interpretação dos componentes de $\psi_{(k \times 1)}$ como preços-estado.

No entanto, para que os preços V_i caminhem em direção à impossibilidade de arbitragem, é necessário que os agentes sejam maximizadores e capazes de decidir entre investimentos incertos.

Em suma, a inexistência de oportunidades de arbitragem é equivalente à existência de um vetor estritamente positivo de preços-estado $\psi_{(k \times 1)} \in R_+^K$, tal que $V_{(n \times 1)} = \Gamma_{(n \times k)} \psi_{(k \times 1)}$.

Na ausência de oportunidades de arbitragem, um projeto é considerado redundante se $\Gamma_{kj} = \sum_{i \neq k} \alpha_i \Gamma_{ij}$ tem valor

$$V_k \sum_{j=1}^K \sum_{i \neq k} \alpha_i \Gamma_{ij} \psi_j = \sum_{i \neq k} \alpha_i V_i$$

Ou seja, na ausência de arbitragem, os únicos projetos que interessam são os projetos linearmente independentes, porque os outros não alteram as possibilidades de

³ Ver MATOS[23] e COPELAND[5].

consumo de um indivíduo por serem redundantes. Como vimos acima, matematicamente os projetos relevantes são os projetos que formam a base do espaço vetorial de possibilidades de investimento.

Isso significa que restringir o número de projeto àqueles com pagamentos linearmente independentes não afeta as possibilidades de consumo dos investidores em $t=0$ e $t=1$. De outra forma, a única razão para considerar portfólios redundantes, dado que eles têm pagamentos similares a um portfólio de outros projetos, seria se estes fossem mais baratos que o portfólio equivalente, permitindo um consumo inicial maior. Mas, no caso de ausência de arbitragem, isso é impossível.

Para que um vetor $\psi_{(k \times 1)}$ de preços-estado seja unicamente definido, isso irá depender do número de linhas independentes da matriz $\Gamma_{(n \times k)}$, definido como o número de projetos com pagamentos linearmente independentes, n . Novamente, se o mercado é completo no período $t=0$, o k -ésimo componente de $\psi_{(k \times 1)}$ resolve o sistema de $k=n$ equações linearmente independentes. Em outras palavras, o vetor de preços-estado é claramente definido como:

$$\psi_{(k \times 1)} = \Gamma_{(k \times n)}^{-1} V_{(n \times 1)}$$

Observe que os preços-estado num mercado completo são resultantes dos preços dos projetos. Os preços dos projetos por sua vez são resultantes da:

- Oferta de Projetos:
 - matriz de pagamentos dos projetos (oferta da economia);
 - da interação (dependência) dos pagamentos entre projetos.
- Demanda de Projetos:
 - taxa de troca entre consumo presente e futuro dos indivíduos;
 - preferências ao risco.

Quando esses indivíduos disputam os ativos no mercado e determinam $V_{(n \times 1)}$, no equilíbrio, determinam $\psi_{(k \times 1)}$. Portanto, determinam a taxa de troca entre consumo presente e futuro e a preferência pelo risco de diferentes estados da natureza. Os preços

dos ativos em equilíbrio determinam o vetor $\psi_{(k \times 1)}$ que, por sua vez, é resultado das preferências dos investidores entre consumo presente e futuro, assim como o risco. Esse processo de apreçamento da teoria tratado acima é chamado em COCHRANE[3] de apreçamento absoluto.

Dessa forma, na engenharia de apreçamento (apreçamento relativo), preocupa-se apenas com a determinação do vetor $\psi_{(k \times 1)}$, ignorando as questões teóricas envolvidas na determinação desse vetor. A engenharia de apreçamento tem o objetivo de estimar o preço das incertezas, $\psi_{(k \times 1)}$, implícitas no valor de mercado dos ativos da economia, $V_{(n \times 1)}$.

Uma vez determinado o preço de equilíbrio de mercado $\psi_{(k \times 1)}$, pela interação de vários agentes avessos ao risco, os preços dos projetos para um único indivíduo estão dados em $V_{(n \times 1)}$. O apreçamento de qualquer ativo do espaço de oportunidade de investimento do ponto de vista de um único indivíduo que não afeta os preços, pode ser visto como um apreçamento passivo ou relativo, pois os preços-estado estão dados para o indivíduo. Para esse indivíduo, basta multiplicar o vetor de pagamentos do portfólio pelo vetor de preços-estado, para determinar o preço do portfólio. Por isso, a decisão de investimento e consumo de um indivíduo são absolutamente separadas, porque os preços dos projetos estão dados, e sua decisão de consumo futuro toma isoladamente esses preços como dados.

2.2.2 Oportunidades de Arbitragem e Investimento

O fato de os mercados serem completos ou incompletos pode ter implicações no que se refere à separação entre a decisão de investimento e a decisão de consumo. De fato, na ausência de oportunidades de arbitragem, o investimento necessário $I_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)}$ em um portfólio θ deve ser igual ao seu valor $V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)}$. De outro modo, existe uma oportunidade de arbitragem, permitindo um aumento do consumo presente em:

$$(V_{(n \times 1)} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)}$$

para um dado consumo futuro, ou, equivalentemente, um aumento no consumo futuro em:

$$(V_{(n \times 1)} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)} (1 + r)$$

para um dado consumo presente. Onde r é taxa livre de risco.

Portanto, completude do mercado *em conjunto* com a ausência de oportunidades de arbitragem implica que todos os investimentos têm valor presente zero porque todos os preços se ajustaram (ou estão ajustados) para não permitir arbitragem. Em outras palavras, se os mercados são completos, então qualquer portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ é um ativo redundante⁴, e não há um portfólio especial $\theta_{(n \times 1)}^*$ que possa melhorar as possibilidades intertemporais de consumo.

No entanto, em mercados incompletos $V_{(n \times 1)}$ não é unicamente definido por não-arbitragem, uma vez que há uma família de vetores de preços-estado. Consideremos que os mercados são incompletos e que ambos

$$\psi_{1_{(k \times 1)}} \equiv \{\psi_{1j}\} \text{ e } \psi_{2_{(k \times 1)}} \equiv \{\psi_{2j}\}$$

são possíveis vetores de preços-estado. Então, dois possíveis vetores de valores existiriam, isto é, $V^1 = \Gamma_{(n \times k)}^T \psi_{1_{(k \times 1)}}$ e $V^2 = \Gamma_{(n \times k)}^T \psi_{2_{(k \times 1)}}$.

Neste caso, se $V^1 = \Gamma_{(n \times k)}^T \psi_{1_{(k \times 1)}} \neq V^2 = \Gamma_{(n \times k)}^T \psi_{2_{(k \times 1)}}$ para um dado portfólio $\theta_{(n \times 1)}$, então há um valor presente líquido positivo pelo menos em um dos dois vetores de preços-estado. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $(V_{1_{(n \times 1)}} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)} = 0$.

Neste caso:

⁴ No sentido que pode ser replicado por uma combinação linear da base que forma o espaço de possibilidades de investimento.

$$(V_{2_{(n \times 1)}} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)} \neq 0$$

Se $(V_{2_{(n \times 1)}} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)} > 0$, o investimento no portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ tem um valor presente líquido positivo. Se $(V_{2_{(n \times 1)}} - I_{(n \times 1)})^T \theta_{(n \times 1)} < 0$, um posição vendida no portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ teria valor presente líquido positivo.

Dada a não-unicidade dos preços-estado em mercados incompletos, o valor do portfólio não pode ser unicamente definido por não-arbitragem na forma que acontece no mercado completo. No entanto, como veremos no capítulo seguinte, isso não impede que existam preços de equilíbrio únicos de não-arbitragem, apenas não existirão preços-estado únicos de não-arbitragem.

2.2.3 Valor e Medida Martingale

Consideremos a existência de um investimento tal que seu pagamento é constante e, portanto, não depende do estado da natureza a ser realizado no futuro. Tal investimento é considerado livre de risco. Neste caso, uma unidade investida no período 0 retornará em $(1+r)$ unidades de consumo no momento 1.

Usando a fórmula (2.4), temos que :

$$1 = (1+r) \sum_{j=1}^K \psi_j$$

e o vetor pode ser reescrito como

$$V_{(n \times 1)} = \frac{1}{1+r} \Gamma_{(n \times k)} \pi_{(k \times 1)} \tag{2.6}$$

Onde $\pi_{(k \times 1)}$ é um vetor k-dimensional com componentes:

$$\pi_i = \frac{\psi_j}{\sum_{j=1}^k \psi_j}$$

por construção $\pi_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$. Portanto, π pode ser interpretado como o

vetor de probabilidade no espaço de estados da natureza. Neste caso, o valor de cada projeto é seu valor esperado descontado, mas utilizando-se a esperança definida na medida de probabilidade π e descontando-se pela taxa livre de risco.

É importante observar que os preços dos ativos são determinados pelas preferências pelo consumo no tempo e pelo risco. O vetor $\psi_{(k \times 1)}$ embute essas preferências, sendo que r representa as preferências pelo consumo no tempo e $\pi_{(k \times 1)}$ representa as preferências pelo risco. Observe que r , a taxa livre de risco, é endógena ao resultado de equilíbrio embutido nos preços dos projetos.

Os pagamentos da equação (2.6) descontados pela taxa livre de risco seguem um martingale na medida π , porque sua esperança descontada pela taxa livre de risco é o próprio valor do projeto. Por esta razão, a medida π é chamada medida martingale ou neutralizadora do preço da incerteza como apresentado em SIQUEIRA[35].

Por construção, a unicidade da medida de probabilidade depende do mercado ser completo. Se os mercados não são completos, diferentes medidas de probabilidade podem surgir, levando a diferentes vetores V .

Dada a equação (2.6), o valor de um portfólio arbitrário $\theta_{(n \times 1)}$ é dado por:

$$V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} = \frac{1}{1+r} \pi_{(1 \times k)}^T \Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} \quad (2.7)$$

onde o vetor de probabilidades π não necessariamente corresponde ao vetor de probabilidades efetivas de ocorrência dos diferentes estados da natureza. Notemos que o vetor π é um construto teórico que aparece na ausência de arbitragem, resultado das

preferências pelo risco dos investidores implícitas nos preços dos ativos, dada a matriz de pagamentos.

Um ponto natural que surge é se seria possível escrever o valor presente de um fluxo de caixa incerto com o seus pagamentos descontados, mas utilizando-se as probabilidades efetivas de ocorrência dos diferentes estados. Ao se adotar as probabilidades efetivas, o valor deve ser o mesmo, para não haver possibilidade de arbitragem; portanto, o fator de desconto terá de ser diferente da taxa livre de risco.

Dado o conjunto inicial de estados da natureza $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, onde cada estado w_i ocorre com probabilidade p_i , pode-se escrever:

$$V_{i(1 \times 1)} = \Gamma_{i(1 \times k)} \psi_{(k \times 1)} = \sum_{j=1}^k \Gamma_{ij} \psi_j = \sum_{j=1}^k \Gamma_{ij} \delta_j p_j$$

onde o fator $\delta_j = \frac{\psi_j}{p_j}$ é chamado de deflator preço-estado. Em mercados

completos, ambos $\psi_{(k \times 1)}$ e $p_{(k \times 1)}$ são únicos, resultando num deflator preço-estado $\delta_{(k \times 1)}$ que também é único. Segue da definição do vetor preço-estado em (2.5), que o deflator preço-estado é simplesmente a razão das utilidades marginais:

$$\delta_j = \frac{\partial U / \partial y_j}{\partial U / \partial x}$$

medindo a taxa de troca da utilidade entre períodos.

Um portfólio de projetos de investimento disponíveis podem então ser avaliados como a média ponderada dos correspondentes valores esperados descontados:

$$V_{(1 \times n)}^T \theta_{(n \times 1)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \delta_j p_j \Gamma_{ij} \theta_i = \sum_{j=1}^K \delta_j p_j (\Gamma^T \theta)_j = \delta_{(1 \times k)}^T \Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)}$$

Notemos que a expressão acima se compara com a equação (2.7) no sentido de que resulta no mesmo valor. A diferença, entretanto, é que as probabilidades efetivas são usadas no lugar das probabilidades martingale π .

2.2.4 Beta: Uma Medida de Risco Relativo

Consideremos que:

$$R_j^\theta = \frac{(\Gamma^T \theta)_j}{V^T \theta} \quad (2.8)$$

seja o retorno (ou taxa de retorno mais um) do portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ acumulado até o estado j , que é claramente uma variável aleatória. Se for possível escolher um portfólio $\theta_{(n \times 1)}$ tal que seus pagamentos sejam independentes do estado futuro da natureza, ou, em outras palavras, tal que $(\Gamma^T \theta)_j$ seja independente de j , então segue que:

$$V^T \theta = \sum_{j=1}^k \delta_j p_j (\Gamma^T \theta)_j = (\Gamma^T \theta)_1 \sum_{j=1}^k \delta_j p_j = \frac{(\Gamma^T \theta)_1}{1+r}$$

onde foi feito o uso da igualdade:

$$\mathbb{E}(\delta) = \sum_{j=1}^k \delta_j p_j = \sum_{j=1}^k \psi_j = \frac{1}{1+r}$$

Observemos que a esperança do deflator preço-estado é taxa de desconto livre de risco. O retorno desse portfólio será considerado $R=1+r$. Tal portfólio livre de risco por construção retorna para cada unidade de investimento no período 0, R ou $(1+r)$ no período 1.

No caso de um portfólio com risco, o retorno é uma variável aleatória, cujo valor esperado pode ser obtido pela expressão:

$$C(R^\theta, \delta) = \mathbb{E}(R^\theta \delta) - \mathbb{E}(R^\theta) \mathbb{E}(\delta)$$

ou equivalentemente a:

$$\mathbb{E}(R^\theta) - \frac{\mathbb{E}(R^\theta \delta)}{\mathbb{E}(\delta)} = -\frac{C(R^\theta, \delta)}{\mathbb{E}(\delta)}$$

uma vez que:

$$\mathbb{E}(R^\theta \delta) = \sum_{j=1}^K \frac{(\Gamma^T \theta)_j}{V^T \theta} \delta_j p_j = \frac{\sum_{j=1}^K (\Gamma^T \theta)_j \delta_j p_j}{V^T \theta} = 1$$

segue que:

$$\mathbb{E}(R^\theta) - R = -\frac{C(R^\theta, \delta)}{\mathbb{E}(\delta)} \quad (2.9)$$

Essa igualdade representa o retorno em excesso esperado de um portfólio de investimentos com risco em relação a um portfólio livre de risco. Isto pode ser simplificado numa relação mais familiar tomando um portfólio particular $\theta_{(n \times 1)}^*$ tal que

$$\delta_{(k \times 1)} = \Gamma_{(k \times n)}^T \theta_{(n \times 1)}^*. \text{ Neste caso,}$$

$$V(\Gamma^T \theta^*) = C(\Gamma^T \theta^*, \Gamma^T \theta^*)$$

Consideremos $R^* = (\Gamma^T \theta^*) / V^T \theta^*$ o retorno desse portfólio. Multiplicando os dois lados da igualdade anterior por δ , dividindo por $(V^T \theta^*)^2$ e $\delta = \Gamma^T \theta^*$, temos:

$$\delta = \frac{C(R^*, \delta)}{E(\delta)} \frac{R^*}{V(R^*)} E(\delta)$$

ou ainda:

$$\delta = -[E(R^*) - R] \frac{R^*}{V(R^*)} E(\delta)$$

usando a linearidade do operador covariância, segue que:

$$\frac{-C(R^\theta, \delta)}{E(\delta)} = \frac{C(R^\theta, R^*)}{V(R^*)} [E(R^*) - R]$$

que, em conjunto com a equação (2.9), leva ao modelo de preço-estado:

$$E(R^\theta) - R = \beta_\theta [E(R^*) - R]$$

com:

$$\beta_\theta = \frac{C(R^\theta, R^*)}{V(R^*)}$$

Este modelo-beta diz que o retorno esperado em excesso de um portfólio em particular θ é proporcional ao retorno esperado em excesso do portfólio θ^* . Os portfólios com os mesmos β pertencem à mesma classe de risco e β é considerado uma medida de risco sistemático⁵ dos portfólios com respeito ao portfólio θ^* . Notemos que a existência do portfólio em particular reside sob a hipótese de que o mercado é completo.

⁵ Risco sistemático é o risco inerente à maioria dos ativos da economia e não um risco idiossincrático do ativo.

Voltando ao problema original de avaliar um projeto, recordemos da equação (2.8), que:

$$V^T \theta \mathbb{E}(R^\theta) = \mathbb{E}(\Gamma^T \theta)$$

E, portanto, o valor de um portfólio de projetos pode ser escrito como:

$$V^T \theta = \frac{1}{\mathbb{E}(R^\theta)} \mathbb{E}(\Gamma^T \theta)$$

sendo o valor do portfólio o valor esperado descontado pela taxa ajustada ao risco.

Observemos, que pelo fato de $\delta = \Gamma^T \theta^*$, segue que:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^N \Gamma_{ij} \theta_i^*$$

sendo que $\delta_j = \frac{\partial U / \partial y_j}{\partial U / \partial x}$ é taxa marginal de substituição entre o pagamento no estado j para um pagamento no momento presente. Ou seja, o investidor investirá $V^T \theta^*$ para que seja alcançado um pagamento $\Gamma^T \theta_j^*$ no estado j , então,

$$R_j^{\theta^*} = \frac{(\Gamma^T \theta^*)_j}{V^T \theta^*} = \frac{\partial U / \partial y_j}{\partial U / \partial x}.$$

Qualquer portfólio em condição de não-arbitragem poderia corresponder a θ^* , porque nessas condições $\delta_j = \frac{1}{(1+r)} \frac{\pi_j}{p_j}$, portanto, é fixo.

Um vetor θ^* de preços dos projetos específicos também poderia ser o portfólio de mercado. Portanto, θ^* representaria um portfólio onde a participação de cada projeto

corresponde ao valor de mercado desses projetos, por isso chamado de Portfólio de Mercado.

Este é o modelo CAPM, vastamente utilizado para apuração de projetos. Dessa forma, para o apuração de projetos por esse modelo, basta descontar o fluxo esperado para o projeto no tempo 1 pela taxa de desconto ajustada ao risco β . Essa abordagem é também conhecida por Valor Presente Líquido, VPL.

Para ajustar a taxa de desconto ao risco, utiliza-se o β do projeto com o portfólio de mercado, que, na prática, utiliza-se como variável aproximativa algum índice de bolsa de valores⁶. O beta representaria a parcela do risco não diversificável do projeto, ou seja, o risco que o projeto contribui para um portfólio bastante diversificado de projetos. A parte do risco diversificável, ou não correlacionada com o portfólio de mercado, é irrelevante para o investidor, porque este é capaz de eliminar esse risco pela diversificação.

Outro importante resultado teórico da demonstração feita em COCHRANE[3] é que o risco que importa para o investidor é o risco do ativo correlacionado com o seu consumo. O investidor tem preferência por ativos que tenham correlação negativa com seu consumo, para que seu consumo no tempo fosse suavizado. Em alguns casos, o investidor até pagaria (prêmio negativo, como no caso de seguros de automóvel) para ter esse ativo em lugar de exigir um retorno. Mas temos que considerar que os fatores mais importantes que determinam o consumo agregado são os mesmos que determinam a dinâmica do produto da economia, o PIB (Produto Interno Bruto), uma vez que o consumo se mantém razoavelmente constante como proporção do PIB no tempo⁷.

O portfólio de mercado da economia é o estoque de ativos que essa tem para atender o nível de produção total, ou PIB⁸. Do estoque total de ativos, em torno de 60% brasileiro⁹, são ativos para atender à demanda de consumo das famílias. Mesmo os 40% restantes (para atender Investimentos, Governo e Bens de Capital) têm razoável

⁶ Ou seja, basta o índice da bolsa ser eficiente, ou um portfólio na Curva do Mercado de Capitais (Capital Market Line) ou na curva de Markowitz, como demonstrado em COPELAND[4].

⁷ JONES[14]

⁸ JONES[14]

⁹ 57% nos 12 meses terminados em setembro de 2003. Fonte: IBGE.

correlação com consumo. Portanto, a grande parte dos ativos têm forte correlação positiva com o consumo agregado.

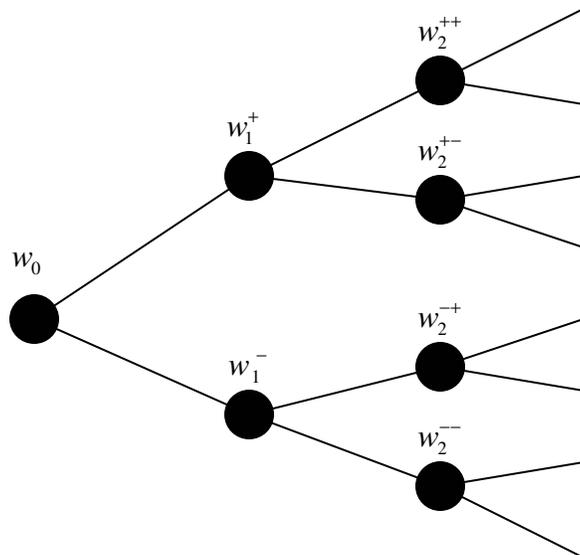
Os fatores que afetam o PIB no tempo (juros, câmbio, choques tecnológicos etc.) são os fatores de risco mais importantes para o apreçamento dos ativos, uma vez que não é possível eliminar o risco desses fatores via diversificação, porque são riscos relacionados à própria estrutura de produção da economia. Dessa forma, os ativos que são fortemente relacionados com esses fatores terão maior prêmio de risco que os ativos menos correlacionados.

2.3 Avaliação de Projetos em Vários Períodos

Até aqui consideramos a decisão de investimento em apenas um período. Nessa parte do capítulo trataremos da avaliação de projetos em decisões que envolvem mais de um período. Essa parte do capítulo é baseada no capítulo 16 do livro de LUENBERGER[18], SMITH & NAU[36], MATOS[23] e COPELAND[4,5].

2.3.1 Estrutura de Avaliação em Vários Períodos

A apresentação gráfica de uma estrutura de decisão de investimentos em vários períodos utiliza-se, na maior parte das vezes, de árvores, definindo um processo estocástico de mudanças de estado, como mostrado na figura abaixo:



Cada nó representa um estado diferente. Este é um gráfico de uma árvore não recombinante, mas em geral alguns nódulos podem recombinar.

O nó mais à esquerda representa o ponto inicial do processo estocástico, sendo que os pontos na linha vertical representam a situação em cada estado para um dado período de tempo.

Um projeto terá um pagamento específico para cada nó da árvore. Aqui podemos representar esses pagamentos em vários períodos na forma $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_T)$, onde Γ_t representa o pagamento no período t . Observe que Γ_t é estocástico, porque o valor do pagamento dependerá de qual estado ocorrer no período t .

No problema multiperíodico, temos um processo adicional que é o processo estocástico do preço do projeto, aqui denotado como $V = (V_0, V_1, \dots, V_T)$. O preço V_T representa o preço negociado do ativo depois do pagamento do período t .

Esse modelo de estados pode ser usado para representar vários ativos simultaneamente, uma vez que a única diferença entre os ativos são os valores dos pagamentos nos diferentes estados.

Nessa estrutura multiperíodica, uma decisão de investimento, ou um portfólio de investimentos $\theta_{(n \times 1)}$ será indexado ao tempo. Ou seja, cada $\theta_i = (\theta_0^i, \theta_1^i, \dots, \theta_T^i)$ poderá estar variando no tempo, definindo uma estratégia de investimento temporal. O pagamento de um investimento no período t será:

$$\Gamma_t^\theta = \sum_{i=1}^n [(\theta_{t-1}^i - \theta_t^i) S_t^i + \theta_{t-1}^i \Gamma_t^i]$$

onde por convenção pode-se considerar $\theta_{-1}^i = 0$ para todo i . O primeiro termo representa o montante recebido em t pela mudança de posição do portfólio no período t . O segundo termo representa os pagamentos recebidos no momento t decorrentes da posição de portfólio no momento $t-1$.

ARBITRAGEM

Agora define-se possibilidade de arbitragem como a existência de um portfólio $\theta_{(n \times 1)}$, de tal forma que $\Gamma_t^\theta \geq 0$ e Γ_t^θ não é identicamente igual a zero. Ou seja, esse portfólio resulta em pelo menos um pagamento positivo, mas nenhum negativo, representando ganho sem custo. Arbitragem tem o mesmo conceito que no caso unitemporal, mas agora $\theta_{(n \times 1)}$ é uma estratégia temporal, ou seja, está indexada no tempo.

TAXAS DE JUROS LIVRE DE RISCO DE CURTO PRAZO

A definição de taxa de juros livre de risco para um período é aquela taxa que independe do estado da natureza futuro, taxa essa que naturalmente existe em um mercado completo. No caso multiperifódico, um portfólio pode ser recomposto a cada período para manter a característica de inexistência de risco de um período para outro, desde que o mercado seja completo.

Suponhamos que exista a taxa livre de risco e que esta seja $R_{t,t+1} = \frac{1}{D_t}$, então o retorno a termo será:

$$R_{ts} = \frac{1}{D_t D_{t+1} \dots D_{s-1}}$$

Para $s > t$.

R_{ts} é o quanto será o capital de R\$ 1 aplicado até o período s em taxa de juros de curto prazo prevalentes em cada período. Observemos que a taxa de desconto R_{ts} é um processo estocástico, porque não se sabe no período t quais serão as taxas de juros livre de risco prevalentes a partir do período $t+1$, apenas a taxa prevalente entre t e $t+1$.

APREÇAMENTO RISCO-NEUTRO

Assumamos que a taxa livre de curto prazo existe e está definida em toda a árvore, ou seja, para cada subperíodo.

Considera-se que existam n ativos definidos nos espaço de estados da árvore. Pode-se dizer que probabilidades risco-neutro existem para cada arco da árvore se o preço de qualquer ativo (portfólio) satisfaça:

$$S_{t_0} = \frac{1}{R_{t,t+1}} \hat{E}_t (V_{t+1} + \Gamma_{t+1})$$

para todo $t=0,1,2,\dots,T-1$ e onde \hat{E}_t representa a esperança usando as probabilidades risco-neutro no momento t , ou a expectância no momento t , ou seja, a esperança na nova medida.

Observemos que esta definição se aplica apenas a um período de tempo, portanto, é expressa de forma recursiva. Ou seja, obtém-se V_t como uma função de V_{t+1} e Γ_{t+1} recursivamente.

Como mostrado, a não-existência de arbitragem implica na existência de probabilidades risco-neutro. Se não há arbitragem em j períodos (número de períodos maior ou igual a 2), então não há arbitragem em nenhum período. Portanto, podemos escrever a fórmula de forma não recursiva:

$$S_{t_0} = \hat{E}_{t_0} \left[\sum_{s=t+1}^T \frac{\Gamma_s}{R_{ts}} \right] \quad (2.10)$$

onde \hat{E}_t representa a expectância para todos os pagamentos futuros a partir do momento t_0 . Portanto, esta é a fórmula risco-neutro para todos os pagamentos futuros em uma estrutura multiperíódica. No entanto, como R_{ts} é estocástico, a árvore deve ter representação completa e não recombinante. Como argumento por LUENBERGER[20], uma saída seria simplificar o problema supondo que as taxas de juros são determinísticas.

2.3.2 Opções Reais ou Projetos com Flexibilidade

Pode-se efetuar uma classificação de projetos entre os projetos com flexibilidade e os projetos sem flexibilidade. Os projetos com flexibilidade são os projetos em que a incerteza é resolvida no tempo, ou seja, decisões futuras serão tomadas conforme o desenrolar das incertezas. Essas decisões futuras podem ser, por exemplo: abandonar o projeto, expandir, adiar investimentos etc.

Consideremos um projeto cujo pagamento no próximo período (período 1) seja $V^+(1)$ num estado superior e $V^-(1)$ em um estado inferior. Seja $\psi^+(0)$ o preço do estado superior e $\psi^-(0)$ o preço do estado inferior no momento 0. Portanto, o preço do projeto será:

$$V = V^+(1)\psi^+(0) + V^-(1)\psi^-(0)$$

Agora, consideremos que o investidor tenha a alternativa (ou opção) de cancelar o projeto em $t=1$, de tal forma a evitar um resultado desfavorável, e seja \hat{V} o valor desse projeto com flexibilidade. Nesse caso, o valor do projeto será:

$$\hat{V} = [V^+(1)]^F \psi^+(0) + [V^-(1)]^F \psi^-(0) \geq V$$

Onde:

$$[V^X(1)]^F = \text{Max}[V^X(1), 0]$$

$$X = 0, 1$$

A diferença positiva $\hat{V} - V$ é o valor da opção de cancelar o projeto, também conhecido como prêmio da opção. Observe que essa diferença do valor do projeto com flexibilidade para o projeto sem flexibilidade se origina matematicamente do fato de a opção (ou flexibilidade) eliminar a necessidade do investidor prosseguir o projeto em um cenário desfavorável.

Portanto, um projeto com flexibilidade tem um valor superior ao projeto sem flexibilidade. Na prática, é muito difícil calcular a taxa de desconto adequada para projetos com flexibilidade. A assimetria das distribuições dos pagamentos torna impossível uma abordagem do tipo VPL ou CAPM baseada nas covariâncias. O apreçamento risco-neutro ou preços-estado é a forma mais adequada para o apreçamento de projetos com flexibilidade.

O valor do projeto com flexibilidade pode ser visto sempre como:

$$\hat{V} = V + \text{Valor da Flexibilidade}$$

Onde:

V = Valor do Projeto sem Flexibilidade

Valor da Flexibilidade = Valor das Opções ≥ 0

Sendo o valor da flexibilidade o valor das opções reais presentes no projeto.

2.4 Divisão entre Incertezas Privadas e de Mercado

Como já vimos, um mercado é completo quando o número de ativos é igual ao número de estados da natureza. E como em todo mercado completo, da existência de preços é possível se extrair a taxa livre de risco e uma condição de não-arbitragem. O apreçamento torna-se um problema linear de compor um portfólio de ativos que replique o ativo a ser apreçado, para um dado vetor de preços.

Consideremos uma economia segmentada¹⁰ do restante das economias. O espaço de estados da natureza relevantes são os estados que afetam o fluxo de pagamentos do estoque de ativos da economia, ou seja, o fluxo de pagamentos do estoque de capital da economia. Esse estoque de capital tem incerteza quanto ao seu fluxo futuro de pagamentos de seus projetos de Postos de Gasolina, Panificadoras, Estradas Rodoviárias, Petroquímicas, Indústria de Brinquedos, Plantações de Soja etc.

¹⁰ Segmentada no conceito usado em STULTZ[38], em que os investidores do país não podem investir no exterior e os investidores estrangeiros não podem investir no país.

Os estados da natureza que afetam uma economia como essa são inúmeros. No entanto, os estados da natureza relevantes são os estados onde:

$$\psi_j < p_j \frac{1}{(1+r)}$$

Isso porque o investidor estaria disposto a pagar para se proteger desses estados, que são aqueles que estariam correlacionados com o seu consumo. Como $p_j \frac{\partial U / \partial y_j}{\partial U / \partial x} \equiv \psi_j$, há um prêmio de risco pela incerteza nesses estados. Estes são os chamados estados ou incertezas de mercado.

Os estados onde $\psi_j = p_j \frac{1}{(1+r)}$, são irrelevantes para o apuração em termos de prêmio de risco porque seu risco pode ser eliminado na diversificação. O fluxo de pagamentos desses estados não está correlacionado com o consumo agregado, o PIB ou o fluxo de pagamentos do estoque de capital da economia. Para incertezas dependentes desses estados, basta-se descontar o fluxo esperado usando probabilidades efetivas pela taxa livre de risco. Estes estados são chamados de estados privados ou incertezas privadas.

Um projeto pode ter uma parcela do seu fluxo de pagamentos influenciada por incerteza privada e outra parcela por incertezas de mercado. Na parcela do fluxo de pagamentos associada a incertezas privadas, deve-se descontar os pagamentos esperados pela taxa livre de risco.

Podemos estender a abordagem risco-neutro de apuração acima para todos os projetos, com e sem flexibilidade. Nesse caso, adota-se sempre como taxa de desconto a taxa livre de risco e as probabilidades para efeito de cálculo seriam probabilidades risco-neutro para as incertezas de mercado e probabilidades efetivas para as incertezas privadas como em LUENBERGER[18].

É comum uma divisão equivocada de incerteza privada como sendo incerteza de origem técnica e incerteza de mercado como decorrentes de preços etc. A natureza da

incerteza é irrelevante para classificá-la como privada ou de mercado. Uma incerteza técnica pode ser privada mas também pode ser de mercado.

Consideremos que os dois países seguintes são segmentados, o Brasil e a Nigéria. Para o Brasil, a incerteza técnica decorrente da pesquisa exploratória de petróleo pode ser considerada incerteza privada pelo fato de ser facilmente diversificável no portfólio de ativos domésticos, por ter peso relativamente pequeno no estoque total de ativos. No entanto, no portfólio dos nigerianos, a grande exposição a esse tipo de incerteza torna impossível tal diversificação, sendo tal incerteza uma incerteza de mercado. Dessa forma, a incerteza técnica da exploração de petróleo seria incerteza privada no Brasil e incerteza de mercado na Nigéria.

Portanto, natureza da incerteza não a classifica como privada ou de mercado. Uma incerteza privada deve ter relação de dependência nula com o fluxo de caixa dos ativos da economia, como a maré de Ubatuba, por exemplo.

3 Avaliação em Mercados sem Divisibilidade e Incompletos

3.1 Três Abordagens Equivalentes de Apreçamento

Como apresentado nas seções anteriores, o apreçamento relativo de um projeto em mercado completo resume-se na solução de um problema linear, que é encontrar um portfólio replicante dos pagamentos do projeto. Esse portfólio replicante sempre existe em um mercado completo porque existe um número de ativos que formam a base de um espaço vetorial de possibilidades de investimento que tem dimensão igual a k , que é o número de estados da natureza. Ver SIQUEIRA[34].

Para o cálculo do valor do projeto, basta calcular os pagamentos esperados usando as probabilidades risco-neutro e descontar pela taxa livre de risco. O apreçamento resume-se na aplicação da fórmula (2.10).

Existe um caso no qual o apreçamento por não-arbitragem ou por replicação pode existir mesmo quando o mercado não é completo, ou seja, $n < k$. Quando $n < k$, a base de ativos forma um espaço vetorial de possibilidades de investimento de dimensão igual a n . O apreçamento por não-arbitragem para um projeto neste caso pode existir desde que os pagamentos do portfólio possam ser reproduzidos pelos ativos que formam a base de possibilidades de investimento. Ou seja, os vetor de pagamentos do projeto pertencente a R^k está no espaço vetorial de possibilidades de investimento gerado pela base de dimensão n .

A fórmula de Black-Scholes-Merton vale não somente para quando o mercado é estritamente completo, ou seja, $k=n$. A fórmula vale quando a opção de compra pode ser replicada pela ação subjacente e um ativo livre de risco, mesmo quando $k < n$. Ver SIQUEIRA[34].

A conclusão a qual chegamos é que a limitação do apreçamento por não-arbitragem surge não somente da não completude do mercado no sentido estrito ($k=n$), mas da incapacidade de se replicar os pagamentos de alguns projetos quando o mercado é incompleto. Podemos então estender a validade do apreçamento por não-arbitragem no mercado completo para todos os casos em que os pagamentos dos projetos são

replicáveis, uma restrição menor que a completude de mercado. Basta que existam preços únicos sem condições de arbitragem para os n ativos que formam a base, cuja existência é demonstrada em COCHRANE[3].

Nesse seção veremos que existem três formas de apreçamento relativo que são coerentes com o apreçamento por não-arbitragem. Essas três abordagens são equivalentes na possibilidade de se replicar os pagamentos do projeto ou de incertezas replicáveis, sendo na realidade apenas óticas diferentes de apreçamento de incertezas replicáveis. Mostrar-se-á aqui que a extensão das três abordagens para incertezas não-replicáveis é natural e teoricamente adequada.

3.1.1 Preço-reserva

O conceito de preço-reserva bastante utilizado em economia pode ser aplicado para o apreçamento de ativos. Esse conceito de apreçamento foi apresentado de forma pioneira para apreçamento de opções reais em SMITH & NAU[36] e depois incorporada por outros autores tais como LUENBERGER[16] e FRITELLI[10].

Como apresentado em LUENBERGER[19], consideremos um investidor com uma função utilidade U definida para valores positivos de riqueza final. Assume-se que U é contínua, estritamente crescente e estritamente côncava. O investidor tem riqueza inicial $w > 0$ que será alocada entre os ativos disponíveis.

Os n ativos são definidos pelos seus pagamentos $\Gamma_i, i=1,2,\dots,n$ e preços V_i . Há um ativo adicional com pagamento Γ_e e preço V_e . O pagamento do portfólio inicial é representado por Γ_i como preço V_i . O termo α_i é a parcela aplicada no portfólio inicial e $\bar{\alpha}_e$ é a quantia fixada no ativo adicional.

O preço-reserva é o preço que induz o investidor a investir uma quantidade infinitesimalmente pequena (zero) do novo ativo do valor do seu portfólio inicial w . O preço-reserva, V_0^* , é preço que o investidor ao maximizar:

$$\max_{\alpha, \alpha_e} \mathbb{E} [U(\Gamma_i + \Gamma_e)]$$

Sujeito a $V_i \alpha_i + V_e \alpha_e \leq w$

resulta em $\alpha_e^* = 0$, ou seja, o mesmo nível de utilidade máxima da situação do investidor antes de considerar o projeto. Com o preço-reserva para o projeto, o investidor é indiferente a ter ou não ter o ativo em seu portfólio.

SMITH & NAU[36] mostraram que em um mercado completo essa abordagem leva ao mesmo preço de não-arbitragem da fórmula (2.10), no caso de uma função utilidade exponencial, desde que se considere todas as oportunidades de mercado. LUENBERGER[20] mostrou para que algumas classes de funções de utilidade, por essa abordagem se chega ao mesmo apreçamento que a fórmula (2.10).

3.1.2 Preço-projeção

O conceito de preço-projeção foi formalmente apresentado por LUENBERGER[21]. Nessa abordagem, o objetivo é encontrar um portfólio de ativos comercializáveis que minimize a distância com o vetor de pagamentos do projeto, por isso chamada de preço-projeção. No caso de mercado de incertezas replicáveis, a distância mínima será sempre zero, decorrente do fato de o projeto ser replicável.

Como demonstrado em FRANCO[9], a fórmula de apreçamento-projeção é:

$$V_0 = \Gamma_0 + \sum_{t=1}^n \frac{\Gamma_t}{\left[1 + r + \frac{(\mu_p - r)}{\sigma_p} \sigma_i \rho \right]^t} \quad (3.1)$$

sendo:

μ_p = taxa de retorno do portfólio com máxima correlação com o projeto

r = taxa livre de risco

σ_p = desvio-padrão do portfólio com correlação máxima com o projeto

σ_i = desvio-padrão do projeto i

ρ = correlação do fluxo de caixa do portfólio com correlação máxima com o projeto.

Como nesse caso a incerteza é replicável, ρ será igual a um, e a fórmula acima colapsa no CAPM. Como apresentado em LUENBERGER[19], o CAPM pode ser visto como uma regra de apreçamento de um projeto, que nada mais é do que encontrar uma combinação linear de ativos de uma base de um espaço vetorial (de tamanho n) que replique os pagamentos do projeto em todos os estados da natureza. Isto porque o portfólio usado no CAPM é um portfólio eficiente do ponto de vista do Markowitz (em termos de média-variância).

O conjunto de todas as combinações lineares dessa base formam o espaço vetorial que representa todas as possibilidades de investimento. Essa base pode ser interpretada como o menor conjunto de ativos relevantes (linearmente independentes – aqui em quantidade n) que geram o espaço vetorial de possibilidades de investimento.

Consideremos um ativo cujo pagamento seja uma variável aleatória B que não se encontra no espaço vetorial de possibilidades de investimento. Nesse caso, um preço único não pode ser encontrado via uma combinação linear na base do espaço que replique os pagamentos do ativo B (espaço N).

Uma forma bastante empregada é aplicar o CAPM para o apreçamento desse tipo de ativo, colocando o ativo na fórmula do CAPM. O preço obtido dessa forma é o preço do ativo (ou portfólio) do espaço vetorial cujos pagamentos melhor se aproximam dos pagamentos de B , pelo menor erro quadrático médio. Ou seja, o preço desse portfólio é a Projeção de B no espaço N .

Dessa forma, no Apreçamento-Projeção, o preço do ativo B é calculado escolhendo-se o portfólio de ativos comercializáveis que tem a máxima correlação com o fluxo de caixa do ativo com o fluxo de caixa do ativo B .

Essa taxa é totalmente equivalente ao CAPM em mercados completos. Por exemplo, podemos considerar r e σ_p respectivamente o retorno e a volatilidade do portfólio de mercado, ou pelo menos de um portfólio eficiente do ponto de vista média-variância. Se o ativo em questão é replicável linearmente pelo espaço N , então $\sigma_i = \sigma_p$ e $\rho = 1$, e o valor do projeto será:

$$V_0 = \Gamma_0 + \sum_{t=1}^n \frac{\Gamma_t}{(1+r+\mu_i)^t} \quad (3.2)$$

Onde:

$$\mu_i = \beta_i(\mu_i - r)$$

$$\beta_i = \frac{C(i, p)}{V(p)} = \text{beta do ativo } i \text{ com o portfólio}$$

Ou seja, a taxa de desconto é a taxa do portfólio replicante, e temos o próprio CAPM.

Se a correlação do ativo em questão com os ativos da base for zero, o valor do projeto será:

$$V_0 = \Gamma_0 + \sum_{t=1}^n \frac{\Gamma_t}{(1+r)^t} \quad (3.3)$$

Nesse caso, a taxa de desconto é a taxa livre de risco, porque a incerteza é privada. Também vale o CAPM.

No caso de não existir um portfólio replicante (mercado incompleto) na base N, então, pode ser representada exatamente como na fórmula (3.1). Observemos então que a fórmula é matematicamente idêntica ao CAPM, podendo o portfólio p também ser representado pelo portfólio de mercado. No entanto, deve-se observar que essa abordagem não se utiliza da mesma hipótese do CAPM de completude do mercado. Ou seja, incertezas com prêmio de mercado não replicáveis serão ignoradas para efeito de prêmio de mercado. Portanto, esta abordagem teoricamente não é igual ao CAPM, porque está se estendendo sua fórmula de mercados completos aos mercados incompletos.

Para o caso de ativos não comercializados essa abordagem é de fácil aplicação, permitindo o apreçamento de qualquer incerteza subjacente às opções reais presentes nos projetos. Além disso, conta com a propriedade teórica demonstrada em

LUENBERGER[19] e FRITELLI[10] que mostra equivalência entre os preço-projeção, preço-reserva e preço-entrópico em algumas situações.

Para efeito prático de estimação, como mostrado em LUENBERGER[19], a abordagem da fórmula (3.1) é superior ao CAPM, por prescindir da hipótese de eficiência do portfólio-referência e pelo fato da estimação dos seus parâmetros ser mais precisa que os parâmetros do CAPM. LUENBERGER[19] chama essa abordagem de Fórmula de Correlação (CPF).

3.1.3 Preço-entrópico

Como apresentado em KAPUR[16], o conceito de entropia de Shannon é um conceito baseado na Teoria da Informação que é utilizado atualmente em várias áreas do conhecimento. Como demonstrado em SIQUEIRA[35], o conceito de entropia está relacionado à surpresa esperada associada a uma variável aleatória X . Seja x_1 uma possível realização com probabilidade p_1 . Se $p_1=99\%$, a ocorrência de x_1 não seria grande surpresa, mas se $p_1=1\%$, a ocorrência seria uma grande surpresa. A definição de uma forma funcional da surpresa está associada à possível ocorrência de x_1 , definida como $s(p_1)$, de tal forma que $s(p)$ obedeça aos axiomas:

- $s(1)=0$;
- $s(p)$ é estritamente crescente de p ;
- $s(p)$ é uma função contínua de p ;
- $s(pq)=s(p)+s(q)$, $0 < p \leq 1$ e $0 < q \leq 1$, para eventos independentes.

Uma função chamada informacional que satisfaz os axiomas acima é:

$$s(p) = -\log_e p$$

cuja unidade é nit/evento.

A entropia de Shannon para o caso discreto é definida como:

$$0 \leq H(X) = -\sum_{i=1}^k p_j \log_e p_j \leq \log_e k$$

cujo valor máximo acontece quando a variável aleatória distribui-se uniformemente.

A versão contínua da entropia diferencial de Shannon é:

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_x \log_e (f_x) dx$$

Um conceito derivado da entropia de Shannon é o da entropia relativa, ou divergência direcionada de Kullback-Leibler, que mede o ganho informacional entre uma densidade de referência, g_x , e outra densidade f_x :

$$D(f\|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \log \left(\frac{f_x}{g_x} \right) dx$$

A entropia relativa é semelhante a uma medida de distância entre duas distribuições como mesmo domínio, embora no sentido formal não o seja, pois $D(f\|g) \neq D(g\|f)$ em alguns casos.

A utilização da entropia como função-objetivo para o apreçamento de ativos consiste na maximização da entropia com a restrição dos preços dos n ativos da base. Portanto, busca-se:

$$\{p_i^*\}_{i=1}^k \equiv \arg \max \left(-\sum_{j=1}^k p_j \log_e p_j \right)$$

Sujeito aos preços dos n ativos da economia:

$$p_n = \frac{\sum_{j=1}^k p_j \Gamma_{nj}}{1+r}$$

onde $p^* = \pi$ para mercados completos, como será mostrado no exemplo adiante.

Para projetos com incertezas replicáveis, essa abordagem será igual ao apreamento por não-arbitragem.

3.2 Exemplo Ilustrativo em Mercados Completos e com Incertezas Replicáveis

Esse exemplo foi criado para este trabalho com o objetivo de ilustrar a equivalência das três abordagens de apreamento relativo.

3.2.1 Mercado Completo

Consideremos uma economia de um período com apenas três ativos, cujos estados também sejam três. E que a matriz de pagamentos seja:

<i>MATRIZ PAGAMENTOS</i>		
W1	W2	W3
0.50	2.00	4.00
1.00	1.00	3.00
0.00	5.00	2.00

e o vetor de preços será:

<i>PREÇOS</i>	
V1	1.00
V2	1.00
V3	1.00

Portanto, temos que os preços-estado derivados da matriz acima são iguais a:

$$\psi = \Gamma^{-1}V$$

Tem-se então respectivamente os preços-estado e probabilidades risco-neutro abaixo:

Preços- Estado	Prob.Risco- Neutro
0.53	0.67
0.16	0.20
0.11	0.13
0.79	1.00

A taxa livre de risco implícita na matriz de pagamentos é de $1/0.79=0.267$

Como apreçar um projeto com o seguinte fluxo?

Pagamentos do Projeto Novo		
4.00	2.00	1.00

Usando as probabilidades risco-neutro ou preços-estado acima, temos o preço de não-arbitragem:

$$2.526 = \frac{0.67 \times 4 + 0.20 \times 2 + 0.13 \times 1}{(1 + 0.267)} = 0.53 \times 4 + 0.16 \times 2 + 0.11 \times 1$$

O mesmo resultado acima de não arbitragem pode ser obtido usando as três abordagens abaixo:

- **Preço-reserva**

Para calcularmos o preço-reserva, usaremos a função de utilidade exponencial sugerida em SMITH & NAU[36] do tipo:

$$U(x_0, x_1) = -\exp(-x_0 / 200) - \exp(-x_1 / 220)$$

Maximizando a utilidade esperada, considerando apenas os três ativos iniciais, obtemos uma utilidade máxima de -1,690 para as seguintes quantidades dos três ativos:

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{Quantidades dos Ativos} & \\ 1.35 & (1.40) & (0.17) \end{array}$$

Considerando a possibilidade de o investidor colocar no seu portfólio o novo projeto, o preço desse novo projeto que o deixa com a mesma satisfação inicial de -1,690 ao maximizar sua utilidade esperada é 2,526. O preço obtido é idêntico ao preço de não-arbitragem, desde que se considerem as oportunidades de mercado.

- **Preço-Projeção**

Considere um portfólio:

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$$

Com pagamentos de:

$$\begin{array}{ccc} & \textbf{Pagamentos do portfólio} & \\ \Gamma_{p1} & \Gamma_{p2} & \Gamma_{p3} \\ \alpha_1 \Gamma_{11} + \alpha_2 \Gamma_{21} + \alpha_3 \Gamma_{31} & \alpha_1 \Gamma_{12} + \alpha_2 \Gamma_{22} + \alpha_3 \Gamma_{32} & \alpha_1 \Gamma_{13} + \alpha_2 \Gamma_{23} + \alpha_3 \Gamma_{33} \end{array}$$

Ao se minimizar a distância entre os pagamentos do ativo e do portfólio temos:

$$\alpha^* = \arg \min \left[(4 - \Gamma_{p1})^2 + (2 - \Gamma_{p2})^2 + (1 - \Gamma_{p3})^2 \right]$$

O vetor α^* nesse caso será igual ao portfólio replicante, o que resulta numa distância mínima igual a zero. A participação de cada um dos três para a replicação do projeto será:

Participação	(5.37)	6.68	1.21
---------------------	--------	------	------

O preço desse portfólio replicante é igual a 2.526, que corresponde ao valor do projeto.

- **Preço-entrópico**

Para a determinação do preço-entrópico nesse exemplo primeiramente obtemos:

$$p^* = \arg \max \left(-\sum_{j=1}^k p_j \log p_j \right)$$

Sujeito aos preços dos 3 ativos da economia:

$$1 = \frac{p_1 \times 0.5 + p_2 \times 2 + p_3 \times 4}{(1 + 26.7\%)}$$

$$1 = \frac{p_1 \times 1 + p_2 \times 1 + p_3 \times 3}{(1 + 26.7\%)}$$

$$1 = \frac{p_1 \times 0 + p_2 \times 5 + p_3 \times 2}{(1 + 26.7\%)}$$

O vetor de probabilidades obtido será:

p^*	0.67	0.20	0.13
-------	------	------	------

que é exatamente igual às probabilidades risco-neutro anteriormente calculadas, que resultam no mesmo preço de 2.526 para o projeto.

3.2.2 Mercado Incompleto com Incertezas Replicáveis

Consideremos um economia de um período com apenas três ativos, mas que o número de estados da natureza sejam quatro. Portanto, temos uma economia com mercado incompleto. A matriz de pagamentos será:

W1	W2	W3	W4
1.10	1.10	1.10	1.10
0.50	1.00	2.00	1.50
1.00	3.00	0.50	0.00
2.60	5.10	3.60	2.60

e o vetor de preços será:

Preços	
V1	1.00
V2	1.00
V3	1.00

Portanto, não se tem os preços-estado, ou probabilidade risco-neutro para todos os estados como no caso do mercado completo.

Consideremos os pagamentos do projeto:

Pagamentos do Projeto Novo			
5.80	10.30	6.30	4.80

Apesar de não ser possível aplicar a abordagem de não-arbitragem por não termos o vetor de probabilidades risco-neutro, vale ainda a condição de não-arbitragem porque o projeto acima pode ser replicado pelos três ativos da economia. Nesse caso:

$$\mathbf{Preço-Reserva = Preço-Projeção = Preço-Entrópico = 6}$$

Ou seja, para projetos com incertezas replicáveis, as três abordagens resultam no mesmo preço.

3.3 Avaliação de Ativos sem Divisibilidade: o Preço-compra

Até aqui a hipótese era de que o investidor poderia escolher o quanto colocaria de um projeto em seu portfólio. Podemos considerar que o indivíduo não tenha tal opção de divisibilidade e tenha de comprar uma quantidade mínima de tal projeto.

Tal restrição diminuirá a possibilidade de diversificação e seu efeito na redução de riscos. Dessa forma, o risco que estaria em condição de ser diversificado sem a restrição, e que não será diversificado, deverá ser considerado pelo investidor. Portanto, esse projeto deverá ter um preço igual ou menor ao projeto apreçado pela abordagem risco-neutro.

A abordagem para o apreçamento em tal situação é apreçamento Preço-compra como em LUENBERGER[18] e SIMITH & NAU[36]. A Abordagem-compra é idêntica ao Preço-reserva com a adição da restrição da quantidade mínima a ser comprada do projeto.

Preço-compra seria o preço do projeto que um investidor com uma função de utilidade específica alcançaria a mesma utilidade do seu portfólio ótimo sem o projeto. Ou seja, o Preço-compra do projeto é o preço que deixa o investidor indiferente a este, considerando a restrição.

Como apresentado em LUENBERGER[20], considere um investidor com uma função utilidade U definida para valores positivos de riqueza final. Assume-se que U é contínua, estritamente crescente e estritamente côncava. O investidor tem riqueza inicial $w > 0$ que será alocada entre os ativos disponíveis.

Os n ativos são definidos pelos seus pagamentos $\Gamma_i, i=1,2,\dots,n$ e preços V_i . Há um ativo adicional com pagamento Γ_e e preço V_e . O pagamento da carteira inicial é representado por Γ_i e preço V_i . O termo α é a parcela aplicada na riqueza inicial e $\bar{\alpha}_e$ é a quantia fixada no ativo adicional. O valor da riqueza inicial é w . O Preço-compra V_e^* é o preço do projeto que implica que o investidor ao maximizar:

$$\max_{\alpha_e} E[U(\Gamma_i + \Gamma_e)]$$

$$\text{sujeito à } \Gamma_e \alpha + V_e^* \bar{\alpha}_e \leq w$$

resultando em $\max_{\alpha_c} E[U(\Gamma_i + \Gamma_c)] = U^*(w)$, que é a utilidade máxima alcançada pelo investidor sem considerar o projeto.

Observe que o preço desse projeto dependerá da função de utilidade do indivíduo, da quantidade do risco diversificável do projeto que pode ser diversificada com a restrição (dependendo da fração do valor do projeto na riqueza do investidor) e da relação de dependência entre os pagamentos do projeto com os pagamentos do portfólio inicial do investidor.

Como mostrado em SMITH & NAU[36] e LUENBERGER[20], esse problema fica razoavelmente simplificado se supusermos que a covariância entre o fluxo de caixa do ativo e dos restantes dos ativos é zero.

Em uma economia com custo zero na formação de condomínios de investimento (exemplo: fundos de investimento, fundos de pensão etc.) essa restrição da quantidade a ser comprada não existe para um único investidor. Portanto, na presença de tais condomínios, muito difundidos na economia moderna, a abordagem de preço-compra não se aplica.

3.4 Avaliação em Mercados Incompletos

A avaliação em mercados incompletos é mais complexa que em mercados completos, porque um vetor de probabilidades risco-neutro não é unicamente definido, não existindo mais um preço único de não-arbitragem e sim um intervalo de preços determinado pela condição de não-arbitragem.

Dessa forma, como poderiam ser obtidos os preços dos projetos que não são replicáveis pelos ativos negociáveis da economia? Esse é o problema típico de apreçamento em mercados incompletos, ou com incertezas não replicáveis.

Foi apresentado que as três abordagens de apreçamento relativo preço-reserva, preço-projeção e preço-entrópico são equivalentes ao preço de não-arbitragem em mercados completos ou quando as incertezas são replicáveis. Porque não estender as três abordagens para o apreçamento de incertezas não replicáveis?

Como apresentado em COCHRANE[3] e MAGILL & QUINZII[22], em tese um preço para um projeto não replicável só existiria a partir de uma solução de equilíbrio geral. Isso porque, ao se acrescentar uma nova oportunidade de investimento fora do espaço vetorial de possibilidades de investimento, os investidores fariam uma nova “rodada” de apreçamento, colocando o projeto em conjunto com os outros ativos da economia para determinação de novos preços de equilíbrio.

Na prática, a busca de uma nova solução de equilíbrio geral é inviável, pelo menos no atual estágio do conhecimento. Por isso, buscam-se soluções de apreçamento parciais, que nada mais é do que aplicar as três abordagens de apreçamento acima.

Observe que, quando aplicamos essas três abordagens para apreçamento de uma incerteza não replicável, está implícita a hipótese de que a parcela não replicável da incerteza não tenha prêmio de risco. Consideremos para efeito de exemplificação que o projeto tenha uma variância $V[\cdot]$. Uma parcela dessa variância $\rho V[\cdot]$ pode ser replicada por ativos do mercado. A outra parcela $(1-\rho)V[\cdot]$ não pode ser replicada pelo mercado. A parcela da variância replicada será apreçada conforme os prêmios de risco implícitos nos ativos de mercado, e a parcela da variância não replicada será considerada incerteza privada, portanto, sem prêmio de risco.

Observe que essa solução não necessariamente seria o preço de equilíbrio geral do projeto. Mas, se considerarmos que o projeto seja muito pequeno em relação ao estoque de ativos da economia, essa abordagem resultaria em preços muito próximos aos preços de equilíbrio.

LUENBERGER[21] mostrou que as abordagens de Preço-projeção e Preço-reserva são equivalentes para qualquer função utilidade em qualquer uma das duas situações:

- quando o fluxo de caixa do ativo em questão é independente do mercado;
- ou quando os pagamentos são conjuntamente normalmente distribuídos.

FRITELLI[10] mostra uma razoável equivalência para várias funções de utilidade entre a abordagem preço-reserva e preço-entrópico. Portanto, temos que as três abordagens são equivalentes para incertezas normalmente distribuídas. Na prática

resultam em valores muito próximos, principalmente quando as distribuições das incertezas são razoavelmente simétricas.

Como será apresentado abaixo, a abordagem de Preço-projeção tem a vantagem prática da fácil aplicação. No entanto, a abordagem Preço-entrópico tem a vantagem de ter como saída os preços-estado e as probabilidades risco-neutro.

3.5 Exemplo Ilustrativo em Mercados Incompletos

O exemplo a seguir representa uma situação típica de mercados incompletos para apreçamento de um ativo com incertezas não replicáveis.

Consideremos a mesma situação da seção 3.2.2, onde a matriz de pagamentos seja:

<i>W1</i>	<i>W2</i>	<i>W3</i>	<i>W4</i>
1.10	1.10	1.10	1.10
0.50	1.00	2.00	1.50
1.00	3.00	0.50	0.00

E o vetor de preços seja:

	<i>Preços</i>
V1	1.00
V2	1.00
V3	1.00

Agora consideremos um projeto cuja incerteza seja não replicável, ou seja, não é possível de se obter um portfólio replicante. Os pagamentos desse projeto são:

<i>Pagamentos do Projeto Novo</i>			
1.00	1.50	1.50	1.00

Os preços obtidos pelas três abordagens estão abaixo, com as respectivas taxas de desconto implícitas:

	Preço	Taxa
Reserva	1.082	15.5%
Projeção	1.079	15.8%
Entrópico	1.082	15.5%

Observemos que os preços obtidos são muito próximos. Parte dessa similaridade é porque a distribuição dos pagamentos do projeto é razoavelmente simétrica.

Consideremos um projetos com pagamentos bastante assimétricos:

Pagamentos do Projeto Novo

0.00 2.00 1.00 5.00

Os preços obtidos para esse projeto são:

	Preço	Taxa
Reserva	1.638	22.1%
Projeção	1.695	18.0%
Entrópico	1.638	22.1%

Observe que a diferença absoluta entre o menor e o maior preço é de apenas 3.3%. O preço-reserva e o preço-entrópico tendem a ficar próximos em distribuições assimétricas, isso porque o preço-projeção pesa as diferenças ao quadrado.

Quando a distribuição da incerteza do projeto e as incertezas de mercado forem razoavelmente simétricas, os preços obtidos serão muito próximos. Nesse caso, pela facilidade de aplicação, utilizaria-se o preço-projeção. No caso de distribuições assimétricas, o preço-entrópico e o preço-reserva são mais precisos.

4 Estrutura Geral para Apreçamento de Ativos com Flexibilidade – Opções Reais

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte serão apresentados os exemplos típicos de opções reais que estão presentes em grande parte dos projetos. Na segunda, será apresentada uma fórmula de apreçamento geral baseada na modelagem das opções reais em modos de operação com flexibilidade de alternar entre modos de operação.

4.1 Exemplos de Opções Reais

Essa parte do trabalho apresentará exemplos de opções reais e sua importância para a tomada de decisões de orçamento de capital. A maior parte dessa seção está baseada no trabalho de TRIGEORGIS[40].

Consideremos uma empresa de petróleo que tenha uma licença de um ano para começar a explorar petróleo em uma área potencial. Ao começar o projeto, há os custos iniciais de exploração e em seguida os custos de construção da infra-estrutura de exploração, I_1 . Depois poderiam ser efetuados investimentos adicionais para expansão, I_2 . A extração só começaria depois da construção efetuada, ou seja, o fluxo de caixa seria gerado apenas no estágio de operação, depois do último desembolso.

Durante a construção, se as condições de mercado se deteriorarem, a administração pode escolher desistir de investimentos adicionais. Também pode-se escolher reduzir a escala de operação em $c\%$, economizando uma parcela do último desembolso, I_c , se o mercado estiver ruim. A planta deve ser desenvolvida de tal forma que, se no futuro, em algum momento, os preços do petróleo forem maiores do que o esperado, a produção poderá ser expandida em $x\%$ a partir de um desembolso de investimento de I_e . Em qualquer momento, a administração pode salvar uma parcela do seu investimento vendendo a planta e os equipamentos pelo seu valor residual ou mudar sua utilização para outra alternativa. Uma refinaria associada – pode ser desenvolvida para operar com

diferentes alternativas de insumos de energia – também pode converter petróleo cru em uma variedade de produtos.

Consideremos que estamos com uma oportunidade de investimento de $I_0 = \$104$ milhões, cujo valor (bruto) pode se mover para cima em 80% ou para baixo em 40%, dependendo das flutuações do preço do petróleo. Um ano depois o projeto poderá valer \$ 180 se o preço subir, ou \$ 60 se o preço cair. A probabilidade de o preço cair é igual à de subir, $p=50\%$. Seja S , o preço do petróleo, ou do “ativo gêmeo”, que é um ativo negociado nos mercados financeiros e tem as mesmas características com o projeto em consideração. O ativo gêmeo e o projeto em consideração têm um retorno esperado de $k=20\%$, e a taxa livre de risco é de $r=8\%$.

A seguir temos a árvore de evolução do valor presente do projeto, V_t e do ativo gêmeo (aqui, o preço do petróleo), S_t :

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Projeto	100	180 60	324 108 36
Ativo Gêmeo	20	36 12	64.8 21.6 7.2

Observemos que, por definição, o ativo gêmeo segue passos idênticos aos do projeto em questão. Se aplicássemos a técnica de VPL usando a taxa de desconto implícita no ativo gêmeo, 20%, obteríamos:

$$VP = (50\% \times 180 + 50\% \times 60)/(1+20\%) = 100$$

Considerando que o investimento necessário é de \$ 104, então o VPL é igual a \$ -4, portanto, não investiríamos no projeto sem flexibilidade.

No entanto, o VPL não é capaz de capturar o valor de flexibilidade que causa assimetria na distribuição do fluxo de caixa do projeto. Tal projeto com flexibilidade só pode ser avaliado usando análise de direito contingente, como o processo de avaliação risco-neutro. Como vimos no capítulo 2, tal análise se baseia na transformação do mundo em questão para um mundo risco-neutro, para que a taxa de desconto livre de risco possa ser aplicada.

Para que a análise risco-neutro possa ser aplicada, é necessário encontrar as probabilidades risco-neutro que são uma mudança de medida a partir das probabilidades efetivas e o preço de mercado do ativo gêmeo, S . Sabemos que:

$$S = \frac{\pi \times S^+ + (1 - \pi) \times S^-}{(1 + k)} = \frac{50\% \times 36 + 50\% \times 12}{1 + 20\%} = 20$$

Podemos obter as probabilidades risco-neutro implícitas no valor do ativo gêmeo, de tal forma que o ativo gêmeo continue a valer 20 descontado pela taxa livre de risco.

$$S = \frac{\pi \times S^+ + (1 - \pi) \times S^-}{(1 + r)} = \frac{\pi \times 36 + (1 - \pi) \times 12}{1 + 8\%} = 20$$

Resolvendo, obtemos que:

$$\pi = \frac{S(1 + r) - S^-}{(S^+ - S^-)} = 0.4$$

Observemos que a probabilidade de o preço subir no mundo risco-neutro é menor que a probabilidade efetiva, uma vez que no mundo risco neutro usamos a taxa livre de risco para desconto.

A vantagem da utilização das probabilidades risco-neutro é que estas podem ser utilizadas para trazer a valor presente (pela taxa livre de risco) os fluxos de caixas assimétricos típicos de opções reais. Dessa forma, quando há opções reais, utiliza-se o fluxo de caixa esperado risco-neutro (ou equivalente-certo) descontado pelo taxa livre de

risco em lugar de descontar o fluxo de caixa esperado pela taxa ajustada ao risco, ao estilo CAPM.

A partir deste exemplo teremos, nas seções seguintes, exemplos de opções reais.

4.1.1 Opção de Adiar

A licença de exploração permite à administração diferir o investimento de tal modo a se beneficiar da resolução futura da incerteza associada ao preço do petróleo. O investimento seria efetuado apenas se o preço do petróleo estivesse em um patamar mínimo, do contrário, o investimento não seria efetuado. Um pouquinho antes da expiração da licença, o valor da desta será $\max(V-I_1,0)$. Essa opção é semelhante a uma opção de compra americana cujo ativo subjacente é o valor presente do fluxo de caixa do projeto, V , com preço de exercício igual ao investimento necessário, I_1 .

Dessa forma, ao final de um ano, o valor da licença será para um investimento ao final do período de $I_1=112.32= (1,08 \times 10^4)$:

$$E^+ = \max(V-I_1,0)=\max(180-112.32,0)=67.68$$

$$E^- = \max(V-I_1,0)=\max(60-112.32,0)=0$$

O valor do projeto expandido (com flexibilidade), ou seja, com a opção de adiar é:

$$E_0 = \frac{\pi E^+ + (1-\pi)E^-}{1+r} = \frac{0.4 \times 7.68 + 0.6 \times 0}{1+8\%} = 25.07$$

Portanto, o valor da opção de adiar é:

$$\text{Opção de Adiar} = \text{Valor Expandido} - \text{VPL} = 25.07 - (-4) = 29.07$$

O valor da opção real da licença é equivalente a um terço do valor bruto do projeto!

Uma vez que investimento antecipado implica em sacrificar a opção de esperar, esta perda de valor da opção é como um custo de investimento adicional, justificando o investimento apenas se o valor presente do fluxo de caixa superar com folga o valor do desembolso do investimento.

Esses tipos de opções (de adiar) estão presentes nos segmentos de negócios onde há grande incerteza e horizontes longos de maturação do investimento. Exemplos:

- Indústria de extração
- Agropecuária
- Indústria de Papel
- Indústria Siderúrgica
- Imobiliária

4.1.2 Opção de Expandir

Se o preço do petróleo evoluir favoravelmente, a administração pode optar por expandir a produção em $x\%$, incorrendo em um investimento adicional de I_E . É uma situação similar a uma opção de compra americana para adquirir $x\%$ do projeto com preço de exercício I_E . Portanto, a oportunidade de investimento nesse projeto pode ser vista como tendo o valor do projeto mais o valor da opção de expansão, $V + \max(x\%V - I_E, 0)$.

Consideremos que a administração tenha condições de expandir 50% incorrendo em um investimento de $I_E=40$, no caso do preço do mercado ser favorável. Desta forma, essa oportunidade de investimento é vista como o projeto original sem flexibilidade mais a opção de crescimento, ou seja, $E = \max(V, (1+x\%)V - I_E)$:

$$E^+ = \max(180, 270 - 40) = 230$$

$$E^- = \max(60, 90 - 40) = 60$$

O valor dessa oportunidade de investimento, incluindo a opção de expansão será:

$$E_0 = \frac{0.4 \times 230 + 0.6 \times 60}{1 + 8\%} - 104 = 14.5$$

Portanto, o valor da opção de expandir será:

$$\text{Opção de Expandir} = 14.5 - (-4) = 18.5$$

Dessa forma, a administração pode decidir por uma planta mais cara, desde que permita a flexibilidade de expansão no futuro. Essa opção tem importância estratégica ao capitalizar futuras oportunidades de crescimento. Quando um empresa compra um terreno vazio, quando constrói uma planta em um nova região geográfica (nacional ou internacional) para se posicionar de forma vantajosa a desenvolver um mercado maior, esta essencialmente instala um opção de expansão ou de crescimento. Esta opção, que será exercida no futuro apenas se o mercado for favorável, pode parecer desfavorável pela abordagem do VPL.

4.1.3 Opção de Contrair

Se o preço do petróleo se mostrar desfavorável no futuro, a administração pode operar abaixo da capacidade e decidir reduzir a escala em $c\%$, salvando parte do desembolso de investimento de I_C . Essa flexibilidade de diminuir a perda corresponde a uma opção de venda de cerca de $c\%$ do projeto, com preço de exercício igual I_C . O valor dessa opção será $\max(I_C - c\%V, 0)$.

Consideremos que exista a possibilidade de contrair o projeto em 40%, economizando \$ 30. Nesse caso, o valor da opção de contrair será:

$$E^+ = \max(30 - 40\% \times 180, 0) = 0$$

$$E^- = \max(30 - 40\% \times 60, 0) = 6$$

Portanto, o valor da opção de diferir será:

$$E_0 = \frac{0.4 \times 0 + 0.6 \times 6}{1 + 8\%} = 3.33$$

A opção de contrair, assim como a opção de expandir, podem ser particularmente valiosas no caso de introdução de novos produtos em mercados incertos. A opção de contrair também pode ser importante, por exemplo, na escolha entre alternativas tecnológicas de plantas com diferentes custos de manutenção, onde pode ser preferível construir uma planta com custos iniciais menores e com custos de manutenção maiores com o objetivo de alcançar flexibilidade de contrair operações, eliminando custos de manutenção se as condições de mercado se mostrarem não favoráveis.

4.1.4 Opção de Fechar

A planta não precisa necessariamente permanecer em operação por todo o período, automaticamente. Na realidade, se o preço do petróleo for tal que as receitas não cubram o custo variável, seria melhor não operar temporariamente, especialmente se o custo de fechar e reabrir são relativamente pequenos.

Deste modo, a operação em cada ano pode ser vista como uma opção de compra para adquirir o caixa anual, C , pagando os custos variáveis de operação I_V como preço de exercício, isto é, $\max(C - I_V, 0)$.

Opções para alterar a escala de operação (expandir, contrair ou abandonar) são tipicamente presentes em indústrias de extração, tais como operações de mineração, construção em indústrias cíclicas, de moda, bens de consumo e empreendimentos imobiliários.

4.1.5 Opção de Abandonar

Se os preços do petróleo caírem muito ou a operação se mostrar pouco produtiva por outra razão, a administração não é obrigada a continuar incorrendo com os custos

fixos. A administração tem a opção de abandonar o projeto em troca de seu valor residual (isto é, a revenda do equipamento e outros ativos no mercado de usados).

Essa opção é como uma opção de venda sobre o preço do projeto V , com preço de exercício igual ao valor residual. Portanto, o valor do projeto com flexibilidade será $V + \max(A - V, 0)$ ou $\max(V, A)$.

Opções de Abandono são especialmente valiosas em indústrias de capital intensivo, tais como aviação, ferrovias, serviços financeiros, assim como em novas introduções de produtos em mercados incertos.

4.1.6 Opção de Alternar Uso (Insumos e Produtos – “Inputs e Outputs”)

Suponhamos que a refinaria em questão foi desenvolvida de modo a utilizar formas alternativas de energia (óleo, gás ou eletricidade) para converter óleo em uma variedade de produtos (gasolina, lubrificantes ou poliéster). Isto levaria a um valor maior devido à flexibilidade de troca do atual insumo para um insumo mais barato no futuro, do atual produto para um produto mais rentável no futuro, à medida que os preços relativos dos insumos e produtos flutuarem no futuro.

Quando as condições de mercado mudam e os preços relativos dos insumos, produtos e o valor residual da planta mudam, os acionistas podem preferir o uso da planta para uma alternativa, utilização de um novo insumo, produção de um novo produto, ou venda pelo valor residual.

Suponha que o valor do projeto em sua melhor alternativa de uso, A , flutue no tempo como:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
			230.4
		144	
Alternativa	90		115.2
		72	
			57.6

Desta forma, os acionistas podem escolher entre o máximo do valor do projeto, V , e seu valor na melhor alternativa, E , isto é, $E = \max(V, A)$

$$E^+ = \max(V^+, A^+) = \max(180, 44) = 180$$

$$E^- = \max(V^-, A^-) = \max(60, 72) = 72$$

O valor do investimento, incluindo a opção de mudança de uso, é:

$$E_0 = \frac{0.4 \times 180 + 0.6 \times 72}{1 + 8\%} - 104 = 2.67$$

O valor da opção de mudança de uso será:

$$\text{Valor da Opção de Mudança de Uso: } 2.67 - (+4) = 6.67$$

A firma estaria disposta a pagar um prêmio positivo para tal flexibilidade tecnológica em relação a uma alternativa rígida que não confere opção ou menos opções. A firma pode desenvolver usos extras para seus ativos em relação aos seus competidores, tendo uma significativa vantagem. Geralmente, a flexibilidade de “processo” pode ser alcançada apenas via tecnologia, mas também mantendo relações com vários fornecedores, mudando a composição (ou carteira) à medida que os preços relativos mudam. Políticas de subcontratação podem também permitir flexibilidade de contrair escala de operação a um custo menor no caso do mercado se mostrar desfavorável. Uma multinacional pode se localizar em vários países com o objetivo de adquirir flexibilidade de alocar a produção à medida que os custos relativos se modifiquem, principalmente por mudanças de taxas de câmbio.

A flexibilidade de processo é valiosa para empresas dependentes de insumo de commodities, tais como empresas de setores de petróleo, energia elétrica (termoelétricas) e químicas. A flexibilidade de produto, capacitando a empresa de mudar entre alternativas de carteiras de produtos, é mais valiosa em setores como automotivo, eletrônicos, brinquedos e farmacêuticos, onde diferenciação de produto e diversidade são importantes e a demanda é bastante volátil. Em tais casos, pode ser melhor instalar uma

planta mais cara para adquirir a flexibilidade de alterar a carteira de produtos ou a escala de produção em resposta à mudança da demanda.

4.1.7 Opções de Crescimento

Uma outra versão da opção anterior de expandir são as opções de crescimento, que determinam a possibilidade de futuras oportunidades.

Muitos investimentos (P&D, licenças de exploração, aquisição estratégica etc.) podem ser vistos como pré-requisitos ou elos de uma cadeia de projetos interligados. O valor desses projetos pode derivar não muito de seus fluxos de caixa diretamente associados, mas pelo fato de destravarem futuras oportunidades de crescimento (novo produto ou processo, reservas de óleo, acesso a um novo mercado, fortalecimento das competências da empresa ou melhor posicionamento estratégico). Uma oportunidade de investir num produto de alta tecnologia de primeira geração, por exemplo, é uma opção de uma opção (opção composta intra-projeto). Apesar de um VPL negativo, a infraestrutura, a experiência e o potencial de mercado de novos produtos gerados durante o desenvolvimento dos produtos de primeira geração podem servir como caminhos para desenvolvimento de produtos de baixo custo, grande qualidade e grande mercado para futuras gerações do produto. Mas isso só é possível com o investimento inicial. A infraestrutura e experiência podem se tornar proprietárias e podem colocar a empresa em uma posição competitiva, que pode ser reforçada se a curva de aprendizado estiver presente.

As opções de crescimento são encontradas em todas as indústrias baseadas em infraestrutura ou indústrias estratégicas, especialmente de alta tecnologia, P&D, ou indústria com produtos de gerações múltiplas ou aplicações (semi-condutores, computadores e farmacêutica), operações multinacionais e em aquisições estratégicas.

Num contexto mais geral, tal capacidade estratégica, representada pelas opções reais, podem ser alcançadas durante vários estágios da cadeia de valor, pela mudança da composição de insumos entre vários fornecedores e práticas de terceirização, rápida capacidade de design de produto e modelo, capacidade de mudar a carteira de produtos rápida e eficientemente do ponto de vista de custo num sistema de produção flexível.

4.1.8 Opção de Esperar a Queda do Custo de Capital

A incerteza quanto a um projeto pode estar associada não somente ao fluxo de caixa, mas também à taxa de juros. O primeiro trabalho a apresentar a implicação da variação da taxa de juros para opções reais foi a de INGERSOLL & ROSS[14].

No exemplo a seguir está em DIXIT & PINDYCK[7]. Consideremos um projeto com fluxo de caixa perpétuo de \$200 e que a taxa de juros seja igual a 10%. O custo do investimento é de \$ 2000. O valor do projeto no período $t=0$ será:

$$V_0 = \frac{200}{0.20} = 200$$

Se a taxa de juros não for estocástica, o valor esperado do projeto no final do período 1 será:

$$V_1 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = 2,200$$

Consideremos o caso em que a taxa de juros é incerta, com probabilidade de 50% de estar em 5% e 15% no período 1, ou seja:

$$V_1^- = \sum_{t=0}^{\infty} 200/(1.15)^t = 1,533$$

$$V_1^+ = \sum_{t=0}^{\infty} 200/(1.05)^t = 4,255$$

Conseqüentemente o valor esperado de V_1 será:

$$V_1 = 50\% \times 1,533 + 50\% \times 4,200 = 2,867$$

que é maior quando a taxa de juros é incerta. No entanto, apesar desse incremento no valor esperado quando a taxa de juros é incerta, o efeito sobre o investimento da taxa de juros incerta é geralmente de adiar a decisão de investir.

Se não houver incerteza na taxa de juros, podemos usar o Valor Presente Líquido e decidir para investir agora porque o VPL é positivo:

$$VPL = -2,000 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = 200$$

se a taxa for incerta, o VPL será:

$$VPL = -2,000 + 200 + \frac{2867}{1.1} = 806$$

O VPL é positivo em \$806, mas se decidirmos esperar um ano para investir, o VPL será:

$$VPL = 50\% \left[\frac{-2,000}{1.1} + \frac{1}{1.1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.05)^t} \right] = 1,000$$

Portanto, o VPL de esperar é maior que o VPL de investir. Portanto, vale a pena esperar para ver o que acontece com a taxa de juros. Por isso, principalmente para investimentos de longa maturação, pode ser mais importante a menor volatilidade da taxa de juros do que o nível de taxa de juros para determinar o nível de investimentos.

O valor de opção decorrente da variação dos juros é:

$$\text{Valor da Opção Decorrente dos Juros} = 1000 - 806 = 294$$

4.2 Abordagem Geral: Mudanças de Modo de Operação

Qualquer opção real presente em um projeto representa uma flexibilidade administrativa que pode ser vista como a opção de mudar de um modo de operação para outro modo de operação. Por exemplo, pode-se decidir mudar do atual modo de operação de capacidade de produção X para um novo modo de operação com capacidade de produção 2X, a um determinado custo de investimento. Ou seja, quaisquer opções reais podem ser consideradas como flexibilidades de mudar de um modo de operação para outro modo de operação por um determinado custo.

Essa abordagem foi consolidada em TRIGEORGIS & KULATILAKA[41] e representa um esforço de criar uma abordagem genérica para modelagem e apreçamento de opções reais. Até então muito esforço da literatura para casos aplicados resolvia problemas muito específicos e focava em soluções fechadas. Esta abordagem em conjunto com o instrumento de simulação ou árvore binária recombinante permite uma modelagem e apreçamento simples e rápidos das opções reais.

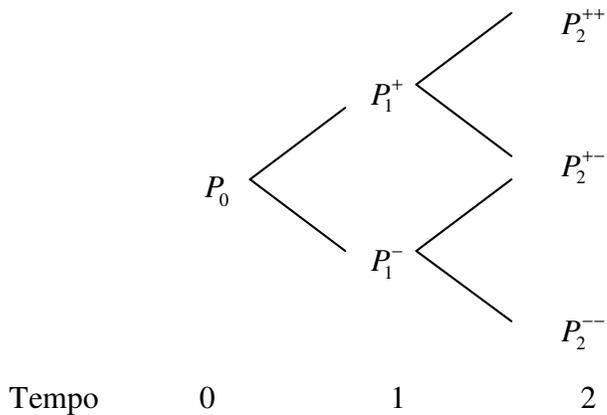
Quando não há custos envolvidos nas mudanças de modos de operação, vale a aditividade das opções reais futuras, e o valor do projeto total é o valor do projeto sem flexibilidade mais a soma do valor das opções individuais de mudar em futuros períodos. No entanto, na presença de custos de mudança, há interação composta onde o valor do conjunto das opções não é a soma do valor das opções individuais, não valendo a aditividade. Neste caso, o valor do projeto deve ser determinado simultaneamente com o modo de operação ótimo, implicando em otimização reversa, como será visto adiante. MCDONALD & SIEGEL[24] apresentam um exemplo com e sem custo de mudança.

Na presença de interação de composição no tempo, aparece o efeito chamado Histerese. Com a presença da histerese, a atratividade imediata de mudança de modo de operação (baseado em fluxo de caixa, por exemplo) não necessariamente é a melhor alternativa, podendo ser melhor esperar considerando decisões ótimas futuras.

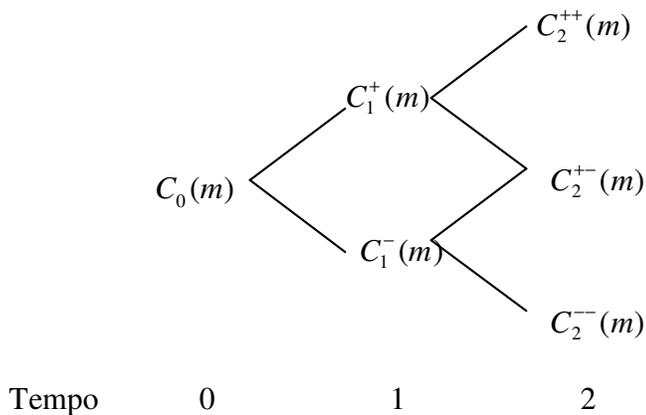
Essa parte do trabalho é baseada no trabalho de TRIGEORGIS & KULATILAKA[41].

4.2.1 Exemplo

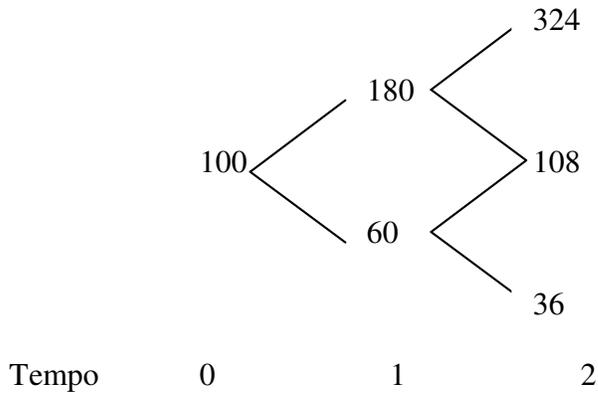
Considere duas alternativas de projetos (mutuamente excludentes), A e B, cujo fluxo de caixa líquido depende de uma única variável aleatória exógena, o preço do petróleo. Por exemplo, pode-se pensar numa fábrica de automóveis usando tecnologias rígidas para produzir um pequeno automóvel. O horizonte de decisão é dividido em dois períodos de tempo durante três períodos de tempo. Assume-se que o preço do petróleo tenha uma evolução binomial, sendo P_t^s o preço do petróleo no tempo t no estado s (onde $s=+$ ou $-$ no final do período 1, ou $++$, $+-$, $-+$, $--$ no final do período 2. A árvore binominal do preço do petróleo está na figura abaixo:



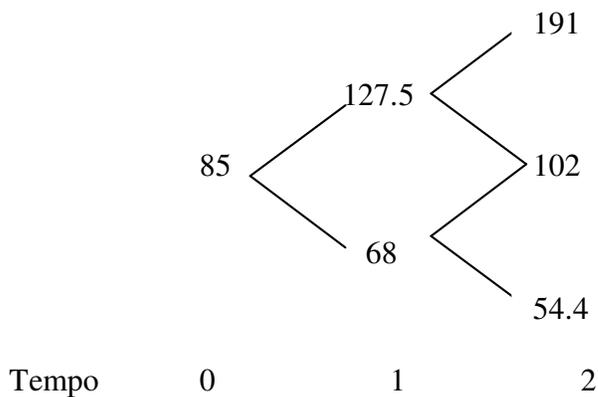
Os fluxos de caixa líquidos dos projetos são contingentes à evolução do preço do petróleo e ao modo de operação empregado. Seja $c_t^s(m)$ o fluxo de caixa líquido a ser gerado no tempo t no estado s no modo de operação m ($m=A,B$), isto é:



Suponhamos, por exemplo, que o projeto A utilize uma tecnologia mais eficiente em termos de utilização de energia, que usa menos petróleo, mas tenha custos fixos mais altos. Durante períodos de preços altos de petróleo, a demanda maior por automóveis implica em maior fluxo de caixa. A tecnologia rígida A gerará os seguintes fluxos de caixa, $c_t^s(A)$, abaixo:



O projeto B, ao contrário, emprega uma tecnologia menos eficiente em termos de consumo de energia ao usar maior quantidade de óleo, mas com menor custo fixo. Conseqüentemente, quando o preço do petróleo é menor, o projeto B geraria maiores fluxos de caixa que o projeto A, enquanto o contrário ocorre com preços do petróleo mais altos. Suponhamos que o fluxo de caixa líquido do projeto usando a tecnologia rígida B, $c_t^s(B)$, abaixo:



Esse exemplo será usado para ilustrar a metodologia proposta por TRIGEORGIS & KULATILAKA[41].

4.2.2 Valor dos Projetos com Tecnologia Rígida

Usando a técnica tradicional de VPL ou fluxo de caixa descontado, o valor presente do fluxo de caixa para cada projeto pode ser obtido descontando fluxos de caixa futuros por uma taxa de desconto ajustada ao risco. Alternativamente, poderia-se fazer a avaliação risco-neutro descontando-se o fluxo de caixa pela taxa livre de risco. Nesse exemplo, a taxa de desconto ajustada ao risco é 20% e a taxa livre de risco é 8%. As probabilidades risco-neutro são 40% para estado “Para cima” e 60% para estado “Para baixo”.

O valor presente do fluxo de caixa usando a tecnologia rígida A pode ser obtida como segue:

$$PV(A) = 100 + [50\% \times 180 + 50\% \times 60]/1.2 + 144/1.2^2 \text{ (taxa ajustada ao risco)}$$

$$PV(A) = 100 + [40\% \times 180 + 60\% \times 60]/1.08 \\ + [40\%^2 \times 324 + 2(40\%)(60\%)108 + 60\% \times 36] / 1.08^2 \text{ (taxa livre de risco)}$$

$$PV(A) = 100 + 100 + 100 = 300$$

Da mesma forma, o valor do projeto B é:

$$PV(B) = 85 + 85 + 85 = 255$$

4.2.3 Valor dos Projetos com Flexibilidade: Sem Custos de Mudança

Primeiramente, consideremos o caso de uma opção de mudar entre as tecnologias A e B, sem nenhum custo. Obviamente, o direito de mudar entre as duas tecnologias fazem o valor do projeto com flexibilidade, $V(F)$, maior que o valor de um dos projetos com tecnologia rígida. Isto é $V(F) \geq \max(PV(A), PV(B))$.

O valor do projeto com flexibilidade excede o valor do projeto rígido A pelo valor da flexibilidade de mudar a operação de A para B, aqui denotado por $F(A \rightarrow B)$. Dessa forma, o valor do projeto com flexibilidade será:

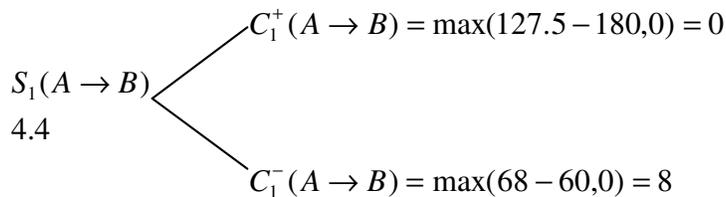
$$V(F) = PV(A) + F(A \rightarrow B)$$

ou seja, o valor do projeto sem flexibilidade mais o valor da flexibilidade (ou opções reais).

Nesse caso, sem custos de mudança, o valor da flexibilidade é a soma das três opções (européias) de mudar de A para B, denotado por $S_t(A \rightarrow B)$, no período 0, 1 e 2, respectivamente. Isto é, $F(A \rightarrow B) = S_0(A \rightarrow B) + S_1(A \rightarrow B) + S_2(A \rightarrow B)$.

Seja $c_t^s(A \rightarrow B)$ o fluxo de caixa incremental de mudar da tecnologia A para B no período t , no estado s , se valer a pena. Isto é, $c_t^s(A \rightarrow B) \equiv \max(c_t^s(B) - c_t^s(A), 0)$. No exemplo acima, a opção de mudar imediatamente tem valor nulo $S_0(A \rightarrow B) = \max(85 - 100, 0) = 0$.

Trocando de A para B no ano 1, resulta no seguinte fluxo de caixa para cada estado:



Tempo 0 1

O valor da opção de mudar da operação A para B no ano 1 é dado por:

$$S_1(A \rightarrow B) = [40\% \times 0 + 60\% \times 8] / 1.08 = 4.4$$

O mesmo pode ser feito para o ano 2 e obtemos:

$$F(A \rightarrow B) = S_0(A \rightarrow B) + S_2(A \rightarrow B) + S_3(A \rightarrow B)$$

$$F(A \rightarrow B) = 0 + 4.4 + 5.7 = 10.1$$

Portanto, o projeto com flexibilidade de mudar de operação é melhor que o projeto rígido, desde que seu valor adicional em relação ao projeto rígido seja menor que 10.1. Portanto o valor do projeto com flexibilidade é:

$$V(F) = PV(A) + F(A \rightarrow B) = 300 + 10.1 = 310.1$$

Na ausência de custos de mudança, o preço do projeto com flexibilidade de mudar da tecnologia A para B é equivalente ao projeto com flexibilidade de mudar do projeto B para A. Ou seja:

$$V(F) = PV(B) + F(B \rightarrow A) = PV(A) + F(A \rightarrow B)$$

Alternativamente, o projeto com flexibilidade pode ser avaliado como um pacote pelo fato de seu fluxo de caixa ser o maior das duas tecnologias, isto é:

$$c_2^s(F) = \max(c_2^s(A), c_2^s(B)).$$

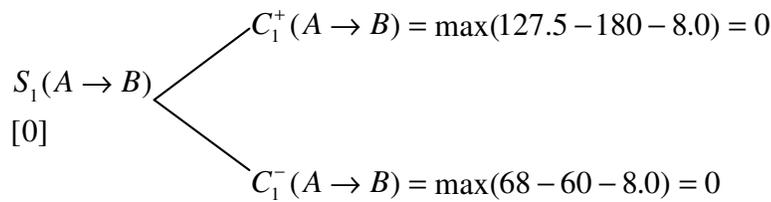
4.2.4 Valor dos Projetos com Flexibilidade: Com Custos de Mudança

No caso anterior, a ausência de custos de mudança implica que a decisão de mudar afeta o fluxo de caixa atual mas não o fluxo de caixa das decisões subseqüentes. Por isso, vale a aditividade. Quando há custos de mudança de um modo de operação para outro, a decisão de mudar afeta futuras decisões, não valendo mais o princípio de aditividade.

Na presença de custos de mudança, o exercício de uma opção (de mudar de um modo de operação para outro) cria uma série de opções implícitas (de mudar no futuro) análogas a uma opção composta, o que invalida a aditividade.

Seja $I(A \rightarrow B)$ o custo de mudar da tecnologia A para B. Na presença de custos de mudança, o fluxo de caixa incremental de mudar de A para B será $c_t^s(A \rightarrow B) \equiv \max(c_t^s(B) - c_t^s(A) - I(A \rightarrow B), 0)$. Por exemplo, suponhamos que $I(A \rightarrow B) = 8$ e $I(B \rightarrow A) = 2$. Usando o exemplo anterior, apenas acrescentando os custos de mudança, temos:

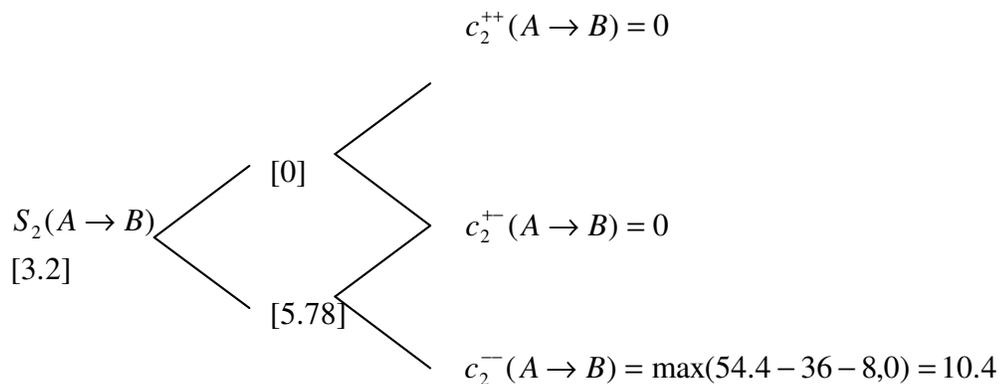
$$S_0(A \rightarrow B) = \max(85 - 100 - 8, 0) = 0$$



Tempo 0 1

Dessa forma, a opção de mudar no período 1 se torna sem valor ao se acrescentar o custo de mudança de \$8.

Similarmente, a opção de mudança no período vale:



Tempo 0 1 2

Deste modo, a soma das três opções de mudar de A para B é:

$$S_0(A \rightarrow B) + S_2(A \rightarrow B) + S_3(A \rightarrow B) = 0 + 0 + 3.2 = 3.2$$

Similarmente, a soma do valor da opção de mudar de B para A é:

$$S_0(B \rightarrow A) + S_2(B \rightarrow A) + S_3(B \rightarrow A) = 13 + 18.7 + 19.6 = 51.3$$

Portanto, $PV(A) + \sum S_t(A \rightarrow B) = 300 + 3.2 = 303.2$, que não é equivalente a $PV(B) + \sum S_t(B \rightarrow A) = 255 + 51.3 = 306.3$. Na presença de custos de mudança, o projeto com flexibilidade não pode ser visto com a soma do valor do projeto com flexibilidade mais a soma das opções de mudar para a outra tecnologia.

Na realidade, o valor do projeto com flexibilidade, $V(F)$, difere de ambos os valores acima. Como a decisão atual de mudar ou não afeta a tecnologia em que a empresa operaria nos períodos futuros, esta impacta em futuros custos de mudança (isto é, futuros preços de exercício das opções futuras) e o conjunto de futuras decisões de mudança, necessitando-se do uso de programação dinâmica. Escolhas futuras serão dependentes da trajetória. Nestes casos, o valor do projeto com flexibilidade, V , deve ser determinado simultaneamente com o modo de operação ótimo.

Em relação ao projeto com flexibilidade, existem duas escolhas: continuar a operar no atual modo de operação (tecnologia A) por mais um período – e receber o fluxo de caixa atual, $c_t^s(A)$, mais o valor esperado dos valores futuros, assumindo a operação ótima futura, ou mudar imediatamente para B, pagando um custo de mudança em troca do fluxo de caixa corrente de B mais os fluxos de caixas futuros associados. Em um modo, mudar seria ótimo apenas se o valor de mudar excedesse o valor de adiar a mudança. Isto é:

$$V_t^s(A) = \max(c_t^s(A) + \hat{E}[V_{t+1}^s(A)/(1+r), c_t^s(B) + \hat{E}[V_{t+1}^s(B)/(1+r) - I(A \rightarrow B)])$$

Onde:

$$\hat{E}[V_{t+1}^s(i)] \equiv \pi V_{t+1}^+(i) + (1-\pi)V_{t+1}^-(i), i=A \text{ ou } B;$$

$c_t^s(m)$: fluxo de caixa no período t e estado s na tecnologia ou modo m ;

$V_t^s(m)$: projeto com flexibilidade no período t dado que entrou no estado s com a tecnologia m , assumindo ótimas decisões futuras;

$m_t^s(i)$: modo de operação ótimo no período t dado que entrou-se no estado s com tecnologia i ($i=A$ ou B);

$\hat{E}[\cdot]$: operador esperança risco-neutro (usando probabilidade risco-neutro, π).

Para resolvermos este problema, teremos de fazer uma solução iterativa reversa, começando do período final T (aqui $t=2$), onde a expressão acima é simplificada para:

$$V_T^s(A) = \max(c_T^s(A), c_T^s(B) - I(A \rightarrow B) = c_T^s(A) + \max([c_T^s(B) - c_T^s(A)] - I(A \rightarrow B), 0))$$

onde a última expressão reproduz uma opção de compra que paga o fluxo de caixa incremental de mudança do modo de operação de A para B em troca do preço de exercício, que é o custo de mudança $I(A \rightarrow B)$.

Aplicando esta abordagem no exemplo acima, obtemos os valores terminais $V_2^s(A)$, assumindo que operação começa com a tecnologia A :

$$V_2^{++}(A) = \max(324, 191 - 8) = 324; m_2^{++}(A) = A(\textit{permanecer})$$

$$V_2^{+-}(A) = \max(108, 102 - 8) = 108; m_2^{+-}(A) = A(\textit{permanecer})$$

$$V_2^{-+}(A) = \max(36, 54.4 - 8) = 46.4; m_2^{-+}(A) = B(\textit{mudar})$$

Da mesma forma, se a operação é iniciada com a tecnologia B :

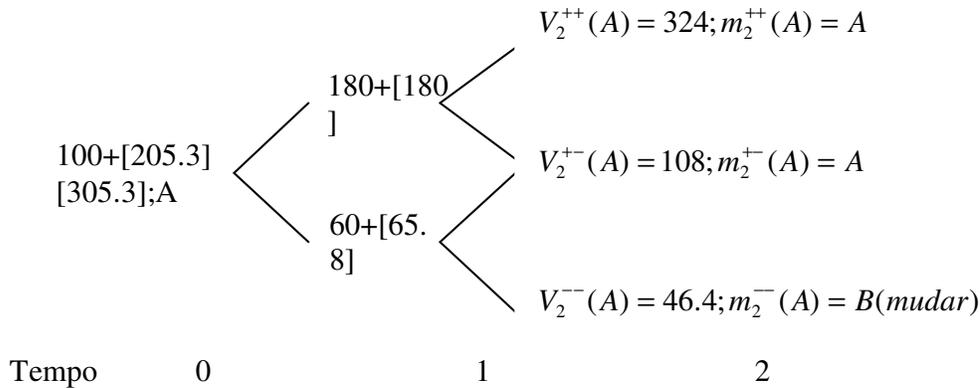
$$V_2^{++}(B) = \max(191, 324 - 2) = 322; m_2^{++}(B) = A(\textit{mudar})$$

$$V_2^{+-}(B) = \max(102, 108 - 2) = 106; m_2^{+-}(B) = A(\textit{mudar})$$

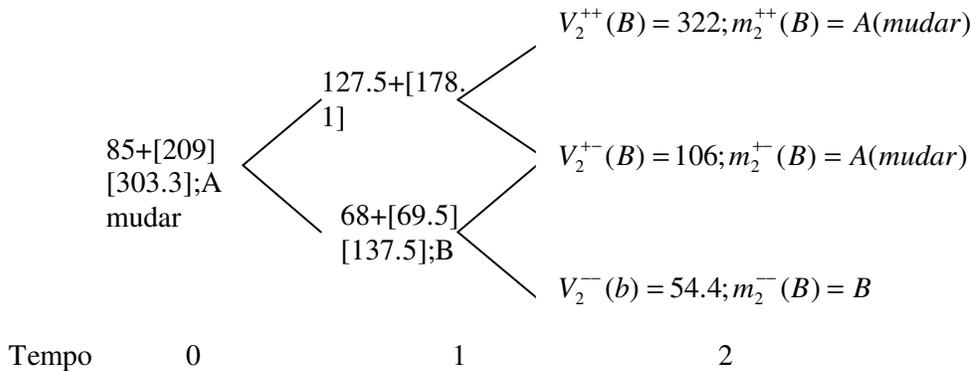
$$V_2^{--}(B) = \max(54.4, 36 - 2) = 54.4; m_2^{--}(B) = B(\textit{permanecer})$$

O processo iterativo reverso acima resulta em duas “árvores de decisão”, cada uma com um conjunto de valores de projeto, $V_t^s(i)$, tecnologia de operação ótima ou modo ótimo, $m_t^s(i)$, dependendo se a operação é iniciada no período 0 com a tecnologia A ou B:

Se a operação é iniciada com a tecnologia A, então:



Se a operação é iniciada com a tecnologia B, então:



O valor presente (risco-neutro) dos pagamentos futuros está apresentado entre parênteses. Para cada modo de operação ou tecnologia, adiciona-se ao fluxo de caixa corrente o fluxo de caixa descontado (risco-neutro) dos benefícios futuros de operar naquele modo (líquido) de custo de mudança e selecionar a tecnologia resultante no maior valor. Por exemplo:

$$V_1^+(A) = \max[c_1^+(A) + \{\pi V_2^{++}(A) + (1-\pi)V_2^{+-}(A)\}/(1+r);$$

$$c_1^+(B) + \{\pi V_2^{++}(B) + (1-\pi)V_2^{+-}(B)\}/(1+r) - I(A \rightarrow B)]$$

$$V_1^+(A) = \max(180 + [180], 127.5 + [178.1] - 8) = \max(360, 297.6)$$

Portanto, o modo ótimo $m_1^+(A) = A(\text{manter})$. Similarmente:

$$V_1^-(A) = \max[c_1^-(A) + \{\pi V_2^{+-}(A) + (1-\pi)V_2^{--}(A)\}/(1+r);$$

$$c_1^-(B) + \{\pi V_2^{+-}(B) + (1-\pi)V_2^{--}(B)\}/(1+r) - I(A \rightarrow B)]$$

$$V_1^-(A) = \max(60 + [65.8], 68 + [69.5] - 8) = \max(125.8, 129.5)$$

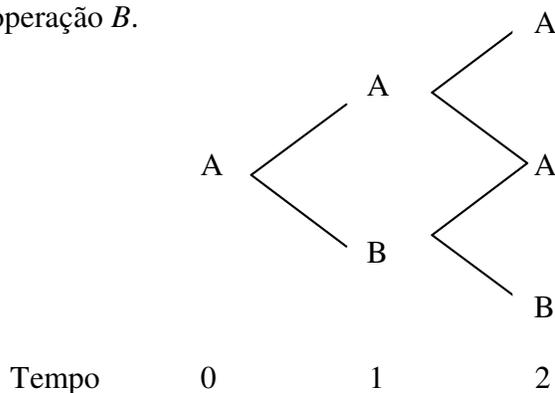
Finalmente:

$$V_0(A) = \max(100 + [205.3], 85 + [209] - 8) = 305.3$$

O melhor modo de operação para iniciar (a partir da tecnologia A) é $m_0(A) = A$.

Similarmente, $V_0(B) = 303.3$, ou seja, o melhor modo de operação inicial a partir de B é a tecnologia A , ou seja, mudar imediatamente do modo de operação para A .

A partir de A , a seqüência ótima de operação é apresentada no gráfico abaixo. Deve-se iniciar a operação com a tecnologia A e mudar para a tecnologia B no período 1 quando os preços caírem, e permanecer se os preços subirem. No período 2, deve-se mudar de volta para a operação A apenas se os preços subirem a partir do modo de operação B .



O efeito composto introduzido pelos custos de mudança causam uma interação entre as opções de mudança, violando a aditividade. O valor da flexibilidade além do valor do projeto com tecnologia rígida é:

$$F(A \rightarrow B) = V(F) - PV(A) = 305.3 - 300 = 5.3$$

$$F(B \rightarrow A) = V(F) - PV(B) = 305.3 - 255 = 50.3$$

No caso de não ser possível a mudança imediata (no período zero), o valor da flexibilidade a partir do projeto B é de \$39. Observe que o projeto com custo de mudança vale \$ 4.8 (310.1-305.3) a menos que o projeto sem custos de mudança. A soma das opções separadamente não corresponde ao valor total da flexibilidade, resultado do efeito da composição das opções reais.

4.2.5 Valor dos Projetos com Flexibilidade: Uma Generalização

A abordagem acima pode ser generalizada para mais de três períodos ($t=0,1,2,\dots,T$) para cobrir quaisquer números de estados ($s=0,1,2,\dots,n$) e para mais do que apenas duas tecnologias ou modos de operação ($i=0,1,2,\dots,m$) dentro de um processo iterativo reverso, visto como discreto, economicamente ajustado. Como salientado em TRIGEORGIS & KULATILAKA[41], esta é uma versão economicamente ajustada da equação de Bellman de programação dinâmica. Começando pelo final e voltando ao início, o valor do projeto com flexibilidade no estado s em qualquer período, $t-1$, seria obtido pelo valor esperado descontado (com probabilidades risco-neutro descontadas pela taxa livre de risco), como segue¹¹:

$$V_{t-1}^s(m) = \max_i \left[F_{t-1}^s(i) + \frac{\pi V_t^{s+1}(i) + (1-\pi)V_t^{s-1}(i)}{1+r} - I_{m \rightarrow i} \right] \quad (4.1)$$

¹¹ Foi efetuada algumas mudanças de notação para facilitar a relação dessa fórmula com as fórmulas do capítulo 6.

- π : Probabilidade risco-neutro do fluxo de caixa no estado “up”;
- $F_t^s(i)$: Fluxo de caixa no estado s , no tempo t , no modo de operação i ;
- $V_t^s(i)$: Valor Presente do projeto no estado s , no tempo t , no modo de operação i ;
- $I_{m \rightarrow i}$: Custo de mudança do modo de operação m para i , $I_{m \rightarrow m} = 0$;
- r : Taxa de juros livre de risco.

No período final ($t=T$) quando o processo se inicia, a expressão se torna:

$$V_T^s(m) = \max_i [F_T^s(i) - I_{m \rightarrow i}] \quad (4.2)$$

com $F_T^s(i)$ sendo o fluxo de caixa terminal (ou valor residual) quando entrando no estado s enquanto no modo de operação i . O processo pode ser aplicado iterativamente, movendo para trás passo a passo até o começo ($t=0$), então se obtém o valor em conjunto com o modo ótimo de operação.

No caso de ausência de custos de mudança, a solução para o problema genérico de otimização é equivalente a uma série de soluções locais, otimizando para cada período o fluxo de caixa imediato.

Nessa abordagem, a maioria das opções reais (abandonar, expandir etc.) são avaliadas como casos especiais do caso genérico de flexibilidade de mudança, sendo em essência uma opção de alternar entre modos de operação. Os modos de operação são agora definidos mais genericamente como várias alternativas, do que apenas tecnologias. Por exemplo, pode-se pensar num projeto em vários modos de operação:

- Modo 0: não operar (*diferir* um investimento ou *fechar* temporariamente);
- Modo 1: operar um projeto em escala básica (*investir* ou *produzir*);
- Modo 2: *expandir* a escala de produção;
- Modo 3: *contrair* operações;
- Modo 4: *abandonar* pelo valor residual ou *abandonar* durante a construção;
- Modo 5: *trocar* (inputs ou outputs).

A apropriada interpretação econômica de (4.1) e (4.2) é que esta representa o valor presente da melhor estratégia de operação futura, condicionada à informação futura, à flexibilidade e aos custos de mudança de modos de operação. Na fórmula de apreçamento (4.1) e (4.2), utiliza-se sempre a taxa livre de risco, o que implica na utilização de probabilidades risco-neutro. Portanto, é necessário um ajuste econômico nas probabilidades efetivas para que as probabilidades risco-neutro reflitam o prêmio de risco de mercado das fontes de incertezas do projeto. O detalhamento desse ajuste para simulação será feito no capítulo seguinte.

5 Modelagem das Incertezas

5.1 Modelando Processos Estocásticos

Apresentaremos nessa seção a modelagem dos dois principais processos estocásticos para aplicação em avaliação de projetos:

- Movimento Browniano Geométrico (MBG)
- Movimento com Reversão à Média Geométrico (MRMG)

Nesse trabalho não será tratado processo com salto estocástico (“jump”), que é mais adequado para o apreçamento de alguns tipos de incerteza.

5.1.1 Movimento Browniano Geométrico

5.1.1.1 Custo de Capital e Taxa Média de Retorno

Como apresentado em DUFFIE[8], o processo estocástico mais utilizado, o MBG, de um ativo P , é descrito na versão contínua como:

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t$$

De maneira mais genérica, os parâmetros podem ser vistos com casos específicos:

$$A(P_t, t) = \mu$$

$$B(P_t, t) = \sigma$$

Onde:

P_t : preço do ativo no instante t ;

μ : taxa de evolução do preço do ativo ou custo de capital (taxa de desconto);

σ : volatilidade ou desvio-padrão da variação do preço do ativo;

dW_t : diferencial de uma variável que segue um processo de Wiener.

Para obter-se o processo estocástico do logaritmo do preço, ou da taxa de retorno, basta aplicar o Lema de Itô na função $\ln(P)$ como em DUFFIE[8] e obtém-se:

$$d \ln P_t = R_p(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Observemos que, apesar do custo de capital ou a taxa de desconto ser igual a μ , a taxa média de retorno do ativo que segue um MBG é igual a $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$, ou seja, menor que o custo de capital.

Essa característica desse processo estocástico é importante para a modelagem como também para entender alguns efeitos não diretamente esperados. Consideremos para efeito de exemplo que o custo de capital médio de um portfólio diversificado e sua respectiva volatilidade no Brasil e EUA sejam os da tabela abaixo:

País	Custo de Capital Médio	Volatilidade
Brasil	9%	35%
EUA	5%	15%

Qual será a taxa de retorno médio dos portfólios dos respectivos países?:

$$\text{Brasil} = 9\% - (35\%^2 / 2) = 9\% - 6.125\% = 2.875\%$$

$$\text{EUA} = 5\% - (15\%^2 / 2) = 5\% - 1.125\% = 3.875\%$$

Mesmo o Brasil, tendo um custo de capital 4% maior que os EUA, o retorno médio esperado é menor que o retorno do portfólio americano neste exemplo. Esse exemplo ilustra bem o efeito da volatilidade na taxa média de retorno, o que muitas vezes não se é levado em conta nas simulações *ex post* usando dados históricos de cotações.

5.1.1.2 Modelando Incertezas

Usando a abordagem, deduz-se a modelagem da evolução do preço do ativo para efeito de simulação:

$$P(t) = P(0) \times \exp(R_p(t))$$

onde $R_p(t)$ é uma variável aleatória com distribuição:

$$R_p(t) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}; \sigma^2\right)$$

Modelando dessa forma teremos por coerência que:

$$P(0) = \frac{E[P(t)]}{\exp(\mu)}$$

uma vez que $E[P(t)] = P(0) \times \exp(\mu)$.

5.1.1.3 Características do Processo

Como mostrado por DIXIT & PINDYCK[7], o valor esperado de $P(t)$ para o valor corrente $P(0)$ é:

$$E[P(t)] = P(0) \exp\{\mu t\}$$

A variância de $P(t)$ é dada por:

$$V[P(t)] = P(0)^2 \exp\{2\mu t\} (\exp\{\sigma^2 t\} - 1)$$

Como consequência, o intervalo de confiança no tempo (banda de confiança) cresce indefinidamente no tempo, justificando a composição do prêmio de risco na taxa de desconto.

5.1.1.4 Modelando Incertezas Correlacionadas

As incertezas presentes nos projetos podem ser correlacionadas entre si. Portanto, na modelagem de projetos nesse caso há de se considerar as correlações. A modelagem aqui sugerida considera uma distribuição normal conjunta para as duas variáveis normais correlacionadas.

Consideremos que tenhamos dois preços de ativos, P_1 e P_2 , cujos processos estocástico sejam MBG correlacionados. Portanto, temos os dois processos:

$$dP(t)_1 = \mu_1 P_1(t) dt + \sigma_1 P_1(t) dW_1(t)$$

$$dP_2(t) = \mu_2 P_2(t) dt + \sigma_2 P_2(t) dW_2(t)$$

$$dW_1(t) dW_2(t) = \rho dt$$

Consideremos ainda que a correlação entre os processos é denotada por ρ e a covariância por σ_{12} .

Uma vez que:

$$\mathbb{E}[dW_1(t)] = 0$$

$$\mathbb{V}[dW_1(t)] = dt$$

$$\mathbb{C}[dW_1(t); dW_2(t)] = \rho [dW_1(t); dW_2(t)] \sqrt{\mathbb{V}[dW_1(t)]} \sqrt{\mathbb{V}[dW_2(t)]} = \rho dt$$

Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} dt & \rho dt \\ \rho dt & dt \end{bmatrix} \right)$$

Se P_1 e P_2 forem adaptados ao mesmo MBG, $\rho=1$ e $dW_1(t) = dW_2(t)$, o que implica $dW_1^2 = dt$.

Para a modelagem desses processos para efeito de simulação, adotamos os seguintes procedimentos:

- 1) Simulam-se dois processos com distribuição normal padronizada independentes ε_1 e ε_2 , que portanto, são normalmente distribuídos com média zero e desvio-padrão unitário.
- 2) Como apresentado em KLEIJNEN & GROENENDAAL[17], modela-se a parte estocástica dos processos de acordo com as fórmulas a seguir:

$$\Delta W_1(t) = \varepsilon_1$$

$$\Delta W_2(t) = \rho \varepsilon_1(t) + \sqrt{(1-\rho^2)} \varepsilon_2(t)$$

Uma vez que:

$$\begin{bmatrix} \Delta W_1(t) \\ \Delta W_2(t) \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \Delta t & \rho \Delta t \\ \rho \Delta t & \Delta t \end{bmatrix} \right)$$

e fazendo $\Delta t = 1$

$$\begin{bmatrix} \Delta W_1(t) \\ \Delta W_2(t) \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$$

- 3) Por fim, modelam-se os dois processos das incertezas:

$$P_1(t) = P_1(t-1) \times \exp\left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} + \Delta W_1(t)\right)$$

$$P_2(t) = P_2(t-1) \times \exp\left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \Delta W_2(t)\right)$$

Decorrente da normalidade bivariada $\Delta W_i(t) \sim N(0; \Delta t)$, para $i=1,2$. e para efeito de simulação, geralmente $\Delta t = 1$.

Observemos que as duas fórmulas acima valem apenas para simulação, uma vez que o valor esperado será:

$$P_1(t) = P_1(t-1) \times \exp(\mu_1)$$

$$P_2(t) = P_2(t-1) \times \exp(\mu_2)$$

5.1.1.5 Modelando Incertezas Comercializadas Risco-Neutro

No caso do preço de um ativo comercializado, o processo estocástico do ativo pode ser modelado pela abordagem risco-neutro da forma:

$$dP_t = \mu_{RF} P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad (5.1)$$

onde:

μ_{RF} - taxa de desconto livre de risco

Observemos que, uma vez que o prêmio de mercado, λ , é igual a:

$$\lambda = \mu - \mu_{RF}$$

o preço do ativo pode ser calculado

$$P_0 = \frac{E^*[P_1]}{\exp(\mu_{RF})}$$

onde $E^*[P_1]$ representa a esperança do preço usando o processo estocástico da fórmula (5.1), também chamado de equivalente certo, pelo fato de usar probabilidades neutras ao risco.

5.1.1.6 Modelando Incertezas Não-Comercializadas Risco-Neutro

Como mostrado na seção anterior, para apreçamento risco-neutro de ativos negociados, basta substituir a taxa de crescimento do preço do ativo (custo de capital ou “drift”) pela taxa livre de risco. Esse ajuste simples é decorrente do fato de o preço do ativo já estar ajustado pelo mercado, de tal forma que reflita o prêmio de risco para sua incerteza.

No caso de uma incerteza não comercializada (a maioria dos casos de fluxos de caixa) isso não é necessariamente verdade porque a relação abaixo não é tautológica:

$$\mu = \mu_{RF} + \lambda$$

Isso porque o crescimento (ou “drift”) do processo estocástico μ , pelo fato de não ser comercializado, não estará ajustado para representar o prêmio de risco de mercado. Nesse caso não basta substituímos μ por μ_{RF} para efeito de apreçamento risco-neutro.

No caso de ativos não-comercializados, será necessária a estimativa do prêmio de mercado, λ , uma vez que este não necessariamente estará implícito no preço da incerteza do ativo. Portanto, uma vez estimado λ , o processo estocástico para apreçamento risco-neutro evoluirá como:

$$dP_t = (\mu - \lambda)P_t dt + \sigma P_t dW_t$$

Observe que no caso de incertezas não-comercializadas $(\mu - \lambda)$ não necessariamente será igual a μ_{RF} .

5.1.2 Reversão à Média

A maioria dos processos estocásticos das incertezas básicas de projetos não segue um movimento browniano geométrico. Isso porque não é razoável supor para várias incertezas da economia (como o Produto Interno Bruto) que sua incerteza aumenta no decorrer do tempo. Há a tendência de retorno a uma média de longo prazo, tanto para os preços como para as quantidades demandadas, seja por força dos componentes de oferta ou por forças dos componentes de demanda.

5.1.2.1 Evolução do Fluxo de Caixa e Taxa de Desconto

O processo estocástico mais usado para modelagem de reversão à média em projetos é o Ornstein-Ühlenbeck exponencial, como apresentado em HOLTAN[11]. O processo segue abaixo:

$$dP(t) = k[g(t) - \ln P(t)]P(t)dt + \sigma P(t)dW_t$$

Onde:

k - velocidade de reversão à média, onde $k = \frac{1}{\eta} \ln 2$ e η é a meia-vida que leva o processo a voltar ao nível de longo prazo

$g(t)$ - função nível de reversão ou nível de longo prazo

Ao aplicarmos o lemma de Itô na função $\ln[P(t)]$, temos então o processo estocástico da taxa de variação do preço ou incerteza:

$$d \ln P(t) = \left\{ k \left[g(t) - \frac{1}{2k} \sigma^2 - \ln P(t) \right] \right\} dt + \sigma dW_t$$

Observemos que a taxa média de evolução tem o fator de desconto $\frac{1}{2} \sigma^2$ em relação à taxa de crescimento do processo estocástico da incerteza.

5.1.2.2 Modelando Incertezas

Dessa forma, para modelar-se a evolução de uma incerteza com reversão à média, basta calcular:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \Delta P(t)$$

Dessa forma, modela-se P_t para efeito de simulação:

$$P(t) = P(t-1) \times \exp \left\{ k \left[g(t) - \frac{1}{2k} \sigma^2 - \ln [P(0)] \right] + \sigma \Delta W(t) \right\}$$

Mas $\mathbb{E}[P(t)]$ é:

$$\mathbb{E}[P(t)] = P(t-1) \times \exp \left\{ k [g(t) - \ln(P(0))] \right\}$$

5.1.2.3 Características do Processo

Para um valor corrente $P(t-1)$, o valor esperado do $P(t)$ é:

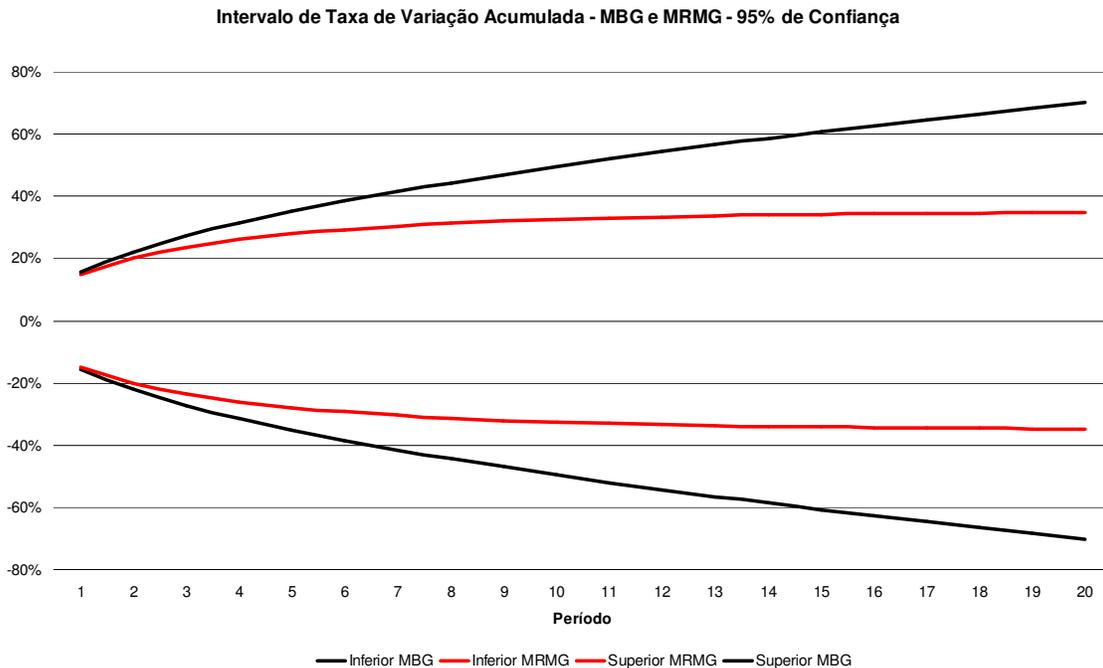
$$\mathbb{E}[P(t)] = P(t-1) \times \exp \left\{ k [g(t) - \ln(P(0))] \right\}$$

E a variância de $\ln(P(t)) - g(t)$ é dada pela equação:

$$\mathbb{V}[\ln(P(t)) - g(t)] = \mathbb{V}[\ln(P(t))] = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - \exp\{-2kt\})$$

Observemos a partir dessas equações que $P(t)$ converge para $g(t)$ à medida que o tempo passa e a variância converge para $\frac{\sigma^2}{2k}$. Ao contrário do MBG, em que a incerteza aumenta no tempo, no MRMG fica constante depois de determinado período.

Consideremos somente para efeito de ilustração, uma taxa de retorno esperada zero para dois processos, um MBG e MRMG, com $\sigma = 0.08$ para ambos e $k = 0.1$ para o MRMG. O gráfico abaixo apresenta o intervalo de confiança de 95% para a taxa de variação acumulada.



No MBG, a incerteza cresce no tempo indefinidamente e justifica a composição da taxa de prêmio de risco com o tempo. No MRMG, a incerteza cresce apenas até

determinado período, sendo a composição do prêmio de risco apenas parcial no tempo. Para mais detalhes ver HOLTAN[11].

5.1.2.4 Modelando Incertezas Correlacionadas

A hipótese de distribuição multivariada e de modelagem das componentes estocásticas deste item é idêntica ao item 5.1.1.4. No processo com reversão à média, o preço (ou incerteza) evoluirá para efeito de simulação:

$$P(t) = P(t-1) \times \exp\{k[g(t) - \ln(P(0))] + \Delta W(t)\}$$

5.1.2.5 Modelando Incertezas para Apreçamento Risco-Neutro

Se para a incerteza σ há um prêmio de risco associado λ , o processo estocástico com reversão à média modelado da forma risco-neutro será, como demonstrado em HOLTAN[11]:

$$d \ln P(t) = k \left\{ \left[g(t) - \frac{1}{2k} \sigma^2 - \ln P(t) \right] - \lambda \right\} dt + \sigma dW(t)$$

o que resulta em:

$$d \ln P(t) = k \left[g(t) - \frac{\lambda}{k} - \frac{1}{2k} \sigma^2 - \ln P(t) \right] dt + \sigma dW(t)$$

Ou seja, o processo da variação do fluxo de caixa acima permite um desconto usando apenas a taxa livre de risco, uma vez que já está ajustado para o risco. Observemos que o ajuste de risco no MRMG nada mais é do que uma mudança no nível de reversão à média, que tem um efeito bem mais modesto que no MBG, uma vez que o

risco é dissipado no MRMG. Ou seja, o prêmio de risco é capitalizado integralmente no MBG mas não no MRMG.

5.2 Decompondo a Estrutura de Risco do Projeto

Nessa seção será apresentada uma estrutura analítica para modelar as incertezas de um fluxo de caixa a partir de suas incertezas básicas. Esta estrutura é muito útil na estruturação do fluxo de caixa para apreçamento de opções reais, permitindo ao avaliador identificar a contribuição de cada incerteza para o valor da opção.

Essa estrutura sugerida é uma contribuição desse trabalho com o objetivo de apresentar uma abordagem de modelagem que permita apreçar um projeto a partir das suas fontes básicas de incertezas, sejam estas privadas ou de mercado. Dessa forma, pode-se identificar a contribuição de cada incerteza para o valor das opções reais.

5.2.1 Decompondo o Risco do Projeto

O fluxo de caixa de um projeto é afetado por várias fontes de risco. Mas as principais fontes de risco são:

- Fatores de Riscos Básicos
- Alavancagem Operacional
- Alavancagem de Capital de Giro
- Alavancagem Financeira

A primeira fonte de incerteza são os fatores básicos de risco. Estes são: preço, custo variável unitário e quantidade demandada. Eles dependem da economia e da dinâmica da indústria. Essas incertezas são chamadas de incertezas privadas se não forem relacionadas com o mercado, ou de incertezas de mercado se forem relacionadas com o mercado.

A segunda fonte de incerteza é a alavancagem operacional. Os custos fixos aumentam a variação da margem operacional bruta. Este incremento de incerteza é chamado de alavancagem operacional.

A terceira fonte de incerteza é chamada aqui de alavancagem do capital de giro. Basicamente, o capital de giro, G, compreende:

$$G = A + I - B$$

A = Clientes

I = Estoques

B = Fornecedores

A variação do capital de giro deve ser descontada do Resultado Operacional Líquido para representar o conceito de fluxo de caixa operacional em lugar do conceito contábil de competência presente no resultado operacional líquido. Como é o fluxo de caixa que afeta o custo de oportunidade de consumo do investidor, a variação deste é que é relevante para efeito de mensuração de risco. A variação do capital de giro pode aumentar ou diminuir a incerteza do fluxo de caixa operacional do projeto, dependendo de sua estrutura.

A quarta fonte de incerteza é a alavancagem financeira, ou a porcentagem do capital que é financiado por dívida. O fluxo de caixa livre é o fluxo de caixa operacional subtraído dos impostos. A alavancagem financeira tem um efeito similar na alavancagem operacional, uma vez que esta aumenta a incerteza para os acionistas.

As quatro fontes de incerteza atuam em conjunto, formando o risco do fluxo de caixa do projeto. Esse risco pode ser decomposto nas diferentes fontes, e em diversificável e não diversificável. Para o risco não diversificável, os investidores exigirão um prêmio por não ser possível eliminar esse risco diversificando seus portfólios.

As quatro fontes de incerteza não afetam o risco do projeto da mesma forma. Portanto, sugerimos uma estrutura analítica para essa modelagem das incertezas. A abordagem sugerida para a modelagem é apresentada na figura abaixo:

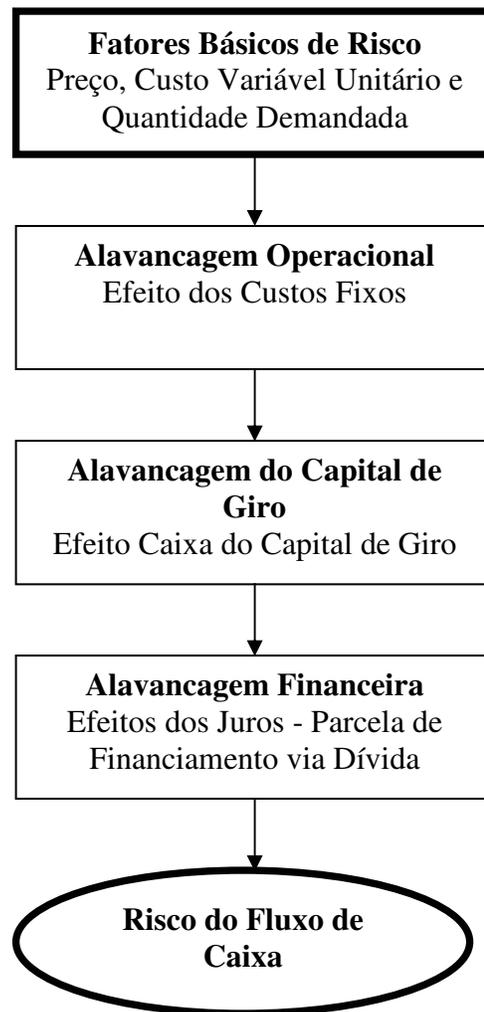


Figura 5.1 Estrutura de Modelagem das Incertezas

A primeira fonte de incerteza é chamada de incerteza básica no sentido de que as outras fontes de incerteza, tais como alavancagem operacional, capital de giro e alavancagem financeira não têm uma fonte de incerteza intrínseca, apenas afetam ou alavancam as incertezas básicas.

Por exemplo, consideremos um projeto que não tenha preço, custo variável unitário e quantidade demandada estocásticos. Neste caso, independentemente da

alavancagem operacional, alavancagem financeira¹² e alavancagem de capital de giro, o fluxo de caixa do projeto continuará não estocástico.

As últimas três fontes de incerteza são fontes indiretas no sentido de que elas afetam (ou alavancam) as fontes originais (básicas) de incerteza, mas não trazem um novo tipo de incerteza para o projeto.

5.2.2 Modelagem de Risco do Fluxo de Caixa

5.2.2.1 Estrutura do Fluxo de Caixa

Como apresentado em COPELAND & WESTON[5], o fluxo de caixa da firma pode ser construído da seguinte forma:

- (+) Receitas**
- (-) Custos operacionais variáveis
- (-) Custos Fixos
- (-) Depreciação ou despesas sem desembolso
- (=) Resultado Operacional Líquido (N)**
- (-) Juros (I)
- (=) Ganhos antes dos Impostos (EBT)**
- (-) Impostos
- (=) Resultado Líquido (NI)**
- (-) Variação do Capital de Giro
- (=) Fluxo de Caixa Livre**

Aqui são feitas algumas mudanças nessa estrutura de fluxo de caixa com o objetivo de facilitar o processo de modelagem:

- (+) Receitas**

¹² Para dívidas pré-fixadas

- (-) Custos operacionais variáveis
- (=) Margem de Contribuição (M)**
- (-) Custos Fixos (excluídas despesas sem desembolso¹³)
- (=) Resultado Operacional Líquido (N*)**
- (-) Impostos* = $(N(1-t))$
- (=) Resultado Líquido (L*)**
- (-) Variação do Capital de Giro
- (=) Fluxo de Caixa Operacional (O)**
- (-) Juros líquidos de Impostos = $I^* = [I (1-t)]$
- (=) Fluxo de Caixa Livre (F)**

No processo de modelagem do fluxo de caixa, todos os investimentos de manutenção poderiam ser considerados como custos, fixos ou variáveis. Estes investimentos deveriam considerar apenas investimentos para a manutenção. Os investimentos para expansão não deveriam ser considerados porque sua avaliação adequada é a abordagem de opções reais. Ver DIXIT & PINDYCK[7] e TRIGEORGIS[39].

Desse momento em diante, os termos referidos estão relacionados à estrutura de fluxo de caixa acima.

5.2.2.2 Risco da Margem de Contribuição

O risco de margem de contribuição é uma combinação de três riscos básicos de um projeto: preço, custo variável unitário e quantidade demandada. Observemos que a margem de contribuição pode ser o conjunto mais que três fontes de incerteza. Por exemplo, um projeto de uma firma com vários produtos pode ter várias fontes de incerteza de preço, quantidade demandada e custo variável unitário, mas a estrutura de modelagem continua a mesma.

Será construído um exemplo para ilustrar o processo de modelagem do risco do fluxo de caixa. Por simplicidade se assumirá que o processo estocástico será um processo

¹³ Nesse exemplo ignora-se o benefício fiscal das despesas sem desembolso tal como depreciação. Mas nada impede de se considerar seu efeito na modelagem do custo tributário.

estocástico padrão (MBG ou MRMG Ornstein-Ühlenbeck) e o prêmio por unidade de volatilidade será dado pelo CAPM.

Consideremos os seguintes processos estocásticos de preço, quantidade e custo variável unitário, ou incertezas básicas:

$$dP = \alpha_p P dt + \sigma_p P dW_p$$

$$dQ = \alpha_q Q dt + \sigma_q Q dW_q$$

$$dC = \alpha_c C dt + \sigma_c C dW_c$$

Consideremos também que a respectiva correlação entre as incertezas básicas acima e o mercado (S) sejam:

$$\text{Corr}(P, S) = \rho_{PS}$$

$$\text{Corr}(Q, S) = \rho_{QS}$$

$$\text{Corr}(C, S) = \rho_{CS}$$

Para uma determinado σ_S^2 .

A margem de contribuição é uma função dos três processos acima:

$$M = T(P, C, Q) = (P - C) \times Q$$

Aplicando cálculo de Itô como em MERTON[25], podemos derivar o processo estocástico de M :

O primeiro termo do processo estocástico da margem de contribuição, desconsiderando as derivadas parciais nulas, será:

$$a_M dt = \left[a_p \frac{\partial T}{\partial P} + a_q \frac{\partial T}{\partial Q} + a_c \frac{\partial T}{\partial C} + \frac{\partial T}{\partial t} + b_p b_q \rho_{PQ} \frac{\partial^2 T}{\partial P \partial Q} + b_q b_c \rho_{QC} \frac{\partial^2 T}{\partial Q \partial C} \right] dt$$

O segundo termo será:

$$b_M dW_M = \frac{\partial T}{\partial P} b_P dW_P + \frac{\partial T}{\partial Q} b_Q dW_Q + \frac{\partial T}{\partial C} b_C dW_C$$

Substituindo as derivadas, temos o primeiro termo:

$$a_M dt = \left[\alpha_P PQ + \alpha_Q Q(P - C) - \alpha_C CQ + \sigma_P P \sigma_Q \rho_{PQ} - \sigma_Q Q \sigma_C \rho_{QC} \right] dt$$

E no segundo termo:

$$b_M dW_M = Q \sigma_P P dW_P + (P - C) \sigma_Q Q dW_Q - Q \sigma_C C dW_C$$

Pode-se apresentar o processo da M da seguinte forma:

$$dM = \alpha_{MC} M dt + \sigma_{MC} M dt$$

Cujo parâmetro da parcela não estocástica é:

$$\alpha_M = \frac{P}{P - C} \alpha_P + \alpha_Q - \frac{C}{P - C} \alpha_C + \frac{P}{P - C} \sigma_P \sigma_Q \rho_{PQ} - \frac{C}{P - C} \sigma_Q \sigma_C \rho_{QC}$$

$$\alpha_M = \frac{P}{P - C} \left[\alpha_P + \sigma_P \sigma_Q \rho_{PQ} \right] - \frac{C}{P - C} \left[\alpha_C + \sigma_Q \sigma_C \rho_{QC} \right] + \alpha_Q$$

E o parâmetro da parte estocástica seja:

$$\sigma_M = \frac{b_M}{M}$$

Onde:

$$b_M = \sqrt{\sigma_M^2} = \sqrt{V[(P-C) \times Q]} = \sqrt{V[PQ - CQ]}$$

$$b_M = \sqrt{V[PQ - CQ]} = \sqrt{V[PQ] + V[CQ] - 2 \times C[PQ, CQ]}$$

Ou representado em termos de variação, tem-se que σ_M :

$$\sigma_M = \frac{\sqrt{V[PQ] + V[CQ] - 2 \times C[PQ, CQ]}}{M} \quad (5.2)$$

Cujos termos da expressão acima são calculados no Anexo 3.

Observemos que, apesar de o produto de normais não resultar em uma distribuição normal, por aproximação (Itô) obtém-se uma normal para a margem de contribuição que é o resultado de produto de normais. Ver ROSE & SMITH[31].

O beta da variação (retorno) da margem de contribuição com o mercado (M) pode ser calculado utilizando-se a expressão abaixo:

$$C[R_M, R_S] = \frac{C[M, S]}{M} = \frac{C[(P-C)Q, S]}{M} = \frac{C[PQ, S] - C[CQ, S]}{M}$$

Cujos termos da expressão acima são calculados no Anexo 3.

O beta da variação da margem de contribuição então pode ser representado por:

$$\beta_{R_M, R_S} = \frac{C(R_M, R_S)}{V[R_S]} \quad (5.3)$$

5.2.2.3 Risco do Resultado Operacional Líquido

Depois de calcularmos o risco da margem de contribuição, o próximo passo é modelar o resultado operacional líquido (NOI). O risco do NOI é risco da margem de contribuição inflacionada pela alavancagem operacional do projeto.

O NOI nada mais é do que a MC decrescida dos custos fixos k . Os custos fixos aqui não precisam ser constantes no tempo, basta que sejam não estocásticos. Portanto:

$$NOI = N = M - k$$

onde:

$$k = K \times M$$

$$N = (1 - K)M$$

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{1 - K}$$

Usando Itô chegamos à seguinte expressão para o processo estocástico N :

$$dN = \alpha_M \frac{M}{N} Ndt + \sigma_M \frac{M}{N} NdW_M = \alpha_N Ndt + \sigma_N NdW_M$$

onde:

$$\alpha_N = \alpha_M \frac{1}{1 - K}$$

$$\sigma_N = \sigma_M \frac{1}{1 - K}$$

Para cálculo do beta do N , usamos a seguinte expressão:

$$\mathcal{C}[N, S] = \mathcal{C}[M - k, S] = \mathcal{C}[M, S]$$

É importante observar que apesar da covariância do nível da série N ser igual à covariância do nível de M , a covariância da taxa de variação será maior pelo múltiplo de

$\frac{1}{(1-K)}$, e por consequência o beta também será pelo mesmo maior pelo mesmo múltiplo:

$$\beta_N = \frac{1}{(1-K)} \beta_M$$

5.2.2.4 Risco do Fluxo de Caixa Operacional

O fluxo de caixa operacional (O) é representado pelo resultado operacional líquido (N) decrescido da variação do capital de giro (ΔG):

$$O = N - \Delta G$$

O capital de giro (G) compreende na maior parte das vezes Contas a Receber (A) mais estoques (I) menos contas a pagar (P).

$$G = A + I - B$$

Contas a Receber

As contas a receber em regime são um múltiplo das vendas ou das receitas da empresa. Como mostrado em BENNINGA & SARIG[2] essa relação é estável e proporcional (múltiplo k_A) ao prazo médio de recebimento. Portanto:

$$R = k_A R$$

Dessa forma, o processo estocástico das contas a receber será:

$$dA = k_A \alpha_R R dt + k_A \sigma_A R dW_R$$

Estoques

O volume de Estoques em regime representa um múltiplo dos custos variáveis da empresa. Como mostrado em BENNINGA & SARIG[2] essa relação é estável e proporcional (múltiplo k_I) ao giro médio de estoques. Portanto:

$$dI = k_I \alpha_{Co} Codt + k_I \sigma_{Co} CodW_{Co}$$

Contas a Pagar

As contas a Pagar em regime representam um múltiplo dos custos variáveis da empresa. Como mostrado em BENNINGA & SARIG[2] essa relação é estável e proporcional (múltiplo k_B) ao prazo médio de pagamento. Portanto:

$$dB = k_B \alpha_{Co} Codt + k_B \sigma_{Co} CodW_{Co}$$

Capital de Giro

Como capital de giro é função de três processos estocásticos, podemos aplicar Itô para encontrar o processo estocástico do capital de giro. Ignorando as derivadas que são iguais a zero temos:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial A} a_R + \frac{\partial G}{\partial I} a_{Co} + \frac{\partial G}{\partial B} a_{Co} \right] dt + \left[\frac{\partial G}{\partial A} b_R dW_R + \frac{\partial G}{\partial I} b_{Co} dW_{Co} + \frac{\partial G}{\partial B} b_{Co} dW_{Co} \right]$$

Substituindo as derivadas, temos:

$$dG = [k_A \alpha_R R + k_I \alpha_{Co} Co - k_B \alpha_{Co} Co] dt + \\ [k_A \sigma_R R dW_R + k_I \sigma_{Co} Co dW_{Co} - k_B \sigma_{Co} Co dW_{Co}]$$

A obtenção do parâmetro do termo não estocástico é direto e da parte não estocástica depende somente de fórmulas de covariâncias demonstradas no anexo 4.

Utilizando-se dos resultados acima e do anexo 4, podemos derivar então o processo estocástico do capital de giro do tipo:

$$dG = \alpha_G G dt + \sigma_G G dW_G$$

O processo estocástico da variação do capital de giro, $\Delta G = G_t - G_{t-1}$ ¹⁴, será:

$$d\Delta G = \alpha_G \left(\frac{G}{\Delta G} \right) \Delta G dt + \sigma_G \left(\frac{G}{\Delta G} \right) \Delta G dW_G$$

Fluxo de Caixa Operacional

O fluxo de caixa operacional é uma função de dois processos estocásticos como abaixo:

$$O = N - \Delta G$$

Por cálculo de Ito, temos que (ignorando as segundas derivadas todas iguais a zero):

$$dO = \left(a_N \frac{\partial O}{\partial N} + a_{\Delta G} \frac{\partial O}{\partial \Delta G} \right) dt + \left(b_N \frac{\partial O}{\partial N} dW_N + b_{\Delta G} \frac{\partial O}{\partial \Delta G} dW_{\Delta G} \right)$$

$$dO = (a_N - a_{\Delta G}) dt + (b_N dW_N - b_{\Delta G} dW_{\Delta G})$$

Substituindo os parâmetros, temos:

¹⁴ Observemos que, em t , G_{t-1} é não estocástico.

$$dO = (\alpha_N N - \alpha_G \Delta W) dt + (\sigma_N N dW_N - \sigma_G G dW_G)$$

No anexo 5 é derivado o termo estocástico para simplificação. Portanto, tem-se o processo estocástico do fluxo de caixa operacional:

$$dO = \alpha_o O dt + \sigma_o O dW_o$$

Onde:

$$\alpha_o = \frac{(\alpha_N N - \alpha_G \Delta W)}{O}$$

σ_o derivado no anexo 5

5.2.2.5 Risco do Fluxo de Caixa

O fluxo de caixa (F) representa o fluxo de caixa operacional subtraído dos juros da dívida. O efeito da presença dos juros no fluxo de caixa é chamado de alavancagem financeira, pelo fato de aumentar o risco do fluxo de caixa do acionista.

F representa O decrescido das despesas com juros I . Os juros não precisam ser constantes no tempo, basta que sejam não estocásticos. Portanto:

$$F = O - j$$

onde:

$$j = J \times O$$

$$F = (1 - J)O$$

$$\frac{O}{F} = \frac{1}{(1 - J)}$$

Usando Itô chegamos à seguinte expressão para o processo estocástico N:

$$dF = \alpha_o \frac{O}{F} Fdt + \sigma_o \frac{O}{F} FdW_o$$

$$dF = \alpha_F Fdt + \sigma_F FdW_F$$

onde:

$$\alpha_F = \alpha_o \frac{1}{(1-J)}$$

$$\sigma_F = \sigma_o \frac{1}{(1-J)}$$

Para cálculo do beta do F, usamos a seguinte expressão:

$$\beta_{R_F, R_S} = \frac{C[O, S]}{F}$$

$$\beta_{R_F, R_S} = \frac{\sigma_{R_F, R_S}}{\sigma_{R_S}^2}$$

É importante observar que, apesar da covariância do nível da série F ser igual à covariância do nível de O, a covariância da taxa de variação será maior pelo múltiplo de $\frac{1}{(1-J)}$, e por conseqüência o beta também será pelo mesmo maior pelo mesmo múltiplo.

Portanto:

$$\beta_{R_F, R_S} = \frac{1}{(1-J)} \beta_{R_O, R_S}$$

5.2.2.6 Decomposição Final do Risco do Projeto

Dessa forma, o projeto tem a seguinte decomposição de risco:

	Volatilidade	Beta	Incerteza Marginal
PREÇO	σ_P	β_{R_P, R_S}	
CUSTO VARIÁVEL UNITÁRIO	σ_C	β_{R_C, R_S}	
QUANTIDADE DEMANDADA	σ_Q	β_{R_Q, R_S}	
MARGEM DE CONTRIBUIÇÃO	σ_M (5.2)	β_{R_M, R_S} (5.3)	Fatores básicos de risco
RESULTADO OPERACIONAL	$\sigma_N = \frac{1}{(1-K)} \sigma_M$	$\beta_{R_N} = \frac{1}{(1-K)} \beta_{R_M}$	Alavancagem Operacional
FLUXO DE CAIXA OPERACIONAL	σ_{OCF} - Anexo 5	$\beta_{R_{O, R_S}}$ - Anexo 5	Alav. de Capital de Giro
FLUXO DE CAIXA LIVRE	$\sigma_{FCF} = \frac{1}{(1-J)} \sigma_{OCF}$	$\beta_{R_F, R_S} = \frac{1}{(1-J)} \beta_{R_{O, R_S}}$	Alav. Financeira

Como apresentado na figura acima, mesmo quando as incertezas básicas não apresentam alto risco, seja este diversificável ou não, quando são adicionadas as três fontes de alavancagem, o risco cresce substancialmente.

5.2.3 A Importância da Decomposição das Incertezas

Com a abordagem aqui sugerida, é possível calcular o custo de capital dos projetos com novas tecnologias, uma vez que seja possível estimar ou inferir os betas (ou prêmios de mercado) das incertezas básicas. Em lugar de se preocupar com o custo de capital de um fluxo de caixa (última linha) sem referência no mercado, o analista pode “construir” o custo de capital a partir das incertezas básicas, modelando as três fontes de alavancagem

do projeto. Também é possível comparar projetos com diferentes níveis de alavancagem (os três tipos) em termos de sua relação risco/retorno.

Se houver uma mudança esperada na alavancagem do projeto (os três tipos) durante seu tempo de vida, isso significa que haverá uma mudança no tempo do custo do capital do projeto. Dessa forma, esta estrutura permite analisar a evolução esperada do custo de capital no tempo do projeto e seu impacto no valor. Também pode ser utilizado para entender ou mensurar como mudanças tecnológicas que afetam o custo de capital (na alavancagem operacional ou na alavancagem do capital de giro), o valor do projeto e a relação risco/retorno.

Esta abordagem também permite entender porque os betas das incertezas básicas são relativamente baixos. Isso porque se o investimento médio da economia tem um beta de 1, então os betas das incertezas básicas são significativamente menores que um, pelo fato de serem incertezas “desalavancadas”.

O cálculo do custo de capital na forma acima na maioria das vezes resultará na necessidade de estimação de prêmio de incertezas não-comercializadas. É razoável supor que a maioria das incertezas básicas na economia tenha uma distribuição razoavelmente simétrica. Portanto, a sugestão de LUENBERGER[19,21] de estimar o beta de incertezas não negociadas (Preço-projeção) é adequada nesses casos.

Para apreçar opções reais, é necessário como entrada a incerteza do fluxo de caixa (seu processo estocástico). Usando a abordagem aqui sugerida, é possível entender a contribuição de cada fonte de incerteza para o valor das opções, e dessa forma administrar estrategicamente risco, retorno e flexibilidade.

5.3 Estimando Prêmios de Incertezas Não-Comercializadas

5.3.1 O Preço-Projeção

Como foi mostrado no capítulo 3 seria natural estender para mercados incompletos e não-comercializados as três abordagens para o cálculo de prêmios de mercado:

- Preço-reserva
- Preço-entrópico
- Preço-projeção

As duas primeiras abordagens, apesar de coerentes teoricamente e mais robustas para distribuições assimétricas, são de difícil aplicação prática onde o único insumo disponível são séries temporais.

A abordagem do preço-projeção é de fácil aplicação em séries temporais. Além disso, como mostrado na seção 5.2.3, é razoável considerar que a grande maioria das incertezas básicas (preço, quantidade demanda etc.) tenham de fato distribuições razoavelmente simétricas. Dessa forma, para o nível de precisão possível na avaliação de um projeto, pode-se considerar a abordagem do preço-projeção satisfatória.

A abordagem de LUENBERGER[19] sugere que seja usada a correlação da incerteza não-comercializada com o ativo comercializado que tenha maior correlação com esta, como os índices setoriais de preços de ativos. Desta forma, a abordagem além de ser teoricamente correta, permite maior precisão estatística das estimativas.

Infelizmente, essa abordagem de correlacionar incertezas não-comercializadas com índices setoriais é muito boa quando existe abundância de índices setoriais comercializados e pode-se estimar os prêmios de mercado para estes índices. No caso de países como o Brasil, a abundância de informação de preços não existe, então sugerimos uma variante da abordagem de LUENBERGER[21].

5.3.2 Calculando os Prêmios

Sugerimos a abordagem de se estimar as correlações de índices setoriais de preços, volumes de venda e produção não-comercializados com um índice de preços de mercado como o FGV-100 e o IBOVESPA. Uma vez, com a correlação estimada desses índices, aplica-se o CAPM (CAPM para incertezas não-comercializadas – preço-projeção) sugerido por LUENBERGER[21] para estimar-se o prêmio de mercado para as incertezas desses índices não-comercializados. A partir dos prêmios estimados para esses índices não-comercializados, estima-se os prêmios das incertezas de projetos específicos.

O procedimento seria o seguinte:

a) Estima-se a correlação de um índice setorial não-comercializado com o IBOVESPA:

Por exemplo, calculamos a correlação da variação do índice de produção industrial dessazonalizado trimestral (IBGE) e a variação do IBOVESPA no respectivo trimestre para as seguintes categorias:

- Bens de Capital
- Bens Intermediários
- Bens de Consumo – Geral
- Bens de Consumo – Duráveis
- Bens de Consumo – Não duráveis e Semi-duráveis

Para o período de 1990 a 2003, estimamos as seguintes correlações:

SETOR	Capital	Intermediários	Consumo Geral	Consumo Duráveis	Consumo Não duráveis e Semi
CORRELAÇÃO	0.35	0.32	0.14	0.23	0.11
DESVIO-PADRÃO	0.0717	0.0442	0.0380	0.0793	0.0342

Observemos que os setores que são mais “arriscados”, como bens de capital tem mais correlação maior em relação a setores de semi e não duráveis.

b) Estima-se o prêmio de mercado para as incertezas setoriais não-comercializadas:

Para se estimar o prêmio de mercado, recorre-se ao CAPM ou Preço-projeção e a uma estimativa do prêmio de mercado para o IBOVESPA e à taxa livre de risco.

Suponhamos então que o prêmio de mercado para o IBOVESPA seja de 6% e a taxa livre de risco seja de 4% em termos reais. Dessa forma, pelo CAPM temos que o custo de capital do índice BOVESPA é 10%.

A estimativa do prêmio será:

$$p = \rho \times \frac{\sigma_I}{\sigma_M} \times \lambda$$

onde:

p = prêmio de mercado

ρ = correlação do índice setorial não-comercializado com o índice de mercado IBOVESPA

σ_I = desvio-padrão do índice setorial não-comercializado

σ_M = desvio-padrão do índice de mercado

λ = prêmio do índice de mercado

Suponhamos então que o σ_M seja igual a 30%, então temos as seguintes estimativas de prêmios de mercado para os índices setoriais acima:

Prêmios de Mercado				
Capital	Intermediários	Consumo Geral	Consumo Duráveis	Consumo Não Duráveis e Semi
0.65%	0.37%	0.14%	0.47%	0.10%

Observemos que os prêmios de mercado dos índices setoriais são bem pequenos em relação ao prêmio do índice de mercado devido ao baixo desvio-padrão desses índices.

c) Estimando-se o prêmio da incerteza do projeto:

Suponhamos que a principal incerteza de um projeto seja a quantidade demandada. Suponhamos também que essa tenha um desvio-padrão de 20% e uma correlação de 60% com o índice de mercado setorial de bens-duráveis.

Dessa forma, o prêmio de mercado para a quantidade demandada será:

$$60\% \times \frac{30\%}{7.93\%} \times 0.47\% = 1.07\%$$

Observemos que esse prêmio de mercado é equivalente a um beta de 0.18. Na seção 5.2.3 apresentamos o porquê das incertezas básicas terem betas pequenos e, por consequência, prêmios relativamente pequenos.

Mas seria natural a seguinte indagação: por que não calcular diretamente o beta da incerteza do projeto com o índice BOVESPA? Por duas razões:

- Os índices setoriais (de volumes e preços) geralmente têm séries mais longas para estimativas mais precisas de correlação;
- Como mostrado em LUENBERGER[19], a baixa correlação entre a incerteza do projeto com o índice de mercado resultará em estimativas muito imprecisas ou grandes intervalos de confiança para o prêmio da incerteza em relação à estimação indireta.

6 Duas Abordagens de Modelagem de Opções Reais

Existem dois tipos de abordagens para a modelagem de opções reais: a abordagem do Valor Presente (AVP), aqui representada por COPELAND & ANTIKAROV[4], e abordagem do Fluxo de Caixa (AFC), aqui representada por TRIGEORGIS[39].

A AVP foca a modelagem no valor presente do projeto enquanto a outra abordagem foca na do Fluxo de Caixa.

Pela lei do preço único, espera-se que as duas abordagens resultem no mesmo valor para as opções, do contrário haveria alguma incoerência em uma das duas abordagens.

A AVP é mais difundida entre os práticos de opções reais porque é mais facilmente implementada que a AFC. Mas na literatura de opções reais não há a comparação das duas abordagens e nem há um conferência teórica do procedimento comumente utilizado para aplicação da AVP.

Essa parte do trabalho é uma contribuição para a literatura de opções reais no sentido de comparar as duas abordagens, mostrar a coerência entre as duas abordagens e também apresentar os ajustes que precisam ser efetuados nos procedimentos comuns para a aplicação da AVP.

6.1 *Fórmula Geral*

Como mostrado na seção 4.2.5, TRIGEORGIS & KULATILAKA[41] apresentam uma abordagem geral para avaliar um projeto com flexibilidade que usa uma versão economicamente ajustada da equação de Bellman.

Essa fórmula usa a equação de Bellman da programação dinâmica como em DUFFIE[8] e DIXIT & PINDYCK[7], usando probabilidades risco-neutro numa abordagem geral para avaliar ativos. Mais especificamente no caso de opções reais, KULATILAKA & TRIGEORGIS[41] mostraram que os projetos poderiam ser modelados em modos de operação calculando-se o valor do projeto com a flexibilidade de alternar entre modos de operação.

Usando probabilidades risco-neutro, o investidor escolhe o melhor modo de operação em termos de valor presente dos fluxos de caixas futuros de duas ou mais alternativas. A equação de Bellman, dessa forma, é geral para avaliar ativos porque esta já considera o eventual efeito da histerese, como apresentado em MCDONALD & SIEGEL[24], KULATILAKA & TRIGEORGIS[41] e DIXIT[7]. O efeito histerese advém do fato de que a mudança de um modo de operação em determinado momento pode afetar decisões futuras, dessa forma é necessária a programação dinâmica de maneira reverso-iterativa para resolver este problema.

Essa abordagem geral para avaliar ativos pode ser usada, na prática, de duas formas: modelando o fluxo de caixa ou modelando o valor presente. Portanto, a fórmula acima pode ser resolvida a partir de dois tipos de *inputs*:

- Fluxo de caixa para cada estado e tempo, ou;
- Valor do Projeto em cada estado e tempo e seus respectivos dividendos.

6.1.1 Abordagem do Fluxo de Caixa (AFC)

Suponhamos por exemplo que tenhamos um fluxo de caixa no momento 0 que seja de \$ 100 e que evolua com imput MBG com uma volatilidade de 30% e tenha uma taxa de crescimento contínua (“drift”) de 4.43%. Consideremos que o investidor tem a opção de abandonar este projeto por um valor residual de \$ 200 e que o fluxo de caixa termine no quarto período.

Dessa forma, o processo estocástico desse fluxo de caixa será:

$$dF_t = \delta F_t dt + \sigma F_t dW_t \quad (6.1)$$

Substituindo os números do exemplo, temos:

$$dF_t = 0.0443 \times 100 dt + 0.3 \times 100 dW_t$$

Onde t é o instante de tempo e dW_t é um típico processo de Wiener.

Consideremos que o custo de capital do projeto seja de 12% (taxa contínua de 11,33%) e a taxa livre de risco seja de 5% (taxa contínua de 4,88%). Usando a avaliação risco-neutro deveria-se subtrair do “drift” o prêmio de risco, λ , que corresponde a 7% (taxa contínua de 6,45%), como mostrado em TRIGEORGIS[41]. Dessa forma, a evolução risco-neutro deste fluxo de caixa, ou fluxo de caixa ajustado ao risco, será:

$$dF_t^* = (\delta - \lambda)F_t^* dt + \sigma F_t^* dW_t \quad (6.2)$$

Usando os números do exemplo:

$$dF_t^* = -0.0202 \times 100 dt + 0.3 \times 100 dW_t$$

Se ignorado o valor da opção, é suficiente avaliar esse projeto trazendo a valor presente seu fluxo de caixa esperado pela taxa de desconto de 12%. Efetuando esse cálculo, obtém-se:

Valor do Projeto sem Flexibilidade = \$437.6

Usando o processo como em (6.2) em lugar do processo (6.1), é possível descontar o valor esperado do fluxo de caixa ou uma função deste (uma opção é uma função do fluxo de caixa) utilizando a taxa livre de risco para desconto.

Para se calcular o valor do projeto com flexibilidade, considera-se (6.2) como o fluxo de caixa do modo de operação 1 e \$ 200 como o fluxo de caixa do modo de operação 2. Usando (4.1), pode-se resolver este problema de otimização reversa simulando o processo de (6.2). Para a solução numérica, foi utilizado o software ROC¹⁵ e foi obtido o seguinte valor com flexibilidade (com erro ao redor de 1%) de:

Valor do Projeto com Flexibilidade = \$528.7

¹⁵ Software ROC (Real Options Calculator) da empresa Onward Inc; que resolve problemas do tipo da fórmula (4.1).

Como consequência, o valor da flexibilidade (valor da opção de abandono) é:

$$\text{Valor da Opção de Abandono} = \$528.7 - \$437.6 = \$91.1$$

Em lugar de se usar simulação e otimização, poderia-se resolver o mesmo problema utilizando-se árvores binomiais. O fluxo de caixa poderia ser representado pela árvore abaixo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				332.0
			246.0	
		182.2		182.2
	135.0		135.0	
100		100.0		100.0
	74.1		74.1	
		54.9		54.9
			40.7	
				30.1

Figura 6.1 Fluxo de Caixa - Exemplo

Como consequência de a hipótese da taxa de desconto de mercado para este fluxo de caixa ser 12% e taxa livre de risco é 5%, suas respectivas probabilidades livres de risco π_u e π_d são 0.3927 e 0.6073. Isso porque a seguinte igualdade precisa ser alcançada como em LUENBERGER[18]:

$$\frac{0.5 \times 135 + 0.5 \times 74.1}{1.12} = \frac{\pi_u \times 135 + \pi_d \times 74.1}{1.05}$$

As fórmulas para a solução da equação de Bellman são apresentadas na árvore abaixo. Os valores da Figura 6.1 são utilizados como *inputs*, assim como o valor de \$200. Também se utilizam os valores da Figura 6.3 no processo reverso-iterativo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				MAX(332;200)
			MAX(200;246+(39.27% \times 332+60.73% \times 200))/(1+5%)	
		MAX(200;182.2+(39.27% \times 485.8+60.73% \times 325.5))/(1+5%)		
	MAX(200;135+(39.27% \times 552.2+60.73% \times 374.7))/(1+5%)			
MAX(200;100+(39.27% \times 558.2+60.73% \times 380.5))/(1+5%)				

Figura 6.2 Fórmulas – Valor com Flexibilidade – AFC - Exemplo

A árvore completa do valor com flexibilidade é:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				332.0
			485.8	
		552.2		200.0
	558.2		325.5	
528.9		374.7		200.0
	380.5		264.6	
		287.5		200.0
			231.1	
				200.0

Figura 6.3 Valor com Flexibilidade – AFC - Exemplo

Como o valor do projeto sem flexibilidade é \$ 437,6 e o valor do projeto com flexibilidade é \$ 528,9, o valor da opção é:

$$\text{Valor da Opção de Abandono} = \$528.9 - \$437.6 = \$91.2$$

Essa é a Abordagem do Fluxo de Caixa (AFC) para avaliação de opções reais.

6.1.2 Abordagem do Valor Presente (AVP)

O projeto acima pode ser avaliado modelando-se seu valor presente em lugar de seu fluxo de caixa. Esta abordagem é a Abordagem do Valor Presente (AVP).

Para entender a relação entre as abordagens é importante entender a relação entre o Valor Presente e o Fluxo de Caixa. A forma discreta do valor presente é:

$$V_0 = F_0 + \sum_{t=1}^T \frac{\mathbb{E}(F_t)}{\exp(r_c \times t)}$$

onde r_c é o custo de capital do projeto.

Para entender como F_t afeta V_t , usam-se aqui os resultados de SAMUELSON[33], que dizem:

- O valor presente não é afetado por mudanças antecipadas no fluxo de caixa;
- Apenas mudanças não antecipadas no fluxo de caixa afetam o valor presente.

Este resultado é também conhecido como o teorema de Samuelson. Isso significa que, se não houver mudanças não esperadas no fluxo de caixa do projeto, o valor presente do projeto evoluirá pelo custo de capital r_c . Mudanças eventuais da trajetória de crescimento esperada r_c aconteceriam apenas no caso de mudanças não esperadas no fluxo de caixa. As hipóteses subjacentes são que a aversão ao risco e as expectativas não estão mudando no tempo.

Em nosso caso, a equação do processo estocástico do fluxo é:

$$dF_t = \delta F_t dt + \sigma F_t dW_t$$

Observemos que existem duas fontes de variação em F_t :

- A variação determinística $\delta F_t dt$ na abordagem de Samuelson representa mudanças antecipadas no fluxo de caixa;
- A variação estocástica $\sigma F_t dW$ na abordagem de Samuelson representa as mudanças não antecipadas no fluxo de caixa.

Para se calcular o processo estocástico do valor presente a partir do processo estocástico do fluxo de caixa usa-se a fórmula de Itô, uma vez que o valor presente, V_t , é uma função do fluxo de caixa, F_t . Como apresentado em DUFFIE[8], uma função deste processo estocástico, $V(F_t)$, pode ser representada como:

$$dV_t = \left[\frac{\partial V}{\partial F_t} \delta F_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial F_t^2} (\sigma F_t)^2 \right] dt + \frac{\partial V}{\partial F_t} \sigma F_t dW_t$$

As derivadas do valor presente, V_t , necessárias para a fórmula de Ito, são:

- $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} = 0$ (ligada a dt): como consequência do teorema de Samuelson, mudanças determinísticas (esperadas) do fluxo de caixa não afetam o valor presente;
- $\frac{\partial V_t}{\partial t} = r_c V$ (ligada a dt): a mudança determinística do valor presente é proporcional ao custo de capital;
- $\frac{\partial^2 V}{\partial F_t^2} = 0$ (ligada a dt): como consequência da derivada acima;
- $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} = \sum_{t=0}^N \frac{1}{\exp((r_c - \delta)t)}$ (ligada a dW_t): como consequência do teorema de Samuelson, mudanças estocásticas (não esperadas) do fluxo de caixa afetam o valor presente na mesma

magnitude das mudanças não esperadas¹⁶.

Considerando as derivadas acima, o processo estocástico do valor presente é, portanto:

$$dV_t = r_c V_t dt + \sigma V_t dW_t$$

Utilizando-se os números do exemplo, tem-se:

$$dV_t = 0.1133 \times V_t dt + 0.3 \times V_t dW_t \quad (6.3)$$

Observemos que a volatilidade do valor presente é a *mesma* que a volatilidade do fluxo de caixa.

Para representar completamente o processo do valor presente, precisamos descontar os dividendos esperados. Nesse caso, é mais fácil construir a árvore do valor presente do projeto usando probabilidades risco-neutro num processo iterativo-reverso:

¹⁶ O termo $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} F_t$ é igual V_t para o caso do MBG, porque uma mudança no primeiro fluxo de caixa afeta o valor esperado dos fluxos de caixas futuros na mesma proporção, como mostrado no apêndice 1. Mas, no caso do MRM, o termo $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} F_t$ é menor que V_t . No apêndice 2 é apresentada uma maneira prática de estimar $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} F_t$ para o MRM.

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				332.0
			475.5	
		511.0		182.2
	488.3		261.0	
437.6		280.4		100.0
	268.0		143.2	
		153.9		54.9
			78.6	
				30.1

Figura 6.4 Valor Sem Flexibilidade - Exemplo

Ao dividir-se os valores da árvore na Figura 6.1 pelos valores da Figura 6.4, obtemos a razão de dividendos para este projeto:

Período 0	Período 1	Período 2	Time 3	Time 4
22.85%	27.64%	35.66%	51.72%	100.00%

No processo de modelagem, a razão de dividendos, d , precisa ser considerada. O processo do valor presente fica:

$$V_t = [(1-d)V_{t-1} \exp(r_c)] + \sigma V_t \Delta W_t$$

Usando os parâmetros do exemplo, tem-se:

$$V_t = [(1-d)V_{t-1} \exp(0.1133)] + 0.3V_t \Delta W_t$$

Com o objetivo de avaliar opções reais, é necessário transformar o processo acima em um processo risco-neutro. É necessário substituir o crescimento (“drift”) r_c pela taxa livre de risco r como sugerido por TRIGEORGIS[40]. Dessa, forma obtém-se o processo do valor presente ajustado ao risco:

$$V_t = [(1-d)V_{t-1} \exp(r)] + \sigma V_t \Delta W_t \quad (6.4)$$

Utilizando-se os números do exemplo, tem-se:

$$V_t = [(1-d)V_{t-1} \exp(0.0488)] + 0.3V_t \Delta W_t$$

Dessa forma, o valor presente evolui como em (6.4) com desconto de dividendos em cada período e com o crescimento ajustado para a taxa livre de risco (custo de capital, r_c , menos o prêmio de risco, λ). Para avaliar a opção, deve-se considerar o modo de operação 1 como valor \$0. Como modo de operação 2, considera-se o valor da opção em cada período:

$$O_t = \max(0; 200 - V_t)$$

Usando o software ROC para resolver este problema, como na (4.1), obtém-se o seguinte valor para a opção (com um erro ao redor de 1%):

$$\text{Valor da Opção} = \$90.7$$

Se essa AVP for modelada usando árvores binomiais, também seriam encontrados valores para as opções iguais à abordagem AFC, como pode ser visto abaixo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				MAX(332;200)
			MAX(200;246+(39.27%x332+60.73%x200)/(1+5%))	
		MAX(200;182.2+(39.27%x485.8+60.73%x325.5)/(1+5%))		
	MAX(200;135+(39.27%x552.2+60.73%x374.7)/(1+5%))			
MAX(200;100+(39.27%x558.2+60.73%x380.5)/(1+5%))				

Figura 6.5 Fórmulas – Valor com Flexibilidade – AVP - Exemplo

O valor da opção obtido pela abordagem AVP é igual ao valor obtido pela AFC, como pode ser visto na árvore abaixo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				332.0
			485.8	
		552.2		200.0
	558.2		325.5	
528.9		374.7		200.0
	380.5		264.6	
		287.5		200.0
			231.1	
				200.0

Figura 6.6 Valor com flexibilidade – AVP - Exemplo

Como mostrado acima, as duas abordagens resultam no mesmo preço para opções, como se esperaria pela lei do preço único. Por esta lei, como mostrado em COCHRANE[3], não poderíamos esperar diferentes preços no arcabouço padrão da teoria de investimento.

Na próxima seção veremos que o problema que surge da utilização da AVP é que, na forma como este é geralmente empregado, não se estima corretamente a volatilidade e é limitado a fluxos de caixa que evoluem como MBG. A essa abordagem equivocada de Valor presente chamaremos de ACVP, Abordagem Comum de Valor Presente.

6.1.3 Equívocos Comuns na AVP

6.1.3.1 ACVP Usando o Exemplo

O problema comum que surge da abordagem AVP não é que esta é teoricamente errada, mas não é adequadamente modelada. Para modelar pela AVP, é crucial ser capaz de reproduzir a evolução do valor do projeto como na Figura 6.4, e a abordagem usual de aplicar AVP, a ACVP, não o faz corretamente.

A AVP é mais utilizada pela comunidade dos não-acadêmicos que o AFC. A AVP se tornou mais conhecida pelo trabalho de COPELAND & ANTIKAROV[4]. Há outros livros que de alguma maneira sugerem essa abordagem, tais como MUN[36] e HOWELL & OUTROS[12]. O trabalho de ROCHA & FIGUEIREDO[30] é um exemplo da

aplicação da abordagem sugerida por COPELAND & ANTIKAROV[4] aplicada à avaliação de companhias aéreas.

Aqui, a abordagem geralmente empregada para a modelagem VA será chamada de Abordagem Comum do Valor Presente (ACVP), referenciada como a abordagem sugerida de COPELAND & ANTIKAROV[4]. O procedimento sugerido por COPELAND & ANTIKAROV[4] é:

a) Modelar o fluxo de caixa esperado sem flexibilidade:

No exemplo, o fluxo de caixa esperado para cada período é:

	Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
Fluxo de Caixa Esperado	100.00	104.53	109.27	114.23	119.41

b) Usar simulação no fluxo de caixa para estimar a volatilidade do valor presente do projeto:

O objetivo é simular o valor presente do projeto para estimar a volatilidade da variação do valor presente e reproduzir a evolução do valor presente como na Figura 6.4. Como já apresentado na seção anterior, se o processo estocástico MBG do fluxo de caixa fosse conhecido, não se precisaria estimar a volatilidade do valor presente, porque esta seria calculável. Mas, em alguns casos, quando o fluxo de caixa depende de diferentes fontes de incerteza, o processo do fluxo de caixa não é explícito. Neste caso, é mais fácil estimar a volatilidade do VP via simulação para se reproduzir a Figura 6.4.

Por cálculo de Ito, sabe-se que $\ln(F_t)$ resulta no seguinte processo:

$$R_{FC} = d \ln(F_t) = \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Utilizando os números do exemplo:

$$R_{FC} = d \ln(F_t) = 0.3dW_t$$

Uma vez que $\left(0.0443 - \frac{0.3^2}{2}\right) = 0.0007 \cong 0$

Portanto, para simular o fluxo de caixa, precisa-se apenas simular taxas de crescimento normalmente distribuídas com média zero e volatilidade de 30%, e utilizá-las para projetar as possíveis trajetórias do fluxo de caixa como na Figura 6.1.

Para se estimar a volatilidade do valor presente, utiliza-se aqui a fórmula sugerida por COPELAND & ANTIKAROV[4]:

$$R_{VP} = \ln\left(\frac{V_1 + F_1}{V_0}\right): \quad \text{variação/retorno do valor presente do projeto}$$

Onde:

$$V_1 = \sum_{t=2}^4 \frac{F_t}{\exp(r_c \times (t-1))}$$

r_c : Custo de Capital

F_t : Fluxo de caixa (simulado em cada período ligado por R_{FC})

V_0 : Valor presente inicial (não simulado) como na fórmula (4)

Simulando cada F_t , obtém-se a volatilidade estimada de R_{VP} ao redor de 43%. Esta deveria ser a volatilidade estimada do processo estocástico de (6.3). Mas já sabemos que a verdadeira volatilidade é de 30%, de forma que a volatilidade de 43% é superestimada.

c) Estimar o valor do projeto com flexibilidade utilizando-se da volatilidade estimada:

Nessa fase o objetivo é construir a árvore para o valor do projeto sem flexibilidade, como sugerido por COPELAND & ANTIKAROV[4]. Os movimentos de subida e de descida e as probabilidades risco-neutro são respectivamente:

$$u = \ln(0.43) = 1.54$$

$$d = 1/u = 0.65$$

$$q_u = ((1+r)-d)/(u-d) = 0.4595$$

Também é necessário saber a razão de dividendos do projeto. Neste exemplo, é obtido dividindo-se o fluxo de caixa pelo valor do projeto em cada período, ou seja, dividindo-se os valores da Figura 6.1 pelos valores da Figura 6.4. A figura abaixo apresenta a razão de dividendos para os vários períodos:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
22.85%	27.64%	35.66%	51.72%	100.00%

Usando a razão de dividendos, obtém-se a seguinte árvore de valor presente, que é construída usando os movimentos de subida e de descida e a razão de dividendos acima:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				398.8
			570.8	
		577.2		168.8
	519.0		241.6	
337.6		244.3		71.4
	219.6		102.2	
		103.4		30.2
			43.3	
				12.8

Figura 6.7 Valor sem Flexibilidade – AVP - Exemplo

A árvore de dividendos está abaixo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				398.8
			311.4	
		205.9		168.8
	143.5		131.8	
100.0		87.1		71.4
	60.7		55.8	
		36.9		30.2
			23.6	
				12.8

Figura 6.8 Dividendos – AFC - Exemplo

Para se calcular o valor do projeto com flexibilidade, foi efetuado o seguinte cálculo usando como *inputs* os valores da figura 4 e as razões de dividendo em um processo iterativo-reverso:

$$\begin{aligned}
 & \text{Período 0} \quad \text{Período 1} \quad \text{Período 2} \quad \text{Período 3} \quad \text{Período 4} \\
 & \qquad \text{MAX}(200;398.8) \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{MAX}(200;311.4+(45.05\% \times 398.8+54.95\% \times 200)/(1+5\%)) \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{MAX}(200;205.9+(45.05\% \times 587.2+54.95\% \times 322.3)/(1+5\%)) \\
 & \qquad \qquad \text{MAX}(200;143.5+(45.05\% \times 626.5+54.95\% \times 354.3)/(1+5\%)) \\
 & \text{MAX}(200;0+(45.05\% \times 597.7+54.95\% \times 345.9)/(1+5\%))
 \end{aligned}$$

Figura 6.9 Fórmulas – AVP - Exemplo

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				398.8
			587.2	
		626.5		200.0
	597.7		322.3	
537.5		354.3		200.0
	345.9		246.2	
		254.5		200.0
			214.1	
				200.0

Figura 6.10 Valor com Flexibilidade – ACVP - Exemplo

Observemos que o valor do projeto com flexibilidade obtido é de \$ 537,5, que resulta num valor de opção ao redor de \$ 100, que é diferente do verdadeiro valor da opção de \$ 91.2 obtido anteriormente.

A ACVP superestima o valor das opções reais pelo fato de superestimar a volatilidade do valor presente, uma vez que não reproduz fielmente a árvore de valor presente da Figura 6.4.

6.1.3.2 Ajustando o Exemplo para a Correta AVP

Para reproduzir a evolução do valor do projeto como na Figura 6.4, deve-se considerar a taxa de crescimento para o valor do projeto de 12%, como consequência do custo de capital ser de 12%. Isto é equivalente a dizer:

$$(0.5u+0.5d) = 1.12$$

A volatilidade do valor do projeto é:

$$0.3 = 0.5 \ln(u) + 0.5 \ln(1/d)$$

A solução para as duas equações acima é:

$$u = 1.4463$$

$$d = 0.7937$$

Usando estes movimentos u e d acima, o valor inicial do projeto de \$ 437.64 e a razão de dividendos, é possível reproduzir a árvore do valor presente como na Figura 6.4, como mostrado nas figuras abaixo:

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				$[475.5 \cdot (1 - 51.72\%)] \cdot 1.4463$
			$[511.0 \cdot (1 - 35.66\%)] \cdot 1.4463$	
		$[488.3 \cdot (1 - 27.64\%)] \cdot 1.4463$		
	$[437.6 \cdot (1 - 22.85\%)] \cdot 1.4463$			
437.6		$[268.0 \cdot (1 - 27.64\%)] \cdot 1.4463$		

Figura 6.11 Fórmulas – Reproduzindo a Árvore de Valor pela AVP

Período 0	Período 1	Período 2	Período 3	Período 4
				332.0
			475.5	
		511.0		182.2
	488.3		261.0	
437.6		280.4		100.0
	268.0		143.2	
		153.9		54.9
			78.6	
				30.1

Figura 6.12 Árvore de Valor Reproduzida pela AVP

Portanto, quando se constrói uma árvore para o valor presente do projeto, utilizando-se a volatilidade 0,3 e o crescimento esperado de 12%, pode-se reproduzir a Figura 6.4 utilizando-se os corretos u e d . Como consequência, o valor adequado da opção pode ser obtido usando-se as fórmulas da Figura 6.5.

6.1.3.3 Estimando Corretamente a Volatilidade do Valor Presente

O procedimento sugerido por COPELAND & ANTIKAROV[4] superestima a volatilidade porque a fórmula para estimação da volatilidade não é adequada. Nesta seção, é apresentada a abordagem correta para estimação da volatilidade por simulação.

Primeiramente, simula-se a taxa de crescimento do fluxo de caixa, R_{FC} , com média 0 e volatilidade 0.3. Para se estimar a volatilidade correta do retorno do valor presente, R_{VP} , efetua-se:

$$R_{VP} = \ln \left(\frac{V_1 + F_1}{V_0} \right): \quad \text{variação/retorno do valor presente do projeto}$$

onde:

$$V_1 = \sum_{t=2}^4 \frac{\exp(R_{FC}) \mathbb{E}[F_t]}{\exp(r_c \times (t-1))}$$

$F_1 = (1 + R_{FC}) F_0$: primeiro fluxo de caixa estocástico – simulado indiretamente por R_{FC}

R_{FC} : simulado em $t=1$

r_c : custo de capital

V_0 : Valor presente inicial sem flexibilidade (não simulado)

Como se observa, nesta abordagem simula-se apenas F_1 e não todos os F_t para $t > 1$. Os fluxos de caixa, além do período 1, são apenas afetados por $\exp(R_{FC})$ que afeta $\mathbb{E}[F_t]$ para $t > 1$.

Se o fluxo de caixa for simulado da forma acima, a volatilidade estimada da variação do valor presente será 0.3, como se esperaria. Observemos que este procedimento é coerente, porque a informação que ocorre até o período 1 afeta os fluxos esperados futuros, mas não em toda magnitude da futura incerteza dos fluxos de caixa além do período 1. No período 1, nem toda a futura incerteza relacionada com os fluxos de caixas além do período 1 está resolvida, apenas parcialmente.

É importante frisar que o procedimento acima para se estimar a volatilidade é válido apenas quando o fluxo de caixa evolui como um MBG. Por exemplo, se o fluxo de caixa tivesse um processo de reversão à média em lugar do MBG, o procedimento acima teria de ser modificado.

A ACVP, que é muito utilizada pelos práticos para avaliar opções reais, frequentemente superestima a volatilidade e, por conseqüência, o valor das opções reais. Além disso, sua facilidade de aplicação é restrita a fluxos de caixa que evoluem como MBG, e esta restrição algumas vezes é ignorada.

6.2 Escolhendo entre as Abordagens: AVP ou AFC?

COPELAND & ANTIKAROV[4] argumentam que a AVP é limitada aos projetos que tenham a volatilidade do valor presente constante no tempo. Mas como foi mostrado, é possível aplicar a AVP para qualquer projeto. No caso de incertezas “não-estacionárias”, a volatilidade do valor presente não será constante no tempo, apenas tornando mais complicada a implementação da AVP. Para os projetos cujo fluxo de caixa não evolui como MBG, é também possível aplicar a abordagem AVP, mas a implementação é mais complexa.

Foi mostrado que a abordagem mais utilizada para se estimar a volatilidade do valor presente do projeto não é adequada e superestima a volatilidade. Também chegou-se ao importante resultado que, para os fluxos de caixa que evoluem como um MBG, a volatilidade do valor presente é a mesma que a do fluxo de caixa. Também foi apresentada uma abordagem correta para se estimar a volatilidade do valor presente quando não se tem a volatilidade do fluxo de caixa.

É comum o argumento dos usuários da AVP de que estimar prêmios de mercado para aplicar AFC é uma tarefa complicada, porque as incertezas não são comercializadas. Na AVP esta tarefa não é necessária porque na maioria dos casos aplica-se o CAPM para a taxa de desconto do projeto sem flexibilidade. Mas em projetos em que o fluxo de caixa não evolui como MBG, esta economia de tarefa tem um “trade-off” com a difícil tarefa de modelar adequadamente o processo estocástico do valor presente do projeto. Cabe ao analista decidir entre as duas abordagens equivalentes, a melhor em termos de custo/benefício.

7 Conclusão

Este trabalho teve o objetivo de fazer um detalhamento do procedimento necessário para a modelagem e avaliação de projetos com opções reais. O trabalho foi limitado aos projetos com incerteza exógena, mais adequado a mercados de concorrência perfeita que não envolvam jogos estratégicos.

As principais contribuições do trabalho foram:

- Mostrar a equivalência das abordagens de apreçamento relativo: preço-projeção, preço-entrópico e preço-reserva em mercados completos ou com incertezas replicáveis, e a razão de estendê-los naturalmente para mercados incompletos;
- Apresentar um procedimento de modelagem do fluxo de caixa do projeto a partir das incertezas básicas, que são preço, custo variável unitário e quantidade demandada. Nessa abordagem, pode-se decompor o impacto de cada uma das fontes de incerteza e alavancagem (operacional, capital de giro e financeira) no valor das opções reais;
- Comparar as abordagens do fluxo de caixa e do valor presente para avaliar opções reais. Mostrou-se que a abordagem tradicional do valor presente superestima a volatilidade e por consequência o valor das opções reais. Mas se aplicadas adequadamente, as duas abordagens resultam no mesmo valor para as opções reais.

As futuras pesquisas a partir desse trabalho têm de evoluir nas seguintes áreas:

- Estimação de prêmios de mercado para incertezas não-comercializadas. Apesar da praticidade e aplicabilidade da abordagem do preço-projeção, muito tem de evoluir acerca da estimação prática da abordagem preço-entrópico, que é mais robusta em distribuições assimétricas;
- Estimação de parâmetros e modelagem de processos estocásticos além dos tradicionais MBG e MRMG para opções reais, tais como processo com salto estocástico (“jumps”). Ver ROSS [32];

- Modelagem e apreçamento de projetos com flexibilidade com incertezas endógenas. A integração entre teoria dos jogos e opções reais promete muito nesse campo.

Bibliografia

- [1] AMRAN, M. e KULATILAKA, N. (1999). *Real options: managing investment in an uncertain world*. Harvard.
- [2] BENNINGA S.Z e SARIG O.H. (1997). *Corporate Finance*. McGraw-Hill.
- [3] COCHRANE, J. H. (2001). *Asset Pricing*. Princeton.
- [4] COPELAND, T. e ANTIKAROV, V. (2002). *Opções Reais*. Campus.
- [5] COPELAND, T. e WESTON J. F. (1992). *Financial Theory and Corporate Policy*. Terceira Edição. Addison Wesley.
- [6] DIXIT, A. K. (2001). “Investment and Hysteresis”. In TRIGEORGIS, L. AND SCHWARTZ S. (EDITORS). *Real Options and Investment Under Uncertainty*. MIT.
- [7] DIXIT, A. K. e PINDYCK, R. S. (1994). *Investment Under Uncertainty*. Princeton.
- [8] DUFFIE, D. (2001). *Dynamic Asset Pricing Theory*. Terceira Edição, Princeton.
- [9] FRANCO, J. C. G. (2003). “Proxy Pricing of Non-Marketed Cash Flows”. *Working Paper*, Department of Management Science and Engineering, Stanford University.
- [10] FRITELLI, M. (2000). “Introduction to a Theory of Value Coherent with the No-Arbitrage Principle”. *Finance and Stochastics*, 4.
- [11] HOLTAN, M. (2002). “Discounting a Mean Reverting Cash Flow”. *Investment Science.com*.
- [12] HOWEL, S.; STARK, A.; NEWTON, D.; PAXTON, D.; CAVUS, M.; PEREIRA, J. and PATEL, K. (2001). *Real Options: evaluating corporate investment opportunities in a dynamic world*. Prentice Hall.
- [13] HULL, J. C. (1999). *Options, Futures & Other Derivatives*. Prentice Hall. Quarta Edição.
- [14] INGERSOLL, J. Jr. e ROSS, S. A. (1992). “Waiting to Invest: Investment and Uncertainty”. *Journal of Business*. Volume 65, Jan. 1992.
- [15] JONES, C. I. (2000). *Introdução à Teoria do Crescimento Econômico*. Campus.
- [16] KAPUR, J.N. (1989). *Maximum-Entropy Models in Science and Engineering*. Wiley.

- [17] KLEIJNEN J. e GROENENDAAL W.V. (1988). *Simulation: A Statistical Perspective*. Wiley.
- [18] LUENBERGER, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford.
- [19] LUENBERGER, D. G. (2000). “A Correlation Pricing Formula”. *Working Paper*, Department of Management Science and Engineering, Stanford University.
- [20] LUENBERGER, D. G. (2001). “Arbitrage and Universal Pricing”. *Working Paper*, Department of Management Science and Engineering, Stanford University.
- [21] LUENBERGER, D. G. (2003). “Projection Pricing”. *Working Paper*, Department of Management Science and Engineering, Stanford University.
- [22] MAGILL, M. e QUINZI, M.(2002). *Theory of Incomplete Markets*. MIT.
- [23] MATOS, J.A. (2001). *Theoretical Foundations of Corporate Finance*. Princeton.
- [24] MCDONALD, R. L. e SIEGEL, D. R. (1985). “Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down”. *International Economic Review*, June.
- [25] MERTON, R. C. (1990). “Continuous-Time Finance”. Blackwell.
- [26] MUN, J. (2002). *Real Option Analysis*. Wiley.
- [27] MYERS, S.C. (2001). “Financial Theory and Financial Strategy”. Em Trigeorgis, L. e Schwartz. S. (Editores). *Real Options and Investment Under Uncertainty*. MIT Press.
- [28] PARK C. S. e SHARP-BETTE G. P. (1990). *Advanced Engineering Economics*. Wiley.
- [29] Real Options Calculator User`s Manual (2004). Publicado pela empresa Onward Inc. Site www.onwardin.com.
- [30] ROCHA, A. B. S & FIGUEIREDO, A. C. (2003). “Avaliação de uma Companhia Aérea como uma Opção Real”. *Revista de Economia e Administração*. Out/Dez.
- [31] ROSE, C. & SMITH, M. (1996). *Random: manipulating probability density functions*. In VARINA, H. R. *Computational Economics and Finance: modeling and analysis with Mathematica*.

- [32] ROSS, S.M. (2003). *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*. 2nd ed. Cambridge.
- [33] SAMUELSON, P. (1965). “Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly”. *Industrial Management Review*, Primavera.
- [34] SIQUEIRA, J. O. (1999). “Determinação Entrópica do Preço Racional da Opção Européia Simples Ordinária sobre Ação e Bond: uma Aplicação da Teoria da Informação em Finanças em Condição de Incerteza”. *Tese de Doutorado*. Departamento de Administração, Universidade de São Paulo.
- [35] SIQUEIRA, J. O. (2002). “Econometria Entrópico-Bayesiana: do Preço de Mercado ao Valor Econômico”. *Tese de Livre-Docência não defendida*. Departamento de Administração, Universidade de São Paulo.
- [36] SMITH, J. E e NAU, R. F. (1995). “Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis”. *Review of Management Science*, May.
- [37] STECHA, J. (1997). “Stochastic Optimal Control ARMAX Model”. *Working Paper*. Faculty of Electric Engineering, Czech Technical University of Prague.
- [38] STULTZ, R. M e KAROLYI G. A. (2001). “Are Financial Assets Priced Locally or Globally?” *Working Paper*. Fisher College of Business, Ohio State University.
- [39] TRIGEORGIS, L. (1996). *Real Options*. MIT.
- [40] TRIGEORGIS, L. (2001). “Real Options: An Overview”. Em TRIGEORGIS, L. e SCHWARTZ S. (Editores). *Real Options and Investment Under Uncertainty*. MIT.
- [41] TRIGEORGIS, L., KULATILAKA, N. (2001). “The General Flexibility to Switch: Real Options Revisited”. Em TRIGEORGIS, L. e SCHWARTZ S. (Editores). *Real Options and Investment Under Uncertainty*. MIT.
- [42] TRIGEORGIS, L. e SCHWARTZ E. S. (2001). “Real Options and Investment Under Uncertainty: An Overview”. TRIGEORGIS, L. e SCHWARTZ S. (Editores). *Real Options and Investment Under Uncertainty*. MIT.

ANEXO 1

Assumindo que o fluxo de caixa seja discreto no tempo, fica mais fácil derivar o termo $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t$. O valor presente no período zero é:

$$V_0 = F_0 + \sum_{t=1}^N \frac{\mathbb{E}(F_t)}{\exp(r_c \times t)}$$

Diferenciando V_0 em relação a F_0 , obtemos:

$$\frac{\partial V_0}{\partial F_0} dF_0 = dF_0 + \sum_{t=1}^N \frac{1}{\exp(r_c \times t)} \frac{\partial \mathbb{E}(F_t)}{\partial F_0} dF_0$$

Observemos que no caso do MBG, $\frac{\partial \mathbb{E}(F_t)}{\partial F_0} = \exp(\delta \times t)$. Isso porque no MBG a variação de F_0 afeta os valores esperados futuros do fluxo de caixa $\mathbb{E}(F_t)$ para $t > 1$ pelo múltiplo $\exp(\delta \times t)$. Portanto, obtém-se:

$$\frac{\partial V_0}{\partial F_0} = \sum_{t=0}^N \frac{1}{\exp((r_c - \delta) \times t)}$$

Observemos que o termo é $\frac{\partial V_t}{\partial F_t} F_t = V_t$ no caso do MBG.

No caso do MRM Ornstein-Ühlenbeck como:

$$dF_t = k[g(t) - \ln F(t)]F_t dt + \sigma F_t dW_t$$

A derivada $\frac{\partial E(F_t)}{\partial F_0} = (1-k)^t \exp(\delta^* \times t)$, onde δ^* a taxa de crescimento implícita

na função $g(t)$. Assim obtemos:

$$\frac{\partial V_0}{\partial F_0} = \sum_{t=0}^N \frac{(1-k)^t}{\exp((r_c - \delta^*) \times t)}$$

Observemos que $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t < V_t$ no caso do MRMG. O exemplo do anexo 2 ilustra

bem essa característica do MRMG.

ANEXO 2

Neste exemplo é apresentada uma forma de estimar $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t$ para o MRMG na prática. Suponhamos que o processo estocástico do fluxo seja o MRMG de Ornstein-Ühlenbeck:

$$dF_t = k[g(t) - \ln F(t)]F_t dt + \sigma F_t dW_t$$

Onde k é a velocidade de reversão à média e $g(t)$ é o nível de reversão à média.

Suponhamos também para o processo estocástico: número inicial de \$100, que dura por 50 períodos, volatilidade de 30%, e nível de reversão à média de 4,05 e custo de capital igual à taxa livre de risco de 4,88%¹⁷:

$$dF_t = 0.5[4.05 - \ln F(t)]F_t dt + 0.3F_t dW_t$$

Como consequência, o valor presente inicial é:

$$\sum_1^{50} \frac{100}{\exp(0.0488 \times t)} = 1,825.6$$

Se F_t no momento seguinte cai para 99, qual será o impacto no valor presente? O nível dos fluxos de caixa esperados futuros mudam, mas apenas parcialmente, devido ao processo de reversão à média. O fluxos de caixa esperados futuros depois dessa mudança serão:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
99.00	99.50	99.75	99.87	99.94	99.97	99.98	99.99	100.00	100.00

¹⁷ Se a incerteza do processo tem prêmio de mercado, a taxa ajustada ao risco não seria constante para o MRM, e deveria haver algumas adaptações. Ver HOLTAN[11].

Como pode ser observado, o fluxo de caixa converge para o nível médio de \$100 em 9 períodos. O valor presente do projeto depois dessa mudança será 1823,8, uma mudança de apenas 0.993% no valor presente, relacionada a uma mudança de 1% no fluxo de caixa imediato.

Este percentual de 0.993%, dividido pela variação de 1% no fluxo de caixa, resulta na derivada de $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t = 0.993\%$. Isto significa que a volatilidade do valor presente é menor que a volatilidade do fluxo de caixa, sendo neste caso $2.979\% = 0.993\% \times 30\%$.

No caso do MRMG, o parâmetro k determina a derivada $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t$, como já foi mostrado no apêndice 1. A tabela abaixo apresenta estimativas de $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t$ para alguns valores de k :

k	$\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t$	Volatilidade do Valor Presente $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t \times 30\%$
0.00	1.0000	30.0%
0.10	0.3645	10.9%
0.25	0.1822	5.5%
0.50	0.0993	3.0%

Observemos que quanto menor a velocidade de reversão à média, k , maior é a volatilidade do valor presente. Quando $k = 0$ temos um MBG e a volatilidade do valor presente é a mesma que a volatilidade do fluxo de caixa, assim $\frac{\partial V}{\partial F_t} F_t = 1$.

ANEXO 3

Como demonstrado em PARK & SHARP-BETTE[28] para duas variáveis com distribuição normal bivariada:

$$\mathbb{V}[PQ] = \mathbb{V}[R] = \mu_P^2 \sigma_Q^2 + \mu_Q^2 \sigma_P^2 + 2\rho_{PQ} \mu_P \mu_Q \sigma_P \sigma_Q + \sigma_P^2 \sigma_Q^2 (1 - \rho_{PQ}^2)$$

$$\mathbb{V}[CQ] = \mathbb{V}[Co] = \mu_C^2 \sigma_Q^2 + \mu_Q^2 \sigma_C^2 + 2\rho_{CQ} \mu_C \mu_Q \sigma_C \sigma_Q + \sigma_C^2 \sigma_Q^2 (1 - \rho_{CQ}^2)$$

$$\mathcal{C}[PQ, CQ] = \mathbb{E}[R, Co] = \mathbb{E}[RCo] - \mathbb{E}[R]\mathbb{E}[Co]$$

$$\mathcal{C}[PQ, CQ] = \mu_R \mu_{Co} + \rho_{R,Co} \sigma_R \sigma_{Co} - \mu_R \mu_{Co}$$

$$\mathcal{C}[PQ, CQ] = \rho_{R,Co} \sigma_R \sigma_{Co}$$

Para o cálculo de $\rho_{R,Co}$, pode-se fazer:

$$\mathcal{C}[PQ, S] = \mathbb{E}[PQS] - \mathbb{E}[PQ]\mathbb{E}[S]$$

que decorrente da demonstração $\mathbb{E}[XYZ]$ em STECHA[37], considerando uma distribuição normal trivariada para as três variáveis envolvidas, segue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[PQ, S] &= \mu_P \mu_Q \mu_S + \mu_P \mathcal{C}[Q, S] + \\ &\mu_Q \mathcal{C}[P, S] + \mu_S \mathcal{C}[P, Q] - \mu_S \mu_P \mu_Q - \mu_S \mathcal{C}[P, Q] \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{C}[PQ, S] = \mu_P \mathcal{C}[Q, S] + \mu_Q \mathcal{C}[P, S]$$

similarmente, temos que:

$$C[CQ, S] = \mu_c C[Q, S] + \mu_Q C[C, S]$$

Então:

$$\rho_{PQ,S} = C(PQ, S) \sigma_{PQ} \sigma_S \quad \text{e}$$

$$\rho_{CQ,S} = C(CQ, S) \sigma_{CQ} \sigma_S$$

e

$$\rho_{PQ,CQ} = \rho_{PQ,S} \times \rho_{CQ,S}$$

Portanto, com os resultados acima, pode-se obter a variância e a covariância com o mercado da margem de contribuição.

ANEXO 4

Para simplificar a componente estocástica do capital de giro abaixo:

$$[k_A \sigma_R RdW_R + (k_I - k_A) \sigma_{Co} CodW_{Co}]$$

pode-se usar o fato de se ter, nesse caso, a soma de duas variáveis aleatórias, $X = k_A \sigma_R RdW_R$ e $Y = (k_I \sigma_{Co} Co - k_B \sigma_{Co} Co) dW_{Co}$. A variância será:

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathcal{C}(X, Y)$$

Onde:

$$\mathbb{V}(X) = k_A^2 \mathbb{V}(PQ)$$

$$\mathbb{V}(Y) = (k_I - k_B)^2 \mathbb{V}(CQ)$$

$$\mathcal{C}(X, Y) = \rho_{X, Y} \sigma_X \sigma_Y$$

$$\text{onde } \rho_{X, Y} = \rho_{PQ, CQ}$$

Portanto, usando os resultados do anexo 3, é possível simplificar a componente estocástica do processo:

$$k_A \sigma_R RdW_R + (k_I - k_B) \sigma_{Co} CodW_{Co} = \sigma_G GdW_G$$

ANEXO 5

A componente estocástica do O:

$$\sigma_N NdW_N - \sigma_G GdW_G$$

pode ser simplificada, uma vez que temos uma diferença entre duas variáveis aleatórias: $X = \sigma_N NdW_N$ e $Y = \sigma_G GdW_G$. A variância será:

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\mathcal{C}(X, Y)$$

Onde:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(N)$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(G)$$

$$\mathcal{C}(X, Y) = \rho_{X,Y} \sigma_X \sigma_Y$$

$$\text{onde } \rho_{X,Y} = \rho_{N,W_C}$$

$$\rho_{N,G} = \rho_{N,S} \times \rho_{G,S}$$

Portanto, é possível simplificar a componente estocástica do processo estocástico:

$$\sigma_N NdW_N - \sigma_G GdW_G = \sigma_O OdW_O$$