UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

ANÁLISE DE MEDIDAS DE DESEMPENHO DE ATIVOS DE RISCO:
UM ESTUDO DOS ÍNDICES DE POTENCIAL DE INVESTIMENTO, SHARPE E
SHARPE GENERALIZADO

Claudinei de Paula Santos
Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

SÃO PAULO
2008

Profa. Dra. Suely Vilela
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Carlos Roberto Azzoni
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Isak Kruglianskas
Chefe do Departamento de Administração

Prof. Dr. Lindolfo Galvão de Albuquerque
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

CLAUDINEI DE PAULA SANTOS

**ANÁLISE DE MEDIDAS DE DESEMPENHO DE ATIVOS DE RISCO:
UM ESTUDO DOS ÍNDICES DE POTENCIAL DE INVESTIMENTO, SHARPE E
SHARPE GENERALIZADO**

Dissertação apresentada ao
Departamento de Administração da
Faculdade de Economia, Administração e
Contabilidade da Universidade de São
Paulo como requisito para a obtenção do
título de Mestre em Administração de
Empresas.

Orientador: Prof. Dr. José de Oliveira Siqueira

SÃO PAULO

2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Santos, Claudinei de Paula

Análise de medidas de desempenho de ativos de risco : um estudo dos índices de potencial de investimento, sharpe e sharpe generalizado / Claudinei de Paula Santos. -- São Paulo, 2008.

130 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2008

Bibliografia.

1. Investimentos 2. Investimentos – Análise 3. Análise de risco

AGRADECIMENTOS

“Você não pode ensinar nada a um homem; você pode apenas ajudá-lo a encontrar a resposta dentro dele mesmo.” (Galileu Galilei)

*“Os que decidem sobre o amanhã devem avaliar o impacto no futuro.”
(Jacques Costeau)*

“Deus nos fez perfeitos e não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos.” (Albert Einstein)

A Deus, pela vida, beleza e perfeição de sua criação; por todo cuidado que tem demonstrado ao longo de minha existência, pelas pessoas que me apresentou e conviveram comigo, algumas por breve instantes, outras por tempos mais longos, todas de grande importância no ensinamento da vida, e pelas oportunidades e caminhos que me permitiu trilhar, garantindo a cada passo a construção de um sonho.

Aos meus pais, José Francisco de P. Santos e Zilá de Souza P. Santos, que dedicaram suas vidas ao bem estar dos filhos, e que desde cedo me ensinaram a importância da educação e do conhecimento, fornecendo os melhores recursos possíveis e oportunidades necessárias para que me tornasse uma pessoa melhor.

Ao meu orientador, Professor Dr. José de Oliveira Siqueira, a quem devo a oportunidade concedida e a quem aprendi a ouvir e respeitar pela honestidade, compreensão e exemplo de conduta acadêmica, pela empolgação e seriedade com que trata a orientação e pelo vasto conhecimento que possui na área de finanças quantitativas.

Ao Prof. Dr. José Roberto Securato pelo exemplo de profissional do ensino, comprometido com o aprendizado, e a quem devo grande parte de meu interesse pela área de finanças e pelo conhecimento adquirido na área.

À Mara R. Maehara, minha namorada, pelo apoio, dedicação e paciência nos diferentes momentos vividos durante o mestrado, e por respeitar e incentivar que persiga meus sonhos.

Aos docentes da FEA, que formam essa instituição reconhecida, sempre comprometidos com a geração e disseminação de conhecimento de qualidade, com o qual pude contar no desenvolvimento desse trabalho. Aos funcionários da PPGA e da biblioteca, muito colaborativos em todos os momentos em que os procurei com alguma necessidade.

Aos amigos da USP, em especial ao Marcelo M. Taddeo que teve enorme paciência em me ouvir, discutir, revisar e corrigir dúvidas matemáticas enfrentadas durante a elaboração da dissertação, e a Carla Michele, que comprometeu muitos de seus momentos de descanso para me ajudar na revisão e formatação desse trabalho.

Aos profissionais do LABFIN sempre dispostos a me atender e fornecer todas as informações solicitadas, e a minha amiga Stella Fontes da Agência Estado, que revisou o trabalho fornecendo sugestões importantes quanto à forma de escrita.

RESUMO

A dissertação aborda e compara as características dos índices de Sharpe (SR) e suas variantes, SR^c e SR^d , Sharpe generalizado (GSR) e potencial de investimento (IP), sendo os índices GSR e IP associados a alguma função de utilidade. Pelo fato de o GSR e o IP serem idênticos, testes empíricos foram realizados entre SR^c e o GSR . Ambos foram avaliados teoricamente sob dois aspectos, o que definimos de análise retrospectiva, i.e., análise de séries de log-retornos mensais observados, e a análise prospectiva, i.e., séries a ocorrer. No âmbito prospectivo, *ex ante facto*, o SR^c (índice de Sharpe com variável de estado normal) e o SR^d (índice de Sharpe com variável de estado lognormal), por estarem associados à função de utilidade quadrática, apresentam distorções como o ponto *bliss* e o agente econômico “bomba de dinheiro”. O mesmo ocorre no âmbito retrospectivo, *ex post facto*, com o GSR (potencial de desempenho de ativos de risco para indivíduos com função de utilidade HARA) quando o coeficiente de aversão ao risco é igual a um negativo, $\gamma = -1$. No entanto, o GSR pode ser associado a funções de utilidade diferentes da quadrática evitando seus efeitos indesejáveis. Sob a suposição de movimento browniano geométrico (MBG) e da utilidade HARA para o preço mensal ajustado de ações brasileiras e americanas e para pontos mensais de índices brasileiros e americanos, entre janeiro de 2000 e março de 2008, obtivemos os seguintes resultados: (1) o índice GSR para utilidade quadrática apresentou elevada correlação com o SR^c ; (2) a menor correlação de GSR com SR^c ocorreu para utilidade logarítmica; (3) para a utilidade exponencial, o GSR apresenta elevado grau de correlação com o SR^c .

Os resultados mostraram que o GSR com utilidade exponencial é o índice que menos se aproxima do comportamento do GSR com utilidade quadrática. Sabendo-se das distorções da utilidade quadrática, a adoção do GSR com $\gamma = 1$ parece mais adequado para a classificação de ativos de risco.

Palavras-chave: Investimentos, finanças, risco, índice de Sharpe, índice potencial de investimento, índice de Sharpe generalizado, teoria da utilidade, função de utilidade, fator de desconto estocástico, bandas do índice de Sharpe, precificação, preço do risco.

ABSTRACT

This master dissertation studies and compares the characteristics of Sharpe ratio and its variants, SR^c and SR^d , generalized Sharpe ratio (GSR) and investment potential (IP), both GSR and IP associated to any utility function. By the fact that GSR and IP are identical indexes, empiric tests were conducted between SR^c and GSR . The indexes were evaluated theoretically under two different aspects: retrospective analysis, i.e., analyze the observed monthly log-returns, and prospective analysis, i.e., series to occur. Under prospective view, *ex ante facto*, SR^c (Sharpe ratio with normal state variable) and SR^d (Sharpe ratio with lognormal state variable), for being associated to the quadratic utility function, show the inherent problems to utility functions such as the bliss point and the pump money economic agent. The same happens in a retrospective view, *ex post facto*, with the GSR (performance potential with HARA utility function family) when the risk aversion coefficient equals minus one, $\gamma = -1$. Therefore, the GSR can be associated to different utility functions avoiding the undesirable effects. Under the GBM (geometric Brownian motion) condition and HARA utility function for the Brazilian and American adjusted monthly stock prices and indexes monthly points during January 2000 and March 2008, we reached the following: (1) results indicate that GSR for quadratic utility has high correlation level with SR^c ; (2) while the logarithmic utility showed lowest correlation level between GSR and SR^c ; (3) exponential utilities showed a high level of correlation between GSR and SR^c .

The results showed that GSR with exponential utility kept the biggest behavior difference for the GSR with quadratic utility. Based on the knowing problems of the quadratic utility, GSR with $\gamma = 1$ seems to be a better index choice for risk assets classification.

Keywords: Investment, finance, risk, Sharpe ratio, investment potential, generalized Sharpe ratio, utility theory, utility function, stochastic discount factor, Sharpe ratio bounds, pricing, market price of risk.

SUMÁRIO

FICHA CATALOGRÁFICA	IV
1 INTRODUÇÃO	20
1.1 Situação Problema	23
1.2 Justificativa do Tema	24
1.3 Objetivo	24
1.4 Método.....	25
1.5 Descrição dos Capítulos.....	25
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	27
2.1 Teoria da Utilidade	29
1.1.1 Função de utilidade.....	31
1.1.2 Coeficiente de aversão ao risco.....	34
1.1.3 Aversão a risco absoluta constante (CARA).....	35
1.1.4 Aversão a risco relativa constante (CRRA).....	37
1.1.5 Aversão ao risco absoluto hiperbólico (HARA)	39
1.1.1 Utilidade quadrática	41
1.1.2 Maximização da utilidade esperada.....	43
1.1.2.1 Maximização para a função de utilidade CRRA	44
1.1.3 Calculando a utilidade esperada em termos monetários	46
1.1.4 Inverso da função utilidade	48
1.1.4.1 Inverso da esperança da função de utilidade HARA	48
1.1.5 Investimento ótimo para função de utilidade HARA.....	49
2.1.1.1 Calculando a riqueza final do investidor com utilidade quadrática ..	52
1.1.5.1 Utilidade quadrática como uma aproximação da utilidade CRRA ..	56
2.2 Índices de Avaliação de Desempenho.....	57

2.2.1	Índice de Sharpe.....	57
2.2.1.1	Índice de Sharpe Ajustado (SRA).....	61
2.2.1.2	Índice de Sharpe em função do horizonte de investimento.....	67
2.2.2	Índice de Potencial de Investimento	74
2.2.2.1	Potencial de investimento em termos de índice de Sharpe.....	76
2.2.3	Análise qualitativa.....	78
2.2.3.1	Análise qualitativa do $SR^d(T)$	78
2.2.3.2	Análise qualitativa do $SR^c(T)$	80
2.2.4	Análise quantitativa (elasticidade).....	82
2.2.4.1	Análise quantitativa do $SR^d(T)$	83
2.2.4.2	Análise quantitativa do $SR^c(T)$	87
2.2.5	Bandas de <i>Good-deal</i>	89
2.2.5.1	Modelo baseado no consumo	90
2.2.5.2	Bandas de Good Deal para preços de ativos em mercado incompleto	94
2.3	Generalização do índice de Sharpe	98
3	METODOLOGIA.....	102
3.1	Método de Pesquisa.....	102
3.2	Qualidade dos Dados.....	102
4	DISCUSSÃO	104
4.1	Hipóteses	104
4.2	Interpretação dos Índices	104
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	118
5.1	Sobre os resultados alcançados.....	118
5.2	Limitações e sugestões de pesquisa	119
6	REFERÊNCIAS.....	120
7	APÊNDICE	124

7.1	Apêndice I – Apêndice de Provas	124
7.1.1	Prova 4 – Investimento ótimo para utilidade HARA	124
7.2	Apêndice II - Rotina de cálculo da distribuição empírica	127
7.3	Apêndice III – Rotina de Cálculo dos GSRs e SR^c	128

LISTA DE SÍMBOLOS E ACRÔNIMOS

Símbolos:

$\lrcorner$ *Fim de demonstração*

$\equiv$ *Por definição*

Acrônimos:

EC – Equivalente certo

γ - *Coeficiente de aversão ao risco base (relativo)*

$\tilde{\gamma}$ - *Coeficiente de aversão ao risco local (relativo)*

$a(V)$ - *Coeficiente de aversão ao risco absoluto*

$\tilde{\alpha}$ - *Parcela de capital inicial investido em ativo de risco*

$\tilde{\alpha}^*$ - *$\tilde{\alpha}$ ótimo*

MPR – Preço pelo risco de mercado

SR – Índice de Sharpe

SR_A - *Índice de Sharpe ajustado (utilidade quadrática truncada)*

SR^C - *Variante de SR para logaritmo dos preços (composição contínua)*

SR^d - *Variante de SR para preços (composição discreta)*

MBG – Movimento browniano geométrico

B_t - *Preço de um ativo livre de risco com taxa de juros nominal r_f*

CPO – Condição de primeira ordem

IP – Índice potencial de investimento

GSR – Índice de Sharpe generalizado

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Indivíduo em relação ao risco	34
Quadro 2 – Coeficientes de aversão ao risco.....	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes de Aversão à Risco	40
Tabela 2 – Ativos e Excessos de Retornos	59
Tabela 3 – Exemplo de Ativo e risco com Excesso de Retorno	62
Tabela 4 – Decomposição do Excesso de Retorno.....	63
Tabela 5 – Tabela Comparativa: SR padrão com SR ajustado	66
Tabela 6 – Análise qualitativa dos índices $SR^d(T)$ e $SR^c(T)$	107
Tabela 7 – Análise quantitativa dos índices $SR^d(T)$ e $SR^c(T)$	108
Tabela 8 – Análise de ações americanas: preço mensal ajustado (jan/2000 – mar/2008)	110
Tabela 9 – Ordenação das ações americanas	111
Tabela 10 – Análise de ações brasileiras	112
Tabela 11 – Ordenação das ações brasileiras	113
Tabela 12 – Análise de índices.....	113
Tabela 13 – Ordenação dos índices.....	114
Tabela 14 – Correlação entre GSR e SR^c	114
Tabela 15 – Resultados do teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov	116
Tabela 16 – Correlações de Spearman entre os p-values do teste Kolmogorov-Smirnov e os índices de desempenho.....	116

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Representação de função de utilidade côncava e crescente	32
Gráfico 2 – Evolução de resultados utilizando utilidade esperada.....	33
Gráfico 3 - Função de Utilidade $U(V) = -e^{-aV}$, com $a = 0,5$	37
Gráfico 4 - Função de Utilidade $U_{\gamma}(V) = \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ com $\gamma = 0,5$	38
Gráfico 5 - Função Utilidade $U_{\gamma, \bar{V}}(V) = \frac{(\bar{V} + V)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, com $\gamma = 0,5$	40
Gráfico 6 – Utilidade Quadrática.....	41
Gráfico 7 – Equivalente certo da Riqueza	47
Gráfico 8 – Função inversa da Utilidade.....	49
Gráfico 9 – Utilidade Quadrática Truncada	64
Gráfico 10 – SR^d em função do horizonte de investimento, $SR^d(T)$	72
Gráfico 11 – SR^c em função do horizonte de investimento, $SR^c(T)$	72
Gráfico 12 – Comparação do comportamento entre $SR^c(T)$ e $SR^d(T)$	73
Gráfico 13 – Gráfico da derivada de $SR^d(T)$ em relação à T	74
Gráfico 14 - Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação ao log-retorno ν	83
Gráfico 15 – Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação à volatilidade.....	85
Gráfico 16 – Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação ao horizonte T	86
Gráfico 17 – Elasticidade de $SR^c(T)$ em relação ao log-retorno ν	88
Gráfico 18 – Fronteiras do preço de opção como função do preço de ação	98

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1- Coeficiente de Aversão ao Risco	34
Equação 2 – Relação do coeficiente de aversão ao risco relativo local e absoluto..	35
Equação 3 – Função CRRA para $\gamma \rightarrow 1$	38
Equação 4 – Aversão ao risco absoluto para a função CRRA em $\gamma \rightarrow 1$	39
Equação 5 – Coeficiente de aversão ao risco para função HARA.....	40
Equação 6 – Função de utilidade quadrática.....	41
Equação 7– Composição da riqueza do investidor.....	43
Equação 8 – Maximização da utilidade HARA	44
Equação 9 – Inverso da função utilidade.....	48
Equação 10 – Relação carteira de risco escolhida por unidade de tolerância de risco	50
Equação 11 – Equivalente certo, IP	52
Equação 12 – Índice potencial de investimento (IP).....	52
Equação 13 – Investimento ótimo em função da tolerância de risco para quadrática	54
Equação 14 – Investimento ótimo	54
Equação 15 – Aversão ao risco local para utilidade CRRA.....	56
Equação 16 – Índice de Sharpe	58
Equação 17 – Cálculo do SR para o ativo A e B.....	59
Equação 18 – Índices de Sharpe.....	67
Equação 19 – Derivada de $SR^d(T)$ em T	73
Equação 20 – Índice de potencial de investimento.....	75
Equação 21 - IP_γ como função de MPR	77
Equação 22 – Riqueza terminal do investidor	124

LISTA DE EXEMPLOS

Exemplo 1 – V_{bliss} como Função V_{safe}	42
Exemplo 2 – Maximização de riqueza	44
Exemplo 3 – Cálculo da riqueza em termos monetários	46
Exemplo 4 – Índice de Sharpe.....	59
Exemplo 5 – Índice de Sharpe ajustado	62
Exemplo 6 – Simulações com o SR e o SRA	65

LISTA DE PROVAS

Prova 1 – Função CRRA para $\gamma \rightarrow 1$	38
Prova 2 – Relação da utilidade HARA com utilidade quadrática	42
Prova 3 – Inverso da utilidade HARA	48
Prova 4 – Investimento ótimo para HARA encontra-se no Apêndice I	49
Prova 5 – Comparação com a Utilidade Quadrática.....	56
Prova 6 – SR em função do horizonte de investimento T	67

LISTA DE APÊNDICES

7.1	Apêndice I – Apêndice de Provas.....	124
7.2	Apêndice II - Rotina de cálculo da distribuição empírica.....	127
7.3	Apêndice III – Rotina de Cálculo dos GSRs e SR^c	128

1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro, que é constituído por um conjunto de instituições que viabilizam a transferência de recursos ofertados a tomadores de recursos, é um componente estratégico no desenvolvimento econômico do país. No Brasil, o mercado financeiro sofreu grandes mudanças a partir da década de 60, isso devido às inovações ocorridas na época como a lei de capitais estrangeiros, a correção monetária, a criação do banco central, a lei de mercado de capitais, os auditores independentes, entre outros. Na década seguinte, presenciou-se grande expansão da bolsa (1971), a regulamentação dos consórcios, a criação do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia - SELIC, da Comissão de Valores Mobiliários - CVM (1976), e a nova lei da sociedade por ações. Na década de 80 ocorre a regulamentação do mercado de futuro e opções, e a criação dos clubes de investimentos. Finalmente, na década de 90, reflexo da necessidade de se modernizar o país, surgiram novas alterações no mercado financeiro, entre elas o código de defesa do consumidor, a regulamentação dos fundos de privatização, e o surgimento da Bolsa de Mercadorias & Futuros - BM&F.

Esse desenvolvimento do mercado financeiro fez com que um dos principais obstáculos ao crescimento da economia brasileira, isto é, falta de capital para financiar a expansão das empresas, pudesse ser mais bem administrado. A Bolsa de Valores de São Paulo – Bovespa, é um dos responsáveis por essa dinâmica, e tem desempenhado um papel fundamental nesse equilíbrio entre poupadores (superavitários) e as instituições carentes de recursos. Portanto, a bolsa de valores, com sua capacidade de aproximar empresas e investidores, é um instrumento de desenvolvimento dos países capitalistas.

Um setor financeiro sólido é, portanto de fundamental importância para o bom desempenho da economia dado que tem papel crucial na intermediação financeira

podendo possibilitar um rápido crescimento econômico. Anne O. Krueger¹ comenta em sua palestra realizada no 3º Congresso Internacional de Derivativos e Mercado Financeiro, que o sistema financeiro, por ter como funções principais possibilitar que a poupança daqueles com poucas oportunidades de investimento seja utilizada por aqueles com oportunidades altamente produtivas, traz benefícios para ambas as partes envolvidas no processo criando oportunidades compensadoras de investimento, possibilitando maior acúmulo de capital na economia resultando em crescimento econômico mais rápido, beneficiando por fim a sociedade como um todo.

O Brasil está passando por esse processo de amadurecimento econômico-financeiro e como consequência temos visto uma acentuada expansão das bolsas de valores de São Paulo, Bovespa e de Mercadorias & Futuros, BM&F, bolsas essas que em 8 de maio de 2008 receberam aprovação da Bovespa *Holding* para integrarem suas atividades e em 9 de julho do mesmo ano o Conselho Administrativo de Defesa Econômica (CADE) reitera essa posição sem restrições, surgindo então a terceira maior Bolsa do Mundo em valor de mercado, a BM&FBovespa S.A.

Nos últimos anos, no Brasil, o movimento financeiro na Bovespa cresceu em ritmo acentuado, superando a média diária de um bilhão de dólares em negócios. O valor das empresas listadas em bolsa cresceu 76% em 2004. O volume de contratos futuros de ações na BM&F também atingiu patamares elevados de crescimento. Nesse contexto, muitas empresas têm captado recursos por meio do lançamento de ações (IPO – *Initial Public Offering*). Outro fenômeno atrelado as bolsas é que um número bastante elevado de pessoas investiu em ações, isto é, as pessoas físicas em 2006 já respondiam por 25% dos negócios. Tudo isso nos leva a concluir que as bolsas se tornaram um instrumento eficaz de financiamento para as empresas.

Com o aumento de demanda das pessoas físicas por oportunidades de investimento de risco, os fundos de investimento se multiplicaram e com eles a necessidade de se poder avaliar, tanto o desempenho dos fundos como o desempenho dos

¹ Ph.D. em Economia pela Universidade de Wisconsin, professora emérita de Humanidade e Ciências na Universidade de Stanford. Foi diretora-gerente adjunta do FMI de 2001 a 2006.

administradores. Nesse contexto, o estudo de índices de desempenho de ativos de risco passa a ser de grande importância.

Desde os avanços da moderna teoria de carteira apresentada por Markowitz em 1952, diversos índices de avaliação de desempenho de investimento foram criados e passaram a ser adotados pelo mercado como balizadores na classificação das diversas possibilidades de aplicação, auxiliando no processo de tomada de decisão do investidor.

Entre os índices, o mais utilizado é o índice de Sharpe (1966), que classifica o investimento estabelecendo uma relação entre o excesso de retorno da alternativa de investimento analisado pela sua volatilidade (*risk-adjusted performance*). Entretanto, existem muitos outros índices de avaliação de desempenho, cada um com características específicas. Entre eles, o índice potencial de investimento (IP), que por utilizar o equivalente certo do excesso de retorno do investimento, faz uso da função de utilidade do investidor, adicionando nova informação a um índice de desempenho.

A incorporação de diferentes funções de utilidade ao índice IP também é implementada no SR dando origem ao GSR. Esse índice, concebido originalmente por Hodges (1998), classifica o ativo de risco pelo aspecto prospectivo, atribuindo a série dos retornos um comportamento que segue o movimento Browniano geométrico (MBG). Novos desenvolvimentos desse índice são feitos por Cerny (2004) que remove a limitação do GSR ampliando as possibilidades de funções de utilidade associadas, mas agora no âmbito retrospectivo e para mercado incompleto.

Seguindo a análise prospectiva, baseado na mesma premissa de que as séries se comportam segundo o MBG, o IP para diferentes horizontes de investimento é apresentado por Cerny (2004) para mercado completo.

A idéia de que os índices de medida de desempenho de ativos de risco repercutem de diferentes formas para indivíduos diferentes é o que motiva a incorporação da função de utilidade do investidor aos índices, na realidade o que se deseja é a representação da satisfação que o prêmio pelo risco que o ativo em questão traz ao

investidor. O índice de Sharpe tem naturalmente incorporado a função de utilidade quadrática e, portanto apresenta características dessa função que são, em certas condições, inapropriadas do ponto de vista financeiro. Dado o fato de que o GSR pode assumir diferentes funções de utilidade e de que ele prima por uma melhor avaliação do potencial do investimento uma vez que é sensível a momentos da distribuição do excesso de log-retorno que não somente média e variância, temos por hipótese que o GSR associado à utilidade quadrática apresenta elevada correlação com a variante do SR no âmbito retrospectivo, o SR^c , devido a relação já mencionada do SR a mesma função de utilidade e que o GSR associado à utilidade logarítmica apresenta a menor correlação com o SR^c uma vez que indivíduos com essa utilidade são indivíduos que assumem mais riscos, levando a indicação desse índice, GSR(1), como o mais adequado na avaliação de desempenho de ativos de risco.

1.1 Situação Problema

Diversas são as questões a respeito de qual o melhor método para avaliação do desempenho retrospectivo dos fundos de investimento. De acordo com Knight & Satchell (2002, p.2), com a grande expansão dos fundos, os investidores passaram a questionar o desempenho dos investimentos com o intuito de melhor avaliar seus gestores e assim justificar as taxas e despesas pagas a eles pelo desempenho apresentado.

Existem vários fatores que afetam o desempenho dos gestores de fundos, como por exemplo, o conflito de agência, custos, taxas, entre outros.

Apesar de todo o conhecimento aplicado na gestão de investimentos por parte dos administradores, como menciona Oda (2006, p.25):

A falácia da administração profissional: a Fundamentação Teórica apresenta diversas pesquisas que concluem que a maior parte dos administradores de recursos não é capaz de vencer benchmarks que poderiam ser facilmente replicáveis por investidores comuns, sem necessidade de gestão especializada.

Essas questões mostram a importância do estudo dos índices de desempenho de ativos de risco. Um melhor domínio de suas características, como se comportam e qual a influência que diferentes condições exercem sobre eles, possibilita uma utilização mais adequada dos índices permitindo uma melhor escolha de investimento.

1.2 Justificativa do Tema

O mercado financeiro brasileiro tem apresentado, nos últimos anos, acentuada expansão e conseqüente modernização. Como reflexo, há o surgimento de novos e mais sofisticados produtos financeiros. Dado a incompletude em que se encontrava o mercado brasileiro, instituições como Bovespa e BM&F, agora BM&FBovespa S.A., ganharam enorme importância como reguladores e catalisadores de negócios. Com o aumento da participação das bolsas no mercado, surgem novas possibilidades de investimento, até como necessidade dos investidores, jurídicos e físicos, que buscavam oportunidades mais rentáveis de aplicação de seus recursos. Ações, fundos de investimento, entre outros, se tornaram cada vez mais populares. Nesse cenário, parâmetros de avaliação de desempenho passam a ser importantes, pois baseados neles, o investidor pode ter fundamento para suas escolhas de investimento. Existem diferentes parâmetros a serem levados em consideração na avaliação de um potencial candidato ao investimento, os índices de desempenho são parâmetros de grande relevância, e no caso do índice de Sharpe, relacionam o excesso de retorno obtido por um determinado ativo de risco pela sua volatilidade, ou seja, qual o retorno acima do retorno livre de risco por unidade de risco. Esses índices indicam ao investidor, de forma comparativa, qual o ativo ou gestor mais eficiente, permitindo a maximização do retorno de seus investimentos.

1.3 Objetivo

Esse trabalho tem como objetivo comparar no âmbito retrospectivo os índices de Sharpe generalizado (GSR) e o índice de Sharpe para taxas de retorno em

composição contínua SR^c . Esse estudo se baseia em uma revisão teórica dos índices, comprovação de suas relações com funções de utilidade e o relacionamento teórico entre eles. Ainda na revisão teórica é feita uma análise do índice de Sharpe no âmbito prospectivo, mostrando seu comportamento futuro com diferentes horizontes de investimento. Como resultado dessa revisão, apresentamos um resumo das limitações e características dos índices estudados. Por fim, de maneira empírica, testamos os índices GSR e SR^c para séries de diferentes ativos de risco buscando identificar suas diferenças, tanto para o mercado brasileiro quanto o mercado americano, classificando-os através desses índices para diferentes funções de utilidade.

1.4 Método

O estudo adota método de pesquisa quantitativo, realizando revisão dos conceitos e apresentando proposições relevantes a partir desses. São descritos os métodos de relacionamento entre os índices e suas associações com diferentes funções de utilidade. Por se tratar de um estudo quantitativo de cunho financeiro, através de simulações computacionais, é feita a ordenação de ativos de risco ações e índices baseada nos índices de avaliação de desempenho GSR e SR^c mostrando seus diferentes comportamentos.

Sempre que necessário, serão apresentados as formas de cálculo adotadas nas simulações e as rotinas dos softwares utilizadas.

1.5 Descrição dos Capítulos

No capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica. Inicia-se com a apresentação da teoria da utilidade, conceitos de aversão ao risco e as diferentes funções para cada perfil de decisor abordando problemas de otimização da riqueza em função da utilidade e algumas relações entre elas. Seguindo, apresentamos os índices de

Sharpe, Sharpe uniperiódico, potencial de investimento e Sharpe generalizado, abordando suas características, relações e restrições. Nesse ponto, discute-se a necessidade de novas restrições para que o índice de Sharpe possa estar atrelado a funções de utilidade diferentes da utilidade quadrática e o GSR atrelado a funções de utilidade diferentes da CARA. Seguindo essa linha, a restrição abordada é a apresentada por Cochrane (2000), desenvolvida a partir dos trabalhos de Hansen & Jagannathan (1990), de fronteira de variância mínima. Por fim apresentamos os índices de Sharpe generalizados demonstrados por Cerny (2004).

No capítulo 3 são apresentados os métodos de pesquisa utilizados e discutimos os cuidados tomados com a seleção das séries utilizadas nas simulações.

No capítulo 4, fundamentados na revisão teórica, expomos as hipótese de comportamento dos índices associados às características das funções de utilidade e discutimos os resultados teóricos e empíricos obtidos, mostrando as vantagens e desvantagens dos diferentes índices. Apresentamos também os resultados obtidos das simulações feitas com os índices apresentados no capítulo 2, das séries de retorno dos ativos de risco ações e índices, portanto, uma análise retrospectiva. As comparações têm como objetivo principal confrontar a ordenação apresentada pelo índice SR^c e o índices de Sharpe generalizado observando os comportamentos para cada perfil de aversão ao risco do decisor.

No capítulo 5 apresentamos as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

"Eu seria um mendigo nas ruas com uma caneca de lata se os mercados fossem eficientes."
Warren Buffett (Revista Exame, 2007, p.139).

No processo de análise de investimentos, o tomador de decisão procura fazer a escolha do investimento mais adequado, otimizando o retorno de sua aplicação. Para Gitman (1985, p.11), "o objetivo principal do administrador é desenvolver e alocar recursos eficientemente no longo prazo, de modo a maximizar o valor da firma e conseqüentemente a riqueza de seus proprietários". Portanto, é importante, a utilização de métodos de avaliação do investimento capazes de permitir uma boa percepção da alternativa de investimento mais favorável.

Quando se trata da escolha de uma oportunidade de aplicação para remunerar o capital, o primeiro aspecto a ser levado em consideração na avaliação de desempenho de fundos de investimentos é a rentabilidade. No entanto, a teoria de carteira mostrou a importância na compreensão do risco na avaliação de investimentos. Markowitz percebeu que se a rentabilidade fosse o único parâmetro de avaliação de investimento, todos estariam aplicando seus recursos financeiros nas opções de maior retorno. Este fato não se comprova na prática, até porque prevalece a idéia de nunca depositar todos os ovos na mesma cesta, o que se pode interpretar como se o investidor reconhecesse um risco intrínseco ao investimento e, portanto, tivesse preferência por diversificar sua aplicação, destinando parte de seus recursos a alternativa de investimento cuja rentabilidade pode até ser menor, desde que sinta que está se protegendo da incerteza do mercado, mitigando seu risco. Surge então, a moderna teoria de carteira que visa aperfeiçoar os retornos levando em consideração a relação retorno - risco.

Siqueira (1999, p.64) apresenta os conceitos de mercado completo e mercado eficiente. Considera-se o mercado completo quando qualquer padrão de retornos

pode ser reproduzido, isso ocorre sempre que o número de ativos financeiros linearmente independentes for igual ao número de estados da natureza. Já o mercado eficiente é definido como um mercado no qual toda a informação se reflete instantaneamente nos preços dos valores mobiliários.

Knight & Satchell (2002, p.2) afirmam que a administração de fundos apresenta duas técnicas diferentes de gestão: a passiva e a ativa. O gerenciamento passivo da carteira, também conhecido como estratégia de comprar e reter consiste basicamente em manter a carteira praticamente inalterada por todo o período de vida. Isso reflete a visão de que o mercado é eficiente e de que a expectativa dos investidores é homogênea. Portanto, se o mercado é eficiente, não se podem realizar ganhos maiores que os do mercado. E mais, se as expectativas são homogêneas, os gestores dos fundos não podem tirar proveito de qualquer diferença das expectativas de mercado com relação ao retorno e risco. Já na gestão ativa, a administração assume que os mercados não são eficientes todo o tempo e que os investidores apresentam expectativas diferentes com relação ao risco e retorno e, portanto, que é possível obter melhor resultado que o mercado. Ou seja, pode-se superar o mercado.

Essa otimização no desempenho exige uma boa gestão de fatores como seleção de ativos e *timing* de mercado. Na seleção, o objetivo é escolher investimentos que podem apresentar bons retornos com relação à carteira de referência (*benchmark*). Já o *timing* visa tentar estimar os retornos futuros da carteira *benchmark*.

Dentro desse contexto, o investidor deve decidir sobre sua carteira entre um grande número de classes, como títulos de dívida (*Bonds*), ações, fundos, entre outros. Essa escolha representa uma importante decisão uma vez que não somente domina o desempenho da maioria das carteiras, mas também é componente decisivo na variabilidade do retorno (Sharpe, 1992).

De acordo com Cerny (2004), um profissional de Finanças se depara constantemente com o dilema da escolha de investimento baseado na relação risco – retorno, uma vez que o risco, como menciona Gollier (1999), está em toda a parte e é fator relevante no processo de tomada de decisão. Encontrar o ponto mais

adequado para essa relação é o que diversas ferramentas de análise fundamentadas em cálculo e probabilidade tentam prover.

Securato (2007, p.48) enfatiza a preocupação do investidor com relação aos diferentes tipos de risco a que estão sujeitos os ativos, riscos estes que são, basicamente, o risco sistemático ou conjuntural e o risco não sistemático ou próprio. Entende-se por risco sistemático o risco do sistema econômico, político e social, e por risco próprio o risco intrínseco ao ativo, gerado por fatos que atingem diretamente o ativo em questão.

Hull (1973) afirma que o tomador de decisão em seu processo de avaliação de negócios passa essencialmente por três estágios:

- Primeiro identifica as alternativas disponíveis;
- Estima as consequências de cada alternativa;
- Escolhe a consequência que lhe é preferível.

Entre os critérios de avaliação do investimento preferível estão a utilização da utilidade esperada do retorno (função utilidade do investidor) e alguns índices, entre eles, o índice de Sharpe (SR), que avalia o retorno em relação ao risco incorporando assim os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos, (não levando em consideração, por exemplo, a possibilidade de análise por parte do investidor da assimetria da distribuição).

2.1 Teoria da Utilidade

A idéia de utilidade surgiu com a proposta do utilitarismo² de que a sociedade deveria gerar a satisfação do maior número possível de pessoas, portanto, suas

² A doutrina utilitarista, filosoficamente a maior quantidade de bem-estar” (princípio do bem-estar máximo). Ao contrário do egoísmo, tem como premissa o fato de que devemos considerar o bem-estar de todos e não o bem estar de uma única pessoa. Jeremy Bentham (1748-1832) e John Stuart Mill (1806-1873) sistematizaram o princípio da utilidade, e conseguiram aplicá-lo de forma concretas no sistema político, legislação, Justiça, política econômica, liberdade sexual, emancipação das mulheres, etc.

utilidades deveriam ser otimizadas. Deste ponto em diante, o conceito de utilidade passou a ser estudado e aplicado por diferentes áreas do conhecimento humano.

Entende-se por utilidade, em Economia, a medida da relativa satisfação (felicidade ou alegria) obtida quando do consumo de diferentes tipos de bens e serviços. Essa medida busca permitir que se compreenda o comportamento econômico dos consumidores, que não enxergam seus investimentos somente pelo valor objetivo do mesmo e sim pela sua utilidade, a satisfação que essa atitude infere ao consumidor.

A idéia apresentada por Daniel Bernoulli³ de que o agente em situação de risco busca maximizar o valor esperado da utilidade de sua riqueza deu origem à teoria da utilidade esperada de John Von Neumann⁴ e Oskar Morgenstern⁵. Atualmente, a teoria da utilidade, devido ao reconhecimento do risco na explicação da decisão individual, tem tido grande peso em macroeconomia, pois somente quando se leva em consideração a influência da incerteza no processo de decisão é que se pode entender o padrão de escolha de consumo, de investimento e de trabalho.

Desta maneira, constata-se que a teoria de utilidade é um importante instrumento para definir a ordenação percebida por um indivíduo para um grupo de possibilidades de investimento, ou seja, na visão do investidor, qual é a mais e a menos preferível entre as possibilidades de investimento. No entanto, como afirma Gollier (1999, p.5), a dificuldade de se obter a função de utilidade dos indivíduos tomadores de decisão racionais, para diferentes níveis de risco, faz com que se adotem funções que permitam uma fácil aproximação média-variância, possibilitando que esses diferentes níveis de risco possam ser facilmente analisados.

³ **Daniel Bernoulli** (Groinen, 8 de fevereiro de 1700 - Basileia, 17 de março de 1782), matemático holandês, membro de uma família de talentosos matemáticos, físicos e filósofos. Reconhecido por trabalhos em matemática e mecânica, especialmente a mecânica de fluidos, e pelo pioneirismo em probabilidade e estatística.

⁴ **John von Neumann** (28 de dezembro de 1903 – 8 de fevereiro de 1957), matemático húngaro de origem judaica, naturalizado norte-americano nos anos 30. Reconhecido por contribuições em Teoria dos Conjuntos, Análise funcional, Teoria ergódica, Mecânica Quântica, Ciência da computação, Economia, Teoria dos jogos, Estatística e muitas outras áreas da Matemática.

⁵ **Oskar Morgenstern** (Görlitz, Alemanha, 24 de janeiro de 1902 - Princeton, E.U.A., 26 de julho de 1977), economista austríaco considerado um dos fundadores da Teoria dos jogos ao lado de John von Neumann.

A teoria da utilidade pode ser uma ferramenta de apoio a decisão sob incerteza. Para isso, é preciso adotar a função de preferência que permita avaliar o nível de satisfação do decisor que toma esse risco, e assim, definir qual é a decisão que aperfeiçoa essa satisfação.

Cerny (2004) relata que na avaliação de um fluxo de caixa com risco, o decisor se baseia em três premissas:

- O investidor prefere mais a menos;
- O desvio positivo sobre a riqueza média não pode compensar na mesma amplitude um provável desvio negativo de mesma ordem;
- A distribuição arriscada de riqueza é avaliada pelo equivalente certo de sua utilidade esperada.

1.1.1 Função de utilidade

Dado que, de acordo com Hirshleifer & Hirshleifer (1997, p.70), utilidade “é a variável cuja magnitude relativa indica a direção da preferência”, possibilitando assim que se compreendam as escolhas feitas pelo tomador de decisão, a função de utilidade é a função que descreve esse comportamento, ou melhor, a função que indica o grau de satisfação do indivíduo para determinada situação de risco.

Gráfico 1 – Representação de função de utilidade côncava e crescente
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p.56)

Como mostra o gráfico 1, para uma variação de riqueza de mesma amplitude sobre a riqueza média V_0 , obtemos variações de utilidade com amplitudes diferentes.

Um acréscimo na riqueza sobre a riqueza média gera um aumento em sua utilidade menor que uma redução sobre a riqueza média de mesma amplitude. Esta característica captura a “aversão ao risco” do investidor.

A maneira com a qual a distribuição de risco da riqueza é avaliada é por meio do equivalente certo (EC).

Gráfico 2 – Evolução de resultados utilizando utilidade esperada
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p.56)

No gráfico 2, a distribuição da riqueza é dada pelas linhas tracejadas originadas no eixo da riqueza. Assim, cada uma delas corresponde a um nível de riqueza. Cada linha tracejada possui uma probabilidade de êxito, indicada pelas barras verticais, que traz um correspondente valor no eixo vertical mostrando a distribuição da utilidade da riqueza.

Apesar das linhas tracejadas originadas no eixo horizontal estarem dispostas de maneira simétrica, os correspondentes valores do eixo vertical são assimétricos, com variações menores conforme aumento da riqueza, demonstrando que o investidor dá mais ênfase às perdas do que aos ganhos.

Calculando o valor esperado da utilidade que corresponde ao valor médio no eixo vertical, obtemos, no eixo horizontal, a equivalente certo da riqueza, indicada no gráfico pela seta em negrito. Importante notar que está abaixo do nível médio da riqueza (linha tracejada central no eixo da riqueza) com risco, e essa diferença é definida como “prêmio pelo risco”.

$$\text{Prêmio pelo risco} = \text{riqueza média} - \text{equivalente certo}$$

Esse prêmio nada mais é do que uma compensação ao investidor avesso ao risco para que se sinta convencido a assumir ativos com risco.

1.1.2 Coeficiente de aversão ao risco

Bekman & Costa Neto (2002, p.69) mencionam que este coeficiente indica qual é o comportamento do decisor, com referência a valores monetários, frente a situações de risco. O coeficiente pode assumir valor positivo, negativo ou nulo.

Um coeficiente positivo indica agente decisor avesso ao risco. Já o coeficiente negativo, indivíduo propenso ao risco, e o coeficiente nulo, que pode ser obtido a partir de uma função de utilidade linear, indiferença ao risco.

Quadro 1 – Indivíduo em relação ao risco

$a > 0$	Indivíduo avesso ao risco
$a < 0$	Indivíduo propenso ao risco
$a = 0$	Indivíduo indiferente ao risco

Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda, de acordo com Bekman & Costa Neto (2002, p.69), o coeficiente de aversão ao risco é uma grandeza muito útil no estudo dos modelos de utilidade. O coeficiente é dado pela expressão,

Equação 1- Coeficiente de Aversão ao Risco

$$a(x) = - \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Sendo que $u''(x)$ e $u'(x)$ correspondem as derivadas segunda e primeira, respectivamente, da função de utilidade $u(x)$.

Cerny (2004, p.57) inova em seu texto definindo diferentes coeficientes de aversão ao risco. Estabelece $a(V)$ como coeficiente de aversão ao risco absoluto, introduz o conceito de aversão ao risco base relativo, representado por γ , e a aversão ao risco relativo local, representada por $\tilde{\gamma}$.

A aversão ao risco local descreve a atitude do investidor para pequenos riscos simétricos, enquanto a aversão ao risco base representa o investidor que toma riscos assimétricos com pequeno valor inferior e alto valor superior. O coeficiente de aversão ao risco absoluto não considera limitações quanto a simetria ou assimetria da atitude do investidor bem como suas amplitudes, ou seja, é um coeficiente geral da função de utilidade.

Quadro 2 – Coeficientes de aversão ao risco

γ	Coeficiente de aversão ao risco base (relativo)
$\tilde{\gamma}$	Coeficiente de aversão ao risco local (relativo)
$a(V)$	Coeficiente de aversão ao risco absoluto

Fonte: Elaborado pelo autor

O coeficiente de aversão ao risco relativo local tem uma relação direta com o coeficiente de aversão ao risco absoluto, sendo proporcional ao valor da riqueza empregada, como mostra a expressão abaixo:

Equação 2 – Relação do coeficiente de aversão ao risco relativo local e absoluto

$$\tilde{\gamma}(V) = Va(V)$$

1.1.3 Aversão a risco absoluta constante (CARA)

Cerny (2004, p.57) mostra que pelo fato de avaliarmos a distribuição de riqueza com relação ao nível riqueza inicial V_0 , deve-se examinar a relação:

$$\frac{E[U(V)]}{U(V_0)}$$

Assumindo a riqueza inicial V_0 é uma riqueza livre de risco, podemos escrever a relação como,

$$E\left[\frac{U(V)}{U(V_0)}\right]$$

Uma função de utilidade que pode capturar a relação com a origem V_0 independentemente do ponto de origem é: $\frac{U(V)}{U(V_0)} = f(V - V_0)$ para todo V , V_0 e função de utilidade.

Derivando ambos os lados da expressão acima teremos que,

$$\frac{U'(V)}{U(V_0)} = f'(V - V_0)$$

Analisando no ponto $V = V_0$, $\frac{U'(V_0)}{U(V_0)} = f'(0)$

o que significa que $\frac{U'(V_0)}{U(V_0)}$, é constante para qualquer V_0 .

Integrando $\frac{U'(V_0)}{U(V_0)}$ com relação à V_0 , uma vez que $\frac{d}{dV_0} \ln(U(V_0)) = \frac{U'(V_0)}{U(V_0)} = c_1$ e

portanto $\int \frac{d}{dV_0} \ln(U(V_0)) dV_0 = \int c_1 dV_0$, chegamos em $\ln(U(V_0)) = c_1 V_0 + c_2$, sendo

assim $U(V) = C e^{c_1 V}$, e na condição $C < 0$ e $c_1 < 0$, $U(V)$ é crescente e côncava, resultando em uma função de utilidade exponencial negativa.

Deste modo, uma função de utilidade que atende as exigências, crescente e côncava, é a função exponencial. Embora nem todas as funções exponenciais sejam crescentes e côncavas, é fácil verificar que a função $U(V) = -e^{-aV}$, com $a > 0$ atende as exigências.

Como mencionado, o coeficiente a é chamado coeficiente de aversão ao risco absoluto⁶, e a função de utilidade exponencial negativa descrita acima, de utilidade de aversão a risco absoluta constante (CARA).

⁶ Coeficiente de aversão ao risco absoluto não considera limitações quanto à assimetria da atitude do investidor bem como suas amplitudes, ou seja, é um coeficiente geral da função de utilidade.

Gráfico 3 - Função de Utilidade $U(V) = -e^{-aV}$, com $a = 0,5$
Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico 3 descreve o comportamento de um indivíduo avesso ao risco, uma vez que apresenta $a > 0$. Pelo fato da função estabelecer uma relação com a variação da riqueza absoluta e pela reação ser constante com relação à origem escolhida, V_0 , refletindo em um coeficiente de risco constante, dá-se a classificação de absoluta constante.

1.1.4 Aversão a risco relativa constante (CRRA)

Uma função de utilidade com a característica de resposta constante à mudança relativa de riqueza $\frac{V}{V_0}$, de tal forma que:

$$\frac{U(V)}{U(V_0)} = f\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

deve ser da forma $U_\gamma(V) = \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, com $\gamma > 0$ e $\gamma \neq 1$.

Essa função recebe o nome de utilidade de aversão ao risco relativa constante, CRRA.

Gráfico 4 - Função de Utilidade $U_{\gamma}(V) = \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ **com** $\gamma = 0,5$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O parâmetro γ é o coeficiente da aversão relativa ao risco (local). Note que, como definido anteriormente, a função de utilidade CRRA não está bem definida em $\gamma = 1$. No entanto podemos estendê-la em $\gamma = 1$ por meio do limite abaixo:

Equação 3 – Função CRRA para $\gamma \rightarrow 1$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{V^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} = \ln(V)$$

Prova 1 – Função CRRA para $\gamma \rightarrow 1$

Usando a identidade $\exp(\ln(V)) = V$, elevando ambos os lados desta expressão por $(1-\gamma)$ e aplicando o $\lim_{\gamma \rightarrow 1}$ teremos:

$$\begin{aligned} \exp((1-\gamma)\ln(V)) &= V^{(1-\gamma)} \\ \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{V^{(1-\gamma)}}{1-\gamma} &= \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{\exp((1-\gamma)\ln(V))}{1-\gamma} \end{aligned}$$

Logo, fazendo $\gamma \rightarrow 1$ separadamente no numerador e no denominador, veremos que ambos convergem para zero de modo que podemos aplicar a regra de L'Hôpital. Portanto, derivando o numerador e o denominador com relação à γ , teremos que o

limite desejado é igual a: $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-\ln(V)\exp((1-\gamma)\ln(V))}{-1}$, e, portanto,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \ln(V)\exp((1-\gamma)\ln(V)) = \ln(V).$$

Para o caso em que $u(V) = \ln(V)$, temos que as derivadas primeira e segunda são dadas por $u'(V) = \frac{1}{V}$ e $u''(V) = -\frac{1}{V^2}$, de modo que o coeficiente de aversão ao risco absoluto fica dado por:

Equação 4 – Aversão ao risco absoluto para a função CRRA em $\gamma \rightarrow 1$

$$a(V) = \frac{1}{V}$$

Finalmente, fazendo $\tilde{\gamma}(V) = Va(V)$, chegamos a $\tilde{\gamma} = 1$.

Portanto, podemos afirmar que nas proximidades de $\gamma = 1$ a função de utilidade CRRA apresenta $\tilde{\gamma}(V) = \gamma$, ou seja, para a função de utilidade CRRA, os coeficientes de aversão ao risco relativo local e base são iguais.

Devemos observar que os resultados obtidos acima valem de modo geral, isto é, para qualquer γ . De fato, dada a função de utilidade CRRA $u_\gamma(V) = \frac{V^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$, e derivando-a em relação a γ temos que,

$$u'_\gamma(V) = \frac{(1-\gamma)V^{-\gamma}}{1-\gamma} = V^{-\gamma} \text{ e } u''_\gamma(V) = -\gamma V^{-(1+\gamma)} = -\frac{\gamma}{V^{(1+\gamma)}},$$

de modo que $a(V) = -\frac{u''_\gamma(V)}{u'_\gamma(V)} = \gamma \frac{V^\gamma}{V^{(1+\gamma)}} = \gamma V^{-1}$, e utilizando a igualdade $\tilde{\gamma}(V) = Va(V)$ chegamos a $\tilde{\gamma}(V) = a(V) = \gamma$. ↵

1.1.5 Aversão ao risco absoluto hiperbólico (HARA)

A função de utilidade HARA pode ser vista como a utilidade CRRA de um investidor que recebe uma riqueza adicional livre de risco $\bar{V}$ fazendo com que a utilidade se torne:

Equação 5 – Função de utilidade HARA

$$U_{\gamma, \bar{V}}(V) = \frac{(\bar{V} + V)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Gráfico 5 - Função Utilidade $U_{\gamma, \bar{V}}(V) = \frac{(\bar{V} + V)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, com $\gamma = 0,5$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O coeficiente de aversão a risco relativo local da utilidade HARA passa a ser:

Equação 5 – Coeficiente de aversão ao risco para função HARA

$$\tilde{\gamma}(V) = \frac{Vu''_{\gamma, \bar{V}}(V)}{u'_{\gamma, \bar{V}}(V)} = \gamma \frac{V}{\bar{V} + V} = \gamma \left(\frac{\bar{V}}{V} + 1 \right)^{-1}$$

Portanto, quanto maior a riqueza livre de risco adicional $\bar{V}$ recebida pelo investidor, menor seu coeficiente de aversão ao risco (Cerny 2004, p.58).

Percebe-se que a função de utilidade CRRA é um caso especial da função de utilidade HARA, obtida tomando-se $\bar{V}$ igual a zero.

Resumindo, temos os seguintes coeficientes de aversão ao risco:

Tabela 1 – Coeficientes de Aversão à Risco

CARA	$\tilde{\gamma}(V) = Va(V)$
CRRA	$\tilde{\gamma}(V) = \gamma$
HARA	$\tilde{\gamma}(V) = \gamma \left(\frac{\bar{V}}{V} + 1 \right)^{-1}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

1.1.1 Utilidade quadrática

A função de utilidade quadrática pode ser descrita da seguinte forma:

Equação 6 – Função de utilidade quadrática

$$U(V) = -\frac{1}{2}(V - V_{bliss})^2$$

graficamente temos:

Gráfico 6 – Utilidade Quadrática
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p. 69)

Como mostra o gráfico 6, na função de utilidade quadrática, acima do ponto V_{bliss} ⁷, onde temos o máximo da função, que nesse caso representa a máxima satisfação do investidor, a função passa a ser decrescente. Em termos de teoria da utilidade, isso representa um problema, pois indica que o investidor passa a ter menor satisfação com maior riqueza, o que contradiz a premissa da teoria.

Portanto, toda a utilidade quadrática tem um ponto, conhecido como ponto *bliss* ou ponto de máxima satisfação, além do qual a utilidade decresce com o aumento da

⁷ *Bliss* é traduzido como felicidade, assim, entende-se por ponto V_{bliss} como o ponto da curva em que a riqueza proporciona o máximo de felicidade para o indivíduo.

riqueza. Entretanto, adotando-se um V_{bliss} suficientemente grande, pode-se evitar que alguém atinja o declínio da função de utilidade, o que evitaria esse problema. Cerny (2004, p. 66), diz que

Soluções de forma fechada para problemas de investimento ótimo são mais esperança que regra. A utilidade quadrática é o único caso que pode ser resolvido de forma fechada de maneira geral quando os mercados são incompletos. Ela também é importante por outra razão: seu equivalente certo é facilmente associável a amplamente utilizada medida de desempenho, o índice de Sharpe.

Vale a ressalva de que as propriedades positivas apresentadas por Cerny para a utilidade quadrática não eliminam o grande ponto desfavorável dessa função que é o fato de não ser crescente para todos os níveis de riqueza.

A função de utilidade quadrática é um caso particular da função de utilidade HARA.

Prova 2 – Relação da utilidade HARA com utilidade quadrática

Sabemos que a função de utilidade HARA é dada por:

$$U_{\gamma, \bar{V}}(V) = \frac{(\bar{V} + V)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

na condição $\gamma = -1$ e $\bar{V} = -V_{bliss}$, teremos que a função de utilidade HARA será:

$$U(V) = \frac{(-V_{bliss} + V)^{1-(-1)}}{1-(-1)}$$

$$U(V) = \frac{(-V_{bliss} + V)^2}{2} = -\frac{1}{2}(V - V_{bliss})^2 \quad \lrcorner$$

Exemplo 1 – V_{bliss} como Função V_{safe} ⁸ (adaptado de Cerny 2004, p.67)

Assumindo o coeficiente de aversão ao risco da função de utilidade HARA:

⁸ V_{Safe} é a riqueza aplicada em ativo livre de risco.

$$\tilde{\gamma} \equiv \gamma \left(1 + \frac{\bar{V}}{V_{safe}} \right)^{-1}$$

mantendo a condição $\gamma = -1$ e $\bar{V} = -V_{bliss}$ teremos,

$$\tilde{\gamma} = -1 \left(1 + \frac{-V_{bliss}}{V_{safe}} \right)^{-1} \text{ e } \tilde{\gamma} = \left(\frac{V_{bliss}}{V_{safe}} - 1 \right)^{-1} \text{ assim,}$$

$$\text{quando } V_{bliss} = 2V_{safe}, \text{ teremos } \tilde{\gamma} = \left(\frac{2V_{safe}}{V_{safe}} - 1 \right)^{-1} = 1 \text{ e}$$

$$\text{quando } V_{bliss} = 1,2V_{safe} \text{ teremos } \tilde{\gamma} = \left(\frac{1,2V_{safe}}{V_{safe}} - 1 \right)^{-1} = 5.$$

Portanto, com apenas um aumento de 20% em V_{bliss} obtemos um $\tilde{\gamma} = 5$.

1.1.2 Maximização da utilidade esperada

A maximização da utilidade esperada é uma forma de se obter a melhor composição de ativos por parte do investidor. Estabelecendo os seguintes parâmetros a um investidor: R_f o retorno associado a um ativo livre de risco, R o retorno associado a um ativo com risco, $\tilde{\alpha}$ a parcela do capital inicial investido no ativo de risco, y uma receita fixa do investidor e V_0 sua riqueza inicial, podemos dizer que a riqueza do investidor no final de um período arbitrário é dada por:

Equação 7– Composição da riqueza do investidor

$$V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}V_0R + (1 - \tilde{\alpha})V_0R_f + y$$

Ou seja, a riqueza do investidor ao final de um período arbitrário é igual à soma da parcela investida no ativo de risco capitalizado de acordo com a taxa de retorno associada a este ativo no período considerado, da parcela alocada em um ativo livre de risco capitalizada de acordo com a taxa livre de risco para o período e, finalmente, da receita fixa que o investidor possui associada ao período em questão.

1.1.2.1 Maximização para a função de utilidade CRRA

Imaginando dois cenários com R 's diferentes, uma situação de alta R_{up} , e uma de baixa, R_{down} (duas possibilidades de retorno) e definindo P como a probabilidade de ocorrência teremos:

Equação 8 – Maximização da utilidade HARA

$$\max_{\tilde{\alpha}} E[U(V(\tilde{\alpha}))] = \max_{\tilde{\alpha}} \left(P \frac{V_{up}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} + (1-P) \frac{V_{down}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} \right)$$

Para encontrar o ponto de máximo da função deriva-se a expressão acima com relação a $\tilde{\alpha}$ igualando-a a zero. Desta forma, obtém-se o que se chama de condição de primeira ordem (CPO), resultando no $\tilde{\alpha}^*$, ou seja, a parcela ótima de capital inicial a ser investida em ativo de risco.

Exemplo 2 – Maximização de riqueza (adaptado de Cerny 2004, p.59)

Um investidor com riqueza inicial V_0 de \$1.000.000 e receita de \$200.000 deseja definir qual a quantia ótima $\tilde{\alpha}^*$ de recursos que deve ser aplicado em ativo de risco dado que o mercado oferece um retorno R_{up} de 1,2 e um retorno R_{down} de 0,9, ambos com probabilidade 0,5 de ocorrerem, e um retorno livre de risco R_f de 1,02.

Dado que $V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}V_0R + (1-\tilde{\alpha})V_0R_f + y$, podemos calcular $V(\tilde{\alpha})$ para as duas possibilidades de retorno, R_{up} e R_{down} .

$$\begin{aligned} V_{up}(\tilde{\alpha}) &= 1.000.000[1,2\tilde{\alpha} + 1,02(1-\tilde{\alpha})] + 200.000 \\ &= 1.220.000 - \tilde{\alpha}180.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{down}(\tilde{\alpha}) &= 1.000.000[0,9\tilde{\alpha} + 1,02(1-\tilde{\alpha})] + 200.000 \\ &= 1.220.000 - \tilde{\alpha}120.000 \end{aligned}$$

Aplicando os resultados na expressão abaixo:

$$\max_{\tilde{\alpha}} E[U(V(\tilde{\alpha}))] = \max_{\tilde{\alpha}} \left(P \frac{V_{up}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} + (1-P) \frac{V_{down}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} \right)$$

$$\max_{\tilde{\alpha}} E[U(V(\tilde{\alpha}))] = \max_{\tilde{\alpha}} \left(0,5 \frac{V_{up}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} + 0,5 \frac{V_{down}^{1-\gamma}(\tilde{\alpha})}{1-\gamma} \right)$$

$$\max_{\tilde{\alpha}} E[U(V(\tilde{\alpha}))] = \frac{1.220.000^{1-\gamma}}{2} \max_{\tilde{\alpha}} \left(0,5 \frac{\left(1 + \frac{18}{122} \tilde{\alpha}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + 0,5 \frac{\left(1 + \frac{12}{122} \tilde{\alpha}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)$$

Para encontrarmos o ponto de máximo dessa expressão devemos derivá-la em relação a $\tilde{\alpha}$ e igualá-la a zero (CPO). Assim,

$$\frac{18}{122} \left(1 + \frac{18}{122} \tilde{\alpha}^*\right)^{-\gamma} - \frac{12}{122} \left(1 + \frac{12}{122} \tilde{\alpha}^*\right)^{-\gamma} = 0$$

$$1,5 \left(1 + \frac{18}{122} \tilde{\alpha}^*\right)^{-\gamma} = \left(1 + \frac{12}{122} \tilde{\alpha}^*\right)^{-\gamma}$$

$$(1,5)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{18}{122} \tilde{\alpha}^*\right)^{-\gamma} = 1 + \frac{12}{122} \tilde{\alpha}^*$$

$$\tilde{\alpha}^* = \frac{61}{6} \left(\frac{1 - (1,5)^{-\frac{1}{\gamma}}}{1 + (1,5)^{1-\frac{1}{\gamma}}} \right).$$

Fazendo o coeficiente de aversão ao risco base relativo igual a cinco, isto é $\gamma=5$, teremos:

$$\boxed{\tilde{\alpha}^* = 0,3323}$$

Portanto, no cenário de mercado descrito, um investidor com o perfil considerado tem sua utilidade maximizada com a aplicação de 33,23% de sua riqueza em ativos de risco.

Se utilizarmos então o $\tilde{\alpha}^*$ encontrado podemos calcular o utilidade máxima desse indivíduo para esse investimento.

$$E[U(V(\tilde{\alpha}^*))] = \frac{1.220.000^{-4}}{-4} \left(\frac{\left(1 + \frac{18}{122} 0,3323\right)^{-4}}{2} + \frac{\left(1 + \frac{12}{122} 0,3323\right)^{-4}}{2} \right)$$

$$E[U(V(\tilde{\alpha}^*))] = -1,1104 \times 10^{-25}.$$

Assim, no final do período, a riqueza do investidor poderá tanto assumir o valor

$$V_{up}(\tilde{\alpha}^*) = 1.220.000 + 0,3323(180.000)$$

$$V_{up}(\tilde{\alpha}^*) = 1.279.814$$

quanto o valor

$$V_{down}(\tilde{\alpha}^*) = 1.220.000 + 0,3323(120.000)$$

$$V_{down}(\tilde{\alpha}^*) = 1.180.124$$

1.1.3 Calculando a utilidade esperada em termos monetários

No cenário do exemplo anterior vimos como um investidor pode encontrar o $\tilde{\alpha}^*$ que permite a otimização da utilidade de sua riqueza. No entanto, o investidor não busca o retorno de seu investimento em termos de utilidade esperada, mas em termos de riqueza gerada.

Exemplo 3 – Cálculo da riqueza em termos monetários

Consideremos uma riqueza V , com a seguinte distribuição:

- $V = V_{up}$, com probabilidade $\frac{1}{2}$
- $V = V_{down}$, com probabilidade $\frac{1}{2}$

A esperança da utilidade é dada por,

$$E[U(V)] = \frac{1}{2}U(V_{up}) + \frac{1}{2}U(V_{down})$$

Graficamente teríamos o seguinte:

Gráfico 7 – Equivalente certo da Riqueza
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p.61)

Para descrever o nível de utilidade em termos monetários, traçamos uma reta partindo da esperança da utilidade no eixo vertical. No ponto de intersecção com a função de utilidade, fazemos a projeção sobre o eixo horizontal resultando no o que se define por equivalente certo da variável aleatória da riqueza.

Portanto, partindo do fato de que a esperança da utilidade para um investimento ótimo de determinado investidor seja:

$$E[U(V(\tilde{\alpha}^*))] = -1.110.397 \times 10^{-25}$$

Para se calcular o EC (V_{certo}), uma vez que se trata de um investidor com uma função de utilidade CRRA, devemos igualar a função de utilidade com o valor da utilidade esperada, portanto;

$$U(V_{certo}) = -1.110.397 \times 10^{-25}$$

$$\frac{V_{certo}^{-4}}{-4} = -1.110.397 \times 10^{-25}$$

$$V_{certo}^{-4} = 4.411.588 \times 10^{-25}$$

$$V_{certo} = \left(4.411.588 \times 10^{-25}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$V_{certo} = 1.224.942$$

Esse é o EC, a riqueza obtida, equivalente ao valor de utilidade esperada pelo investidor.

1.1.4 Inverso da função utilidade

Como mostrado no exemplo anterior, para se calcular o EC (V_{certo}), precisamos utilizar o inverso da esperança da função de utilidade.

1.1.4.1 Inverso da esperança da função de utilidade HARA

No caso da utilidade HARA, o inverso da função é:

Equação 9 – Inverso da função utilidade

$$V_{certo}(\alpha) = U^{-1}(E[U(V(\alpha))])$$

Prova 3 – Inverso da utilidade HARA

Dado a utilidade HARA,

$$U(V) \frac{(\bar{V} + V)^{1-\gamma}}{1-\gamma} = u$$

Temos então que: $(\bar{V} + V)^{1-\gamma} = (1-\gamma)u$, de modo que, $\bar{V} + V = [(1-\gamma)u]^{\frac{1}{1-\gamma}}$, portanto,

$$V = [(1-\gamma)u]^{\frac{1}{1-\gamma}} - \bar{V}.$$

Denotando a inversa da função de utilidade por U^{-1} , para a utilidade HARA, teremos que $U^{-1}(u) = [u(1-\gamma)]^{\frac{1}{1-\gamma}} - \bar{V}$, que pode ser escrita como $V_{certo}(\alpha) = U^{-1}(E[U(V(\alpha))])$.

Graficamente, o inverso da função de utilidade é representado pela rotação da função original.

Gráfico 8 – Função inversa da Utilidade
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p.62)

1.1.5 Investimento ótimo para função de utilidade HARA

Cerny (2004, p.62) trabalhando com a questão que trata como nível de riqueza livre de risco afeta a decisão de investimento de um investidor com utilidade HARA, apresenta um índice de medida de desempenho que relaciona o EC a riqueza livre de risco, surgindo então dessa análise o índice IP.

Prova 4 – Investimento ótimo para HARA encontra-se no Apêndice I

$$E[U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}))] = \frac{\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} V_{safe}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} E[(\gamma + \tilde{\gamma} \alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}} X)^{1-\gamma}]$$

Para $\tilde{\gamma}=1$ teremos $\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}} = \alpha_{\gamma,1}$ onde $\alpha_{\gamma,1}$ pode ser interpretado como a escolha da carteira de risco por unidade de tolerância de risco local. Podemos propor que,

$$\alpha_{\gamma,1} = \gamma\alpha_{\gamma,\gamma}$$

onde $\alpha_{\gamma,\gamma}$ é a carteira escolhida para o investidor CRRA com aversão relativa ao risco base γ .

Portanto, a carteira escolhida pelo investidor HARA tem dois componentes

Equação 10 – Relação carteira de risco escolhida por unidade de tolerância de risco

$$\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}}\alpha_{\gamma,1}$$

onde:

$\frac{1}{\tilde{\gamma}}$ é interpretado como a tolerância local ao risco e

$\alpha_{\gamma,1}$ é a escolha de portfólio por unidade de tolerância de risco local.

O que o investidor HARA avalia a carteira escolhida pelo investidor CRRA por unidade de tolerância local de risco e ajusta a carteira para acomodar sua aversão ao risco (Cerny, 2004, p.56).

$$\text{HARA: } \alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}}\alpha_{\gamma,1}$$

$$\text{CRRA: } \alpha_{\gamma,1} = \gamma\alpha_{\gamma,\gamma}$$

Podemos dizer genericamente que $\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}\alpha_{\gamma,\gamma}$.

O indivíduo HARA avalia sua carteira como uma fração da carteira CRRA baseado na relação da aversão ao risco base pela aversão ao risco local.

O equivalente certo da utilidade HARA é obtido através da expressão demonstrada na prova 4.

$$E\left[U_{\gamma,\tilde{\gamma}}\left(V\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)\right)\right]=\frac{\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}}V_{safe}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right]$$

Como o equivalente certo do investimento é dado pela função inversa da utilidade esperada $V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)=U^{-1}\left(E\left[U\left(V\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)\right)\right]\right)$ e para a função de utilidade HARA

$U^{-1}(u)=\left[(1-\gamma)u\right]^{\frac{1}{1-\gamma}}-\bar{V}$ teremos que:

$$V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)=U^{-1}\left(\frac{\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}}V_{safe}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right]\right)$$

assim
$$V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)=\left(\frac{\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}}V_{safe}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right](1-\gamma)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}-\bar{V}$$

portanto
$$V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)=\frac{1}{\tilde{\gamma}}V_{safe}\left(\frac{1}{1-\gamma}E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right](1-\gamma)\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}-\bar{V}$$

resultando em
$$V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)=\frac{1}{\tilde{\gamma}}V_{safe}\left(E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}-\bar{V}$$

agora, dividindo ambos os lados da expressão acima pela riqueza livre de risco V_{safe}

teremos:

$$\frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)}{V_{safe}}=\frac{1}{\tilde{\gamma}}\left(E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}-\frac{\bar{V}}{V_{safe}}$$

e através da definição $\tilde{\gamma}\equiv\gamma\left(1+\frac{\bar{V}}{V_{safe}}\right)^{-1}$ obtemos $\frac{\bar{V}}{V_{safe}}=\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}-1$ e chegamos a:

$$\frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}\left(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}\right)}{V_{safe}}=\frac{1}{\tilde{\gamma}}\left(E\left[\left(\gamma+\tilde{\gamma}\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}X\right)^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}-\left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}}-1\right).$$

Para $\tilde{\gamma}=1$ podemos escrever:

Equação 11 – Equivalente certo, IP

$$\frac{V_{\gamma,1certo}(\alpha_{\gamma,1})}{V_{safe}} - 1 = \left(E \left[\left(\gamma + \tilde{\gamma} \alpha_{\gamma,1} X \right)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - \gamma$$

substituindo na expressão genérica,

$$\frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{V_{\gamma,1certo}(\alpha_{\gamma,1})}{V_{safe}} - 1 \right)$$

A expressão $\frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1$ mostra a relação do equivalente certo da função de utilidade e a riqueza livre de risco, ou seja, qual é o percentual de equivalente certo por riqueza livre de risco.

Essa medida é definida de potencial de investimento (IP). Como o equivalente certo é função dos coeficientes de riscos relativos local e base, $\tilde{\gamma}$ e γ , o índice IP será:

Equação 12 – Índice potencial de investimento (IP)

$$IP_{\gamma,\tilde{\gamma}}(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}}, X) = \frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{\gamma,\tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1$$

2.1.1.1 Calculando a riqueza final do investidor com utilidade quadrática

Como mostrado anteriormente, a riqueza terminal é dada por:

$$V(\alpha) = (V_0 R_f + y)(1 + \alpha X)$$

onde $(V_0 R_f + y)$ é a riqueza livre de risco V_{safe} , X o excesso de retorno e α a proporção do investimento de risco em V_{safe} .

Maximizando a utilidade esperada quadrática temos:

$$E[U(V)] = -\frac{1}{2} E[(V - V_{bliss})^2]$$

assim, $E[U(V)] = -\frac{1}{2}E\left[(V_{bliss} - V_{safe}(1 + \alpha X))^2\right]$, isolando V_{safe} e assumindo os parâmetros $\gamma = -1$ e $\bar{V} = -V_{bliss}$ teremos que:

$$E\left[U_{-1,\tilde{\gamma}}\left(V(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}})\right)\right] = -\frac{1}{2}V_{safe}^2 E\left[\left(\frac{V_{bliss}}{V_{safe}} - (1 + \alpha_{-1,\tilde{\gamma}}X)\right)^2\right]$$

ou ainda
$$E\left[U_{-1,\tilde{\gamma}}\left(V(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}})\right)\right] = -\frac{1}{2}V_{safe}^2 E\left[(\tilde{\gamma}^{-1} - \alpha_{-1,\tilde{\gamma}}X)^2\right].$$

Aplicando a definição de $\tilde{\gamma}$ (coeficiente de aversão ao risco local), $\tilde{\gamma} \equiv \left(\frac{V_{Bliss}}{V_{safe}} - 1\right)^{-1}$,

teremos que:

$$\begin{aligned} E\left[U_{-1,\tilde{\gamma}}\left(V(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}})\right)\right] &= -\frac{1}{2}V_{safe}^2 E\left[\left(\frac{V_{bliss}}{V_{safe}} - (1 + \alpha_{-1,\tilde{\gamma}}X)\right)^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}V_{safe}^2 E\left[(\tilde{\gamma}^{-1} - \alpha_{-1,\tilde{\gamma}}X)^2\right] \end{aligned}$$

Calculando o equivalente certo U^{-1} chegamos a:

$$\frac{V_{-1,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 - \left(E\left[(1 - \tilde{\gamma}\alpha_{-1,\tilde{\gamma}}X)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Da equação 12 temos que o potencial de investimento pode ser dado por:

$$IP_{\gamma}(\alpha_{\gamma,1}, X) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{V_{\gamma,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{\gamma,1})}{V_{safe}} - 1\right)$$

e na condição $\gamma = -1$ e $V = -V_{bliss}$,

$$IP_{-1}(\alpha_{-1,1}, X) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{V_{-1,1certo}(\alpha_{-1,1})}{V_{safe}} - 1\right) = 1 - \left(E\left[(1 - \tilde{\gamma}\alpha_{-1,1}X)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

A melhor decisão (ótima) $(\alpha_{-1,1})$, obtida pela maximização da expressão acima, representa o investimento ótimo por unidade de tolerância de risco local. Para níveis de tolerância diferente de 1, a carteira ótima é dada por:

Equação 13 – Investimento ótimo em função da tolerância de risco para quadrática

$$\alpha_{-1,\tilde{\gamma}} = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \alpha_{-1,1}$$

O percentual de acréscimo em equivalente certo pelo investimento de risco é novamente diretamente proporcional à tolerância de risco local do investidor.

$$\frac{V_{-1,\tilde{\gamma}certo}(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} IP_{-1}(\alpha_{-1,1}, X)$$

Para definir o investimento ótimo para um investidor com aversão a risco unitária, tem-se que otimizar o IP . Sendo,

$$IP_{-1}(\alpha_{-1,1}, X) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{V_{-1,1certo}(\alpha_{-1,1})}{V_{safe}} - 1 \right) = 1 - \left(E \left[(1 - \tilde{\gamma} \alpha_{-1,1} X)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

a maximização se dá com $\max_{\alpha} \left(1 - \left(E \left[(1 - \alpha X)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \right)$

que equivale a resolver $\min_{\alpha} \left(E \left[(1 - \alpha X)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}$

que por sua vez é equivalente a maximizar a utilidade quadrática normalizada ($V_{bliss} = 1$).

$$\min_{\alpha} u(\alpha) = \min_{\alpha} E \left[(1 - \alpha X)^2 \right]$$

Equação 14 – Investimento ótimo

expandindo temos: $u(\alpha) = E \left[1 - 2\alpha X + (\alpha X)^2 \right]$

$$u(\alpha) = 1 - 2\alpha E[X] + \alpha^2 E[X^2]$$

Retirando α do operador esperança, e aplicando a CPO temos:

$$u'(\alpha) = -2E[X] + 2\alpha E[X^2] = 0$$

Portanto o $\alpha_{-1,1}^*$ será:

$$\alpha_{-1,1}^* = \frac{E[X]}{E[X^2]}$$

substituindo na expressão de máximo IP teremos:

$$IP_{-1}(X) = 1 - \left(1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$IP_{-1}(X) = 1 - \sqrt{\frac{E[X^2] - (E[X])^2}{E[X^2]}}$$

$$IP_{-1}(X) = 1 - \sqrt{\frac{V[X]}{E[X^2]}}$$

A utilidade quadrática otimizada admite uma solução geral fechada. O resultado acima mostra o investimento potencial (IP) máximo e

$$\alpha_{-1,1}^* = \frac{E[X]}{E[X^2]}$$

representando uma carteira ótima por unidade de tolerância de risco local.

Para aversão ao risco local diferente de 1, temos da utilidade HARA:

$$\frac{\max_{\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}} V_{\gamma, \tilde{\gamma}^{certo}}(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} IP_{\gamma}(X)$$

resultando em

$$\frac{\max_{\alpha_{-1, \tilde{\gamma}}} V_{-1, \tilde{\gamma}^{certo}}(\alpha_{-1, \tilde{\gamma}})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} IP_{-1}(X)$$

1.1.5.1 Utilidade quadrática como uma aproximação da utilidade CRRA

Se o investimento de risco é relativamente pequeno, a riqueza resultante não irá partir da riqueza livre de risco V_{safe} . Nessas circunstâncias, pode-se aproximar a utilidade CRRA da utilidade quadrática em torno da riqueza livre de risco V_{safe} através da expansão de segunda ordem de Taylor em torno de V_{safe} .

Prova 5 – Comparação com a Utilidade Quadrática

$$\begin{aligned}\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} &= \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + V_{safe}^{-\gamma} (V - V_{safe}) - \frac{\gamma}{2} V_{safe}^{-\gamma-1} (V - V_{safe})^2 + o((V - V_{safe})^2) \\ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} &\approx \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + V_{safe}^{-\gamma} (V - V_{safe}) - \frac{\gamma}{2} V_{safe}^{-\gamma-1} (V - V_{safe})^2 \\ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} &\approx -\frac{\gamma}{2} V_{safe}^{-\gamma-1} \left(\frac{2V_{safe}^2}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{2V_{safe}}{\gamma} (V - V_{safe}) + (V - V_{safe})^2 \right) \\ \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} &\approx -\frac{\gamma}{2} V_{safe}^{-\gamma-1} \left(V - V_{safe} - \frac{V_{safe}}{\gamma} \right)^2 + c\end{aligned}$$

Fazendo uma comparação com a utilidade quadrática $U(V) = -\frac{1}{2}(V - V_{bliss})^2$ teremos:

$$\begin{aligned}-V_{bliss} &= -V_{safe} - \frac{V_{safe}}{\gamma} \\ V_{bliss} &= V_{safe} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)\end{aligned}$$

Podemos perceber então na aproximação quadrática o mesmo coeficiente de aversão ao risco local em V_{Safe} e na função de utilidade CRRA:

Equação 15 – Aversão ao risco local para utilidade CRRA

$$\tilde{\gamma} = \left(\frac{V_{Bliss}}{V_{safe}} - 1 \right)^{-1} = \gamma$$

A utilidade original e a aproximação quadrática dividem o valor das duas primeiras derivadas de V_{Safe} . Portanto, também dividem o valor de aversão ao risco local em V_{Safe} . Isto nos mostra que podemos esperar que as decisões de carteira por unidade de tolerância ao risco local são similares.

O mesmo ocorre com o aumento percentual do equivalente certo (EC) por unidade de tolerância ao risco, ou seja, espera-se que o IP_γ e o IP_{-1} sejam semelhantes.

A utilidade HARA com aversão ao risco local $\tilde{\gamma}$ pode ser aproximada pela utilidade quadrática com aversão ao risco local $\tilde{\gamma}$.

$$\alpha_{\gamma,1}^* \approx \alpha_{-1,1}^*$$

enquanto $\alpha_{\gamma,1}^*$ é pequeno (Cerny 2004, p.70).

2.2 Índices de Avaliação de Desempenho

Oda (2006, p.71) comenta que o primeiro conceito utilizado para a avaliação de desempenho de fundos foi a rentabilidade. No entanto, a teoria de portfólios apresentou a importância do risco para essa avaliação, o que fez da escolha baseada somente na maximização do retorno esperado insuficiente para a avaliação de desempenho.

2.2.1 Índice de Sharpe

O índice de Sharpe (1966) é comumente utilizado pelo mercado como forma de indicar o excesso de retorno por unidade de risco. É dado pela expressão:

Equação 16 – Índice de Sharpe

$$SR(t_1, t_2) = \frac{\mu(t_1, t_2) - r_f(t_1, t_2)}{\sigma(t_1, t_2)}$$

Onde:

μ é o retorno esperado do ativo de risco em um intervalo de tempo determinado;

r_f é a taxa livre de risco representativa desse mesmo intervalo;

σ o desvio padrão do retorno do ativo de risco para o intervalo

O índice de Sharpe consiste em um índice que mede o prêmio por unidade de risco (Sharpe, 1966). Oda (2006, p.74) menciona o índice de Sharpe como prêmio por variabilidade, tomando como referência a linha de mercado de capital (LMC). Sharpe (1998, p.844) define índice de Sharpe ou taxa de prêmio de variabilidade como uma medida de desempenho ajustada ao risco que usa o *benchmark* baseado na LMC *ex post facto*. Este índice mede o excesso de log-retorno relativo ao risco total da carteira, onde o risco total é o desvio-padrão dos retornos da carteira.

Devido a sua relação com a utilidade quadrática, o índice apresenta algumas limitações, não sendo uma medida adequada de prêmio pelo risco para algumas condições de investimento. Como mencionado anteriormente, a utilidade quadrática, devido ao ponto de máxima satisfação, ponto *bliss*, pune o investidor com riqueza superior a esse ponto.

Essa característica é facilmente detectável em situações nas quais a distribuição dos retornos apresenta grande assimetria, como no exemplo a seguir.

Nesse trabalho usaremos a nomenclatura adotada por Cerny chamando a relação apresentada na equação 16 de MPR, assim:

$$MPR = \frac{\mu - r_f}{\sigma}.$$

Exemplo 4 – Índice de Sharpe
(adaptado de Cerny 2004, p.71)

Dados dois ativos A e B com os seguintes excessos de retorno:

Tabela 2 – Ativos e Excessos de Retornos

Probabilidade	1/6	1/2	1/3
Excesso retorno ativo A	-1%	1%	2%
Excesso retorno ativo B	-1%	1%	11%

Fonte: Cerny (2004, p.71)

Os resultados do ativo B não são piores que do ativo A em qualquer estado, no entanto, poder-se-ia esperar que o índice de Sharpe (SR) de B apresentasse melhor desempenho que o índice de Sharpe (SR) de A.

Calculando os SR s temos:

Equação 17 – Cálculo do SR para o ativo A e B

Ativo A:

$$E[X_A] = -1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$E[X_A^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$\sigma_{X_A}^2 = E[X_A^2] - (E[X_A])^2 = 1$$

$$SR(X_A) = \frac{E[X_A]}{\sigma_{X_A}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ativo B:

$$E[X_B] = -1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

$$E[X_B^2] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 11^2 \cdot \frac{1}{3} = 41$$

$$\sigma_{X_B}^2 = E[X_B^2] - (E[X_B])^2 = 41 - 4^2 = 25$$

$$SR(X_B) = \frac{E[X_B]}{\sigma_{X_B}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Surpreendentemente, pela medida de SR, o ativo B parece menos atrativo que o ativo A, pois $SR(X_B) < SR(X_A)$, o que parece ser incoerente.

A punição imposta pelo ponto *bliss* não ocorre se $V(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}}^*) \leq V_{bliss}$, ou seja,

$V_{safe} \left(1 + \tilde{\gamma}^{-1} \frac{E[X]}{E[X^2]} X \right) \leq V_{bliss}$. Dividindo a expressão por V_{safe} temos:

$$1 + \tilde{\gamma}^{-1} \frac{E[X]}{E[X^2]} X \leq \tilde{\gamma}^{-1}.$$

Como $\tilde{\gamma}$ deve ser positivo, chegamos a $E[X]X \leq E[X^2]$.

Se chamarmos o maior valor possível do excesso de retorno de $x_{\max}$, e o menor valor de $x_{\min}$, podemos fazer a seguinte consideração:

$$E[X]x_{\min} \geq E[X^2], \text{ se } E[X] < 0, \text{ e}$$

$$E[X]x_{\max} \leq E[X^2], \text{ se } E[X] > 0$$

Examinando os ativos A e B do exemplo 4 sob essa condição, temos:

$$E[X_A]x_{A\max} \leq E[X_A^2]$$

onde $1,2 \leq 2$ satisfaz a condição e $4,11 \leq 41$ viola a condição.

O que indica que a riqueza ótima no mercado A não supera o ponto *bliss*, o que acontece com o mercado B. Isso explica porque A tem um *SR* maior do que B.

Podemos concluir que para $V(\alpha_{-1,\tilde{\gamma}}^*) < V_{bliss}$, o índice de Sharpe é uma medida aceitável de prêmio por risco. Quando o excesso de retorno não obedece a essa condição, a esperança da utilidade quadrática irá subestimar o valor real do investimento do indivíduo que prefere mais a menos.

2.2.1.1 Índice de Sharpe Ajustado (SRA)

Uma alternativa para enfrentar esse problema é o índice de Sharpe ajustado. Esse índice visa corrigir a distorção gerada pela função de utilidade quadrática na condição em que o excesso de retorno X viola a seguinte condição:

$$X > \frac{E[X^2]}{E[X]}$$

$$X > \frac{(E[X^2] + E^2[X] - E^2[X])}{E^2[X]} E[X]$$

$$X > \left(\frac{V[X]}{E^2[X]} + 1 \right) E[X]$$

Portanto, o investidor terá maior utilidade esperada se deixar de lado parte de sua riqueza quando os retornos o colocarem acima do ponto *bliss*, isto é, desconsiderar o excedente da riqueza que faz com que ultrapasse o ponto de máxima satisfação da função de utilidade.

Dado X_{cap} o excesso de retorno. Suponha que o investidor separe a parte do excesso de retorno que supera o valor X_{cap} . Temos: $x_{cap} = \max(X_{cap})$.

Aplicando o SR_A temos:

$$SR_A = \frac{E[X_{cap}]}{\sqrt{E[X_{cap}^2] - (E[X_{cap}])^2}} \text{ e } x_{cap} E[X_{cap}] \leq E[X_{cap}^2]$$

Caso a condição para o ponto *bliss* seja violada, um x_{cap} um pouco menor elevará o índice de Sharpe, pois estamos acima do nível de riqueza onde a função de utilidade quadrática passa a ser decrescente. Portanto, o investidor deve parar de aplicar sua riqueza na condição $x_{cap} E[X_{cap}] = E[X_{cap}^2]$.

Separando o excesso de retorno original X em duas partes, tem-se que:

$$X = X_{cap} + (X - X_{cap})$$

$(X - X_{cap}) > 0$ é o excedente de riqueza que deve ser retirada do excesso de retorno para que não se viole a condição de máximo SR . O X_{cap} é a parte pura do SR e o $(X - X_{cap})$ a parte pura da arbitragem.

Exemplo 5 – Índice de Sharpe ajustado

Considerando um ativo de risco com o seguinte excesso de retorno:

Tabela 3 – Exemplo de Ativo e risco com Excesso de Retorno

x	-25%	-15%	-5%	5%	15%	25%	35%
$P(X = x)$	0,01	0,04	0,25	0,40	0,25	0,04	0,01

Fonte: Cerny (2004, p.74)

Calculando o SR e o SRA desse ativo e também decompor o excesso de retorno em SR puro e arbitragem pura.

$$E[X] = -25 \times 0,01 - 15 \times 0,04 - 5 \times 0,25 + 5 \times 0,4 + 15 \times 0,25 + 25 \times 0,04 + 35 \times 0,01 = 5,0$$

$$E[X^2] = 25^2 \times 0,01 + 15^2 \times 0,04 + 5^2 \times 0,25 + 5^2 \times 0,4 + 15^2 \times 0,25 + 25^2 \times 0,04 + 35^2 \times 0,01 = 125,0$$

$$SR(X) = \frac{5}{\sqrt{125 - 5^2}} = 0,5$$

$E[X]x_{\max} \leq E[X^2]$ resulta em $5,35 \leq 125$, o que viola a condição. Portanto, o SR é menos influenciado pelo nível de riqueza acima do ponto *bliss*.

Para calcular o SR ajustado precisamos primeiramente calcular $E[X_{cap}]$. Para isso vamos estimar que o X_{cap} ocorre abaixo de 25%.

$$E[X_{cap}] = -25 \times 0,01 - 15 \times 0,04 - 5 \times 0,25 + 5 \times 0,4 + 15 \times 0,25 + x_{cap} \times 0,04 + x_{cap} \times 0,01 = 3,65 + x_{cap} \times 0,05$$

$$E[X_{cap}^2] = 25^2 \times 0,01 + 15^2 \times 0,04 + 5^2 \times 0,25 + 5^2 \times 0,4 + 15^2 \times 0,25 + x_{cap}^2 \times 0,04 + x_{cap}^2 \times 0,01 = 87,75 + x_{cap}^2 \times 0,05$$

Como queremos estabelecer a condição $x_{cap} E[X_{cap}] = E[X_{cap}^2]$, tem-se que:

$$x_{cap} (3,65 + x_{cap} \cdot 0,05) = 87,75 + x_{cap}^2 \cdot 0,05$$

$$x_{cap} = \frac{87,75}{3,65} = 24,041$$

Isso nos leva a conclusão de que qualquer retorno acima de 24,041% estará acima do ponto *bliss*.

Chamando $SR_A(X) = SR(X_{cap})$, temos:

$$SR_A(X) = SR(X_{cap}) = \frac{E[X_{cap}]}{\sqrt{E[X_{cap}^2] - (E[X_{cap}])^2}}$$

$$SR_A(X) = \frac{E[X_{cap}]}{\sqrt{x_{cap} E[X_{cap}] - (E[X_{cap}])^2}}$$

portanto,

$$SR_A(X) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_{cap}}{E[X_{cap}]} - 1}}$$

como,

$$E[X_{cap}] = 3,65 + x_{cap} \times 0,05$$

$$E[X_{cap}] = 3,65 + 24,041 \times 0,05$$

$$E[X_{cap}] = 4,852$$

assim,

$$SR_A(X) = \frac{1}{\sqrt{\frac{24,041}{4,852} - 1}}$$

resultando em $SR_A(X) = 0,503$.

Tabela 4 – Decomposição do Excesso de Retorno

X_{cap}	-25%	-15%	-5%	5%	15%	24,04%	24,04%
$X - X_{cap}$	0%	0%	0%	0%	0%	0,96%	10,96%
x	-25%	-15%	-5%	5%	15%	25%	35%
$P(X = x)$	0,01	0,04	0,25	0,40	0,25	0,04	0,01

Fonte: Cerny (2004, p.74)

Nota-se que $SR_A(X) > SR(X)$, isto é, $0,503 > 0,500$. Essa separação do valor de excesso de retorno, que faz com que o investidor tenha riqueza acima do ponto *bliss*. Isto equivale a truncar a função de utilidade quadrática como mostrado no gráfico abaixo:

Gráfico 9 – Utilidade Quadrática Truncada
Fonte: adaptado de Cerny (2004, p. 76)

Para determinar quanta riqueza foi colocada de lado na aplicação de um ativo de risco, calculamos a parte arbitrária de risco ajustado $\alpha_{-1A, \tilde{\gamma}}$, que corresponde ao excesso de retorno truncado no ponto x_{cap} .

$$V_{safe}(1 + \alpha_{-1A, \tilde{\gamma}} x_{cap}) = V_{bliss}.$$

Resolvendo para x_{cap} e usando a expressão $\tilde{\gamma}(V) = Va(V)$ teremos:

$$x_{cap} = \frac{1}{\tilde{\gamma} \alpha_{-1A, \tilde{\gamma}}} = \frac{1}{\alpha_{-1A, 1}}$$

onde $\alpha_{-1A, 1}$ é interpretado como uma carteira arbitragem-ajustada ponderado por unidade de tolerância ao risco local.

No exemplo 5 obtivemos valores muito próximos para o índice de Sharpe puro e o ajustado. Em termos de decisão de investimento os resultados $\alpha_{-1,1}^* = \frac{1}{0,25}$ e $\alpha_{-1A,1}^* = \frac{1}{0,2404}$. Em termos de índice de premio pelo risco, $SR(X) = 0,5$ e $SR_A(X) = 0,503$.

Para melhor entender a real importância de se adotar a medida de desempenho SR ou SRA, segue exemplo com algumas simulações.

Exemplo 6 – Simulações com o SR e o SRA

Imaginando que um investidor tenha escolhido uma opção europeia de compra (*call*), com maturidade para um ano. Percebe-se que quando o preço da opção é muito baixo, o retorno da opção será fortemente assimétrico em direção aos valores altos e será proporcionalmente elevado, o que provavelmente violará a condição do ponto *bliss*.

Considerando uma gama de valores para o preço da opção, o mais alto calculado através de Black-Scholes, considerado como referencia para o valor justo. O menor valor será (-10%) do valor justo e os demais (10%), (50%), (75%) e (90%) do mesmo valor.

Calculando os valores de SR e α puros e ajustados como demonstrados no Apêndice II, para os retornos anuais da série Nikkei 225 do período de 1960-2000, foram obtidos os seguintes dados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 5 – Tabela Comparativa: SR padrão com SR ajustado

Preço da opção	-0,0048 Arbitragem	0,0048	0,0241	0,0361	0,0433	0,0481 Valor BS
$\alpha_{-1,1}$	-0,0158	0,0150	0,0632	0,0800	0,0838	0,0832
$\alpha_{-1A,1}$	-0,9804	0,0458	0,0895	0,0933	0,0900	0,0872
$SR(\alpha_{-1,1})$	0,645	0,574	0,432	0,344	0,291	0,256
$SR_A(\alpha_{-1,1})$	0,698	0,612	0,447	0,350	0,293	0,257
$SR_A(\alpha_{-1A,1})$	$+\infty$	0,716	0,462	0,352	0,294	0,257

Fonte: adaptado de Cerny (2004, p. 78)

Consideramos o valor obtido através da fórmula de Black-Scholes como o valor justo da opção. Observando a coluna do valor de BS justo, os índices de Sharpe padrão e ajustado quase não apresentam diferença. Já na segunda coluna, a opção tem um preço bem inferior ao justo, e nesse caso, o SR padrão já não serve como referência, pois diverge muito do SR ajustado, não representando o real potencial de investimento do projeto.

O índice de Sharpe necessita de alguns cuidados. A utilização do SR ao invés do SRA pode levar a um α subestimado, o que nos leva a investir menos dinheiro do que deveríamos, não utilizando o potencial de investimento do investimento. Podemos notar isso na segunda coluna da tabela onde o $\alpha_{-1,1}$ é de 0,0150 e $\alpha_{-1A,1}$ é de 0,0458, ou seja, três vezes maior. Essa escolha de portfólio subestimada se reflete numa redução de SRA de 0,716 para 0,612.

Outro cuidado com o SR é que ele penaliza altos retornos. Ainda na segunda coluna, $SR(\alpha_{-1,1})$ é de 0,574, entretanto, decompondo a riqueza gerada pelo investimento $\alpha_{-1,1}$ de 0,015 em SR puro e arbitragem pura, perceberemos que o $SR_A(\alpha_{-1,1})$ é de 0,612 que mostra a penalização imposta por SR puro, subestimando investimentos com retornos positivamente assimétricos, nos levando a escolha menos lucrativas.

2.2.1.2 Índice de Sharpe em função do horizonte de investimento

Lin & Chou em seu artigo (2003, p.84-89), mostram que para retornos independentes identicamente distribuídos (IID), o índice de Sharpe calculado em função de um horizonte de investimento T varia, apresentando comportamento inicialmente crescente durante o primeiro intervalo do horizonte de investimento, entrando em queda após atingir seu valor máximo.

Adotando P_t como o preço do ativo de risco que obedece a um movimento browniano geométrico (MBG) chega-se ao índice de Sharpe em função do horizonte de investimento T . Assim o $SR(T)$ é dado pelas expressões:

Equação 18 – Índices de Sharpe

$$SR^d(T) = \frac{1 - e^{-\left(v + \frac{\sigma^2}{2} - r_f\right)T}}{\sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}} = \frac{1 - \exp(-\alpha T)}{\sqrt{\beta}}, \text{ dado } X_T^d, \text{ i.e., para preços, } \mu > r_f, \alpha > 0 \text{ e}$$

$$\beta > 0.$$

$$SR^c(T) = \frac{v - r_f}{\sigma} \sqrt{T}, \text{ dado } X_T^c, \text{ i.e., para o logaritmo dos preços e } v > r_f.$$

$$\text{Sendo } \mu = v + \frac{\sigma^2}{2}.$$

$$\text{Para preço temos que } MPR = \frac{v + \frac{\sigma^2}{2} - r_f}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma}, \text{ podemos escrever que:}$$

$$SR^c(T) = \left(MPR - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T}.$$

Prova 6 – SR em função do horizonte de investimento T .

Prova 6 – Índice de Sharpe em função do horizonte de investimento

Supondo que $\{P_t, t \in R_+\} \sim MBG$ na medida de probabilidade objetiva. Então se tem que para um modelo do processo estocástico de um ativo de risco (e.g. ação sem dividendos) com log-retornos IID:

$$\frac{P_{t+dt} - P_t}{P_t} = \frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad \text{ou} \quad d \ln P_t = \nu dt + \sigma dW_t \quad \text{sendo que} \quad \mu = \nu + \frac{\sigma^2}{2}.$$

A solução das equações diferenciais estocásticas é dada por:

$$P_t = P_0 \exp(\nu t + \sigma W_t) \sim \text{lognormal} \left(P_0 \exp \left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right); P_0^2 \exp \left(2 \left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) (\exp(\sigma^2 t) - 1) \right).$$

Portanto, conforme Luenberger (1996, p. 310) temos:

$$E \left[\ln \frac{P_t}{P_0} \right] = \nu t$$

$$V \left[\ln \frac{P_t}{P_0} \right] = V [\ln P_t] = \sigma^2 t$$

$$E \left[\frac{P_t}{P_0} - 1 \right] = \exp \left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) - 1$$

$$V \left[\frac{P_t}{P_0} - 1 \right] = V \left[\frac{P_t}{P_0} \right] = \exp \left(2 \left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) (\exp(\sigma^2 t) - 1)$$

Seja B_t o preço de um ativo livre de risco com taxa de juros nominal r_f dado pela equação diferencial determinística $\frac{dB_t}{B_t} = r_f dt$, então $B_t = B_0 \exp(r_f t)$ sendo que

$$\frac{B_t}{B_0} - 1 = \exp(r_f t) - 1.$$

Define taxa de retorno excedente de um período equivalente em tempo contínuo como $\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$ (Cerny 2004, p. 233).

Define-se excesso de taxa de retorno composta continuamente como:

$$X_t^c = \ln \frac{P_t}{P_0} - \ln \frac{B_t}{B_0}, \quad X_t^c > 0.$$

Define-se excesso de taxa de retorno composta discretamente como:

$$X_t^d = \frac{P_t}{P_0} - 1 - \left(\frac{B_t}{B_0} - 1 \right) = \frac{P_t}{P_0} - \frac{B_t}{B_0}$$

SR no mundo do logaritmo do preço

Define-se o índice de Sharpe com composição contínua em função do horizonte de investimento T , $SR^c(T)$, da seguinte forma:

$$SR^c(T) = \frac{E[X_T^c]}{\sqrt{V[X_T^c]}} = \frac{E\left[\ln \frac{P_T}{P_0}\right] - \ln \frac{B_T}{B_0}}{\sqrt{V\left[\ln \frac{P_T}{P_0}\right]}} = \frac{(\nu - r_f)t}{\sqrt{\sigma^2 t}} = \frac{\nu - r_f}{\sigma} \sqrt{t}.$$

Portanto, o $SR^c(T)$ depende da raiz do horizonte de investimento T .

SR no mundo do preço

Define-se o índice de Sharpe com composição discreta em função do horizonte de investimento T , $SR^d(T)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
SR^d(T) &\equiv \frac{E[X_T^d]}{V[X_T^d]} \\
&= \frac{E\left[\frac{P_T}{P_0}\right] - \frac{B_T}{B_0}}{V\left[\frac{P_T}{P_0}\right]} \\
&= \frac{\exp\left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) - \exp(r_f T)}{\exp\left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \sqrt{\exp(\sigma^2 T) - 1}} \\
&= \frac{1 - \exp\left(-\left(\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - r_f\right)T\right)}{\sqrt{\exp(\sigma^2 T) - 1}}
\end{aligned}$$

Portanto, o $SR^d(T)$ depende do horizonte de investimento T .

O $SR(T)$, conforme prova 6, apresenta características distintas em função da composição da série de preços dos ativos resultando em $SR^d(T)$ e $SR^c(T)$.

Se trabalharmos com o logaritmo dos preços, isto é, com X_T^c , equivale supor que as séries de retorno obedecem a uma composição contínua resultando no $SR^c(T)$.

Para preços, isto é, com X_T^d , obtemos o $SR^d(T)$. Ambos os índices, tanto para composição contínua como discreta sofrem influência do horizonte de investimento, não permanecendo constantes ao longo do horizonte T . Em ambos os índices crescem com o aumento do horizonte de investimento. No entanto o $SR^d(T)$ atinge um valor máximo decaindo em seguida. Goetzmann, Ingersoll e outros (2000, p.15) comentam que o aumento de T equivale ao aumento do prêmio e da variância (não do desvio-padrão) proporcionalmente. Portanto, o $SR^d(T)$, para T 's elevados, apresenta comportamento financeiramente inconsistente, possivelmente pela influência da utilidade quadrática que começa a penalizar investimento acima do ponto *bliss*.

(Cerny 2004, p.133) afirma que em um modelo com retornos IID, a média e a variância de log-retornos cresce linearmente com o horizonte de tempo. Isso é conhecido como lei de linearidade para média e variância. Portanto, se a variância dos retornos cresce linearmente com o tempo, o desvio-padrão ou volatilidade tem que crescer proporcionalmente a raiz quadrada do tempo.

Outro aspecto importante é o fato de que para retornos de composição diária temos que $\ln \frac{P_t}{P_0} \approx \frac{P_t}{P_0} - 1$, isto é, os retornos diários são tão pequenos que podemos remover o operador logarítmico, ou seja, a composição contínua é equivalente a composição discreta. No entanto, períodos pequenos promovem retornos não IID.

Econometricamente, Knight & Satchell (2002, p.90) mostram que preço log-normal, com exceção de períodos de turbulência, é uma premissa razoável para índices de desempenho de ações em mercados líquidos sobre períodos mensais e parece também merecer crédito para preços de carteira de mercado.

Sabemos que uma boa medida para garantir a condição IID dos retornos é trabalhar com retornos de períodos no mínimo mensais. Isso limita o uso do $SR^c(T)$. No entanto, o $SR^d(T)$ é financeiramente inconsistente para horizontes elevados, o que nos leva a um impasse sobre o uso desses índices.

Assim, temos um *trade-off* entre assumir preços log-normais, composição contínua, e frequências diárias, que não garantem a condição IID, ou utilizar um índice que é financeiramente inconsistente.

Assumindo os seguintes parâmetros (a.a. útil):

- Taxa livre de risco $r_f = 12\%$
- Log-retorno esperado $\hat{\nu} = 20\%$
- Volatilidade $\hat{\sigma} = 30\%$

Teremos a seguinte representação gráfica de $SR^d(T)$:

Gráfico 10 – SR^d em função do horizonte de investimento, $SR^d(T)$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Verifica-se, portanto, a existência de um instante T de horizonte de investimento onde o valor do índice de Sharpe é máximo, decaindo em seguida.

Gráfico 11 – SR^c em função do horizonte de investimento, $SR^c(T)$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na representação gráfica de $SR^c(T)$ acima, o índice é crescente para o aumento de T , o que faz sentido, pois o prêmio pelo risco deve aumentar com o aumento do horizonte de investimento que pode ser interpretado como risco pela incerteza futura.

Comparando os dois índices verificamos que o $SR^c(T)$ cresce mais lentamente que o $SR^d(T)$ até determinado T , representando que o horizonte de investimento para preços com composição discreta paga maior prêmio pelo risco do que preços com composição contínua. Esse cenário se inverte quando T ultrapassa o ponto de máximo de $SR^c(T)$ ou quando o índice passa a ser penalizado pela utilidade quadrática.

Gráfico 12 – Comparação do comportamento entre $SR^c(T)$ e $SR^d(T)$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Para definirmos o instante T em que $SR^d(T)$ atinge o valor máximo aplicamos a CPO (condição de primeira ordem) na expressão de $SR^d(T)$.

$$SR^d(T) = \frac{1 - \exp(-\alpha T)}{\sqrt{\beta}}$$

Equação 19 – Derivada de $SR^d(T)$ em T

$$SR^d'(T) = \frac{e^{-\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}}{2} \frac{\left(-e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} \sigma^2 + e^{r_f T} (-2\nu + 2r_f - \sigma^2) + e^{(r_f + \sigma^2)T} (2\nu - 2r_f + 2\sigma^2) \right)}{\left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$SR^d'(T) = \frac{-\sigma^2 e^{\sigma^2 T} - 2\alpha e^{\alpha T} + (2\alpha + \sigma^2) e^{(\sigma^2 - \alpha)T}}{2\sqrt{\beta^3}}$$

$$SR^d'(T) = \frac{-\sigma^2 e^{\sigma^2 T} - 2\alpha \left(e^{\alpha T} - e^{(\sigma^2 - \alpha)T} \right) + \sigma^2 e^{(\sigma^2 - \alpha)T}}{2\sqrt{\beta^3}}$$

$$SR^d'(T) = \frac{-\sigma^2 \left(e^{\sigma^2 T} - e^{(\sigma^2 - \alpha)T} \right) - 2\alpha \left(e^{\alpha T} - e^{(\sigma^2 - \alpha)T} \right)}{2\sqrt{\beta^3}}$$

Gráfico 13 – Gráfico da derivada de $SR^d(T)$ em relação à T .
Fonte: Elaborado pelo autor

Para os parâmetros definidos anteriormente, obtemos um $SR^d(T)$ de 0,624 em 6,332 anos, ou seja, com um horizonte de investimento em torno de seis anos e quatro meses.

2.2.2 Índice de Potencial de Investimento

Investimento potencial é um índice de desempenho que avalia a variação percentual do equivalente certo da função de utilidade do investidor pela riqueza livre de risco.

Equação 20 – Índice de potencial de investimento

$$IP_{\gamma, \tilde{\gamma}}(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}, X) = \frac{V_{\gamma, \tilde{\gamma} \text{ certo}}(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}})}{V_{\text{safe}}} - 1$$

Podemos dizer que esse índice expressa a variação percentual do equivalente certo da função de utilidade do investidor com relação à riqueza livre de risco.

Define-se investimento potencial IP_{γ} como o percentual (taxa) de crescimento do equivalente certo por unidade de tolerância de risco local:

$$IP_{\gamma}(\alpha_{\gamma, 1}, X) = \frac{V_{\gamma, 1 \text{ certo}}(\alpha_{\gamma, 1})}{V_{\text{safe}}} - 1$$

Assumindo $IP_{\gamma}(X)$ como investimento potencial máximo associado com o ativo de risco, temos $IP_{\gamma}(X) \equiv \max_{\alpha} IP_{\gamma}(\alpha, X)$.

Do crescimento percentual do equivalente certo do investidor HARA, o investimento de risco apresenta dois componentes distintos,

$$\frac{\max_{\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}} V_{\gamma, \tilde{\gamma} \text{ certo}}(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}})}{V_{\text{safe}}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} IP_{\gamma}(X)$$

onde o termo a esquerda representa o crescimento percentual máximo em equivalente certo, $\frac{1}{\tilde{\gamma}}$ a tolerância de risco local e $IP_{\gamma}(X)$, o investimento potencial base.

Uma parte é o máximo investimento potencial base do ativo de risco, que somente depende da aversão ao risco base e a distribuição dos retornos. A outra é a tolerância ao risco local, o qual determina com que extensão o investidor é apto a se beneficiar do potencial de investimento do seguro de risco, isto é, um $\tilde{\gamma}$ maior gera um menor benefício ao investidor em termos de equivalente certo.

É importante observar que o excesso de retornos simetricamente distribuídos oferece prêmios de risco relativamente pequenos.

2.2.2.1 Potencial de investimento em termos de índice de Sharpe

Como mostrado, ativos com o mesmo valor de $1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}$ levarão à mesma evolução da esperança da utilidade quadrática.

Substituindo a esperança do excesso de retorno por $\mu_X = E[X]$ e a variância do excesso de retorno $\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$, teremos:

$$1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} = \frac{E[X^2] - (E[X])^2}{E[X^2] - (E[X])^2 + (E[X])^2}$$

$$1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \mu_X^2}$$

$$1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} = (1 + MPR^2[X])^{-1}$$

Podemos verificar que o equivalente certo da riqueza depende do retorno do risco através de $\frac{\mu_X}{\sigma_X}$, relação essa conhecida como MPR, preço pelo risco.

$$1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} = \frac{1}{1 + (MPR)^2}$$

Como para a utilidade quadrática, $\frac{\max_{\alpha_{-1}, \tilde{\gamma}} V_{-1, \tilde{\gamma}^{certo}}(\alpha_{-1}, \tilde{\gamma})}{V_{safe}} - 1 = \frac{1}{\tilde{\gamma}} IP_{-1}(X)$

$IP_{-1}(X) = 1 - \left(1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}\right)^{\frac{1}{2}}$, então temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\max_{\alpha_{-1}, \tilde{\gamma}} V_{-1, \tilde{\gamma} certo}(\alpha_{-1}, \tilde{\gamma})}{V_{safe}} - 1 &= \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 - \left(1 - \frac{(E[X])^2}{E[X^2]} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{\max_{\alpha_{-1}, \tilde{\gamma}} V_{-1, \tilde{\gamma} certo}(\alpha_{-1}, \tilde{\gamma})}{V_{safe}} - 1 &= \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{1}{1 + (MPR)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{\max_{\alpha_{-1}, \tilde{\gamma}} V_{-1, \tilde{\gamma} certo}(\alpha_{-1}, \tilde{\gamma})}{V_{safe}} - 1 &= \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 - (1 + MPR^2 [X])^{-\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

O índice de Sharpe está ligado à utilidade quadrática, existe uma relação entre a utilidade quadrática máxima e o índice de Sharpe:

$$IP_{-1}(X) = 1 - (1 + MPR)^{-\frac{1}{2}},$$

sendo $MPR = \frac{\mu_X}{\sigma_X}$ e X o excesso de retorno.

Expandindo $f(MPR) = (1 + MPR^2)^{-\frac{1}{2}}$ por Taylor em torno de zero temos:

$$\begin{aligned}f(0) &= (1 + 0^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \\ f'(MPR^2) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + MPR^2)^{\frac{3}{2}}} \\ f'(0) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 0)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Portanto podemos aproximar IP como:

$$IP_{-1}(X) = 1 - \frac{1}{2} MPR^2 + o(MPR^2)$$

Equação 21 - IP_{γ} como função de MPR

$$IP_{-1}(X) = \frac{1}{2} MPR^2 + o(MPR^2)$$

$$IP_{-1}(X) \approx \frac{1}{2} MPR^2$$

2.2.3 Análise qualitativa

A análise qualitativa tem por objetivo a compreensão do sinal das derivadas parciais dos índices de avaliação de desempenho, ou seja, como reagem com relação à variação dos parâmetros que os compõem.

2.2.3.1 Análise qualitativa do $SR^d(T)$

Sabemos que,

$$SR^d(T) = \frac{1 - \exp\left(-\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f\right)T\right)}{\sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}}.$$

Chamando $\alpha = \nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f$ e $\beta = e^{\sigma^2 T} - 1$ podemos escrever $SR^d(T)$ como:

$$SR^d(T) = \frac{1 - \exp(-\alpha T)}{\sqrt{\beta}}$$

- Derivando $SR^d(T)$ em relação à ν teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \nu} &= \frac{T \exp\left(-\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f\right)T\right)}{\sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}} \\ \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \nu} &= \frac{T \exp(-\alpha T)}{\sqrt{\beta}} \end{aligned}$$

A derivada parcial não está definida para $T=0$. Sendo as exponenciais e T estritamente positivos, podemos dizer que $\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \nu} > 0$, o que indica que o $SR^d(T)$ cresce com o aumento de ν . Financeiramente podemos dizer que a elevação do excesso de log-retorno implica um maior $SR^d(T)$, o que representa dizer que o aumento de ν melhora o prêmio pelo risco, *ceteris paribus* (c.p.).

- Derivando $SR^d(T)$ em relação à σ teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} &= -\frac{e^{\frac{1}{2}(2\nu+\sigma^2)T} \left(e^{r_f T} - 2e^{-(r_f+\sigma^2)T} + e^{\nu T + \frac{3\sigma^2 T}{2}} \right) \sigma T}{\left(-1 + e^{\sigma^2 T} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma T}{\left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{-\alpha T} - 2e^{(\sigma^2 - \alpha)T} + e^{\sigma^2 T} \right) \\ \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma T}{\sqrt{\beta^3}} \left(e^{-\alpha T} - 2e^{(\sigma^2 - \alpha)T} + e^{\sigma^2 T} \right) \\ \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} &= -\sigma T \frac{\exp(-\alpha T) - 2\exp(\sigma^2 T)\exp(-\alpha T) + \exp(\sigma^2 T)}{\sqrt{\beta^3}} \\ \frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} &= -\sigma T \frac{\exp(-\alpha T)(1 - 2\exp(\sigma^2 T)) + \exp(\sigma^2 T)}{\sqrt{\beta^3}}\end{aligned}$$

Novamente a derivada parcial não está definida para $T = 0$. Sendo as exponenciais e T positivos, podemos dizer que $\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} < 0$, na condição $\exp(-\alpha T) + \exp(\sigma^2 T) > 2\exp(\sigma^2 T)\exp(-\alpha T)$, isto é, $\exp(-\sigma^2 T) + \exp(\alpha T) > 2$, o que indica que o $SR^d(T)$ apresenta uma relação negativa com relação à σ , que do ponto de vista financeiro parece coerente. O prêmio pelo risco diminui com o aumento da volatilidade.

- Analisando o comportamento de $SR^d(T)$ em função do horizonte de investimento $\frac{\partial SR^d(T)}{\partial T}$ temos:

$$\begin{aligned}SR^{d'}(T) &= \frac{e^{-\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \left(-e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} \sigma^2 + e^{r_f T} (-2\nu + 2r_f - \sigma^2) + e^{(r_f + \sigma^2)T} (2\nu - 2r_f + 2\sigma^2) \right)}{2 \left(e^{\sigma^2 T} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ SR^{d'}(T) &= \frac{-\sigma^2 e^{\sigma^2 T} - 2\alpha e^{\alpha T} + (2\alpha + \sigma^2) e^{(\sigma^2 - \alpha)T}}{2\sqrt{\beta^3}}\end{aligned}$$

$$SR^d(T) = \frac{-\sigma^2 \left(e^{\sigma^2 T} - e^{(\sigma^2 - \alpha)T} \right) - 2\alpha \left(e^{\alpha T} - e^{(\sigma^2 - \alpha)T} \right)}{2\sqrt{\beta^3}}$$

Sendo as funções exponenciais e a σ^2 positivas, na condição de $T > 0$, teremos que

$\frac{\partial SR^d(T)}{\partial T}$ só será positivo se $e^{(r_f + \sigma^2)T} (2\nu - 2r_f + 2\sigma^2) > e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} + e^{r_f T} (2\nu - 2r_f + \sigma^2)$ ou ainda se $(2\alpha + \sigma^2) > \exp(\sigma^2 T (\alpha \sigma^2 T - 1)) + \exp(T(2\alpha^3 T - \sigma^2))$.

Como vimos anteriormente, a representação gráfica de $SR^d(T)$ em função do horizonte de investimento T apresenta um comportamento inicial crescente, atinge um ponto de máximo e depois decresce. O ponto de máximo ocorre em um T^* onde $(2\alpha + \sigma^2) = \exp(\sigma^2 T (\alpha \sigma^2 T - 1)) + \exp(T(2\alpha^3 T - \sigma^2))$.

Portanto para $T < T^*$ temos $\frac{SR^d(T)}{\partial T} > 0$, o que é financeiramente coerente, pois com o aumento da incerteza de tempo futuro, espera-se maior prêmio. Acima de T^* temos $\frac{SR^d(T)}{\partial T} < 0$, o que contradiz o bom senso fazendo desse índice um indicador ruim com essa restrição. Portanto, esse índice deve ser descartado para análise de desempenho de ativos com risco.

2.2.3.2 Análise qualitativa do $SR^c(T)$

Sabemos que, $SR^c(T) = \frac{\nu - r_f}{\sigma} \sqrt{T}$.

Temos que para preço $MPR = \frac{\nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma}$, logo podemos escrever que:

$$SR^c(T) = \left(MPR - \frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{T}$$

Portanto, para um horizonte de investimento unitário, $T=1$, podemos dizer que o índice de Sharpe de composição contínua é o preço pelo risco do ativo descontado a metade de seu parâmetro de volatilidade.

$$SR^c(1) = MPR - \frac{\sigma}{2}$$

- Derivando $SR^c(T)$ em relação à ν teremos:

$$\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \nu} = \frac{\sqrt{T}}{\sigma}$$

portanto

$$\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \nu} > 0$$

indicando que o aumento do log-retorno gera uma resposta crescente por parte de $\partial SR^c(T)$, c.p., isto é, o prêmio pelo risco aumenta com a elevação do retorno.

- Derivando $SR^c(T)$ em relação à σ teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial SR^c(T)}{\partial \sigma} &= -\frac{(\nu - r_f)}{\sigma^2} \sqrt{T} \\ &= -\frac{SR^c(T)}{\sigma} = -\left(\frac{MPR}{\sigma} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{T} \end{aligned}$$

e considerando um excesso de log-retorno positivo, podemos então dizer que $\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \sigma} < 0$, que equivale a dizer que o aumento da volatilidade dos log-retornos reduz o prêmio pelo risco.

- Derivando $SR^c(T)$ em relação à T teremos:

$$\begin{aligned} \frac{SR^c(T)}{\partial T} &= \frac{\nu - r_f}{2\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{1}{2T} SR^c(T) = \frac{2MPR - \sigma}{4\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Na condição em que o log-retorno do ativo é superior a taxa livre de risco teremos que $\frac{SR^c(T)}{\partial T} > 0$ para todo T o que, em termos financeiros, pelo fato de não apresentar restrição quanto a T , faz do $SR^c(T)$ um índice em função do horizonte

de investimento mais coerente do que o $SR^d(T)$. Notar que *ex ante facto*, como mostrado anteriormente, exige-se que $v > r_f$.

2.2.4 Análise quantitativa (elasticidade)

A elasticidade representa o grau de sensibilidade de uma variável dependente (exemplo, a oferta ou a procura de um bem) frente a mudanças em outras variáveis que a determinam (exemplo, o preço de mercado), permanecendo constantes as demais variáveis, c.p.

$$Elasticidade(x, y) = \frac{\Delta \% x}{\Delta \% y}$$

$$Elasticidade(x, y) = \frac{\partial \ln(x)}{\partial \ln(y)} = \frac{\partial x}{\partial y} \frac{y}{x}$$

Supondo a relação do exemplo descrito, entre preço (P) e quantidade (Q), temos cinco casos de elasticidade:

- $Elasticidade = 0$: Perfeitamente rígida. Qualquer variação de P não terá qualquer efeito em Q.
- $Elasticidade < 1$: Rígida. A variação proporcional em Q é menor do que a variação proporcional em P.
- $Elasticidade = 1$: Elasticidade unitária. A variação proporcional de uma variável é igual à variação proporcional de outra variável.
- $Elasticidade > 1$: Elástica. A variação proporcional em Q é maior do que a variação proporcional em P.
- $Elasticidade = \infty$: Perfeitamente elástica. A variação em P é zero, portanto a elasticidade é infinita.

2.2.4.1 Análise quantitativa do $SR^d(T)$

- Dado $\eta_{\nu} SR^d(T)$ a elasticidade (sensibilidade) do índice de Sharpe de composição discreta com relação à ν ,

$$\eta_{\nu} SR^d(T) = \frac{\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \nu}}{\frac{SR^d(T)}{\nu}}$$

portanto

$$\eta_{\nu} SR^d(T) = \frac{\nu T e^{r_f T}}{e^{\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - e^{r_f T}} = \frac{\nu T}{e^{\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f\right)T} - 1} = \frac{\nu T}{e^{\alpha T} - 1}$$

Mantendo os dados:

- Taxa livre de risco $r_f = 12\%$
- Volatilidade $\hat{\sigma} = 30\%$
- Horizontes de investimento de $T = 1, T = 10, T = 50$

Gráfico 14 - Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação ao log-retorno ν

Fonte: Elaborado pelo autor

Graficamente $\eta_{\nu} SR^d(T)$ apresenta um comportamento decrescente com o aumento do log-retorno ν . O que percebemos é que o índice é pouco elástico para log-retornos muito pequenos, aumentando sua elasticidade gradativamente com o aumento de ν . O decaimento da curva é mais acentuado para horizontes de investimento maiores fazendo com que mude do estado de grande rigidez para muito elástico, isto é, a de ν passa a impactar muito pouco no índice.

Percebemos então que log-retornos maiores tem menor influência sobre a variação do índice do que os menores, e que com o aumento do horizonte de investimento, esses valores de log-retorno diminuem, isto é, a mudança de estado da curva de rígida para elástica ocorre com valores de log-retorno menores para horizontes maiores. Em resumo, o índice é mais sensível as variações do log-retorno para valores pequenos ficando menos sensível para valores maiores, e a influência do horizonte de investimento é de que quanto maior T , menor o valor de ν em que ocorre essa transição.

- Avaliando a elasticidade de $SR^d(T)$ com relação à volatilidade temos:

$$\eta_{\sigma} SR^d(T) = \frac{\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma}}{\frac{SR^d(T)}{\sigma}}$$

$$\eta_{\sigma} SR^d(T) = \frac{\sigma^2 T}{(e^{\sigma^2 T} - 1)} \frac{\left(e^{r_f T} - 2e^{(r_f + \sigma^2)T} + e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} \right)}{\left(-e^{r_f T} + e^{\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right)}$$

$$\eta_{\sigma} SR^d(T) = \frac{\sigma^2 T}{\beta} \frac{\left(e^{r_f T} - 2e^{(r_f + \sigma^2)T} + e^{(\alpha + \sigma^2 + r_f)T} \right)}{\left(-e^{r_f T} + e^{(\alpha + r_f)T} \right)}$$

$$\eta_{\sigma} SR^d(T) = \frac{\sigma^2 T}{\beta} \frac{\left(1 - 2e^{\sigma^2 T} + e^{(\alpha + \sigma^2)T} \right)}{\left(-1 + e^{\alpha T} \right)}$$

Ainda com os dados:

- Taxa livre de risco $r_f = 12\%$
- Volatilidade $\hat{\sigma} = 30\%$

Horizontes de investimento de $T = 1, T = 10, T = 50$

Gráfico 15 – Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação à volatilidade

Fonte: Elaborado pelo autor

Temos graficamente que o $\eta_{SR^d(T)}^{\sigma}$ apresenta variação percentual negativa com relação ao incremento da volatilidade para $T = 1$. O mesmo comportamento ocorre para $T = 10$ para volatilidade até aproximadamente 0.3, deste ponto em diante vemos que a curva passa a ser crescente. Com $T = 50$ a curva apresenta comportamento crescente para qualquer valor de volatilidade. Percebemos que para $T = 1$ e $T = 10$ as curvas são bastante elásticas, indicando que para pequenos horizontes de investimento, a variação da volatilidade tem pouca influência sobre a variação do índice, mesmo porque, para esses horizontes, o comportamento é negativo, isto é, a variação positiva da volatilidade gera uma variação negativa no índice, fato que corresponde ao esperado financeiramente. No entanto, para volatilidades maiores, no caso de $T = 10$ e para $T = 50$, o incremento de volatilidade promove um incremento no índice, e o comportamento passa a apresentar considerável rigidez, isto é, pequenas variações de volatilidade promovem grande variação do índice.

- Avaliando a elasticidade de $SR^d(T)$ em função do horizonte de investimento,

$$\eta_{SR^d(T)} = \frac{\frac{\partial SR^d(T)}{\partial T}}{\frac{SR^d(T)}{T}}$$

$$\eta_{SR^d(T)} = \frac{-\nu \left(e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} \sigma^2 + 2e^{(\sigma^2 + r_f)T} (-\nu + r_f - \sigma^2) + e^{r_f T} (2\nu - 2r_f + \sigma^2) \right)}{2(e^{\sigma^2 T} - 1) \left(e^{r_f T} + e^{\left(\nu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right)}$$

$$\eta_{SR^d(T)} = \frac{-\nu \left(e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} \sigma^2 - e^{(\sigma^2 + r_f)T} (2\alpha + \sigma^2) + 2\alpha e^{r_f T} \right)}{2\beta \left(e^{r_f T} + e^{(\alpha + r_f)T} \right)}$$

$$\eta_{SR^d(T)} = \frac{\nu \left(\sigma^2 \left(e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2}\right)T} + e^{(\sigma^2 + r_f)T} \right) + 2\alpha \left(e^{(\sigma^2 + r_f)T} - e^{r_f T} \right) \right)}{2\beta e^{r_f T} (1 + e^{\alpha T})}$$

Gráfico 16 – Elasticidade de $SR^d(T)$ em relação ao horizonte T
Fonte: Elaborado pelo autor

O $\eta_{SR^d(T)}$ decai em resposta ao incremento do horizonte de investimento. Existe um ponto do horizonte onde o índice é indiferente ao T , esse ponto deve corresponder ao ponto de máximo da curva do índice, T^* . A partir desse ponto, o índice passa a decrescer. O que fica claro é que para T menor que T^* a curva apresenta grande rigidez, o que indica que a variação do horizonte impõe grande influência no crescimento do índice, no entanto, a partir do T^* , a curva passa a ser bastante elástica, mostrando que grande variação no valor do horizonte de investimento gera variação menor no índice. Financeiramente, esse comportamento é contrário ao que se espera de um índice que deve incorporar ao prêmio o risco, e nesse caso, o risco é maior para horizontes maiores.

2.2.4.2 Análise quantitativa do $SR^c(T)$

- Avaliando a elasticidade de $SR^c(T)$ em função de ν ,

$$\eta_{SR^c(T)} = \frac{\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \nu}}{\frac{SR^c(T)}{\nu}}$$

$$\eta_{SR^c(T)} = \frac{\frac{\sqrt{T}}{\sigma}}{\frac{\nu - r_f}{\sigma \nu} \sqrt{T}}$$

$$\eta_{SR^c(T)} = \frac{\nu}{\nu - r_f}$$

$$\eta_{SR^c(T)} = \frac{2\nu}{2\alpha - \sigma^2}$$

$$\eta_{SR^c(T)} = \frac{\frac{\nu}{\sigma}}{SR^c(1)}$$

Percebemos então que o $\eta_{\nu} SR^c(T)$ não depende do horizonte de investimento e que existe uma descontinuidade na função para $\nu = r_f$. Para $\nu > r_f$ teremos que $\eta_{\nu} SR^c(T) > 1$.

Gráfico 17 – Elasticidade de $SR^c(T)$ em relação ao log-retorno ν
Fonte: Elaborado pelo autor

Para $\nu > r_f$ a curva apresenta mudança de rígida para elástica com o aumento de log-retorno, i.e., o índice apresenta grande sensibilidade a variação de log-retornos para excessos pequenos e pouca sensibilidade para variação de log-retornos de excesso elevados.

O $\eta_{\sigma} SR^c(T)$ apresenta elasticidade unitária negativa.

$$\eta_{\sigma} SR^c(T) = \frac{\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \sigma}}{\frac{SR^c(T)}{\sigma}} = -1$$

Isto indica que se a volatilidade aumentar 1% de seu valor, o SR^c diminui 1%.

O $\eta_T SR^c(T)$ apresenta elasticidade $\frac{1}{2}$, isto é, pouca elasticidade.

$$\eta_T SR^c(T) = \frac{\frac{\partial SR^c(T)}{\partial T}}{\frac{SR^c(T)}{T}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, se o horizonte de investimento T aumentar 1% de seu valor, o SR^e aumenta 0,5%.

2.2.5 Bandas de *Good-deal*

As teorias de precificação de ativos tentam avaliar os preços ou valores de pagamentos incertos. Cochrane (2001, p.XIII) ressalta o fato de baixos preços resultarem em altas taxas de retorno, o que explicaria porque alguns ativos pagam maiores taxas médias de retorno que outros.

Dois fatores são relevantes na avaliação de um ativo, o prazo e o risco de pagamento. O efeito prazo não apresenta grande dificuldade para ser incorporado, no entanto, correções para o risco são determinantes para a apuração do valor do ativo. A remuneração real de um ativo é, portanto composta de uma taxa de interesse (juros) e um prêmio pelo risco, risco esse relativo à incerteza. Assim, podemos dizer que o preço é igual ao pagamento esperado descontado.

Existem duas formas de abordagem dessa questão, que Cochrane (2001, p.XIV) coloca como:

- Precificação absoluta: nesse caso a precificação do ativo é obtida através de análises fundamentais de risco macroeconômico, modelos de consumo, equilíbrio, etc., quando se utiliza a teoria de apreçamento de ativos positivamente, buscando uma explicação econômica para o porquê dos preços serem o que são.
- Precificação relativa: nesse caso, avalia-se o valor do ativo baseando-se em preços dados por alguns outros ativos. A origem dos preços desses ativos não é levada em consideração.

Dependendo do ativo em questão e do propósito da precificação, pode-se calcular o preço de um ativo através da escolha de quanto do preço será dependente do componente absoluto e quanto do componente relativo.

Na prática, quase nenhum ativo tem seu preço calculado baseado somente em uma das abordagens, por exemplo, o CAPM, embora apresente abordagem absoluta, quando usado, determina o preço do ativo relativo ao mercado ou outro fator de risco, sem questionar como foi determinado o prêmio pelo fator de risco ou os betas.

Resumindo o apreçamento de ativos em duas equações;

$$p_t = E(m_{t+1}, x_{t+1})$$

$$m_{t+1} = f(\text{dados}, \text{parâmetros})$$

Onde:

p_t = preço do ativo,

x_{t+1} = pagamento do ativo,

m_{t+1} = fator de desconto estocástico.

A grande vantagem do método de avaliação pelo desconto é sua simplicidade uma vez que reúne teorias sobre ações, *bonds*, e opções em uma só, olhando para todas elas como se fossem casos especiais da mesma teoria.

2.2.5.1 *Modelo baseado no consumo*

Uma importante questão para o investidor é definir o quanto de sua riqueza deve poupar, deve consumir e qual carteira de ativos manter. Para isso, é importante atender ao equilíbrio entre a perda de utilidade marginal de consumir menos e comprar um pouco mais de ativos e o ganho de utilidade marginal de obter um pouco mais de dividendos sobre ativos no futuro.

Caso os dividendos e o preço dos ativos não satisfaçam essa relação, o investidor deve alterar o ponto de equilíbrio comprando ou vendendo ativos.

Portanto, o preço do ativo deve ser igual ao valor descontado esperado dos dividendos, utilizando-se para isso a utilidade marginal do investidor.

A taxa de juros se relaciona com o crescimento da utilidade marginal esperada e, portanto com a esperança de consumo. Num cenário de elevada taxa de juros real, é mais coerente comprar ativos e deixar para consumir amanhã. A alta de taxa de juros está diretamente associada à expectativa de crescimento de consumo.

Como mencionado anteriormente, o ponto mais relevante e difícil do apreçamento de ativo é a correção de risco dos preços de ativos. Os preços devem ser influenciados pela covariância dos *payoffs* com a utilidade marginal e, portanto pela covariância entre *payoffs* e consumo.

Para Cochrane (2001, p.5), um determinado ativo que apresente resultados ruins, é menos desejável em um cenário econômico de recessão do que em um cenário econômico favorável, isso devido à sensação do investidor de estar pobre e consumindo pouco na recessão contra a sensação de riqueza e mais consumo no cenário favorável. Como resultado, um ativo apresentará pior valor de venda na recessão como reflexo de um desconto pelo risco, risco esse que é função da covariância.

E a maneira de se medir como o individuo se sente é através da utilidade marginal e não através do consumo. Importante frisar que o consumo é baixo quando a utilidade marginal é alta. O consumo também é baixo e a utilidade marginal é alta quando outros ativos do investidor apresentam resultados ruins, assim deve-se verificar que os preços serão baixos para ativos que covariem positivamente com carteiras de mercado.

Dado um *payoff* x_{t+1} em um instante t . Supondo a compra de uma ação hoje, o *payoff* no período seguinte é o preço da ação mais dividendo, ou seja,

$$x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$$

Sendo x_{t+1} uma variável aleatória, portanto o investidor não sabe exatamente quanto ganhará sobre o investimento. No entanto, pode obter a probabilidade de diferentes resultados.

Importante observar que *payoff* x_{t+1} não é lucro ou retorno, é simplesmente o valor do investimento no instante $t+1$.

Chamando de c_t o consumo no instante t , podemos modelar através da função de utilidade, fundamentada no desejo do investidor e nos valores de consumo atual e futuro, que:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})]$$

Para a utilidade $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ temos a idéia fundamental de que o investidor deseja mais consumo ao invés de apostar em informações intermediárias como média e variância dos retornos de uma carteira.

Embora o investidor não saiba qual o nível de consumo ele terá amanhã (riqueza), dado que c_{t+1} é uma variável aleatória, uma função de utilidade crescente reflete o desejo por consumir mais, e o fato de ser côncava mostra o valor de declínio marginal par um aumento de consumo, ou seja, um consumo maior satisfaz menos que o consumo inicial.

Essa característica pode ser traduzida em impaciência e aversão ao risco do investidor, que são conseqüências do risco e do tempo de maturação.

O fator β , também chamado de fator de desconto subjetivo, captura a impaciência.

Assumindo que o investidor pode comprar ou vender livremente o valor que quiser do *payoff* x_{t+1} a um preço p_t . Denominando o nível de consumo original de e e a quantia de ativo escolhido para venda de ξ , queremos determinar o quanto o investidor irá comprar ou vender.

Portanto, o problema é $\max_{\xi} u(c_t) + E_t[\beta u(c_{t+1})]$

Sendo $c_t = e_t - p_t \xi$ e $c_{t+1} = e_{t+1} - x_{t+1} \xi$

Inserindo as restrições na expressão acima e aplicando a CPO teremos,

$$\begin{aligned} -u'(c_t)p_t + E_t[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}] &= 0 \\ E_t[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}] &= u'(c_t)p_t \end{aligned}$$

$$p_t = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1} \right]$$

Que é o modelo básico baseado em consumo. O consumidor compra mais ou menos ativos até atingir essa condição de primeira ordem.

O termo $p_t u'(c_t)$ é a perda em utilidade se o investidor comprar outra unidade de ativo, e $E_t[\beta u'(c_{t+1})x_{t+1}]$ é o aumento em utilidade que o investidor obtém de um *payoff* extra em $t+1$.

Portanto, o equilíbrio entre o ganho marginal e a perda marginal é o que limita se o investidor continua comprando ou vendendo ativos.

Assim, a equação de precificação básica fundamentada em consumo é:

$$\begin{aligned} p &= E(mx) \\ m &= \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \end{aligned}$$

Onde m_{t+1} é o fator de desconto estocástico.

Não havendo incerteza, o fator risco desaparece permanecendo somente o fator tempo, assim pode-se expressar os preços através do valor presente padrão,

$p_t = \frac{1}{R_f} x_{t+1}$, onde R_f é a taxa livre de risco bruta. O termo $\frac{1}{R_f}$ é um fator de

desconto em condição de certeza.

Ativos de risco têm preços inferiores que os ativos equivalentes livres de risco, portanto são freqüentemente precificados utilizando-se um fator de desconto de risco ajustado.

Dado um ativo de risco i e um fator de desconto ajustado $\frac{1}{R}$,

$$p_t^i = \frac{1}{R^i} E(x_{t+1}^i)$$

Portanto, pode-se incorporar toda a correção de risco através de um simples fator de desconto estocástico m_{t+1} . Esse fator também é chamado de taxa marginal de substituição, m_{t+1} é a taxa com a qual o investidor está disposto a substituir o consumo no instante $t+1$ pelo consumo no instante t . Também é conhecida como mudança de medida ou densidade do estado-preço.

2.2.5.2 *Bandas de Good Deal para preços de ativos em mercado incompleto*

Freqüentemente se busca definir o valor de pagamento do fluxo de um ativo de risco baseado no preço de outro ativo ao invés de explorar por completo os modelos econômicos. Entretanto, a impossibilidade de se encontrar uma carteira replicante inviabiliza esse procedimento.

O artigo de Cochrane e Saá-Requejo (2000, p.80) busca encontrar o valor do ativo estabelecendo, através da imposição de restrições econômicas fracas, bandas que assumem que o investidor prefere adquirir ativos com *high Sharpe ratio* (alto SR), isto é, *Good Deal*, com oportunidades de arbitragem.

Uma questão importante em economia financeira é como definir o valor de um *payoff* incerto. Em muitas situações econômicas e financeiras um preço relativo é apropriado. Nesses casos o único interesse é o valor de um *payoff* específico, permitindo então que adotemos o preço de outros ativos sem questionar seus fundamentos econômicos.

O preço de opções é um caso clássico. Neste queremos saber o valor de uma opção dado o preço de uma determinada ação. A teoria de Black-Scholes-Merton (1973) é um grande sucesso nessa abordagem, mesmo que o *payoff* da opção seja muito diferente do *payoff* de uma ação ou *bond*. Mesmo assim, o modelo mostrou como negociações dinâmicas contínuas podem completar o mercado. Portanto, o *payoff* de opções pode ser replicado perfeitamente em negociações contínuas de ações e *bonds*. Devido a essa característica, o método relativo é utilizado em muitas aplicações econômicas e financeiras, como em valor de opções reais em investimentos irreversíveis.

A teoria de apreçamento de arbitragem de Ross (1976) tenta determinar a taxa de retorno esperada de uma carteira “fator”, sem assumir preferências. Mesmo a teoria do *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) é tipicamente aplicada, de certa forma, desde a determinação de retornos esperados de ativos, carteiras, ou projetos de investimento, tomando o retorno esperado de mercado. A abordagem relativa é, apropriadamente, usada para muitas aplicações de teoria de apreçamento de ativos aplicado a finanças corporativas. Por exemplo, a análise dos retornos de seguros para determinar o custo de capital de um projeto específico.

Cochrane e Saá-Requejo (2000, p.80), na busca desenvolver técnica que não utilize o método relativo, para isso desenvolvem as bandas de *Good Deal* para preços de ativos em mercado incompleto, usando um pouco de economia, de conceitos de não-arbitragem e lei de argumento de único preço, como restrição para o leque de valores de *payoff* de risco.

A idéia inicial foi a de desenvolver um trabalho para período único, na tentativa de compreender mais sobre o valor do *focus payoff*, x_{t+1}^c , assumindo o valor P_t de um conjunto de *basis payoffs* ou ativos de *hedging* X_{t+1} .

O fator de desconto ou taxa de crescimento de utilidade marginal m_{t+1} gera um valor de p_t de algum payoff x_{t+1} por:

$$p = E(mx)$$

O valor de *payoff* e o fator de desconto podem ser reais ou nominais. A existência do fator de desconto ou utilidade marginal é equivalente a lei de único preço em que duas maneiras de construção do mesmo *payoff* têm o mesmo valor. Portanto, se o *payoff* foco x^c pode ser perfeitamente replicado através dos *basis payoffs* X do ativo, temos informação suficiente para determinar exatamente seu valor. Quando a replicação não é perfeita, entretanto, a existência de um fator de desconto ou lei de único preço não diz nada sobre o valor do ativo foco, se fazendo necessária mais restrição de fator de desconto.

Quanto mais o fator de desconto for restringido, mais se pode aprender sobre o valor do ativo. O objetivo é que o fator de desconto precifique o conjunto de ativos base, que não seja negativo, e que imponha um limite superior na volatilidade. Portanto, a fronteira inferior de *good-deal* é:

$$\underline{C} = \min_{\{m\}} E(mx^c)$$

Sujeito a: $P = E(mX); m \geq 0; \sigma(m) \leq \frac{h}{R_f}$

Onde:

$\underline{C}$ é a fronteira inferior do good-deal;

m é o fator de desconto;

x^c é o *payoff* foco a ser encontrado, exemplo: $x^c = \max(S_T - K, 0)$ para uma opção de *call*;

P e X são o preço e os *payoffs* dos ativos base (vetor), exemplo: ações e *bonds*;
 h é o limite de volatilidade pré-especificada;
 R_f é a taxa de juros livre de risco;
 E e σ são média e variância condicionais;
 $\bar{C}$ corresponde a fronteira superior.

Importante observar que “valor” é interpretado como quanto um determinado investidor com utilidade marginal crescente m estaria disposto a pagar por uma quantia marginal de *payoff*.

Portanto as restrições impostas são as seguintes:

- $P = E(mX)$, enfatiza a idéia de preço relativo tomada do preço dos ativos base. Os preços desses ativos são utilizados para se definir o fator de desconto, e não o contrário.
- $m \geq 0$, é uma restrição clássica e fraca da utilidade marginal.

A inovação de Cochrane & Saá-Requejo está na restrição de volatilidade,

$$\sigma(m) \leq \frac{h}{R_f}$$

; pretendem que seja similar a restrição fraca da utilidade, uma consideração natural quando a ausência de arbitragem não fornece resposta satisfatória.

Catalão e Yoshino (2006) discutem a questão da restrição da variância para o desconto estocástico e comentam que desde a identificação do *US Equity Premium Puzzle & Low Interest Rate Puzzle*, que consistem no fato de se verificar que o prêmio de risco das ações norte-americanas era superior ao valor que se esperaria baseado em teorias do ciclo econômico e do fato de que a taxa de juros livre de risco desse mercado deveria ser bem menor do que a taxa observada, isso porque na tentativa de se justificar o *US Equity Premium Puzzle*, a função de utilidade adotada foi a CRRA que apontava um coeficiente de aversão ao risco muito alto, acima do sugerido pelas teorias. Nesse artigo, Catalão e Yoshino, baseados no

trabalho de Cochrane e Hansen (1992) que mostraram que o fator de desconto estocástico do *payoff* da ação deve obedecer a uma condição de variância mínima, assim, um fator de desconto estocástico m é válido, para um dado valor médio $E[m]$, pode-se atribuir um desvio-padrão mínimo de modo a gerar uma fronteira de variância mínima no espaço $[E[m], \sigma[m]]$, que é a fronteira de Hansen-Jagannathan para o fator de desconto estocástico.

Gráfico 18 – Fronteiras do preço de opção como função do preço de ação
Fonte: Cochrane & Saá-Requejo (2000, p.84)

2.3 Generalização do índice de Sharpe

Sabemos que o investimento de risco por unidade de tolerância $\alpha_{\gamma,1}$ apresenta pouca variação para γ muito grande. Analogamente, IP_{γ} parece atingir um nível de estabilidade com $\gamma \rightarrow \infty$.

Denotando o valor do investimento de risco ótimo por unidade de tolerância de risco local para grandes valores de aversão ao risco base dada por $\alpha_{+\infty,1}^*$, temos que:

$$\alpha_{+\infty,1}^* = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \alpha_{\gamma,1}^*$$

Esse limite existe e é finito na ausência de arbitragem, e é obtido da maximização da utilidade exponencial negativa com o coeficiente de aversão ao risco absoluto unitário (Cerny 2004, p.80).

$$\alpha_{+\infty,1}^* = \arg \min_{\alpha} E \left[e^{-\alpha X} \right]$$

Denotando IP_{∞} como,

$$IP_{\infty} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} IP_{\gamma} \quad \text{então}$$

$$IP_{\infty} = -\ln E \left[e^{-\alpha_{+\infty,1}^* X} \right].$$

Portanto a carteira ótima de um investidor com utilidade exponencial negativa e aversão ao risco absoluto a é idêntica a carteira de um investidor com utilidade HARA e $\gamma \rightarrow \infty$.

Sabemos que o investimento ótimo para um indivíduo com utilidade quadrática normalizada é $\min_{\alpha} u(\alpha) = \min_{\alpha} E \left[(1 - \alpha X)^2 \right]$. O *MRP* pode ser estendido para a família de funções de utilidade HARA,

$$1 + MPR^2 = (1 - IP_{-1})^{-2}$$

para diferentes valores de γ .

Em seu artigo, Cerny (2004, p.3) enfatiza o fato de o índice de Sharpe não ser uma boa medida de prêmio por risco devido a sua relação com a utilidade quadrática que pune riquezas superiores ao ponto *bliss*. Por esse motivo, para se obter fronteiras de preços significativas baseadas no SR se faz necessário corrigir essa anomalia. Essa correção é feita com o uso da utilidade quadrática truncada, o que nos leva ao SRA (*Arbitrage-Adjusted Sharpe Ratio*). Cerny afirma que o conjunto de *good-deals* de Cochrane & Saá-Requejo é simplesmente o conjunto de excesso de retorno com alto SRA.

Cerny ainda questiona a possibilidade da utilização de outra função de utilidade, e para isso se faz necessário determinar o correspondente índice de Sharpe

generalizado (GSR) e calcular a restrição do fator de desconto estocástico correspondente ao GSR. Baseado em Cochrane & Saá-Requejo, Cerny adota como precificação de equilíbrio a condição:

$$\text{Var}(m) \leq h_A^2$$

Onde m é o desconto estocástico e h_A a fronteira superior de SR_A .

Como restrições para o fator de desconto estocástico de diferentes utilidades, Cerny (2004, p.4) apresenta:

- Utilidade quadrática truncada:

$$1 + h_A^2(\text{base}) \leq E[m^2] \leq 1 + h_A^2$$

- Utilidade exponencial negativa (CARA):

$$\frac{1}{2} h_E^2(\text{base}) \leq E[m \ln m] \leq \frac{1}{2} h_E^2$$

- Utilidade CRRA $0 < \gamma \neq 1$, e utilidade truncada CRRA $\gamma < 0$:

$$\left(1 + h_\gamma^2(\text{base})\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma^2}} \leq E\left[m^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \leq \left(1 + h_\gamma^2\right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma^2}}$$

- Utilidade logarítmica $\gamma = 1$:

$$\ln(1 + h_1^2(\text{base})) \leq -2E[\ln m] \leq (1 + h_1^2)$$

onde $m > 0$ é a mudança de medida, h_A é o índice de Sharpe ajustado para arbitragem, h_E e h_γ são os GSRs gerados para utilidades CARA e CRRA respectivamente. O atributo “base” se refere ao ativo base, isto é, sem ativo foco. Cerny (2004, p.5) deriva as expressões que permitem calcular o GSR para um vetor arbitrário de excesso de retorno X . Para a família CRRA temos:

$$h_\gamma^2(X) = \left(\max_{\lambda} E \left[(1 + \lambda X)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} - 1 \text{ para } 0 < \gamma < 1,$$

$$h_\gamma^2(X) = \left(\min_{\lambda} E \left[(1 + \lambda X)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} - 1 \text{ para } \gamma > 1,$$

$$h_\gamma^2(X) = \left(\min_{\lambda} E \left[\max(1 + \lambda X, 0)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} - 1 \text{ para } \gamma < 0,$$

$$h_{\gamma}^2(X) = e^{\frac{2}{\lambda} \max E[\ln(1+\lambda X)]} - 1 \text{ para } \gamma = 1.$$

Para se chegar a SRA basta calcular h_{-1} em $h_{\gamma}^2(X) = \left(\min_{\lambda} E \left[\max(1+\lambda X, 0)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} - 1$ e para se obter o índice de Sharpe padrão (MPR) basta remover a maximização, isto é, fazer $h_{\gamma}^2(X) = \left(\min_{\lambda} E \left[(1+\lambda X)^{1-\gamma} \right] \right)^{-1} - 1$.

Através da equação 11 da página 53, resultado do desenvolvimento do investimento ótimo para a função de utilidade HARA, Cerny (2004, p. 82) define os mesmos índices anteriores chamando-os de IP_{γ} :

$$IP_{\gamma} = \gamma \left(\left(\min_{\alpha} E \left[(1+\alpha X)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right) \text{ para } \gamma > 1,$$

$$IP_{\gamma} = \gamma \left(\left(\max_{\alpha} E \left[(1+\alpha X)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right) \text{ para } 0 < \gamma < 1,$$

$$IP_{\gamma} = \exp \left(\max_{\alpha} E \left[\ln(1+\alpha X)^{1-\gamma} \right] \right) \text{ para } \gamma = 1,$$

$$IP_{\gamma} = \gamma \left(\left(\min_{\alpha} E \left[(1+\alpha X)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right) \text{ para } \gamma < 0,$$

$$IP_{\gamma A} = \gamma \left(\left(\min_{\alpha} E \left[\max(1+\alpha X, 0)^{1-\gamma} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} - 1 \right) \text{ para } \gamma < 0.$$

De onde percebemos que $h_{\gamma}(X)$ é equivalente a IP_{γ} . Portanto, utilizando métodos diferentes, otimização do IP para a família HARA e restrição de volatilidade para o fator de desconto estocástico e família CRRA, Cerny chega aos mesmos resultados de otimização dos índices.

3 METODOLOGIA

3.1 Método de Pesquisa

A pesquisa adota inicialmente uma revisão teórica dos índices de Sharpe e suas variantes, do GSR e do potencial de investimento, avaliando-os com relação ao horizonte de investimento. Fundamentado na revisão teórica, aplicamos os índices GSR e SR^c às séries de excesso de log-retorno de ativos de risco ações Americanas e Brasileiras e índices para o período de Janeiro de 2000 a Março de 2008. Essas séries foram obtidas de preços mensais ajustados obtidos através da ferramenta Economática. Foram adotadas como taxa livre de risco do mercado Brasileiro a taxa DI e para o mercado Americano o *T-bill*. O GSR foi calculado para diferentes funções de utilidade.

Através dos índices calculados foram feitas as ordenações decrescentes dos ativos e a avaliação das correlações de Spearman entre o SR^c e os diferentes GSR s buscando confrontar a teoria apresentada com o comportamento prático dos índices. Complementando essa análise foram comparadas as correlações entre os índices e o grau de normalidade das séries de excesso de log-retorno obtido através do teste de Kolmogorov-Smirnov.

3.2 Qualidade dos Dados

Para a avaliação dos índices de desempenho, alguns cuidados foram tomados com relação à escolha das séries históricas dos retornos. Ativos como ações podem ser considerados como ativos de risco não administrados, no entanto, fundos de investimentos possuem administração profissional que tem como objetivo vencer o *benchmark*. Como sabemos os fundos podem ser administrados de maneira ativa ou passiva, na ativa a composição do fundo é trocada sempre que o administrador

considerar necessário, mas mesmo no passivo, embora o tipo de ativo que compõe o fundo não seja substituído, existe a possibilidade de alteração em suas participações na carteira, alterando de alguma forma a composição final. Devido a essa característica, escolheu-se tratar dados de ativos de risco como ações e índices por apresentarem um cenário de condições mais estáveis.

Outro cuidado tomado foi a de se utilizar séries de ciclos mensais por possibilitar a suposição de que essas séries apresentam condição de independência. Com isso pretendeu-se ter séries desmemoriadas.

Os índices $SR^c(T)$ e GSR foram calculados computacionalmente para o logaritmo dos preços. Para o GSR os coeficientes de aversão ao risco adotados foram $\gamma = -1, 1, 2, 5$ e 15 cobrindo, portanto as utilidades quadrática ajustada, logarítmica e exponencial.

Utilizamos durante o trabalho os seguintes softwares: Office 2007, EndNote 9, Matlab 7.0.1, Mathematica 5.2, MathType 5 e 6, Eviews 5.0 e SPSS 13.0.

4 DISCUSSÃO

4.1 Hipóteses

Devido ao fato de o índice de Sharpe apresentar uma grande aproximação à função de utilidade quadrática e de essa função apresentar comportamento contraditório quando a riqueza supera o valor de utilidade máxima penalizando riquezas elevadas, o SR pode não permitir que o investidor otimize seu investimento, fato esse mostrado através do SRA que melhora os resultados truncando a função de utilidade quadrática em seu valor máximo. O GSR, por incorporar outras funções de utilidade, possibilita uma melhor avaliação do desempenho do ativo de risco permitindo a utilização de todo o potencial do investimento e conseqüentemente é capaz de otimizar a riqueza do investidor. A hipótese testada é a de que o GSR quando associado à utilidade quadrática apresenta comportamento muito próximo ao SR^c , o que corrobora a premissa de que o SR tem fortes ligações com essa utilidade, já o GSR com utilidade logarítmica tem pouca correlação com o SR^c , o que faz desse índice uma boa medida de desempenho de ativos de risco, pois corrige as distorções apresentadas pelo SR^c .

4.2 Interpretação dos Índices

O índice de Sharpe padrão é um índice que relaciona o prêmio pelo risco de um ativo. Para Cerny esse índice mede o “preço de mercado do risco (*market price of risk – MPR*)”. O índice de Sharpe apresenta os problemas inerentes à função de utilidade quadrática, entre eles características de decisor conhecido como “bomba de dinheiro (*pump Money*)”, que tem comportamento de mercado não racional, isto é, o indivíduo com essa utilidade adquire ativo por um valor maior do que o valor que adota para a venda desse mesmo ativo. Outro problema é o fato de a função apresentar um ponto de máximo, ou seja, a partir de uma riqueza que corresponda

ao ponto de máximo da utilidade, ela passa a ser decrescente implicando em afirmar que uma riqueza maior traz ao indivíduo menor satisfação, o que é contraditório com as premissas da teoria da utilidade. Em ambiente retrospectivo, essa característica traz limitação ao índice na classificação de ativos de risco com assimetria positiva.

Uma forma de amenizar a distorção gerada pela utilidade quadrática é truncar a função em seu ponto de máximo. O desenvolvimento desse método é apresentado por Cerny recebendo o nome de índice de Sharpe ajustado (SRA), que na prática significa identificar qual é a riqueza que corresponde ao máximo da utilidade e tratar o excedente da riqueza com o mesmo nível de utilidade máxima encontrada. O SRA restringe os efeitos negativos da utilidade quadrática reduzindo o problema de avaliação de séries de ativos com forte assimetria positiva.

Quanto a aspectos temporais, os índices foram analisados sob dois aspectos diferentes, comportamento retrospectivo através de séries realizadas, e o comportamento prospectivo, através de séries a ocorrer.

O índice de Sharpe prospectivo foi estudado para a condição da série de retornos do ativo de risco obedecendo a um MBG do preço e do logaritmo do preço. Para o processo estocástico do preço, definiu-se o $SR^d(T)$, índice de Sharpe de composição discreta, que é calculado através de X_T^d que é a variável de estado para composição discreta definida como taxa de retorno composta discretamente

$X_T^d \equiv \left(\frac{P_T}{P_0} - \frac{B_T}{B_0} \right)$. O $SR^d(T)$ apresentou comportamento financeiramente incoerente

uma vez que apresenta grande sensibilidade ao log-retorno para pequenos horizontes de investimento, atribuindo a esse parâmetro elevado peso no componente de risco do índice, mas a partir de um horizonte relativamente curto, em nossa simulação um pouco maior que seis anos, o índice inverte sua posição com relação às incertezas inerentes a um elevado horizonte de investimento, indicando um baixo valor para o prêmio pelo risco.

Já quando adotamos o logaritmo do preço para o processo estocástico, encontramos outra derivação do índice de Sharpe denominado $SR^c(T)$, índice de

Sharpe uniperiódico de composição contínua, definido através da variável de estado para composição contínua X_T^c , definida como taxa de retorno composta continuamente $X_T^c \equiv \left(\ln \frac{P_T}{P_0} - \ln \frac{B_T}{B_0} \right)$. Essa variante do índice de Sharpe se comporta de forma financeiramente coerente, isto é, o índice que indica o prêmio pelo risco cresce para horizontes de investimento maiores indicando que a incerteza futura está incorporada no prêmio.

Pensando em termos de investimento chegamos à afirmação feita por Cerny (2004, p.80) de que um investidor HARA com $\gamma=1$, utilidade logarítmica, é muito mais agressivo que investidores com $\gamma>1$, utilidade exponencial, quando os retornos são fortemente assimétricos para valores altos. A grande mudança na decisão da carteira ocorre em torno de $\gamma=1$, enquanto para $\gamma>15$ todas as decisões de carteiras são virtualmente idênticas. A análise de sensibilidade mostrou a pouca influência sobre o indicador da variação dos coeficientes de aversão ao risco das utilidades exponenciais. A capacidade do índice GSR de responder a assimetria positiva dos retornos é um grande diferencial com relação ao SR padrão que é incapaz de assimilar tal informação.

Em termo retrospectivo, como mostrado na fundamentação teórica, o índice potencial de investimento apresenta uma indicação de valor da riqueza do indivíduo a ser investida em determinado ativo de risco maior do que o SR, sugerindo a possibilidade de que o índice possa explorar melhor o potencial do investimento, o que não ocorre com o SR devido à utilidade quadrática, subestimando o mesmo investimento.

Nas tabelas 6 e 7 foram resumidos os resultados obtidos das análises qualitativas e quantitativas, respectivamente, dos índices em âmbito prospectivo.

Os parâmetros utilizados foram:

- $\nu = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ o log-retorno,
- r_f taxa livre de risco composta continuamente,

- α é dado pela relação $\nu + \frac{\sigma^2}{2} - r_f$,
- β é dado pela relação $e^{\sigma^2 T} - 1$, e
- MRP é calculado como $\frac{\mu - r_f}{\sigma}$.

Tabela 6 – Análise qualitativa dos índices $SR^d(T)$ e $SR^c(T)$

Índice	Análise qualitativa	Restrição	Comentários
$SR^d(T)$	$\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \nu} > 0$	sem restrição	$SR^d(T)$ cresce com o aumento de log-retorno.
	$\frac{\partial SR^d(T)}{\partial \sigma} < 0$	$\exp(-\sigma^2 T) + \exp(\alpha T) > 2$	$SR^d(T)$ decresce com o aumento de volatilidade.
	$\frac{SR^d(T)}{\partial T} > 0$	$(2\alpha + \sigma^2) > \exp(\sigma^2 T(\alpha\sigma^2 T - 1)) + \exp(T(2\alpha^3 T - \sigma^2))$	$SR^d(T)$ cresce para $T < T^*$, e diminui para $T > T^*$.
$SR^c(T)$	$\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \nu} > 0$	sem restrição	$SR^c(T)$ cresce com o aumento de log-retorno.
	$\frac{\partial SR^c(T)}{\partial \sigma} < 0$	$\nu > r_f$	$SR^c(T)$ decresce com o aumento de volatilidade dada a restrição.
	$\frac{SR^c(T)}{\partial T} > 0$	$\nu > r_f$	$SR^c(T)$ cresce com o aumento de T dada a restrição.

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 7 – Análise quantitativa dos índices $SR^d(T)$ e $SR^c(T)$

Eta	Comentários
$\eta_{\nu}^{SR^d}(T) = \frac{\nu T}{e^{\alpha T} - 1}$	<i>Elasticidade</i> < 1 . Índice muito sensível as variações de pequenos log-retornos com redução da sensibilidade para valores maiores de log-retorno.
$\eta_{\sigma}^{SR^d}(T) = \frac{\sigma^2 T}{\beta} \frac{\left(1 - 2e^{\sigma^2 T} + e^{(\alpha + \sigma^2)T}\right)}{(-1 + e^{\alpha T})}$	<i>Elasticidade</i> > 1 . Índice pouco sensível a variação de volatilidade para horizontes pequenos. Sensibilidade aumenta para horizonte maior.
$\eta_T^{SR^d}(T) = \frac{\nu \left(\sigma^2 \left(e^{\left(\nu + \frac{3\sigma^2}{2} \right) T} + e^{(\sigma^2 + r_f)T} \right) + 2\alpha \left(e^{(\sigma^2 + r_f)T} - e^{r_f T} \right) \right)}{2\beta e^{r_f T} (1 + e^{\alpha T})}$	Índice muito sensível ao horizonte de investimento para $T < T^*$. Para $T > T^*$ índice pouco sensível ao horizonte.
$\eta_{\nu}^{SR^c}(T) = \frac{2\nu}{2\alpha - \sigma^2}$	Descontinuidade para excesso de retorno nulo. Para excesso positivo, índice inicia com grande sensibilidade a variação do log-retorno reduzindo sua sensibilidade para log-retornos maiores.
$\eta_T^{SR^c}(T) = \frac{1}{2}$	Rígida. Sensibilidade do índice a variação de T . Variação unitária de T impõe o dobro da variação no índice.
$\eta_{\sigma}^{SR^c}(T) = -1$	Elasticidade unitária negativa. Variação proporcional da volatilidade gera a mesma variação proporcional negativa no índice.

Fonte: Elaborado pelo autor

O índice de Sharpe generalizado (GSR) retrospectivo surge do trabalho de Cochrane e Saá-Requejo (2000) que através da medida de prêmio pelo risco de um investimento, SR, estabelecem as fronteiras de *no good deal* para mercados

incompletos. Como mencionamos anteriormente, o SR^c , por se basear somente na média e desvio-padrão, é incapaz de prover uma classificação satisfatória de ativos de risco com distribuição não normal. Em seu trabalho, Hodges (1998) desenvolve o GSR prospectivo para uma função de utilidade exponencial negativa e com a premissa de que os retornos obedecem um MBG, no entanto esse desenvolvimento também apresenta limitações para outras utilidades e para retornos com distribuição diferente da distribuição normal. Cochrane, influenciado pelos trabalhos de Hansen e Jagannathan (1990), apresenta derivação da fronteira de variância mínima para o fator de desconto estocástico na tentativa de explicar questões de *US Equity Premium Puzzle & Low Interest Rate Puzzle*. A partir dessa restrição, Cerny desenvolve os índices GSR para diferentes funções de utilidade, mas agora no âmbito retrospectivo e para mercado completo.

Iniciamos, portanto a comparação dos índices IP e GSR retrospectivos, pois possibilitam a comparação em mesma condição de mercado adotando as mesmas funções de utilidade, o que garantiria consistência nos resultados. Entretanto, para a família HARA, os índices são semelhantes, portanto temos um único índice de desempenho de ativos de risco. Sendo assim, testamos o GSR da família HARA para diferentes coeficientes de aversão ao risco e comparamos com o SR^c avaliando as correlações entre eles.

Usamos para a comparação desses índices, séries dos seguintes ativos de risco: ações e índices. Utilizamos séries mensais de log-retorno, uma vez que queríamos garantir NID, e adotamos o período de janeiro de 2000 a março de 2008. Esse período foi escolhido para que tivéssemos um bom número de elementos, garantindo consistência nos resultados, e também devido ao fato de ser um período de razoável estabilidade econômica brasileira e mundial, o que nos permite inferir a condição *ceteris paribus* para fatores macroeconômicos. Outros cuidados foram tomados como adotar valores ajustados do preço das ações.

As análises a seguir adotaram o mesmo horizonte de investimento com o valor de $T=1$. Os índices de desempenho de ativos de risco GSR e SR^c foram testados para ações e índices.

Os resultados apresentados na tabela abaixo correspondem ao cálculo dos índices para diferentes coeficientes de aversão ao risco de ações americanas negociadas na NYSE e NASDAQ.

Tabela 8 – Análise de ações americanas: preço mensal ajustado (jan/2000 – mar/2008)

	SR^c	GSR(-1)	GSR(1)	GSR(2)	GSR(5)	GSR(15)
Ford	-0,2431	1,0294	0,3213	0,1914	0,2422	0,2430
Citigroup	-0,2319	1,0268	0,2480	0,1874	0,2360	0,2363
GE	-0,2168	1,0235	0,2171	0,1755	0,2208	0,2210
DuPont	-0,2013	1,0203	0,2056	0,1644	0,2060	0,2058
Dell	-0,1756	1,0154	0,3446	0,1410	0,1774	0,1777
Cisco	-0,1681	1,0142	0,2531	0,1396	0,1743	0,1739
Msoft	-0,1630	1,0133	0,2492	0,1316	0,1652	0,1654
Intel	-0,1567	1,0123	0,1833	0,1320	0,1642	0,1637
Merrill	-0,1386	1,0097	0,1424	0,1136	0,1418	0,1416
Alcoa	-0,1201	1,0073	0,1223	0,0977	0,1221	0,1220
W Mutual	-0,1160	1,0068	0,4665	0,0943	0,1180	0,1180
BK America	-0,0813	1,0033	0,0828	0,0661	0,0826	0,0825
Boeing	-0,0751	1,0028	0,0767	0,0619	0,0771	0,0769
Cape Fear Bank	-0,0696	1,0024	0,1366	0,0564	0,0704	0,0704
Cheesecake Factory	-0,0683	1,0024	0,1424	0,0553	0,0691	0,0691
Micro Systems	-0,0333	1,0006	0,1013	0,0271	0,0338	0,0338
Apple	0,0263	1,0003	0,4389	0,0209	0,0262	0,0262
Diodes Incorporated	0,0158	1,0001	0,3771	0,0127	0,0159	0,0159
BE Aerospace	0,0052	1,0000	0,1867	0,0041	0,0052	0,0000

Fonte: Elaborado pelo autor

Ordenando-se os ativos, do maior para o menor, pelos diferentes índices obtivemos os resultados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 9 – Ordenação das ações americanas

<i>SR^c</i>	GSR (-1)	GSR (1)	GSR (2)	GSR (5) e (15)
Apple	Ford	W Mutual	Ford	Ford
Diodes Incorporated	Citigroup	Apple	Citigroup	Citigroup
BE Aerospace	GE	Diodes Incorporated	GE	GE
Micro Systems	DuPont	Dell	DuPont	DuPont
Cheesecake Factory	Dell	Ford	Dell	Dell
Cape Fear Bank	Cisco	Cisco	Cisco	Cisco
Boeing	Msoft	Msoft	Intel	Msoft
BK America	Intel	Citigroup	Msoft	Intel
W Mutual	Merrill	GE	Merrill	Merrill
Alcoa	Alcoa	DuPont	Alcoa	Alcoa
Merrill	W Mutual	BE Aerospace	W Mutual	W Mutual
Intel	BK America	Intel	BK America	BK America
Msoft	Boeing	Merrill	Boeing	Boeing
Cisco	Cheesecake Factory	Cheesecake Factory	Cape Fear Bank	Cape Fear Bank
Dell	Cape Fear Bank	Cape Fear Bank	Cheesecake Factory	Cheesecake Factory
DuPont	Micro Systems	Alcoa	Micro Systems	Micro Systems
GE	Apple	Micro Systems	Apple	Apple
Citigroup	Diodes Incorporated	BK America	Diodes Incorporated	Diodes Incorporated
Ford	BE Aerospace	Boeing	BE Aerospace	BE Aerospace

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados apresentados na tabela abaixo se referem aos cálculos dos índices para ações negociadas na BOVESPA.

Tabela 10 – Análise de ações brasileiras

	SR^c	GSR(-1)	GSR(1)	GSR(2)	GSR(5)	GSR(15)
VCP PN	-0,3581	1,0628	0,3561	0,2889	0,3676	0,3685
Aracruz PNB	-0,2885	1,0412	0,2944	0,2372	0,2989	0,2989
Sadia	0,2499	1,0313	0,2643	0,2029	0,2554	0,2555
CSN ON	0,2286	1,0261	0,3778	0,1803	0,2279	0,2285
Vale ON	0,1945	1,0189	0,2121	0,1572	0,1974	0,1975
Vale PNA	0,1804	1,0163	0,1901	0,1472	0,1843	0,1842
Bradesco	0,1595	1,0128	0,4004	0,1463	0,1799	0,1786
Aracruz ON	0,1597	1,0128	0,1835	0,1309	0,1637	0,1636
Itaú S/A	0,1603	1,0130	0,1585	0,1278	0,1607	0,1610
Petrobras ON	0,1562	1,0123	0,1652	0,1275	0,1595	0,1593
Petrobras PN	0,1220	1,0075	0,1407	0,0988	0,1236	0,1236
Gerdau	-0,0587	1,0017	0,4744	0,0490	0,0608	0,0606
Vale Rio Doce	0,0423	1,0009	0,3807	0,0333	0,0418	0,0419

Fonte: Elaborado pelo autor

Ordenando-se as ações pelos diferentes índices obtivemos os seguintes resultado:

Tabela 11 – Ordenação das ações brasileiras

SR^c	Gama (-1)	Gama (1)	Gama (2)	Gama (5) e (15)
Sadia	VCP PN	Gerdau	VCP PN	VCP PN
CSN ON	Aracruz PNB	Bradesco	Aracruz PNB	Aracruz PNB
Vale ON	Sadia	Vale Rio Doce	Sadia	Sadia
Vale PNA	CSN ON	CSN ON	CSN ON	CSN ON
Itaú S/A	Vale ON	VCP PN	Vale ON	Vale ON
Aracruz ON	Vale PNA	Aracruz PNB	Vale PNA	Vale PNA
Bradesco	Itaú S/A	Sadia	Bradesco	Bradesco
Petrobras ON	Aracruz ON	Vale ON	Aracruz ON	Aracruz ON
Petrobras PN	Bradesco	Vale PNA	Itaú S/A	Itaú S/A
Vale Rio Doce	Petrobras ON	Aracruz ON	Petrobras ON	Petrobras ON
Gerdau	Petrobras PN	Petrobras ON	Petrobras PN	Petrobras PN
Aracruz PNB	Gerdau	Itaú S/A	Gerdau	Gerdau
VCP PN	Vale Rio Doce	Petrobras PN	Vale Rio Doce	Vale Rio Doce

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados apresentados na tabela abaixo se referem aos índices.

Tabela 12 – Análise de índices

	SR^c	GSR(-1)	GSR(1)	GSR(2)	GSR(5)	GSR(15)
IBRX-50	-4,5683	1,1400	0,5108	0,7668	1,4667	5,2747
S&P500	-0,3441	1,0581	0,3606	0,2908	0,3668	0,3662
DJI	-0,3005	1,0446	0,3111	0,2509	0,3160	0,3157
Nasdaq	-0,2353	1,0276	0,2462	0,1969	0,2464	0,2459
NYSE C	0,0697	1,0025	0,0695	0,0558	0,0698	0,0699
Ibovespa	0,0037	1,0000	0,0037	0,0030	0,0037	0,0037

Fonte: Elaborado pelo autor

Ordenando-os temos:

Tabela 13 – Ordenação dos índices

SR^c	Gama (-1)	Gama (1)	Gama (2)	Gama (5, 15)
NYSE C	IBRX-50	IBRX-50	IBRX-50	IBRX-50
Ibovespa	S&P500	S&P500	S&P500	S&P500
Nasdaq	DJI	DJI	DJI	DJI
DJI	Nasdaq	Nasdaq	Nasdaq	Nasdaq
S&P500	NYSE C	NYSE C	NYSE C	NYSE C
IBRX-50	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa

Fonte: Elaborado pelo autor

Tanto no mercado brasileiro quanto no americano de risco o SR^c apresentou valores negativos, o que levanta a questão da interpretação de um índice que mede o preço do risco. Quando positivo entendemos que existe um prêmio pelo risco que se corre em um ativo de risco, no entanto quando negativo o conceito fica confuso, deixa-se de ter um prêmio pelo risco para uma penalidade pelo risco. Como inicialmente queríamos entender a correlação do índice GSR com o SR^c , tivemos que isolar somente os resultados positivos. As correlações obtidas foram às seguintes:

Tabela 14 – Correlação entre GSR e SR^c

	Correlação de Spearman
GSR(-1)	0,991
GSR(1)	0,643
GSR(2)	0,964
GSR(5)	0,964
GSR(15)	0,964

Fonte: Elaborado pelo autor

Como podemos perceber, o GSR para utilidade quadrática apresentou a maior correlação com o SR^c . As utilidades exponenciais, embora menores, também apresentaram elevada correlação, e essa correlação cresce com o aumento do

coeficiente de aversão ao risco, já na correlação de Spearman as utilidades exponenciais não apresentaram variação com a alteração do coeficiente de aversão ao risco. A utilidade logarítmica, que corresponde ao investidor mais agressivo, o que aceita maior risco, foi quem apresentou a menor correlação com o SR^c .

Com relação às ordenações obtidas, os indivíduos com utilidade exponenciais apresentaram ordenações semelhantes, com pequenas alterações para coeficientes de aversão ao risco igual a 2, isso porque indivíduos com esse nível de aversão corre mais risco que os indivíduos com valores maiores de aversão, aceitando ativos que os outros rejeitam. Valores maiores de aversão não geraram alteração na ordenação dos ativos, o que era de se esperar, pois a análise de sensibilidade mostrou que os coeficientes de aversão ao risco das utilidades exponenciais têm pouca influência sobre o indicador. Indivíduos com utilidade quadrática apresentam comportamento muito semelhante aos indivíduos com utilidade exponencial, apresentando pouca diferença em sua ordenação, já o indivíduo de utilidade logarítmica apresentou ordenação completamente diferente, o que é de se esperar, pois como já mencionado, em termos de investimento um investidor HARA com utilidade logarítmica é muito mais agressivo que investidores utilidade exponencial, quando os retornos são fortemente assimétricos para valores altos. A ordenação pelo MPR ficou prejudicada, pois boa parte dos ativos resultou em valores negativos para esse índice.

Testamos a normalidade da distribuição dos retornos a fim de identificar o comportamento dos índices para distribuições não normais. Para isso utilizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov para a hipótese de normalidade, e os resultados obtidos foram os seguintes:

Tabela 15 – Resultados do teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov

Ações brasileiras	P-value	Amostra
VCP PN	0,06	62
Aracruz PNB	0,06	62
Sadia	0,08	62
CSN ON	0,06	62
Vale ON	0,06	62
Vale PNA	0,06	62
Bradesco	0,30	62
Aracruz ON	0,07	62
Itaú S/A	0,08	62
Petrobras ON	0,06	62
Petrobras PN	0,06	62
Gerdau	0,17	62
Vale Rio Doce	0,16	62

Índices	P-value	Amostra
IBRX-50	0,07	98
S&P500	0,08	98
DJI	0,06	98
Nasdaq	0,12	98
NYSE C	0,07	98
Ibovespa	0,06	98

Ações americanas	P-value	Amostra
Ford	0,05	98
Citigroup	0,08	98
GE	0,09	98
DuPont	0,08	98
Dell	0,11	98
Cisco	0,13	98
Msoft	0,12	98
Intel	0,14	98
Merrill	0,05	98
Alcoa	0,05	98
W Mutual	0,16	98
BK America	0,08	98
Boeing	0,07	98
Cape Fear Bank	0,10	98
Cheesecake Factory	0,10	98
Micro Systems	0,13	98
Apple	0,10	98
Diodes Incorporated	0,10	98
BE Aerospace	0,13	98

Fonte: Elaborado pelo autor

Como o *p-value* de todos os ativos foi superior a 0,05, a hipótese de normalidade não foi rejeitada para nenhum deles.

As correlações das normalidades das distribuições com os índices foram os seguinte:

Tabela 16 – Correlações de Spearman entre os p-values do teste Kolmogorov-Smirnov e os índices de desempenho

	SR^c	GSR(-1)	GSR(1)	GSR(2)	GSR(5)	GSR(15)
Correlação	0,025	-0,274	-0,026	-0,271	-0,272	-0,272

Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados mostram que os índices SR^c e $GSR(1)$ são pouco correlacionados com a normalidade da distribuição dos log-retornos, i.e., são menos sensíveis a condição de não normalidade da distribuições, já os demais GSRs, referentes as utilidades quadráticas e exponenciais, apresentaram correlação negativa com o p-value do teste de normalidade das distribuições, i.e., são sensíveis a não normalidade das distribuições dos log-retornos mensais.

Esse resultado não é o esperado, pois o $GSR(-1)$ que é equivalente ao SR^c , deveria ter o mesmo comportamento do SR^c . No entanto, espera-se que o índice de desempenho de ativos de risco GSR seja sensível a distribuições de log-retorno assimétricas, o que poderia explicar o comportamento encontrado em $GSR(-1)$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Sobre os resultados alcançados

O objetivo principal desse trabalho foi analisar o comportamento dos índices de Sharpe generalizado e do SR^c . Essa tarefa foi realizada através de vasta revisão da literatura e artigos publicados sobre o assunto.

Foi dada especial atenção as análises qualitativas e de sensibilidade desses índices frente aos diferentes parâmetros dos quais são compostos. Ficou claro o problema apresentado pelo índice de Sharpe uniperiódico de composição discreta para diferentes horizontes de investimento.

O índice GSR se mostrou melhor quanto à indicação de potencial do investimento em mercado incompleto. Por utilizar o EC, incorpora informação de diferentes funções de utilidade, amenizando o problema gerado pela utilidade quadrática, entre eles, não apresenta distorção de classificação de ativos de risco com retornos com assimetria para valores altos.

O GSR foi utilizado como correção do SR para outras funções de utilidade a fim de podermos comparar, de maneira consistente, os índices estudados.

O trabalho foi complementado pelas simulações dos índices SR^c e GSR retrospectivos para séries dos ativos de risco ações e índices demonstrando que apresentam alta correlação na leitura das séries de log-retorno desses ativos de risco. Constatou-se também menor correlação quando se associa ao índices GSR a utilidade logarítmica.

5.2 Limitações e sugestões de pesquisa

No estudo dos índices IP, GSR e SR^c ficaram evidenciadas as limitações do SR^c , tanto no âmbito retrospectivo quanto prospectivo. Os estudos no âmbito retrospectivo levou-nos a unificação dos índices IP e GSR, mostrando que são índices equivalentes, embora tenham origens diferentes. As simulações desses índices mostraram obtidos por premissas distintas. As análises estatísticas desses índices mostraram comportamentos diferentes do GSR em relação aos do SR^c , coerentes com a teoria.

O índice de desempenho de Michael Stutzer baseado na teoria de *Large Deviations* pode ser incluído na comparação em estudos futuros.

Estudos mais aprofundados das séries e a adoção de séries de outros ativos e períodos específicos, visando entender melhor suas distribuições, podem revelar novas associações e comportamentos desses índices, permitindo a especificação da utilização adequada de cada um deles.

6 REFERÊNCIAS

Bao, Y. and A. Ullah (2006). Moments of the estimated Sharpe ratio when the observations are not IID. *International Review of Economics and Finance* (3): 49-56.

Bekman, O. R. and P. L. O. C. Neto (2002). *Análise Estatística da Decisão*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda.

Broadie, M. and J. B. Detemple (2004). Option Pricing: Valuation Models and Applications. *Management Science* 50(9): 1145-1177.

Catalão, A. B. and J. A. Yoshino (2006). Fator de desconto estocástico no mercado acionário brasileiro. *Estudos Econômicos*, 36(3).

Cerný, A. (2004). *Mathematical Techniques in Finance - Tools for Incomplete Markets*. Princeton, Princeton University Press.

Cerný, A. (2004). Generalised Sharpe Ratios and Assets Pricing in Incomplete Markets. *Tanaka Business School*, Imperial College London.

Cerný, A. and S. D. Hodges (2000). The Theory of Good-Deal Pricing in Financial Markets. *1st World Congress of Bachelier Finance Society*.

Cochrane, J. H. and J. Saá-Requejo (2000). "Beyond Arbitrage: Good-Deal Asset Price Bounds in Incomplete Markets." *The Journal of Political Economy*, Vol. 108(No.1): pp. 79-119.

Dias, P. (2007). Quer ser rico como ele? *Revista Exame*: 138-139.

Dowd, K. (1999). A Value at Risk Approach to Risk-Return Analysis. *Journal of Portfolio Management*, 25(4): 60-7.

Edwin J. Elton and M. J. Gruber (1981). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.

Friedman, M. and L. J. Savage (1952). The Expected - Utility Hypothesis and the Measurability of Utility. *The Journal of Political Economy*, 60(6): 463-474.

Goetzmann, W., J. Ingersoll, et al. (2000). *Sharpening Sharpe Ratios*. Artigo em preparação.

Gollier, C. (1999). *The Economics of Risk and Time*, University of Toulouse.

Grinold, R. C. (1999). Mean-Variance and Scenario-Based Approaches to Portfolio Selection. *Journal of Portfolio Management* 25(2): 10.

Hansen, L. P. and R. Jagannathan (1990). Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies. *National Bureau of Economic Research*(Nº 89).

Height, G. T. and S. O. Morrel (1997). *The analysis of portfolio management performance*, MacGraw - Hill.

Hodges, S. D. (1998). A Generalization of the Sharpe Ratio and its Applications to Valuation Bounds and Risk Measures, FORC, University of Warwick: 18.

Hull, J., P. G. Moore, et al. (1973). Utility and its Measurement. *Journal of the Royal Statistical Society* 136(2): 226-247.

Jobson, J. D. and B. M. Korkie (1981). Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures. *The Journal of Finance* 36(4): 889-908.

Jonathan E. Ingersoll, J. (1987). *Theory of financial decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers, Inc.

Klebaner, F. C. (2005). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. London, Imperial College Press.

Knight, J. and S. Satchell (2002). Performance Measurement in Finance, *Butterworth - Heinemann Finance*.

Knight, J. and S. Satchell (2005). A Re-Examination of Sharpe's Ratio for Log-Normal Prices. *Applied Mathematical Finance* 12(1): 87-100.

Lin, M.-C. and P.-H. Chou (2003). The Pitfall of Using Sharpe Ratio. *Finance Letters*(1): 84-89.

Lo, A. W. (2002). The statistics of Sharpe ratios. *Financial Analysts Journal* 58(4): 36.

Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. New York, Oxford University Press, Inc.

Machina, M. J. (1982). Expected Utility Analysis without the Independence Axiom. *Econometrica* Vol. 50(No. 2): 277-324.

Merton, R. C. (1990). *Continuous - Time finance*, Blackwell Publishing.

Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific.

Miller, R. E. and A. K. Gehr (1978). Sample Size Bias and Sharpe's Performance Measure: A Note. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13(5): 943-946.

Oda, A. L. (2006). *Desempenho de Fundos de Ações*. São Paulo, Saint Paul Editora Ltda.

Pestana, D. D. and S. F. Velosa (2006). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Fundação Calouste Gulbenkian.

Securato, J. R. (2007). *Decisões Financeiras em Condições de Risco*. São Paulo, Saint Paul Editora Ltda.

Sharpe, W. F., G. J. Alexander, et al. (1999). *Investments*. New Jersey, Prentice Hall, Inc.

Siqueira, J. O. (1999). *Determinação Entrópica do Preço Racional da Opção Européia Simples Ordinária sobre Ação e Bond: uma Aplicação da Teoria da Informação em Finanças em Condição de Incerteza*. Tese de doutorado, PPGA-FEA. São Paulo, Universidade de São Paulo.

Wilmott, P. (2003). *Paul Wilmott on Quantitative finance*, John Wiley & Sons, Ltd.

7 APÊNDICE

7.1 Apêndice I – Apêndice de Provas

7.1.1 Prova 4 – Investimento ótimo para utilidade HARA

Definindo V_{safe} como a riqueza livre de risco do final do período, $V_{safe} \equiv R_f V_0 + y$.

Como vimos, a riqueza terminal do investidor é dada por:

$$V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} V_0 \hat{R} + (1 - \tilde{\alpha}) V_0 R_f + y$$

$$V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} V_0 (\hat{R} - R_f) + V_{safe}$$

Chamando o excedente de retorno de X ,

$$X \equiv \hat{R} - R_f$$

Substituindo X na expressão $V(\tilde{\alpha})$ teremos,

$$V(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} V_0 X + V_{safe}$$

$$V(\tilde{\alpha}) = V_{safe} \left(1 + \frac{\tilde{\alpha} V_0 X}{V_{safe}} \right)$$

fazendo $\frac{\tilde{\alpha} V_0}{V_{safe}} = \alpha$, que pode ser interpretado como a parcela investida no ativo de

risco relativamente à riqueza livre de risco V_{safe} , podemos, através da definição de chegar a seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{\tilde{\alpha} V_0}{V_{safe}} = \frac{\tilde{\alpha} V_0}{R_f V_0 + y}$$

Portanto, a riqueza terminal do investidor pode ser dada por:

Equação 22 – Riqueza terminal do investidor

$$V(\alpha) = V_{safe} (1 + \alpha X)$$

como a utilidade HARA é dada por $U_{\gamma, \bar{V}}(V(\alpha)) = \frac{(\bar{V} + V(\alpha))^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, onde γ é o índice de aversão ao risco base, teremos substituindo $V(\alpha)$ que:

$$\begin{aligned}
 U_{\gamma, \bar{V}}(V(\alpha)) &= \frac{(\bar{V} + V_{safe}(1 + \alpha X))^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{(\bar{V} + V_{safe} + V_{safe}\alpha X)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \left(V_{safe} \frac{\bar{V}}{V_{safe}} + V_{safe} \frac{V_{safe}}{V_{safe}} + V_{safe} \alpha X \frac{V_{safe}}{V_{safe}} \right)^{1-\gamma} \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} (V_{safe} \frac{\bar{V}}{V_{safe}} + V_{safe} + V_{safe} \alpha X)^{1-\gamma} \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} [V_{safe} (\frac{\bar{V}}{V_{safe}} + 1 + \alpha X)]^{1-\gamma} \\
 &= \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} (\frac{\bar{V}}{V_{safe}} + 1 + \alpha X)^{1-\gamma}
 \end{aligned}$$

para calcularmos o coeficiente de aversão ao risco local, definimos $\tilde{\gamma}$, o coeficiente de aversão ao risco local relativo, em função de V_{safe} .

$$\tilde{\gamma} \equiv \gamma \left(1 + \frac{\bar{V}}{V_{safe}} \right)^{-1}$$

Fazendo $\bar{V}$ como função de $\tilde{\gamma}$ teremos que:

$$\frac{\bar{V}}{V_{safe}} = \frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} - 1$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha)) &= \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} - 1 + 1 + \alpha X \right)^{1-\gamma} \\
 U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha)) &= \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} + \alpha X \right)^{1-\gamma}
 \end{aligned}$$

assim, calculando a utilidade esperada para a função de utilidade HARA temos que:

$$E[U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}))] = E\left[\frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} + \alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}} X\right)^{1-\gamma}\right]$$

onde se percebe que para determinar α , segundo o critério de otimização de utilidade esperada, depende-se dos valores tanto da aversão ao risco local quanto da aversão ao risco base. Como a fração $\frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ não é uma variável aleatória, ela pode ser retirada de dentro do operador esperança,

$$E[U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}))] = \frac{V_{safe}^{1-\gamma}}{1-\gamma} E\left[\left(\frac{\gamma}{\tilde{\gamma}} + \alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}} X\right)^{1-\gamma}\right]$$

isolando o fator $\frac{1}{\tilde{\gamma}}$ da utilidade esperada, temos:

$$E[U_{\gamma, \tilde{\gamma}}(V(\alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}}))] = \frac{\left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} V_{safe}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} E[(\gamma + \tilde{\gamma} \alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}} X)^{1-\gamma}]$$

para $\tilde{\gamma}=1$ teremos $\tilde{\gamma} \alpha_{\gamma, \tilde{\gamma}} = \alpha_{\gamma, 1}$ onde $\alpha_{\gamma, 1}$ pode ser interpretado como a escolha de portfólio de risco por unidade de tolerância de risco local. Também temos que $\alpha_{\gamma, 1} = \gamma \alpha_{\gamma, \gamma}$ onde $\alpha_{\gamma, \gamma}$ é o portfólio escolhido para o investidor CRRA com aversão relativa ao risco base γ . ↵

7.2 Apêndice II - Rotina de cálculo da distribuição empírica

Elaborado pelo Autor

```
% Rotina de cálculo de frequência relativa
% Vetor de retornos r

ret=xlsread('Teste.xls','a3:a100');

% Quantidade de retornos do vetor r

N = length(ret);

% Largura, largura (bin) h
%h = 0.05;
% Menor retorno a, maior retorno b

a = min(ret);
b = max(ret);

% Valores inteiros mais próximos M
% Quantidade de classes
%M = floor((b-a)/h)+1;
%M = floor(log2(N))+1;
%h = (b-a)/M;

M = floor((b-a)/0.05)+1;
h = 0.05;

% Vetor coluna de zeros

v = zeros(M,1);

for t = 1:1:N
    if(ret(t) == b)
        v(M) = v(M) + 1;
    else
        aux = (floor((ret(t)-a)/h))+1;    % acumulado
        v(aux) = v(aux) + 1;
    end
end

XDistr = (v/sum(v))'; % vetor de probabilidade

%construcao do XDistr

for t = 1:1:N
    if (ret(t) == b)
        XDistr1(t)=XDistr(M);
    else
        aux = (floor((ret(t)-a)/h))+1;    % acumulado
        XDistr1(t)=XDistr(aux);
    end
end

%f;

hist(ret);
```

7.3 Apêndice III – Rotina de Cálculo dos GSRs e SR^c

Elaborado pelo Autor

```
%Programa principal
%Simulação dos GSR(S)
%Utilidades da família CRRA

%*****%
% Início %
%*****%

%SR para gama=1

function crra
% Entrada de dados: Séries
%   Precos=xlsread('Ativos.xls',1);
%   ret=xlsread('Dados.xls',1);
%   rrf=xlsread('Dados.xls',2);
%   x=ret-rrf;
%   X=xlsread('teste.xls','A13:AN64');
%   F=xlsread('Freqrel.xls','A1:A62');
%   F = XDistr;
%   X = [a:h:b];
%   minlambda=-10;
%   maxlambda=10;

for ii = 1 : 6
% Funcao1:GSR para 0<gama<1
    gama=0.5;
%   funcao1=@(lambda) (-(mean((1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama)))));
%   funcao1=@(lambda) (-(F'*(1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama))));
%   max21=fminbnd(funcao1,minlambda,maxlambda);
%   L21=max21
%   gsr21=((mean((1+max21.*X(:,ii)).^(1-gama)))^(2*gama/(1-gama)))-1)^0.5
% Funcao2:GSR para gama>1, utilidade exponencial
    gama=5;
%   funcao2=@(lambda) (F'*(1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama)));
%   min22=fminbnd(funcao2,minlambda,maxlambda);
%   L22=min22
%   gsr22=((mean((1+min22.*X(:,ii)).^(1-gama)))^(2*gama/(1-gama)))-1)^0.5
% Funcao2a:GSR para gama>1, utilidade exponencial
    gama=2;
%   funcao2a=@(lambda) (F'*(1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama)));
%   min22a=fminbnd(funcao2a,minlambda,maxlambda);
%   L22a=min22a
%   gsr22a=((mean((1+min22.*X(:,ii)).^(1-gama)))^(2*gama/(1-gama)))-1)^0.5
% Funcao2b:GSR para gama>1, utilidade exponencial
    gama=15;
%   funcao2b=@(lambda) (F'*(1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama)));
%   min22b=fminbnd(funcao2b,minlambda,maxlambda);
%   L22b=min22b
%   gsr22b=((mean((1+min22b.*X(:,ii)).^(1-gama)))^(2*gama/(1-gama)))-1)^0.5
% Funcao3:GSR para gama<0, utilidade quadrática (gama=-1)
    gama=-1;
%   funcao3=@(lambda) (F'*(max((1+lambda.*X(:,ii)).^(1-gama),0))));
```



```

min23=fminbnd(funcao3,minlambda,maxlambda);
L23=min23
gsr23=((mean(max((1+min23.*X(:,ii)).^(1-gama),0)))^(2*gama/(1-
gama)))^0.5
% Funcao4:GSR para gama=1, utilidade logaritmica
gama=1;
funcao4=@(lambda)(-(F'*(log(1+lambda.*X(:,ii)))));
max24=fminbnd(funcao4,minlambda,maxlambda);
L24=max24
gsr24=(exp(2*mean(log(1+max24.*X(:,ii))))-1)^0.5

% Função5:Índice de Sharpe definido como X/Vol.
sr=(mean(X(:,ii))/std(X(:,ii)))

% Vetor de resultados
% LR = vetor de resultados de L (lambdas)

LR21(ii)=L21;
LR22(ii)=L22;
LR22a(ii)=L22a;
LR22b(ii)=L22b;
LR23(ii)=L23;
LR24(ii)=L24;

% GSRR = vetor de resultados de GSR

GSRR21(ii)=gsr21;
GSRR22(ii)=gsr22;
GSRR22a(ii)=gsr22a;
GSRR22b(ii)=gsr22b;
GSRR23(ii)=gsr23;
GSRR24(ii)=gsr24;

% SRR = vetor de resultados de SR

SRR(ii)=sr

end

disp('
_____ ');

for ii = 1 : 6

disp(' Gama          0.5          -1          1
2          5          15 ');
disp(' ');
disp(sprintf(' Lambda          %6.4f          %6.4f          %6.4f
%6.4f          %6.4f
%6.4f', LR21(ii), LR23(ii), LR24(ii), LR22a(ii), LR22(ii), LR22b(ii)'));
disp(' ');
disp(sprintf(' GSR          %6.4f          %6.4f          %6.4f
%6.4f          %6.4f
%6.4f', GSRR21(ii), GSRR23(ii), GSRR24(ii), GSRR22a(ii), GSRR22(ii), GSRR22b(ii) '
));
disp(' ');
disp(sprintf(' SR          %6.4f          , SRR(ii) '));

```

```
disp('
_____
_____ ');
disp(' ');
disp(' ');
end
end
```