Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Modelos de mudança de regime:
Uma aplicação em Finanças Empíricas

Nuno Miguel Campos Guapo de Almeida

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira

São Paulo

Dezembro de 2000

Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Jacques Marcovitch

Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Eliseu Martins

Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Carlos R. Azzoni

Coordenador da Pós-graduação em Economia

Prof. Dr. José Paulo Chahad

Universidade de São Paulo
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Modelos de mudança de regime:
Uma aplicação em Finanças Empíricas

Nuno Miguel Campos Guapo de Almeida
Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira

*Dissertação apresentada ao Departamento de Economia
na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
da Universidade de São Paulo,
como requisito parcial para a obtenção do
título de mestre em Economia.*

São Paulo
Dezembro de 2000

Resumo

O recente desenvolvimento da econometria, ocorrido tanto em função de novas técnicas quanto do desenvolvimento de vários novos softwares econométricos, juntamente com a enorme disponibilidade de dados macroeconômicos e financeiros fez com que o estudo da econometria aplicada crescesse de forma substancial nos últimos anos, possibilitando testar a validade da teoria econômica para diversos quadros econômicos, incluindo o mercado financeiro. Em muitos casos os resultados destes estudos -os parâmetros estimados e previsões realizadas com estes- mostraram-se contrários ao resultado esperado pela teoria econômica ou mesmo foram não-significantes estatisticamente. Se considerarmos que os modelos estão corretamente especificados, temos, como uma das prováveis causas destes fracos resultados, que as mudanças e crises pelas quais passou a economia mundial e, especialmente, a brasileira nos últimos anos, provocaram muitas mudanças nas estimativas dos parâmetros destes modelos. Isto deve-se às diferentes dinâmicas que regem os fatos econômicos durante os períodos de crise ou estabilidade.

Uma possível solução para este problema são os modelos com mudança de regime, desenvolvidos inicialmente por Hamilton (1989). Neste trabalho utilizaremos estes modelos para tentar captar a dinâmica de algumas séries financeiras e observar a adequabilidade de usar a informação fornecida por estes modelos na estruturação de regras de mercado. As séries usadas serão as de Petrobrás, Índice Bovespa, Nasdaq e Dow Jones entre 04/07/1994 e 01/07/2000.

Summary

The recent development of econometric theory due to new techniques and development of several econometric software, jointly with the huge availability of macroeconomic and financial data lead that the applied econometric study increased substantially in the last years, allowing to test validity of the economic theory on several economic scenarios, such as the financial market. In many cases, the results of this studies -the estimated parameters and the forecast performed with them- were opposite to the expected results by the economic theory or even were statistically insignificant. If we consider that the models were correctly specified, we have as the probable reason for these weak results, the changes and crises on the world economy and specially the Brazilian economy went through in the last years. These changes and crises provoked a lot of changes in the parameters values of these models. This is due to the different dynamic that drive the economic facts during the periods of crises or stability.

One possible solution for this problem are the switch regime models developed initially by Hamilton (1989). On present, we will use these models to try to model the financial series dynamics and observe the suitability to use the information given by these models to structure the trading rules. We will use the Petrobrás, Índice Bovespa, Nasdaq and Dow Jones between 04/07/1994 and 01/07/2000.

Agradecimentos.

Ao amigo e professor Pedro Valls por sua excelente orientação ao longo de todo o tempo (com certeza muito longo!) desta dissertação. Devo destacar seus ensinamentos, conselhos e amizade ao longo de todo este tempo.

Aos professores da banca de qualificação - Luiz Hotta, Marcos Eugênio e Paulo Picchetti - pelos conselhos e sugestões. Ao professor Paulo Picchetti um agradecimento muito especial pelas inúmeras conversas e conselhos ao longo de todo o mestrado.

Aos meus pais e irmão pela paciência, compreensão e estímulo ao longo da elaboração desta dissertação.

À Elaine que sem dúvida teve uma enorme contribuição para a finalização deste trabalho "abrindo mão" de tantos finais de semana.

Aos meus colegas de mestrado pela amizade e pelo ótimo convívio ao longo do tempo, principalmente no período no qual concluímos os créditos. Gostaria de enfatizar aqui o apoio e amizade dispensada pelos amigos Luiz Alvares e Gustavo Aleixo ao longo destes anos.

A Carlos Viana por sempre ter incentivado e apoiado o término desta dissertação.

À CNPq pelo apoio financeiro e ao IPE por toda a infra-estrutura dispensada.

Índice

Introdução	1
1 Características das séries Financeiras: os fatos estilizados	5
1.1 Introdução	5
1.1.1 Período em análise	6
1.1.2 Conceitos iniciais	9
1.2 Evolução das séries em análise	13
1.3 Análise dos fatos estilizados das séries	16
1.4 Relações entre as séries em análise	27
1.5 Conclusões	29
A Apêndice: Conceitos Básicos	33
2 Modelos de Volatilidade Condicional	38
2.1 Desvio-padrão histórico	40
2.2 Alisamento Exponencial (EWMA)	43
2.3 Os modelos GARCH	45
2.3.1 Previsão dos modelos um passo-à-frente e medida de persistência	48
2.3.2 Estimação de máxima verossimilhança	49
2.4 Estimacões	50
2.4.1 Série de Petrobrás	51

2.4.2	Série do Índice Bovespa	54
2.4.3	Série do Índice Nasdaq	57
2.4.4	Série do Índice Dow Jones	58
2.5	Persistência nos modelos estimados.....	60
2.6	Comparação das previsões dos modelos	62
2.7	Conclusões	66
3	Modelos com mudança de regime	68
3.1	Introdução	68
3.2	Conceitos iniciais	69
3.2.1	Cadeias de Markov	69
3.2.2	Probabilidades ergódicas.....	73
3.2.3	Duração esperada em cada regime	75
3.2.4	Exemplo	76
3.3	Modelos de mudança de regime na média.....	76
3.3.1	Modelo de mistura de normais	76
3.3.2	Modelos autoregressivos	78
3.4	Modelos de mudança de regime condicionais na variância	80
3.5	Estimação dos modelos de mudança de regime.....	82
3.5.1	Estimadores de máxima verossimilhança para os modelos de mistura de Normais	82
3.5.2	Estimadores de máxima verossimilhança para os modelos SWGARCH	84
3.6	Estimações.....	84
3.6.1	Modelos de mudança na média e variância não-condicional	85
3.6.2	Modelos de mudança de regime autorregressivo	90

3.6.3	Modelos de mudança de regime na variância condicional	92
3.7	Probabilidades Filtradas e suavizadas	102
3.7.1	Modelos de mistura de Normais e Autoregressivos	102
3.7.2	Modelos SWGARCH	107
3.7.3	Uma interpretação para os modelos de mudança de regime em finanças	112
3.8	Previsão dos modelos SWGARCH um passo-à-frente	115
3.9	Comparação das previsões entre os modelos	120
3.9.1	Gráficos	120
3.9.2	Funções perda	123
3.10	Conclusões	125
B	Apêndice: Cadeias de Markov	127
B.1	Estimação do modelo de mistura de Normais	127
B.2	Previsão de uma cadeia de Markov	130
B.3	Inferência para as probabilidades filtradas e suavizadas.	134
C	Apêndice: Pacotes computacionais	136
4	Regras de mercado utilizando modelos de mudança de regime	137
4.1	Introdução	137
4.2	Evidências Empíricas	139
4.2.1	Série de Petrobrás	139
4.2.2	Série de Bovespa	140
4.2.3	Série de Nasdaq	141
4.2.4	Série de Dow Jones	142

4.3 Conclusões	143
5 Considerações Finais	144
Referências Bibliográficas	147

Introdução

O objetivo principal desta dissertação consistirá na aplicação dos modelos de mudança de regime para a extração da volatilidade para algumas séries financeiras assim como a realização de regras de mercado para as mesmas séries, utilizando estes modelos de mudança de regime, com as quais seja possível obter um retorno superior ao *buy-and-hold*¹.

No primeiro capítulo serão discutidas as principais características das séries financeiras, os chamados fatos estilizados. Estes são as principais características das séries financeiras e normalmente são comuns a grande maioria destas. Entre estas características podemos enumerar: a média próximo de zero, a pequena assimetria destas séries e a distribuição leptocúrtica. Outras características importantes como a estrutura na volatilidade e as relações entre as séries em análise serão também ilustradas neste capítulo. Os modelos analisados nos capítulos posteriores que conseguirem captar a maioria, ou mesmo a totalidades destas características, serão considerados adequados para modelar a dinâmica destas séries. No final deste capítulo apresentaremos um sucinto apêndice com alguns conceitos relevantes para o bom entendimento desta parte do trabalho.

No segundo capítulo serão apresentados os modelos tradicionais de volatilidade condicional da família GARCH/EGARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity/Exponential GARCH*), modelos estes com volatilidade determinista, e destacadas as principais características que fazem com que estes modelos sejam bons candidatos a reproduzir os fatos estilizados apresentados no capítulo anterior, sem apresentarem muitas

¹ A estratégia de *buy-and-hold* consiste simplesmente em comprarmos o ativo financeiro no início do período em análise e vendê-lo ao final do período, ou seja, ficar durante todo o período aplicado neste ativo.

das dificuldades de estimação da outra classe de modelos de volatilidade: os modelos de volatilidade estocástica. Neste capítulo será apresentado o método de estimação dos modelos de volatilidade determinística bem como a função de previsão um passo-à-frente para estes modelos de volatilidade.

Finalmente no segundo capítulo apresentaremos os resultados das estimações de máxima verossimilhança bem como analisaremos as principais características dos parâmetros em análise. Verificaremos que a dinâmica da maioria dos modelos analisados tem uma alta persistência aos choques passados para todas as séries em análise. A grande desvantagem disto, é que um choque passado acaba influenciando a volatilidade da série por um período de tempo mais longo do que o que normalmente se verifica para as séries reais.

Sugeriremos que esta alta persistência deve-se basicamente a alguma quebra estrutural das séries financeiras, provocadas pelas recorrentes crises financeiras que afetam a economia mundial, reproduzindo um estudo de Almeida e Pereira (1999). Uma solução para evitarmos estes problemas serão os modelos que permitem mudanças de regime na volatilidade e que, com isto, podem controlar estas quebras estruturais.

No terceiro capítulo serão apresentados vários modelos de mudança de regime. Estes modelos, de forma genérica, possibilitam que a dinâmica das séries sofra mudanças entre os diversos regimes nos quais a economia pode se encontrar. Inicialmente serão apresentados alguns conceitos básicos de cadeias de Markov, essenciais para o bom entendimento dos modelos analisados neste capítulo. Em seguida será apresentado o modelo teórico para mudança de regime tanto na média quanto na variância do processo. Este modelo é denominado de mistura de normais. Estenderemos este conceito nas subseções seguintes para os

modelos autoregressivos. Faremos esta análise introdutória, com estes modelos mais simples, com o objetivo de ilustrar o conceito de mudança de regime e para posteriormente compararmos as probabilidades associadas a cada regime com as obtidas para os modelos de mudança de regime na variância.

Após a apresentação destes modelos, no terceiro capítulo, utilizaremos este mesmo conceito na aplicação dos modelos de mudança de regime na variância. Aqui serão apresentados os modelos SWARCH e SWGARCH (*Switching ARCH* e *Switching GARCH*). Compararemos estes modelos com os modelos sem mudança de regime apresentados no capítulo anterior do trabalho. Esta comparação será feita através dos critérios de informação -de *Akaike* e *Schwarz*- e por um conjunto de funções perda.

Neste capítulo apresentaremos dois apêndices. No primeiro apresentaremos com mais rigor alguns tópicos abordados neste capítulo, especialmente sobre a previsão em cadeias de Markov e o algoritmo usado para inferência destes modelos. No outro apêndice faremos um sucinto resumo dos pacotes econométricos que possuem programas disponíveis para estimarmos os modelos com mudança de regime.

No quarto capítulo desta dissertação serão usadas as probabilidades de estarmos em cada um dos regimes para a criação de regras de mercado. Basicamente utilizaremos estratégias nas quais ficaremos comprados no ativo objeto nos regimes de retornos positivos com baixa volatilidade e vendidos ou mesmo fora do mercado, ou seja, só aplicados em CDI para o caso brasileiro, nos momentos de baixa do mercado em análise. Exploraremos também as possíveis diferenças entre as probabilidades dos modelos com mudança de regime

com mistura de normais/autoregressivos e dos modelos com mudança de regime na volatilidade condicional.

No último capítulo faremos as considerações finais a respeito da aplicação dos modelos de mudança de regime para descrever a dinâmica das séries financeiras e o potencial do seu uso na formulação de regras de mercado, que visem um melhor retorno que a estratégia de *buy-and-hold*.

Chapter 1

Características das séries Financeiras: os fatos estilizados

1.1 Introdução

Neste capítulo serão discutidas brevemente as séries alvo do nosso estudo: Índice Bovespa, Petrobrás PN, Índice Dow Jones e Índice Nasdaq entre 04/07/1994 e 01/07/2000². Além disto, será apresentada uma breve análise das principais características destas séries: os fatos estilizados. A escolha destas séries se deve ao fato de terem muita liquidez no mercado e ao longo do período em análise terem sofrido muita influência de vários choques, entre estes: a crise do México (Dez/1994), crise da Ásia (Out/1997), crise da Rússia (Ago/1998), desvalorização do Real (Jan/1999) e a forte queda do Nasdaq (Abr/2000). Além disto, para o mercado brasileiro, a mudança no regime de bandas cambiais (Mar/1995) aumentou bastante a volatilidade das séries financeiras brasileiras.

Nesta seção introdutória analisaremos brevemente as crises pelas quais passou a economia mundial nos últimos seis anos e apresentaremos alguns conceitos iniciais relacionados a previsibilidade das séries financeiras.

² Todas as séries utilizadas neste trabalho foram retiradas do banco de dados da Economática.

1.1.1 Período em análise

Ao longo dos seis anos em análise neste trabalho -1994 a 2000-, com a maior interligação entre os mercados mundiais, as crises locais acabaram tendo grande influência nos mercados mundiais. Abaixo descreveremos sucintamente estas³.

A primeira crise a analisarmos é a crise mexicana ocorrida no final de dezembro de 1994. Esta crise foi provocada por uma grande fuga de recursos do México, fazendo com que fosse necessário desvalorizar o peso. Esta crise mexicana acabou contagiando os principais mercados emergentes, inclusive o brasileiro. De outra parte, destacamos que esta crise teve um efeito muito menos amplo que as demais crises internacionais que ocorreram após a crise mexicana, conforme observaremos ao longo deste trabalho.

Após esta crise tivemos um período de calmaria no mercado financeiro quando este, devido as condições de crédito muito favoráveis, tornou-se muito alavancado. Esta alavancagem excessiva do mercado fez com que as futuras crises tivessem um efeito muito maior *vis-à-vis* as crises anteriores. Além disto neste período houve um enorme desenvolvimento das tecnologias de comunicação que fizeram com que fosse possível uma maior atuação em vários mercados mundiais. A primeira crise após este período de calmaria foi a crise asiática.

A crise asiática foi uma crise de repercussões muito mais amplas *vis-à-vis* as crises anteriores. Houve neste período nas principais bolsas mundiais retornos muito negativos durante os dias imediatamente seguintes a esta crise⁴. Esta eclodiu no dia 21 de outubro de

³ Uma ótima referência sobre estas crises macroeconômicas é o site <http://www.stern.nyu.edu/globalmacro/>.

⁴ Para um melhor entendimento da crise asiática ver, entre outros, Krugman (1998) e Delhause(1999).

1997 na Tailândia, devido a um forte movimento feito pelos fundos de pensão que tiraram seus recursos do país, provocando uma enorme pressão sobre o *bath*, a moeda local. Isto ocorreu devido a forte desconfiança destes investidores na capacidade do governo de fazer as reformas necessárias na época para equacionar os problemas econômicos pelos quais o país passava. Os efeitos nos dias seguintes sobre o mercado mundial foram muito fortes principalmente no dia 27 do mesmo mês quando o Dow Jones caiu mais de 7% e a bolsa paulista caiu praticamente 16%.

A crise russa ocorreu no final do mês de agosto e início de setembro de 1998. O primeiro dia de grande queda em todos os mercados mundiais ocorreu em 27 de agosto, quando o mercado percebeu a grave situação fiscal russa, devido aos decorrentes *déficits* fiscais e o G-7 mostrou que poderia não ajudar o governo russo, fazendo com que o Dow Jones caísse mais de 4%. A crise russa se agravou nos dias subsequentes provocando novas baixas fortes nos mercados mundiais no dia 31 de agosto, quando o Dow Jones caiu mais de 6%, sendo esta a terceira maior baixa da história do Dow Jones. Para o mercado brasileiro o pior dia da crise ocorreu no dia 10 de setembro quando o Índice Bovespa caiu aproximadamente 17% e a ação da Petrobrás caiu 19%. Neste dia houve a redução do *rating* brasileiro pelas agências *Standard & Poor's* e *Duff & Phelps* e a elevação da taxa Selic para 50%.

Em janeiro de 1999, com a desvalorização do Real, ocorrida no dia 13 de janeiro, o mercado brasileiro experimentou mais uma vez grandes perdas sendo que a ação de Petrobrás caiu 21% e o Índice Bovespa caiu mais de 10%. A desvalorização brasileira acabou

provocando quedas nas principais bolsas mundiais tendo o Dow Jones caído aproximadamente 2.5%.

A crise mais recente que abalou os mercados mundiais foi a crise do Nasdaq que ocorreu em abril de 2000. O primeiro dia de crise foi em 3 de abril quando a justiça americana condenou a Microsoft por prática monopolista. Neste dia o Índice Nasdaq caiu aproximadamente 8%. Entretanto o pior dia para a série do Nasdaq foi o dia 14 quando o Índice de ações de tecnologia caiu mais de 10%, devido a expectativa do aumento da taxa de juros americana pelo FED em função principalmente da alta inflação verificada naquele período na economia americana.

Na tabela 1 temos para cada uma das séries as cinco maiores quedas e o evento econômico relacionado a esta queda. Podemos observar que as crises mencionadas foram, na maior parte dos casos, os eventos extremos das quatro séries⁵.

Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
-21.16%(14/01/2000)	-17.23%(10/09/1998)	-10.16%(14/04/2000)	-7.45%(27/10/1997)
Desvalorização Real	Crise russa	Crise do Nasdaq	Crise da Ásia
-20.68%(27/10/1997)	-16.23%(27/10/1997)	-8.95%(31/08/1998)	-6.57%(31/08/1998)
Crise da Ásia	Crise da Ásia	Crise russa	Crise russa
-18.57%(10/09/1998)	-11.10%(05/09/1994)	-7.94%(03/04/2000)	-5.82%(14/04/2000)
Crise russa	-	Crise do Nasdaq	Crise do Nasdaq
-16.64%(07/03/1995)	-10.75%(12/11/1997)	-7.32%(12/04/2000)	-4.28%(27/08/1998)
Banda Cambial	Crise da Ásia	Crise do Nasdaq	Crise russa
-16.03%(17/09/1998)	-10.50%(14/01/1999)	-7.27%(27/10/1997)	-3.75%(07/03/1995)
Crise russa	Desvalorização Real	Crise da Ásia	-

1. Maiores perdas para cada série

⁵ Constatamos na tabela 1 que as crises da Ásia e da Rússia estão entre as 5 piores perdas para as 4 séries em análise.

1.1.2 Conceitos iniciais

Neste estudo analisaremos o retornos destas séries ao invés de usarmos os preços. O uso do retorno das séries deve-se em função, basicamente, dos preços dos ativos financeiros não serem estacionários⁶ e mesmo ergódicos⁷ características necessárias para que possamos modelar o comportamento destas séries⁸. O retorno utilizado será o retorno composto dado por:

$$r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) = \Phi \log(P_t)$$

onde $\log(.)$ é o logaritmo neperiano, Φ é o operador diferença⁹ e P_t é o preço do ativo financeiro em t ¹⁰. Para muitas séries financeiras foi observado que os retornos são não-correlacionados¹¹ e apresentam média muito perto de zero, ou seja, a série é um ruído branco¹². Com isto temos que as séries de retorno não teriam previsibilidade na média e portanto a série de preços seria um passeio ao acaso (*random walk*) e sendo portanto

⁶ Ver apêndice A.

⁷ Ver apêndice A.

⁸ Para uma análise mais completa a respeito da estacionariedade de séries financeiras ver, entre outros, Pagan (1993).

⁹ O operador diferença é dado por:

$$\Phi = (1 - L)$$

onde L é o operador defasagem.

¹⁰ O retorno de um ativo financeiro em t é calculado com base no preço do ativo em t e no último dia útil anterior, definido aqui como $t - 1$.

¹¹ Para uma referência para os conceitos de autocorrelação e autocovariância ver apêndice A.

¹² Ver apêndice A.

impossível com a informação passada prever o período seguinte. Teríamos então para os preços que :

$$E[P_{t+1}|I_t] = P_t$$

onde I_t é a informação disponível até o instante t . Com isto seria impossível fazer qualquer previsão sobre a variação do preço de um ativo entre hoje e amanhã com a informação disponível até hoje.

Esta hipótese está relacionada a hipótese de mercados eficientes no qual seria impossível obter um ganho maior que o custo de oportunidade ao realizarmos qualquer estratégia de investimentos com base em toda a informação disponível. Esta idéia de eficiência dos mercados é apresentada na literatura, entre outros, por Samuelson (1965) e Fama (1970). O conceito de eficiência de mercado está ligado a definição do conjunto de informação disponível. Roberts (1967) classifica três definições possíveis de eficiência de mercado:

1. Eficiência Fraca. O conjunto de informação inclui somente o passado da série de preços e/ou retornos¹³.
2. Eficiência Semi-Forte. O conjunto de informações inclui toda a informação pública disponível, segundo qualquer fonte de informação.
3. Eficiência Forte. O conjunto de informações inclui toda a informação pública disponível e também a informação privada.

¹³ Neste estudo sempre que discutirmos sobre eficiência de mercado e não fizermos nenhum comentário sobre o tipo de eficiência estaremos nos referindo a eficiência fraca de mercado.

Muitos estudos econométricos ao longo do tempo tentaram refutar a hipótese de eficiência dos mercados, principalmente a eficiência fraca de mercado. A rejeição da hipótese de eficiência fraca, dado que os conceitos são encaixados, implica a rejeição das outras hipóteses - semi-forte e forte - também. O estudo seminal deste assunto remonta as origens da própria econometria com o estudo de Cowles (1933).

Ao acrescentarmos à hipótese de não-correlação a hipótese de distribuição normal para a série de retornos dos ativos financeiros teríamos que estes são independentes. Entretanto a hipótese de eficiência de mercado não significa que os retornos das séries são normais e/ou independentes e identicamente distribuídas. Mandebrot (1963) observa que após movimentos bruscos numa série financeira seguir-se-ão outros movimentos bruscos. Este fato é chamado na literatura de conglomerados de volatilidade. Ou seja, mesmo que não haja previsibilidade na média, na variância é possível tentar modelar alguma estrutura devido a aparente dependência na volatilidade dos retornos, refutando assim a hipótese de independência destes. Com isto temos que as séries dos retornos são não-lineares¹⁴. No próximo capítulo apresentaremos alguns modelos não-lineares que conseguem captar esta dinâmica da volatilidade.

Outra característica importante observada nas séries financeiras neste estudo foi a existência de caudas pesadas para a distribuição dos retornos, ou seja, a distribuição dos retornos é leptocúrtica não sendo portanto normal.

A percepção de que mesmo que haja eficiência de mercado existem várias características para as séries financeiras que as diferenciam das demais séries econômicas como

¹⁴ Ver apêndice A.

leptocurtose e conglomerados de volatilidade fez com que o estudo dessas características, os chamados fatos estilizados, ganhassem um grande destaque na literatura.

A investigação das propriedades das séries financeiras é um campo vasto de estudo na literatura de finanças e possui uma vasta literatura na qual podemos citar, entre outros, Fama (1970), Taylor (1986), Bollerslev *et alli* (1992) e Pagan (1993). Herencia (1997) faz, para a série de Telebrás entre 03/01/1989 e 17/07/1995, um estudo detalhado dos fatos estilizados.

A existência de conglomerados de volatilidade será usada nesta dissertação como uma informação importante na construção de *trading systems*. Isto, conforme mostraremos a seguir, deve-se ao fato de que normalmente associado a um regime de baixa volatilidade temos uma média dos retornos positiva e vice-versa, ou seja, alta volatilidade é indicio de retornos negativos. Com isto mostraremos que a não-linearidade pode fazer com que possamos também refutar a hipótese de eficiência dos mercados, com base em alguma previsibilidade da volatilidade.

Nas duas próximas secções apresentaremos e analisaremos rapidamente os principais fatos estilizados dos retornos de quatro séries financeiras: Índice Bovespa, Petrobrás PN, Dow Jones e Nasdaq para o período entre 04/07/1994 e 01/07/2000. Esta análise é muito importante pois provavelmente os melhores modelos para estas séries serão aqueles que conseguirem incorporar nas suas dinâmicas estas características.

Após esta análise faremos uma rápida análise das possíveis relações entre as quatro séries. Na última seção faremos uma conclusão dos principais resultados obtidos neste capítulo.

1.2 Evolução das séries em análise

Analisaremos primeiramente as duas séries que são negociadas no mercado brasileiro: a série de Petrobrás e do Índice Bovespa. No gráfico 1 e 2 observamos a série de preços e de retornos de Petrobrás e Índice Bovespa. Podemos constatar que estas séries no início, entre meados de 1994 até meados de 1995, apresentaram uma volatilidade alta em relação ao período imediatamente posterior. Esta alta volatilidade está associada a fase imediatamente seguinte a introdução do Plano Real (01/07/1994), a crise do México (27/12/1994) e a mudança da banda cambial em (15/03/1995). Após este período verificamos pelos gráficos que as duas séries passaram por um período de alta com baixa volatilidade, ou seja, um período de estabilidade tanto na economia brasileira quanto mundial. Conforme destacamos na seção anterior, este período foi um período de muita alavancagem no mercado, principalmente devido a facilidade da obtenção de crédito e a falta de uma disciplina de controle de risco pelas instituições financeiras.

A partir de meados de 1997 observamos um aumento da volatilidade das duas séries que se intensifica com a crise da Ásia no último trimestre de 1997. Após um breve período de calma temos o *default* da dívida externa russa (agosto de 1998) que mais uma vez trouxe grande volatilidade ao mercado financeiro brasileiro no período imediatamente posterior ao anúncio do *default*. O mercado brasileiro ficou mais volátil ainda devido a redução do *rating* brasileiro por algumas agências e pela brusca elevação dos juros domésticos, conforme comentamos na seção anterior.

Esta crise é seguida pela desvalorização do Real em janeiro de 1999, que leva os preços dos ativos em análise - Petrobrás e Índice Bovespa - a praticamente o mesmo nível

do início da nossa amostra. Alguns meses após a desvalorização com os preços dos ativos em dólar muito baixos, em função da desvalorização ocorrida, observamos um grande movimento de alta para as duas séries porém com alta volatilidade, dado que as séries ficaram com seus valores muito defasados em dólar *vis-à-vis* o período anterior a desvalorização. Esta volatilidade ocorreu devido a enorme incerteza provocada pelo possível aumento da taxa de juros americana necessária para frear o grande crescimento econômico americano no segundo semestre de 1999 e primeiro de 2000. O problema deste crescimento é que ele poderia gerar inflação na economia americana. Outra fonte de volatilidade no mercado americano, e em muito ligado a incerteza quanto ao aumento da taxa de juros pelo FED, foi a queda expressiva do Índice Nasdaq em abril de 2000.

A série de Petrobrás a partir de meados de 1999 tem um crescimento maior que a do Índice Bovespa principalmente devido ao aumento do preço mundial do petróleo¹⁵. Levando em conta todo o período analisado para as duas séries, podemos constatar que elas tem um aumento expressivo ao longo do tempo, porém com períodos de maior tranquilidade *vis-à-vis* períodos de grande volatilidade, quando normalmente a série sofre grandes quedas.

Observando os gráficos 3 e 4 das séries do Nasdaq e do Índice Dow Jones podemos constatar que estas apresentam um comportamento parecido entre si, ou seja, no início tem uma baixa volatilidade, apenas aumentando um pouco na crise da Ásia e principalmente

¹⁵ O expressivo aumento do preço do petróleo no mercado mundial, devido a uma série de medidas feitas pela OPEP no primeiro semestre de 1999, fez com que os analistas do mercado petrolífero observassem uma enorme capacidade desta empresa auferir lucros extraordinários *vis-à-vis* o período anterior a intervenção da OPEP no mercado mundial de petróleo.

1. Serie e retorno de Petrobras

após o *default* da dívida externa russa. Neste período houve um crescimento moderado das duas séries.

Após esta crise a economia norte-americana passa por um período de alta com muita volatilidade, refletida tanto no Índice Nasdaq quanto no Índice Dow Jones. As dinâmicas das duas séries entretanto são um pouco diferentes, pois a série do Dow Jones apresenta um crescimento e uma volatilidade mais uniforme ao longo do tempo enquanto que a série do Nasdaq aumenta muito a volatilidade no último ano e meio da série, porém com uma taxa de crescimento muito alta. Este comportamento se deve ao *boom* que as ações de *Internet* sofreram neste período. Este enorme crescimento teve característica semelhante a muitas das bolhas especulativas que ocorreram ao longo da história econômica mundial.

De outra parte, podemos claramente observar que no período final da análise, mais especificadamente em março/abril de 2000, a série do Índice Nasdaq sofre uma queda

2. Série e retorno do índice Bovespa

significativa com a descrença dos investidores nas ações de tecnologia, principalmente na descrença destas alcançarem os altos lucros implícitos em seus preços. Esta correção nos preços faz com que surja para esta série um novo patamar com elevada volatilidade, o que é comum em períodos subsequentes a grandes movimentos de baixa dos ativos financeiros.

1.3 Análise dos fatos estilizados das séries

A primeira característica das séries financeiras comum a estas é uma média de retornos diários positiva normalmente próxima de zero, conforme a tabela 2. Este valor entretanto representa um retorno anual de 38%, 30%, 33% e 19% respectivamente para a série de Petrobrás, Índice Bovespa, Índice Nasdaq e Índice Dow Jones, conforme podemos observar na tabela 3¹⁶. De outra parte, observamos na tabela 2 que a mediana diária das séries

¹⁶ Não devemos esquecer entretanto que estes valores são para os retornos brutos destas séries e não para os excessos de retorno, isto é, os retornos brutos menos o ativo livre de risco da economia.

Para o cálculo do retorno anualizado de cada série foi utilizada a fórmula:

3.Serie e retornos do Nasdaq

4.Serie e Retorno do Dow Jones

em análise são muito semelhantes a média das respectivas séries. É importante também observar que estas médias variam muito ao longo do tempo. Podemos verificar, analisando a tabela 3 que a média muda significativamente de um ano para o outro para cada série.

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Média	0:001	0:001	0:001	0:001
Mediana	0:001	0:001	0:002	0:001
Desvio padrão	0:0294	0:0357	0:015	0:010
Assimetria	j 0:047	0:638	j 0:602	j 0:561
Excesso de Curtose	5:219	11:570	5:201	5:222
1 ^ª Quartil	j 0:017	j 0:0128	j 0:005	j 0:004
3 ^ª Quartil	0:019	0:0159	0:008	0:006
Jaque-Bera	1663:397	8299:396	1783:521	1786:236
probabilidade	0:0000	0:0000	0:0000	0:0000
Número de obs.	1477	1481	1514	1514

2. Estatísticas das séries em análise

As duas séries brasileiras apresentam uma enorme variação de resultados sendo o ano de 1999, após a desvalorização do Real e com o início do aumento do preço do petróleo pela OPEP, o ano de maior alta, sendo esta de 259% e 158% respectivamente para a série de Petrobrás e Bovespa. De outra parte, no ano anterior as duas séries apresentaram os piores resultados em função da crise asiática, russa e da deterioração da situação financeira local.

Ano/série	Petrobrás		Bovespa		Nasdaq		Dow Jones	
	média	desvio	média	desvio	média	desvio	média	desvio
1994 j 2000	38:08%	56:76%	29:99%	46:80%	33:35%	24:30%	19:12%	16:16%
1994	23:33%	63:75%	48:78%	45:88%	14:34%	10:16%	10:30%	10:52%
1995	j 21:84%	68:16%	j 1:30%	57:15%	39:92%	13:33%	33:45%	8:71%
1996	111:90%	31:07%	65:06%	23:12%	22:51%	15:42%	25:78%	11:99%
1997	63:80%	56:64%	45:48%	46:69%	21:54%	18:52%	22:54%	18:76%
1998	j 47:12%	67:57%	j 34:12%	57:68%	39:63%	26:76%	16:10%	19:89%
1999	259:16%	55:96%	157:67%	46:57%	85:59%	27:35%	25:22%	16:15%
2000	46:13%	39:62%	j 4:28%	35:89%	j 5:01%	50:58%	j 17:42%	23:97%

3. Média e desvio padrão anualizados

$$r_{\text{anual}} = (1 + r_{\text{diário}})^{252} - 1$$

Para os dados americanos observamos que as séries tiveram resultados anualizados até 1998 entre 14% e 40% e 10% e 33% respectivamente para as séries do Nasdaq e Dow Jones. Para o ano de 1999 a série do Nasdaq apresentou um crescimento muito acima da média de 85%, principalmente devido a alta das ações ligadas majoritariamente a *Internet*. Por outro lado, até o período em análise para o ano de 2000 estas séries tiveram um resultado negativo de -5% e -17% respectivamente para a série do Nasdaq e do Dow Jones.

Na tabela 2 podemos constatar também que o desvio-padrão diário para as duas séries brasileiras é quase duas vezes mais volátil que a série americana no mínimo. Os desvios-padrão anualizados das séries de Petrobrás, Bovespa, Nasdaq e Dow Jones são respectivamente de 57%, 47%, 24% e 16%, consoante a tabela 3¹⁷. Para as séries brasileiras verificamos que os desvio-padrão anualizado é sempre maior, excluindo o ano de 2000 para a série de Bovespa, nos anos em que o retorno anualizado foi negativo *vis-à-vis* os anos em que o retorno anualizado foi positivo. Para as séries americanas, que só apresentaram resultados negativos em 2000, constatamos a mesma evidência de volatilidade maior nas quedas das séries do que nas altas destas. Esta verificação empírica foi constatada inicialmente nos estudos de Black (1976) e Nelson (1991). Outra forma de observamos esta evidência empírica é através do gráfico ?? onde temos a série de Petrobrás e a série de retornos ao quadrado¹⁸. Observamos que a volatilidade é maior quando a série sofre quedas do que nos momentos em que a série está numa fase de alta.

¹⁷ A volatilidade anualizada é calculada como:

$$h_t^{\text{anualizada}} = h_t^{\text{diária}} \sqrt{252}$$

¹⁸ O retorno ao quadrado da série pode ser compreendida como uma *proxy* da volatilidade instantânea dos retornos.

5. Série de Petrobrás e do retorno desta ao quadrado

Série de Petrobrás e do retorno desta ao quadrado

No gráfico 6 temos a a série do Nasdaq e do retorno ao quadrado desta série. Observamos para o começo desta série uma volatilidade muito baixa que só é alterado com as crise da Ásia e Rússia, quando há claramente um aumento da volatilidade. Podemos observar que no final desta série, após a crise da Rússia, quando esta inicia um forte movimento de alta, a volatilidade alcança um patamar mais alto. Este novo patamar é obtido mesmo com um forte movimento de alta. De outra parte, para o período final da série observamos uma terceiro período, o período de queda forte do Índice Nasdaq, no qual a volatilidade é ainda maior.

No gráfico 7 temos uma série de média e desvio-padrão móvel de 22 dias anualizada para a série de retornos de Petrobrás. Observando este gráfico temos mais uma clara evidência de que a a série tem uma volatilidade mais baixa quando a série esta em baixa do que nos momentos de alta. Para a série de desvio-padrão observamos claramente o efeito na

6. Série do Nasdaq e do retorno desta ao quadrado

volatilidade das quatro crises fortes que ocorreram na nossa economia: mudança da banda cambial, Ásia, Rússia e desvalorização do Real.

A seguir temos no gráfico 8 a série da média e desvio padrão móvel de 22 dias anualizada para o Nasdaq. Observamos claramente que quando a série dos retornos médios cai a série tem um aumento de volatilidade e vice-versa, ou seja, nos momentos de alta da série a volatilidade se encontra num nível bem mais baixo. No final da série, com a crise do Nasdaq, observamos claramente que esta série sofre uma profunda crise, devido a queda da média-móvel, e o desvio-padrão móvel aumenta muito.

Nos gráficos 9, 10, 12 e 11 podemos observar o histograma das quatro séries. Para a série de Petrobrás não observamos claramente nenhuma assimetria, entretanto observamos de forma mais nítida uma assimetria à direita para a série do Bovespa e à esquerda para as séries americanas. Esta observação é corroborada com a tabela 2 onde podemos observar que as séries apresentam certa assimetria, excluindo-se a série de Petrobrás. Supondo que

7. Média e desvio padrão da série de Petrobrás

os retornos da série são independentes e identicamente distribuídos, os intervalos de confiança de 95% só incluem o zero para a série de Petrobrás¹⁹. As estatísticas de assimetria são muito influenciadas por valores extremos. Ao retirarmos 0.5% das observações, como faz Herencia (1997), obtemos os valores para a estatística de assimetria igual a 0.17, -0.32, -0.17 e -0.22 para as séries de Petrobrás, Bovespa, Nasdaq e Dow Jones respectivamente. Constatamos portanto que as séries americanas continuam sendo assimétricas à esquerda, porém a série de Petrobrás, que era simétrica, torna-se assimétrica à direita e a série de Bovespa muda de assimétrica à direita para assimétrica à esquerda.

¹⁹ O intervalo de confiança foi construído como:

$$s \pm \frac{r}{\sqrt{T}}$$

onde s é o coeficiente de simetria e T o número de observações. Os quatro intervalos de confiança são:

IC Petrobrás	=[-0.111; 0.016]
IC Bovespa	=[0.574; 0.701]
IC Nasdaq	=[-0.533;-0.658]
IC Dow Jones	=[-0.495;-0.620]

8. Média e desvio padrão da série de Nasdaq

Outra importante característica das séries financeiras é que estas apresentam caudas pesadas, ou seja, há excesso de curtose nas séries em análise²⁰. Observando a tabela 2 temos que o excesso de curtose das séries em análise é de no mínimo 5. Esta característica é muito comum para as séries financeiras que são em sua maioria leptocúrticas. Os primeiros estudos econométricos que reportam esta característica foram feitos por Mandelbrot (1963) e Fama (1965).

Na seção anterior analisamos que as séries financeiras não apresentam previsibilidade com base na informação passada. Para corroborar esta informação podemos observar na tabela 4 os valores e os *p-values* da estatística Q de Ljung-Box²¹ para os retornos e retornos ao quadrado das séries. Para os retornos podemos constatar valores pequenos para

²⁰ Utilizaremos neste trabalho o excesso de curtose, isto é, a curtose menos 3.

²¹ Ver apêndice A.

9. Histograma dos retornos da série de Petrobrás

as estatísticas de Ljung-Box porém temos que estes valores rejeitam a hipótese de ausência de estrutura na média das séries brasileiras mesmo nos primeiros *lags*.

Herencia (1997) em seu trabalho também verifica para uma ação brasileira - série de Telebrás entre 03/01/1989 e 17/07/1995 - um resultado muito parecido. Entretanto Bollerslev *et alli* (1994) observa que em séries com estrutura autoregressiva na variância as variâncias dos estimadores das autocorrelações são maiores que T^{-1} :

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
retornos Q(1)	0.109	0.055	0.022	0.020
p-value	0.000	0.034	0.385	0.445
retornos Q(6)	-0.047	-0.078	-0.037	-0.005
p-value	0.000	0.000	0.490	0.198
retornos Q(12)	-0.004	-0.024	0.100	0.037
p-value	0.000	0.000	0.773	0.002
retornos ² Q(1)	0.326	0.197	0.295	0.228
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
retornos ² Q(6)	0.141	0.130	0.270	0.065
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000
retornos ² Q(12)	0.142	0.102	0.160	0.091
p-value	0.000	0.000	0.000	0.000

4. Valores do p-value do teste Ljung-Box

10. Histograma dos retornos da série de Índice Bovespa

Herencia (1997) realiza simulações de Monte Carlo para provar que quando há uma estrutura da variância de volatilidade estocástica os limites usuais de *Barlett* para as autocorrelações não são válidos. Na tabela 5 fizemos uma simulação semelhante para três modelos não-lineares: ARCH, GARCH e modelo de mudança de regime na média e variância²². Podemos observar que os valores para o *p-value* independente do lag que ultrapassam o valor crítico é muito maior que o valor esperado²³. Com isto a possível não-linearidade dos retornos não nos permitem concluir se há ou não uma estrutura autoregressiva nos retornos das séries brasileiras.

²² Estes modelos serão apresentados com detalhes nos próximos capítulos.

²³ Para todos os modelos calculamos séries com 1.000 observações. Foram feitas para todos os modelos 10.000 simulações. Para o modelo ARCH(3) simulamos modelos com os parâmetros $\omega_1=0.4$, $\omega_2=0.3$ e $\omega_3=0.2$ e $\alpha = 0.0001$. Para o modelo GARCH(1,1) os parâmetros usados foram $\omega=0.1$, $\alpha=0.8$ e $\beta = 0.0001$. Para o modelo de mudança de regime as médias utilizadas foram $\mu_1 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.2$; as variâncias foram $\sigma_1^2 = 0.005$ e $\sigma_2^2 = 0.001$ e as duas probabilidades foram $p_{11} = p_{22} = 0.97$. Para os modelos ARCH(3) e GARCH(1,1) não foi colocado nenhuma estrutura na média. As simulações foram feitas no pacote econométrico Gauss 3.2.

	ARCH(3)	GARCH(1,1)	Mudança de regime na volatilidade
lag 1	4127	5141	1524
lag 3	6525	6981	2306
lag 6	7393	7228	2957
lag 9	7536	7007	3329
lag 12	7465	6721	3543
Valor Esperado	500	500	500

5. Numero de autocorrelações que se encontram fora dos limites usuais de Barlett

Uma forma de observarmos a não-linearidade das séries financeiras em análise é observarmos a estatística Q dos retornos ao quadrado. Conforme podemos constatar na tabela 4 estes valores são, em todos os casos analisados, muito significativos e evidenciam o fato de que provavelmente há alguma estrutura não-linear nas séries em análise, dado que há claramente uma estrutura na volatilidade das séries em análise.

Podemos observar na tabela 6 o teste ARCH²⁴ apresentado por Engle (1982) e o teste de viés de sinal²⁵ apresentado por Engle e Ng (1993). O teste ARCH testa a hipótese de haver uma estrutura ARCH na volatilidade da série²⁶. A hipótese nula de ausência de estrutura na volatilidade é rejeitada para todas as séries, ou seja, há indícios de que temos para as quatro séries estrutura na volatilidade. De outra parte, observamos que rejeitamos também a hipótese nula dos choques serem simétricos, conforme testamos através do teste do sinal.

	Petrobrás	Ibovespa	Nasdaq	Dow Jones
Teste ARCH	257.49 (0.000)	123.69 (0.000)	337.37 (0.000)	92.00 (0.000)
Teste sinal positivo	18.85 (0.000)	27.40 (0.000)	13.62 (0.000)	13.62 (0.000)
Teste sinal negativo	22.07 (0.000)	13.17 (0.000)	29.32 (0.000)	30.04 (0.000)
Teste sinal conjunto	1150 (0.000)	1005 (0.000)	1180 (0.000)	1120 (0.000)

6. Teste da estrutura ARCH

²⁴ Ver apêndice A.

²⁵ Ver apêndice A.

²⁶ Estes modelos de volatilidade condicional serão apresentados no próximo capítulo.

1.4 Relações entre as séries em análise

Conforme observamos inicialmente neste capítulo, as quatro séries, para o período em análise, tiveram uma alta expressiva, além do que todas, com menor ou maior grau, foram influenciadas pelas crises reportadas na segunda seção. De outra parte, nos gráficos de dispersão nos retornos 13 e 14 percebemos uma clara relação positiva entre as séries do mesmo país (Bovespa/Petrobrás e Dow Jones/Nasdaq). Isto era esperado, pois quando uma série apresenta retornos positivos a outra deveria também apresentar, por estarem refletindo, de alguma forma, o mesmo cenário macroeconômico.

No caso das séries brasileiras a correlação entre as duas séries, reportada na tabela 7, é de 0.3016, o que já era esperado pois a série de Petrobrás é uma das ações mais representativas do Índice Bovespa. Ao calcularmos a correlação das séries para cada metade da amostra, isto é, para os três primeiros anos e depois para os três anos subsequentes encontramos respectivamente os valores de 0.8508 e 0.2144. Com isto podemos verificar que as séries tiveram um comportamento muito mais semelhante na primeira metade *vis-à-vis* a segunda. Isto se deve principalmente pois as ações de Petrobrás foram influenciadas pela alta do preço do petróleo que ocorreu a partir de 99 e portanto pela maior valorização desta empresa frente as demais que compõem o Índice Bovespa.

Além disto verificamos uma correlação de 0.4076 para os retornos ao quadrado das duas séries. Com isto, temos que há uma relação entre a volatilidade das duas séries, ou seja, quando uma série se torna mais volátil, o mesmo ocorre com a outra.

Para as séries americanas a correlação verificada na tabela 7 foi de 0.6302, mostrando que as duas séries americanas mostram uma clara relação e pareceram andar juntas por todo

o tempo considerado. Diferentemente do que ocorreu para as séries brasileiras, as duas séries americanas apresentaram para as partes da amostra, isto é, para os três primeiros anos e os três últimos valores para a correlação bem próximos, sendo estes respectivamente de 0.6250 e 0.6357. Finalmente temos que a correlação entre os retornos ao quadrado das duas séries é de 0.6464, mas uma vez um valor expressivo e que indica que as volatilidades tem um comportamento semelhante para estas séries.

Entretanto ao observarmos as correlações entre as séries de retorno entre os dois países verificamos, pela tabela 7, que não há claramente uma correlação expressiva entre os índices, mesmo que para alguns períodos curtos de tempo tenha havido uma grande correlação entre as duas séries.

Estes resultados fazem com que esperemos encontrar uma relação entre os regimes das duas séries de cada país muito mais forte do que entre séries de diferentes países. De outra parte, para alguns momentos curtos do tempo, observaremos que as duas séries possuem uma alta correlação, principalmente nos regimes de alta volatilidade, nos quais uma crise tenha causado nervosismo em todo o mercado, e portanto haja uma forte correlação entre os diversos regimes. Finalmente não observamos nenhuma clara evidência de correlação entre diferentes instantes do tempo para as séries. Ou seja, não há uma clara correlação entre, por exemplo, a série de Petrobrás em t e a série de Índice Bovespa em $t + 1$:

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Petrobrás	1	0.301593	0.013824	0.041399
Bovespa	0.301593	1	0.004620	0.016856
Nasdaq	0.013824	0.004620	1	0.630230
Dow Jones	0.041399	0.016856	0.630230	1

7. Correlação entre os retornos das séries entre 1994 e 2000

1.5 Conclusões

Neste capítulo observamos para as séries em análise basicamente que:

- todas as séries foram influenciadas, em maior ou menor proporção, pelas crises que abalaram o mercado financeiro ao longo da segunda metade da década de 90. A consequência destes choques foi um grande aumento da volatilidade, além de uma diminuição dos retornos, para os períodos imediatamente subsequentes a estas crises.

- as séries brasileiras, Índice Bovespa e série de Petrobrás, são muito mais voláteis que as duas séries americanas em análise.

- todas as séries apresentam uma clara assimetria de respostas a choques, sendo que são muito mais sensíveis a choques negativos que a choques positivos, ou seja, quando o mercado cai a série tem uma volatilidade muito maior do que quando este sobe.

- as séries em análise apresentam alguma assimetria, esta entretanto pode estar ligada aos valores extremos observados.

- há presença de caudas pesadas, ou seja, leptocurtose para todas as séries de retornos. Com isto, distribuições leptocurticas, como a t-Student, podem ser mais adequadas para modelarmos os retornos das séries.

- existem evidências de estrutura autoregressiva para as séries, em especial para as séries brasileiras, porém, dado a presença de estruturas não-lineares para as séries esta evidência é não pode ser confirmada.

- as séries claramente apresentam estruturas não-lineares, devido a presença de estrutura na volatilidade.

- existe tanto para as séries brasileiras, Índice Bovespa e Petrobrás, quanto para as séries americanas uma clara correlação tanto na média quanto na volatilidade destas. Entre as séries dos dois países esta relação não se verifica ou é muito tênue.

11. Histograma da série de retornos do Índice Nasdaq

12. Histograma da série de retornos do Índice Dow Jones

13. Diagrama de dispersão

14. Diagrama de dispersão

Appendix A

Apêndice: Conceitos Básicos

A.0.1 Autocovariância e autocorrelação

Seja uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$. A função de autocovariância desta série será dada por:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(Y_{t+h}; Y_t)$$

De outra parte, a função de autocorrelação será dada por:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \text{Cor}(Y_{t+h}; Y_t)$$

A.0.2 Ergodicidade

Uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dita ergódica na média quando:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \xrightarrow{P} E(Y_t)$$

onde $\xrightarrow{P}$ representa convergência em probabilidade²⁷. Além disto, temos que a série é dita ergódica na variância quando:

²⁷ Uma referência dos conceitos de convergência é dada em Mittelhammer (1996).

$$\frac{1}{T_i - j} \sum_{t=j+1}^T (Y_{t-i} - 1)(Y_{t-i-h} - 1) \neq \rho(h), \forall h \in \mathbb{Z}$$

A.0.3 Estacionariedade

Uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dita estacionária, de forma geral, se ela tem propriedades estatísticas similares para outro período da série $\{Y_{t+h}; t = 0; 1; 2; \dots\}$ $\forall t \in \mathbb{Z}$. Os processos estacionários podem ser dividido em dois tipos:

1. Covariantes estacionários
2. Estritamente estacionários

O processo é covariante estacionário - ou estacionário de segunda ordem - se possui média constante, variância finita e as autocovariâncias independem do tempo. Matematicamente teremos que:

$$E[Y_t] = \mu; \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$E[Y_t^2] = \text{constante} < \infty; \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$E[(Y_{t-i} - \mu)(Y_{t-i-h} - \mu)] = \gamma_h; \forall t; h \in \mathbb{Z}$$

O processo estritamente estacionário $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dado pela condição de que $(Y_1; Y_2; \dots; Y_n)$ e $(Y_{1+h}; Y_{2+h}; \dots; Y_{n+h})$ $\forall n; h \in \mathbb{Z}$ tem a mesma distribuição. Trivialmente observamos que qualquer processo estritamente estacionário é covariante estacionário.

A.0.4 Linearidade

Uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dita linear se puder ser descrita da seguinte forma:

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i}$$

onde o processo $\{\varepsilon_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é ruído branco estrito, e $\{a_i; i = 0; 1; 2; \dots\}$ é uma sequência de constantes tal que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

A.0.5 Estatística Q

Ljung *et alli* (1978) apresentam a estatística dada por:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{(T-k)}$$

onde Q tem distribuição χ^2 com s graus de liberdade.

A.0.6 Ruído Branco

Uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dita ruído branco se possui média constante - $E[Y_t] = \mu$; $\forall t \in \mathbb{Z}$ -, e as autocovariâncias são nulas - $E[(Y_t - \mu)(Y_{t-h} - \mu)] = 0$; $\forall t, h \in \mathbb{Z}$:
Para esta série ser covariante estacionária teremos ainda que a variância deve ser finita e constante - $E[Y_t^2] = \sigma^2 < \infty$; $\forall t \in \mathbb{Z}$:

A.0.7 Ruído Branco Estrito

Uma série $\{Y_t; t = 0; 1; 2; \dots\}$ é dita ruído branco estrito se as observações Y_t são independentes.

A.0.8 Teste LM ARCH - Engle (1982)

Engle (1982) apresenta um teste simples para testar se os resíduos de uma regressão exibem alguma estrutura na variância. Este teste é baseado no princípio do multiplicador de Lagrange. Primeiro é estimado a regressão dada por:

$$y_t = x_t' \beta + u_t \quad (1)$$

Com os resíduos da regressão (A.1) - u_t - fazemos a seguinte regressão:

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \epsilon_t$$

para $t = 1, 2, \dots, T$. O tamanho da amostra - T - vezes o R^2 centrado da regressão converge em distribuição para uma χ^2 com m graus de liberdade sobre a hipótese nula que u_t é i.i.d. $N(0, \sigma^2)$:

A.0.9 Teste de viés de sinal - Engle e Ng (1993)

Engle e Ng (1993) apresentam um teste para verificar se há *leverage effect* nos resíduos da regressão (A.1). Com os resíduos desta regressão são calculadas três regressões dadas por:

$$u_t^2 = \alpha + \beta_1 S_{tj-1}^i u_{tj-1} + \beta_1 u_{tj-1}^2 + \beta_2 u_{tj-2}^2 + \dots + \beta_m u_{tj-m}^2 + \epsilon_t \quad (\text{A.2})$$

$$u_t^2 = \alpha + \beta_1 S_{tj-1}^+ u_{tj-1} + \beta_1 u_{tj-1}^2 + \beta_2 u_{tj-2}^2 + \dots + \beta_m u_{tj-m}^2 + \epsilon_t \quad (\text{A.3})$$

$$u_t^2 = \alpha + \beta_1 S_{tj-1}^+ u_{tj-1} + \beta_2 S_{tj-1}^i u_{tj-1} + \beta_1 u_{tj-1}^2 + \beta_2 u_{tj-2}^2 + \dots + \beta_m u_{tj-m}^2 + \epsilon_t \quad (\text{A.4})$$

onde S_{tj-1}^i é uma variável *dummie* igual a 1 quando $u_{tj-1} < 0$ e 0 quando $u_{tj-1} \geq 0$; e

$$S_{tj-1}^+ = 1 - S_{tj-1}^i;$$

Para as regressões (A.2) e (A.3) temos que o teste será dado pela estatística t do parâmetro β_1 : De outra parte, para a regressão (A.4) temos que o tamanho da amostra - T - vezes o R^2 centrado da regressão converge em distribuição para uma χ^2 com 2 graus de liberdade sobre a hipótese nula que u_t é i.i.d. $N(0; \sigma^2)$:

Chapter 2

Modelos de Volatilidade Condicional

Ao longo da década de 90, o mercado financeiro mundial sofreu um conjunto de choques - as crises financeiras - que abalaram em muito a grande maioria dos mercados, conforme ilustramos no capítulo anterior. Estas crises provocaram grandes prejuízos a grupos financeiros mundiais, entre outros: *Barings Bank*, *Long Term Capital Management*, *Metallgesellschaft*, *Orange County* e a grupos brasileiros: FonteCidam e Banco Marka²⁸. Estes prejuízos ocorreram principalmente porque estas instituições não monitoraram de forma apropriada o risco inerente as posições que possuíam no mercado financeiro. Várias instituições financeiras e/ou acadêmicas, durante os últimos anos, tentaram criar ferramentas de controle de risco para o mercado financeiro, dado as crises e perdas financeiras provocadas por estas.

A ferramenta mais importante e que ganhou maior destaque e respeitabilidade no mercado financeiro, para monitorar o risco de mercado, foi o *Value-at-Risk (VaR)*, desenvolvida por J. P. Morgan (1994). Para uma análise mais detalhada deste método ver, entre outros, Jorion (2000) e Dowd (1998)²⁹. Um insumo importante para este modelo de risco, assim como os demais, é o cálculo da volatilidade condicional. Os dois primeiros métodos utilizados pelos sistemas de risco para o cálculo da volatilidade foram o desvio-padrão histórico e o alisamento exponencial (EWMA). O primeiro método depende muito

²⁸ Uma análise das perdas financeiras das instituições internacionais mencionadas é encontrada entre outros em Jorion (2000) e Duarte (1998).

²⁹ Para uma análise das ferramentas disponíveis para controle de risco no mercado brasileiro ver o site <http://www.risktech.com.br>.

do tamanho da janela escolhida e dá um peso igual a todas as observações desta janela. De outra parte, o EWMA apresenta para os retornos uma distribuição não-condicional degenerada, sem encontrar base empírica para este fato.

Na literatura econométrica duas classes de modelos lidam com o problema da estimação da dinâmica e previsão das volatilidades dos ativos financeiros. A primeira classe de modelos que tenta modelar a volatilidade dos ativos financeiros foi apresentada na literatura inicialmente por Taylor (1980). Neste estudo, onde a volatilidade condicional é modelada como uma variável não-observada, temos a classe de modelos de volatilidade estocástica. Devido as dificuldades teóricas e computacionais existentes na época este modelo só se tornou popular na literatura econométrica após o trabalho de Harvey *et alli* (1994) e Ruiz (1994). Nestes dois trabalhos é utilizada a estimação pelo método de quase-máxima verossimilhança e a estimativa para a volatilidade é obtida pelo filtro de Kalman (1960). Nos últimos anos com o desenvolvimento computacional foi possível que outros métodos intensivos computacionalmente surgissem. Entre estes podemos destacar o trabalho de Jacquier *et alli* (1994), que propõe um procedimento bayesiano para a estimação de modelos bayesianos, e Andersen e Sorensen (1996), que propõe uma aplicação do método generalizado dos momentos (**GMM**) para estimar aos parâmetros dos modelos de volatilidade estocástica. Neste trabalho não desenvolveremos esta classe de modelos, devido a sua maior complexidade para os modelos que incorporam mudança de regime.

Outro modelo que surge na literatura econométrica para tentar modelar a volatilidade condicional surge com o trabalho de Engle (1982), que tenta modelar a volatilidade da inflação inglesa entre 1955 e 1977 utilizando a volatilidade passada. Este é denominado *Au-*

toregressive Condicional Heteroscedastic Model (ARCH). Este modelo foi generalizado por Bollerslev (1986) que acrescenta à dinâmica da volatilidade condicional as próprias volatilidades condicionais nos instantes anteriores, desenvolvendo o *Generalized Autoregressive Condicional Heteroscedastic Model (GARCH)*. Com isto obtemos um modelo mais parcimonioso para descrever esta dinâmica.

Nos trabalhos de Bollerslev *et alli* (1992) e Bollerslev *et alli* (1994) são apresentados um grande conjunto de possíveis variantes deste modelo GARCH. Entre os mais importantes temos os modelos ARCH-M introduzido na literatura por Engle *et alli* (1987), IGARCH introduzido por Bollerslev (1987), GARCH-L introduzido por Glosten *et alli* (1989) e EGARCH introduzido por Nelson (1991). Para uma análise mais completa e aprofundada destes modelos ver Gouriéroux (1997).

Nas próximas secções apresentaremos estes modelos de forma mais detalhada.

2.1 Desvio-padrão histórico.

A medida de risco mais simples usada no mercado financeiro é simplesmente o desvio-padrão com janela móvel. Nesta medida as últimas n observações tem um peso igual no cálculo da volatilidade da série em análise. Esta é definida simplesmente como³⁰:

$$h_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_{t-i}^2}{n}}$$

³⁰ Para todos os modelos desta seção foi assumido média zero.

15. Volatilidade da série de Petrobrás utilizando desvio-padrão móvel

A desvantagem deste método consiste basicamente neste modelo dar peso igual a todas as observações independente destas terem ocorrido em $t-1$ ou $t-n$. Sabemos, observando as séries de retornos reais, que existem, conforme apresentamos na seção anterior, conglomerados de volatilidade, que fazem com que após uma observação alta em módulo, teremos outra observação alta e vice-versa. Esta importância maior das observações que ocorreram nos períodos mais recentes é dada pelos próximos modelos apresentados, porém não ocorre quando usamos o desvio-padrão histórico. Um ponto importante para os modelos de desvio-padrão histórico com janela móvel é o tamanho desta janela.

No gráfico 15 temos as volatilidades anualizadas estimadas por desvio-padrão móvel para as janelas móvel de 200, 50 e 10 dias para a série de Petrobrás³¹. Podemos obser-

³¹ A série de volatilidade anual é obtida por:

$$h_t^{\text{anual}} = h_t^{\text{diário}} \sqrt{252}$$

var que a série de volatilidade de 10 dias é muito mais errática que a série de 50 dias e esta é muito mais errática do que a série de 200 dias. Este fato reflete simplesmente que quanto menor a janela maior a influência de cada observação e portanto a volatilidade estimada responde de forma mais rápida as oscilações de mercado. Para a série com janela de 10 dias observamos que após as três crises principais pelas quais passou a economia esta série reagiu muito rapidamente e com uma intensidade muito forte em relação as demais estimativas de volatilidade.

Observamos nitidamente nestas séries o efeito causado pela crise da Ásia em outubro de 1997. A série de janela de 200 dias sofre um aumento na volatilidade muito menor, porém este efeito é estendido por um período de tempo muito maior, fazendo com que na primeira metade do ano de 1998, a volatilidade segundo esta série fosse muito maior do que usando a série de 50 dias. Verificamos o mesmo efeito durante as duas crises subsequentes: a crise russa e a desvalorização do Real. Para os momentos de calma no mercado estas três séries apresentam um comportamento muito semelhante, como, por exemplo, durante 1996. Portanto, a principal diferença entre os modelos está na resposta destes a choques exógenos, que é uma função da janela de dados escolhida³².

O problema deste método de estimação é a escolha do tamanho da janela ótima e o fato de que todas as observações tem o mesmo peso para o cálculo da volatilidade. O próximo método apresentado a seguir -o alisamento exponencial- tenta lidar com estes dois problemas.

³² Por motivos de espaço só fizemos o gráfico e a análise da série de Petrobrás, porém os resultados para as demais séries são muito semelhantes.

2.2 Alisamento Exponencial (EWMA).

Uma alternativa ao modelo apresentado anteriormente é utilizarmos o modelo de Alisamento Exponencial (EWMA). Este modelo apresentado em J.P. Morgan (1997), e utilizado em quase todos os sistemas de risco que seguem a metodologia VaR, ganhou grande destaque recentemente no mercado financeiro. Este modelo é definido por³³:

$$r_t = u_t h_t \quad u_t \sim N(0; 1)$$

$$h_t^2 = (1 - \alpha) r_{t-1}^2 + \alpha h_{t-1}^2 \quad 0 < \alpha < 1$$

Neste modelo a volatilidade condicional da série de retornos é uma função da volatilidade condicional em $t-1$ e também do último choque. A ponderação dos pesos entre estes dois componentes é dado por α ; denominado de fator de decaimento exponencial. Quanto maior este fator for próximo de 1, maior a persistência de um choque passado tem na série, de outra parte, quanto menor este fator maior será o peso dado a última observação. Normalmente a escolha do fator de decaimento é feita de forma *ad hoc*, sendo os valores 0.97 e 0.94 os mais comuns. Estes valores foram sugeridos em J.P. Morgan (1997) uma vez que foram os valores que minimizaram para dados diários e mensais respectivamente o erro de previsão um passo-à-frente, segundo o critério de RMSE (*Root Mean Square Error*). O erro de previsão um passo-à-frente é definido por:

$$e_{t+1|t} = r_{t+1} - h_{t+1}(\alpha)$$

³³ Para todos os modelos desta seção, assim como para os modelos de desvio-padrão histórico, foi assumido média zero.

16. Volatilidade para a série de Petrobrás

Além disto, o critério de RMSE é definido como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (e_{t+1|t})^2}$$

Com isto podemos escolher o melhor parâmetro para λ , minimizando a função acima.

No gráfico 16 temos a comparação entre o EWMA com lambda de 0.97 e desvio-padrão com janela de 50 dias, para a série de Petrobrás. Observamos pelo gráfico que a série do EWMA reage de forma mais rápida as crises porém a persistência dos choques, isto é, o tempo que estes choques afetam a volatilidade é muito menor que a série de volatilidade com desvio-padrão móvel de 50 dias.

O modelo de alisamento exponencial sofre entretanto do problema de que a volatilidade não-condicional é zero, sendo então a distribuição dos retornos degenerada uma vez que a média é zero e a variância indeterminada. O que conforme observamos no capit-

ulo anterior não tem nenhum fundamento empírico. Na próxima secção apresentaremos os modelos de volatilidade determinística: os modelos da família GARCH.

2.3 Os modelos GARCH.

Uma classe de modelos muito vasta na literatura econométrica é a classe de modelos GARCH. Esta classe de modelos, foi apresentada inicialmente na literatura econométrica por Engle (1982). O carácter inovador deste artigo foi de modelar a volatilidade de uma série econômica através do uso de modelos autoregressivos na volatilidade. Neste estudo é discutida a volatilidade da inflação inglesa como uma medida de incerteza. Este modelo é definido como:

$$\begin{aligned} r_t &= c + \sum_{j=1}^p \hat{A}_j r_{t-j} + e_t \\ e_t &= u_t h_t \quad u_t \sim N(0, 1) \\ h_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2; \quad \omega > 0, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1 \end{aligned}$$

Este modelo é definido como ARCH (q). As restrições sobre os parâmetros são necessárias para garantir que a volatilidade condicional sempre seja positiva. Temos para este modelo que a variância não-condicional é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i)} \quad (5)$$

A volatilidade condicional pode ser maior ou menor que a volatilidade não-condicional dependendo dos valores de r_{t-i} : Um modelo mais abrangente que este modelo é apresentado por Bollerslev (1986). Este modelo é dado por:

$$r_t = c + \sum_{j=1}^p \alpha_j r_{t-j} + e_t \quad (\text{A.6})$$

$$e_t = u_t h_t \quad u_t \sim N(0, 1) \quad (\text{A.7})$$

$$h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2; \quad \omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0; \quad \beta_j \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

Este modelo apresenta uma série de vantagens sobre o modelo ARCH(q), por possuir uma estrutura mais genérica. Assim como no modelo ARCH(q) algumas restrições tem de ser colocadas para garantir que a volatilidade condicional seja positiva³⁴.

A grande maioria dos trabalhos econométricos empíricos conclui que raramente são encontrados modelos GARCH com ordem de parâmetros α e β maiores ou mesmo iguais a 2³⁵. O modelo GARCH(1,1) é, desta forma, o melhor modelo reportado em inúmeros trabalhos empíricos, tanto para dados internacionais quanto brasileiros.

Os modelos GARCH apresentam para a soma dos coeficientes α e β valores muito perto de um, demonstrando assim a enorme persistência das séries financeiras³⁶. Devido a esta evidência empírica Bollerslev *et alli* (1986) desenvolveram o modelo IGARCH (*In-*

³⁴ Nelson e Cao (1992) demonstram que em muitos casos para os modelos GARCH(p,q) podemos impor condições menos restritivas. Porém para o caso do modelo GARCH(1,1), o mais usual na literatura empírica, as condições usuais propostas por Bollerslev (1986) são válidas.

³⁵ Neste trabalho estimaremos modelos GARCH com $\alpha; \beta \leq 2$: Palm (1996) verifica que na grande maioria dos casos os melhores modelos são os modelos GARCH(1,1) e GARCH(1,2). Este resultado é semelhante ao modelo usualmente encontrado para os modelos ARMA.

³⁶ Discutiremos ao longo deste trabalho se esta é uma persistência real ou talvez espúria, como demonstram Lamoureux e Lastrapes (1990).

tegrated GARCH). Este modelo é dado por (A.6), (A.7) e (A.8) porém com a restrição que:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{i=1}^q \beta_i = 1 \quad (9)$$

Com isto temos que este modelo não é estacionário pois a variância não-condicional evolui ao longo do tempo, além do que os choques que ocorrem na série persistem ao longo do tempo.

Os modelos apresentados até o momento incorporam alguns dos principais fatos estilizados: conglomerados de volatilidade, não-linearidade e leptocurtose. De outra parte, estes modelos não incorporam o *leverage effect*, isto é, o fato da volatilidade aumentar muito mais quando há um choque negativo do que quando há um choque positivo, conforme verificado empiricamente na seção anterior.

Para tentar modelar este fato apresentamos dois modelos que levam em conta o *leverage effect*: o modelo GARCH-L (GARCH *with leverage effect*) e o modelo EGARCH (*Exponential GARCH*)³⁷. O modelo GARCH-L é dado por (A.6) e:

$$h_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{t-j}^2 + \gamma d_{t-1} e_{t-1}^2 \quad (10)$$

³⁷ Existe na literatura um vasto conjunto de modelos da família GARCH assimétricos entre eles podemos destacar: o modelo QGARCH (*Quadratic GARCH*) apresentado por Sentana (1995), LSTGARCH (*Logistic Smooth Transition GARCH*) apresentado por Hagerud (1996) e A-PARCH (Assimetric Power ARCH) introduzido por Ding *et alli* (1993). Para detectarmos a existência de estruturas assimétricas ver os trabalhos de Engle e Ng (1993) e Hagerud (1997).

onde $d_{t_i-1} = 1$ se $r_{t_i-1} < 0$ e $d_{t_i-1} = 0$ se $r_{t_i-1} \geq 0$, com $0 < \alpha < 1$: Com isto é obtido pela dinâmica deste modelo o *leverage effect*, dado que α é sempre positivo.

O outro modelo que incorpora o *leverage effect* em sua dinâmica é o modelo EGARCH introduzido por Nelson (1991). Este modelo é dado por:

$$\ln(h_t^2) = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t_i} + \sum_{i=1}^p \beta_i e_{t_i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \ln(h_{t_j}^2) \quad (11)$$

A assimetria é dada pelos coeficientes de α_i : Sendo $\alpha_i < 0$ teremos que um choque positivo diminui a volatilidade e vice-versa. Além disto neste modelo não temos de colocar nenhuma restrição em nenhum parâmetro.

Os modelos apresentados nesta seção serão os modelos que utilizaremos nas estimações feitas para este capítulo.

2.3.1 Previsão dos modelos um passo-à-frente e medida de persistência

A expressão para a previsão da variância condicional nos modelos GARCH-L m passos à frente, é dada por³⁸:

$$h_{t+m|t} = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t+m_i|t} + \sum_{j=1}^q \gamma_j h_{t+m_j|t} + \frac{\alpha}{2} h_{t+m_i|t} \quad (12)$$

Temos então que a previsão m passos à frente segue uma equação a diferenças com parâmetro de decaimento dado por:

³⁸ As expressões de previsão para os modelos ARCH e GARCH são casos particulares deste modelo.

$$\rho = \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j + \frac{\gamma}{2} \quad (13)$$

Este valor é a persistência nos modelos GARCH-L. Para os modelos EGARCH não há uma fórmula fechada para a persistência porém ela pode ser aproximada por, $\rho = \sum_{j=1}^q \beta_j$. Na maioria dos casos em que são estimados estes modelos a persistência é muito alta, perto de 1. Lamoureux *et alli* (1990) mostram que muitas vezes esta alta probabilidade pode ser causada por quebras estruturais nas séries financeiras. Discutiremos mais a frente melhor esta alta persistência observada nos modelos acima apresentados.

2.3.2 Estimação de máxima verossimilhança

A estimação dos modelos apresentados na subsecção anterior é feita por máxima verossimilhança condicional nas primeiras observações³⁹. Temos ainda de definir, para todos os modelos, qual a distribuição condicional de y_t . A primeira distribuição utilizada na literatura foi a distribuição Normal, no trabalho de Engle (1982), posteriormente Bollerslev (1987) sugeriu a utilização da distribuição t-Student que possui caudas mais pesadas, compatíveis com a maioria das distribuições das séries financeiras. Para a distribuição Normal teremos então,

$$f(y_t|Z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - Z_t^0)^2}{2h_t} \right\} \quad (14)$$

e, portanto, a log-verossimilhança condicional nas primeiras observações será dada por:

³⁹ Existem na literatura outros métodos de estimação tanto não-paramétricos quanto semi-paramétricos. Uma referência destes métodos é dada em Hamilton (1994).

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \sum_{t=1}^T \log f(y_t | Z_t; \mu) \\
&= - \sum_{t=1}^T \left[\frac{\mu_1}{2} \log(2\mu_1) + \frac{\mu_1}{2} \sum_{t=1}^T \log(h_t) + \frac{\mu_1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{y_t^2 - Z_t^2}{h_t} \right] \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

onde h_t é dado por (A.10) ou (A.11), $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ e μ é o vetor de parâmetros de h_t .

De outra parte, podemos utilizar a distribuição t-Student com ν graus de liberdade, sendo ν também estimado por máxima verossimilhança. Para esta distribuição temos que a função log-verossimilhança é dada por :

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= -T \log \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \left(\frac{\nu}{2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \sum_{t=1}^T \log(h_t) \right] \\
&\quad - \sum_{t=1}^T \frac{(v+1)}{2} \log \left(1 + \frac{y_t^2 - Z_t^2}{h_t(v-2)} \right)
\end{aligned}$$

A estimação para outras distribuições pode ser obtida de forma trivial. Hamilton *et alli* (1994) e Nelson (1991) utilizam a distribuição GED (*Generalized Error Distribution*) para os modelos GARCH e EGARCH respectivamente. De outra parte, Engle *et alli* (1991) propõem estimar a densidade condicional de forma não-paramétrica. Esta é feito utilizando um *spline* linear e os autores verificam que este método é bem mais eficiente quando a distribuição amostral é altamente não normal e/ou assimétrica.

2.4 Estimações

Nas próximas subsecções apresentamos os resultados das estimações dos parâmetros, para as quatro séries apresentadas no primeiro capítulo, dos modelos apresentados neste capí-

tulo. Utilizamos as duas distribuições comentadas na seção anterior, isto é, a distribuição Normal e t-Student. Para modelarmos a média usamos um autoregressivo de primeira ordem com constante e também só a constante.

As estimações deste capítulo foram feitas utilizando o software Gauss 3.2 para Dos e um dos seus pacotes de otimização CML (*Constrained Maximum Likelihood*)⁴⁰. As previsões um passo-à-frente também foram calculadas neste *software*. Os critérios de seleção utilizados neste trabalho, pelos quais escolheremos os melhores modelos estimados para cada série são os critérios de informação de Akaike (1973) e Schwarz (1978) definidos respectivamente por:

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k$$

$$BIC = -2 \ln(L) + \ln(n) \cdot k$$

onde L é a função de verossimilhança avaliada no máximo, n é o número de observações e k é o número de parâmetros a serem estimados.

2.4.1 Série de Petrobrás

As estimações da série de Petrobrás são apresentadas nas tabelas 8 e 10, respectivamente para as distribuições Normal e t-Student⁴¹.

⁴⁰ Ver apêndice C.

⁴¹ As primeiras 6 observações não foram usadas na estimação dos modelos, pois estimamos pelo método de máxima verossimilhança condicionada nas primeiras observações.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-4.1731	-4.1587	3075.42	-4.1855	-4.1674	3085.50
GARCH(1,2)	-4.1711	-4.1531	3074.93	-4.1840	-4.1623	3085.40
GARCH(2,1)	-4.1722	-4.1542	3075.77	-4.1842	-4.1626	3085.61
GARCH(2,2)	-4.1724	-4.1508	3076.90	-4.1839	-4.1588	3086.41
GARCH-L(1,1)	-4.1879	-4.1699	3085.20	-4.2160	-4.1944	3106.87
EGARCH(1,1)	-4.2021	-4.1841	3097.72	-4.2202	-4.1986	3112.04

8. Estimações para a série de Petrobrás utilizando a Distribuição Normal

Podemos verificar inicialmente que os modelos autoregressivos de primeira ordem foram, quando comparados com modelos que tem a mesma estrutura na volatilidade condicional, superiores aos modelos que só tem a constante na média, independente de usarmos a distribuição Normal ou t-Student. Estruturas autoregressivas mais complexas, isto é, com mais de um *lag* de defasagem, foram excluídos por aumentar o número de parâmetros e dificultar a convergência destes modelos para o máximo da função de máxima verossimilhança.

Outra constatação importante para esta série é que os modelos GARCH com parâmetros p e/ou q maiores que 1 são sempre inferiores aos modelos com valores $p=q=1$. Com isto estruturas mais complexas para a ordem dos modelos GARCH e mesmos para os modelos GARCH-L foram excluídos⁴².

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.34	0.18	0.17	0.96	0.40
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.37	0.45	0.36	0.36	0.63	0.47
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.36	0.26	0.27	0.60	0.46
$Q(1)^2$	0.78	0.00	0.97	0.18	0.56	0.94	0.73	0.00	0.90	0.21	0.71	0.81
$Q(6)^2$	0.01	0.00	0.01	0.00	0.02	0.00	0.02	0.00	0.02	0.00	0.04	0.02
$Q(12)^2$	0.03	0.00	0.03	0.02	0.08	0.06	0.08	0.00	0.08	0.05	0.25	0.20

9. Estatísticas de L-Jung Box para a série de Petrobrás utilizando a distribuição Normal

⁴² Para os modelos GARCH-L mesmo os modelos nos quais $p=2$ e/ou $q=2$ mostraram-se, assim como para os modelos GARCH, inferiores pelos critérios de informação.

Outro ponto importante a observar nas tabelas 8 e 10 é que os modelos que utilizam a distribuição t-Student são superiores aos modelos que utilizam a distribuição Normal. Finalmente podemos observar que os modelos que permitem o *leverage effect*, isto é, os modelos GARCH-L e EGARCH são superiores aos modelos que não permitem esta estrutura. Os melhores modelos para a série de Petrobrás no período em análise, segundo os critérios de informação de Akaike e Schwarz, são os modelos EGARCH e GARCH-L.

O modelo EGARCH é dado por:

$$y_t = \underset{(0:0006)}{0:0014} + \underset{(0:0262)}{0:1389}y_{t-1} + e_t,$$

$$\ln(h_t^2) = \underset{(0:1018)}{-0:458} + \underset{(0:0239)}{0:1029}e_{t-1} + \underset{(0:0432)}{0:2438}je_{t-1} + \underset{(0:0113)}{0:9619}\ln(h_{t-1}^2)$$

onde v_t tem distribuição t-Student com $\underset{(1:9478)}{9:1434}$ graus de liberdade⁴³. Para o modelo GARCH-

L temos que:

$$y_t = \underset{(0:0006)}{0:0012} + \underset{(0:0258)}{0:16035}y_{t-1} + e_t,$$

$$h_t^2 = \underset{(0:000009)}{0:000032} + \underset{(0:019399)}{0:03398}e_{t-1}^2 + \underset{(0:02623)}{0:84625}h_{t-1}^2 + \underset{(0:04067)}{0:19424}d_{t-1}^2e_{t-1}^2$$

onde v_t tem distribuição t-Student com $\underset{(2:04690)}{7:42169}$ graus de liberdade⁴⁴. De outra parte, podemos observar nas tabelas 9 e 11 que estes dois modelos conseguem modelar toda a estrutura

⁴³ Os valores em parentêses são os valores dos desvios padrão.

⁴⁴ Os valores em parênteses são os valores dos desvios padrão.

da série a 1% de significância⁴⁵. Verificamos que os modelos que só tem a constante na média do processo não conseguem captar a dinâmica da média do processo.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-4.2047	-4.1867	3099.69	-4.2187	-4.1971	3110.99
GARCH(1,2)	-4.2033	-4.1817	3099.60	-4.2172	-4.1920	3110.89
GARCH(2,1)	-4.2046	-4.1830	3100.62	-4.2182	-4.1931	3111.63
GARCH(2,2)	-4.2051	-4.1799	3101.98	-4.2187	-4.1971	3110.99
GARCH(1,1)-L	-4.2127	-4.1911	3104.46	-4.2361	-4.2109	3122.63
EGARCH(1,1)	-4.2217	-4.2001	3113.18	-4.2396	-4.2144	3127.39

10. Estimações para a série de Petrobrás utilizando a Distribuição t-Student

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.54	0.29	0.27	0.75	0.42
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.45	0.53	0.43	0.45	0.62	0.49
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.37	0.27	0.29	0.60	0.46
Q(1) ²	0.32	0.00	0.94	0.25	0.91	0.72	0.32	0.00	0.90	0.32	0.81	0.86
Q(6) ²	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.02	0.01
Q(12) ²	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.03	0.03	0.00	0.01	0.03	0.14	0.10

11. Estatísticas de L-Jung Box para a série de Petrobrás utilizando a distribuição t-Student

2.4.2 Série do Índice Bovespa

A seguir apresentamos as estimações para a série de Bovespa. Nas tabelas 12 e 14 temos as estimativas dos modelos iguais aos estimados para a série de Petrobrás tanto para a distribuição Normal quanto para a distribuição t-Student. Constatamos mais uma vez a melhor adequação aos dados com o uso da distribuição t-Student e dos modelos autoregressivos. Outra observação importante é, mais uma vez, a verificação de que os modelos que permitem *leverage effect* sejam melhores *vis-à-vis* os modelos que não permitem.

⁴⁵ Por motivos de espaço abreviamos os modelos nestas duas tabelas, assim como em todas as tabelas da estatísticas de Ljung-Box. Os modelos (x,x) reference aos GARCH (x,x), os modelos E(1,1) referem se aos EGARCH(1,1) e os modelos (1,1)L referem se aos GARCH(1,1)-L.

Desta vez entretanto podemos constatar que o modelo GARCH-L é o melhor segundo os dois critérios. Temos abaixo a especificação dos dois modelos.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-4.6552	-4.6409	3439.58	-4.6587	-4.6407	3443.11
GARCH(1,2)	-4.6538	-4.6359	3439.54	-4.6275	-4.6060	3421.11
GARCH(2,1)	-4.6541	-4.6362	3439.74	-4.6574	-4.6358	3443.17
GARCH(2,2)	-4.6528	-4.6313	3439.79	-4.6562	-4.6311	3443.32
GARCH(1,1)-L	-4.6910	-4.6730	3464.60	-4.6990	-4.6775	3471.57
EGARCH(1,1)	-4.6943	-4.6763	3469.41	-4.6996	-4.6781	3474.36

12. Estimações para a série de Bovespa utilizando a Distribuição Normal

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.45	0.12	0.13	0.54	0.29
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.34	0.44	0.30	0.34	0.33	0.32
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.45	0.26	0.18	0.23	0.21	0.18
Q(1) ²	0.92	0.00	0.73	0.18	0.46	0.54	0.21	0.00	0.75	0.29	0.37	0.43
Q(6) ²	0.49	0.00	0.34	0.50	0.75	0.60	0.45	0.00	0.42	0.56	0.68	0.60
Q(12) ²	0.62	0.00	0.52	0.55	0.63	0.62	0.16	0.00	0.60	0.65	0.61	0.62

13. Estatísticas de L-Jung Box para a série de Bovespa utilizando a distribuição Normal

O modelo EGARCH é dado por:

$$y_t = \underset{(0:0005)}{0:0014} + \underset{(0:0264)}{0:0758}y_{t-1} + e_t,$$

$$\ln(h_{t-1}^2) = \underset{(0:0982)}{0:5592} + \underset{(0:0251)}{0:1365}e_{t-1}^2 + \underset{(0:0375)}{0:2611}e_{t-1} + \underset{(0:0108)}{0:9534}\ln(h_{t-1}^2)$$

onde v_t tem distribuição t-Student com $\underset{(2:6969)}{10:8878}$ graus de liberdade⁴⁶. Para o modelo

GARCH-L temos que:

⁴⁶ Os valores em parentêses são os valores dos desvios padrão.

$$y_t = \underset{(0:0005)}{0:00149} + \underset{(0:02724)}{0:08623}y_{t-1} + e_t,$$

$$h_t^2 = \underset{(0:00001)}{0:00003} + \underset{(0:02284)}{0:03197}e_{t-1}^2 + \underset{(0:03015)}{0:80866}h_{t-1}^2 + \underset{(0:04490)}{0:2425}d_{t-1}e_{t-1}^2$$

onde v_t tem distribuição t-Student com 8:92481 graus de liberdade⁴⁷.
(2:45164)

Mais uma vez podemos observar, segundo as tabelas 13 e 15, que os modelos autoregressivos captam a dinâmica da média da série enquanto os modelos sem estrutura autoregressiva não. De outra parte, para a estrutura na variância a grande maioria dos modelos, inclusive os melhores modelos analisados, conseguem captar bem a dinâmica.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-4.6884	-4.6705	3465.07	-4.6914	-4.6699	3468.27
GARCH(1,2)	-4.6869	-4.6654	3464.99	-4.6900	-4.6648	3468.19
GARCH(2,1)	-4.6878	-4.6662	3465.60	-4.6906	-4.6655	3468.65
GARCH(2,2)	-4.6865	-4.6614	3465.65	-4.6894	-4.6607	3468.79
GARCH-L(1,1)	-4.7143	-4.6927	3482.78	-4.7200	-4.6949	3487.99
EGARCH(1,1)	-4.7148	-4.6933	3485.57	-4.7188	-4.6936	3489.46

14. Estimações para a série de Bovespa utilizando a Distribuição Normal

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.20	0.11	0.13	0.30	0.17
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.38	0.28	0.34	0.27	0.24
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.30	0.18	0.24	0.21	0.17
Q(1) ²	0.75	0.00	0.02	0.04	0.53	0.77	0.76	0.00	0.88	0.05	0.47	0.68
Q(6) ²	0.22	0.00	0.11	0.09	0.65	0.37	0.22	0.00	0.04	0.15	0.57	0.35
Q(12) ²	0.39	0.00	0.21	0.17	0.65	0.52	0.41	0.00	0.14	0.30	0.63	0.51

15. Estatísticas de L-Jung Box para a série de Bovespa utilizando a distribuição t-Student

⁴⁷ Os valores em parentêses são os valores dos desvios padrão.

2.4.3 Série do Índice Nasdaq

Para a série do Nasdaq temos segundo as tabelas 20 e 22, resultados muito semelhantes aos anteriores, ou seja, os modelos autoregressivos e com distribuição t-Student são melhores *vis-à-vis* os modelos só com constante e com distribuição Normal.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-5.9745	-5.9604	4520.71	-5.9782	-5.9606	4524.56
GARCH(1,2)	-5.9748	-5.9572	4521.98	-5.9783	-5.9607	4524.56
GARCH(2,1)	-5.9729	-5.9524	4520.51	-5.9766	-5.9555	4524.34
GARCH(2,2)	-5.9757	-5.9545	4523.63	-5.9793	-5.9547	4527.37
GARCH-L(1,1)	-5.9860	-5.9684	4527.43	-5.9922	-5.9710	4533.08
EGARCH(1,1)	-5.9889	-5.9714	4532.65	-5.9931	-5.9720	4536.78

16. Estimações para a série do Nasdaq utilizando a Distribuição Normal

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.51	0.51	0.50	0.42	0.98	0.75
Q(6)	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.06	0.87	0.86	0.86	0.84	0.88	0.90
Q(12)	0.05	0.05	0.05	0.05	0.20	0.07	0.72	0.72	0.72	0.69	0.98	0.72
Q(1) ²	0.36	0.19	0.35	0.25	0.32	0.56	0.48	0.48	0.48	0.36	0.50	0.72
Q(6) ²	0.33	0.45	0.33	0.29	0.49	0.53	0.41	0.42	0.41	0.43	0.62	0.60
Q(12) ²	0.52	0.56	0.53	0.51	0.68	0.76	0.56	0.56	0.56	0.60	0.73	0.77

17. Estatísticas de L-Jung Box para a série do Nasdaq utilizando a distribuição Normal

Outra importante constatação é que os modelos com *leverage effect* são mais uma vez superiores aos modelos GARCH usuais. Para esta série o melhor modelo mais uma vez é o GARCH-L dado por:

$$y_t = \underset{(0:0002)}{0:0009} + \underset{(0:0261)}{0:0976}y_{t-1} + e_t,$$

$$h_t^2 = \underset{(0:00001)}{0:00001} + \underset{(0:01967)}{0:04511}e_{t-1}^2 + \underset{(0:02497)}{0:8964}h_{t-1}^2 + \underset{(0:03241)}{0:10425}d_{t-1}e_{t-1}^2$$

onde v_t tem distribuição t-Student com $\frac{6:3952}{(1:62485)}$ graus de liberdade⁴⁸. Por último, segundo as tabelas 17 e 19 temos que estes modelos com *leverage effect*, assim como todos os modelos autoregressivos, independente da distribuição usada, são capazes de modelar a dinâmica da série em análise.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-5.9966	-5.9790	4538.45	-6.001	-5.9805	4543.24
GARCH(1,2)	-5.9972	-5.9761	4539.88	-6.000	-5.9753	4543.01
GARCH(2,1)	-5.9950	-5.9739	4538.24	-6.001	-5.9776	4544.43
GARCH(2,2)	-5.9963	-5.9717	4540.22	-6.001	-5.9727	4544.69
GARCH(1,1)-L	-6.0100	-5.9889	4546.62	-6.0171	-5.9924	4552.949
EGARCH(1,1)	6.000	-5.9861	4547.64	-6.013	-5.9882	4552.86

18. Estimações para a série do Nasdaq utilizando a Distribuição t-Student

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.69	0.74	0.68	0.57	0.82	0.97
Q(6)	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.06	0.90	0.89	0.89	0.88	0.84	0.83
Q(12)	0.06	0.06	0.06	0.06	0.20	0.08	0.77	0.77	0.77	0.74	0.96	0.73
$Q(1)^2$	0.74	0.27	0.74	0.58	0.68	0.93	0.93	0.84	0.93	0.85	0.98	0.88
$Q(6)^2$	0.20	0.37	0.21	0.36	0.41	0.41	0.25	0.27	0.25	0.49	0.43	0.47
$Q(12)^2$	0.45	0.56	0.45	0.60	0.68	0.70	0.48	0.43	0.48	0.67	0.67	0.72

19. Estatísticas de L-Jung Box para a série do Nasdaq utilizando a distribuição t-Student

2.4.4 Série do Índice Dow Jones

Para a série de Dow Jones, a última série analisada, apenas corroboramos as constatações verificadas ao longo deste capítulo de que os modelos autoregressivos, que contemplam *leverage effect* e utilizam a distribuição t-Student são superiores aos demais modelos. Além disto verificamos que os modelos autoregressivos conseguem captar muito bem a dinâmica da série em análise.

⁴⁸ Os valores em parênteses são os valores dos desvios padrão.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-6.5275	-6.5134	4938.83	-6.5303	-6.5127	4941.95
GARCH(1,2)	-6.5262	-6.5086	4938.83	-6.5290	-6.5079	4941.94
GARCH(2,1)	-6.5258	-6.5082	4938.49	-6.5285	-6.5074	4941.58
GARCH(2,2)	-6.5255	-6.5044	4939.27	-6.5283	-6.5038	4942.46
GARCH(1,1)L	-6.5495	-6.5319	4953.21	-6.5544	-6.5332	4957.83
EGARCH(1,1)	-6.5555	-6.5379	4960.95	-6.5634	-6.5398	4963.23

20. Estimações para a série do Dow Jones utilizando a Distribuição Normal

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.01	0.04	0.01	0.01	0.00	0.02	0.90	0.50	0.90	0.91	0.76	0.78
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Q(1) ²	0.54	0.00	0.59	0.42	0.80	0.77	0.35	0.00	0.39	0.26	0.23	0.92
Q(6) ²	0.33	0.00	0.33	0.39	0.57	0.71	0.29	0.00	0.29	0.33	0.34	0.56
Q(12) ²	0.14	0.00	0.15	0.16	0.22	0.10	0.16	0.00	0.17	0.17	0.16	0.26

21. Estatísticas de L-Jung Box para a série do Dow Jones utilizando a distribuição Normal

O melhor modelo segundo os critérios de informação é o modelo GARCH-L dado

por:

$$y_t = \underset{(0:00022)}{0:00083} + \underset{(0:02436)}{0:04637}y_{t-1} + e_t,$$

$$h_t^2 = \underset{(0:00001)}{0:00001} + \underset{(0:07594)}{0:00755}e_{t-1}^2 + \underset{(0:03954)}{0:91910}h_{t-1}^2 + \underset{(0:07084)}{0:10514}d_{t-1}e_{t-1}^2$$

onde v_t tem distribuição t-Student com $\underset{(1:09157)}{4:89356}$ graus de liberdade⁴⁹.

⁴⁹ Os valores em parentêses são os valores dos desvios padrão.

2.5 Persistência nos modelos estimados.

Nas quatro séries em análise a persistência verificada foi muito elevada. A persistência para os melhores modelos GARCH-L foram para as quatro séries analisadas de 0.98, 0.96, 0.99 e 0.97, respectivamente para as séries de Petrobrás, Bovespa, Nasdaq e Dow Jones.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
GARCH(1,1)	-6.5724	-6.5548	4973.74	-6.5723	-6.5512	4974.70
GARCH(1,2)	-6.5710	-6.5500	4973.74	-6.5710	-6.5463	4974.70
GARCH(2,1)	-6.5707	-6.5495	4973.46	-6.5703	-6.546	4974.42
GARCH(2,2)	-6.5706	-6.5460	4974.39	-6.5705	-6.5423	4975.32
GARCH-L(1,1)	-6.5787	-6.5576	4983.78	-6.5895	-6.5648	4985.40
EGARCH(1,1)	-6.5792	-6.5623	4985.35	-6.5885	-6.5639	4987.96

22. Estimações para a série do Dow Jones utilizando a Distribuição t-Student

	AR(0)						AR(1)					
	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,1)L	E(1,1)
Q(1)	0.02	0.05	0.02	0.02	0.01	0.02	0.26	0.62	0.26	0.34	0.35	0.56
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.01	0.02	0.09
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02
$Q(1)^2$	0.22	0.00	0.23	0.05	0.77	0.23	0.17	0.00	0.20	0.02	0.70	0.34
$Q(6)^2$	0.15	0.00	0.15	0.11	0.62	0.89	0.14	0.00	0.14	0.08	0.60	0.59
$Q(12)^2$	0.08	0.00	0.08	0.04	0.28	0.24	0.09	0.00	0.09	0.04	0.31	0.10

23. Estatísticas de L-Jung Box para a série do Dow Jones utilizando a distribuição t-Student

Diebold (1986) observa que esta alta persistência pode ser provocada pela não observação da mudança da volatilidade não-condicional ao longo da série em análise. Lamoureux e Lastrapes (1990) verificam, através de simulações, para modelos GARCH que a persistência é, em muito, aumentada quando temos quebras estruturais na variância não-condicional. Isto é, temos momentos em que a série apresenta uma volatilidade muito maior que em outros períodos e quando não controlamos por isto podemos ter uma persistência estimada muito maior que a real. Uma forma de solucionar este problema é colocar *dummies* ao longo da série. Devemos destacar, entretanto, que esta solução é *ad hoc*.

Ativo	Modelo com dummies				Modelo sem dummies			
	ϕ_1	b_1	ω	MV	ϕ_1	b_1	ω	MV
Bradesco PN	0,339	0,463	0,8023	4,15	0,317	0,608	0,9251	9,90
Cemig PN	0,032	0,947	0,9788	33,41	0,030	0,961	0,9907	75,48
Cosipa PNB	0,105	0,836	0,9411	12,42	0,097	0,886	0,9831	41,63
Duralex PN	0,179	0,692	0,8712	6,03	0,204	0,743	0,9474	13,84
Eletrobrás ON	0,117	0,839	0,9562	16,49	0,122	0,865	0,9864	51,65
Eletrobrás PNB	0,162	0,775	0,9372	11,69	0,154	0,827	0,9809	37,00
Itaúbanko PN	0,219	0,650	0,8690	5,94	0,219	0,668	0,8875	6,81
Klabin PN	0,153	0,703	0,8569	5,49	0,144	0,754	0,8979	7,44
Petrobrás PN	0,167	0,760	0,9262	10,04	0,159	0,825	0,9841	44,34
Telebrás PN	0,178	0,757	0,9345	11,23	0,181	0,792	0,9726	25,95
Unipar PNB	0,084	0,784	0,8680	5,90	0,098	0,856	0,9535	15,55
Unibanco PN	0,219	0,482	0,7012	2,95	0,161	0,749	0,9102	8,37
Usiminas PN	0,169	0,705	0,8739	6,14	0,127	0,857	0,9846	45,68
Vale R. Doce PN	0,216	0,678	0,8944	7,21	0,221	0,733	0,9541	15,77
Ibovespa	0,176	0,756	0,9326	10,93	0,168	0,827	0,9944	124,52
Média	0,1678	0,7218	0,8896	9,93	0,1595	0,7946	0,9542	28,53

24. Persistência na variância de ativos brasileiros

Na tabela 24 observamos a estimação de modelos GARCH com e sem *dummies* na constante do modelo GARCH, para quinze séries financeiras brasileiras sendo estas do mesmo período da série de Ibovespa, entre 04/07/1994 e 30/06/1998. Para o modelo com *dummies* colocamos duas *dummies*, praticamente dividindo a nossa série em três períodos⁵¹. Podemos constatar pela tabela 24 que a persistência e a meia-vida estimadas para as séries em análise diminuem aproximadamente de 0.95 para 0.89, e de 29 dias para 10 dias respectivamente⁵². Este resultado indica que a variância não-condicional não é única no período estimado. Na tabela 25 observamos o resultado de um experimento de Monte

⁵⁰ $\omega = \phi_1 + b_1$

⁵¹ As *dummies* usadas foram definidas como: a primeira (d1) entre as observações 401 e 700 e a segunda (d2) colocada a partir da observação 701. Com isto permitimos a nossa série ter três volatilidades não-condicionais diferentes. O modelo GARCH (p,q) com dummies é definido por (1), (A.28),

$$h_t = a_0 + a_{01}d_1 + a_{02}d_2 + \sum_{i=1}^p a_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \phi_j h_{t-j}$$

⁵² A meia-vida das séries é calculada como,

$$HL = 1 - \frac{\log 2}{\log \omega} \quad (16)$$

Carlo onde geramos séries com três variâncias não-condicionais e observamos que mesmo tendo uma baixa persistência teórica - 0.60 - quando não controlamos por estas quebras estruturais na série obtemos modelos com persistências muito altas, próximas de 1⁵³. Além disto os valores do coeficiente π_1 aumentam muito em relação ao modelo gerado, enquanto que para o coeficiente θ_1 ocorre o contrário.

	Modelo Com dummies		Modelo sem dummies		
Simulação 1					
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	
c	-0.13957	0.17738	-0.14366	0.18269	-0.15
@ ₀	22.029	7.3379	0.93179	1.2211	20
@ ₁	0.14896	0.039469	0.076606	0.041720	0.15
= ₁	0.40966	0.15853	0.90957	0.059436	0.45
± ₁	21.906	8.1076	-	-	20
± ₂	-11.023	4.2393	-	-	-10
persistência	0.55862		0.98618		0.60
Simulação 2					
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	
c	-0.14374	0.12439	-0.14584	0.13067	-0.15
@ ₀	26.250	8.4227	0.25414	0.16784	24
@ ₁	0.14989	0.041028	0.088587	0.028947	0.15
= ₁	0.41240	0.15291	0.90722	0.030843	0.45
± ₁	-11.006	4.4699	-	-	-10
± ₂	-21.886	7.1698	-	-	-20
persistência	0.56228		0.99580		0.60

25. Resultados da Simulação de Monte Carlo

2.6 Comparação das previsões dos modelos

Nesta seção compararemos as previsões dos modelos apresentados nas seções anteriores.

Utilizaremos as quatro funções perda apresentadas por Hamilton e Susmel (1994). Estas são *Mean Squared Error* (MSE), *Mean Absolute Error* (MAE), *Mean Squared Error in log's* (LE2) e *Mean Absolute Error in log's* (jLEj)⁵⁴. Além disto observamos a frequência

⁵³ Foram simuladas 1.000 séries com 750 observações para cada experimento, tendo cada um dos dois procedimentos completos durado aproximadamente 6 horas num computador Pentium 166.

⁵⁴ Para uma análise mais completa das características das funções perda ver Diebold e Lopez (1996) e

de observações que caem fora do intervalo de previsão um passo-à-frente a 5% de significância, conforme Pereira *et alli* (1999). Foram realizados dois exercício de previsão, o primeiro guardando as últimas 100 e o segundo utilizando-as⁵⁵. Para simplificar nossa comparação escolhemos apenas os três melhores modelos pela estatística de Schwarz para cada série. As fórmulas das funções perdas são dadas por:

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2 \cdot h_t^2 g^2}{T}$$

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^T |\hat{u}_t| \cdot h_t^2 j}{T}$$

$$[LE]^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \ln(\hat{u}_t^2) \cdot \ln(h_t^2) g^2}{T}$$

$$jLEj = \frac{\sum_{t=1}^T j \ln(|\hat{u}_t|) \cdot \ln(h_t^2) j}{T}$$

onde $\hat{u}_t^2$ é o resíduo da regressão ao quadrado e h_t é a volatilidade extraída pelo modelo de volatilidade condicional em análise.

Clements e Hendry (1998).

⁵⁵ O primeiro (Exercício de previsão I) é simplesmente a previsão de um passo à frente, dentro da amostra, para o modelo que utilizou todas as observações, excluindo-se as últimas 100. O segundo (Exercício de previsão II) utilizando os melhores modelos consiste em se utilizar os parâmetros estimados (mantidos fixos) para prever os próximos 20 retornos seguintes à última observação incluída na estimação. Na 21^a previsão os parâmetros do modelo são reestimados, incorporando-se as 20 observações passadas no conjunto de informação e descartando-se as 20 observações iniciais. Os parâmetros estimados são novamente mantidos fixos, e mais 20 previsões de um passo são efetuadas. Na 41^a uma nova estimação é realizada, e o processo se repete até o final das 100 observações reservadas para o segundo exercício de previsão. Dessa forma o modelo é reestimado 5 vezes. Isso permite manter o tamanho da amostra utilizada constante, e ao mesmo tempo atualizar a estimativa dos parâmetros periodicamente.

Na tabela 26 observamos as estatísticas para a série de Petrobrás. Observamos que há uma alternância do melhor modelo dependendo da função perda usada. Entretanto é fácil observar que os modelos autoregressivos são, para esta série, melhores que os modelos sem estrutura autoregressiva na média. De outra parte, se no primeiro exercício de previsão houve um equilíbrio entre os modelos no segundo exercício o modelo AR(1) GARCH-L foi muito superior. Este resultado diverge do resultado observado segundo as estatísticas de informação quando o modelo AR(1) EGARCH foi o melhor modelo, por ambos os critérios de informação.

26. Estatísticas de perda dentro e fora da amostra para a série de Petrobrás

	AR(1) GARCH-L	AR(0) EGARCH	AR(1) EGARCH	Melhor modelo
Exercício de previsão I				
MSE	9.9925	9.8299	10.0116	AR(0) EGARCH
MAE	0.001296	0.0013008	0.001269	AR(1) EGARCH
$[LE]^2$	5.9808	6.0282	6.0172	AR(1) GARCH-L
$jLEj$	1.7419	1.7616	1.7453	AR(1) GARCH-L
frequência	0.04811	0.0532	0.0503	AR(1) EGARCH
Exercício de previsão II				
MSE	9.0103	12.3629	12.3171	AR(1) GARCH-L
MAE	6.3777	7.3529	7.2293	AR(1) GARCH-L
$[LE]^2$	6.0889	9.9348	8.7373	AR(1) GARCH-L
$jLEj$	1.9074	2.1896	2.0419	AR(1) GARCH-L
frequência	0.03	0.07	0.07	-

Na próxima tabela - a tabela 27 - temos as funções perdas para a série do Índice Bovespa. Para esta série mais uma vez observamos alternância entre o melhor modelo dependendo da função perda em análise. Entretanto, mais uma vez, o melhor modelo é o AR(1) GARCH-L. Além disto este modelo é o melhor modelo no primeiro exercício de previsão, porém ele apresenta um resultado igual fora da amostra vis-à-vis o modelo

AR(0) EGARCH. Mais uma vez o melhor modelo foi diferente do melhor modelo segundo os critérios de informação.

27. Estatísticas de perda dentro e fora da amostra para a série do Índice Bovespa

	AR(1) GARCH-L	AR(0) EGARCH	AR(1) EGARCH	Melhor modelo
Exercício de previsão I				
MSE	9.6742	9.0016	9.7636	AR(0) EGARCH
MAE	8.6598	8.6244	8.4959	AR(1) EGARCH
$[LE]^2$	6.5088	7.1327	6.5315	AR(1) GARCH-L
$jLEj$	1.7716	1.8131	1.7770	AR(1) GARCH-L
frequência	0.04465	0.04722	0.04712	AR(1) GARCH-L
Exercício de previsão II				
MSE	3.5461	3.6747	3.6028	AR(1) GARCH-L
MAE	6.3885	4.6808	4.7323	AR(0) EGARCH
$[LE]^2$	6.1075	7.2207	8.5941	AR(1) GARCH-L
$jLEj$	1.9075	1.7317	1.7516	AR(0) EGARCH
frequência	0.03	0.03	0.03	-

Continuando nossa análise do desempenho preditivo dos modelos analisados, temos na tabela 28 os resultados para a série do Nasdaq. Mais uma vez observamos o predomínio dos modelos com estrutura autoregressiva, porém para esta série o melhor modelo preditivo foi claramente o modelo AR(1) EGARCH. Este modelo entretanto não é o melhor pelos critérios de informação, mais uma vez observamos um resultado diferente segundo as funções perda e os critérios de informação.

A última série analisada a analisarmos é a série do Dow Jones. Observamos os resultados preditivos dos modelos na tabela 29. Mais uma vez o nosso melhor modelo é o AR(1) GARCH-L que teve um melhor poder preditivo segundo a maioria das estimativas observadas. Segundo os critérios de informação o melhor modelo seria o EGARCH-L, o que mais uma vez não se verificou pelas funções perda, ou seja, os resultados mais uma

28. Estatísticas de perda dentro e fora da amostra para a série de Nasdaq

	AR(0) GARCH-L	AR(1) GARCH-L	AR(1) EGARCH	Melhor Modelo
Exercício de previsão I				
MSE	1.713214	1.56232	1.54346	AR(1) EGARCH
MAE	1.94875	1.78300	1.76885	AR(1) EGARCH
$[LE]^2$	7.43982	7.18151	7.08345	AR(1) EGARCH
jLEj	1.90180	1.85893	1.86270	AR(1) GARCH-L
frequência	0.04390	0.05241	0.05382	AR(1) GARCH-L
Exercício de previsão II				
MSE	3.64256	2.45742	2.32232	AR(1) EGARCH
MAE	11.8551	9.78422	9.53592	AR(1) EGARCH
$[LE]^2$	5.88788	5.61241	5.579911	AR(1) EGARCH
jLEj	1.79354	1.68421	1.634931	AR(1) EGARCH
frequência	0.06	0.06	0.07	GARCH-Ls

vez foram díspares entre os dois conjuntos de critérios de escolha do melhor modelo - as funções perda e os critérios de informação.

29. Estatísticas de perda dentro e fora da amostra para a série de Dow

	AR(1) GARCH-L	AR(0) EGARCH	AR(1) EGARCH	Melhor modelo
Exercício de previsão I				
MSE	6.285	6.123	5.932	AR(1) EGARCH
MAE	9.873	9.964	9.858	AR(1) EGARCH
$[LE]^2$	6.867	7.041	7.008	AR(1) GARCH-L
jLEj	1.862	1.872	1.874	AR(1) GARCH-L
frequência	0.057	0.050	0.052	AR(0) EGARCH
Exercício de previsão II				
MSE	1.315	2.052	2.051	AR(1) GARCH-L
MAE	6.426	15.233	22.665	AR(1) GARCH-L
$[LE]^2$	3.731	4.125	5.668	AR(1) GARCH-L
jLEj	1.417	1.603	1.643	AR(1) GARCH-L
frequência	0.05	0.06	0.06	AR(1) GARCH-L

2.7 Conclusões

Neste capítulo apresentamos alguns dos principais modelos de extração de volatilidade apresentados na literatura. As principais conclusões verificadas foram que:

- nas estimações e previsões verificamos que os melhores modelos foram os modelos GARCH-L e EGARCH, isto é, os modelos que levam em conta o *leverage effect* na dinâmica da volatilidade.
- os modelos GARCH(1,1) foram superiores aos modelos GARCH(2,1), GARCH(1,2) e/ou GARCH(2,2).
- os melhores modelos possuíam uma estrutura autoregressiva, fazendo com que possamos ter para os modelos em análise alguma previsibilidade na média.
- a distribuição t-Student se mostrou superior a distribuição Normal para caracterizar a distribuição dos retornos.
- a persistência verificada pelos modelos é muito alta.

Chapter 3

Modelos com mudança de regime

3.1 Introdução

A idéia que uma série econômica possa sofrer alguma variação na sua dinâmica é antiga entre os economistas. Chow (1960) apresenta um teste F para verificar se houve ou não uma quebra estrutural em algum momento pré-determinado do tempo. Muitos outros testes foram desenvolvidos ao longo dos anos pelos quais podemos avaliar se houve ou não uma mudança estrutural na série em análise.

Dois trabalhos importantes neste período foram os trabalhos de Quandt (1972) e Goldfeld e Quandt (1973). No primeiro poderiam ocorrer para uma série econômica mudanças de regime independentes, no segundo modelo os choques seriam determinados segundo uma cadeia de Markov.

O trabalho de Hamilton (1989) foi um divisor de águas para os trabalhos de mudança de regime. Seu trabalho inicial nesta área mostrou que a dinâmica da série do PIB norte americano pode ser modelado como um processo que possui duas dinâmicas distintas: uma na qual a economia encontra-se em expansão e outra na qual a economia passa por um processo recessivo. A mudança de uma fase para a outra da economia se dá através de uma cadeia de Markov de primeira ordem. O autor tenta com isto caracterizar os ciclos econômicos pelos quais passou a economia americana. Neftci (1984) apresenta em seu trabalho um mecanismo semelhante para descrever a dinâmica do desemprego americano.

Hamilton observa claramente para a série de PIB americano trimestral entre 1951 e 1984 que há uma clara diferença entre a taxa de crescimento numa recessão e num período de expansão⁵⁶.

3.2 Conceitos iniciais

3.2.1 Cadeias de Markov

Os modelos de mudança de regime seguem diferentes dinâmicas em cada regime. Suponha o modelo mais simples isto é um modelo apenas com constante, onde tanto esta quanto a volatilidade do processo sofrem mudanças de regime em função de uma cadeia de Markov de primeira ordem. O modelo seria dado então por:

$$y_t = \mu_{s_t} + \epsilon_t; \text{ onde } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{s_t}^2) \quad (17)$$

onde y_t é a série de retornos do ativo financeiro. Neste modelo, conforme podemos observar na equação (A.17) tanto a média quanto a variância são funções da s_t . Esta é uma variável aleatória que é chamada de variável estado. Se $s_t = 1$ o regime atual, isto é o regime em t , é o primeiro regime, se $s_t = 2$ o regime será o segundo e assim sucessivamente.

A variável estado segue um processo de Markov de primeira ordem. Esta variável de estado s_t só pode assumir valores inteiros $1, 2, \dots, N_g$. A probabilidade de s_t assumir um

⁵⁶ Para o período de crescimento econômico foi encontrado uma taxa de 1.2% e para a fase de recessão foi encontrado uma taxa de -0.4%.

valor j é dada em função apenas do valor de S_t no instante anterior: S_{t-1} . Temos então com isto que:

$$P(S_t = j | S_{t-1} = i; S_{t-2} = y; \dots; S_{t-k} = r) = P(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (18)$$

Com a restrição de:

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik} = 1$$

Ou seja, dado que estamos no estado i teremos certas probabilidades que nos movermos para os k estados da natureza. A racionalidade econômica desta abordagem é que a economia pode se encontrar em diferentes estados econômicos, por exemplo, o mercado acionário pode ter 2 regimes, um de alta onde as ações sobem de forma consistente, portanto com alto retorno e com baixa volatilidade e outro regime no qual as ações caem de nível, portanto os retornos são em média negativos e a volatilidade é muito maior⁵⁷.

As probabilidades associadas a cada regime são comumente expressas numa matriz de transição ($k \times k$) dada por:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & & & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{k1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{kk} \end{matrix} \end{matrix} \quad (19)$$

⁵⁷ Outra aplicação comum para estes modelos é associar para cada regime um estado do ciclo econômico, podendo este ser de crescimento econômico ou de recessão.

No caso de termos dois estados da natureza possíveis ($k = 2$) teremos então a seguinte cadeia de Markov:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix}$$

ou seja, dado que a economia se encontra no regime 1, temos uma probabilidade p_{11} de a economia se manter no mesmo regime e $1 - p_{11}$ de mudar de regime, ou seja de mudar para o outro estado da natureza.

Exemplo

Suponha o seguinte processo:

$$y_t = \mu_{st} + \epsilon_t; \text{ onde } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{st}^2) \quad (20)$$

onde existem apenas dois regimes ($k = 2$) e $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 1.2$, $\sigma_1 = 0.8$ e $\sigma_2 = 1.2$. Ou seja, se o processo estiver no regime 1, a observação será retirada de uma Normal com média 0.7 e desvio-padrão 0.8, e se estiver no segundo com média 1.2 e desvio-padrão 1.2. Uma realização deste processo é mostrado nos gráficos 17 e 18 para uma série de 200 observações. No primeiro temos as probabilidades de estarmos no regime 2, ou seja, o regime onde $\mu = 1.2$ e $\sigma = 1.2$: Neste caso temos que as probabilidades de estarmos em um regime e continuarmos neste - p_{11} e p_{22} - são 0.97 para ambas as probabilidades. Com isto temos que a matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.03 \\ 0.03 & 0.97 \end{pmatrix}$$

17. Regimes dado $p_{11} = 0.97$ e $p_{22} = 0.97$:

No segundo gráfico conseguimos observar claramente os efeitos na série da observação ser tirada de uma Normal ou da outra. Na primeira parte da série, quando esta este mais no regime 1, observamos claramente que a série teve uma média maior e uma menor volatilidade que no segundo momento da amostra, quando esta se concentrou mais no segundo regime, quando a média é negativa e a variância é bem maior *vis-à-vis* o regime 1.

Este exemplo hipotético descrito aqui, isto é, quando temos um regime com média positiva e desvio-padrão baixo em relação ao outro regime e outro com média negativa e maior volatilidade é comum as séries de retorno, conforme vimos no capítulo anterior.

A distribuição da série gerada é dada pelo gráfico 19. Observamos neste gráfico as duas distribuições Normais que geraram as duas séries além da distribuição conjunta. Neste caso a distribuição conjunta se aproximou da distribuição Normal, porém em muitos casos

18. Série simulada

a mistura de Normais pode produzir distribuições muito diferentes da Normal, conforme observa Hamilton (1994).

3.2.2 Probabilidades ergódicas

Um conceito importante com respeito a cadeias de Markov são as probabilidades ergódicas. Estas são as probabilidades associadas a cada regime no estado de equilíbrio. No caso específico de dois regimes teremos que os autovalores da matriz de transição P é dada pela solução de $(P - I)x = 0$. Resolvendo a equação teremos que:

$$\begin{aligned}
 0 &= \begin{vmatrix} 1-p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & 1-p_{22} \end{vmatrix} \\
 &= (1-p_{11})(1-p_{22}) - p_{12}p_{21} \\
 &= 1 - p_{11} - p_{22} + p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \\
 &= (1-p_{11})(1-p_{22}) - p_{12}p_{21}
 \end{aligned}$$

19. Distribuição da série gerada

Teremos então que os autovalores serão dados por:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = p_{11} + p_{22} - 1 \quad (21)$$

Com isto os autovetores associados a λ_1 serão dados por:

$$v_1 = \begin{pmatrix} (1 - p_{22}) \\ (2 - p_{11} - p_{22}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Temos então facilmente para o modelo de dois regimes que as probabilidades ergódicas são dadas por:

$$p_1 = \frac{(1 - p_{22})}{(2 - p_{11} - p_{22})} \text{ e } p_2 = \frac{(1 - p_{11})}{(2 - p_{11} - p_{22})} \quad (23)$$

Exemplo

No exemplo dado na seção anterior temos que as probabilidades eram $p_{11} = 0.97$ e $p_{22} = 0.97$. Com isto as probabilidades ergódicas são dadas por:

$$p_1 = p_2 = \frac{(1 - 0.97)}{(2 - 0.97 - 0.97)} = 0.5 \quad (24)$$

ou seja, temos ao sortearmos uma observação qualquer da série a mesma probabilidade de estarmos no regime 1 ou no regime 2. De outra parte, se $p_{11} = 0.99$ teríamos que as probabilidades seriam dadas por:

$$p_1 = \frac{(1 - 0.97)}{(2 - 0.99 - 0.97)} = 0.75; \quad p_2 = \frac{(1 - 0.99)}{(2 - 0.99 - 0.97)} = 0.25 \quad (25)$$

Com isto observamos que agora há uma probabilidade muito maior de estarmos no regime 1 do que no regime 2.

3.2.3 Duração esperada em cada regime

Uma informação importante que podemos tirar dos modelos de mudança de regime é a duração média de cada regime dado que estamos em um regime específico. Definindo D como a duração em um determinado regime podemos observar que:

$$D = 1; \text{ se } S_t = j \text{ e } S_{t+1} \notin j; P[D = 1 | S_t = j; S_{t+1} \notin j] = (1 - p_{jj})$$

$$D = 2; \text{ se } S_t = S_{t+1} = j \text{ e } S_{t+2} \notin j; P[D = 2 | S_t = S_{t+1} = j \text{ e } S_{t+2} \notin j] = p_{jj}(1 - p_{jj})$$

.....

Observe que a variável aleatória D tem distribuição geométrica e, portanto a duração esperada do regime j é dada por:

$$E(D) = \frac{1}{1 - p_{jj}} \quad (26)$$

A equação (A.26) é muito útil para tirarmos informações dos modelos de mudança de regime, por exemplo, ao estimarmos um modelo de mudança de regime para o PIB podemos observar qual a duração média de cada regime.

3.2.4 Exemplo

Utilizando mais uma vez o exemplo apresentado acima temos que a duração média dos regimes será de $p_1 = \frac{1}{1 - 0.97} = 33$ dias.

3.3 Modelos de mudança de regime na média

3.3.1 Modelo de mistura de normais

Nesta subseção analisaremos um caso particular de modelos de mudança de regime na média, o caso de modelos de mistura de normais. Nestes modelos consideramos que a série y_t é dada, conforme vimos na seção anterior por:

$$y_t = \mu_{st} + \epsilon_t; \text{ onde } \epsilon_t \sim N(0, \sigma_{\epsilon}^2)$$

onde os valores para μ_{st} e σ_{st}^2 são dados segundo o valor da variável estado da natureza. Nos exemplos teóricos apresentados na primeira seção, como geramos o processo, sabíamos qual a probabilidade em cada momento do tempo. A maior dificuldade da estimação deste tipo de modelos é que nos não sabemos em qual regime estamos.

A densidade de y_t condicional em $S_t = j$ é dada por :

$$f(y_t | S_t = j; \mu) = \frac{1}{\sigma_j^2} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad (27)$$

onde $j = 1, 2, \dots, k$ e μ é o vetor de parâmetros populacionais que incluem $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ e $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$. Além disso temos que:

$$P(S_t = j; \mu) = \pi_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, k \quad (28)$$

Estas probabilidades $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ são as probabilidades ergódicas apresentadas na seção anterior. Estas probabilidades também fazem parte do vetor de parâmetros μ :

Pelo teorema de Bayes, teremos que:

$$P(y_t; S_t = j; \mu) = f(y_t | S_t = j; \mu) \cdot P(S_t = j; \mu) \quad (29)$$

Substituindo (A.27) e (A.28) em (A.29) teremos que:

$$P(y_t; S_t = j; \mu) = \frac{\pi_j}{\sigma_j^2} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right\}$$

A distribuição não-condicional de y_t será dada pela soma das probabilidades ergódicas em cada regime:

$$\begin{aligned} f(y_t; \mu) &= \sum_{j=1}^K p(y_t; S_{t=j}; \mu) \\ &= \frac{\mu_1}{2^{1/4} \mu_1^{3/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mu_1)^2}{2\mu_1^2} \right\} + \frac{\mu_2}{2^{1/4} \mu_2^{3/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mu_2)^2}{2\mu_2^2} \right\} + \dots \\ &\quad + \dots + \frac{\mu_K}{2^{1/4} \mu_K^{3/4}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y_t - \mu_K)^2}{2\mu_K^2} \right\} \end{aligned}$$

Teremos então trivialmente que a função log-verossimilhança será $L(\mu) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t; \mu)$: A máxima verossimilhança será obtida maximizando esta função e dada as restrições $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_K = 1$ e $\mu_j > 0$: O processo de maximização desta função será apresentado nas próximas seções.

3.3.2 Modelos autoregressivos

Consideraremos nesta seção modelos autoregressivos que possam apresentar de forma análoga aos modelos apresentados na seção anterior mudanças de regime. Mostraremos nestas um exemplo para um modelo AR(1) a generalização é trivial e podem ser encontrada em Lam (1990). Um modelo AR(1) com mudança de regime é definido como:

$$y_t = c_{S_t} + \hat{A}_{S_t} y_{t-1} + \epsilon_t \quad (30)$$

onde $\epsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma_{S_t}^2)$: Sabendo que y_t depende apenas do estado S_t e S_{t-1} teremos para a função densidade condicional que:

$$f(y_t | I_t; S_t = j; S_{t-1} = i; S_{t-2} = l; \dots; \mu) = f(y_t | I_t; S_t = j; S_{t-1} = i; \mu)$$

onde I_t é toda a informação passada. De outra parte, temos que S_t só depende do seu valor no instante anterior. Podemos então redefinir S_t como:

$$S_t = 1 \text{ se } S_t^a = 1 \text{ e } S_{t-1}^a = 1$$

$$S_t = 2 \text{ se } S_t^a = 2 \text{ e } S_{t-1}^a = 1$$

$$S_t = 3 \text{ se } S_t^a = 1 \text{ e } S_{t-1}^a = 2$$

$$S_t = 4 \text{ se } S_t^a = 2 \text{ e } S_{t-1}^a = 2$$

Podemos então escrever a densidade de (A.30) pelas 4 densidades:

$$\begin{aligned} f(y_t | y_{t-1}; S_t = 1; \mu) &= \frac{1}{2^{3/4}} \exp \left(-\frac{[(y_t - \mu_1) - \hat{A}_1(y_{t-1} - \mu_1)]^2}{2^{3/2}} \right) \\ f(y_t | y_{t-1}; S_t = 2; \mu) &= \frac{1}{2^{3/4}} \exp \left(-\frac{[(y_t - \mu_2) - \hat{A}_2(y_{t-1} - \mu_1)]^2}{2^{3/2}} \right) \\ f(y_t | y_{t-1}; S_t = 3; \mu) &= \frac{1}{2^{3/4}} \exp \left(-\frac{[(y_t - \mu_1) - \hat{A}_1(y_{t-1} - \mu_2)]^2}{2^{3/2}} \right) \\ f(y_t | y_{t-1}; S_t = 4; \mu) &= \frac{1}{2^{3/4}} \exp \left(-\frac{[(y_t - \mu_2) - \hat{A}_2(y_{t-1} - \mu_2)]^2}{2^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Com isto podemos escrever (A.30) como :

$$y_{t+1} = \hat{A}_{st}(y_{t+1} | \mathcal{F}_{st}) + \epsilon_t \quad (31)$$

3.4 Modelos de mudança de regime condicionais na variância

Uma outra forma de tentar controlar as quebras estruturais, são os modelos de mudança de regime markovianas para variância condicional. A estimação da dinâmica da volatilidade para séries financeiras surgiu com os trabalhos iniciais de Engle (1982) e Bollerslev (1986), que introduziram respectivamente os modelos de volatilidade sem mudança de regime: *Autoregressive Heteroscedastic Model* (ARCH) e *Generalized ARCH* (GARCH). Uma possível extensão do modelo GARCH é o modelo GARCH-L desenvolvido por Glosten *et alli* (1989). Este modelo é apresentado abaixo,

$$y_t = Z_t' \beta + u_t \quad (A.32)$$

$$u_t = \sqrt{h_t} v_t \quad (A.33)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + \gamma d_{t-1} u_{t-1}^2 \quad (A.34)$$

onde Z_t é o vetor de regressores de y_t ; β é o conjunto de regressores associados a este vetor, v_t uma série i.i.d., $\omega > 0$; $\alpha_i \geq 0$; $\beta_j \geq 0$; $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ e $d_{t-1} = 1$ se $u_{t-1} < 0$ e $d_{t-1} = 0$ se $u_{t-1} \geq 0$, com $0 < \gamma < 1$: Este modelo é muito utilizado a literatura em grande parte por permitir em sua dinâmica que a volatilidade aumente muito mais em resposta a um choque negativo do que a um choque positivo. Este efeito é denominado

na literatura de *leverage effect* e foi inicialmente observado por Black (1976). Hamilton e Susmel (1994) apresenta o modelo de mudança de regime para um modelo ARCH, onde foi incorporado o efeito de alavancagem. Este modelo é definido por,

$$y_t = Z_t^0 + u_t \quad (\text{A.35})$$

$$u_t = \sqrt{g_{s_t}} \theta_t \quad (\text{A.36})$$

$$\theta_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (\text{A.37})$$

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \theta_{t-i}^2 + \beta_1 \theta_{t-1}^2 \quad (\text{A.38})$$

Na literatura este modelo é conhecido por SWARCH(k,q)-L. Temos no modelo acima que a volatilidade condicional dada por (A.38) é multiplicada pela variável g_{s_t} : Esta variável é uma função de s_t ; isto é, assume um valor a cada regime. Para o primeiro regime g_{s_t} é padronizada como sendo; $g_{s_t} = 1$: Assim, temos que a variância condicional segue um processo ARCH (p) sendo que a variável θ_t é multiplicada por $\sqrt{g_2}$ quando estiver no regime 2, e assim por diante. A idéia básica é modelar as mudanças de regime como alterações na escala do processo da variância condicional.

Estes modelos sofrem do problema comum a todos modelos ARCH, isto é, apresenta um número de defasagens muito grande *vis-à-vis* ao modelos GARCH, conforme sugere Bollerslev (1986). De outra parte, Dueker (1997) generaliza o modelo para quatro diferentes especificações de modelos GARCH, limitando a memória do processo conforme Kim (1994). Este procedimento faz com que possamos de forma muito mais fácil esti-

mar a verossimilhança do processo sem incorrer em grandes prejuízos. Em nosso trabalho utilizaremos o modelo SWGARCH-L dado por (A.35), (A.37) e,

$$h_t = a_0 + \sum_{i=1}^K \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + \epsilon_{t-1}^2 \quad (39)$$

Este modelo é denotado, na literatura por SWGARCH(k,p,q)-L. Este modelo é muito mais parcimonioso que o modelo SWARCH(k,q)-L, além de apresentar uma melhor adequação aos dados, conforme Almeida e Pereira (1999).

3.5 Estimação dos modelos de mudança de regime

A maior dificuldade de estimarmos os modelos de mudança de regime decorre do fato da variável estado - S_t - ser uma variável não observável. Para solucionar este problema estimamos estes modelos através de um processo recursivo. Uma análise mais detalhada deste método pode ser encontrado em Kim e Nelson (1999) e Hamilton (1994) e Hamilton e Susmel (1994), além de um curto resumo apresentado no apêndice B.

3.5.1 Estimadores de máxima verossimilhança para os modelos de mistura de Normais

Para os modelos de mistura de normais com dois regimes ($K=2$) os estimadores de máxima verossimilhança são dados por:

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T y_t P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}; \text{ para } j = 1; 2; \dots; N \quad (\text{A.40})$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_j)^2 P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}, \text{ para } j = 1; 2; \dots; N \quad (\text{A.41})$$

$$p_{11} = \frac{\sum_{t=1}^T P(s_t = 1; s_{t-1} = 1 | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T P(s_{t-1} = 1 | y_t; \hat{\mu})} \quad (\text{A.42})$$

$$p_{22} = \frac{\sum_{t=1}^T P(s_t = 1; s_{t-1} = 2 | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T P(s_{t-1} = 2 | y_t; \hat{\mu})} \quad (\text{A.43})$$

Supondo que soubéssemos de qual estado da natureza j é tirada a observação y_t ; teríamos facilmente a média $\hat{\mu}_j$ assim como a variância $\hat{\sigma}_j^2$ e com isto seria muito mais simples estimar o processo. Entretanto como não sabemos de qual regime vem cada regime temos que $\hat{\mu}_j$ e $\hat{\sigma}_j^2$ são simplesmente a média e variância ponderadas pela probabilidade de cada observação tenha vindo de cada regime. Além disto temos que p_{jj} é a probabilidade da observação terem vindo do regime j e continuar neste. Conforme observamos nas equações (A.42) e (A.43) estas são simplesmente a fórmula de Bayes. A dificuldade para estimarmos estes parâmetros ocorre pois estas equações são não-lineares e, principalmente, temos que lidar com o problema de estimarmos as probabilidades de qual regime o processo se encontra, sendo estes regimes não observáveis. Esta estimação é feita por um algoritmo de suavizamento e filtragem apresentado em Kim (1997). Para os modelos autoregressivos temos que os modelos são uma extensão natural do que foi apresentado acima. Uma boa referência desta extensão pode ser encontrada em Hamilton (1994).

3.5.2 Estimadores de máxima verossimilhança para os modelos SWGARCH

A estimação dos modelos SWGARCH(k,p,q) é feita de forma semelhante a estimação dos modelos GARCH reportados anteriormente neste trabalho. De forma semelhante podemos estimar os modelos utilizando tanto a distribuição Normal quanto a t-Student. Para a distribuição Normal temos que a verossimilhança será dada por,

$$f(y_t | s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq}; Z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t(s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq})}} \exp \left(-\frac{y_t - Z_t^0 - \phi_2}{2h_t(s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq})} \right) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} L(\mu) &= \sum_{t=1}^T \log f(y_t | s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq}; Z_t; \mu) \\ &= \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(h_t(s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq})) - \frac{(y_t - Z_t^0 - \phi_2)^2}{2h_t(s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq})} \right] \end{aligned} \quad (A.45)$$

onde $pq = \max(p; q)$. De forma semelhante teremos a estimação por máxima verossimilhança para a distribuição t-Student.

3.6 Estimações

Nesta secção apresentamos as estimativas dos modelos apresentados a seguir. Concentraremos nossas comparações nos modelos de mudança de regime na volatilidade, entretanto apresentaremos também os modelos de mistura de normais e com estrutura autore-

gressiva na média, dado que estes são mais simples de entendermos e utilizaremos as probabilidades filtradas na realização de estratégias de mercado.

3.6.1 Modelos de mudança na média e variância não-condicional

Para estas séries estimamos os modelos de mistura de normais com 2 e 3 regimes e comparamos estes com o modelo sem mudança de regime, isto é, um modelo apenas com média e variância⁵⁸. As estimações foram feitas com o pacote estatístico Gauss 3.2 para Dos e com o pacote de maximização Optimum⁵⁹.

Observamos claramente pelas tabelas 30 e 31 que os modelos com mudanças de regime são, segundo os critérios de informação, superiores ao modelo sem mudança de regime. Este resultado não é de todo inesperado pois as séries em análise apresentam claramente comportamentos para média e desvio-padrão distintos para diferentes momentos. Isto é, em momentos de "calmaria" no mercado elas apresentam uma média positiva e volatilidade baixa, porém em momentos de "nervosismo" no mercado observamos um comportamento diverso, isto é, grande volatilidade e retornos negativos.

	Petrobrás			Índice Bovespa		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
AIC	-3.823534	-4.1384	-4.1474	-4.209251	-4.6058	-4.6224
BIC	-3.819947	-4.1168	-4.1150	-4.205672	-4.5843	-4.5901
Log	2824.680	3049.77	3059.40	3117.951	3402.81	3418.01
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.00
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Q(24)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00

30. Modelos de mistura de Normais tanto para as séries do Índice Bovespa e Petrobrás

⁵⁸ Modelos com mais de 3 regimes mostraram-se nas estimações muito difíceis de serem estimados, devido a dificuldade do algoritmo de encontrar o máximo global.

⁵⁹ Ver o apêndice C.

Além disto observamos que os modelos com 3 regimes são superiores aos modelos com 2 regimes. A única exceção é a série de Petrobrás que pelo critério de Schwarz o modelo de 2 regimes é melhor que o de 3 regimes. De outra parte, observamos que as séries, segundo a estatística de Ljung-Box, não captam toda a estrutura autoregressiva das séries. Este resultado esta em sintonia com os modelos apresentados no capítulo 2 que também apresentavam claramente uma estrutura autoregressiva.

	Nasdaq			Dow Jones		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
AIC	-5.520343	-5.9115	-5.9553	-6.335744	-6.5127	-6.5478
BIC	-5.516827	-5.8904	-5.9236	-6.332228	-6.4916	-6.5160
Log	4179.900	4463.29	4499.36	4797.158	4916.63	4946.03
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.12	0.10	0.11
Q(12)	0.12	0.08	0.09	0.06	0.00	0.00
Q(24)	0.02	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00

31. Modelos de mistura de Normais tanto para as séries do Nasdaq e do Dow Jones

Nas tabelas 32 e 33 temos as estimativas dos parâmetros para cada uma das séries. Podemos observar para a série de Petrobrás, na tabela 32, que o modelo de 2 regimes apresenta um regime 1 de retorno positivo e volatilidade baixa e desvio-padrão baixo e outro, denominado de regime 2, com retorno negativo e desvio-padrão muito mais alto. Além disto as probabilidades de, dado que estamos num regime, nos mantermos nele é de 0:99 para o regime 1 e de 0:98 para o segundo regime. As probabilidades ergódicas são de 0:68 e 0:32 respectivamente para cada regime, ou seja, se escolhermos um dia ao acaso, sem termos nenhuma informação adicional, teremos 0:68 e 0:32 de estarmos num regime 1 ou 2 respectivamente. Dado as altas probabilidades de cada regime temos que estes tem uma duração média de 104 dias e 50 dias.

Para o modelo de 3 regimes observamos um regime 1 de retornos positivos e baixa volatilidade, um segundo regime de retornos praticamente nulos com muita volatilidade, no qual a bolsa "anda de lado", e um regime de retornos muito baixos e baixa volatilidade. A baixa volatilidade se deve ao fato do modelo ter determinado o regime 3 como sendo formado pelas observações muito extremas e que portanto apresentam baixa variância entre estas. As probabilidades para cada regime, mostram que o regime 1 é o mais provável, sendo as probabilidades ergódicas respectivamente para os três regimes de 0:65, 0:3011 e 0:0489. As durações médias de cada regime são respectivamente de 74; 34 e 6. Ou seja, dificilmente teremos um período de grandes quedas que se mantenha por um prazo de tempo maior do que 6 dias.

	Petrobrás			Índice Bovespa		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
π_1	0:00128 (0:0009)	0:0023 (0:0008)	0:0031 (0:0008)	0:00104 (0:0007)	0:0025 (0:0006)	0:0032 (0:0006)
π_2	-	i 0:0014 (0:0025)	0:0003 (0:0027)	-	i 0:0047 (0:0031)	0:0003 (0:0039)
π_3	-	-	i 0:0203 (0:0054)	-	-	i 0:0320 (0:0038)
π_{11}	0:03576 (0:0010)	0:0005 (0:0001)	0:0005 (0:0001)	0:02948 (0:0010)	0:0003 (0:0001)	0:0003 (0:0001)
π_{12}	-	0:0029 (0:0002)	0:0030 (0:0003)	-	0:0028 (0:0003)	0:0032 (0:0004)
π_{13}	-	-	0:0005 (0:0001)	-	-	0:0003 (0:0001)
π_{21}	-	0:9904 (0:0041)	0:9864 (0:1264)	-	0:9856 (0:0055)	0:9748 (0:0064)
π_{22}	-	0:9791 (0:0089)	0:9706 (0:1610)	-	0:9465 (0:0164)	0:8869 (0:0303)
π_{33}	-	-	0:8186 (0:2102)	-	-	0:5941 (0:0794)

32. Parâmetros dos modelos de mistura de Normais tanto para as séries do Índice Bovespa e Petrobrás

Para a série de Índice Bovespa observamos um resultado muito parecido ao verificado para a série de Petrobrás. No modelo de 2 regimes, temos um regime 1 com retornos positivos e desvio-padrão baixo e outro regime com retornos negativos e com alta volatilidade. De outra parte, observamos que os regimes tem probabilidades ergódicas de 0:7875

e 0:2125. Ou seja, há muito mais probabilidade de estarmos no regime 1, de baixa volatilidade, do que no segundo regime. A probabilidade de estarmos no regime 1 neste modelo é bem maior do que para a série de Petrobrás, porém a média no regime 2 para a série de Índice Bovespa é menor, ou seja, o regime 2 é menos frequente porém ele apresenta um retorno médio negativo mais baixo do que para a série de Índice Bovespa. A média de tempo em cada regime é de 69 e 19 dias respectivamente.

Para o modelo de 3 regimes encontramos um resultado muito semelhante ao verificado para a série de Petrobrás, ou seja, um regime de baixa volatilidade e retornos positivos, um regime de alta volatilidade e um terceiro regime de retornos muito baixos. As probabilidades ergódicas associadas aos 3 regimes são respectivamente de 0:7781, 0:1735 e 0:0483. Mais uma vez há uma pequena probabilidade de termos uma série de retornos muito baixos consecutivos.

Para a série americana do Índice Nasdaq que se encontra na tabela 33 observamos que no modelo de dois regimes as duas médias são positivas, sendo que no segundo regime, quando a média é bem menor, há muito mais volatilidade. Além disto as probabilidades ergódicas são de 0:6136 e 0:3864 respectivamente, ou seja, a série sempre apresenta um resultado positivo porém há maior probabilidade de que ela apresente um resultado muito positivo *vis-à-vis* um resultado mais baixo. Este resultado não é muito intuitivo e deve ser compreendido observando as características da série com a qual nos trabalhamos neste trabalho, que apresenta um crescimento muito forte por todo o período em análise, crescimento este que muitos consideram ser uma bolha especulativa sobre o real ganho de produtividade das empresas intensivas em tecnologia.

O modelo de três regimes apresenta um resultado mais intuitivo dado que temos dois regimes de "alta" e um regime de "baixa" no qual a média é negativa e a volatilidade é maior do que nos dois regimes anteriores. Há uma probabilidade ergódica de 0:0984 de nos encontrarmos neste regime de baixa enquanto a probabilidade dos regimes de alta é respectivamente de 0:5452 e 0:3564.

	Nasdaq			Dow Jones		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
1_1	0:00114 (0:0004)	0:0016 (0:0003)	0:0014 (0:0003)	0:00069 (0:0003)	0:0013 (0:0002)	0:0011 (0:0003)
1_2	-	0:003 (0:0010)	0:0023 (0:0008)	-	i 0:0003 (0:0006)	0:0009 (0:0004)
1_3	-	-	i 0:0044 (0:0030)	-	-	i 0:0017 (0:0016)
3_1	0:01531 (0:0010)	0:0001 (0:0001)	0:0001 (0:0001)	0:01018 (0:0010)	0:0001 (0:0001)	0:0001 (0:0001)
3_2	-	0:0005 (0:0001)	0:0003 (0:000)	-	0:0002 (0:0001)	0:0002 (0:0001)
3_3	-	-	0:0011 (0:0002)	-	-	0:0004 (0:0001)
p_{11}	-	0:9823 (0:0061)	0:9842 (0:0051)	-	0:9827 (0:0057)	0:9851 (0:0065)
p_{22}	-	0:9719 (0:0099)	0:9759 (0:0085)	-	0:9709 (0:0102)	0:9904 (0:0040)
p_{33}	-	-	0:9126 (0:0310)	-	-	0:9438 (0:0282)

33. Parâmetros dos modelos de mistura de Normais tanto para as séries do Nasdaq e do Dow Jones

Para a série do Dow Jones temos um resultado muito semelhante ao verificado para a série do Nasdaq conforme observamos na tabela 33. Porém para esta série há claramente um regime de "alta" e outro de "baixa". As probabilidades ergódicas são muito semelhantes inclusive. Devemos salientar que foram verificados para séries do mesmo país - Índice Bovespa/Petrobrás e Nasdaq/Dow Jones - resultados muito semelhantes.

3.6.2 Modelos de mudança de regime autorregressivo

Nas tabelas 34 e 35 temos os critérios de informação e funções perda para os modelos autoregressivos com mudança de regime⁶⁰. As estimações foram feitas com o pacote estatístico Gauss 3.2 para Dos e com o pacote de maximização Optimum.

Observamos de forma clara, mais uma vez, que os modelos com mudança de regime são muito superiores aos modelos sem mudança de regime. Além disto os modelos com 3 regimes são, pelos critérios de informação melhores que os modelos com 2 regimes.

	Petrobrás			Índice Bovespa		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
AIC	-3.8342	-4.1532	-4.1799	-4.2103	-4.6079	-4.6220
BIC	-3.8269	-4.1280	-4.1440	-4.2031	-4.5827	-4.5861
Log	2831.60	3061.64	3084.36	3117.61	3405.29	3418.75
Q(1)	0.892	0.812	0.785	0.948	0.874	0.745
Q(12)	0.018	0.023	0.021	0.001	0.000	0.000
Q(24)	0.001	0.000	0.002	0.000	0.000	0.000

34. Modelos autoregressivos tanto para as séries do Índice Bovespa e Petrobrás

	Nasdaq			Dow Jones		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
AIC	-5.5189	-5.9176	-5.9588	-6.3343	-6.5135	-6.5483
BIC	-5.5119	-5.8929	-5.9235	-6.3272	-6.4889	-6.5130
Log	4177.07	4468.88	4502.93	4793.91	4918.21	4947.43
Q(1)	0.990	0.856	0.765	0.981	0.945	0.867
Q(12)	0.603	0.621	0.453	0.261	0.256	0.234
Q(24)	0.044	0.041	0.043	0.002	0.001	0.001

35. Modelos autoregressivos tanto para as séries do Nasdaq e Dow Jones

Nas tabelas 36 e 37 apresentamos os parâmetros estimados tanto para os modelos sem quanto os modelos com mudança de regime. Observamos resultados muito semelhantes aos resultados verificados para o modelo de mistura de Normais.

⁶⁰ Modelos com mais de 3 regimes mostraram-se nas estimações muito difíceis de serem estimados.

Estes resultados nos mostram que os regimes se mantêm colocando ou não a estrutura autoregressiva na especificação da dinâmica da série. Devemos destacar entretanto que os modelos com parâmetros autoregressivos foram muito melhores que os modelos que só tinham uma constante para capturar a dinâmica da série, segundo os critérios de informação e as estatísticas Q. Este resultado mais uma vez corrobora a conclusão do capítulo anterior no qual há alguma previsibilidade na dinâmica do retorno das séries em questão.

	Petrobrás			Índice Bovespa		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
1_1	0:0011 (0:0010)	0:0021 (0:0008)	0:0032 (0:0009)	0:0009 (0:0011)	0:0024 (0:0006)	0:0031 (0:0006)
1_2	-	i 0:0010 (0:0030)	i 0:0021 (0:0071)	-	i 0:0047 (0:0034)	0:0001 (0:0039)
1_3	-	-	i 0:0008 (0:0020)	-	-	i 0:0325 (0:0039)
A	0:1094 (0:0258)	0:1319 (0:0271)	0:1305 (0:0272)	0:0549 (0:0260)	0:0624 (0:0263)	0:0354 (0:0290)
$\frac{3}{4}_1$	0:0355 (0:001)	0:0005 (0:0001)	0:0003 (0:0001)	0:02946 (0:0010)	0:0003 (0:0001)	0:0003 (0:0001)
$\frac{3}{4}_2$	-	0:0030 (0:0003)	0:0051 (0:00067)	-	0:0029 (0:0003)	0:0032 (0:0003)
$\frac{3}{4}_3$	-	-	0:0011 (0:0001)	-	-	0:0003 (0:0001)
p ₁₁	-	0:9905 (0:0039)	0:9843 (0:0049)	-	0:9875 (0:0049)	0:9760 (0:0064)
p ₂₂	-	0:9784 (0:0093)	0:9336 (0:0247)	-	0:9494 (0:0165)	0:8896 (0:0302)
p ₃₃	-	-	0:9781 (0:0104)	-	-	0:5931 (0:0831)

36. Parâmetros dos modelos autoregressivos tanto para as séries do Índice Bovespa e Petrobrás

	Nasdaq			Dow Jones		
	normal	2 regimes	3 regimes	normal	2 regimes	3 regimes
1_1	0:0011 (0:0003)	0:0016 (0:0003)	0:0014 (0:0003)	0:0006 (0:0002)	0:0013 (0:0002)	0:0010 (0:0003)
1_2	-	0:0003 (0:0011)	0:0023 (0:0008)	-	i 0:0003 (0:0007)	0:0008 (0:0003)
1_3	-	-	i 0:0041 (0:0031)	-	-	i 0:0017 (0:0018)
A	0:0223 (0:0257)	0:0911 (0:0268)	0:0721 (0:0266)	0:0196 (0:0257)	0:0478 (0:0240)	0:0448 (0:0259)
$\frac{3}{4}_1$	0:0153 (0:001)	0:0001 (0:000)	0:0001 (0:0000)	0:0101 (0:000)	0:0001 (0:0001)	0:0001 (0:0001)
$\frac{3}{4}_2$	-	0:0005 (0:000)	0:0002 (0:0000)	-	0:0002 (0:0001)	0:0001 (0:00001)
$\frac{3}{4}_3$	-	-	0:0010 (0:0001)	-	-	0:0003 (0:00007)
p ₁₁	-	0:9829 (0:0061)	0:9835 (0:0053)	-	0:9829 (0:0055)	0:9848 (0:0067)
p ₂₂	-	0:9714 (0:0100)	0:9745 (0:0086)	-	0:9714 (0:0100)	0:9905 (0:0038)
p ₃₃	-	-	0:9125 (0:0318)	-	-	0:9381 (0:0295)

37. Parâmetros dos modelos autoregressivos tanto para as séries do Nasdaq e Dow Jones

3.6.3 Modelos de mudança de regime na variância condicional

Apresentaremos a seguir as estimações dos modelos de mudança de regime na variância, os modelos SWARCH e SWGARCH, utilizando as distribuições Normal e t-Student⁶¹. Além disto utilizaremos, assim como no capítulo anterior, modelos autoregressivos para tentar modelar a estrutura na média. As estimações foram feitas, como as demais já apresentadas, com o pacote estatístico Gauss 3.2 para Dos e com o pacote de maximização Optimum⁶².

Série de Petrobrás

A primeira série a ser modelada é a série de Petrobrás. Podemos constatar nas tabelas 38 e 40 que o melhor modelo pelos critérios de informação é o modelo AR(1)-SWGARCH-L(2,1,1) com distribuição t-Student⁶³. Uma verificação comum aos modelos de mudança de regime e sem mudança é que os modelos que utilizam a distribuição t-Student são sempre superiores aos modelos análogos que utilizam a distribuição Normal. Além disto, verificamos que os modelos SWGARCH são superiores aos modelos SWARCH. Este resultado já era esperado, pois como ocorre com os modelos sem mudança de regime, os modelos GARCH são muito superiores aos modelos ARCH.

Os modelos que têm estrutura autoregressiva apresentaram desempenho superior aos modelos sem estrutura autoregressiva, mais uma vez de forma análoga a verificação feita

⁶¹ As primeiras 6 observações não foram usadas na estimação dos modelos, pois estimamos pelo método de máxima verossimilhança condicional nas primeiras observações.

⁶² Ver o apêndice C.

⁶³ Nas próximas tabelas os modelo ARCH(x) e GARCH(x,x) referem-se aos modelos SWARCH(x) e SWGARCH(x,x).

para os modelos sem mudança de regime. Além disto, nas tabelas 39 e 41 observamos que os modelos AR(1)-SWGARCH-L(2,1,1), independentemente da distribuição, conseguem captar a dinâmica da série em questão.

Ao observarmos os critérios de informação dos modelos com distribuição t-Student com e sem mudança de regime, estes últimos apresentados no capítulo anterior, verificamos que os modelos sem mudança de regime são melhores pelos dois critérios de informação.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-4.1871	-4.1584	3087.68	-4.2015	-4.1691	3099.20
ARCH(3)-L	-4.1945	-4.1621	3094.05	-4.2087	-4.1727	3105.51
GARCH(1,1)	-4.1898	-4.1610	3089.61	-4.2035	-4.1711	3100.70
GARCH(1,1)L	-4.2109	-4.1821	3105.14	-4.234	-4.201	3123.31

38. Estimações para a série de Petrobrás utilizando a distribuição Normal

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.26	0.22	0.28
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.41	0.34	0.43	0.62
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.24	0.28	0.40
Q(1) ²	0.00	0.00	0.56	0.75	0.33	0.26	0.67	0.85
Q(6) ²	0.65	0.43	0.21	0.06	0.63	0.57	0.31	0.15
Q(12) ²	0.21	0.10	0.26	0.18	0.24	0.15	0.50	0.33

39. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Petrobrás utilizando a distribuição Normal

Apresentamos abaixo a especificação do modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student.

$$y_t = \underset{(0:0006)}{0:0012} + \underset{(0:0261)}{0:1469}y_{t-1}$$

$$h_t = \underset{(0:0001)}{0:0001} + \underset{(0:0001)}{0:0001}\epsilon_{t-1}^2 + \underset{(0:0428)}{0:8301}h_{t-1} + \underset{(0:0358)}{0:1529}d_{t-1}\epsilon_{t-1}^2$$

sendo $g_2 = \frac{1:8251}{(0:3292)}$; o número de graus de liberdade igual a $\frac{11:0249}{(3:0117)}$ e a matriz de

probabilidades de transição dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0:9968 & 0:0058 \\ 0:0032 & 0:9941 \end{pmatrix}$$

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-4.2019	-4.1695	3099.54	-4.2146	-4.1750	3110.85
ARCH(3)-L	-4.2075	-4.1715	3104.63	-4.2217	-4.1821	3116.08
GARCH(1,1)	-4.2049	-4.1761	3100.70	-4.2204	-4.1881	3113.14
GARCH(1,1)L	-4.2107	-4.1784	3106.0417	-4.2287	-4.1927	3120.21

40. Estimações para a série de Petrobrás utilizando a distribuição t-Student

Devemos destacar também que a persistência do modelo em análise diminuiu um pouco passando de 0:98 para 0:90. Temos com isto que a meia-vida diminui de $1 \cdot \frac{\log 2}{\log 0:98} = 35$ dias para $1 \cdot \frac{\log 2}{\log 0:90} = 8$ dias, ou seja, o período que metade do choque demora para se dissipar diminui para menos de um quarto do valor anterior. Este resultado já era esperado conforme vimos no capítulo anterior.

Além disto verificamos que o tempo médio em cada regime, conforme (A.26), é respectivamente de $\frac{1}{1 - 0:9968} = 313$ dias e $\frac{1}{1 - 0:9941} = 169$ dias para o primeiro e segundo regime. Podemos observar também que este tempo, ou seja a duração média em cada regime, é muito maior que a duração observada para os modelos de mistura de normais e modelos autoregressivos.

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.23	0.27	0.29
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.37	0.33	0.49	0.47
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.21	0.30	0.42
Q(1) ²	0.00	0.00	0.66	0.65	0.27	0.20	0.76	0.45
Q(6) ²	0.30	0.29	0.31	0.03	0.32	0.37	0.04	0.57
Q(12) ²	0.05	0.03	0.49	0.10	0.08	0.07	0.19	0.25

41. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Petrobrás utilizando a distribuição t-Student

Série do Índice Bovespa

Para a série do Índice Bovespa encontramos conforme as tabelas 42 e 44 que o melhor modelo, assim como no caso da série de Petrobrás, é o modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student. Este modelo mais uma vez se mostrou o melhor modelo entre os modelos analisados e conseguiu captar muito bem a dinâmica da série, conforme observamos nas tabelas 43 e 45. Entretanto mais uma vez o modelo sem mudança de regime se comportou melhor que o modelo com mudança de regime, segundo os dois critérios de informação de Akaike e Schwarz.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-4.6564	-4.6277	3442.127	-4.6586	-4.6263	3444.76
ARCH(3)-L	-4.6712	-4.6389	3454.05	-4.6673	-4.6314	3452.16
GARCH(1,1)	-4.6973	-4.6721	3471.25	-4.7009	-4.6722	3474.92
GARCH(1,1)L	-4.7199	-4.6912	3488.95	-4.7172	-4.6849	3487.96

42. Estimações para a série de Bovespa utilizando a distribuição Normal

Apresentamos abaixo a especificação do modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student.

$$y_t = \underset{(0:0005)}{0:0015} + \underset{(0:0268)}{0:0773}y_{t-1}$$

$$h_t = \underset{(0:0001)}{0:0001} + \underset{(0:0001)}{0:0001}e_{t-1}^2 + \underset{(0:0397)}{0:7724}h_{t-1} + \underset{(0:0346)}{0:1570}d_{t-1}e_{t-1}^2$$

sendo $g_2 = \underset{(0:3017)}{1:9776}$; o número de graus de liberdade igual a $\underset{(4:1660)}{13:7153}$ e a matriz de

probabilidades de transição é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0:9911 & 0:0049 \\ 0:0088 & 0:9951 \end{pmatrix}$$

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.13	0.12	0.21
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.22	0.31	0.28
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.08	0.19	0.12
$Q(1)^2$	0.00	0.00	0.49	0.39	0.10	0.13	0.52	0.17
$Q(6)^2$	0.80	0.67	0.50	0.47	0.83	0.22	0.45	0.72
$Q(12)^2$	0.85	0.62	0.77	0.64	0.88	0.13	0.74	0.75

43. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Ibovespa utilizando a distribuição Normal

Mais uma vez devemos destacar que a persistência diminuiu bastante sendo agora de 0:85 contra uma persistência de 0:96 do modelo GARCH. A meia vida portanto diminuiu de $1 \cdot \frac{\log 2}{\log 0:98} = 18$ dias para $1 \cdot \frac{\log 2}{\log 0:85} = 6$ dias. Além disto temos que a duração média em cada regime continua sendo muito alta: $\frac{1}{1 - 0:9911} = 112$ dias e $\frac{1}{1 - 0:9951} = 204$ dias, respectivamente para o regime 1 e 2.

Série do Índice Nasdaq e Índice Dow Jones

Para a série do Índice Nasdaq temos um resultado semelhante segundo as tabelas 46 e 48. O melhor modelo é o modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student.

Nas tabelas 47 e 49 temos que os modelos AR(1)-SWGARCH, com ou sem *leverage effect*, conseguem captar bem a dinâmica da série. Segundo os critérios de informação este modelo é superior aos modelos apresentados no capítulo anterior, isto é, sem mudança de regime. Para a série do Dow Jones também observamos que os modelos SWGARCH são superiores aos modelos GARCH segundo os critérios de informação.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-4.6645	-4.6322	3449.10	-4.6605	-4.6246	3447.14
ARCH(3)-L	-4.6806	-4.6447	3461.99	-4.6759	-4.6363	3459.45
GARCH(1,1)	-4.6907	-4.6621	3467.45	-4.6936	-4.6613	3470.57
GARCH(1,1)L	-4.7205	-4.6882	3490.35	-4.7260	-4.6901	3495.42

44. Estimações para a série de Bovespa utilizando a distribuição t-Student

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.07	0.11	0.20
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.22	0.25	0.23
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.03	0.15	0.12
Q(1) ²	0.00	0.00	0.88	0.49	0.09	0.07	0.84	0.27
Q(6) ²	0.20	0.12	0.53	0.78	0.06	0.07	0.49	0.82
Q(12) ²	0.12	0.01	0.69	0.71	0.00	0.00	0.70	0.82

45. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Bovespa utilizando a distribuição t-Student

Apresentamos abaixo a especificação do modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student.

$$y_t = \underset{(0:0002)}{0:0012} + \underset{(0:0269)}{0:0888}y_{t-1}$$

$$h_t = \underset{(0:0001)}{0:0001} + \underset{(0:0144)}{0:0012}\mathbf{e}_{t-1}^2 + \underset{(0:0364)}{0:7882}h_{t-1} + \underset{(0:0308)}{0:1529}d_{t-1}\mathbf{e}_{t-1}^2$$

sendo $g_2 = \underset{(0:3227)}{2:3713}$; o número de graus de liberdade igual a $\underset{(2:2206)}{9:9728}$ e a matriz de

probabilidades de transição é dada por:

$$P = \begin{matrix} 0:9993 & 0:0008 \\ 0:0006 & 0:9991 \end{matrix}$$

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-5.9655	-5.9374	4514.97	-5.9709	-5.9393	4520.05
ARCH(3)-L	-5.9701	-5.9384	4519.43	-5.9751	-5.9399	4524.17
GARCH(1,1)	-5.9813	-5.9567	4525.94	-5.9859	-5.9577	4530.36
GARCH(1,1)L	-6.0001	-5.9719	4541.08	-6.0078	-5.9761	4547.92

46. Estimações para a série de Nasdaq utilizando a distribuição Normal

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.77	0.79	0.62	0.75
Q(6)	0.05	0.06	0.03	0.03	0.97	0.96	0.87	0.99
Q(12)	0.03	0.04	0.04	0.04	0.60	0.62	0.69	0.78
Q(1) ²	0.00	0.00	0.20	0.18	0.79	0.76	0.24	0.21
Q(6) ²	0.32	0.02	0.35	0.56	0.03	0.02	0.41	0.56
Q(12) ²	0.10	0.08	0.66	0.92	0.12	0.10	0.70	0.91

47. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Nasdaq utilizando a distribuição Normal

Apresentamos a seguir nas tabelas (50) e (52) os resultados segundo os critérios de informação para a série de Dow Jones. Podemos observar mais uma vez a predominância dos modelos SWGARCH *vis-à-vis* os modelos SWARCH. Como já comentado este resultado ocorre em vários trabalhos tanto sem quanto com mudança de regime.

Além disto observamos que apenas os modelos que possuem estrutura autoregressiva captam bem a dinâmica da média, segundo as tabelas (51) e (53). Além disto observamos também que os modelos SWARCH, tanto com distribuição Normal quanto com distribuição t-Student, não captam toda a dinâmica da volatilidade.

Corroboramos a evidência de que a persistência e mesmo a meia vida diminui de forma substancial ao utilizarmos os modelos SWGARCH *vis-à-vis* os modelos GARCH.

As persistências foram reduzidas de 0:95 e 0:97 para 0:86 e 0:90, respectivamente para as séries do Nasdaq e do Dow Jones.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-5.9790	-5.9473	4526.14	-5.9839	-5.9487	4530.84
ARCH(3)-L	-5.9823	-5.9471	4529.66	-5.9868	-5.9868	4534.08
GARCH(1,1)	-5.9999	-5.9718	4540.97	-6.0051	-5.9734	4545.88
GARCH(1,1)L	-6.0183	-5.9867	4555.89	-6.0241	-5.9889	4561.22

48. Estimações para a série de Nasdaq utilizando a distribuição t-Student

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.76	0.52	0.71
Q(6)	0.07	0.08	0.03	0.04	0.96	0.96	0.93	0.98
Q(12)	0.03	0.05	0.04	0.05	0.54	0.58	0.75	0.79
$Q(1)^2$	0.00	0.00	0.50	0.43	0.73	0.76	0.61	0.46
$Q(6)^2$	0.01	0.01	0.19	0.51	0.02	0.02	0.22	0.59
$Q(12)^2$	0.03	0.03	0.53	0.86	0.05	0.04	0.55	0.89

49. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Nasdaq utilizando a distribuição t-Student

Observamos para as duas séries que a duração estimada em cada regime é muito grande, ou seja, a permanência em cada regime é muito alta. Para a série do Nasdaq, por exemplo, temos que a permanência média em cada regime é dada por $\frac{1}{1_i 0:9993} = 1429$ dias e $\frac{1}{1_i 0:9991} = 1111$ dias. Este valor é muito maior que a duração para os modelos com dois e três regimes de mistura de normais e autoregressivos. Por exemplo, a duração média para os dois regimes do modelo de mistura de normais, para a série do Nasdaq, é de $\frac{1}{1_i 0:9823} = 56$ dias e $\frac{1}{1_i 0:9719} = 36$ dias.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(3)	-6.5284	-6.5038	4939.24	-6.5316	-6.5035	4942.67
ARCH(3)-L	-6.5373	-6.5092	4946.99	-6.5399	-6.5083	4949.96
GARCH(1,1)	-6.5371	-6.5125	4945.81	-6.5423	6.5196	4953.34
GARCH(1,1)L	-6.5443	-6.5161	4952.22	-6.5596	-6.5280	4964.81

50. Estimações para a série de Dow Jones utilizando a distribuição Normal

Esta enorme diferença do tempo média em cada regime para os modelos de mudança de regime com mistura de normais e/ou autoregressivos e os modelos com mudança de regime na variância deve-se em grande parte ao fato de haver uma estrutura na variância com memória mais longa o que não ocorre normalmente na média⁶⁴. Ou seja, na volatilidade após um período de grande volatilidade haverá um outro momento de grande volatilidade, entretanto, dada a baixa previsibilidade para a série de retornos, é muito difícil que após um retorno alto positivo haja um outro retorno alto positivo. Com isto temos que os modelos SWGARCH apresentam uma persistência nos regimes muito maior.

	AR(0)				AR(1)			
	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.02	0.01	0.00	0.00	0.93	0.71	0.71	0.70
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.06	0.05
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Q(1) ²	0.02	0.02	0.90	0.31	0.76	0.71	0.54	0.47
Q(6) ²	0.66	0.38	0.51	0.38	0.56	0.40	0.41	0.39
Q(12) ²	0.00	0.00	0.18	0.18	0.00	0.00	0.13	0.14

51. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Dow Jones utilizando a distribuição Normal

Apresentamos abaixo a especificação do modelo AR(1)-SWGARCH(2,1,1)-L com distribuição t-Student, para a série do Dow Jones.

$$y_t = \underset{(0:0001)}{0:0008} + \underset{(0:0132)}{0:0500}y_{t-1}$$

$$h_t = \underset{(0:0001)}{0:0001} + \underset{(0:0021)}{0:0001}\sigma_{t-1}^2 + \underset{(0:0543)}{0:8628}h_{t-1} + \underset{(0:0282)}{0:0737}d_{t-1}\sigma_{t-1}^2$$

sendo $g_2 = \underset{(0:463)}{2:013}$; o número de graus de liberdade igual a $\underset{(1:954)}{8:2173}$ e a matriz de probabili-

dades de transição dada por:

⁶⁴ Este resultado foi verificado para qualquer uma das séries em análise.

$$P = \begin{pmatrix} 0.9987 & 0.0007 \\ 0.0012 & 0.9992 \end{pmatrix}$$

As séries americanas para os modelos SWGARCH mostraram tempos médios de permanência em cada regime muito superiores aos próprios modelos SWGARCH para as séries brasileiras. Este resultado já era esperado, pois as séries brasileiras, que refletem as oscilações dos *emerging markets* que oscilaram muito mais nos últimos anos que as séries americanas, mesmo que, para o último ano da amostra, - entre meados de 1999 e meados de 2000 - a magnitude das oscilações tenha sido semelhante.

	AR(0)			AR(1)		
	AIC	BIC	Log	AIC	BIC	Log
ARCH(2)	-6.5652	-6.5370	4968.01	-6.5656	-6.5339	4969.34
ARCH(2)-L	-6.5694	-6.5377	4972.22	-6.5697	-6.5345	4973.41
GARCH(1,1)	-6.5784	-6.5502	4977.98	-6.5786	-6.5469	4979.12
GARCH(1,1)L	4977.99	-6.5454	4978.12	-6.5958	-6.5606	4993.13

52. Estimações para a série de Dow Jones utilizando a distribuição t-Student

	AR(0)				AR(1)			
	(2)	(2)-L	(1,1)	(1,1)L	(3)	(3)-L	(1,1)	(1,1)L
Q(1)	0.02	0.00	0.01	0.01	0.25	0.30	0.24	0.27
Q(6)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.05	0.02	0.04
Q(12)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
Q(1) ²	0.02	0.00	0.34	0.34	0.21	0.32	0.25	0.62
Q(6) ²	0.07	0.05	0.26	0.26	0.04	0.05	0.28	0.47
Q(12) ²	0.00	0.00	0.08	0.09	0.00	0.00	0.95	0.75

53. Estatísticas de qualidade de ajuste para a série de Dow Jones utilizando a distribuição t-Student

Na próxima seção apresentaremos as probabilidades filtradas e suavizadas para os diversos regimes para cada série em análise e esta análise da duração de cada regime tornar-se-a mais clara. Além disto, faremos uma breve análise do conceito de mudança de regime aplicado a séries financeiras.

3.7 Probabilidades Filtradas e suavizadas

Nesta seção apresentaremos as probabilidades filtradas e suavizadas extraídas pelos diversos modelos apresentados.

3.7.1 Modelos de mistura de Normais e Autoregressivos

Apresentamos abaixo no gráfico 20 as probabilidades suavizadas - ou seja utilizando toda a informação disponível - associadas a cada regime para a série de Petrobrás estimadas pelo modelo de mistura de Normais. Podemos observar claramente que nos momentos de estabilidade há uma grande probabilidade da série estar no primeiro regime. De outra parte, nos momentos de alta volatilidade a série tem uma probabilidade muito maior de estar no segundo regime.

Conseguimos claramente neste gráfico 20 distinguir as crises pelas quais a economia brasileira passou. Podemos observar no início da série com a crise do México e a mudança do regime cambial uma grande probabilidade da série estar no regime de alta volatilidade e baixo retorno. Após isto observamos um período de retornos de calma no mercado, caracterizado pela alta probabilidade de estarmos no primeiro regime - regime de retornos positivos e baixa volatilidade. Após isto tivemos os períodos das crises da Ásia, Rússia e Brasil, que fizeram com que as probabilidades de estarmos em cada regime oscilassem de forma brusca. Para o período final da série observamos, pelas probabilidades associadas a cada regime, que claramente a série se encontrou no regime de estabilidade, sendo que esta probabilidade só diminui na crise do Nasdaq em abril de 2000.

No gráfico 21 temos a comparação entre as probabilidades filtradas e suavizadas da série estar no regime 1 para a série de Petrobrás previstas pelo modelo de mistura de Normais. Observamos claramente que a série de probabilidade suavizada por ter mais informação disponível para fazer a inferência é muito menos volátil que a série de probabilidade filtrada.

No gráfico 22 temos as probabilidades suavizadas para o modelo de mistura de Normais com três regimes. Observamos que as probabilidades 1 e 2 são semelhantes as probabilidades encontradas para o modelo de 2 regimes. Isto era esperado pois alguns parâmetros para os modelos com 2 e 3 regimes, especialmente as variâncias são semelhantes entre os dois modelos, conforme a tabela 32. O terceiro regime ocorre apenas nos momentos de maiores quedas e conforme observamos na seção anterior tem uma duração média muito pequena - de aproximadamente 6 dias.

Observamos para a série do Índice Bovespa na figura 23 as probabilidades suavizadas em cada instante do tempo para o modelo de mistura de Normais com 2 regimes. Observamos que a evolução das probabilidade é muito semelhante à série de Petrobrás. Este resultado é justificado devido as séries sofrerem a influência do mesmo mercado, no caso o brasileiro.

No próximo gráfico - o gráfico 24 - temos uma comparação entre as probabilidades filtradas para o modelo de mistura de normais e autoregressivo. Observamos que as probabilidades são muito semelhantes entre si para a série de Índice Bovespa⁶⁵.

⁶⁵ Além disto temos que as demais séries apresentam probabilidades para os modelos de mistura de Normais e autoregressivo muito semelhantes.

Para a série do Nasdaq, temos nos gráficos 25 e 26, as probabilidades suavizadas de estarmos em cada um dos regimes respectivamente para o modelo com 2 e 3 regimes. Para a série do Nasdaq no modelo de 2 regimes, temos conforme a tabela 33, um primeiro regime de retorno positivo com baixa volatilidade e um segundo retorno com média bem mais perto de zero e uma volatilidade muito maior. Observamos que a série troca de regime com alta frequência principalmente na segunda metade da série quando esta cresce de forma muito intensa apesar de algumas crises que acabam afetando-a também, como a crise russa.

Para o modelo de três regimes podemos observar no gráfico 26 que as probabilidades são muito menos voláteis. Ou seja temos os regimes bem mais definidos. Na tabela 33 temos que o primeiro regime é o regime de alta moderada e baixa volatilidade, o segundo é o regime de altos retornos porém com maior volatilidade e o terceiro é um regime de baixos retornos com alta volatilidade. Observamos para a série do Nasdaq que o primeiro regime esta associado a primeira parte da amostra quando temos altos retornos e baixa volatilidade. Na segunda parte da amostra o regime predominante é o segundo de altos retornos com maior volatilidade. Podemos observar claramente que nos dois momentos de maiores crises para esta série, temos que o terceiro regime - regime de baixa - é o regime predominante. Para a série do Nasdaq é interessante observar que parece bem mais lógico observar para esta série 3 regimes do que 2.

Temos no gráfico 27 as probabilidades suavizadas para a última das séries em análise: a série do Dow Jones. Podemos observar que há de fato para esta série muita alternância entre os regimes e apenas no início - quando a série tem maior probabilidade de estar no

20. Probabilidade suavizada para a Petrobrás

regime 1 - e no fim - quando a série parece estar no regime 2 —conseguimos detectar um regime claro para a série.

Este comportamento de não ter claramente regimes distintos de comportamento para a série é comum a séries de países com mercados financeiros maiores e mais consolidados, conforme Eftekhari (1997) observa para um grande conjunto de dados.

Na tabela 54 observamos as correlações entre as probabilidades suavizadas associadas a cada um dos regimes de acordo com o modelo de mudança de regime com mistura de normais. Observamos que há uma clara correlação entre as séries de ambos os países, porém entre as séries de diferentes países não há praticamente nenhuma correlação.

21.Comparação entra a probabilidade filtrada e suavizada série de Petrobrás

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Petrobrás	1	0.750	0.056	0.000
Bovespa	0.750	1	0.062	0.015
Nasdaq	0.056	0.062	1	0.710
Dow Jones	0.000	0.015	0.710	1

54. Correlação entre as probabilidades associadas ao regime 1 das séries entre 1994 e 2000

Os modelos de mudança de regime na volatilidade, como vimos na seção anterior, apresentam regimes muito mais estáveis. Na próxima seção apresentaremos os resultados para estes modelos.

22. Probabilidades suavizadas para a série de Petrobrás (mistura de Normais e 3 regimes)

3.7.2 Modelos SWGARCH

Para a série de Petrobrás temos nos gráficos 28 e 29 as probabilidades suavizadas e filtradas inferidas pelo modelo de mudança de regime na volatilidade -os modelos SWGARCH. Constatamos que estas probabilidades são muito mais estáveis que as probabilidades observadas para os modelos de mudança de regime na média. Este resultado, que se repete em todas as séries em análise, se deve principalmente ao fato de que devido a existência de uma estrutura na volatilidade que faz com que os regimes sejam muito mais estáveis, e com isto tenhamos muito menos oscilações nas probabilidades associadas a cada regime.

23. Probabilidades suavizadas para a série de Bovespa (mistura de Normais e 2 regimes)

No gráfico 28 observamos claramente que as probabilidades suavizadas indicam que a série apresenta regime de alta volatilidade no início da série - com a crise mexicana e a mudança da banda cambial - e nas crises da Ásia e durante as crises da Rússia e do Brasil. Nos outros momentos, mesmo com a crise do Nasdaq em abril de 2000 a série permaneceu num regime de baixa volatilidade.

De outra parte, a série filtrada apresentada no gráfico 29 mostrou um comportamento muito mais errático, principalmente para o período entre as crises da Ásia e da Rússia.

Na figura 30 temos as probabilidades suavizadas para as séries de Petrobrás e Índice Bovespa. Observamos que a série de Petrobrás encontra-se muito mais tempo no regime 1

24.Comparação entre as probabilidades filtradas e suavizadas

do que a série de Bovespa. Conforme a seção anterior verificamos que o tempo médio no regime 1 é para as séries respectivamente de 112 e 312 dias. Isto se deve porque a série de Petrobrás foi muito favorecida pelo grande crescimento do preço do Petróleo ao longo do período em análise o que fez com que esta tivesse uma volatilidade pequena. Notamos isto de forma mais acentuada para o último ano da nossa amostra quando a série do Índice Bovespa está no segundo regime, regime de alta volatilidade, e a série de Petrobrás devido ao aumento substancial do preço do petróleo mantém-se no primeiro regime.

O enorme crescimento e a queda do índice Nasdaq são facilmente verificados no gráfico 31, onde temos as probabilidades filtradas do modelo SWGARCH de estarmos em cada um dos regimes para esta série. Observamos que para esta série as probabilidades

25. Probabilidades suavizadas para a série do Nasdaq (mistura de Normais e 2 regimes)

associadas a cada regime são bem mais nitidamente identificadas. Até meados de 96 a série estava no primeiro regime, porém após este período a série passa a estar no segundo regime. Este segundo regime entretanto capta também o período em que o Índice subiu muito porém com grande volatilidade.

Este resultado verificado com estes modelos é muito diferente do resultado obtido para os modelos de mudança de regime com mistura de normais e autoregressivo. Isto se deve basicamente ao fato de que a volatilidade para a série do Nasdaq tem um comportamento muito distinto para estes dois momentos.

26. Probabilidades suavizadas para a série do Nasdaq (mistura de Normais e 3 regimes)

Para o gráfico das probabilidades do Índice Dow Jones verificamos também esta mudança de regime grosseiramente no meio da série. Porém para esta a mudança ocorreu mais tarde, após a crise da Rússia conforme podemos observar na figura ??, onde apresentamos as probabilidades associadas ao segundo regime para ambas as séries.

Na tabela 55 podemos constatar que há uma clara relação entre as probabilidades das série de Petrobrás e do Índice Bovespa e entre o Índice Dow Jones e o Nasdaq. Entre as demais probabilidades não se verifica nenhuma relação clara e expressiva, de forma muito semelhante ao que foi observado na tabela 54 para as probabilidades estimadas pelos modelos de mudança de regime com mistura de normais.

27. Probabilidades suavizadas para a série do Dow Jones (mistura de Normais e 2 regimes)

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Petrobrás	1	0.7296	0.0901	-0.0997
Bovespa	0.7296	1	0.1340	0.0702
Nasdaq	0.0901	0.1340	1	0.6122
Dow Jones	-0.0997	0.0702	0.6122	1

55. Correlação entre as probabilidades suavizadas associadas ao regime 1

3.7.3 Uma interpretação para os modelos de mudança de regime em finanças

Os modelos de mudança de regime, como vimos nas seções anteriores, conseguem uma boa aderência para as séries financeiras analisadas neste trabalho. Além disto, estes modelos

28. Probabilidade suavizada para a série de retornos de Petrobrás

apresentam estimativas de probabilidade de estarem em cada regime que conseguem captar bem as crises pelas quais o mundo financeiro passou ao longo dos últimos anos.

Entretanto, devemos aqui analisar que o conceito de mudança de regime para séries financeiras tem um significado um pouco diferente do verificado para séries macroeconômicas. Para estas últimas os modelos captam uma mudança nos fundamentos macroeconômicos, como, por exemplo, a mudança do regime cambial de 1999, quando o câmbio passou de fixo para flutuante. De outra parte, para as séries financeiras não há uma mudança estrutural no modelo, apenas há uma mudança na fase em que o mercado financeiro se encontra,

29. Probabilidade filtrada para a série de retornos de Petrobrás

isto é, se este está numa fase de expansão, crescendo de forma continua com baixa volatilidade ou está numa fase de baixa com alta volatilidade.

Esta mudança foi captada por todos os modelos de mudança de regime. Entretanto, observamos que nos modelos de volatilidade condicional - SWARCH e SWGARCH - a oscilação entre os regimes foi muito menor, portanto com uma duração para cada um dos regimes muito maior. Esta maior duração deveu-se ao fato de que a volatilidade tem um comportamento mais bem determinado para períodos de crise ou estabilidade do que apenas os retornos.

30. Comparação entre as séries de probabilidade para Petrobrás e Ibovespa

Como veremos no próximo capítulo, o fato destes modelos captarem bem as diferentes dinâmicas do mercado financeiro pode ser muito útil para operarmos no mercado financeiro.

3.8 Previsão dos modelos SWGARCH um passo-à-frente

Para a previsão m -passos a frente para os modelos SWGARCH-L consideremos inicialmente a hipótese de sabermos os valores de $S_t; S_{t+1}; \dots; S_{t+q+1}$. Com isto teremos também, hipoteticamente mais uma vez, os valores de $u_{\ell} = u_{\ell}^P \overline{g_{s_{\ell}}}$ para $\ell = t; t+1; \dots; t+q+1$. Com este conjunto de informação teremos que a previsão de u_{t+m}^2 será dada por,

$$\begin{aligned}
 & E(u_{t+m}^2 | S_t; S_{t+1}; \dots; S_{t+q+1}; \theta_t; \theta_{t+1}; \dots; \theta_{t+q+1}; h_t; h_{t+1}; \dots; h_{t+q+1}) \\
 & = E(g_{s_{t+m}}^2 \theta_{t+m}^2 | S_t; S_{t+1}; \dots; S_{t+q+1}; \theta_t; \theta_{t+1}; \dots; \theta_{t+q+1}; h_t; h_{t+1}; \dots; h_{t+q+1}) \quad (46)
 \end{aligned}$$

3.1. Probabilidades da série do Nasdaq

Como s_t é independente de v_ℓ e u_ℓ para todo ℓ e t , teremos que (A.46) pode ser fatorada por,

$$= E(g_{s_{t+m}} | s_t; s_{t-1}; \dots; s_{t-pq+1}) : E \left(\prod_{j=1}^3 \theta_{t-j}^2 | \theta_t; \theta_{t-1}; \dots; \theta_{t-q+1}; h_t; h_{t-1}; \dots; h_{t-p+1} \right) \quad (47)$$

Para o primeiro termo de (A.47), dado que s_t segue uma cadeia de Markov de primeira ordem, temos que,

32. Probabilidade filtrada no regime 2 para as séries do Índice Dow Jones e Nasdaq

$$E(g_{s_{t+m}} | s_t, s_{t-1}, \dots, s_{t-pq+1}) = \sum_{j=1}^K g_j \text{Pr ob}(s_{t+m} = j | s_t) \quad (48)$$

A matriz de transição m -passos a frente é dada pela multiplicação da matriz (A.19)

por ela mesma m vezes,

$$\begin{pmatrix} \text{Pr ob}(s_{t+m} = 1 | s_t = 1) & \text{Pr ob}(s_{t+m} = 1 | s_t = 2) & \dots & \text{Pr ob}(s_{t+m} = 1 | s_t = K) \\ \text{Pr ob}(s_{t+m} = 2 | s_t = 1) & \text{Pr ob}(s_{t+m} = 2 | s_t = 2) & \dots & \text{Pr ob}(s_{t+m} = 2 | s_t = K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Pr ob}(s_{t+m} = K | s_t = 1) & \text{Pr ob}(s_{t+m} = K | s_t = 2) & \dots & \text{Pr ob}(s_{t+m} = K | s_t = K) \end{pmatrix}^m = P^m \quad (49)$$

Com isto temos que,

$$E(g_{s_{t+m}} | s_t = i) = g^0 P^m e_i \quad (50)$$

onde e_i é i -ésima coluna da matriz identidade $(K \times K)$ e dado que

$$g^0 \sim [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_K] \quad (51)$$

De outra parte, o segundo termo em (A.47), dado que σ_t^2 segue um modelo GARCH-L, será dado por,

$$\begin{aligned} E \sigma_{t+m}^2 &= E \left(\sigma_t^2; \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q+1}^2; h_t, h_{t-1}, \dots, h_{t-p+1} \right) \quad (A.52) \\ &= a_0 + a_1 \sigma_t^2 + \dots + a_q \sigma_{t-q+1}^2 + b_1 h_t + \dots + b_p h_{t-p+1} + d_t \sigma_t^2, \quad m = 1 \\ &= a_0 + (a_1 + b_1 + \dots) h_{t+m-1}^2 + \dots + (a_{pq} + b_{pq}) h_{t+m-pq}^2, \quad m \geq 2 \end{aligned}$$

Os valores para h_{t+m-1}^2 são calculados como,

$$h_{\ell jt}^2 = \sigma_{\ell}^2 \quad \text{para } \ell = t \quad (A.53)$$

$$= E(\sigma_{\ell}^2; \sigma_{t-1}^2, \dots) \quad \text{para } \ell > t \quad (A.54)$$

Com isto a sequência $h_{\ell jt}^2$ para $\ell = t+2; t+3; \dots$ é calculada de forma recursiva com a equação (A.52). Utilizando a equação (A.35) teremos que (A.52) pode ser escrita como uma função,

$$\begin{aligned} E \sigma_{t+m}^2 &= E \left(\sigma_t^2; \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q+1}^2; h_{t-1}, h_{t-2}, \dots, h_{t-p+1} \right) \\ &= h_{t+mjt}^2(S_t; S_{t-1}, \dots, S_{t-pq+1}; u_t; u_{t-1}, \dots, u_{t-q+1}; h_{t-1}, \dots, h_{t-p+1}) \quad (55) \end{aligned}$$

Com isto a estimação em (A.46) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} & E(u_{t+m}^2 | s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}; \theta_t; \theta_{t_1-1}, \dots, \theta_{t_1-q+1}; h_{t_1-1}, h_{t_1-2}, \dots, h_{t_1-p+1}) \\ &= g^0 P^m e_{st} h_{t+m}^2 (s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}; u_t; u_{t_1-1}, \dots, u_{t_1-q+1}; h_{t_1-1}, \dots, h_{t_1-p+1}) \end{aligned} \quad (A.56)$$

Como $s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}$ é função de $u_t; u_{t_1-1}, \dots, u_{t_1-q+1}$ e $h_{t_1-1}, \dots, h_{t_1-p+1}$ teremos que,

$$\begin{aligned} & E(u_{t+m}^2 | s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}; \theta_t; \theta_{t_1-1}, \dots, \theta_{t_1-pq+1}; h_{t_1-1}, h_{t_1-2}, \dots, h_{t_1-p+1}) \\ &= f(s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}; u_t; u_{t_1-1}, \dots, u_{t_1-q+1}; h_{t_1-1}, \dots, h_{t_1-p+1}) \end{aligned} \quad (A.57)$$

Entretanto, conforme acima mencionado, não conhecemos na prática os valores de $s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1}$. Entretanto, pela lei das expectativas iteradas:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t+m}^2 &= E(u_{t+m}^2 | u_t; u_{t_1-1}, \dots, u_{t_1-q+1}; h_t; h_{t_1-1}, \dots, h_{t_1-p+1}) \\ &= \sum_{s_t=1} \sum_{s_{t_1-1}=1} \dots \sum_{s_{t_1-q+1}=1} f(s_t; \dots, s_{t_1-pq+1}; u_t; \dots, u_{t_1-q+1}; h_{t_1-1}, \dots, h_{t_1-p+1}) \\ &\quad p(s_t; s_{t_1-1}, \dots, s_{t_1-pq+1} | y_t; y_{t_1-1}, \dots, y_{t_1-pq+1}) \end{aligned} \quad (A.58)$$

Ou seja, a previsão da volatilidade m passos à frente é dada pela ponderação de cada previsão de volatilidade condicional pela matriz de probabilidades P^m ; com base na informação passada.

33. Gráfico da volatilidade de Petrobrás

3.9 Comparação das previsões entre os modelos

Nesta seção compararemos brevemente primeiro visualmente e depois através das funções perda os melhores modelos segundo as funções perda para os modelos GARCH com e sem mudança de regime. A análise gráfica é importante para podermos observar a diferença na dinâmica dos diversos modelos em questão, tanto com quanto sem mudança de regime. Além disto observaremos qual é o melhor modelo segundo as diferentes funções perda, comparação esta que faremos com os modelos sem mudança de regime.

3.9.1 Gráficos

Observamos para a série de Petrobrás a volatilidade extraída dos modelos SWGARCH-L, EGARCH e GARCH-L no gráfico 33. Percebemos que as volatilidades são muito semelhantes entre os diferentes modelos.

No gráfico 34, que mostra apenas o período entre a mudança da banda cambial (mar/95) - que provocou muita instabilidade nos mercados locais - observamos claramente

34. Volatilidade durante a mudança da banda cambial

que as séries de volatilidade dos modelos SWGARCH-L e GARCH-L tem um comportamento mais parecido entre si do que a série de volatilidade extraída com o modelo EGARCH.

Ao compararmos no gráfico 35 a volatilidade extraída pelo modelo EWMA *vis-à-vis* o modelo SWGARCH, durante a crise da banda cambial, observamos que este último apresenta uma resposta muito mais rápida aos choques externos porém volta a níveis mais baixos de forma muito mais rápida que o modelo EWMA. Isto torna os modelos da família GARCH muito mais precisos que os modelos EWMA tão difundidos no meio financeiro.

Ao observarmos a volatilidade extraída pelos modelos para a série do Bovespa no gráfico 36, observamos um resultado muito semelhante ao observado para a série de Petrobrás, tendo a volatilidade aumentado bastante durante a crise do México, banda Cambial, Ásia, Rússia, desvalorização do real e crise do Nasdaq.

No gráfico 37 observamos o comportamento das volatilidades extraídas segundo o EWMA, GARCH-L e SWGARCH-L, durante a crise da Rússia. Observamos claramente

35. Volatilidade durante a mudança da banda cambial

que a série do EWMA apresenta um comportamento muito distinto das demais séries, sendo esta uma série muito menos nervosa que as demais. De outra parte, observamos que a série do SWGARCH-L apresenta uma queda mais rápida do que a do modelo GARCH-L, principalmente devido ao fato desta ter uma persistência menor.

No gráfico 38 temos as volatilidades extraídas para a série do Nasdaq pelo GARCH-L e pelo SWGARCH-L, mais uma vez observamos um comportamento para a série como um todo muito semelhante. A volatilidade apresenta um patamar baixo até a crise russa quando há um aumento de volatilidade que se agrava na série no final quando há a crise do Nasdaq.

Esta crise é mais bem observada na figura 39 onde observamos o período final da série segundo a volatilidade extraída pelo modelo GARCH-L e SWGARCH-L. Constatamos que o SWGARCH é mais sensível às oscilações da série que o modelo GARCH-L. Isto se deve basicamente ao fato de que o modelo SWGARCH está neste período da amostra no segundo

36. Volatilidade da série de Índice Bovespa

regime, e portanto é mais sensível às oscilações da série. Entretanto, os choques parecem se dissipar de forma mais rápida devido à menor persistência.

3.9.2 Funções perda

Nesta seção apresentaremos as funções perda para o melhor modelo volatilidade com mudança de regime para cada série. Na tabela 56 temos as funções perda, calculadas de forma idêntica a feita no segundo capítulo, para os modelos SWGARCH-L com parâmetros autotregressivos na média.

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Exercício de previsão I				
MSE	9.6731	9.3531	1.5912	5.9212
MAE	0.12857	8.5445	1.7933	9.7443
$[LE]^2$	6.0512	6.7217	7.2564	6.9692
$jLEj$	1.7491	1.7851	1.8601	1.8531
frequência	0.0494	0.0392	0.0520	0.0593
Exercício de previsão II				
MSE	9.6181	8.6868	3.6438	1.3412
MAE	6.6037	4.8591	10.807	6.7423
$[LE]^2$	6.5012	8.3802	5.2227	3.8164
$jLEj$	1.9804	1.8871	1.6756	1.4385
frequência	0.04	0.07	0.08	0.04

37. Volatilidade durante a crise russa e desvalorização do real

56. Funções perda para os modelos SWGARCH

De outra parte na tabela 57 podemos verificar que os modelos de mudança de regime não são claramente superiores aos modelos sem mudança de regime. Além disto verificamos que o melhor modelo, isto é, o modelo que é indicado pelas funções perda como o melhor modelo por mais vezes, é o modelo GARCH-L sem mudança de regime.

	Petrobrás	Bovespa	Nasdaq	Dow Jones
Exercício de previsão I				
MSE	SWGARCH-L	EGARCH	EGARCH	SWGARCH-L
MAE	EGARCH	EGARCH	EGARCH	SWGARCH-L
$[LE]^2$	GARCH-L	GARCH-L	EGARCH	GARCH-L
$jLEj$	GARCH-L	GARCH-L	GARCH-L	SWGARCH-L
frequência	EGARCH	GARCH-L	SWGARCH-L	EGARCH
Exercício de previsão II				
MSE	GARCH-L	EGARCH	EGARCH	GARCH-L
MAE	GARCH-L	EGARCH	EGARCH	GARCH-L
$[LE]^2$	SWGARCH-L	GARCH-L	SWGARCH-L	GARCH-L
$jLEj$	GARCH-L	EGARCH	EGARCH	GARCH-L
frequência	SWGARCH-L	-	GARCH-L	GARCH-L

57. Melhor modelo segundo cada função perda

38. Volatilidade da série do Nasdaq

3.10 Conclusões

As principais conclusões e observações deste capítulo foram que:

- em geral os modelos de mudança de regime se adequam bem as séries financeiras em análise.
- para os modelos de mistura de Normais e para o modelo autoregressivo, segundo os critérios de informação, estes modelos são muito superiores aos modelos sem mudança de regime.
- os modelos de três regimes para os modelos de mistura de Normais e para o modelo autoregressivo, segundo os critérios de informação, são superiores aos modelos de dois regimes.
- os melhores modelos com mudança de regime na variância foram os modelos $SWGARCH(2,1,1)$ com *leverage effect*, componente autoregressivo e distribuição t-Student.

39. Volatilidade na crise do Nasdaq

- os modelos SWGARCH não foram adequados os modelos de 3 regimes.
- observamos que as probabilidades filtradas são muito mais erráticas que as probabilidades suavizadas.
- os modelos SWGARCH apresentaram resultados ambíguos em relação aos modelos sem mudança de regime. Estes modelos foram melhores para as séries americanas segundo o critérios de informação, porém, piores para as séries brasileiras.
- segundo as funções perda os modelos SWGARCH se mostraram, na maioria dos casos, piores que os modelos sem mudança de regime.
- para todos os modelos SWGARCH a duração para as séries americanas sempre foi muito superior a duração para as séries brasileiras.

Appendix B

Apêndice: Cadeias de Markov

Neste apêndice apresentaremos alguns importantes conceitos sobre cadeias de Markov extraídos de Hamilton (1994), Kim (1994) e Kim e Nelson (1999). Para uma análise completa deste tópico são recomendados estes trabalhos.

B.1 Estimação do modelo de mistura de Normais

As estimativas de máxima verossimilhança são obtidas pelo lagrangeano dado por:

$$J(\mu) = L(\mu) + \lambda (1 - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_N) \quad (1)$$

e fazendo as derivadas com respeito a μ - o vetor dos parâmetros populacionais - igual a zero. A derivada da log-verossimilhança será então dada por:

$$\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(y_t; \mu)} \times \frac{\partial f(y_t; \mu)}{\partial \mu} \quad (2)$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(y_t; \mu)}{\partial \mu_j} &= \frac{1}{2^{1/4} \mu_j^{3/4}} \exp \left[-\frac{1}{2 \mu_j^2} (y_t - \mu_j)^2 \right] \\
&= f(y_t | s_t = j; \mu) \\
\frac{\partial f(y_t; \mu)}{\partial \mu_j^2} &= \frac{y_t - \mu_j}{\mu_j^2} p(y_t; s_t = j; \mu) \\
\frac{\partial f(y_t; \mu)}{\partial \mu_j^3} &= \left[-\frac{1}{2 \mu_j^2} + \frac{(y_t - \mu_j)^2}{2 \mu_j^4} \right] p(y_t; s_t = j; \mu)
\end{aligned}$$

Com isto temos que (B.2) será dada respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(y_t; \mu)} \times f(y_t | s_t = j; \mu) \\
\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j^2} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(y_t; \mu)} \times \frac{y_t - \mu_j}{\mu_j^2} p(y_t; s_t = j; \mu) \\
\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j^3} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{f(y_t; \mu)} \times \left[-\frac{1}{2 \mu_j^2} + \frac{(y_t - \mu_j)^2}{2 \mu_j^4} \right] p(y_t; s_t = j; \mu)
\end{aligned}$$

Utilizando a definição da probabilidade condicional,

$$P(s_t = j | y_t; \mu) = \frac{p(y_t; s_t = j; \mu)}{f(y_t; \mu)} = \frac{\mu_j \cdot f(y_t | s_t = j; \mu)}{f(y_t; \mu)}$$

temos que,

$$\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{n} P(s_t = j | y_t; \mu) \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j^2} = \sum_{t=1}^T \frac{y_{tj} - \mu_j}{n \mu_j^2} P(s_t = j | y_t; \mu) \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu_j^3} = \sum_{t=1}^T \frac{1}{n} \left(\frac{y_{tj} - \mu_j}{2 \mu_j^2} + \frac{(y_{tj} - \mu_j)^2}{2 \mu_j^4} \right) P(s_t = j | y_t; \mu) \quad (B.5)$$

Igualando estas equações a zero teremos os estimadores dos parâmetros. Para a equação (B.4) teremos que:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \frac{y_{tj} - \mu_j}{n \mu_j^2} P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) &= 0 \\ \sum_{t=1}^T y_{tj} P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) &= \mu_j \sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) \\ \mu_j &= \frac{\sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T y_{tj} P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})} \end{aligned}$$

esta equação é igual a equação (A.40).

Para a equação (B.5) teremos de forma similar:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{n} \frac{y_{tj} - \mu_j}{2 \mu_j^2} + \frac{(y_{tj} - \mu_j)^2}{2 n \mu_j^4} \right) P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) &= 0 \\ \frac{1}{n \mu_j^2} \sum_{t=1}^T (y_{tj} - \mu_j)^2 P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) &= \sum_{t=1}^T \frac{(y_{tj} - \mu_j)^2}{n \mu_j^2} P(s_t = j | y_t; \hat{\mu}) \\ \mu_j^2 &= \frac{\sum_{t=1}^T (y_{tj} - \mu_j)^2 P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \hat{\mu})} \end{aligned}$$

Para o estimador de μ_j teremos que maximizar a derivada de B.1:

$$\frac{\partial J(\mu)}{\partial \mathbb{1}_j} = \mathbb{1}_j^{-1} \sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \mu) - \mathbb{1}_j = 0$$

$$\sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \mu) = \mathbb{1}_j$$

Teremos então que:

$$\sum_{t=1}^T P(s_t = 1 | y_t; \mu) + \dots + \sum_{t=1}^T P(s_t = N | y_t; \mu) = \mathbb{1}_1 + \dots + \mathbb{1}_N$$

$$\sum_{t=1}^T [1] = \mathbb{1}_N \quad (1)$$

Com isto teremos que $T = \mathbb{1}_N$ e conforme as equações (A.42) e (A.43),

$$\mathbb{1}_j = T^{-1} \sum_{t=1}^T P(s_t = j | y_t; \mu)$$

B.2 Previsão de uma cadeia de Markov

Uma forma muito útil de representar uma cadeia de Markov é através de um vetor autoregressivo. Suponha que $\mathbf{a}_t$ seja um vetor $(N \times 1)$ cujo i -ésimo é igual a 1 se $s_t = i$ e os outros valores são zero. Teremos então se $s_t = i$ que o vetor $\mathbf{a}_t$ será dada pela i -ésima coluna de I_N - sendo I_N a matriz identidade $(N \times N)$:

Com isto temos que:

$$\begin{aligned}
a_t &= (1; 0; 0; \dots; 0) \text{ quando } s_t = 1 \\
&= (0; 1; 0; \dots; 0) \text{ quando } s_t = 2 \\
&= : \\
&= : \\
&= : \\
&= (0; 0; 0; \dots; 1) \text{ quando } s_t = N
\end{aligned}$$

Teremos com isto que a:

$$E(a_t | s_t = i) = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{iN} \end{pmatrix}$$

Este vetor é simplesmente a i -ésima coluna da matriz de transição P dada por (A.19). Além disto temos que a esperança de a_t é dada por:

$$E(a_{t+1} | a_t) = P a_t$$

Pela propriedade da cadeias de Markov dada em (A.18) temos que:

$$a_{t+1} = P a_t + v_{t+1} \quad (6)$$

onde:

$$v_{t+1} = a_{t+1} - E(a_{t+1} | a_t, a_{t-1}, \dots) \quad (7)$$

temos então que a equação que (B.6) é um vetor autoregressivo de primeira ordem e, segundo (B.7), v_t é um martingal a diferença.

Segundo a expressão (B.6) temos que:

$$a_{t+m} = v_{t+m} + P v_{t+m-1} + P^2 v_{t+m-2} + \dots + P^{m-1} v_{t+1} + P^m a_t$$

onde P^m indica que a matriz P foi multiplicada por si mesma m vezes. Dado que v_t é um martingal a diferença teremos que:

$$E(a_{t+m} | a_t, a_{t-1}, \dots) = P^m a_t \quad (8)$$

Segundo Blume e Simon (1994) temos que se uma matriz A ($N \times N$) tem n diferentes autovalores ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) podemos colocar estes valores na matriz diagonal dada por Λ ;

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

e definindo T como o vetor dos autovetores associados - $T = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ - teremos que

A será dada por:

$$A = T \alpha T^{-1}$$

Se multiplicarmos A por si mesmo m vezes teremos:

$$\begin{aligned} A^m &= T \alpha T^{-1} \times T \alpha T^{-1} \times \dots \times T \alpha T^{-1} \\ &= T \alpha (T^{-1} T) \alpha (T^{-1} T) \dots \alpha T^{-1} \\ &= T^{-1} \alpha^m T \end{aligned} \quad (B.9)$$

dado (B.9) teremos que a matriz P^m em (B.8) será dada por:

$$P^m = T^{-1} \alpha^m T$$

Quando temos dois regimes observamos em (A.21) os autovetores e em (A.23) os autovalores. Com isto teremos que a matriz P^m será dada por:

$$\begin{aligned} P^m &= \begin{pmatrix} \frac{1_i p_{22}}{2_i p_{11_i} p_{22}} & \frac{1_i p_{11}}{2_i p_{11_i} p_{22}} \\ \frac{1_i p_{22}}{2_i p_{11_i} p_{22}} & \frac{1_i p_{11}}{2_i p_{11_i} p_{22}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(1_i p_{22}) + \lambda_2^m (1_i p_{11})}{2_i p_{11_i} p_{22}} & \frac{(1_i p_{22}) \lambda_2^m (1_i p_{22})}{2_i p_{11_i} p_{22}} \\ \frac{(1_i p_{11}) \lambda_2^m (1_i p_{11})}{2_i p_{11_i} p_{22}} & \frac{(1_i p_{11}) + \lambda_2^m (1_i p_{22})}{2_i p_{11_i} p_{22}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (B.10)$$

onde $\lambda_2 = \frac{1}{2} (1 + p_{11} + p_{22})$: Com isto teremos as probabilidades de estarmos em cada regime m passos-à-frente.

B.3 Inferência para as probabilidades filtradas e suavizadas.

A maior dificuldade dos modelos de mudança de regime esta ligada ao fato de não sabermos em qual regime a série se encontra em cada momento. Para isto temos inicialmente de calcular com base na informação passada a probabilidade de estarmos em cada regime em cada instante do tempo, ou seja, $P(s_{t+1} = j | I_t; \mu)$; onde I_t é a informação disponível até o instante t : Existem duas probabilidades utilizadas nos modelos de mudança de regime: a probabilidade filtrada e a probabilidade suavizada. A probabilidade filtrada é obtida com as informações até o instante t e a probabilidade suavizada é obtida com a informação até o instante T , ou seja, há muito mais informação disponível na estimação da probabilidade suavizada.

As probabilidades filtradas são coletadas no vetor $\hat{\alpha}_{t+1jt}$: A inferência e previsão para instante do tempo é dado por:

$$\hat{\alpha}_{tjt} = \frac{\sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}_{tjti}^{-1} \gamma_t}{\sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}_{tjti}^{-1} \gamma_t} \quad (B.11)$$

$$\hat{\alpha}_{t+1jt} = P \hat{\alpha}_{tjt} \quad (B.12)$$

onde γ_t é o vetor das densidades condicionais para cada instante do tempo e $^{-1}$ indica multiplicação elemento-por-elemento. Neste processo fixamos o valor do parâmetro μ e fazemos as T iterações. Fazemos isto até conseguirmos maximizar a função de verossimilhança dada por:

$$L(\mu) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t | I_t; \mu)$$

onde $f(y_{tj}|t; \mu) = \prod_{i=1}^n \hat{\pi}_{tjt_i-1}^{\mu_i}$:

Para começarmos o algoritmo temos de escolher as condições iniciais das previsões dadas por $\hat{\pi}_{1j0}$: Para isto faremos $\hat{\pi}_{1j0} = \frac{1}{N}$:

As probabilidades suavizadas são obtidas segundo um algoritmo desenvolvido por Kim (1994). Teremos então que,

$$\hat{\pi}_{tjT} = \hat{\pi}_{tjt} \prod_{i=1}^n P^{\mu_i} \hat{\pi}_{t+1jT} (\oslash) \hat{\pi}_{t+1jt}$$

onde ($\oslash$) indica divisão elemento-por-elemento. A probabilidade suavizada é calculada de T até $t = 1$ começando em $\hat{\pi}_{TjT}$. Este valor é dado por B.11. Devemos observar que temos dado agora já estimado o vetor de μ : Uma explicação completa do algoritmo de suavizamento é dada em Kim (1994) e Kim e Nelson (1999).

Appendix C

Apêndice: Pacotes computacionais

Neste trabalho utilizamos e adaptamos os programas desenvolvidos por Hamilton e Hamilton & Susmel para o pacote econométrico Gauss 3.2 for DOS, juntamente com os pacotes de otimização restrita - CML (*Constrained Maximum Likelihood*) - e irrestrita -OPTIMUM. Além disto usamos para a maximização o método BHHH (Berndt, Hall, Hall e Hausman) apresentado em Berndt *et alli* (1974). Estes programas estão disponíveis em <http://weber.ucsd.edu/~jhamilto/software.htm>. Além disto recomendamos o uso dos pacotes disponibilizados por Kim e Nelson, que ilustam os exemplos do seu livro *State-Space Models with Regime Switching*. Estes programas se encontram em <http://nwebber.u.washington.edu/~cnelson/ssmarkov.html>.

Outro importante conjunto de programas que pode ser usado para a estimação de modelos de mudança de regime é fornecido por Krolzig para ilustrar seu livro *Markov-Switching Vector Autoregressions*. Os programas estão disponíveis para o pacote Ox em <http://www.economics.ox.ac.uk/hendry/krolzig/>⁶⁶. Outro pacote estatístico que tem um conjunto de rotinas para os modelos de mudança de regime é o Rats no site <http://www.estima.com/procindx.htm#dec1998>.

⁶⁶ Para obter gratuitamente o software OX ver <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik/>.

Chapter 4

Regras de mercado utilizando modelos de mudança de regime

4.1 Introdução

Os modelos com mudança de regime fornecem-nos uma informação valiosa que são as probabilidades associadas a estarmos num determinado regime para a realização de regras de mercado. Nesta seção utilizaremos estas probabilidades para tentarmos criar alguma regra de mercado. Existem no mercado financeiro uma vasta gama de regras de mercado desde as mais simples até as mais complexas que demanda muito tempo computacional e teorias complexas. Utilizando um insumo importante do modelo de mudança de regime - as probabilidades associadas a cada regime - criaremos e aplicaremos, para as quatro séries utilizadas neste trabalho, uma possível regra de mercado.

Esta regra consistirá basicamente em ficar "aplicado" no ativo, no caso em alguma das séries financeiras apresentadas, sempre que o regime indicado pela probabilidade for o regime de baixa volatilidade e retorno positivo. No outro regime, poderemos ficar "zerados" no ativo e simplesmente "aplicados" no ativo livre de risco. Na próxima seção faremos uma análise das possibilidades de fazermos isto, com base nas informações extraídas das probabilidades extraídas dos modelos apresentados no capítulo anterior.

Faremos inicialmente dois testes nesta seção. O primeiro é aplicar no ativo em análise exatamente a proporção dada pela probabilidade filtrada calculada em cada instante do

tempo. O restante seria aplicado sempre no ativo livre de risco, no caso dos ativos nacionais no CDI e no caso dos ativos estrangeiros nos *fed funds* americanos de 1 ano. Esta estratégia será denominada de estratégia 1.

No segundo teste escolheremos uma probabilidade fixa sobre a qual decidiremos se ficaremos aplicados ou não no ativo em análise. Se não ficarmos aplicados neste ativo deveremos ficar em CDI ou *fed funds* americanos. Para escolhermos esta probabilidade deveremos escolher um ponto da amostra, dividindo-a portanto em duas, sendo que na primeira maximizaremos o retorno da estratégia variando o valor da probabilidade. Com esta probabilidade, obtida na primeira parte da amostra, testaremos na segunda parte da amostra esta estratégia, sem assim fazermos nenhum tipo de *data mining*. Esta estratégia será denominada estratégia 2 e dividiremos a nossa série em janeiro de 1998⁶⁷.

Devemos ressaltar que deveremos utilizar a estimativa calculada em cada instante do tempo, ou seja, temos de calcular a probabilidade que usaremos a cada nova informação disponível⁶⁸. Teremos com isto um alto custo computacional porém ganharemos precisão ao fazermos isto ao invés de utilizarmos a probabilidade filtrada estimada para a série como um todo⁶⁹.

Utilizaremos nesta parte do trabalho as probabilidade obtidas pelos modelos de dois regimes de mistura de normais, modelo autoregressivo e o modelo SWGARCH. Estas es-

⁶⁷ Utilizamos esta data como o início da utilização da estratégia devido ao fato que já teríamos um bom intervalo de tempo para a primeira estimação e já teria a série passado por uma crise expressiva: a crise asiática.

⁶⁸ As primeiras 250 probabilidades utilizadas na estratégia 1 - referentes ao primeiro ano (07/94 - 06/95) - foram as probabilidades filtradas, dado que não havia informação suficiente para os modelos de dois regimes.

⁶⁹ Este tempo computacional é em muito diminuído quando colocamos como valores iniciais de cada previsão em t os valores imediatamente anterior calculados em $t - 1$.

estratégias serão confrontadas com o *buy-and-hold*, isto é, comprar o ativo e vendê-lo no final do período. Um exercício parecido foi feito por Eftekari (1997), para várias séries financeiras mundiais.

4.2 Evidências Empíricas

4.2.1 Série de Petrobrás

Os resultado da estratégia 1, de aplicarmos no ativo a exata proporção dada pela probabilidade de estarmos no regime 1, para a série de Petrobrás é dada na tabela 58. Observamos que para todo o período em análise a estratégia é muito melhor do que ficarmos no *buy-and-hold*. Além disto podemos constatar a performance de cada uma das três estratégias ao longo de cada um dos seis anos.

Período	Retorno			
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH	Buy-and-hold
1994 - 2000	467%	533%	395%	101%
07/94 - 06/95	10%	10%	24%	-45%
07/95 - 06/96	45%	45%	40%	41%
07/96 - 06/97	124%	126%	118%	144%
07/97 - 06/98	-2%	8%	-8%	-24%
07/98 - 06/99	-10%	-7%	-22%	-11%
07/99 - 06/00	81%	76%	83%	87%

58. Estratégia 1 para a série de retornos de Petrobrás

No gráfico 40 temos o comportamento das três estratégias contra o *buy-and-hold*. Podemos observar que a estratégia utilizando as probabilidades extraídas com o modelo SWGARCH durante os anos de 1997 e 1999, isto é, durante o período de maiores oscilações para a série de Petrobrás, foi pior que as duas outras estratégias. Na tabela 59 apresentamos os resultados para a estratégia 2. Verificamos mais uma vez que as estraté-

40. Comparação da estratégia 1 utilizando 3 modelos de mudança de regime

gias são muito superiores ao *benchmark* devido ao fato que a estratégia consegue evitar um grande pedaço da queda do mercado provocado pela crise russa e brasileira.

Além disto observamos que os modelos autoregressivos e de mistura de Normais são os melhores modelos segundo as duas estratégias.

	Retorno		
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH
Buy-and-hold	38%	38%	38%
Estratégia 2	181%	143%	123%

59. Estratégia 2 Petrobrás (06/01/1998)

4.2.2 Série de Bovespa

Para a série do Índice Bovespa apresentamos na tabela 60 os resultados para a estratégia 1, ou seja, de investir no ativo a exata quantidade dada pela probabilidade associada a estarmos no regime 1. Essa estratégia é muito superior ao *benchmark*, para o período como um todo, especialmente quando utilizamos as probabilidades extraídas pelos modelos de mistura de

Normais e autoregressivo. As probabilidades extraídas pelo modelo autoregressivo foram as que propiciaram o maior retorno para a estratégia em análise. Devemos observar que este resultado é semelhante ao resultado observado quando usamos esta estratégia 1 para a série de Petrobrás.

Período	Retorno			
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH	Buy-and-hold
1994 - 2000	748%	870%	257%	117%
07/94 - 06/95	17%	25%	8%	-21%
07/95 - 06/96	69%	70%	22%	62%
07/96 - 06/97	100%	101%	86%	105%
07/97 - 06/98	20%	22%	7%	-19%
07/98 - 06/99	22%	27%	3%	-15%
07/99 - 06/00	46%	46%	34%	38%

60. Estratégia 1 para a série de retornos de Índice Bovespa

De outra parte, quando realizamos a estratégia 2, cujos resultados estão reportados na tabela 61, observamos que a melhor estratégia é atingida quando utilizamos o modelo de mistura de normais. Além disto verificamos que o pior modelo continua sendo o modelo SWGARCH. Isto se deve principalmente por estes modelos de mudança de regime terem as probabilidades muito mais estáveis que os outros modelos e demoram para entrar no mercado após os períodos de crise.

	Retorno		
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH
Buy-and-hold	20%	20%	20%
Estratégia 2	200%	185%	125%

61. Estratégia 2 Índice Bovespa (04/01/1999)

4.2.3 Série de Nasdaq

Para a série do Nasdaq observamos que o melhor modelo é o modelo autoregressivo para ambas as estratégias conforme podemos observar nas tabelas 62 e 63. Além disto podemos

observar que as estratégias são sempre muito superiores as estratégias de *buy-and-hold* mais uma vez. Além disto o modelo autoregressivo segundo a tabela 62 é o melhor para todos os anos analisados.

4.2.4 Série de Dow Jones

Nas tabelas 64 e 65 observamos que o melhor modelo para utilizarmos as probabilidades para fazer as previsões foram os modelos de mistura de Normais e autoregressivo respectivamente para as estratégias 1 e 2. Mais uma vez assim corroboramos a hipótese de que os modelos com mistura de normais e autoregressivos são superiores aos modelos SWGARCH.

Período	Retorno			
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH	Buy-and-hold
1994 - 2000	402%	520%	280%	350%
07/94 - 06/95	28%	28%	28%	27%
07/95 - 06/96	37%	43%	25%	17%
07/96 - 06/97	23%	27%	21%	23%
07/97 - 06/98	45%	53%	34%	19%
07/98 - 06/99	21%	44%	17%	19%
07/99 - 06/00	32%	61%	26%	48%

62. Estratégia 1 para a série de retornos do Nasdaq

	Retorno		
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH
Buy-and-hold	115%	115%	115%
Estratégia 2	84%	157%	92%

63. Estratégia 2 Nasdaq (04/01/1999)

Período	Retorno			
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH	Buy-and-hold
1994 - 2000	441%	435%	291%	156%
07/94 - 06/95	25%	25%	21%	20%
07/95 - 06/96	28%	27%	26%	20%
07/96 - 06/97	40%	40%	31%	37%
07/97 - 06/98	36%	35%	25%	10%
07/98 - 06/99	43%	44%	25%	14%
07/99 - 06/00	24%	23%	25%	-3%

64. Estratégia 1 para a série de retornos do Dow Jones

4.3 Conclusões

Nesta seção observamos basicamente que:

- os modelos de mudança de regime tem resultados muito bons quando são utilizados para a realização de sistemas de trading.

- os modelos SWGARCH são inferiores *vis-à-vis* os modelos de mistura de normais e ou autoregressivos para a realização de regras de mercado.

- as duas estratégias obtiveram resultados muito satisfatórios.

	Retorno		
	Mistura de Normais	Autoregressivo	SWGARCH
Buy-and-hold	25%	25%	25%
Estratégia 1	92%	112%	75%

65. Estratégia 2 Dow Jones (06/01/1998)

Chapter 5

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi investigar a eficácia do uso de modelos de mudança de regime para aplicá-los às séries financeiras tanto brasileiras quanto americanas. Destacamos diversas vezes o fato de que estas séries - Petrobrás, Índice Bovespa, Nasdaq e Dow Jones - foram muito influenciadas pelas recorrentes crises financeira - México, Ásia, Rússia, Brasil e Nasdaq - que mudaram substancialmente a dinâmica destas séries imediatamente após as crises especificadas. Os modelos que analisamos neste trabalho conseguem de forma endógena captar as dinâmicas nas séries em função da ocorrência destas séries

No primeiro capítulo observamos vários dos principais fatos estilizados das séries financeiras, presentes nas séries em análise, e observamos as principais características que os modelos econométricos usados devem apresentar para modelar corretamente estas séries. Conglomerados de volatilidade, leptocurtose, *leverage effect* foram alguns dos principais fatos observados tanto para as séries nacionais quanto para as séries americanas. Além disto verificamos que as séries em análise do mesmo país - Petrobrás/Índice Bovespa e Nasdaq/Dow Jones - apresentam grande correlação entre si.

No segundo capítulo apresentamos alguns dos principais modelos de volatilidade utilizados tanto no meio financeiro quanto no meio acadêmico para modelar a volatilidade destas séries financeiras. Observamos que os modelos com distribuição t-Student e que permitiam assimetria aos choques positivos e negativos foram os melhores modelos para modelar as séries. Estes modelos GARCH-L e EGARCH foram os modelos que apresen-

taram os melhores resultados tanto utilizando os critérios de informação quanto utilizando as estatísticas das funções perda. Observamos também que estes modelos reproduzem muitos dos fatos estilizados apresentados pelas séries.

No terceiro capítulo apresentamos os modelos de mudança de regime. Inicialmente observamos que os modelos de mistura de normais e autoregressivos foram muito superiores aos modelos sem mudança de regime quando observamos os critérios de informação. Além disto estes modelos fornecem-nos muitas informações úteis a respeito dos parâmetros de cada uma das fases pelas quais passou a economia mundial bem como a duração destas. Finalmente por estes modelos, através da observação das probabilidades associadas a cada regime, verificamos com qual probabilidade cada série estar em cada regime. Para todas as séries os modelos de três regimes se mostraram mais adequados *vis-à-vis* os modelos de dois regimes, segundo os critérios de informação.

Finalmente apresentamos neste capítulo os modelos de mudança de regime na volatilidade (SWARCH E SWGARCH). Verificamos que os melhores modelos dentre os modelos com mudança de regime foram também aqueles com a distribuição t-Student e que incorporavam o *leverage effect*. Além disto observamos que estes modelos tem um desempenho, segundo as funções perda, muito semelhantes aos modelos sem mudança de regime. Na comparação entre as probabilidades associadas a cada regime pudemos observar que os modelos de mistura de normais e autoregressivo tem um comportamento muito diferente dos modelos de mudança de volatilidade condicional, dado que as probabilidades nos últimos é muito mais estável para cada regime.

No quarto capítulo desta dissertação apresentamos alguns exercícios nos quais utilizamos as probabilidades associadas a estarmos em cada regime para fazermos as regras de mercado. Observamos que os resultados são muito favoráveis a utilizarmos as probabilidades associadas a cada regime principalmente quando utilizamos as probabilidades tanto dos modelos de mudança de regime para mistura de normais quanto para os modelos autoregressivos.

A maior conclusão desta dissertação é a ótima performance dos modelos de mudança de regime tanto para captar a dinâmica das séries em análise quanto para a realização de regras de mercado. Temos na aplicação destes modelos ao mercado financeiro um vasto campo de estudo que com certeza irá se difundir muito no futuro próximo.

Referências Bibliográficas

- Akaike, H. (1973). Information theory and extension of maximum likelihood principle. **Second International Symposium on Information Theory**, 267-281. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Andersen, T. G., Soresen, B. E. (1996). GMM estimation of a stochastic volatility model: a Monte Carlo study. **Journal of Business & Economic Statistics**, **14**: 3, 328-352.
- Almeida, N. M. C. G., Pereira, P. L. V. (1999). Mudança de regime em volatilidade: Os modelos SWGARCH. **XXI Encontro Brasileiro de Econometria**, **1**: 39-58. Belém.
- Berndt, E. K., Hall, B. H., Hall, R. E., Hausman, J. A. (1974). Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. **Annals of Economic and Social Measurement**, **3**: 653-665.
- Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes. **Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section**, American Statistical Association, 177-81.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, **31**: 307-27
- _____ (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rate of return. **Review of Economics and Statistics**, **69**: 542-47.
- _____, Chou R. C., Kroner, K. (1992). ARCH modelling in finance: A review of the theory and empirical evidence. **Journal of Econometrics**, **52**: 5 - 56.

_____, Engle, R. F. & Nelson, D. B. (1994). ARCH models em **Handbook of Econometrics 4**, editores R. F. Engle, D. L. Mcfadden: 2959-3038. New York: North-Holland.

Blume, L., Simon, C. (1994). **Mathematics for Economists**. W. W. Norton & Company, Inc.

Clements, M. P., Hendry, D. F. (1998). **Forecasting Economic Time Series**. Cambridge University.

Cowles, A. (1933). Can stock market forecasters forecast? **Econometrica**, **1**: 309-324.

Chow, G. (1960). Tests of the equality between two sets of coefficients in two linear Regressions. **Econometrica**, **28**: 561-605.

Delhase, P. (1999). **Asia in Crisis: The Implosion of the Banking and Finance Systems**. John Wiley & Sons.

Diebold, F. X. (1986). Modeling the persistence of condicional variances: a coment. **Econometric Reviews**, **5**: 51-56.

_____, Lopez, J. A. (1996). Forecast evaluation and combination, em **Handbook of Statistics 14**, editores G.S. Maddala, C. R. Rao: 241-268.

Ding, Z., Granger, C. W. J., Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. **Journal of Empirical Finance**, **1**: 83-106.

Dowd, K. (1998). **Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management**. John Wiley & Sons.

- Duarte, A. M. (1998). **Uma introdução ao gerenciamento de riscos corporativos**. Seminário realizado no IME-USP.
- Dueker, M.J. (1997). Markov switching in GARCH processes and mean-reverting stock-market volatility. **Journal of Business & Economic Statistics**, **15**: 26-34.
- Eftekhari, B. (1997). **The Markov regime switching as a Trading Tool**. Cambridge Discussion papers in accounting and finance. Cambridge.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. **Econometrica**, **50**: 987-1008.
- _____, Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistent of conditional variances. **Econometric Reviews**, **5**: 1-50.
- _____, Lilien, D. M, Robins, Russel P. R. (1987). Estimating time-varying risk Premia in the term structure: the ARCH-M model. **Econometrica**, **55**: 391-407.
- _____, Gonzalez-Riviera, G. (1991) Semiparametric ARCH models. **Journal of Business and Economic Statistics**, **9**: 345-359.
- _____, Ng, V. K. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. **Journal of Finance**, **48**: 1749-1777.
- Fama, E. (1965). The behaviour of stock market prices. **Journal of Business**, **38**: 34-105.
- _____, (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **Journal of Finance**, **25**: 383-417.
- Garcia, R.& Perron, P. (1996). An analysis of real interest under regime shift. **Review of Economics and Statistics**, **78**: 111-125.

Glosten, L. R. & Jagannathan, R. & Runkle, D. (1989). **Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess of return on stocks**. Mimeo (Northwestern University, Evanston, IL)

Goldfeld, S.M., Quandt, R.E. (1973). A Markov model for switching regression. **Journal of Econometrics**, 1: 3-16.

Gouriéroux, C. (1997). **ARCH Models and Financial Applications**. Springer-Verlag: New York.

Hagerud, G. E. (1996). **A smooth transition ARCH model for asset returns**. Working paper Stockholm School of Economics.

_____ (1997). **Specification tests for asymmetric GARCH**. Working paper Stockholm School of Economics.

Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the Economic Analysis with of Non-Stationary time series and the business cycle. **Econometrica**, 57: 357-380.

Hamilton, J. D. (1994). **Time series models**. Princeton University Press.

_____, Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. **Journal of Econometrics**, 64: 307-33

Harvey, A. C., Ruiz E. & Shephard, N (1994). Multivariate stochastic variance models. **Journal of Econometrics**, 52: 129-158.

Herencia, M. E. Z. (1997). **Volatilidade nos modelos ARCH e variância estocástica: um estudo comparativo**. Dissertação de mestrado: Unicamp.

J. P. Morgan (1997). **RiskMetrics - Technical Document**, 4ª edição. Nova York

- Jacquier, E., Polson, N. G., Rossi, P. E (1994). Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models. **Journal of Business & Economic Statistics**, **12**: 4, 371-417.
- Jorion, P. (2000). **Value-at-Risk**: The New Benchmark for Managing Financial Risk. McGraw-Hill
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering, Transactions ASMA, Series D**. **82**: 35-45.
- Kim, C. (1994). Dynamic linear models with markov switching. **Journal of Econometrics**, **60**: 1-22.
- Kim, C., Nelson, C. R. (1999). **State-Space Models with Regime Switching**. MIT Press.
- Krugman, P. (1998). **What happened to Asia?** em: <http://web.mit.edu/krugman>
- Lam, P. (1990). The Hamilton model with a general autoregressive component: estimation and comparison with other models of economic time series. **Journal of Monetary Economics**, **26**: 409-432.
- Lamoureux, C. G. & Lastrapes, W. D. (1990). Persistence in variance, structural change and the GARCH model. **Journal of Business and Economic Statistics**, **8**: 225-234.
- Ljung, G., Box. G. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, **65**: 297-303.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. **Journal of Business**, **36**, 394-419.

Mittelhammer, R. C. (1995). **Mathematical Statistics for Economics and Business**. Springer-Verlag New York Inc.

Neftci, S. N. (1984). Are economic time series asymmetric over the business cycle ? **Journal of Political Economy**: **92**, 307-328.

Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. **Journal of Business & Economic Statistics**, **59**: 347-70.

_____, Cao, C. Q. (1992). Inequality constraints in the univariate GARCH model. **Journal of Business & Economic Statistics**, **10**. 239: 245.

Pagan, A. (1993). **The econometrics of financial markets**. Manuscrito. The Australian National University and the university of Rochester.

Palm, F. C. (1996). GARCH models of volatility em **Handbook of Statistics**: **14**, 209-240.

Pereira, P.L.V.; Hotta, L.K.; Souza, L.A.R. & Almeida, N.M.C.G. (1999). Alternative Models to Extract Asset Volatility: a Comparative Study, **Revista de Econometria**, **19**: 57-110.

Quandt, R. E. (1972). A new approach to estimating switching regressions. **Journal of the American Statistical Association**: **67**, 306-310.

Roberts, H. (1967). **Statistical versus Clinical Prediction of the Stock Markets**. Discussion Paper: Center for Research in Security Prices, University of Chicago.

Ruiz, E. (1994). Quase maximum likelihood estimation of stochastic variance models. **Journal of Econometrics**, **22**: 284-306.

Samuelson (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuated randomly. **Industrial Management Review**, **6**: 41-49.

Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH Models. **Review of Economic Studies**, **62**: 639-661.

Schwarz, G (1978) Estimating the dimension of a model. **The Annals of Statistics**, **6**: 461-464.

Taylor, S. J. (1980). Conjectured models for trends in financial prices, tests and forecasts. **Journal of the Royal Statistical Society A.**, **143**: 338-362.

Taylor, S.J. (1986). **Modelling financial time series**. Chitester: John Wiley.