UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

CONTRATOS FINANCEIROS, DESENHO DE TÍTULOS
E ESTRUTURA DE CAPITAL

Alexandre Messa Peixoto da Silva

Orientador: Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

Versão Corrigida
(versão original disponível na Unidade que aloja o Programa)

SÃO PAULO
2011

Prof. Dr. João Grandino Rodas
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Reinaldo Guerreiro
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Pedro Garcia Duarte
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

ALEXANDRE MESSA PEIXOTO DA SILVA

**CONTRATOS FINANCEIROS, DESENHO DE TÍTULOS
E ESTRUTURA DE CAPITAL**

Tese apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Doutor em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

SÃO PAULO

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Silva, Alexandre Messa Peixoto da
Contratos financeiros, desenho de títulos e estrutura de capital /
Alexandre Messa Peixoto da Silva. -- São Paulo, 2011.
101 p.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2011.
Orientador: Joe Akira Yoshino.

1. Finanças das empresas 2. Contratos 3. Governança corporativa
I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração
e Contabilidade II. Título.

CDD – 658.15

RESUMO

Este trabalho considera uma relação de risco moral em que as ações correntes do agente exercem um efeito persistente sobre os lucros futuros da firma, e investiga as implicações desta persistência sobre o desenho de seus títulos financeiros e sua política de investimentos. A partir de um modelo agente-principal em tempo contínuo, o contrato ótimo é implementado por meio de uma estrutura de capital sob a qual o agente controla tanto a política de investimento, quanto a de dividendos. O processo de investimento resultante segue uma média dependente do q marginal, mas apresenta desvios desta em função dos lucros inesperados. Com isso, os investimentos da firma se mostram sensíveis a seus fluxos de caixa, de tal forma a fazer com que esta sensibilidade revele ao principal a informação que o agente detém de forma assimétrica. Por sua vez, o cupom pago pelos títulos de dívida emitidos pela firma não depende, contemporaneamente, desta informação assimétrica, mas apenas de forma defasada, quando esta então já fora devidamente revelada aos investidores por meio das variações de tamanho da firma.

ABSTRACT

This thesis considers a moral hazard relationship in which the agent current actions have a persistent effect on the future firm's profits, and investigates the implications of this persistence on the design of its financial securities and investment policy. From a principal-agent model in continuous time, the optimal contract is implemented through a capital structure under which the agent controls both the investment and dividends policy. The resulting investment process follows a mean dependent on the firm marginal q , but shows deviations from that mean in function of the firm's unexpected profits. Thus, the firm's investments are sensitive to its cash flows, so to make this sensitivity reveals to the principal the information that the agent holds asymmetrically. In turn, the coupon paid by the firm debt does not depend, contemporaneously, on this asymmetric information but only so when it had been properly disclosed to investors by means of changes in firm size.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	3
1 INTRODUÇÃO	5
2 O CONTRATO ÓTIMO	11
2.1 Definições iniciais	13
2.1.1 O contrato entre as partes	17
2.2 Estratégias factíveis	19
2.3 Contratos compatíveis a incentivos	20
2.4 O problema do agente	22
2.5 O problema do principal	31
2.6 O contrato ótimo	36
2.7 Investimento e q de Tobin	42
3 DESENHO DE TÍTULOS FINANCEIROS E DINÂMICA DOS PREÇOS DE MERCADO.....	47
3.1 Desenho de títulos financeiros	47
3.2 Dinâmica dos preços de mercado	49
3.3 O problema de agência e a precificação dos ativos	53
4 CONCLUSÃO	55
REFERÊNCIAS	57
APÊNDICE A	60
A.1 Prova do Lema 1	60
A.2 Prova da Proposição 1	61
A.3 Prova do Lema 2	75
A.4 Prova do Lema 3	76
APÊNDICE B	79
B.1 Prova do Lema 4	79
B.2 Prova da Proposição 2	81
B.3 Prova da Proposição 3	87
B.4 Prova da Proposição 4	88
APÊNDICE C	90
C.1 Prova do Lema 6	90
C.2 Prova da Proposição 5	92

C.2 Prova da Proposição 6	93
C.3 Prova da Proposição 7	95
C.4 Prova da Proposição 8	97

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: A função valor U	24
Figura 2: A função valor V , considerando um k fixo	34
Figura 3: A função valor U	38
Figura 4: O processo $\tilde{D}$	40
Figura 5: A função valor V	42
Figura 6: Taxa de investimento esperada i	44
Figura 7: q marginal da firma.	45

1 INTRODUÇÃO

Um importante atributo dos contratos diz respeito ao efeito intertemporal de seus mecanismos de incentivos. Esta percepção é corroborada, por exemplo, pelo fato de certas empresas estabelecerem a seus executivos compensações baseadas em incentivos de longo-prazo, tais como a concessão de ações ou opções da empresa, a serem recebidas sob certas condições relativas à execução de metas. Neste mesmo sentido, Gibbons e Murphy (1992) examinam a relação entre remunerações e performances de diretores executivos, mostrando que a elasticidade dessas remunerações em relação ao desempenho tende a crescer conforme o tempo em que esses executivos permanecem em seus cargos. Por sua vez, Gompers e Lerner (1999) investigam as remunerações a título de administração em fundos de capital de risco. Os autores relatam que a sensibilidade de tais compensações em relação aos resultados tende a aumentar conforme a idade do fundo. O componente fixo dessas compensações é maior para aqueles mais jovens, enquanto que o componente variável tende a ser mais significativo para os mais antigos.

Para compreender a alocação dos incentivos ao longo do tempo, um esforço recente tem sido empregado em direção a modelos de risco moral nos quais as ações ocultas do agente influenciam não apenas o resultado corrente do projeto, mas também seus resultados futuros. Neste caso, os incentivos providos ao agente em função de tais resultados futuros podem reduzir, ou até mesmo sobrepujar, a influência daqueles em função do resultado corrente. Nesta linha de investigação, Fernandes e Phelan (2000) é um trabalho pioneiro, sendo seguido por Mukoyama e Sahin (2005), Hopenhayn e Jarque (2007), Jarque (2010), Jarque e Prescott (2010) e Ogawa (2011)¹.

Na relação de risco moral existente na administração da firma, há uma série de mecanismos de incentivos à disposição dos investidores além da própria remuneração do administrador. De fato, desde Jensen e Meckling (1976) há a percepção de que a estrutura de capital exerce um relevante papel disciplinador: por um lado, a concessão ao administrador de um determinado percentual

¹ Abordagens alternativas incluem modelos de carreira – vide, por exemplo, Fama (1980), Gibbons e Murphy (1992) e Holmstrom (1999) – e de sinalização – por exemplo, Riley (1979) e Heinkel e Stoughton (1994).

das ações da firma faz com que parte dos custos incorridos por suas decisões repercuta sobre sua própria riqueza; por outro, por meio da emissão de dívida, cria-se a necessidade de geração de fluxos de caixa significativos o suficiente para prover os devidos pagamentos. No entanto, estes pagamentos referentes aos serviços da dívida também aumentam o risco de falência da firma, ao mesmo tempo em que reduzem a disponibilidade de recursos para investimentos. Com isso, os títulos emitidos pela firma devem ser desenhados de tal forma a fazer com que a estrutura de capital resultante logre não apenas alinhar as decisões do administrador aos interesses dos investidores, mas também maximizar o valor da firma para tais investidores.

A partir deste ponto de vista, este trabalho pretende estudar o contrato financeiro ótimo sob uma relação de risco moral em que as ações ocultas do agente exercem um efeito persistente sobre o resultado da firma. Porém, este trabalho difere dos esforços anteriores à medida em que, a partir de um modelo em tempo contínuo, procura compreender as implicações daquela persistência sobre o desenho de títulos financeiros e a política de investimentos da firma.

Admite-se um agente neutro ao risco dotado de um projeto, mas sem recursos financeiros, e um principal, também neutro ao risco, dispondo dos recursos necessários. Para implementar o projeto, estabelece-se uma firma na qual o agente detém responsabilidade limitada e o principal, ilimitada.

Os lucros operacionais da firma seguem uma distribuição de probabilidade cuja média e variância dependem de seu tamanho. Este tamanho, por sua vez, é resultado dos investimentos realizados pela firma ao longo de sua história. Porém, o principal não é capaz de monitorar nem os lucros operacionais, nem a utilização destes por parte do agente. Dessa forma, obtém-se um ambiente em que as ações do agente não afetam o lucro operacional de forma contemporânea, mas, por meio de suas decisões envolvendo a política de investimentos da firma, exercem um efeito persistente sobre as distribuições de probabilidade dos lucros futuros.

A formulação acima é desenvolvida em tempo contínuo e o contrato ótimo é derivado pelo método de primeira ordem. Por meio do problema de substituição intertemporal do consumo por parte do agente, encontra-se uma estratégia candidata a ser adotada por ele; em seguida, mostra-

se que tal estratégia domina qualquer outra à sua disposição. A partir deste problema do agente, determinam-se as restrições sob as quais o principal estará submetido. O problema do principal é então resolvido pelo mesmo procedimento utilizado para o agente.

Tendo em vista a dificuldade de monitoramento dos recursos da firma por parte do principal, este trabalho mostra que o contrato ótimo pode ser obtido concedendo plena discricionariedade ao agente para determinar sua própria remuneração. Para compatibilizar suas ações aos interesses do principal, o contrato em questão utiliza dois instrumentos. O primeiro deles consiste em um amplificador θ que determina que, a cada unidade monetária de remuneração do agente, o principal deverá receber θ unidades (independentemente de sua remuneração). Com isso, intensifica-se o impacto sobre os recursos da firma das decisões do agente acerca de sua própria compensação. Se θ for muito pequeno, ele estipulará uma remuneração excessiva a si próprio; se θ for muito alto, ele preferirá adquirir utilidade não por meio de sua remuneração, mas empregando recursos da firma para o benefício próprio – por exemplo, desviando-os para seu consumo, instalando escritórios luxuosos ou investindo em projetos com retorno negativo mas que lhe conferem ganhos em *status* pessoal.

O segundo instrumento são os fluxos de investimento, por parte do principal, em função do tamanho da firma. Por um lado, sempre que tal tamanho cair abaixo de um determinado limiar, o principal aplicará recursos na firma, diminuindo o risco de que ela seja liquidada. Por outro lado, esse aporte não se dará de uma vez por todas, com um aumento imediato e considerável do tamanho da firma, mas, pelo contrário, de forma gradual, transferindo recursos a cada período, até que a firma cresça além daquele limiar.

A intuição deste resultado reside no fato de que, quando o tamanho da firma se reduz abaixo de tal limiar, o risco de que ela seja liquidada é relativamente alto. Logo, neste instante, o agente tem muito a perder, em termos de utilidade futura esperada, caso incorra em ações contraproducentes e contribua ainda mais para o aumento desse risco. Tendo a certeza de que as decisões do agente estarão alinhadas a seus interesses (ao menos naquele instante), o principal poderá aplicar recursos na firma, diminuindo o risco de que ela seja liquidada.

Porém, sendo esses investimentos graduais ao longo do tempo, há um certo intervalo de tempo esperado necessário para que o risco de liquidação se reduza a níveis satisfatórios. Esse intervalo de tempo significa, por outro lado, também um período sem que o agente receba qualquer remuneração (por decisão própria). Portanto, aqueles aportes de capital na firma por parte do principal devem ser graduais a tal ponto que façam com que o período de tempo no qual o agente não é remunerado seja prolongado o bastante para desestimulá-lo a ações contraproducentes. Quanto mais impaciente for o agente, menor será o período de tempo necessário; porém, quanto maior for o ganho de utilidade corrente do agente como resultado de ações contraproducentes, maior deverá ser tal período.

Em seguida, o trabalho mostra que, apesar da responsabilidade ilimitada do principal sob o contrato ótimo, este pode ser implementado por meio de títulos financeiros de responsabilidade limitada. A estratégia de financiamento necessária para tal consistiria na emissão de ações ordinárias e de títulos de dívida com taxas de cupom variáveis, e na aquisição de títulos com taxas de cupom fixas.

A emissão de ações ordinárias é realizada retendo-se em mãos do agente um percentual equivalente a $1/(1 + \theta)$ e concedendo-lhe plena discricionariedade com relação à política de dividendos. Com isso, reproduz-se os incentivos providos pelo contrato ótimo: ele será capaz de determinar sua própria remuneração; porém, cada unidade monetária recebida por ele representará $(1 + \theta)$ unidades a menos alocadas na firma.

A consequência dessa estrutura de propriedade e controle é a de que os dividendos serão distribuídos apenas a partir do momento em que a firma logre atingir um determinado tamanho – mais precisamente, o tamanho sob o qual o valor marginal do capital se iguala a seu custo de reposição (ou seja, no qual o q marginal da firma equivale à unidade). Uma vez estabelecida esta relação, o fluxo de caixa livre da firma é finalmente direcionado à distribuição de dividendos. Este resultado coincide com o fato estilizado de que a prática de distribuição de dividendos é adotada principalmente por empresas grandes e maduras – vide, por exemplo, Allen e Michaly (1995) e Bulan, Subramanian e Tanlu (2007).

Os títulos de dívida adquiridos pela firma, cujas taxas de cupom são fixas, irão prover a ela, a cada período, um capital operacional constante e independente de sua história, que se somará a seu capital próprio. Dessa forma, tais títulos exercem a função de atenuar eventuais resultados negativos nos quais a firma venha a incorrer e, com isso, diminuir os impactos destes nas distribuições de probabilidade dos resultados futuros.

Por sua vez, os títulos emitidos pela firma, cujas taxas de cupom são variáveis, irão transferir a seus detentores a parcela esperada de seu lucro operacional. Assim, a remuneração de tais títulos não depende (ao menos contemporaneamente) da informação que o agente detém de forma assimétrica – a parte inesperada do lucro operacional.

Esta parte inesperada será então absorvida pelos investimentos a serem realizados pela firma e, portanto, repercutirá na variação de seu tamanho de um período a outro. Esta variação de tamanho revelará aos investidores o lucro realizado da firma – a informação que o agente detém de forma assimétrica. Dessa forma, este trabalho reproduz o fato estilizado observado pela literatura empírica de que os investimentos das empresas se mostram sensíveis a seus fluxos de caixa². No modelo apresentado neste trabalho, essa sensibilidade é decorrente da existência de informação assimétrica entre o agente e o principal envolvendo a performance da firma, à medida em que o comportamento dos investimentos tem a finalidade de revelar aos investidores tal informação. Por outro lado, a parcela determinística da taxa de investimentos poderá ser expressa como uma função estritamente crescente do q marginal da firma, conforme a conjectura de Tobin (1969).

Percebe-se que este trabalho está relacionado à literatura a respeito da estrutura de capital das empresas. Esta literatura tem origem no trabalho clássico de Modigliani e Miller (1958), que mostra que, em mercados competitivos, sem fricções e completos, o valor de uma determinada firma, assim como seu custo de capital médio ponderado, é independente de sua estratégia de financiamento.

² Vide, por exemplo, Fazzari, Hubbard e Petersen (1988), Kaplan e Zingales (1997) e Gomes (2001) para visões antagônicas acerca desse fenômeno.

Esta hipótese de irrelevância da estrutura de capital deu origem a uma ampla literatura buscando identificar as violações ao modelo dos autores que fariam com que a estratégia de financiamento das empresas passasse a ter um grau de relevância tal que corresponda aos recursos despendidos por elas nesta questão. Uma dessas violações de grande relevância para este trabalho diz respeito à idéia de que há determinadas variáveis, relativas às finanças da firma ou às ações de seu administrador, que não são contratáveis – seja por não serem observáveis pelos acionistas da empresa, seja porque os custos de incluí-los rigorosamente em um contrato supera aqueles incorridos por sua exclusão. Essa incompletude dos contratos daria origem então a determinados custos de agência relativos ao provimento de incentivos necessários para que as decisões dos administradores da firma reflitam de fato os interesses de seus acionistas. Porém, esses incentivos podem ser afetados pelas decisões a respeito da estrutura de capital, fazendo com que o valor da firma e seu custo de capital deixem de ser independentes de seu nível de alavancagem. Jensen e Meckling (1976) é um artigo pioneiro nesta linha de pesquisa, e Harris e Raviv (1991) uma importante revisão de literatura.

Dentro dessa perspectiva, este trabalho relaciona-se também a duas vertentes da literatura de contratos. Em primeiro lugar, conforme afirmado anteriormente, este trabalho se insere em um esforço recente para compreender as implicações de um conflito de agência histórico-dependente sobre o contrato ótimo. Em segundo lugar, relaciona-se à literatura de contratos financeiros em tempo contínuo, que tem Holmstrom e Milgrom (1987) como um trabalho pioneiro, sendo seguido, dentre outros, por Sung (1995 e 1997), Schattler e Sung (1997), Ou-Yang (2003), Cadenillas, Cvitanic e Zapatero (2007), Sannikov (2008) e He (2009 e 2011). A literatura de contratos em tempo contínuo tem permitido uma análise mais profunda acerca da implicação dos custos de agência no comportamento dos preços dos ativos da firma. Trabalhos como os de DeMarzo e Sannikov (2006) e Biais, Mariotti, Plantin e Rochet (2007) vão justamente nessa direção. Mais recentemente, Biais, Mariotti, Rochet e Villeneuve (2010) investigam uma relação de risco moral sob a possibilidade de perdas grandes e raras, junto a um agente com responsabilidade limitada, enquanto que Williams (2011) estuda os contratos em tempo contínuo na presença de variáveis de estado ocultas.

A partir dos objetivos traçados e da metodologia apresentada, este trabalho é composto por quatro capítulos. Em seguida a esta introdução, o segundo capítulo irá formular o modelo agente-principal a fim de determinar o contrato ótimo entre as partes. Já o terceiro irá analisar o desenho de títulos financeiros como resultado da estratégia de financiamento a ser adotada pela firma. Finalmente, o último capítulo irá sintetizar e discutir os resultados obtidos.

2 O CONTRATO ÓTIMO

Este trabalho supõe um agente neutro ao risco dotado de um projeto, mas sem recursos financeiros. Para obter bens de consumo, ele precisa implementar seu projeto e, para tal, faz-se necessária a riqueza de um investidor, o principal, também neutro ao risco, dispondo dos recursos necessários. O projeto é então implementado por meio da criação de uma firma na qual o agente assume responsabilidade limitada e o principal, ilimitada.

Admite-se que o lucro operacional da firma siga uma distribuição de probabilidade cuja média e variância dependam do seu estoque de capital físico. O lucro realizado a cada instante pode inicialmente ter três alocações: a remuneração do agente, a remuneração do principal ou os investimentos. Estes investimentos determinarão o estoque de capital do instante seguinte e, conseqüentemente, a distribuição de probabilidade do lucro operacional de tal instante.

Supõe-se que o principal possa observar o estoque de capital físico da firma, e, portanto, conheça a distribuição de probabilidade dos lucros. Ainda, utilizando sua riqueza, o principal pode investir na firma não apenas na data inicial, mas em qualquer momento que assim o desejar. Dessa forma, em qualquer instante, ele é capaz de aumentar o estoque de capital da firma e interferir na distribuição de probabilidade dos lucros (do instante seguinte). Por outro lado, supõe-se que a firma seja liquidada e o contrato encerrado no momento em que seu estoque de capital se esgota, ou seja, assim que os prejuízos acumulados da firma (ou o excesso de pagamentos feitos ao agente e ao principal) consuma todo aquele estoque.

Porém, o principal não observa o lucro realizado, fazendo com que o agente seja capaz de desviar parte deste para o consumo próprio, sem que o principal consiga identificar tal prática. Além disso, o agente é supostamente mais impaciente do que o principal, fazendo com que ele tenda a destinar parte do produto para seu próprio consumo – diminuindo, dessa forma, a parcela investida – antes que o principal deseje fazer o mesmo. Tendo em vista a dificuldade de monitoramento dos recursos da firma por parte do principal, supõe-se ainda que o agente detenha plena discricionariedade para determinar sua própria remuneração.

A parte do lucro investida é determinada residualmente, após descontados os pagamentos às partes e o montante desviado pelo agente. Este lucro residual se somará ao estoque de capital corrente, determinando o estoque e a distribuição de probabilidade do lucro do instante seguinte. Portanto, sendo o estoque de capital resultado dos investimentos realizados pela firma ao longo de sua história, as decisões do agente exercerão um efeito persistente sobre as sucessivas distribuições de probabilidade do lucro operacional.

Considerando um instante t qualquer, suponha um estoque de capital dado, de pleno conhecimento de ambas as partes. O ambiente descrito acima pode ser sintetizado na seguinte linha do tempo:

(T1) Dado o estoque de capital em t , o contrato determina a remuneração que o principal receberá ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ ³; o agente estipulará sua própria remuneração e o montante a ser desviado ao longo desse mesmo intervalo.

(T2) O agente observa o lucro realizado ao longo do intervalo $(t, t + dt]$.

(T3) Dada a informação em (T2), o agente atualiza de forma imediata sua remuneração e o montante desviado. Portanto, seu fluxo de renda total recebido ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ será dado pelos valores determinados em (T1), somados a esta atualização imediata.

(T4) O investimento a ser realizado pela firma ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é determinado residualmente, pela diferença entre o lucro observado em (T2) e os fluxos de caixa estipulados em (T1) e (T3). Este investimento se somará ao valor do estoque de capital em t , para determinar o valor desse estoque em $t + dt$.

(T5) O agente e o principal observam o estoque de capital em $t + dt$. Caso este estoque seja nulo, a firma é liquidada; caso seja positivo, inicia-se o ciclo novamente.

A sucessão de acontecimentos acima leva a duas implicações para o contrato entre as partes. Em primeiro lugar, uma vez que os valores em (T1) são determinados sem o conhecimento do lucro realizado em (T2), e os montantes em (T3) são não-negativos (em virtude da responsabilidade

³ Essa remuneração pode ser positiva ou negativa. Caso seja negativa, representa investimentos adicionais na firma, por parte do principal, que influenciarão o estoque de capital em $t + dt$.

limitada do agente), qualquer que seja o estoque de capital corrente, haverá uma probabilidade maior do que zero de que a firma incorra em perdas significativas o suficiente a ponto de levarem a sua liquidação.

Em segundo lugar, ao se deparar em (T5) com um estoque de capital relativamente reduzido em $t + dt$, o principal não será capaz de saber se este é resultado dos montantes desviados pelo agente em (T1) e (T3), ou de um lucro realizado negativo em (T2). Seu problema, portanto, consiste em prover os incentivos necessários para que o agente não desvie recursos da firma e determine níveis de investimento ao longo do tempo que coincidam com aqueles requeridos por ele.

A partir da caracterização acima, este capítulo determinará o contrato ótimo entre as partes, formalizando o jogo acima sob um modelo em tempo contínuo. Analisando o problema de substituição intertemporal do consumo por parte do agente, encontra-se uma estratégia candidata a ser adotada por ele, para, em seguida, mostrar que tal estratégia domina todas as outras à sua disposição. As restrições derivadas do problema do agente serão então incluídas no problema de maximização do principal, conforme o método de primeira ordem. Para resolver o problema do principal, repete-se o procedimento adotado para o agente.

2.1 Definições iniciais

Seja Ω o conjunto dos estados da natureza, $Z: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ um movimento browniano mapeando em $\mathbb{R}$ a realização desses estados ao longo do tempo e $\mathbb{P}$ a distribuição de probabilidade dos elementos de Ω . Defina $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ como a filtração natural associada a Z , ou seja, o processo de informação detido por um indivíduo que observa as sucessivas realizações do movimento browniano dado. Assumindo que $\mathcal{F}_0$ contenha todos os eventos com probabilidade nula, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pode ser caracterizado como um espaço de probabilidade completo.

Considere um agente neutro ao risco dotado de um projeto cujo lucro operacional total, do instante zero a $t \geq 0$, seja representado por Y_t . A partir de um estoque de capital físico $K_t \geq 0$, o lucro operacional ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é dado por

$$dY_t = \mu(K_t)dt + \sigma(K_t) dZ_t, \quad t \in [0, \infty), \quad (1.1)$$

em que $\mu: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são as funções referentes, respectivamente, aos termos de tendência e difusão do processo Y . Em outras palavras, o lucro operacional ao longo daquele intervalo segue uma distribuição normal com média $\mu(K_t)dt$ e variância $\sigma^2(K_t)dt$:

$$dY_t \sim N(\mu(K_t)dt, \sigma^2(K_t)dt), \quad t \in [0, \infty). \quad (1.2)$$

A distribuição acima implica que dY_t pode assumir valores tanto positivos quanto negativos. Uma interpretação para tal fato é a de que, para produzir, a firma deva incorrer em determinados custos operacionais; quando tais custos forem superiores à receita bruta, tem-se um lucro operacional negativo. Ao longo deste trabalho, será admitido ainda que as funções μ e σ sejam contínuas e que $\sigma(k) > 0$ para $\forall k > 0$.

Suponha que o agente não possua qualquer riqueza, fazendo com que, para obter bens de consumo, ele precise implementar seu projeto e, para tal, faz-se necessária a riqueza de um principal. Este é também neutro ao risco, mas desconta seu consumo a uma taxa $r < \rho$, em que ρ é a taxa de desconto do agente. Da relação financeira entre eles, cria-se uma firma. Nesta, o agente e o principal assumem responsabilidades limitada e ilimitada, respectivamente.

Ainda com relação ao processo em (1.1), faz-se três suposições: (i) ambas as partes conhecem $\mathbb{P}$; (ii) porém, apenas o agente observa dY_t e, portanto, a realização de Z_t – isto é, apenas o agente detém o processo de informação $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ –; (iii) por outro lado, o principal é capaz de observar o estoque de capital K_t .

As suposições (i) e (iii) implicam que, uma vez que o principal conhece tanto $\mathbb{P}$ quanto K_t , ele pode deduzir a distribuição em (1.2). Em outras palavras, o principal não observa dY_t (suposição (ii)), mas conhece sua distribuição de probabilidade.

O lucro operacional realizado dY_t ao longo de cada intervalo $(t, t + dt]$ pode inicialmente ter três alocações: os pagamentos ao agente, $dC_t \geq 0$; os pagamentos líquidos ao principal, $dR_t \in \mathbb{R}$; ou os investimentos, $dI_t \in \mathbb{R}$. Tais alocações podem ser sintetizadas pela identidade inicial $dY_t \equiv dC_t + dR_t + dI_t$.

O fluxo dR_t pode assumir qualquer valor real. Quando $dR_t > 0$, o principal estará recebendo uma remuneração; quando $dR_t < 0$, o principal estará aportando recursos adicionais na firma. Dessa forma, utilizando sua riqueza, o principal pode investir na firma não apenas em $t = 0$, mas em qualquer instante $t \geq 0$.

Porém, uma vez que o principal não observa a realização do lucro operacional, dada sua aleatoriedade, o agente é capaz de desviar parte deste para o consumo próprio, sem que o principal consiga identificar tal prática. Seja $dA_t \geq 0$ o montante desviado pelo agente ao longo do intervalo $(t, t + dt]$. Então, as definições referentes à renda obtida pelo agente a cada intervalo podem ser estendidas de tal forma que: define-se dC_t como a parcela observável ou verificável pelo principal; já a parte que o principal não é capaz de observar tem como origem os fluxos dA_t ⁴.

Portanto, àquelas três possíveis alocações do lucro operacional apontadas anteriormente, soma-se uma quarta, dA_t , levando à identidade

$$dY_t \equiv dA_t + dC_t + dR_t + dI_t. \quad (1.3)$$

⁴ Outra interpretação possível é a de que os fluxos dA_t se referem a uma possível utilização dos recursos da firma, por parte do agente, em benefício próprio, tais como a instalação de escritórios luxuosos ou o investimento em projetos com retorno negativo mas que lhe conferem ganhos em *status* pessoal. Esses dispêndios, quando medidos em termos de utilidade do agente, podem acarretar em um custo de peso-morto, conforme será abordado mais adiante.

A partir de (1.3), pode-se notar que dI_t é determinado residualmente, de tal forma que $dI_t = dY_t - [dA_t + dC_t + dR_t]$, podendo ser positivo ou negativo. No primeiro caso, uma parte do resultado realizado é destinada a investimentos. No segundo, parte do estoque de capital é vendido e a receita obtida é destinada à cobertura dos prejuízos da firma (dY_t) ou à remuneração das partes ($dA_t + dC_t + dR_t$). Com relação a tal desinvestimento, será suposto que o estoque de capital possui liquidez perfeita, podendo ser, a qualquer instante, transformado em caixa sem qualquer perda de valor. Com isso, a acumulação de estoque de capital por parte da firma segue o processo K abaixo:

$$\begin{cases} dK_t = dI_t - \delta K_t dt, & t \in [0, \infty), \\ K_0 = k, & k \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.4)$$

em que $\delta \geq 0$ representa a taxa de depreciação do capital. Ao longo deste trabalho, visando simplificar a exposição, será suposto $\delta = 0$, sem qualquer prejuízo às conclusões obtidas.

Inserindo a relação $dI_t = dY_t - [dA_t + dC_t + dR_t]$ em (1.4) e considerando (1.1), conclui-se que o estoque de capital K segue a equação

$$\begin{cases} dK_t = \mu(K_t)dt + \sigma(K_t) dZ_t - [dA_t + dC_t + dR_t], & t \in [0, \infty), \\ K_0 = k, & k \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (1.5)$$

Portanto, a acumulação de estoque de capital por parte da firma seguirá um processo estocástico sujeito aos estados da natureza mapeados em Z – assim como, conseqüentemente, a distribuição de probabilidade em (1.2). O estoque de capital da firma a um determinado instante $t \geq 0$ será dado por

$$K_t = K_0 + \int_0^t \mu(K_s) ds + \int_0^t \sigma(K_s) dZ_s - A_t - C_t - R_t,$$

em que $A_t = \int_0^t dA_s$, $C_t = \int_0^t dC_s$ e $R_t = \int_0^t dR_s$ representam, respectivamente, os montante totais acumulados, do instante zero ao t , de recursos desviados da firma, de remuneração do agente e de remuneração do principal.

Uma vez que os fluxos dA_t e dC_t são sempre não-negativos (em virtude da responsabilidade limitada do agente), os processos A e C são não-decrescentes, fazendo com que as decisões do agente com relação àqueles fluxos exerçam um efeito persistente sobre o estoque de capital da firma. Consequentemente, por (1.2), as distribuições de probabilidade do lucro operacional estarão igualmente submetidas a tal persistência.

Para concluir as definições iniciais, supõe-se ainda que, a cada unidade monetária desviada pelo agente, ele receba efetivamente uma fração $\lambda \in (0, 1]$. Assim, a parcela do montante desviado efetivamente recebida por ele equivale a λdA_t , enquanto que $(1 - \lambda)dA_t$ representa custo de peso-morto. O parâmetro λ funciona então como uma medida do grau de severidade do problema de agência na administração da firma: quanto maior for λ , maior será o incentivo para que o agente incorra no desvio de recursos.

2.1.1 O contrato entre as partes

Conforme apontado anteriormente, o contrato ótimo será obtido concedendo plena discricionariedade ao agente para determinar sua própria remuneração. Dessa forma, supõe-se que os processos C e R difiram entre si com relação a suas respectivas executariedades contratuais: enquanto R é determinado pelo contrato, C é apenas sugerido por ele, cabendo ao agente acatar ou não essa sugestão.

Admite-se que, para compatibilizar as ações do agente a seus interesses, o principal possa fazer uso de um amplificador θ que determina que, a cada unidade monetária que o agente receba a título de remuneração, o principal receberá θ unidades. Tal suposição é sem perda de generalidade, uma vez que se pode ter $\theta = 0$. A intenção deste parâmetro é aumentar o impacto da remuneração do agente sobre os recursos da firma, modificando os incentivos sob os quais ele estará submetido.

Note-se que, dados os processos C e R , para qualquer $\theta \in \mathbb{R}_+$ existe um único processo D que satisfaz $dD_t = dR_t - \theta dC_t$ para $\forall t \in [0, \infty)$. Logo, pode-se admitir que a remuneração do principal seja separada em duas partes: uma delas diretamente relacionada aos pagamentos ao agente, θdC_t ; e a outra, independente da remuneração do agente, dD_t . Portanto, admite-se que o contrato em questão estabeleça como remuneração total do principal, ao longo do intervalo $(t, t + dt]$, $dR_t = \theta dC_t + dD_t$.

Dessa forma, o estabelecimento da firma é feito por meio de um contrato Π estipulando: o investimento inicial K_0 ; o parâmetro θ ; e o processo (A, C, D) ⁵. No que diz respeito aos processos A e C , o agente é capaz de desviá-los da trajetória sugerida por Π e optar por uma estratégia factível $(\bar{A}, \bar{C})$ que maximize sua utilidade esperada ao longo de todo o contrato. Por estratégia factível, entende-se toda aquela que satisfaz as condições (C1), (C2) e (C3) introduzidas na próxima seção.

Finalmente, supõe-se que a firma seja liquidada e o contrato encerrado no instante em que seu estoque de capital se esgota, fazendo com que a vigência do contrato Π seja dada pelo intervalo $[0, \tau)$, em que

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : K_t = 0\}. \quad (1.6)$$

Com relação aos possíveis valores de τ , deve-se notar que, por (1.2), o lucro realizado da firma pode ser, a qualquer instante, arbitrariamente negativo. Sendo o fluxo dD_t determinado de forma independente da realização de dY_t (já que o principal não observa tal realização), qualquer que seja o estoque de capital K_t , sempre haverá uma probabilidade maior do que zero de que um eventual resultado negativo ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ leve a $K_{t+dt} = 0$, acarretando o encerramento do contrato e a liquidação da firma.

⁵ O contrato Π poderia também especificar o processo de investimento I . Porém, conforme apontado anteriormente, dI_t será dado pela diferença $dY_t - [dA_t + (1 + \theta)dC_t + dD_t]$. Portanto, dados os termos relativos a (A, C, D) , a inclusão de I torna-se supérflua.

2.2 Estratégias factíveis

Considerando um processo X_t qualquer, defina o operador Δ de tal forma que

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-},$$

em que $X_{t-} = \lim_{s \rightarrow t-} X_s$ representa o valor acumulado do processo X imediatamente antes do agente conhecer Z_t , isto é, imediatamente antes dele atualizar seu conhecimento a respeito do estado da natureza. Por sua vez, X_t designa aquele valor acumulado assim que o agente atualiza seu conhecimento. Portanto, ΔX_t representa a “correção de trajetória” feita no processo X pelo agente, assim que ele toma conhecimento da nova realização do estado da natureza.

Semelhantemente, no caso de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer,

$$\Delta f(X_t) = f(X_t) - f(X_{t-}).$$

Com isso, assuma que os processos A_t e C_t possam ser segmentados, cada um deles, em duas partes distintas: uma contínua – respectivamente, A_t^c e C_t^c – e outra descontínua – respectivamente, ΔA_t e ΔC_t –, de tal forma que

$$A_t \equiv A_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta A_t, \quad (2.1)$$

$$C_t \equiv C_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta C_t. \quad (2.2)$$

De acordo com as definições acima, os montantes acumulados de recursos desviados da firma, A , e de remuneração do agente, C , seguem seus respectivos processos contínuos (determinados em (T1)), acrescidos de atualizações imediatas em seus valores assim que o agente toma conhecimento dos sucessivos estados da natureza (conforme (T3)).

Pode-se então definir uma estratégia factível como toda dupla (A, C) que satisfaz as seguintes condições:

(C1) (A, C) é um processo adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, *càd-lag* – isto é, contínuo à direita e com limite à esquerda –, não-decrescente, com valores em $\mathbb{R}_+^2$, de tal forma que $A_{0-} = C_{0-} = 0$.

(C2) K é um processo adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, com valores em $\mathbb{R}_+$, de tal forma que, a partir de (1.5), para $\forall(k, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \tau)$,

$$\begin{cases} dK_t = \mu(K_t)dt + \sigma(K_t) dZ_t - dA_t^c - (1 + \theta)dC_t^c - dD_t, \\ K_{0-} = k, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\Delta K_t = -\Delta A_t - (1 + \theta)\Delta C_t. \quad (2.4)$$

(C3) O processo (A, C) apresenta variação limitada.

Tendo em vista as definições realizadas na seção anterior, (C1) estipula que, dado o processo de informação $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, o processo (A, C) é observável no instante t . Já a condição (C2) define a tecnologia de acumulação de capital da firma, enquanto que (C3) garante que esse processo seja bem-definido.

2.3 Contratos compatíveis a incentivos

A partir da caracterização realizada até o momento, pode-se definir formalmente os contratos compatíveis a incentivos⁶:

⁶ Ao longo deste trabalho, considerando qualquer controle u , sempre que este estiver expresso como $\tilde{u}$, estará se referindo aos termos do contrato, enquanto aqueles expressos como $\bar{u}$ e $\bar{\bar{u}}$ se referirão, respectivamente, àqueles resultantes dos problemas de maximização do agente e do principal.

Definição (D1). *Seja o par $(\tilde{u}, \bar{u})$, representando, respectivamente, as recomendações de um contrato qualquer e a estratégia factível que maximiza a utilidade esperada do agente ao longo de sua vigência. Tal contrato é dito como compatível a incentivos caso $\tilde{u}_t = \bar{u}_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$.*

O problema do principal consiste então em determinar o contrato compatível a incentivos que maximize sua utilidade esperada. Para encontrar esse contrato ótimo, será utilizado o método de primeira ordem, que deriva as restrições de compatibilidade de incentivos a partir das condições necessárias obtidas pelo problema de maximização do agente. Em termos de modelos dinâmicos em tempo contínuo, este método foi utilizado, por exemplo, em Sannikov (2008) e Williams (2011).

Seguindo o procedimento de primeira ordem, é preciso, inicialmente, encontrar as condições necessárias do problema do agente, que constituirão as restrições de compatibilidade de incentivos (RI) ao problema do principal. Caso tais condições sejam também suficientes, a inclusão destas como restrições no problema do principal lhe garante que o contrato em questão seja compatível a incentivos, conforme a Definição (D1).

Porém, para que o acordo entre as partes passe realmente a existir, é preciso, obviamente, que o agente aceite participar dele. Para garantir essa participação, o principal resolve seu problema de maximização levando em conta a restrição de participação (RP), delimitando o conjunto dos contratos àqueles tais que provenham uma utilidade esperada ao agente – a ser denominada utilidade prometida – superior à de reserva. Por fim, o principal deve levar em conta a dinâmica da utilidade prometida ao longo do tempo, considerando em seu problema a restrição de manutenção de promessa (RMP), que determina o comportamento a ser seguido por essa dinâmica.

Portanto, o problema de maximização do principal envolve, no presente modelo, três tipos de restrições: a restrição de compatibilidade de incentivos, a restrição de participação e a restrição de manutenção de promessa. Para determiná-las, a próxima seção analisará o problema de maximização do agente a partir de um contrato $\Pi(K_0, A, C, D, \theta)$ dado.

2.4 O problema do agente

Uma vez estabelecida a firma, o agente recebe, a cada intervalo $(t, t + dt]$, o fluxo de caixa $\lambda dA_t + dC_t$, podendo consumir parte dele e destinar o restante para sua poupança. Porém, supondo que sobre esta incida uma taxa $r' \leq r$, qualquer contrato que implique em uma poupança positiva por parte do agente em algum instante t será dominado fracamente por outro em que o principal poupa em seu lugar e realiza o devido pagamento ao agente, por meio da firma, no instante em que ele fosse consumir aquela poupança. Esse resultado é estabelecido formalmente em DeMarzo e Fishman (2007) e DeMarzo e Sannikov (2006). Portanto, assim como procedido em Biais, Mariotti, Plantin e Rochet (2007), para encontrar o contrato ótimo, a análise que se segue irá admitir, sem qualquer prejuízo para as conclusões obtidas, que qualquer fluxo de renda recebido pelo agente será imediatamente consumido por ele.

A partir dessas considerações, seja $\mathcal{U}$ o conjunto das estratégias factíveis à disposição do agente, isto é, o conjunto de todas as duplas (A, C) que satisfaçam as condições (C1), (C2) e (C3). O funcional de critério do agente pode ser definido como

$$J^A(k; A, C) = E_k \int_0^\tau e^{-\rho s} (\lambda dA_s + dC_s), \quad k \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1)$$

Então, a função valor $U: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ desse problema é tal que:

$$U(k) = \sup_{(A, C) \in \mathcal{U}} J^A(k; A, C), \quad k \in \mathbb{R}_+. \quad (4.2)$$

Em primeiro lugar, dada a suposição de que a firma seja liquidada e o contrato encerrado no instante em que seu estoque de capital se esgota, a função U deve satisfazer $U(0) = 0$.

Em seguida, observe que, por um lado, a cada unidade monetária desviada da firma pelo agente, este recebe uma fração λ ; por outro, a cada unidade de remuneração estipulada por ele a si próprio e ao principal – sob a forma de $(1 + \theta)dC_t$ – o agente recebe uma parcela $1/(1 + \theta)$ do

total⁷. Ao decidir por uma unidade monetária de capital a mais na firma, o agente incorre em um custo de oportunidade, uma vez que esta unidade poderia ser, alternativamente, destinada a seu consumo próprio. Tal custo de oportunidade é dado então pelo maior valor entre λ e $1/(1 + \theta)$, e será representado pelo parâmetro β abaixo:

$$\beta = \max\left\{\lambda, \frac{1}{1 + \theta}\right\}. \quad (4.3)$$

O Lema 1 a seguir sintetiza o problema de substituição intertemporal do consumo por parte do agente.

Lema 1: Para $\forall k \in \mathbb{R}_+$,

$$U'(k) \geq \beta. \quad (4.4)$$

Prova: Apêndice A.1. ■

Por um lado, β representa o custo de oportunidade incorrido pelo agente ao postergar seu consumo (decidindo por uma unidade monetária a mais de capital na firma). Por outro, U' designa seu ganho esperado, em termos de utilidade futura, obtido por essa postergação. Então, o Lema 1 afirma que, ao postergar seu consumo, o ganho esperado por parte do agente não pode ser inferior a seu custo de oportunidade. Naturalmente, caso o fosse, tal postergação não ocorreria e o agente consumiria o estoque de capital da firma até o ponto em que a relação em (4.4) passasse a ser observada.

Defina então o estoque de capital k^* como o menor nível no qual o ganho esperado do agente ao postergar seu consumo seja igual a seu custo de oportunidade:

$$k^* = \inf\{k \geq 0 : U'(k) = \beta\}. \quad (4.5)$$

⁷ Note-se que, de $(1 + \theta)dC_t$, o agente recebe o montante equivalente a $dC_t = [1/(1 + \theta)](1 + \theta)dC_t$, enquanto que o principal recebe $\theta dC_t = [\theta/(1 + \theta)](1 + \theta)dC_t$.

A Figura 1 ilustra as implicações do Lema 1, supondo que a função U seja estritamente crescente, duas vezes continuamente diferenciável e côncava – propriedades estas que serão devidamente demonstradas pela Proposição 1 adiante.

Figura 1: A função valor U . Sua inclinação é superior ou igual a β sempre que, respectivamente, $k < k^*$ ou $k \geq k^*$.

A partir do Lema 1 e da definição de k^* , a Política (P1) abaixo sintetiza uma possível estratégia a ser seguida pelo agente. De acordo com tal política, dentre dA_t ou dC_t , o agente optará pelo meio mais efetivo, ou seja, aquele pelo qual ele receba uma maior fração de cada unidade monetária retirada da firma. Caso se tenha $\lambda > 1/(1 + \theta)$, o desvio de recursos dA_t se mostra o meio mais efetivo; se, por outro lado, $1/(1 + \theta) > \lambda$, então a remuneração dC_t passa a ser a melhor opção.

Suponha então $\lambda > 1/(1 + \theta)$. Pelo raciocínio exposto acima, todo fluxo de caixa recebido pelo agente ao longo da vigência do contrato será resultado do desvio de recursos dA_t , enquanto que a remuneração dC_t será sempre nula. Pela definição de k^* em (4.5), para todo $k < k^*$, o ganho esperado do agente ao postergar seu consumo é maior do que seu custo de oportunidade, dado por λ . Logo, o agente não desviará qualquer recurso da firma sempre que seu estoque de capital for inferior a k^* . Porém, em k^* , aquele ganho esperado se iguala ao custo λ . Se o estoque de

capital alcançar um nível $k > k^*$, o agente desviará recursos da firma equivalentes a $k - k^*$, fazendo com que tal estoque retorne imediatamente a k^* .

Caso, diferentemente, $1/(1 + \theta) > \lambda$, observa-se o inverso: o desvio de recursos dA_t é sempre nulo, enquanto que todo fluxo de caixa recebido pelo agente se dá por meio da remuneração dC_t . Novamente pela definição de k^* em (4.5), sabe-se que, para todo $k < k^*$, o ganho esperado do agente ao postergar seu consumo é maior do que seu custo de oportunidade, agora dado por $1/(1 + \theta)$. Com isso, o agente não estipulará qualquer remuneração a si próprio sempre que o estoque de capital da firma for inferior a k^* . Porém, a partir do nível k^* , aquele ganho esperado e o custo $1/(1 + \theta)$ se igualam, de tal forma que ele destinará todo excesso de capital em relação a k^* à remuneração das partes por meio de $(1 + \theta)dC_t$.

Considere um instante t qualquer e suponha $K_t \leq k^*$. Então, em (T1), o agente não determinará qualquer remuneração ou desvio de recursos. Porém, caso ele observe em (T2) um lucro dY_t relativamente alto (a tal ponto que o investimento $dI_t = dY_t - dD_t$ leve a $K_{t+dt} > k^*$), o agente estipulará em (T3) uma remuneração ou um desvio de recursos positivos (que façam com que o montante residual a ser investido $dI_t = dY_t - dD_t - [\Delta A_t + (1 + \theta)\Delta C_t]$ acarrete em $K_{t+dt} = k^*$).

Portanto, por tal política, o agente nunca estipulará uma remuneração ou um desvio de recursos em (T1). De fato, ele sempre esperará a realização em (T2) para, dependendo desta, determinar um fluxo de renda a si próprio em (T3).

Política (P1). *Seja o controle $(\bar{A}, \bar{C})$ sob tal política. Então, recorrendo às definições em (2.1) e (2.2), para $\forall t \in [0, \tau)$,*

$$d\bar{A}_t^c = d\bar{C}_t^c = 0. \quad (4.6)$$

Além disso, sempre que se observar $K_{t-} < k^$,*

$$\Delta \bar{A}_t = \Delta \bar{C}_t = 0. \quad (4.7)$$

Por outro lado, caso $K_{t-} \geq k^*$, o agente estabelece $\Delta K_t = k^* - K_{t-}$, levando a $K_t = k^*$. Sendo $\Delta K_t = -\Delta A_t - (1 + \theta)\Delta C_t$, tem-se uma das três possibilidades abaixo:

(i) se $\lambda > 1/(1 + \theta)$:

$$\begin{cases} U'(k^*) = \lambda, \\ \Delta \bar{A}_t = -\Delta K_t, \\ \Delta \bar{C}_t = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

(ii) se $1/(1 + \theta) > \lambda$:

$$\begin{cases} U'(k^*) = \frac{1}{1 + \theta}, \\ \Delta \bar{A}_t = 0, \\ (1 + \theta)\Delta \bar{C}_t = -\Delta K_t. \end{cases} \quad (4.9)$$

(iii) se $1/(1 + \theta) = \lambda$:

$$\begin{cases} U'(k^*) = \frac{1}{1 + \theta} = \lambda, \\ \Delta \bar{A}_t = -\alpha \Delta K_t, \\ (1 + \theta)\Delta \bar{C}_t = -(1 - \alpha)\Delta K_t, \end{cases} \quad (4.10)$$

em que $\alpha \in [0, 1]$.

Recorrendo a um abuso de notação, suponha que a função valor U , conforme definida em (4.2), seja obtida a partir da Política (P1) – suposição esta cuja validade será demonstrada pela Proposição 1. Conforme se torna claro pela Figura 1, o ponto k^* deve satisfazer a duas condições. A primeira, dada por sua própria definição em (4.5), é a de que $k^* = \inf\{k \geq 0 : U'(k) = \beta\}$. A segunda delas determina que

$$U''(k^*) = 0. \quad (4.11)$$

A Proposição 1 a seguir mostra que a Política (P1) domina qualquer outra estratégia factível a ser adotada pelo agente. Uma vez que o problema do agente apresenta um horizonte temporal infinito, no intuito de garantir sua estacionariedade, a prova dessa proposição parte da suposição de que, dado um contrato Π , o processo D dependa do tempo apenas por meio do estoque de capital a cada instante, mas não explicitamente do tempo em si. Em outras palavras, a remuneração do principal ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é determinada em (T1) com base no estoque de capital em t , mas independentemente do instante t específico.

Proposição 1: *Seja $\bar{J}^A$ o funcional de critério do agente obtido a partir do controle proposto pela Política (P1), ou seja,*

$$\bar{J}^A(k; \bar{A}, \bar{C}) = E_k \int_0^\tau e^{-\rho s} (\lambda d\bar{A}_s + d\bar{C}_s), \quad k \in \mathbb{R}_+. \quad (4.12)$$

Então, pode-se afirmar que:

(a) *para $\forall k \in \mathbb{R}_+$,*

$$\bar{J}^A(k; \bar{A}, \bar{C}) = \sup_{(A, C) \in \mathcal{U}} J^A(k; A, C) = U(k), \quad (4.13)$$

conforme a definição de U em (4.2);

(b) *a função valor U é estritamente crescente, duas vezes continuamente diferenciável e côncava*⁸;

Prova: Apêndice A.2. ■

⁸ A prova deste item é baseada na demonstração do Lema 2.1 em Alvarez (2004).

A partir das conclusões obtidas por meio do Lema 1 e da Proposição 1, o Corolário 1 a seguir estabelece a restrição de compatibilidade de incentivos, que impõe a condição necessária para que o agente prefira obter bens de consumo por meio de sua própria remuneração do que pelo desvio de recursos da firma.

Corolário 1 (Restrição de Compatibilidade de Incentivos): Para que se tenha $\bar{A}_\tau = 0$ e $\bar{C}_\tau > 0$, é condição necessária

$$\frac{1}{1 + \theta} \geq \lambda. \quad (\text{RI})(4.14)$$

Portanto, o principal terá pela frente um dilema no que se refere à determinação do parâmetro θ . Por um lado, se θ for muito pequeno, o custo de oportunidade no qual o agente incorre ao postergar seu consumo, $1/(1 + \theta)$, será muito alto. Assim, pela Política (P1), ele deixará de postergar seu consumo sob tamanhos da firma inferiores (quando comparado a um custo de oportunidade mais baixo). Por outro lado, se θ for muito alto, conforme a (RI) em (4.14), ele preferirá adquirir utilidade não por meio de sua remuneração, mas desviando recursos da firma.

Seja a função $W: [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}_+$ representando o valor presente dos fluxos de utilidade prometida pelo contrato ao agente, a partir de um instante t até o final de sua vigência. Assim, a utilidade prometida W_t será resultado da esperança quanto aos fluxos de consumo previstos pelo contrato ao agente, a partir do processo $(\tilde{A}, \tilde{C})$, ao longo de todo o período $[t, \tau)$.

Claramente, para que o contrato em questão seja compatível a incentivos, esses fluxos previstos devem coincidir com aqueles que resultam do problema de maximização do agente, conforme a Definição (D1) – ou seja, deve-se observar $(\tilde{A}_t, \tilde{C}_t) = (\bar{A}_t, \bar{C}_t)$ para $\forall t \in [0, \tau)$. Em outras palavras, a utilidade prometida pelo contrato no instante t deverá ser igual ao valor deste ao agente a partir do estoque de capital K_t , isto é,

$$W_t = U(K_t), \quad t \in [0, \tau). \quad (4.15)$$

Por sua vez, sendo nula a utilidade de reserva do agente, para que ele esteja disposto a participar do contrato, basta que este lhe provenha uma utilidade esperada não-negativa, de tal forma que a restrição de participação possa ser expressa como

$$W_0 = E_{K_0} \int_0^\tau e^{-\rho s} (\lambda d\bar{A}_s + d\bar{C}_s) \geq 0. \quad (\text{RP})(4.16)$$

Para completar as condições que restringirão o problema do principal, resta estabelecer a restrição de manutenção de promessa. Assim o faz o Lema 2 abaixo.

Lema 2: *Considere a utilidade prometida ao agente por um contrato compatível a incentivos, conforme (4.15). A equação diferencial estocástica que determina sua dinâmica ao longo do tempo pode ser expressa como*

$$dW_t = \rho W_t dt + U'(K_t) \sigma(K_t) dZ_t - \lambda d\bar{A}_t - d\bar{C}_t, \quad t \in [0, \tau), \quad (\text{RMP})(4.17)$$

em que o processo $(\bar{A}, \bar{C})$ é dado pela Política (P1).

Prova: Apêndice A.3. ■

Segundo a (RMP) em (4.17), a dinâmica da utilidade prometida ao agente deve ser tal que: a níveis de estoque de capital inferiores a k^* , apresente um crescimento esperado $\rho W_t dt$, equivalente ao custo de oportunidade incorrido pela continuação da firma por mais um intervalo dt ; a partir de k^* , decresça a magnitudes idênticas aos fluxos $\lambda d\bar{A}_t + d\bar{C}_t$ recebidos pelo agente; e, finalmente, apresente uma volatilidade equivalente à do processo K em (2.3), multiplicada pelo valor marginal do capital para o agente.

A sensibilidade U' da utilidade prometida em relação a lucros inesperados – dados por $\sigma(K_t) dZ_t$ – deve ser equivalente, portanto, ao ganho esperado do agente, em termos de utilidade futura, ao postergar seu consumo e decidir por uma unidade monetária a mais de capital na firma, dado o

nível corrente K_t . De fato, caso essa equivalência não se verifique, então a estratégia sugerida pelo contrato é diferente daquela que maximiza a utilidade do agente, fazendo com que o contrato em questão não seja realmente compatível a incentivos.

Com isso, a sensibilidade da utilidade prometida em relação a lucros inesperados mostra-se dependente do tamanho da firma. Este resultado contrasta com aquele obtido, por exemplo, em DeMarzo e Sannikov (2006) e Biais, Mariotti, Rochet e Villeneuve (2010), nos quais esta sensibilidade seria constante e equivalente ao custo de oportunidade β . Este resultado implica que, sob a suposição de um efeito persistente por parte das ações do agente sobre os lucros, quanto pior for o desempenho histórico da firma (ou seja, quanto menor for K_t), maior deverá ser a recompensa ou a punição ao agente em função de uma performance positiva ou negativa, respectivamente (já que maior será $U'(K_t)$). Sem aquela persistência, esse sistema de punição e recompensa seria constante ao longo do tempo.

Para concluir a análise preliminar do problema do agente, o Lema 3 a seguir introduz um resultado que simplificará significativamente o problema do principal, qual seja, o de que, sob o contrato ótimo, $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$. Assim, quando submetido a tal contrato, a estratégia ótima do agente não envolverá qualquer desvio de recursos da firma, sendo seu fluxo de consumo ao longo de $[0, \tau)$ provido apenas por sua remuneração $d\bar{C}_t$. De qualquer forma, deve-se notar pelo Corolário 1 que, em tais contratos, é necessário que se observe $1/(1 + \theta) \geq \lambda$, conforme a (RI) em (4.14).

A intuição deste resultado reside no fato de que o desvio de recursos da firma por parte do agente, ΔA_t , acarreta em um custo de peso-morto dado por $(1 - \lambda)\Delta A_t$. Então, qualquer contrato compatível a incentivos que implique nesse desvio pode ser melhorado por outro que estabeleça uma remuneração ao agente equivalente ao recebido por aquele desvio e faça com que, o que antes representava custo de peso-morto, passe a constituir a remuneração do principal.

De fato, deve-se lembrar que, pela Política (P1), o agente optará, entre ΔA_t ou ΔC_t , pelo meio de remuneração pelo qual ele receba uma maior parcela para cada unidade monetária retirada da firma. Caso se tenha, por exemplo, $\lambda > 1/(1 + \theta)$, então o meio mais efetivo será ΔA_t .

Suponha que haja um contrato compatível a incentivos Π^1 que implique em $\tilde{A}_\tau^1 = \bar{A}_\tau^1 > 0$. Assim, $\exists t \in [0, \tau)$ tal que $\Delta\tilde{A}_t^1 > 0$, implicando que, do montante $\Delta\tilde{A}_t^1$ desviado da firma, o agente receba apenas $\lambda\Delta\tilde{A}_t^1$, enquanto $(1 - \lambda)\Delta\tilde{A}_t^1$ constitui custo de peso-morto. Pode-se perceber então que esse contrato pode ser melhorado por outro Π^2 , no qual $\lambda = 1/(1 + \theta)$, recomendando $\tilde{A}_\tau^2 = 0$ e $(1 + \theta)\Delta\tilde{C}_t^2 = (1/\lambda)\Delta\tilde{C}_t^2 = \Delta\tilde{A}_t^1$. Com isso, os fluxos de retirada de caixa da firma serão os mesmos, assim como o consumo instantâneo do agente, dado por $\Delta\tilde{C}_t^2 = \lambda\Delta\tilde{A}_t^1$. Porém, o montante que antes representava custo de peso-morto, $(1 - \lambda)\Delta\tilde{A}_t^1$, agora compõe a remuneração do principal por meio de $[\theta/(1 + \theta)]\Delta\tilde{C}_t^2 = (1 - \lambda)\Delta\tilde{A}_t^1$.

Lema 3: *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto dos contratos compatíveis a incentivos, ou seja, aqueles que satisfazem a Definição (D1). Suponha que tal conjunto seja não-vazio. Então, há um contrato $\Pi^{\text{IC}} \in \mathcal{C}$ sob o qual $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$.*

Prova: Apêndice A.4. ■

2.5 O problema do principal

Como consequência do Lema 3 acima, a análise a seguir pode se restringir, sem prejuízos, a contratos que resultem em $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$. Portanto, implicitamente, estará sendo assumida a condição necessária para tal, dada pelo Corolário 1, de que $1/(1 + \theta) \geq \lambda$.

Em seguida, faça: (i) $\mathcal{V}^1$ o conjunto de todo processo estocástico C que seja adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, *càd-lag*, não-decrescente, com valores em $\mathbb{R}_+$ e apresente variação limitada e $C_{0-} = 0$; (ii) $\mathcal{V}^2$ o conjunto de todo processo estocástico D que seja adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, *càd-lag*⁹, com valores em $\mathbb{R}$ e apresente variação limitada e $D_{0-} = 0$; e (iii) $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1 \times \mathcal{V}^2 \times \mathbb{R}$.

⁹ Com isso, D pode ser expresso como $D_t \equiv D_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta D_s$.

Em seu problema de maximização, o principal estará sujeito a duas variáveis de estado, o estoque de capital da firma e a utilidade prometida ao agente, cujas trajetórias, para $\forall(k, w, t) \in \mathbb{R}_+^2 \times [0, \tau)$, são dadas por

$$\begin{cases} dK_t = \mu(K_t)dt + \sigma(K_t) dZ_t - (1 + \theta)dC_t^c - dD_t^c, \\ K_{0-} = k, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\Delta K_t = -(1 + \theta)\Delta C_t - \Delta D_t, \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} dW_t = \rho W_t dt + U'(K_t)\sigma(K_t) dZ_t - dC_t^c, \\ W_{0-} = w, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\Delta W_t = -\Delta C_t. \quad (5.4)$$

Por sua vez, o funcional de critério do principal é dado por:

$$J^P(k, w; C, D, \theta) = E_{k,w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + dD_s), \quad (k, w) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (5.5)$$

Então, pode-se definir a função valor $V: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ do presente problema:

$$V(k, w) = \sup_{(C,D,\theta) \in \mathcal{V}} J^P(k, w; C, D, \theta), \quad (k, w) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (5.6)$$

Uma vez que a firma é supostamente liquidada e o contrato é encerrado no instante em que o estoque de capital da firma se esgota, a função valor acima deve satisfazer $V(0, w) = 0$, $w \in \mathbb{R}_+$. Já o Lema 4 abaixo sintetiza o problema de substituição intertemporal do consumo por parte do principal.

Lema 4: Para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$V_k(k, w) = 1, \quad (5.7)$$

$$V_w(k, w) \geq -1. \quad (5.8)$$

Prova: *Apêndice B.1.* ■

Ao decidir por uma unidade monetária a mais de capital na firma, o principal incorre em um custo de oportunidade equivalente a esta unidade (uma vez que, alternativamente, esta poderia ser consumida por ele). Portanto, o ganho esperado para o principal, em termos de utilidade futura, obtido ao investir uma unidade monetária a mais de capital na firma não pode ser inferior a seu custo de oportunidade, implicando em $V_k \geq 1$. Por outro lado, dada a responsabilidade ilimitada do principal, este ganho também não pode ser superior ao custo de oportunidade, pois, neste caso, ele já teria investido recursos adicionais na firma, levando a $V_k \leq 1$. Logo, $V_k = 1$.

Em seguida, note-se por (5.4) que o principal pode, a qualquer instante, diminuir a utilidade prometida ao agente concedendo-lhe uma remuneração positiva naquele instante. Essa relação é de um pra um, ou seja, uma unidade monetária de remuneração permite a queda da utilidade prometida nessa mesma unidade. Como contrapartida, essa menor promessa levará a um menor fluxo de caixa futuro destinado ao agente e, por conseguinte, a um maior valor da firma para o principal. No entanto, dada sua responsabilidade ilimitada, a redução da utilidade prometida em uma unidade monetária não pode levar a um ganho para o principal, em termos de utilidade futura, superior a uma unidade, pois, se assim o fosse, ele imediatamente remuneraria o agente, implicando em $-V_w \leq 1$.

Então, defina w^{**} como o menor nível de utilidade prometida no qual o ganho esperado do principal ao realizar uma transferência direta ao agente seja igual ao custo desta, ou seja:

$$w^{**} = \inf\{w \geq 0 : V_w(k, w) = -1\}, \quad k \in \mathbb{R}_+. \quad (5.9)$$

A Figura 2 mostra as implicações do Lema 4 a partir de uma especificação côncava para a função V – propriedade esta que será demonstrada pela Proposição 2 – e supondo, apenas a título de ilustração, um k fixo.

Figura 2: A função valor V , considerando um k fixo. Sua inclinação é superior a -1 sempre que $w < w^{**}$, e equivalente àquele valor quando $w \geq w^{**}$.

A partir do Lema 4 e da definição de w^{**} , a Política (P2) a seguir sintetiza possíveis termos do contrato Π . Pela definição de w^{**} em (5.9), para todo $w < w^{**}$, o decréscimo de uma unidade de utilidade prometida irá levar a um aumento de V menor do que um. Logo, o principal não estipulará qualquer remuneração ao agente sempre que a utilidade prometida a ele for inferior a w^{**} . Porém, em w^{**} , para aquele decréscimo de uma unidade na utilidade prometida, o aumento de V tem idêntica magnitude. Com isso, quando aquela promessa alcançar um nível $w > w^{**}$, o principal determinará uma remuneração instantânea ao agente equivalente a $w - w^{**}$, fazendo com que a utilidade prometida retorne imediatamente a w^{**} .

Considere um instante t qualquer e suponha $W_t \leq w^{**}$. Então, em (T1), o principal não recomendará qualquer remuneração ao agente. Contudo, ele irá sugerir que, caso o agente observe em (T2) uma parcela inesperada do lucro (dada por $\sigma(K_t) dZ_t$) relativamente alta (a tal ponto que faça com que a recompensa ao agente $dW_t = \rho W_t dt + U'(K_t)\sigma(K_t) dZ_t$ acarrete em $W_{t+dt} > w^{**}$), ele estipule em (T3) uma remuneração positiva a si próprio (que contrabalance

aquela recompensa e faça com que $dW_t = \rho W_t dt + U'(K_t)\sigma(K_t) dZ_t - dC_t$ leve a $W_{t+dt} = w^{**}$). Dessa forma, por tal política, o principal recomendará que o agente nunca estipule uma remuneração a si próprio em (T1), mas que espere a realização do lucro operacional em (T2) para, se for o caso, fazê-lo em (T3).

Política (P2). *Seja o controle $\bar{\bar{C}}$ sob tal política. Então, recorrendo à definição em (2.2), para $\forall t \in [0, \tau)$,*

$$d\bar{\bar{C}}_t^c = 0. \quad (5.10)$$

Além disso, sempre que se observar $W_{t-} < w^{**}$,

$$\Delta\bar{\bar{C}}_t = 0. \quad (5.11)$$

Por outro lado, caso $W_{t-} \geq w^{**}$, tem-se $\Delta W_t = w^{**} - W_{t-}$, levando a $W_t = w^{**}$, de tal forma que

$$\Delta\bar{\bar{C}}_t = -\Delta W_t. \quad (5.12)$$

Recorrendo novamente a um abuso de notação, suponha que a função V seja obtida a partir da Política (P2) – suposição esta cuja validade será também demonstrada pela Proposição 2. Conforme se torna claro pela Figura 2, o ponto w^{**} deve satisfazer a duas condições. A primeira, dada por sua própria definição em (5.9), é a de que $w^{**} = \inf\{w \geq 0 : V_w(k, w) = -1\}$, $k \in \mathbb{R}_+$. A segunda delas determina que

$$V_{ww}(k, w^{**}) = 0, \quad k \in \mathbb{R}_+. \quad (5.13)$$

A Proposição 2 abaixo mostra que a Política (P2) domina qualquer outra estratégia a ser adotada pelo principal e determina o valor ótimo para θ .

Proposição 2: Suponha que $\bar{D}$ e $\bar{\theta}$ sejam controles ótimos, e faça $\bar{J}^P$ o funcional de critério obtido a partir do controle $\bar{C}$ proposto pela Política (P2), ou seja,

$$\bar{J}^P(k, w; \bar{C}, \bar{D}, \bar{\theta}) = E_k \int_0^\tau e^{-rs} (\bar{\theta} d\bar{C}_s + d\bar{D}_s). \quad (5.14)$$

Então, pode-se afirmar que:

(a) para $\forall (k, w) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\bar{J}^P(k, w; \bar{C}, \bar{D}, \bar{\theta}) = \sup_{(C, \bar{D}, \bar{\theta}) \in \mathcal{V}} J^P(k, w; C, \bar{D}, \bar{\theta}) = V(k, w), \quad (5.15)$$

conforme a definição de V em (5.6);

(b) a função V é côncava;

(c) para $\forall \lambda \in (0, 1]$,

$$\frac{1}{1 + \bar{\theta}} = \lambda. \quad (5.16)$$

Prova: Apêndice B.2. ■

2.6 O contrato ótimo

Suponha um contrato Π dado. Sabe-se que, em um contrato compatível a incentivos, a utilidade prometida ao agente deve ser igual ao valor obtido por ele por meio desse contrato. Conforme (4.15), esta relação pode ser sintetizada como $W_t = U(K_t)$. Uma vez que, pela Proposição 1, a função U é estritamente crescente e duas vezes continuamente diferenciável, há uma relação um-a-um entre os valores de K e de U . Com isso, pode-se inverter U e estabelecer outra função

designando o nível de capital físico K_t a partir do qual o agente obtém determinada utilidade prometida, isto é, $K_t = U^{-1}(W_t)$ ¹⁰. Defina então o nível k^{**} de tal forma que

$$k^{**} = \{k \geq 0 : k = U^{-1}(w^{**})\}. \quad (6.1)$$

Pela Política (P2), percebe-se que o estoque de capital k^{**} é aquele a partir do qual o principal desejaria remunerar o agente. De maneira inversa, defina w^* como o nível de utilidade prometida, por um contrato compatível a incentivos, sob o estoque k^* – ou seja, aquele a partir do qual o agente deixaria de postergar seu consumo:

$$w^* = \{w \geq 0 : w = U(k^*)\}. \quad (6.2)$$

O Lema 5 abaixo impõe uma restrição que qualquer contrato compatível a incentivos deverá satisfazer, qual seja, o de que, sob tal contrato, o nível de estoque de capital a partir do qual o principal desejaria remunerar o agente deve ser igual ao nível a partir do qual o agente deixaria de postergar seu consumo.

Lema 5: *Sejam os níveis de estoque de capital k^* e k^{**} definidos, respectivamente, em (4.5) e (6.1). Então, sob um contrato que seja compatível a incentivos (caso exista), deve-se observar:*

$$k^* = k^{**}. \quad (6.3)$$

Prova: Inicialmente, suponha que haja um contrato compatível a incentivos sob o qual $k^* < k^{**}$. A Figura 3 à esquerda ilustra a função valor U do agente neste caso. Nota-se que o limiar da região *no-action* para o agente, por suposição, é inferior ao mesmo limiar para o principal. Logo, a estratégia ótima por parte do agente consiste em, para $\forall t \in [0, \tau]$ tal que $K_{t-} > k^*$, pela Política (P1), determinar $(1 + \theta)\Delta\bar{C}_t = K_{t-} - k^*$.

¹⁰ Note-se que essa inversão é possível apenas a partir do momento em que há um contrato Π determinando o processo $\tilde{D}$ e implicando em uma função U específica. No problema do principal, analisado na seção anterior, ainda não havia tal contrato e, portanto, ainda não se conhecia a função U . Logo, naquele contexto, ainda não era possível estabelecer uma relação um-a-um entre os valores de K e de W . Por este motivo, o parágrafo do texto se inicia supondo um contrato Π dado.

Sendo o contrato supostamente compatível a incentivos, ele deverá conter a recomendação $(1 + \theta)\Delta\tilde{C}_t = K_{t-} - k^*$, para $\forall t \in [0, \tau)$ tal que $K_{t-} > k^*$. Porém, sendo a função U estritamente crescente, a suposição $k^* < k^{**}$ implica em $w^* < w^{**}$ e faz com que aquela recomendação contradiga a Política (P2). Portanto, qualquer contrato que implique em $k^* < k^{**}$ não pode ser compatível a incentivos.

Por outro lado, suponha um contrato compatível a incentivos sob o qual $k^* > k^{**}$. Conforme se percebe pela Figura 3 à direita, que mostra a função valor U nesta situação, o limiar da região *no-action* para o agente é supostamente superior ao do principal. Assim, a estratégia ótima por parte do agente implicará em, para $\forall t \in [0, \tau)$ tal que $k^{**} < K_{t-} < k^*$, pela Política (P1), $\Delta\bar{C}_t = 0$. Sendo o contrato em questão compatível a incentivos, ele deverá recomendar, para aquele mesmo instante t , $\Delta\tilde{C}_t = 0$. Porém, sendo a função U estritamente crescente, a suposição $k^* > k^{**}$ implica em $w^* > w^{**}$, levando novamente a uma contradição entre aquela recomendação e a Política (P2). Portanto, da mesma forma, qualquer contrato que implique em $k^* > k^{**}$ não pode ser compatível a incentivos.

Logo, caso exista algum contrato compatível a incentivos, este deve satisfazer a condição em (6.3). ■

Figura 3: A função valor U . À esquerda, $k^* < k^{**}$; à direita, $k^* > k^{**}$.

Por (5.1) e pela Política (P1), a distribuição de probabilidade do crescimento da firma ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é dada por

$$dK_t \sim N(\mu(K_t)dt - dD_t, \sigma^2(K_t)dt), \quad t \in [0, \tau). \quad (6.4)$$

Portanto, por meio de dD_t , o principal pode ajustar a distribuição de probabilidade acima, aumentando ou diminuindo o crescimento esperado da firma, de forma a fazer com que a restrição em (6.3) seja satisfeita. A Proposição 3 a seguir determina a trajetória de D necessária para tal.

Proposição 3: *Suponha que o processo $\tilde{D}$ seja dado por*

$$d\tilde{D}_t = \left[\mu(K_t) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \right] dt. \quad (6.5)$$

Então, $k^* = k^{**}$.

Prova: *Apêndice B.3. ■*

A Figura 4 ilustra o comportamento do processo $\tilde{D}$ em função do estoque de capital da firma¹¹. O nível de estoque de capital k^D representado nessa figura é aquele no qual $d\tilde{D}_t = 0$ – ou seja, por (6.5), aquele em que $\mu(k^D) = \rho w^{**}/\lambda$.

¹¹ Caso se admita que os lucros operacionais da firma não dependam de seu tamanho, de tal forma que $\mu(k) = \mu$ e $\sigma(k) = \sigma$, o resultado em (6.5), dado por $\mu - \lambda^{-1}\rho w^{**}$, é semelhante àquele obtido pela equação (17) em DeMarzo e Sannikov (2006). Tal semelhança seria de fato o esperado, uma vez que, pelo presente modelo, se não há qualquer relação entre o tamanho da firma e seu lucro operacional, este então não será afetado por ações passadas do agente. Ainda, note-se que, se apenas a variância dos lucros dependem do tamanho da firma, o resultado em (6.5) continuará sendo uma constante. Porém, o valor desta dependerá de w^{**} e, consequentemente, da função σ .

Figura 4: O processo $\tilde{D}$. Para todo $K_t < k^D$, tem-se $d\tilde{D}_t < 0$.

Uma implicação do resultado em (6.5) é que o principal realizará aportes de recursos na firma sempre que o estoque de capital desta for inferior a k^D . Com tais aportes, o principal aumenta a média da distribuição em (6.4) – em comparação com o caso em que $d\tilde{D}_t \geq 0$ – e, consequentemente, diminui a probabilidade de que a firma seja liquidada. Sendo o estoque de capital corrente inferior a k^* , o principal tem a garantia de que o agente postergará seu consumo e que, portanto, esses aportes de recursos não distorcerão os incentivos providos a ele.

Porém, o principal não irá diminuir a probabilidade de que a firma seja liquidada de forma instantânea, levando seu estoque de capital imediatamente para níveis superiores, mas sim de forma gradual, com aportes decrescentes em relação ao tamanho da firma. Assim, deverá haver um intervalo de tempo esperado até que o estoque de capital alcance o nível k^* e o agente seja remunerado. Tal intervalo deve ser prolongado o bastante a ponto de desestimular o agente a adotar ações contraproducentes.

A esperança do intervalo de tempo durante o qual o agente não será remunerado dependerá do crescimento médio da firma: quanto maior for este, menor será aquela esperança. Inserindo o resultado (6.5) na distribuição de probabilidade em (6.4), percebe-se que, ao longo do domínio $(0, k^*)$, o crescimento esperado da firma será dado por $\rho w^{**}/\lambda$. Portanto, quanto mais

impaciente for o agente, menor será o intervalo de tempo esperado necessário; quanto mais severo for o conflito de agência, maior deverá ser tal intervalo esperado.

Finalmente, para a completa caracterização do contrato ótimo, resta a determinação do montante a ser investido no instante inicial. Em primeiro lugar, é necessário, obviamente, que o valor do contrato para o principal a partir desse investimento inicial seja maior ou igual ao montante em questão, ou seja, $V(k_0, w_0) \geq k_0$.

A partir dessa condição, a determinação do investimento inicial dependerá da alocação do poder de barganha entre cada uma das partes. Suponha inicialmente que o agente detenha todo o poder de barganha e seja k_0^A o investimento inicial neste contexto. Então, a decisão do agente será tal que satisfaça

$$k_0^A = \sup_{k \geq 0} U(k),$$

sujeito à condição $V(k_0^A, w_0^A) \geq k_0^A$. Sendo a função U estritamente crescente e a função V côncava, $k_0^A = \sup\{k \geq 0 : V(k, w) = k\}$ ¹².

Por outro lado, suponha que todo o poder de barganha seja detido pelo principal, fazendo k_0^P o investimento inicial neste caso. Com isso, este montante deverá ser tal que

$$k_0^P = \sup_{k \geq 0} V(k, w),$$

sujeito à condição $V(k_0^P, w_0^P) \geq k_0^P$. Novamente, dada a concavidade da função V , obtém-se $k_0^P = \sup\{k \geq 0 : V(k, w) = k\}$.

¹² Para perceber que tal nível k_0 realmente existe, note-se que a derivada total da função V em relação a k é dada por $V_k(k, w) + V_w(k, w)U'(k)$. Pela Proposição 2, sabe-se que há um valor w^{**} tal que $V_w(k, w) = -1$ para $\forall w \in [w^{**}, \infty)$. Com isso, conclui-se que, pela definição de k^{**} em (6.1) e sendo $k^* = k^{**}$, aquela derivada total é equivalente a $(1 - \lambda)$ para $\forall k \in [k^{**}, \infty)$. Logo, se $\exists k \in (0, k^{**})$ tal que $V(k, w_0) > k$, então $\exists k_0 \in (0, \infty)$ tal que $V(k_0, w_0) = k_0$ e $V(k, w_0) < k$ para $\forall k \in (k_0, \infty)$. Se, diferentemente, $\nexists k \in (0, k^{**})$ tal que $V(k, w_0) > k$, então $k_0 = 0 = V(k_0^A, w_0^A)$.

Figura 5: A função valor V . À esquerda, $k_0 < k^*$; à direita, $k_0 > k^*$.

Portanto, conclui-se que, qualquer que seja a alocação do poder de barganha entre as partes, o investimento inicial deverá satisfazer $k_0 = \sup\{k \geq 0 : V(k, w) = k\}$. A Figura 5 mostra duas situações distintas que podem ocorrer¹³, a depender da tecnologia de produção da firma, dada por μ e σ , da severidade do problema de agência, λ , e das respectivas taxas de desconto ρ e r .

Na situação ilustrada pela Figura 5 à esquerda, $k_0 < k^*$. Neste caso, haverá, necessariamente, um intervalo de tempo, a partir do estabelecimento da firma, durante o qual o agente não receberá qualquer remuneração.

Diferentemente, no caso mostrado pela Figura 5 à direita, em que $k_0 > k^*$, o agente receberá uma remuneração inicial equivalente a $\lambda(k_0 - k^*)$. Este dispêndio por parte do principal pode ser interpretado como um pagamento inicial a ser recebido pelo detentor do projeto, o agente, em troca de direitos sobre parte da propriedade da firma e parcelas de seus fluxos de caixa.

2.7 Investimento e q de Tobin

Pela definição em (1.4), $dK_t = dI_t$. Considerando a trajetória de K descrita pelas equações (5.1) e (5.2) e os fluxos de remuneração estabelecidos pelas Proposições 2 e 3, percebe-se que

¹³ Há ainda duas outras situações possíveis não ilustradas pela Figura 5: $k_0 = 0$ e $k_0 = k^*$.

$$\begin{cases} dI_t = \frac{\rho w^{**}}{\lambda} dt + \sigma(K_t) dZ_t, & t \in [0, \tau), \\ I_{0-} = k, & k \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

$$\Delta I_t = -\frac{1}{\lambda} \Delta C_t, \quad t \in [0, \tau).$$

O processo de investimento acima apresenta um comportamento estocástico cujos desvios da média são equivalentes aos lucros inesperados – dados por $\sigma(K_t) dZ_t$, conforme (1.1). Observando $dK_t = dI_t$, o principal é então capaz de deduzir o valor do termo $\sigma(K_t) dZ_t$ e, portanto, as sucessivas realizações de dY_t . Dessa forma, os investimentos da firma se mostram sensíveis a seus fluxos de caixa, de tal forma que, por meio desta sensibilidade, o principal toma conhecimento dos sucessivos estados da natureza e o processo de informação do principal passa a coincidir com o do agente, dado por $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Alternativamente, seja a função $i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ representando a esperança da taxa de investimento ao longo do intervalo $(t, t + dt]$:

$$i(K_t) = E_{K_t} \left[\frac{dI_t}{K_t} \right] = \frac{\rho w^{**}}{\lambda K_t} dt, \quad t \in [0, \tau). \quad (7.1)$$

A Figura 6 ilustra a taxa de investimento média encontrada em (7.1). Percebe-se, portanto, uma relação estritamente negativa entre a taxa esperada e o estoque de capital da firma.

Figura 6: Taxa de investimento esperada i . A função i é estritamente decrescente em relação ao estoque de capital.

Por fim, considere o q marginal da firma, dado, no presente modelo, pelo valor marginal do capital. Visando analisar a conjectura de Tobin (1969), segundo a qual a taxa de investimento da firma seria uma função de q , introduz-se a Proposição 4 abaixo.

Proposição 4: *Seja o q marginal da firma, dado pelo valor marginal de seu estoque de capital.*

Então:

(a) $q'(k) < 0$, para $\forall k \in (0, k^*)$;

(b) $q(k^*) = 1$;

(c) *Considerando uma função $M: [1, \infty) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, a taxa de investimento esperada da firma ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é dada por*

$$i(q, w) = \frac{\rho w^{**}}{\lambda} M(q, w) dt, \quad (q, w) \in [1, \infty) \times [0, w^{**}], \quad (7.2)$$

em que $M_q(q, w) > 0$.

Prova: Apêndice B.4. ■

Figura 7: q marginal da firma. O q marginal é uma função estritamente decrescente do estoque de capital da firma e assume o valor igual à unidade em k^* .

Conforme ilustrado pela Figura 7, a proposição acima implica que o q marginal da firma é uma função estritamente decrescente de seu estoque de capital, assumindo um valor mínimo igual à unidade quando este alcança o nível k^* – a partir do qual toda disponibilidade de recursos por parte da firma é direcionada à distribuição de dividendos. Portanto, quanto maior for o estoque de capital da firma, menor será o valor marginal desse capital e, por definição, seu q marginal. A acumulação de estoque de capital é realizada até o instante em que se tenha $q(k) = 1$ – ou seja, quando este alcança o nível k^* –, ponto a partir do qual o valor adicionado à firma por uma unidade a mais de capital passa a equivaler a seu custo de reposição. Uma vez estabelecida essa relação, o fluxo de caixa livre da firma é finalmente direcionado à remuneração das partes por meio da distribuição de dividendos.

Ainda, sendo a taxa de investimento esperada, conforme (7.1), uma função estritamente decrescente do estoque de capital da firma, essa taxa pode, equivalentemente, ser expressa como uma função de seu q marginal. Uma vez que esse q é estritamente decrescente em relação ao estoque de capital da firma, aquela função, por sua vez, deverá ser estritamente crescente. Portanto, quanto maior for o q marginal da firma, maior será sua taxa de investimento esperada.

Com isso, obtém-se uma taxa de investimento dependente do q marginal da firma. Contudo, o problema de informação assimétrica entre o agente e o principal faz com que essa dependência se restrinja à média daquela taxa, enquanto que os desvios desta média são responsáveis por revelar ao principal a informação que lhe falta – os lucros realizados da firma.

3 DESENHO DE TÍTULOS FINANCEIROS E DINÂMICA DOS PREÇOS DE MERCADO

Ao invés de estabelecer um contrato de financiamento diretamente com algum investidor, o agente pode emitir títulos financeiros a serem negociados em um mercado de capitais competitivo. Para tal, deve-se desenhar títulos que reproduzam tanto a estrutura de propriedade da firma resultante do contrato ótimo, quanto o processo de remuneração das partes. A venda desses títulos possibilita a captação de um determinado montante a compor o investimento inicial da firma e, em contrapartida, acarreta em certas obrigações junto a seus detentores. A partir desse ponto de vista, o presente capítulo, primeiramente, mostrará que o contrato ótimo pode ser implementado por meio de títulos financeiros de responsabilidade limitada, para, em seguida, investigar a dinâmica de seus respectivos valores de mercado.

3.1 Desenho de títulos financeiros

Defina os títulos financeiros abaixo:

(S1) Ações ordinárias: títulos cuja remuneração instantânea não é determinada previamente, mas recorrentemente a cada instante seguindo a decisão do grupo de acionistas. Será admitido que as ações emitidas junto ao público sejam detidas por uma base difusa de investidores, sendo as decisões do grupo de acionistas determinadas pelos detentores das ações restritas da firma – no presente modelo, somente o agente.

(S2) Títulos de dívida com cupom fixo: perpetuidades que remuneram seus detentores a uma taxa de cupom instantânea igual a r .

(S3) Títulos de dívida com cupom variável: perpetuidades que remuneram seus detentores a uma taxa de cupom instantânea variável.

O contrato ótimo encontrado na seção 2.6 pode então ser implementado da seguinte forma:

Estratégia de Financiamento Ótima. *Caso a firma emita títulos financeiros junto ao mercado de capitais pretendendo captar um montante equivalente a $K_0 \geq 0$, ela poderá implementar uma estratégia de financiamento tal que:*

Ações Ordinárias: emissão de uma proporção equivalente a $(1 - \lambda)$ junto aos investidores, sendo a parcela restante, λ , detida pelo agente.

Títulos de dívida de cupom fixo: aquisição de perpetuidades a um valor total equivalente a $\lambda^{-1}\rho w^{**}/r$.

Títulos de dívida de cupom variável: emissão de $N \in \mathbb{N}$ perpetuidades, cada uma delas recebendo o pagamento, a cada instante, de um cupom equivalente a $\mu(K_t)/N$, $t \in [0, \tau)$.

Por um lado, a concessão ao agente de uma parcela das ações ordinárias e de plena discricionariedade em relação à política de dividendos tem a finalidade de reproduzir os incentivos providos pelo contrato ótimo. O agente será remunerado por meio dos dividendos que suas ações receberão. Portanto, pela política de dividendos, ele será capaz de determinar sua própria remuneração; porém, detendo um percentual λ das ações da firma, cada unidade monetária de dividendo que ele receba representará $1/\lambda$ unidades de dividendos totais a serem distribuídos pela firma. Como consequência, a distribuição de dividendos será realizada apenas a partir do momento em que a firma atinja o tamanho k^* .

Por outro lado, a combinação dos títulos (S2) e (S3) tem o propósito de reproduzir os fluxos de caixa decorrentes do processo $\tilde{D}$, de acordo com o resultado em (6.5), Capítulo 2. A partir da estratégia de financiamento proposta, a firma recebe, a cada instante, um fluxo de caixa equivalente a $\lambda^{-1}\rho w^{**}$ a partir dos títulos (S2) que ela detém, mas deve remunerar os detentores dos títulos (S3) emitidos por ela a um montante total de $\mu(K_t)$. Com isso, os pagamentos instantâneos referente a sua dívida líquida serão equivalentes a $\mu(K_t) - \lambda^{-1}\rho w^{**}$, coincidindo com (6.5), Capítulo 2.

Os títulos (S2) irão prover à firma um capital operacional constante a cada instante, independente de sua história, que se somará a seu capital próprio. Dessa forma, os títulos (S2) exercem a função de atenuar eventuais choques negativos sobre o lucro operacional da firma e, com isso, diminuir os impactos destes nas distribuições de probabilidade dos lucros futuros.

Já os títulos (S3) transferem a seus detentores a parcela esperada do lucro operacional da firma¹⁴. Dessa forma, sua remuneração não depende (ao menos contemporaneamente) da informação que o agente detém de forma assimétrica – que será absorvida pelos investimentos a serem realizados pela firma, conforme abordado na seção 2.7.

De qualquer forma, é importante salientar que, no caso dos títulos de dívida, para o presente problema não são de relevância os atributos de cada título emitido, mas sim que, considerando o agregado deles, os pagamentos totais realizados pela firma, a cada instante, sejam equivalentes a $\mu(K_t) - \lambda^{-1}\rho w^{**}$. De fato, o mais importante para o provimento dos incentivos apropriados são os fluxos de pagamentos gerados pela totalidade dos títulos, independentemente das características individuais de cada um deles. Portanto, para implementar os resultados estabelecidos na seção 2.6, a estratégia de financiamento enunciada acima é apenas uma possível dentre uma infinidade delas.

3.2 Dinâmica dos preços de mercado

Sejam $V^S: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $V^B: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções representando os valores de mercado, respectivamente, do capital acionário e da dívida líquida da firma, para um dado nível de estoque de capital. Uma vez que os investidores são supostamente neutros ao risco e, pela Proposição 2, $(1 + \theta) = 1/\lambda$, tais valores são dados por

¹⁴ Caso se admita que a parcela esperada do lucro operacional não dependa do tamanho da firma ($\mu(k) = \mu$), a remuneração provida por (S3) será constante (igual a μ). Assim, a emissão de títulos de cupom fixo por parte da firma aparece, no presente modelo, como um caso particular no qual as ações do agente não influenciam a esperança de seus lucros operacionais (porém, podem influenciar a variância desses lucros).

$$\begin{aligned}
V^S(K_t) &= E_{K_t} \int_t^\tau e^{-r(s-t)} (1 + \theta) d\tilde{C}_s \\
&= E_{K_t} \int_t^\tau e^{-r(s-t)} \frac{1}{\lambda} d\tilde{C}_s,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
V^B(K_t) &= E_{K_t} \int_t^\tau e^{-r(s-t)} d\tilde{D}_s \\
&= E_{K_t} \int_t^\tau e^{-r(s-t)} \left[\mu(K_s) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \right] ds.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

O Lema 6 a seguir mostra que os valores acima podem ser caracterizados, cada um deles, por meio de equações diferenciais ordinárias. A partir de uma eventual especificação de μ e σ , tais equações permitem encontrar os respectivos valores para cada nível de estoque de capital.

No que se segue, $\mathcal{L}^K$ representa o gerador infinitesimal de K_t , de tal forma que, dada uma função f qualquer e considerando (5.1) e (6.5), Capítulo 2,

$$\mathcal{L}^K f = \frac{1}{2} \sigma^2(K_t) \left(\frac{d^2 f}{dk^2} \right) + \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \left(\frac{df}{dk} \right).$$

Lema 6: (a) Seja uma função $S: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaça a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K S(k) - rS(k) = 0, \quad k \in [0, k^*], \tag{2.3}$$

sujeita às condições $S(0) = 0$ e $S'(k^*) = 1$, e apresente primeira derivada limitada ao longo do domínio $[0, k^*]$. Então, para $\forall k \in [0, k^*]$, $S(k) = V^S(k)$;

(b) por sua vez, seja uma função $B: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaça a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K B(k) - rB(k) + \mu(k) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda} = 0, \quad k \in [0, k^*], \tag{2.4}$$

sujeita a $B(0) = 0$ e $B'(k^*) = 0$, e apresente também primeira derivada limitada ao longo do domínio $[0, k^*]$. Então, para $\forall k \in [0, k^*]$, $B(k) = V^B(k)$.

Prova: Apêndice C.1. ■

A partir do Lema 6 e da fórmula de Itô, conclui-se que a dinâmica do valor de mercado do capital acionário é dada por, para $\forall t \in [0, \tau)$,

$$dS(K_t) = rS(K_t)dt + \sigma(K_t)S'(K_t)dZ_t, \quad (2.5)$$

$$\Delta S(K_t) = -\frac{1}{\lambda} \Delta C_t. \quad (2.6)$$

A dinâmica acima é semelhante àquela encontrada em Biais, Mariotti, Plantin e Rochet (2007), à exceção do termo de volatilidade. Percebe-se que, ao longo do intervalo $(0, k^*)$, o crescimento percentual do valor de mercado do capital acionário é, em média, equivalente a r , a taxa de desconto dos investidores. Porém, assim que o estoque de capital alcança o nível k^* e dividendos são distribuídos, aquele valor é refletido, decrescendo a um montante idêntico à distribuição realizada.

Por sua vez, a proposição abaixo mostra que o preço das ações é uma função estritamente crescente e, em níveis de estoque de capital inferiores a k^* , estritamente côncava de seu estoque de capital.

Proposição 5: Seja a função S definida no Lema 6. Então, para $\forall k \in [0, k^*)$,

$$(a) S'(k) > 0;$$

$$(b) S''(k) < 0.$$

Prova: Apêndice C.2. ■

No que diz respeito à relação crescente entre o preço das ações e o estoque de capital, sua intuição é imediata: quanto maior for este estoque, mais próximo ele estará do nível a partir do qual serão distribuídos dividendos e menor será o risco de que a firma seja liquidada. Já o resultado referente à concavidade implica que, quanto menor for o estoque de capital, maior será a reação do preço das ações a um aumento desse estoque. Note-se ainda que a concavidade estrita estabelecida pela proposição acima faz com que, sendo $S'(k^*) = 1$ (Lema 6), deva-se ter $S'(k^*) > 1$ para $\forall k \in [0, k^*)$. Portanto, por (2.5), percebe-se que, para $\forall k \in (0, k^*)$, a volatilidade do capital acionário é superior à do estoque de capital.

Já com relação à dívida da firma, seja η_t o diferencial de rendimento (*yield spread*) do título de dívida emitido por ela sobre uma perpetuidade que remunera o investidor a uma unidade monetária até o instante de liquidação, de tal forma que

$$\int_t^\infty e^{-(r+\eta_s)(s-t)} ds = E_{K_t} \int_t^\tau e^{-r(s-t)} ds. \quad (2.7)$$

A Proposição 6 abaixo mostra que o diferencial de rendimento da dívida da firma definido acima é uma função estritamente positiva, estritamente decrescente e estritamente convexa de seu estoque de capital.

Proposição 6: *Seja a função η definida em (2.7). Então, para $\forall k \in (0, k^*]$,*

- (a) $\eta(k) > 0$;
- (b) $\eta'(k) \leq 0$, *sendo a desigualdade estrita caso $k < k^*$;*
- (c) $\eta''(k) > 0$.

Prova: *Apêndice C.3. ■*

A proposição acima implica que, quanto menor for o tamanho da firma: (i) maior será o diferencial de rendimento exigido para seus títulos; e (ii) mais sensível será esse diferencial exigido em relação a variações desse tamanho.

Intuitivamente, pode-se entender os resultados obtidos pelas Proposições 5 e 6 como a consequência do fato de que, a reduzidos níveis de estoque de capital, um crescimento deste implica em uma redução do risco de liquidação maior do que aquela que se observa a elevados níveis daquele estoque. Essa diferença faz com que, mesmo admitindo os indivíduos como neutros ao risco, o valor de mercado dos ativos não seja linear em relação ao estoque de capital da firma.

3.3 O problema de agência e a precificação dos ativos

Por fim, esta seção realizará alguns exercícios de estática comparativa envolvendo os parâmetros λ e ρ , que funcionam como medidas, respectivamente, da severidade do conflito de agência e do grau de impaciência do agente. Com isso, esses exercícios pretendem avaliar o impacto do problema de agência sobre a precificação dos ativos da firma.

A Proposição 7 abaixo sintetiza alguns resultados que podem ser obtidos em relação a λ . No que se segue, considerando uma função f qualquer, f_λ representa a derivada parcial de f em relação a λ , isto é, $f_\lambda = \partial f / \partial \lambda$.

Proposição 7: Para $\forall k \in (0, k^*]$,

(a) $S_\lambda(k) < 0$;

(b) $\eta_\lambda(k) > 0$.

Prova: Apêndice C.4. ■

Conforme se percebe por (6.5), Capítulo 2, quanto maior for λ – e, portanto, mais severo for o problema de agência –, maior deverá ser, a cada instante, o fluxo de caixa da firma comprometido com a remuneração de sua dívida e menor, consequentemente, o fluxo de caixa livre (após descontados os pagamentos referentes à dívida líquida). Com isso, maior também passa a ser o risco de que choques negativos no lucro operacional da firma provoquem a incapacidade desta em honrar os compromissos de sua dívida e levem a sua liquidação. O

resultado deste maior risco é então um maior diferencial de rendimento exigido para seus títulos de dívida (item (b)).

Além disso, menores fluxos de caixa livres por parte da firma diminuem os recursos disponíveis a serem distribuídos sob a forma de dividendos. Logo, o valor de mercado do capital acionário da firma, como a esperança do valor presente da totalidade daqueles dividendos, também deverá ser menor (item (a)).

Por sua vez, a Proposição 8 mostra resultados análogos correspondentes ao parâmetro ρ .

Proposição 8: Para $\forall k \in (0, k^*]$,

(a) $S_\rho(k) > 0$;

(b) $\eta_\rho(k) < 0$.

Prova: Apêndice C.5. ■

A intuição dos resultados acima é a mesma apontada em relação à proposição anterior, com a única diferença de que, por (6.5), Capítulo 2, quanto mais impaciente for o agente, menor deverá ser, a cada instante, o fluxo de caixa da firma comprometido com a remuneração de sua dívida e maior, por conseguinte, o fluxo de caixa livre. Como resultado, tem-se um menor risco de liquidação da firma, fazendo com que o diferencial de rendimento exigido por seus títulos de dívida seja menor (item (b)). Ainda, aqueles maiores fluxos de caixa livres levam a um aumento da disponibilidade de recursos a serem distribuídos sob a forma de dividendos, acarretando também em um maior valor de mercado para seu capital acionário (item (a)).

4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como pretensão investigar as implicações de uma relação de risco moral histórico-dependente na administração da firma sobre o desenho de seus títulos financeiros e sua política de investimentos. Tendo em vista a dificuldade de se monitorar a utilização dos recursos da firma, mostrou-se que o contrato ótimo pode ser obtido concedendo plena discricionariedade ao agente para determinar tanto sua própria remuneração, quanto os fluxos de investimentos.

Para disciplinar o agente, o contrato ótimo faz uso de dois instrumentos. O primeiro deles consiste em um amplificador de sua remuneração, no intuito de aumentar o impacto desta sobre os recursos da firma. O segundo instrumento é a realização de determinados aportes adicionais de recursos ao longo do tempo, por parte do principal, de forma a modificar o crescimento esperado da firma.

Em seguida, o trabalho mostra que o contrato ótimo pode ser implementado por meio de títulos financeiros de responsabilidade limitada. A estratégia de financiamento requerida consistiria na emissão de ações ordinárias e de títulos de dívida com taxas de cupom variáveis, e na aquisição de títulos com taxas de cupom fixas.

Os títulos de dívida adquiridos pela firma, com taxas de cupom fixas, são responsáveis por prover a ela, a cada período, um capital operacional constante e independente de sua história. Por sua vez, os títulos de dívida emitidos, com taxas de cupom variáveis, irão transferir a seus detentores a parcela esperada do lucro operacional da firma, fazendo com que a remuneração de tais títulos não dependa, contemporaneamente, da informação assimétrica detida pelo agente.

Os lucros inesperados serão então absorvidos pelos investimentos a serem realizados e, dessa forma, revelados por meio das sucessivas variações no tamanho da firma. Obtém-se, como consequência, investimentos sensíveis a seus fluxos de caixa, de tal forma a fazer com que estes, indiretamente, revelem aos investidores a informação que lhes faltam.

É importante salientar que tais resultados independem da tecnologia de produção da firma. De fato, não se fez qualquer suposição a respeito de seus retornos de escala ou do comportamento da volatilidade dos lucros em função de seu tamanho. Portanto, adotando-se uma especificação precisa da tecnologia de produção, pode-se extrapolar o modelo apresentado de forma a incorporar determinadas complicações, tais como a irreversibilidade dos investimentos ou a existência de custos de ajuste no processo de acumulação de capital.

REFERÊNCIAS

ALLEN, F.; MICHAELY, R. Dividend Policy. Em: JARROW, R. A.; MAKSIMOVIC, V.; ZIEMBA, W.T. (ed.): *Handbooks in Operations Research and Management Science: Finance*, New York, Elsevier Science, 1995.

ALVAREZ, L. H. R. Stochastic Forest Stand Value and Optimal Timber Harvesting. *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 42, n° 6, p. 1972-1993, 2004.

BIAIS, B.; MARIOTTI, T.; PLANTIN, G.; ROCHET, J. Dynamic Security Design: Convergence to Continuous Time and Asset Pricing Implications. *Review of Economic Studies*, vol. 74, n° 2, p. 345-390, 2007.

BIAIS, B.; MARIOTTI, T.; ROCHET, J.; VILLENEUVE, S. Large Risks, Limited Liability, and Dynamic Moral Hazard. *Econometrica*, vol. 78, n° 1, p. 73-118, 2010.

BORODIN, A.N.; SALMINEN, P. *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*. Birkhauser-Verlag, 2002.

BULAN, L.; SUBRAMANIAM, N.; TANLU, L. On the timing of Dividend Initiations. *Financial Management*, vol. 36, n° 4, p. 31-65, 2007.

CADENILLAS, A.; CVITANIC, J.; ZAPATERO, F. Optimal risk-sharing with effort and project choice. *Journal of Economic Theory*, vol. 133, n° 1, p. 403-440, 2007.

DeMARZO, P.; FISHMAN, M. Optimal long-term financial contracting. *Review of Financial Studies*, vol. 20, n° 6, p. 2079-2128, 2007.

DeMARZO, P.; SANNIKOV, Y. Optimal security design and dynamic capital structure in a continuous-time agency model. *Journal of Finance*, vol. 61, n° 6, p. 2681-2724, 2006.

FAMA, E.F. Agency Problems and the Theory of the Firm. *Journal of Political Economy*, vol. 88, n° 2, p. 288-307, 1980.

FAZZARI, S.; HUBBARD, R.G.; PETERSON, B. Financing constraint and Corporate Investment. *Brookings Papers on Economic Activity*, vol. 1988, n° 1, p. 141-206, 1988.

FELLER, W. The Parabolic Differential Equations and the Associated Semi-groups of Transformations. *Annals of Mathematics*, vol. 55, n° 3, p. 468-519, 1952.

FERNANDES, A.; PHELAN, C. A Recursive Formulation for Repeated Agency with History Dependence. *Journal of Economic Theory*, vol. 91, n° 2, p. 223-247, 2000.

GIBBONS, R.; MURPHY, K.J. Optimal Incentive Contracts in the Presence of Career Concerns: Theory and Evidence. *The Journal of Political Economy*, vol. 100, n° 3, p. 468–505, 1992.

GOMES, J. Financing Investment. *American Economic Review*, vol. 91, n° 5, p. 1263-1285, 2001.

GOMPERS, P.; LERNER, J. An analysis of compensation in the U.S. venture capital partnership. *Journal of Financial Economics*, vol. 51, n° 1, p. 3-44, 1999.

HE, Z. Optimal Executive Compensation when Firm Size Follows Geometric Brownian Motion. *The Review of Financial Studies*, vol. 22, n° 2, p. 859-892, 2009.

HE, Z. A model of dynamic compensation and capital structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 100, n° 2, p. 351-366, 2011.

HEINKEL, R.; STOUGHTON, N.M. The dynamics of portfolio management contracts. *Review of Financial Studies*, vol. 7, n° 2, p. 351-387, 1994.

HOLMSTROM, B. Managerial Incentive Problems: A Dynamic Perspective. *Review of Economic Studies*, vol. 66, n° 1, p. 169-182, 1999.

HOLMSTROM, B.; MILGROM, P. Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives. *Econometrica*, vol. 55, n° 2, p. 303-328, 1987.

HOPENHAYN, H. JARQUE, A. Moral Hazard and Persistence. *Federal Reserve Bank of Richmond Working Paper*, n° 07-7, 2007.

ITÔ, K.; McKEAN, H.P. *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer-Verlag, 1974.

JARQUE, A. Repeated Moral Hazard with Effort Persistence. *Journal of Economic Theory*, vol. 145, n° 6, p. 2412–2423, 2010.

JARQUE, A. PRESCOTT, E.S. Optimal Bonuses and Deferred Pay for Bank Employees: Implications of Hidden Actions with Persistent Effects in Time. *Federal Reserve Bank of Richmond Working Paper*, n° 10-16, 2010.

JENSEN, M.C.; MECKLING, W.H. Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 3, n° 4, p. 305-360, 1976.

KALLENBERG, O. *Foundations of Modern Probability*. Springer-Verlag, 1997.

KAPLAN, S.N.; ZINGALES, L. Do Investment-Cash Flow Sensitivities Provide Useful Measures of Financing Constraints? *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, n° 1, p. 169-216, 1997.

MUKOYAMA, T.; SAHIN, A. Repeated Moral Hazard with Persistence. *Economic Theory*, vol. 25, n° 4, p. 831-854, 2005.

OGAWA, R. Only the Final Outcome Matters: Persistent Effects of Efforts in Dynamic Moral Hazard. *ISER Discussion Paper*, n° 767, 2011.

OU-YANG, H. Optimal contracts in a continuous-time delegated portfolio management problem. *Review of Financial Studies*, vol. 16, n° 1, p. 173-208, 2003.

REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, 1999.

RILEY, J.G. Informational Equilibrium. *Econometrica*, vol. 47, n° 2, p. 331-359, 1979.

SANNIKOV, Y. 2008. A Continuous-Time Version of the Principal-Agent Problem. *Review of Economic Studies*, vol. 75, n° 3, p. 957-984, 2008.

SCHATTLER, H.; SUNG, J. On optimal sharing rules in discrete-and continuous-time principal-agent problems with exponential utility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 21, n° 2-3, p. 551-574, 1997.

SUNG, J. Linearity with project selection and controllable diffusion rate in continuous-time principal-agent problems. *The RAND Journal of Economics*, vol. 26, n° 4, p. 720-743, 1995.

SUNG, J. Corporate insurance and managerial incentives. *Journal of Economic Theory*, vol. 74, n° 2, p. 297-332, 1997.

TOBIN, J. A General Equilibrium Approach to Monetary Theory. *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol. 1, n° 1, p. 15-29, 1969.

WILLIAMS, N. Persistent Private Information. *Econometrica*, vol. 79, n° 4, p. 1233-1275, 2011.

APÊNDICE A

A.1 Prova do Lema 1

Seja um controle $(A, C) \in \mathcal{U}$ arbitrário, e K o processo que resulta da adoção desse controle, dado $K_{0-} = k > 0$. Fazendo $0 < h < k$, considere: (i) o controle alternativo $(\hat{A}, C)$ tal que $\hat{A}_{0-} = 0$ e $\hat{A}_t = A_t + h$, $t \in [0, \tau)$; (ii) o processo $\hat{K}$ obtido pela adoção de $(\hat{A}, C)$, porém com a condição inicial $\hat{K}_{0-} = k + h$. Então, por (2.3) e (2.4), $\hat{K}_t = K_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$, fazendo com que

$$\begin{aligned} U(k+h) &\geq E_{k+h} \int_0^\tau e^{-\rho s} [\lambda d\hat{A}_s + dC_s] \\ &= E_k \int_0^\tau e^{-\rho s} [\lambda dA_s + dC_s] + \lambda h, \end{aligned} \tag{A.1}$$

em que a primeira linha é obtida pela definição de U em (4.2) e a segunda linha, pelas definições do controle $(\hat{A}, C)$ e das condições iniciais.

Dada a arbitrariedade quanto a (A, C) , conclui-se a partir de (A.1) que

$$U(k+h) \geq U(k) + \lambda h.$$

Rearranjando a expressão acima, dividindo ambos os lados por h e fazendo $h \rightarrow 0$, obtém-se

$$U'(k) \geq \lambda. \tag{A.2}$$

Em seguida, proceda de forma semelhante com relação ao mesmo controle arbitrário $(A, C) \in \mathcal{U}$, porém considere: (i) outro controle alternativo $(A, \hat{C})$ tal que $\hat{C}_{0-} = 0$ e $\hat{C}_t = C_t + h/(1+\theta)$, $t \in [0, \tau)$; (ii) o processo $\hat{K}$ obtido pela adoção de $(A, \hat{C})$, com a condição inicial $\hat{K}_{0-} = k + h$. Novamente, tem-se $\hat{K}_t = K_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
U(k+h) &\geq E_{k+h} \int_0^\tau e^{-\rho s} [\lambda dA_s + d\hat{C}_s] \\
&= E_k \int_0^\tau e^{-\rho t} [\lambda dA_s + dC_s] + \frac{h}{(1+\theta)}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Considerando a arbitrariedade com relação a (A, C) , por (A.3) obtém-se

$$U(k+h) \geq U(k) + \frac{h}{(1+\theta)}.$$

De forma semelhante ao procedido anteriormente, ao rearranjar a expressão acima, dividir ambos os lados por h e levar h a zero,

$$U'(k) \geq \frac{1}{(1+\theta)}. \tag{A.4}$$

Associando (A.2) a (A.4), obtém-se o resultado em (4.4). ■

A.2 Prova da Proposição 1

(a) Conforme salientado no texto, para garantir a estacionariedade do problema do agente, será suposto que o processo D não dependa explicitamente do tempo, mas apenas da trajetória de estado K . Assim, considerando uma função $d: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal processo pode ser expresso como $D_t = \int_0^t d(K_s) ds$. Dado um contrato Π , a remuneração do principal (independente da do agente) ao longo do intervalo $(t, t + dt]$ é dada então por $d\tilde{D}_t = \tilde{d}(K_t)dt$.

Então, denote como $\mathcal{L}^K$ o gerador infinitesimal de K_t , de tal forma que, dada uma função f qualquer e considerando a difusão de K em (2.3),

$$\mathcal{L}^K f = \frac{1}{2} \sigma^2(K_t) \left(\frac{d^2 f}{dk^2} \right) + [\mu(K_t) - \tilde{d}(K_t)] \left(\frac{df}{dk} \right). \quad (\text{A.5})$$

Em seguida, considere a função $\bar{J}^A$ dada por (4.12), na qual o controle $(\bar{A}, \bar{C})$ segue a Política (P1). Por economia de notação, ao decorrer desta demonstração, será utilizado simplesmente $\bar{J}$ para representar tal função. Inicialmente, estabelece-se o Lema A.1 abaixo.

Lema A.1: Para $\forall k \in [0, k^*]$,

$$\mathcal{L}^K \bar{J}(k) - \rho \bar{J}(k) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Prova: Considere um instante $t \in [0, \tau)$. Fazendo $K_0 = k$, pela fórmula de integração por partes obtém-se

$$e^{-\rho t} \bar{J}(K_t) = \bar{J}(k) - \rho \int_0^t e^{-\rho s} \bar{J}(K_s) ds + \int_0^t e^{-\rho s} d\bar{J}(K_s). \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô generalizada,

$$d\bar{J}(K_t) = \mathcal{L}^K \bar{J}(K_{t-}) dt + \bar{J}'(K_{t-}) \sigma(K_{t-}) dZ_t + \Delta \bar{J}(K_t).$$

Expressando a equação acima na forma integral,

$$\begin{aligned} \bar{J}(K_t) = \bar{J}(k) &+ \int_0^t \mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) ds + \int_0^t \bar{J}'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s \\ &- \sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(K_{s-}) [\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta) \Delta \bar{C}_s], \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que o somatório é obtido a partir da observação de que $\Delta \bar{J}(K_t) = \int_{K_{t-}}^{K_t} \bar{J}'(k) dk = \bar{J}'(K_{t-}) \Delta K_t = -\bar{J}'(K_{t-}) [\Delta \bar{A}_t + (1 + \theta) \Delta \bar{C}_t]$. Porém, pela Política (P1), sabe-se que as retiradas de caixa da firma são realizadas apenas a partir do estoque de capital k^* , fazendo com que

$$\sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(K_{s-})[\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_s] = \sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(k^*)[\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_s] = \lambda \bar{A}_t + \bar{C}_t, \quad (\text{A.9})$$

em que a segunda igualdade é obtida a partir de uma das três situações descritas, respectivamente, em (4.8), (4.9) e (4.10):

(i) se $\lambda > 1/(1 + \theta)$:

$$\begin{cases} \bar{J}'(k^*) = \lambda, \\ \bar{C}_t = 0, \\ \sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(k^*)[\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_s] = \lambda \bar{A}_t = \lambda \bar{A}_t + \bar{C}_t; \end{cases}$$

(ii) se $1/(1 + \theta) > \lambda$:

$$\begin{cases} \bar{J}'(k^*) = \frac{1}{1 + \theta}, \\ \bar{A}_t = 0, \\ \sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(k^*)[\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_s] = \bar{C}_t = \lambda \bar{A}_t + \bar{C}_t; \end{cases}$$

(iii) se $1/(1 + \theta) = \lambda$:

$$\begin{cases} \bar{J}'(k^*) = \lambda = \frac{1}{1 + \theta}, \\ \sum_{0 \leq s \leq t} \bar{J}'(k^*)[\Delta \bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_s] = \lambda \bar{A}_t + \bar{C}_t. \end{cases}$$

Substituindo (A.9) em (A.8) e calculando o diferencial $d\bar{J}(\cdot)$ resultante,

$$d\bar{J}(K_t) = \mathcal{L}^K \bar{J}(K_{t-})dt + \bar{J}'(K_{t-})\sigma(K_{t-})dZ_t - [\lambda\Delta\bar{A}_t + \Delta\bar{C}_t]. \quad (\text{A.10})$$

Em seguida, insira (A.7) em (A.4), de tal forma que esta possa ser reescrita como

$$\begin{aligned} e^{-\rho t}\bar{J}(K_t) &= \bar{J}(k) + \int_0^t e^{-\rho s}[\mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) - \rho\bar{J}(K_{s-})]ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-\rho s}\bar{J}'(K_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s - \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-\rho s}[\Delta\bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta\bar{C}_s]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Rearranjando a equação acima e considerando que $\bar{J}(k) = E_k \sum_{0 \leq s \leq \tau} e^{-\rho s}[\Delta\bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta\bar{C}_s]$:

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{-\rho s}[\mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) - \rho\bar{J}(K_{s-})]ds \\ &= \left\{ \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-\rho s}[\Delta\bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta\bar{C}_s] - E_k \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-\rho s}[\Delta\bar{A}_s + (1 + \theta)\Delta\bar{C}_s] \right\} \\ &\quad - \int_0^t e^{-\rho s}\bar{J}'(K_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

O termo entre chaves da equação acima é claramente um martingal. Quanto ao segundo termo, ele é ou um martingal – caso $E_k \int_0^t [e^{-\rho s}\bar{J}'(K_{s-})\sigma(K_{s-})]^2 ds < \infty$ – ou um martingal local – se $E_k \int_0^t [e^{-\rho s}\bar{J}'(K_{s-})\sigma(K_{s-})]^2 ds = \infty$. Em qualquer dos casos, o lado direito de (A.12) – e, consequentemente, também o lado esquerdo – será um martingal local.

Por outro lado, sabe-se que a integral com relação a ds é uma função de variação finita, o que faz com que $\int_0^t e^{-\rho s}[\mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) - \rho\bar{J}(K_{s-})]ds$ seja um martingal local de variação finita. Porém, sabe-se também que todo martingal local de variação finita é quase-certamente uma constante¹⁵. Uma vez que, fazendo $t = 0$, o lado esquerdo de (A.12) é nulo, conclui-se que, para $\forall t \in [0, \tau)$,

$$\int_0^t e^{-\rho s}[\mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) - \rho\bar{J}(K_{s-})]ds = 0, \quad (\text{A.13})$$

¹⁵ Vide, por exemplo, a Proposição 15.2 em Kallenberg (1997).

equação esta que só pode ser satisfeita se, para $\forall k \in [0, k^*]$, $\mathcal{L}^K \bar{J}(k) - \rho \bar{J}(k) = 0$. ■

Em seguida, retome as identidades em (2.1) e (2.2), reescritas abaixo por conveniência:

$$A_t \equiv A_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta A_s, \quad (\text{A.14})$$

$$C_t \equiv C_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta C_s. \quad (\text{A.15})$$

Sendo $\Delta K_t = -[\Delta \bar{A}_t + (1 + \theta)\Delta \bar{C}_t]$, (A.8) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{J}(K_t) &= \bar{J}(k) + \int_0^t \mathcal{L}^K \bar{J}(K_{s-}) ds - \int_0^t \bar{J}'(K_{s-}) [dA_s^c + (1 + \theta)dC_s^c] \\ &\quad + \int_0^t \bar{J}'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta \bar{J}(K_s). \end{aligned}$$

Calculando o diferencial $d\bar{J}(\cdot)$ a partir da equação acima e inserindo o resultado em (A.7), obtém-se, após considerar que $\mathcal{L}^K \bar{J}(k) - \rho \bar{J}(k) = 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\rho t} \bar{J}(K_t) &= \bar{J}(k) - \int_0^t e^{-\rho s} \bar{J}'(K_{s-}) [dA_s^c + (1 + \theta)dC_s^c] \\ &\quad + \int_0^t e^{-\rho s} \bar{J}'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s + \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-\rho s} \Delta \bar{J}(K_s). \end{aligned}$$

Extraindo a esperança condicional em ambos os lados da equação acima¹⁶,

¹⁶ Note-se que, sendo o lado esquerdo de (A.9) quase-certamente nulo para $\forall t \in [0, \tau)$ e o termo entre chaves um martingal, $\int_0^t e^{-\rho s} \bar{J}'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s$ também deve ser um martingal.

$$\begin{aligned}
E_k[e^{-\rho t}\bar{J}(K_t)] &= \bar{J}(k) - E_k \int_0^t e^{-\rho s} \bar{J}'(K_{s-}) [dA_s^c + (1 + \theta)dC_s^c] \\
&\quad + E_k \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-\rho s} \Delta \bar{J}(K_s).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Em seguida, considere um controle arbitrário $(A, C) \in \mathcal{U}$ diferente de $(\bar{A}, \bar{C})$. Para $\forall T \in [0, \infty)$, defina $F^T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ como a função valor do agente ao adotar a estratégia (A, C) até o instante T , e $(\bar{A}, \bar{C})$ a partir de então, de tal forma que

$$F^T(k) = E_k \left\{ \int_0^{T \wedge \tau} e^{-\rho s} [\lambda dA_s + dC_s] + 1_{T < \tau} e^{-\rho T} \bar{J}(K_T) \right\}. \tag{A.17}$$

Suponha $T < \tau$. Faça $t = T$ em (A.16), e substitua a expressão resultante em (A.17). Sendo $dA_t = dA_t^c + \Delta A_t$ e $dC_t = dC_t^c + \Delta C_t$, tem-se

$$\begin{aligned}
F^T(k) &= \bar{J}(k) + E_k \left\{ \int_0^T e^{-\rho s} [\lambda - \bar{J}'(K_{s-})] dA_s^c + \int_0^T e^{-\rho s} [1 - (1 + \theta)\bar{J}'(K_{s-})] dC_s^c \right. \\
&\quad \left. + \sum_{0 \leq s \leq T} e^{-\rho s} [\Delta \bar{J}(K_s) + \lambda \Delta A_s + \Delta C_s] \right\}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Uma vez que $\bar{J}'(K_t) \geq \beta = \max\{\lambda, 1/(1 + \theta)\}$, as duas primeiras integrais do lado direito de (A.18) assumirão valores não-positivos. Em seguida, suponha $\Delta A_t > 0$ e $\Delta C_t = 0$, fazendo com que $\Delta K_t = -\Delta A_t$ e implicando em

$$\Delta \bar{J}(K_t) + \lambda \Delta A_t + \Delta C_t = \lambda \Delta A_t - [\bar{J}(K_t + \Delta A_t) - \bar{J}(K_t)]. \tag{A.19}$$

Novamente, sendo $\bar{J}'(K_t) \geq \beta$ para $\forall t \in [0, \tau)$, e, por definição $\beta \geq \lambda$, o lado direito de (A.19) será também não-positivo. O mesmo argumento pode ser dado caso se suponha $\Delta A_t = 0$ e $\Delta C_t > 0$, ou $\Delta A_t > 0$ e $\Delta C_t > 0$. Com isso, o somatório em (A.18) será não-positivo.

Por tais motivos, a partir de (A.18) conclui-se que

$$F^T(k) \leq \bar{J}(k). \quad (\text{A.20})$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ na definição em (A.17),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(k) = E_k \int_0^T e^{-\rho s} [\lambda dA_s + dC_s] = J^A(k; A, C), \quad (\text{A.21})$$

em que a segunda igualdade utilizou a definição do funcional de critério em (4.1). Combinando (A.20) e (A.21), estabelece-se

$$J^A(k; A, C) \leq \bar{J}^A(k; \bar{A}, \bar{C}).$$

Dada a arbitrariedade quanto a (A, C) , e uma vez que $(\bar{A}, \bar{C}) \in \mathcal{U}$,

$$\bar{J}^A(k; \bar{A}, \bar{C}) = \sup_{(A, C) \in \mathcal{U}} J^A(k; A, C) = U(k), \quad (\text{A.22})$$

estabelecendo o resultado proposto em (4.13).

(b) Dada uma função f qualquer, considere a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K f(k) - \rho f(k) = 0. \quad (\text{A.23})$$

Sabe-se que a solução da equação acima é dada por¹⁷

$$f(k) = Q_1 \psi_\rho(k) + Q_2 \phi_\rho(k), \quad (\text{A.24})$$

em que $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}$ são constantes e as funções ψ_ρ e ϕ_ρ são as soluções crescente e decrescente¹⁸, respectivamente, de (A.23), de tal forma que, para um dado $h > 0$,

¹⁷ Vide, por exemplo, Feller (1952), Itô e McKean (1974) e Borodin e Salminen (2002).

¹⁸ O subscrito em ψ e ϕ se refere ao fator de desconto envolvido no contexto da equação (A.23). Diferentemente, no Apêndice C, serão designadas ψ_r e ϕ_r as soluções da equação $\mathcal{L}^K f(k) - rf(k) = 0$.

$$\psi_\rho(k) = \begin{cases} E_k[e^{-\rho\tau_h}], & k < h, \\ \frac{1}{E_h[e^{-\rho\tau_k}]}, & k \geq h, \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$$\phi_\rho(k) = \begin{cases} \frac{1}{E_h[e^{-\rho\tau_k}]}, & k < h, \\ E_k[e^{-\rho\tau_h}], & k \geq h, \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

em que

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0: K_t = x\}. \quad (\text{A.27})$$

Lema A.2: Para $\forall k \in \mathbb{R}_+$,

$$U(k) = \begin{cases} \beta \frac{\psi_\rho(k)}{\psi'_\rho(k^*)}, & k \leq k^*, \\ \beta \frac{\psi_\rho(k^*)}{\psi'_\rho(k^*)} + \beta(k - k^*), & k > k^*, \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

sendo ψ_ρ a função definida em (A.25), e $k^* = \inf\{k \geq 0 : \psi''_\rho(k^*) = 0\}$.

Prova: Dados os resultados em (A.6) e (A.22), conforme apontado em (A.24), a função U pode ser expressa como

$$U(k) = Q_1\psi_\rho(k) + Q_2\phi_\rho(k). \quad (\text{A.29})$$

Por sua vez, a especificação em (A.26) implica que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \phi_\rho(k) = \infty. \quad (\text{A.30})$$

Dada a condição $U(0) = 0$, considerando (A.30) estabelece-se $Q_2 = 0$. Com isso, por (A.29), obtém-se $U'(k) = Q_1\psi'(k)$. A partir das condições $k^* = \inf\{k \leq 0 : U'(k) = \beta\}$ e $U''(k^*) = 0$, conclui-se que:

$$Q_1 = \frac{\beta}{\psi'_\rho(k^*)},$$

$$k^* = \inf\{k \geq 0 : \psi''_\rho(k^*) = 0\}, \quad (\text{A.31})$$

conforme a especificação proposta em (A.28) . ■

Neste ponto, é conveniente introduzir a função $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ abaixo:

$$g(k) = \mu(k) - \tilde{d}(k) - \rho k, \quad k \in \mathbb{R}_+.$$

Uma vez que a firma poderia simplesmente ser liquidada e seu estoque de capital consumido, o termo ρk na definição acima representa o custo de oportunidade incorrido pela continuação da firma por mais um intervalo dt . Assim, g designa a esperança do fluxo de caixa a ser gerado pela firma ao longo do intervalo dt , a partir de um estoque de capital k , líquido do custo de oportunidade e da remuneração do principal (independente daquela do agente).

Faz-se então três suposições acerca da função g . No entanto, é importante salientar de antemão que, apesar de tais suposições parecerem restritivas, o resultado obtido a respeito do processo $\tilde{D}$ pela Proposição 3, na seção 2.6, garante que elas sejam satisfeitas para quaisquer função μ e parâmetros δ e ρ .

A primeira delas é a de que, a partir de níveis de estoques de capital extremamente reduzidos, o fluxo de caixa líquido esperado deve ser não-negativo:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} g(k) \geq 0.$$

A segunda suposição é a de que há um nível de estoque de capital além do qual esse fluxo de caixa líquido esperado passa a ser negativo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) < 0.$$

Finalmente, admite-se que haja um nível de estoque de capital $\hat{k} \geq 0$ tal que a função g seja crescente ao longo do intervalo $(0, \hat{k})$, e decrescente em $(\hat{k}, \infty)$ ¹⁹. Tais suposições implicam ainda na existência de um estoque de capital k^0 tal que $g(k^0) = 0$, ou seja, no qual o fluxo de caixa líquido esperado é nulo.

No restante desta prova, por economia de notação, as funções ψ_ρ e ϕ_ρ serão referidas simplesmente como ψ e ϕ , respectivamente. A demonstração a seguir é uma adaptação da prova do Lema 2.1 em Alvarez (2004). Para tal, são introduzidas as funções de escala, $p_h(k)$, e de medida, $m_h(dk)$, do processo K , em que $h > 0$ é uma constante fixa qualquer, de tal forma que, para $\forall k \in \mathbb{R}_+$,

$$p_h(k) = \int_h^k \exp \left(-2 \int_h^s \frac{\mu(x) - \tilde{d}(x)}{\sigma^2(x)} dx \right) ds, \quad (\text{A.32})$$

$$m_h(dk) = \frac{2}{\sigma^2(k) p'_h(k)}, \quad (\text{A.33})$$

sendo, por (A.32), $p'_h(k) = \exp \left(-2 \int_h^k \frac{\mu(x) - \tilde{d}(x)}{\sigma^2(x)} dx \right)$.

Lema A.3: Para $\forall k \in \mathbb{R}_+$,

$$\sigma^2(k) \psi''(k) = 2p'_h(k) \rho \int_0^k g(x) \psi(x) m_h(dx) - 2g(k) \psi'(k). \quad (\text{A.34})$$

¹⁹ Note-se que se pode simplesmente ter $\hat{k} = 0$, com a função g sendo decrescente ao longo de todo o intervalo $(0, \infty)$, e crescente em $(0, 0) = \emptyset$.

Prova: *Passo 1:* Considere um intervalo $(a, b) \in (0, \infty)$ e uma função $f_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, com primeira derivada limitada ao longo do domínio (a, b) , que satisfaça a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K f_1(k) - \rho f_1(k) = 0, \quad (\text{A.35})$$

sujeita às condições $f_1(a) = a$, $f_1(b) = b$. Defina o instante τ^* de tal forma que

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0: K_t \notin (a, b)\}. \quad (\text{A.36})$$

Por (A.24), sabe-se que

$$f_1(k) = Q_1 \psi(k) + Q_2 \phi(k), \quad (\text{A.37})$$

em que as funções ψ e ϕ são dadas, respectivamente, por (A.25) e (A.26). Quanto às constantes Q_1 e Q_2 , a partir das condições $f_1(a) = a$ e $f_1(b) = b$ obtém-se

$$Q_1 = \frac{a\phi(b) - \phi(a)b}{\psi(a)\phi(b) - \phi(a)\psi(b)}, \quad (\text{A.38})$$

$$Q_2 = \frac{\psi(a)b - a\psi(b)}{\psi(a)\phi(b) - \phi(a)\psi(b)}. \quad (\text{A.39})$$

Substituindo (A.38) e (A.39) em (A.37), tem-se, após as devidas manipulações,

$$f_1(k) = a \frac{\hat{\phi}(k)}{\hat{\phi}(a)} + b \frac{\hat{\psi}(k)}{\hat{\psi}(b)}, \quad (\text{A.40})$$

em que

$$\hat{\phi}(k) = \phi(k) - \frac{\phi(b)\psi(k)}{\psi(b)}, \quad (\text{A.41})$$

$$\hat{\psi}(k) = \psi(k) - \frac{\psi(a)\phi(k)}{\phi(a)}. \quad (\text{A.42})$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} df_1(K_t) &= \mathcal{L}^K f_1(K_t)dt + f_1'(K_t)\sigma(K_t)dZ_t \\ &= \rho f_1(K_t)dt + f_1'(K_t)\sigma(K_t)dZ_t, \end{aligned}$$

em que a última igualdade utilizou (A.35). Portanto,

$$e^{-\rho\tau^*}f_1(K_{\tau^*}) = f_1(k) + \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s}f_1'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s.$$

Note-se que, pela definição de τ^* em (A.36) e pela continuidade do processo K , K_{τ^*} deve assumir os valores a ou b . Dadas as condições apontadas, tem-se $f_1(K_{\tau^*}) = K_{\tau^*}$, fazendo com que a equação acima possa ser rearranjada de tal forma que

$$f_1(k) = e^{-\rho\tau^*}K_{\tau^*} - \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s}f_1'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s.$$

Dada a suposição de primeira derivada de f_1 limitada ao longo do domínio (a, b) , o último termo da equação acima é um martingal. Extraindo a esperança condicional,

$$f_1(k) = E_k[e^{-\rho\tau^*}K_{\tau^*}]. \quad (\text{A.43})$$

Passo 2: Considere os mesmos intervalo (a, b) e instante τ^* . Sabe-se que²⁰, admitindo uma função $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E_k \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} |f(K_s)| ds < \infty$,

$$E_k \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} f(K_s) ds = \frac{\phi(k)}{\mathcal{W}_h} \int_a^k f(x) \psi(x) m_h(dx) + \frac{\psi(k)}{\mathcal{W}_h} \int_k^b f(x) \phi(x) m_h(dx), \quad (\text{A.44})$$

em que as funções ψ , ϕ e m_h são dadas, respectivamente, por (A.25), (A.26) e (A.33), $h > 0$ é uma constante fixa qualquer, e $\mathcal{W}_h$ representa o wronskiano de ϕ e ψ , tal que

$$\mathcal{W}_h = \frac{\phi(k)\psi'(k) - \phi'(k)\psi(k)}{p_h'(k)}. \quad (\text{A.45})$$

Considerando a função g definida anteriormente no lugar de f em (A.44), obtém-se, após as devidas manipulações,

$$E_k \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} g(K_s) ds = \frac{\hat{\phi}(k)}{\hat{\mathcal{W}}_h} \int_a^k g(x) \hat{\psi}(x) m_h(dx) + \frac{\hat{\psi}(k)}{\hat{\mathcal{W}}_h} \int_k^b g(x) \hat{\phi}(x) m_h(dx), \quad (\text{A.46})$$

em que $\hat{\phi}$ e $\hat{\psi}$ são as funções definidas em (A.41) e (A.42), respectivamente, e

$$\hat{\mathcal{W}}_h = \left[1 - \frac{\psi(a)\phi(b)}{\phi(a)\psi(b)} \right] \mathcal{W}_h.$$

Passo 3: Pelo Teorema de Dynkin,

²⁰ Vide, por exemplo, Revuz e Yor (1999), Capítulo VII, §3.

$$\begin{aligned}
E_k[e^{-\rho\tau^*} K_{\tau^*}] &= k + E_k \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} [\mu(K_s) - \tilde{d}(K_s) - \rho K_s] ds \\
&= k + E_k \int_0^{\tau^*} e^{-\rho s} g(K_s) ds.
\end{aligned}$$

Inserindo (A.43) e (A.40) no lado esquerdo da equação acima, e (A.46) no lado direito, obtém-se

$$\begin{aligned}
k &= a \frac{\hat{\phi}(k)}{\hat{\phi}(a)} + b \frac{\hat{\psi}(k)}{\hat{\psi}(b)} - \frac{\hat{\phi}(k)}{\widehat{\mathcal{W}}_h} \int_a^k g(x) \hat{\psi}(x) m_h(dx) \\
&\quad - \frac{\hat{\psi}(k)}{\widehat{\mathcal{W}}_h} \int_k^b g(x) \hat{\phi}(x) m_h(dx).
\end{aligned}$$

Em seguida, divida a equação acima por $\hat{\psi}(k)$, diferencie a expressão resultante e, finalmente, multiplique o resultado por $\hat{\psi}^2(k)$, de forma a obter

$$\hat{\psi}(k) - k\hat{\psi}'(k) = p'_h(k) \int_a^k g(x) \hat{\psi}(x) m_h(dx) - \frac{\mathcal{W}_h p'_h(k)}{\phi(a)}.$$

Conforme apontado em (A.30), $\lim_{k \rightarrow 0+} \phi(k) = \infty$. Então, fazendo $a \rightarrow 0+$ na equação acima, multiplicando o resultado por ρ , e considerando, por definição, que $\mathcal{L}^K \psi(k) - \rho \psi(k) = 0$, obtém-se

$$\frac{\sigma^2(k)}{2} \psi''(k) + g(k) \psi'(k) = p'_h(k) \int_a^k g(x) \psi(x) m_h(dx).$$

Reaarranjando a equação acima, estabelece-se (A.34). ■

Considerando a condição estabelecida sobre a função g de que $\lim_{k \rightarrow 0+} g(k) \geq 0$, a partir de (A.34) obtém-se

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \psi''(k) \leq 0.$$

Por outro lado, em k^0 tal que $g(k^0) = 0$, tem-se, novamente por (A.34),

$$\sigma^2(k^0)\psi''(k^0) = 2p'_h(k^0)\rho \int_0^{k^0} g(x)\psi(x)m_h(dx) > 0,$$

fazendo com que $\psi''(k^0) > 0$. Sendo, por (A.31), $k^* = \inf\{k \geq 0 : \psi''(k^*) = 0\}$, conclui-se que $0 \leq k^* < k^0$ e $\psi''(k) \leq 0$ para $\forall k \in [0, k^*]$. Portanto, pelo resultado em (A.28), tem-se $U''(k) \leq 0$ para $\forall k \in [0, \infty)$, estabelecendo a concavidade de U . Por sua vez, a própria definição de ψ implica em uma função U estritamente crescente e duas vezes continuamente diferenciável. ■

A.3 Prova do Lema 2

Seja $\Gamma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função representando o valor total do contrato para o agente – ou seja, considerando todo seu consumo esperado ao longo de $[0, \tau)$. Dadas as realizações de Z até o instante t , tem-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_t &= E \left[\int_0^\tau e^{-\rho s} (\lambda d\bar{A}_s + d\bar{C}_s) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_0^t e^{-\rho s} (\lambda d\bar{A}_s + d\bar{C}_s) + e^{-\rho t} U(K_t). \end{aligned} \tag{A.47}$$

Calculando o diferencial $d\Gamma_t$ a partir da equação acima, obtém-se:

$$d\Gamma_t = e^{-\rho t} (\lambda d\bar{A}_t + d\bar{C}_t) - \rho e^{-\rho t} U(K_t) + e^{-\rho t} dU(K_t). \tag{A.48}$$

Por outro lado, sabe-se por (A.11) que

$$\begin{aligned}
e^{-\rho t}U(K_t) &= U(k) + \int_0^t e^{-\rho s}[\mathcal{L}^K U(K_s) - \rho U(K_s)]ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\rho s}U'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s - \int_0^t e^{-\rho s}[\lambda d\bar{A}_s + d\bar{C}_s].
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Por (A.6), conclui-se que a primeira integral do lado direito da equação acima é nula. Então, substituindo (A.49) em (A.47),

$$\Gamma_t = U(k) + \int_0^t e^{-\rho s}U'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s.$$

Calculando o diferencial $d\Gamma_t$ pela equação acima,

$$d\Gamma_t = e^{-\rho t}U'(K_t)\sigma(K_t)dZ_t. \tag{A.50}$$

Igualando (A.50) a (A.48) e rearranjando a expressão resultante, obtém-se:

$$dU(K_t) = \rho U(K_t) dt + U'(K_t)\sigma(K_t)dZ_t - \lambda d\bar{A}_t - d\bar{C}_t.$$

Utilizando a observação em (4.15) de que $W_t = U(K_t)$, $t \in [0, \tau]$, tem-se o resultado em (4.17). ■

A.4 Prova do Lema 3

Inicialmente, suponha que haja um contrato $\Pi^0 \in \mathcal{C}$ que estabeleça $1/(1 + \theta) = \lambda$. Por (4.10), sabe-se que, sob Π^0 , para $\forall t \in [0, \tau]$ tal que $K_{t-} > k^*$,

$$\begin{cases} \Delta \bar{A}_t = -\alpha \Delta K_t, \\ (1 + \theta) \Delta \bar{C}_t = -(1 - \alpha) \Delta K_t, \end{cases}$$

em que $\alpha \in [0,1]$ e $\Delta K_t = k^* - K_{t-}$. Sendo, por suposição, Π^0 um contrato compatível a incentivos, o processo $\tilde{A}$ deve ser tal que $\Delta \tilde{A}_t = -\alpha \Delta K_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$ em que $K_{t-} > k^*$. Logo, fazendo $\alpha = 0$, conclui-se que há um contrato $\Pi^{IC} \in \mathcal{C}$ tal que $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$.

Alternativamente, suponha um contrato $\Pi^1 \in \mathcal{C}$ estabelecendo $\lambda > 1/(1 + \theta)$. Então, por (4.8), para $\forall t \in [0, \tau)$ tal que $K_{t-} > k^*$,

$$\begin{cases} \Delta \bar{A}_t^1 = -\Delta K_t, \\ \Delta \bar{C}_t^1 = 0, \end{cases}$$

em que $\Delta K_t = k^* - K_{t-}$. Neste caso, a utilidade instantânea do agente em t é dada por

$$\begin{cases} -\lambda \Delta K_t, & \text{se } K_{t-} > k^*, \\ 0, & \text{se } K_{t-} \leq k^*, \end{cases}$$

enquanto que a utilidade instantânea do principal é dada por $\theta \Delta \bar{C}_t + d\tilde{D}_t = d\tilde{D}_t$, sendo o processo $\tilde{D}$ determinado pelo contrato Π^1 . Portanto, pode-se perceber que há um contrato Π^2 que determina $1/(1 + \theta) = \lambda$ e o mesmo processo $\tilde{D}$ que Π^1 , implicando em, por (4.10):

(i) retiradas de caixa da firma dadas por $\Delta \bar{A}_t^2 + (1 + \theta) \Delta \bar{C}_t^2 = -\Delta K_t = \Delta \bar{A}_t^1$;

(ii) utilidade instantânea ao agente equivalente a

$$\begin{cases} \lambda \Delta \bar{A}_t^2 + \Delta \bar{C}_t^2 = -\lambda \alpha \Delta K_t - [1/(1 + \theta)](1 - \alpha) \Delta K_t \\ \quad = -\lambda \Delta K_t, & \text{se } K_{t-} > k^*, \\ 0, & \text{se } K_{t-} \leq k^*; \end{cases}$$

(iii) utilidade instantânea ao principal dada por $\theta \Delta \bar{C}_t^2 + d\tilde{D}_t = -[\theta/(1 + \theta)](1 - \alpha) \Delta K_t + d\tilde{D}_t \geq d\tilde{D}_t$.

Por (i), (ii) e (iii), conclui-se que Π^2 proporcionará retiradas de caixa idênticas a Π^1 , o mesmo valor ao agente e, ao mesmo tempo, é ao menos tão bom quanto Π^1 para o principal. Portanto, $\Pi^2 \in \mathcal{C}$. Neste caso, contudo, tem-se mais uma vez o caso analisado anteriormente, quando mostrou-se haver um contrato $\Pi^0 \in \mathcal{C}$ tal que $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$.

Finalmente, suponha que haja um contrato $\Pi^3 \in \mathcal{C}$ que estabeleça $1/(1 + \theta) > \lambda$. Então, por (4.9), sabe-se que $\bar{A}_\tau = 0$. Sendo Π^3 compatível a incentivos, deve-se ter $\tilde{A}_\tau = 0$. Trivialmente, o próprio contrato Π^3 satisfaz as condições do enunciado.

Sendo $\mathcal{C}$ supostamente não-vazio, existe ao menos um contrato $\Pi^{\text{IC}} \in \mathcal{C}$. Por sua vez, sob Π^{IC} , deve-se ter uma das três situações: $1/(1 + \theta) = \lambda$, $\lambda > 1/(1 + \theta)$ ou $1/(1 + \theta) > \lambda$. Logo, há um contrato $\Pi^{\text{IC}} \in \mathcal{C}$ tal que $\tilde{A}_\tau = \bar{A}_\tau = 0$. ■

APÊNDICE B

B.1 Prova do Lema 4

Seja um controle $(C, D, \theta) \in \mathcal{V}$ arbitrário, e os processos K e W que resultam da adoção desse controle, dados $K_{0-} = k > 0$ e $W_{0-} = w > 0$. Fazendo $0 < h < k$, defina: (i) o controle alternativo $(C, \widehat{D}, \theta)$ tal que $\widehat{D}_{0-} = 0$ e $\widehat{D}_t = D_t + h$, $t \in [0, \tau]$; (ii) os processos $\widehat{K}$ e $\widehat{W}$ obtidos pela adoção de $(C, \widehat{D}, \theta)$, porém com as condições iniciais $\widehat{K}_{0-} = k + h$ e $\widehat{W}_{0-} = w$. Então, por (5.1)-(5.4), $\widehat{K}_t = K_t$ e $\widehat{W}_t = W_t$ para $\forall t \in [0, \tau]$.

Assim como procedido na prova do Lema 1,

$$\begin{aligned} V(k + h, w) &\geq E_{k+h, w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + d\widehat{D}_s) \\ &= E_{k, w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + dD_s) + h, \end{aligned}$$

em que a primeira linha foi obtida pela definição de V em (5.6), e a segunda, pelas definições do controle alternativo $(C, \widehat{D}, \theta)$ e das condições iniciais.

Dada a arbitrariedade quanto a (C, D, θ) ,

$$V(k + h, w) \geq V(k, w) + h.$$

Rearranjando a expressão acima, dividindo ambos os lados por h e fazendo $h \rightarrow 0$, obtém-se

$$V_k(k, w) \geq 1. \tag{B.1}$$

Por outro lado, defina, diferentemente, o controle alternativo $(C, \widehat{D}, \theta)$ de tal forma que $\widehat{D}_t = D_t - h$, $t \in [0, \tau)$, sendo $\widehat{K}$ e $\widehat{W}$ os processo resultantes da adoção desse controle, porém com as condições iniciais $\widehat{K}_{0-} = k - h$ e $\widehat{W}_{0-} = w$. Novamente, por (5.1)-(5.4), $\widehat{K}_t = K_t$ e $\widehat{W}_t = W_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$, fazendo com que

$$\begin{aligned} V(k - h, w) &\geq E_{k-h, w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + d\widehat{D}_s) \\ &= E_{k, w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + dD_s) - h. \end{aligned}$$

A arbitrariedade quanto a (C, D, θ) implica então que

$$V(k - h, w) \geq V(k, w) - h.$$

Da mesma forma pela qual se obteve (B.1), estabelece-se

$$V_k(k, w) \leq 1. \tag{B.2}$$

Associando (B.1) a (B.2), tem-se o resultado em (5.7).

Em seguida, proceda de forma semelhante com relação ao mesmo controle arbitrário $(C, D, \theta) \in \mathcal{V}$, mas considere outro controle alternativo $(\widehat{C}, \widehat{D}, \theta)$ tal que: (i) $\widehat{C}_{0-} = 0$ e $\widehat{C}_t = C_t + h$, $t \in [0, \tau)$; e (ii) $\widehat{D}_{0-} = 0$ e $\widehat{D}_t = D_t - (1 + \theta)h$, $t \in [0, \tau)$. Sendo $\widehat{K}$ e $\widehat{W}$ os processos resultantes da adoção de $(\widehat{C}, \widehat{D}, \theta)$, admita ainda $\widehat{K}_{0-} = k$, mas $\widehat{W}_{0-} = w + h$. Com isso, por (5.1)-(5.4), $\widehat{K}_t = K_t$ e $\widehat{W}_t = W_t$ para $\forall t \in [0, \tau)$, obtendo-se

$$\begin{aligned} V(k, w + h) &\geq E_{k, w+h} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta d\widehat{C}_s + d\widehat{D}_s) \\ &= E_{k, w} \int_0^\tau e^{-rs} (\theta dC_s + dD_s) + \theta h - (1 + \theta)h. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Dada novamente a arbitrariedade com relação a (C, D, θ) ,

$$V(k, w + h) \geq V(k, w) - h.$$

Rearranjando a expressão acima, dividindo ambos os lados por h e levando h a zero,

$$V_w(k, w) \geq -1, \tag{B.4}$$

conforme proposto em (5.8). ■

B.2 Prova da Proposição 2

Faça $\mathcal{L}^W$ o gerador infinitesimal de W_t , de tal forma que, dada uma função f qualquer, considerando a difusão em (5.3) e a especificação de U encontrada em (A.28),

$$\mathcal{L}^W f = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma(K_t) \psi'_\rho(k)}{(1 + \theta) \psi'_\rho(k^*)} \right]^2 \left(\frac{d^2 f}{dw^2} \right) + \rho W_t \left(\frac{df}{dw} \right).$$

Seja a função $\bar{J}^P$ dada por (5.14), na qual o controle $\bar{C}$ segue a Política (P2) e os controles $\bar{D}$ e $\bar{\theta}$ são supostamente ótimos. Assim como procedido na análise do problema do agente, por economia de notação, será utilizado apenas $\bar{J}$ para representar essa função, assim como θ para designar $\bar{\theta}$. Porém, no caso deste parâmetro, tal procedimento servirá também para mostrar que, para qualquer θ que satisfaça a (RI) em (4.14), $\bar{J}$ seguirá a equação (B.5) adiante. Este fato será utilizado para a demonstração do item (c).

Lema B.1: Para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [0, w^{**}]$,

$$\mathcal{L}^W \bar{J}(k, w) - r \bar{J}(k, w) + \mu(k) = 0. \tag{B.5}$$

Prova: Considere um instante $t \in [0, \tau)$. Fazendo $K_0 = k$ e $W_0 = w$, pela fórmula de integração por partes,

$$e^{-rt}\bar{J}(K_t, W_t) = \bar{J}(k, w) - r \int_0^t e^{-rs}\bar{J}(K_s, W_s)ds + \int_0^t e^{-rs}d\bar{J}(K_s, W_s). \quad (\text{B.6})$$

A partir da fórmula de Itô generalizada obtém-se

$$d\bar{J}(K_t, W_t) = [\mu(K_{t-}) + \mathcal{L}^W \bar{J}(K_{t-}, W_{t-})]dt + \bar{J}_w(K_{t-}, W_{t-})\sigma(K_{t-})dZ_t + \Delta\bar{J}(K_t, W_t).$$

Sendo $\bar{J}_k = 1$, $\Delta W_t = -\Delta\bar{C}_t$ e $\Delta K_t = -(1 + \theta)\Delta\bar{C}_t - \Delta\bar{D}_t$, pode-se escrever a equação acima na forma integral

$$\begin{aligned} \bar{J}(K_t, W_t) &= \bar{J}(k, w) + \int_0^t [\mu(K_{s-}) + \mathcal{L}^W \bar{J}(K_{s-}, W_{s-})]ds - \int_0^t d\bar{D}_s^c \\ &\quad + \int_0^t \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s \\ &\quad - \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta\bar{D}_s - \sum_{0 \leq s \leq t} [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})]\Delta\bar{C}_s. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Pela Política (P2), sabe-se que $\bar{J}_w(K_{t-}, W_{t-}) = \bar{J}_w(K_{t-}, w^{**}) = -1$ e, portanto,

$$\sum_{0 \leq s \leq t} [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})]\Delta\bar{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_{s-}, w^{**})]\Delta\bar{C}_s = \theta\bar{C}_t. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo (B.8) em (B.7) e calculando o diferencial $d\bar{J}(\cdot)$ resultante,

$$\begin{aligned} d\bar{J}(K_t, W_t) &= [\mu(K_{t-}) + \mathcal{L}^W \bar{J}(K_{t-}, W_{t-})]dt - d\bar{D}_t^c \\ &\quad + \bar{J}_w(K_{t-}, W_{t-})\sigma(K_{t-})dZ_t - [\theta\Delta\bar{C}_t + \Delta\bar{D}_t]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Em seguida, substitui-se (B.9) em (B.6), de tal forma que esta possa ser reescrita como

$$\begin{aligned}
e^{-rt}\bar{J}(K_t, W_t) &= \bar{J}(k, w) + \int_0^t e^{-rs} [\mathcal{L}^W \bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) - r\bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) + \mu(K_{s-})] ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-rs} \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s - \int_0^t e^{-rs} [\theta d\bar{C}_s + d\bar{D}_s].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Rearranjando a equação acima e considerando que $\bar{J}(k) = E_{k,w} \int_0^t e^{-rs} [\theta d\bar{C}_s + d\bar{D}_s]$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-rs} [\mathcal{L}^W \bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) - r\bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) + \mu(K_{s-})] ds \\
&= \left\{ \int_0^t e^{-rs} [\theta d\bar{C}_s + d\bar{D}_s] - E_{k,w} \int_0^t e^{-rs} [\theta d\bar{C}_s + d\bar{D}_s] \right\} \\
&\quad - \int_0^t e^{-rs} \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Assim como observado em relação a (A.12), o lado direito da equação acima é constituído por dois martingais locais (o termo entre chaves e a integral estocástica). Consequentemente, o lado esquerdo será um martingal local de variação finita. Assim como argumentado para se obter (A.13), tem-se que, para $\forall t \in [0, \tau]$,

$$\int_0^t e^{-\rho s} [\mathcal{L}^W \bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) - r\bar{J}(K_{s-}, W_{s-}) + \mu(K_{s-})] ds = 0, \tag{B.12}$$

equação esta que só pode ser satisfeita se, para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [0, w^{**}]$, $\mathcal{L}^W \bar{J}(k, w) - r\bar{J}(k, w) + \mu(k) = 0$. ■

Retome a identidade em (2.2), reescrita abaixo por conveniência, e expresse o processo $\bar{D}$ de maneira semelhante (já que $\mathcal{V}^2$ admite processos *càd-lags*):

$$C_t \equiv C_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta C_t, \tag{B.13}$$

$$D_t \equiv D_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta D_s. \quad (\text{B.14})$$

Uma vez que, pela Política (P2), $\Delta W_t = -\Delta \bar{C}_t$ e $\Delta K_t = -(1 + \theta)\Delta \bar{C}_t - \Delta \bar{D}_t$, pode-se reescrever (B.7) como

$$\begin{aligned} \bar{J}(K_t, W_t) = & \bar{J}(k, w) + \int_0^t [\mu(K_s) + \mathcal{L}^W \bar{J}(K_s, W_s)] ds + \int_0^t \bar{J}_w(K_s, W_s) \sigma(K_s) dZ_s \\ & - \int_0^t d\bar{D}_s^c - \int_0^t [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_s, W_s)] dC_s^c + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta \bar{J}(K_s, W_s). \end{aligned}$$

Calculando o diferencial $d\bar{J}(\cdot)$ a partir da expressão acima e substituindo o resultado em (B.6),

$$\begin{aligned} e^{-rt} \bar{J}(K_t, W_t) = & \bar{J}(k, w) + \int_0^t e^{-rs} \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s - \int_0^t e^{-rs} d\bar{D}_s^c \\ & - \int_0^t e^{-rs} [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})] dC_s^c + \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-rs} \Delta \bar{J}(K_s, W_s). \end{aligned}$$

Extraindo a esperança condicional em ambos os lados da equação acima,

$$\begin{aligned} E_{k,w}[e^{-rt} \bar{J}(K_t, W_t)] = & \bar{J}(k, w) - E_{k,w} \int_0^t e^{-rs} d\bar{D}_s^c \\ & - E_{k,w} \int_0^t e^{-rs} [(1 + \theta) + \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})] dC_s^c \\ & + E_{k,w} \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-rs} \Delta \bar{J}(K_s, W_s). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Considere um controle arbitrário $(C, \bar{D}, \theta) \in \mathcal{V}$ diferente de $(\bar{C}, \bar{D}, \theta)$. Para $\forall T \in [0, \infty)$, defina $F^T: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ como a função valor do agente ao adotar a estratégia $(C, \bar{D}, \theta)$ até o instante T , e $(\bar{C}, \bar{D}, \theta)$ de T em diante, ou seja,

$$F^T(k, w) = E_{k,w} \left\{ \int_0^{T \wedge \tau} e^{-rs} [\theta dC_s + d\bar{D}_s] + 1_{T < \tau} e^{-rT} \bar{J}(K_T, W_T) \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Suponha $T < \tau$. Substituindo (B.15) em (B.16) e considerando (B.13) e (B.14),

$$\begin{aligned} F^T(k, w) = \bar{J}(k, w) + E_{k,w} \left\{ \int_0^T e^{-rs} [\theta - (1 + \theta) - \bar{J}_w(K_{s-}, W_{s-})] dC_s^c \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq s \leq T} e^{-rs} [\Delta \bar{J}(K_s, W_s) + \theta \Delta C_s + \Delta \bar{D}_t] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Uma vez que $\bar{J}_w(K_t, W_t) \geq -1$ para $\forall t \in [0, \tau)$, a primeira integral do lado direito de (B.17) assume valores não-positivos. Suponha então $\Delta C_t > 0$ e, para simplificar a argumentação, $\Delta \bar{D}_t = 0$ (o valor de $\Delta \bar{D}_t$ é irrelevante, já que $\bar{J}_k = 1$). Com isso, $\Delta K_t = -(1 + \theta)\Delta C_t$ e $\Delta W_t = -\Delta C_t$, fazendo com que

$$\Delta \bar{J}(K_t, W_t) + \theta \Delta C_t + \Delta \bar{D}_t = \theta \Delta C_t - [\bar{J}(K_t + (1 + \theta)\Delta C_t, W_t + \Delta C_t) - \bar{J}(K_t, W_t)]. \quad (\text{B.18})$$

O lado direito de (B.18) deverá também ser não-positivo, tendo em vista que $\bar{J}_k(K_t, W_t) = 1$ e $\bar{J}_w(K_t, W_t) \geq -1$ para $\forall t \in [0, \tau)$. Portanto, por (B.17) conclui-se que

$$F^T(k, w) \leq \bar{J}(k, w). \quad (\text{B.19})$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ na definição em (B.16),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F^T(k, w) = E_{k,w} \int_0^\tau e^{-rs} [\theta dC_s + d\bar{D}_s] = J^P(k, w; C, \bar{D}, \theta), \quad (\text{B.20})$$

em que, para obter a segunda igualdade, utilizou-se a definição do funcional de critério em (5.5).

Combinando (B.19) a (B.20), obtém-se

$$J^P(k, w; C, \bar{D}, \theta) \leq \bar{J}^P(k, w; \bar{C}, \bar{D}, \theta).$$

Sendo $(C, \bar{D}, \theta)$ um controle arbitrário, e uma vez que $(\bar{C}, \bar{D}, \theta) \in \mathcal{V}$,

$$\bar{J}^P(k, w; \bar{C}, \bar{D}, \theta) = \sup_{(A, \bar{C}, \theta) \in \mathcal{V}} J^P(k, w; C, \bar{D}, \theta) = V(k, w),$$

conforme proposto em (5.15).

(b) Sendo $V_{kk}(k, w) = V_{kw}(k, w) = 0$ para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+^2$, e $V_{ww}(k, w) = 0$ para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [w^{**}, \infty)$, para demonstrar a concavidade da função V basta mostrar que $V_{ww}(k, w) \leq 0$ para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [0, w^{**})$. Com tal intuito, considere o ponto (k, w^{**}) , para um $k > 0$ fixo. Por (5.9) e (5.13), $V_w(k, w^{**}) = -1$ e $V_{ww}(k, w^{**}) = 0$, respectivamente. Então, por (B.5), sabe-se que, em tal ponto,

$$rV(k, w^{**}) = \mu(k) - \rho w^{**}.$$

Sendo $V_w(k, w^{**}) = -1 > -\rho/r$, então $\exists \varepsilon > 0$ tal que, para $\forall w \in (w^{**} - \varepsilon, w^{**})$, se tenha $V(k, w) < \mu(k)/r - \rho w/r$. Suponha em seguida que $\exists w_1 \in [0, w^{**})$ tal que $V(k, w_1) = \mu(k)/r - \rho w_1/r$. Pelo Teorema do Valor Médio, sabe-se que $\exists w_2 \in (w_1, w^{**})$ tal que

$$V_w(k, w_2) = \frac{V(k, w^{**}) - V(k, w_1)}{w^{**} - w_1} = -\frac{\rho}{r} < -1,$$

o que contradiz (5.8). Logo, não pode existir tal w_1 , fazendo com que, para $\forall w \in [0, w^{**})$,

$$rV(k, w) < \mu(k) - \rho w \leq \mu(k) + [\rho w]V_w(k, w),$$

em que a última desigualdade é obtida por (5.8). Substituindo (B.5) na expressão acima, dada a arbitrariedade quanto a k , obtém-se $V_{ww}(k, w) < 0$ para $\forall(k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [0, w^{**})$.

(c) Conforme argumentado no início da prova do item (a), a equação (B.5) será observada para qualquer θ que satisfaça a (RI) em (4.14), fazendo com que

$$r\bar{j}(k, w) = \mu(k) + [\rho w]\bar{j}_w(k, w) + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma(K_t)\psi'_\rho(k)}{(1+\theta)\psi'_\rho(k^*)} \right]^2 \bar{j}_{ww}(k, w).$$

Uma vez que $\bar{j}_{ww}(k, w) < 0$ para $\forall (k, w) \in \mathbb{R}_+ \times [0, w^{**})$, conclui-se que o valor de θ que satisfaz (5.6) é aquele máximo que não viola a restrição $1/(1+\theta) \geq \lambda$, ou seja, $1/(1+\bar{\theta}) = \lambda$. ■

B.3 Prova da Proposição 3

Dado o processo em (6.5), $d\tilde{D}_t = \tilde{d}_t dt$, em que $\tilde{d}_t = \mu(K_t) - \lambda^{-1}\rho w^{**}$. O gerador infinitesimal de K_t em (A.5), $\mathcal{L}^K$, pode então ser reescrito como

$$\mathcal{L}^K f = \frac{1}{2} \sigma^2(K_t) \left(\frac{d^2 f}{dk^2} \right) + \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \left(\frac{df}{dk} \right). \quad (\text{B.21})$$

Por (A.6), sabe-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$, $\mathcal{L}^K U(k) - \rho U(k) = 0$. Inserindo (B.21) nesta equação diferencial e rearranjando a expressão resultante,

$$\rho U(k) = \frac{\rho w^{**}}{\lambda} U'(k) + \frac{\sigma^2(k)}{2} U''(k), \quad k \in [0, k^*]. \quad (\text{B.22})$$

Por (4.5) e (5.16), $U'(k^*) = \lambda$, e, por (4.11), $U''(k^*) = 0$. Inserindo tais valores em (B.22), $U(k^*) = w^{**}$. Então, considerando a definição de w^* em (6.2),

$$w^* = U(k^*) = w^{**}.$$

Uma vez que a função U , pela Proposição 1, é estritamente crescente, sabe-se que, para $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $U(a) = U(b)$ se e somente se $a = b$. Portanto, sendo $W_t = U(K_t)$ para $\forall t \in [0, \tau]$, conclui-se que $w^* = w^{**}$ se e somente se $k^* = k^{**}$. ■

B.4 Prova da Proposição 4

(a) Definindo a função q como o valor marginal do capital no instante t , obtém-se, para $\forall (k, w) \in [0, k^*] \times [0, w^{**}]$,

$$\begin{aligned} q(k, w) &= \frac{dV(k, w)}{dk} + U'(k) \\ &= V_k(k, w) + V_w(k, w)U'(k) + U'(k). \end{aligned}$$

Por (5.7) e (A.28), $V_k(k, w) = 1$ e $U'(k) = \lambda \psi'_\rho(k)/\psi'_\rho(k^*)$, respectivamente. Inserindo tais valores na equação acima,

$$q(k, w) = 1 + [V_w(k, w) + 1]\lambda \frac{\psi'_\rho(k)}{\psi'_\rho(k^*)}. \quad (\text{B.23})$$

Diferenciando novamente com relação a k ,

$$\frac{\partial q(k, w)}{\partial k} = [V_w(k, w) + 1]\lambda \frac{\psi''_\rho(k)}{\psi'_\rho(k^*)}.$$

Sendo, pelo Lema A.2, $\psi''_\rho(k) < 0$ para $\forall k \in (0, k^*)$, e, pela definição de w^{**} em (5.9), $V_w(k, w) > -1$ para $\forall (k, w) \in [0, k^*] \times [0, w^{**}]$, conclui-se que, para $\forall k \in (0, k^*)$, $\partial q(k, w)/\partial k < 0$. Porém, dado o contrato Π , há uma relação um-a-um entre os valores de K e de W , fazendo com que o segundo argumento da função q seja supérfluo.

(b) Pela definição de w^{**} em (5.9), $V_w(k, w^{**}) = -1$. Uma vez que $k^* = k^{**}$, com k^{**} definido em (6.1), deve-se ter $V_w(k, w^{**}) = V_w(k^*, w^{**}) = -1$. Substituindo tal valor em (B.23), obtém-se $q(k^*) = 1$.

(c) Rearranjando (B.23),

$$\psi'_\rho(k) = \frac{[q(k) - 1]\psi'_\rho(k^*)}{\lambda[V_w(k, w) + 1]}. \quad (\text{B.24})$$

Uma vez que $\psi''_\rho(k) < 0$ para $\forall k \in (0, k^*)$, ψ'_ρ é uma função estritamente decrescente ao longo deste domínio. Logo, há uma relação um-a-um entre cada $k \in (0, k^*]$ e sua imagem $\psi'_\rho(k)$, fazendo com que sua inversa ψ'^{-1}_ρ seja também uma função. Com isso, conclui-se que o estoque de capital da firma é dado por

$$k(q, w) = \psi'^{-1}_\rho \left\{ \frac{[q - 1]\psi'_\rho(k^*)}{\lambda[V_w(w) + 1]} \right\}, \quad (q, w) \in [1, \infty) \times [0, w^{**}], \quad (\text{B.25})$$

em que se suprimiu k do argumento de V_w (sob o contrato Π , sabendo w , esse termo torna-se supérfluo).

Dado o comportamento apontado de ψ'_ρ , sua inversa ψ'^{-1}_ρ é uma função estritamente decrescente em relação a seu argumento. Dessa forma, inserindo (B.25) em (7.1), obtém-se o resultado proposto. ■

APÊNDICE C

C.1 Prova do Lema 6

(a) Considere um instante qualquer $T \in [0, \infty)$, e faça $t = T \wedge \tau$. Suponha inicialmente $T < \tau$. Fazendo $K_0 = k$, pela fórmula de integração por partes obtém-se

$$e^{-rt}S(K_t) = S(k) - r \int_0^t e^{-rs}S(K_s)ds + \int_0^t e^{-rs}dS(K_s). \quad (\text{C.1})$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô generalizada e considerando que $(1 + \theta) = 1/\lambda$,

$$S(K_t) = S(k) + \int_0^t \mathcal{L}^K S(K_{s-})ds + \int_0^t S'(K_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s - \sum_{0 \leq s \leq t} S'(K_{s-})\frac{1}{\lambda}\Delta\tilde{C}_s. \quad (\text{C.2})$$

Pela Política (P1), sabe-se que

$$\sum_{0 \leq s \leq t} S'(K_{s-})\frac{1}{\lambda}\Delta\tilde{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} S'(k^*)\frac{1}{\lambda}\Delta\tilde{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{\lambda}\Delta\tilde{C}_s, \quad (\text{C.3})$$

em que a última igualdade foi obtida a partir da condição $S'(k^*) = 1$. Substituindo (C.3) em (C.2), calculando o diferencial $dS(\cdot)$ e inserindo o resultado em (C.1),

$$\begin{aligned} e^{-rt}S(K_t) &= S(k) + \int_0^t e^{-rs}[\mathcal{L}^K S(K_{s-}) - rS(K_{s-})]ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-rs}S'(K_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s - \sum_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{\lambda}\Delta\tilde{C}_s. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Considerando (2.3), a primeira integral do lado direito de (C.4) é nula, fazendo com que

$$S(k) = e^{-rt}S(K_t) + \sum_{0 \leq s \leq t} e^{-rs} \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s - \int_0^t e^{-rs} S'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s.$$

Sendo, pela definição de τ em (1.6) do Capítulo 2, $K_\tau = 0$, sabe-se que, pela condição $S(0) = 0$, $S(K_\tau) = 0$. Fazendo $T \rightarrow \infty$ tem-se $t = \tau$, de tal forma que, pela equação acima,

$$S(k) = \sum_{0 \leq s \leq \tau} e^{-rs} \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s - \int_0^\tau e^{-rs} S'(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s. \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que a primeira derivada de S é supostamente limitada ao longo do domínio $[0, k^*]$, a segunda integral do lado direito da equação acima é um martingal. Aplicando a esperança condicional em (C.5), obtém-se $S(k) = V^S(k)$ para $\forall k \in [0, k^*]$.

(b) Considere novamente o instante T , fazendo $t = T \wedge \tau$, e supondo de início $T < \tau$. Desta vez, note-se porém que, pela Política (P1), dada a condição $B'(k^*) = 0$,

$$\sum_{0 \leq s \leq t} B'(K_{s-}) \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} B'(k^*) \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s = 0. \quad (\text{C.6})$$

Dessa forma, recorrendo aos mesmos procedimentos utilizados no item anterior para obter (C.4), porém considerando (C.6) ao invés de (C.3),

$$e^{-rt}B(K_t) = B(k) + \int_0^t e^{-rs} [\mathcal{L}^K B(K_s) - rB(K_s)] ds + \int_0^t e^{-rs} B'(K_s) \sigma(K_s) dZ_s.$$

Substituindo (2.4) na primeira integral do lado direito da equação acima,

$$e^{-rt}B(K_t) = B(k) - \int_0^t e^{-rs} \left[\mu(K_s) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \right] ds + \int_0^t e^{-rs} B'(K_s) \sigma(K_s) dZ_s.$$

Pela condição $B(0) = 0$, tem-se $B(K_\tau) = 0$. Fazendo $T \rightarrow \infty$ na equação acima, de tal forma que $t = \tau$,

$$B(k) = \int_0^\tau e^{-rs} \left[\mu(K_s) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \right] ds - \int_0^\tau e^{-rs} B'(K_s) \sigma(K_s) dZ_s.$$

Novamente, ao aplicar a esperança condicional obtém-se $B(k) = V^B(k)$ para $\forall k \in [0, k^*]$. ■

C.2 Prova da Proposição 5

(a) Seja a função S que satisfaz a equação diferencial ordinária em (2.3), sujeita às condições $S(0) = 0$ e $S'(k^*) = 1$. Conforme apontado em (A.24), a solução dessa equação é dada por

$$S(k) = Q_1 \psi_r(k) + Q_2 \phi_r(k),$$

em que ψ_r e ϕ_r são as soluções crescente e decrescente, respectivamente, da equação $\mathcal{L}^K f(k) - rf(k) = 0$, e $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Assim como afirmado em (A.30), $\lim_{k \rightarrow 0+} \phi_r(k) = \infty$. Então, a condição $S(0) = 0$ resulta em $Q_2 = 0$. Por outro lado, a condição $S'(k^*) = 1$ implica em $Q_1 = 1/\psi'_r(k^*)$, fazendo com que

$$S(k) = \frac{\psi_r(k)}{\psi'_r(k^*)}, \quad k \in [0, k^*]. \quad (\text{C.7})$$

Sendo $\psi'_r(k) > 0$, a partir de (C.7) estabelece-se o resultado proposto em (a).

(b) Diferenciando a equação (2.3) com relação a k ,

$$\frac{\sigma^2(k)}{2} S'''(k) + \left[\sigma'(k) \sigma(k) + \frac{\rho w^{**}}{\lambda} \right] S''(k) - r S'(k) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Por (C.7), sabe-se que $S'(k) > 0$ para $\forall k \in [0, k^*]$. Então, por (C.8), conclui-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$ tal que $S''(k) = 0$, deva-se ter $S'''(k) > 0$. Sendo $S''(k^*) = 0$, tem-se $S'''(k^*) > 0$ fazendo com que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $S''(k) < 0$ para $\forall k \in (k^* - \varepsilon_0, k^*)$.

Suponha então que $\exists k \in [0, k^* - \varepsilon_0]$ tal que $S''(k) \geq 0$, e faça $k^1 = \sup\{k \in [0, k^* - \varepsilon_0] : S''(k) \geq 0\}$. Sendo a função ψ_r duas vezes continuamente diferenciável, por (C.7), $S''(k^1) = 0$. Então, por (C.8), $S'''(k^1) > 0$, fazendo com que $\exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $S''(k) > 0$ para $\forall k \in (k^1, k^1 + \varepsilon_1)$, o que contradiz a definição de k^1 . Logo, $\nexists k \in [0, k^* - \varepsilon_0]$ tal que $S''(k) \geq 0$. ■

C.3 Prova da Proposição 6

Lema C.1: *Seja uma função L , com primeira derivada limitada ao longo do domínio $[0, k^*]$, que satisfaz, para $\forall k \in [0, k^*]$, a equação diferencial ordinária*

$$\mathcal{L}^K L(k) - rL(k) = 0, \quad (\text{C.9})$$

sujeita às condições $L(0) = 1$ e $L'(k^) = 0$. Então, para $\forall k \in [0, k^*]$,*

- (a) $L(k) = E_k[e^{-r\tau}]$;
- (b) $L'(k) \leq 0$, sendo a desigualdade estrita caso $k < k^*$;
- (c) $L''(k) > 0$.

Prova: Pela fórmula de Itô generalizada,

$$\begin{aligned} dL(K_t) &= \mathcal{L}^K L(K_{t-})dt + L'(K_{t-})\sigma(K_{t-})dZ_t - L'(K_{t-})(1 + \theta)\Delta\tilde{C}_t \\ &= rL(K_{t-})dt + L'(K_{t-})\sigma(K_t)dZ_t - L'(K_{t-})(1 + \theta)\Delta\tilde{C}_t, \end{aligned}$$

em que a segunda linha é obtida por (C.9). A partir da equação acima,

$$e^{-\rho\tau}L(K_\tau) = L(k) + \int_0^\tau e^{-\rho s}L'(K_{s-})\sigma(K_{s-})dZ_s - \sum_{0 \leq s \leq \tau} e^{-rs}L'(K_{s-})(1+\theta)\Delta\tilde{C}_s. \quad (\text{C.10})$$

Pela Política (P1),

$$\sum_{0 \leq s \leq \tau} e^{-rs}L'(K_{s-})(1+\theta)\Delta\tilde{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq \tau} e^{-rs}L'(k^*)(1+\theta)\Delta\tilde{C}_s = 0, \quad (\text{C.11})$$

em que a última igualdade utilizou a condição $L'(k^*) = 0$. Substituindo (C.11) em (C.10) e rearranjando a expressão resultante,

$$L(k) = L(K_\tau)e^{-\rho\tau} - \int_0^\tau e^{-\rho s}L'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s.$$

Por definição, $K_\tau = 0$. Dada a condição $L(0) = 1$,

$$L(k) = e^{-\rho\tau} - \int_0^\tau e^{-\rho s}L'(K_s)\sigma(K_s)dZ_s.$$

Uma vez que a primeira derivada de L é supostamente limitada ao longo do domínio $[0, k^*]$, a integral da equação acima é um martingal. Portanto, aplicando a esperança condicional,

$$L(k) = E_k[e^{-\rho\tau}], \quad (\text{C.12})$$

conforme proposto pelo enunciado. Em seguida, reescreva (C.9), de tal forma que

$$\frac{\sigma^2(k)}{2}L''(k) = rL(k) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda}L'(k). \quad (\text{C.13})$$

Dada a condição $L'(k^*) = 0$ e sendo $L(k) = E_k[e^{-\rho\tau}] > 0$, pela equação acima percebe-se que $L''(k^*) > 0$. Logo, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $L'(k) < 0$ para $\forall k \in (k^* - \varepsilon_0, k^*)$.

Suponha então que $\exists k \in (0, k^* - \varepsilon_0]$ tal que $L'(k) \geq 0$, e faça $k^1 = \inf\{k \in (0, k^* - \varepsilon]: L'(k) \geq 0\}$. Sendo $L'(k^1) = 0$, conclui-se por (C.13) que $L''(k^1) > 0$. Porém, neste caso, $\exists \varepsilon_1 > 0$ tal que $L'(k) > 0$ para $\forall k \in (k^1, k^1 + \varepsilon_1)$, o que contradiz a definição de k^1 .

Portanto, $L'(k) < 0$ para $\forall k \in [0, k^*)$. Além disso, dado tal resultado, por (C.13) conclui-se também que $L''(k) > 0$ para $\forall k \in [0, k^*]$. ■

Considerando $t = 0$ e substituindo (C.12) em (2.7), percebe-se que, para $\forall k \in (0, k^*]$,

$$\eta(k) = \frac{rL(k)}{1 - L(k)}. \quad (\text{C.14})$$

Sendo $L(0) = 1$ e $L'(k) < 0$ para $\forall k \in [0, k^*)$, tem-se $L(k) < 1$ para $\forall k \in (0, k^*]$. Logo, por (C.14), conclui-se que $\eta(k) > 0$ para $\forall k \in (0, k^*]$, conforme proposto pelo item (a).

Ainda, diferenciando a expressão em (C.14),

$$\eta'(k) = \frac{rL'(k)}{[1 - L(k)]^2} \leq 0,$$

em que a desigualdade é obtida pelo Lema C.1, estabelecendo o item (b). Finalmente, diferenciando novamente a expressão acima,

$$\eta''(k) = \frac{rL''(k)[1 - L(k)]^2 + 2rL'(k)[1 - L(k)]}{[1 - L(k)]^4} > 0,$$

conforme proposto pelo item (c), conclusão esta obtida, novamente, pelo Lema C.1 e pelo fato de que $L(k) < 1$ para $\forall k \in (0, k^*]$. ■

C.4 Prova da Proposição 7

(a) A partir de (2.3), sabe-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$, S_λ segue a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K S_\lambda(k) - rS_\lambda(k) - \frac{\rho W^{**}}{\lambda^2} S'(k) = 0, \quad (\text{C.15})$$

sujeita às condições $S_\lambda(0) = 0$ e $S'_\lambda(k^*) = 0$. Considere então um instante qualquer $T \in [0, \infty)$, e faça $t = T \wedge \tau$. Suponha inicialmente $T < \tau$. Fazendo $K_0 = k$, pela fórmula de integração por partes obtém-se

$$e^{-rt} S_\lambda(K_t) = S_\lambda(k) - r \int_0^t e^{-rs} S_\lambda(K_s) ds + \int_0^t e^{-rs} dS_\lambda(K_s). \quad (\text{C.16})$$

Por outro lado, pela fórmula de Itô generalizada,

$$S_\lambda(K_t) = S_\lambda(k) + \int_0^t \mathcal{L}^K S_\lambda(K_{s-}) ds + \int_0^t S'_\lambda(K_{s-}) \sigma(K_{s-}) dZ_s - \sum_{0 \leq s \leq t} S'_\lambda(K_{s-}) \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s. \quad (\text{C.17})$$

Porém, pela Política (P1),

$$\sum_{0 \leq s \leq t} S'_\lambda(K_{s-}) \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s = \sum_{0 \leq s \leq t} S'_\lambda(k^*) \frac{1}{\lambda} \Delta \tilde{C}_s = 0, \quad (\text{C.18})$$

em que, para se obter a última igualdade, utilizou-se a condição $S'_\lambda(k^*) = 0$. Portanto, a última integral do lado direito de (C.17) é nula. Calculando o diferencial $dS_\lambda(\cdot)$ por (C.17) e inserindo o resultado em (C.16),

$$\begin{aligned} e^{-rt} S_\lambda(K_t) &= S_\lambda(k) + \int_0^t e^{-rs} [\mathcal{L}^K S_\lambda(K_s) - rS_\lambda(K_s)] ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-rs} S'_\lambda(K_s) \sigma(K_s) dZ_s. \end{aligned}$$

Substituindo (C.15) na equação acima,

$$e^{-rt}S_\lambda(K_t) = S_\lambda(k) + \int_0^t e^{-rs} \left[\frac{\rho w^{**}}{\lambda^2} S'(K_s) \right] ds + \int_0^t e^{-rs} S'_\lambda(K_s) \sigma(K_s) dZ_s.$$

Sendo, por definição, $K_\tau = 0$, pela condição $S_\lambda(0) = 0$ obtém-se $S_\lambda(K_\tau) = 0$. Fazendo $T \rightarrow \infty$ na equação acima, de tal forma que $t = \tau$, e aplicando a esperança condicional, tem-se

$$S_\lambda(k) = -E_k \int_0^\tau e^{-rs} \left[\frac{\rho w^{**}}{\lambda^2} S'(K_s) \right] ds < 0,$$

conforme proposto pelo item (a).

(b) Seja a função $L(k) = E_k[e^{-\rho\tau}]$ utilizada na demonstração da Proposição 6. Por (C.9), sabe-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$, L_λ satisfaz

$$\mathcal{L}^K L_\lambda(k) - rL_\lambda(k) - \frac{\rho w^{**}}{\lambda^2} L'(k) = 0,$$

sujeita às condições $L_\lambda(0) = 0$ e $L'_\lambda(k^*) = 0$. A partir dos mesmos procedimentos utilizados para a demonstração do item (a), estabelece-se

$$L_\lambda(k) = -E_k \int_0^\tau e^{-rs} \left[\frac{\rho w^{**}}{\lambda^2} L'(K_s) \right] ds > 0,$$

em que a desigualdade é obtida pelo item (b) do Lema C.1. Logo, a partir de (C.14),

$$\eta_\lambda(k) = \frac{rL_\lambda(k)}{[1 - L(k)]^2} > 0, \quad k \in (0, k^*]. \quad \blacksquare$$

C.5 Prova da Proposição 8

(a) Por (2.3), percebe-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$, S_ρ segue a equação diferencial ordinária

$$\mathcal{L}^K S_\rho(k) - rS_\rho(k) + \frac{w^{**}}{\lambda} S'(k) = 0,$$

sujeita às condições $S_\rho(0) = 0$ e $S'_\rho(k^*) = 0$. De maneira análoga à procedida na prova da Proposição 7, item (a), obtém-se

$$S_\rho(k) = E_k \int_0^\tau e^{-rs} \left[\frac{w^{**}}{\lambda} S'(K_s) \right] ds > 0,$$

conforme proposto no enunciado do item (a).

(b) Considerando a função $L(k) = E_k[e^{-\rho\tau}]$ introduzida na demonstração da Proposição 6, a partir de (C.9) sabe-se que, para $\forall k \in [0, k^*]$, L_ρ satisfaz

$$\mathcal{L}^K L_\rho(k) - rL_\rho(k) + \frac{w^{**}}{\lambda} L'(k) = 0,$$

sujeita às condições $L_\rho(0) = 0$ e $L'_\rho(k^*) = 0$. Assim como procedido no item anterior, e dado o resultado do item (b) do Lema C.1, estabelece-se

$$L_\rho(k) = E_k \int_0^\tau e^{-rs} \left[\frac{w^{**}}{\lambda} L'(K_s) \right] ds < 0.$$

Por meio então de (C.14), tem-se

$$\eta_\rho(k) = \frac{rL_\rho(k)}{[1 - L(k)]^2} < 0, \quad k \in (0, k^*]. \quad \blacksquare$$

conforme proposto no enunciado. $\blacksquare$