**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

UTILIDADES EM “S” E OS PARADOXOS DO MERCADO FINANCEIRO

João José de Farias Neto
Orientador: Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

SÃO PAULO

2007

Profa. Dra. Sueli Vilela Sampaio
Reitora da Universidade de São Paulo
Prof. Dr. Carlos Roberto Azzoni
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Prof. Dr. Joaquim José Martins Guilhoto
Chefe do Departamento de Economia
Prof. Dr. Dante Mendes Aldrighi
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

JOÃO JOSÉ DE FARIAS NETO

UTILIDADES EM S E OS PARADOXOS DO MERCADO FINANCEIRO

Tese apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade como requisito para a obtenção do título de Doutor em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Joe Akira Yoshino

SÃO PAULO

2007

Versão revisada (06 de dezembro de 2007)

Farias Neto, João José de
Utilidades em “S” e os paradoxos do mercado financeiro /
João José de Farias Neto. – São Paulo, 2007.
124 p. .

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2007
Bibliografia

1. Escolha (teoria econômica) 2. Consumo 3. Ações
4. Economia matemática I. Universidade de São Paulo.
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade.
I. Título.

CDD – 330.1

Esta tese não teria existido, se não fosse a forte determinação da EGI-A/IEAv/CTA, e, em particular, de seu chefe, Dr. Osvaldo Catsumi Imamura , de defender a qualificação profissional de seus membros. Sua elaboração beneficiou-se das muitas discussões informais sobre seu tema com os membros das divisões de informática e geo-inteligência do Instituto de Estudos Avançados.

**“O que se aprende é mais do que o que
se pode botar no papel.**

**O que se descobre que se ignora é
mais do que o que se aprende.”**

RESUMO

Testam-se quatro utilidades com o formato S das curvas de saturação - gama, logística, Cauchy e Cauchy modificada - no modelo básico de apreçamento de ativos de Lucas, com séries temporais do mercado americano. Estabelecendo-se um parâmetro que acompanha o nível de consumo *per capita*, constata-se que todas resolvem o chamado *riskfree puzzle*. A gama e a Cauchy modificada saem-se melhor no apreçamento dos 25 ativos do portfolio de Fama e French e esta última é eleita a vencedora, pelas suas propriedades assintóticas e por apresentar coeficiente médio (no sentido *cross-section*) de aversão relativa ao risco na faixa considerada normal (entre 0 e 5). A Cauchy modificada regulariza a utilidade de Constantinides-Cochrane-Campbel, de formação de hábito, permitindo que o trecho abaixo do consumo habitual seja usado, com isso dispensando o uso de truques para impedir que o consumo suavizado ultrapasse o real. Constatou-se a manutenção daquele coeficiente médio dentro da faixa normal, em um nível pouco abaixo do americano, no caso do mercado brasileiro. Nesse sentido de média *cross-section*, poderia-se dizer que a utilidade aqui proposta resolve o chamado *equity premium puzzle*.

ABSTRACT

Four S-shaped utility functions are tested - gamma, logistic, Cauchy and modified Cauchy – on Lucas asset pricing model with American market time series. Establishing a parameter that follows the level of the *per capita* consumption, it is shown that all of them solve the so called *risk free puzzle*. The gamma utility and the modified Cauchy are the ones with better pricing power with respect to Fama and French's 25 book-to-market portfolio and the last one is elected the winner, for its asymptotic properties and for exhibiting mean (in the cross-section sense) relative risk aversion coefficient inside the accepted normal range (between 0 and 5). The modified Cauchy utility regularizes the habit-formation Constantinides-Cochrane-Campbel utility function, allowing the usage of the stretch below the habit consumption level, thus doing without the need of tricks to forbid the smoothed consumption series from outgrowing the real one. In the Brazilian market, the mean relative risk aversion coefficient also remains inside the acceptable region, on a slightly lower level. In this mean cross-section sense, it might be possible to state that the utility here proposed solves the equity premium puzzle.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
3	O MODELO	21
3.1	Prêmio de risco	23
3.2	Hipótese de lognormalidade	28
3.3	Linearização	29
3.4	Expansões de ordem superior	33
3.5	Elasticidade	35
4	ECONOMETRIA	37
4.1	Dados	39
4.2	Testes	41
4.3	Modelo da série de consumo americana	42
4.4	Modelos de Fama e French	46
4.5	Resíduos das estimações GMM	46
5	UTILIDADES DA LITERATURA	49
5.1	CRRA	49
5.2	Epstein-Zin-Weil	51
5.3	Constantinides	54
5.4	Abel	58
6	UTILIDADES PROPOSTAS	61
6.1	Utilidade logística	61
6.2	Utilidade Gama	65
6.3	Utilidade Cauchy	70
6.4	Utilidade Cauchy modificada	72
7	AGENTES HETEROGÊNEOS: HÁBITO INTERNO VERSUS EXTERNO	79
7.1	Hábito interno	80
7.1.1	Com a utilidade gama	81
7.1.2	Com a Cauchy modificada	81
7.1.3	Caso multitemporal	82
7.2	Hábito externo	84

2	SUMÁRIO	
7.3	Agregação do fator de desconto estocástico	86
8	BRASIL	89
8.1	Comparação entre Brasil e EUA	96
8.2	Equações linearizadas	96
8.3	Utilidade Cauchy modificada	98
9	CONCLUSÕES	101
10	APÊNDICE	109
10.1	Demonstração do teorema 7.1	109
10.2	Obtenção de M para a gama ingênua	112
10.3	Obtenção de M para a utilidade de Abel	113
10.3.1	Modelo a dois tempos	113
10.3.2	Modelo de horizonte infinito	114
10.4	Expansão quadrática do M da Cauchy modificada	115
10.5	Sensibilidade da utilidade Cauchy modificada ao método de suavização usado	116
11	ANEXOS	119

Lista de Figuras

1	Aversão absoluta ao risco variável constatada empiricamente para derivativos. FONTE: Jackwerth (1997).	9
2	Prêmio de risco em diversos períodos	13
3	Prêmio de risco nos países da OCDE (FONTE: Mehra)	14
4	Distanciamento no longo prazo entre as rentabilidades das aplicações (FONTE: Mehra 2005).	14
5	Série de retornos anuais do S&P500	15
6	Série de retornos de um ativo sem risco	15
7	Matriz de perdas e ganhos do jogo evolucionário que justifica utilidades em "S". FONTE: Hamos e Heifetz (2001).	19
8	Coeficiente de aversão relativa ao risco (ARR) e fator de desconto subjetivo (beta) usando as equações linearizadas. Dados de Kocherlakota. Período considerado: 1951-2001.	31
9	Com os dados de French de 1927 a 2005, tem-se o <i>equity premium puzzle</i> , mas não o <i>risk free puzzle</i>	31
10	Superfície cujo ponto de mínimo se deseja encontrar.	40
11	A superfície da figura 10 vista por outro ângulo.	40
12	Suavização da série de consumo americana.	42
13	Mesmo da figura anterior, aumentando-se ligeiramente o denominador do expoente.	43
14	Suavização da série de consumo por amortecimento exponencial duplo.	44
15	Suavização da série de consumo por amortecimento exponencial duplo com parâmetro diferente.	44
16	Distribuição de probabilidade da renda individual americana em 1996. FONTE: Dragulescu e Yakovenko, 2001.	45
17	A utilidade CRRA destaca os dois choques do petróleo como as maiores anomalias na economia americana da segunda metade do século XX.	47
18	Mesmo da figura anterior, com a utilidade gama.	47
19	Resíduos da estimação GMM usando a utilidade Cauchy modificada.	48
20	Utilidade CRRA. M e R contemporâneos.	50
21	O mesmo que a figura 20, mas com M à frente de R.. . . .	50
22	M dois passos à frente de R. Utilidade CRRA.	50
23	Ajuste da utilidade potência (CRRA) ao portfolio de Fama e French, comparado com os dois modelos de três fatores daqueles autores.	51
24	A utilidade de Epstein e Zin sofre do <i>risk-free puzzle</i>	52
25	Epstein e Zin modificada. Mesmo problema.	53
26	Ajuste da Epstein-Zin ao portfolio de Fama e French.	54

4 LISTA DE FIGURAS

27	Para γ ímpar, a utilidade de Constantinides é decrescente no primeiro trecho!	55
28	Utilidade de Constantinides com γ par.	56
29	Aversão relativa ao risco da utilidade de Constantinides.	56
30	A utilidade de Constantinides resolve o risk-free puzzle.	57
31	Aversão relativa ao risco da utilidade logística.	61
32	Aversão absoluta ao risco da utilidade logística.	62
33	Utilidade logística	62
34	Usando séries contemporâneas, isto, é, $M(t+1)$ com $R(t+1)$, a logística resolve o risk-free puzzle com folga.	63
35	Utilidade logística usando $M(t+2)R(t+1)$	64
36	Com consumo precedendo retorno, a logística, como era de se esperar, não funciona.	64
37	Ajuste da utilidade logística ao portfolio de Fama e French.	65
38	Logística: taxa de juros e prêmio de risco reproduzíveis com folga.	65
39	Aversão absoluta ao risco da gama invariante.	67
40	Aversão relativa ao risco da gama invariante.	67
41	Utilidade gama.	67
42	Mapa da gama variante.	69
43	Aversão relativa ao risco da gama variante com $a = 130$ e $b = 180$	69
44	Ajuste da gama ao portfolio de Fama e French.	70
45	Utilidade Cauchy	71
46	Aversão absoluta ao risco da utilidade Cauchy	71
47	Aversão relativa ao risco da utilidade Cauchy	72
48	Utilidade Cauchy modificada	73
49	Aversão absoluta ao risco da utilidade Cauchy modificada.	74
50	Aversão relativa ao risco da Cauchy modificada.	74
51	Estimação GMM dos parâmetros da utilidade Cauchy modificada multiplicativa, usando os três fatores de Fama e French (MKT, HML e SMB).	75
52	Precificação do portfolio de Fama e French pela utilidade Cauchy modificada.	76
53	Coeficiente de aversão relativa ao risco da Cauchy modificada, calculado em $C_t = c_t$	76
54	ARR integrado sobre a distribuição do consumo. Utilidade Cauchy modificada.	77
55	Séries temporais dos quintis de renda das famílias (<i>households</i>) americanas. Dólares constantes de 1993.	85
56	Séries das despesas de consumo anual das famílias, por quintis de renda.	85
57	Insensibilidade ao parâmetro κ no caso do M não agregado.	86

58	Usando M agregado e $M(t+2)R(t+1)$, não há um mínimo global bem definido.	87
59	Gráfico do erro médio para M e R contemporâneos. M agregado.	88
60	Consumo trimestral <i>per capita</i> em reais	90
61	Consumo trimestral ao longo de 12 anos.	90
62	Retornos reais de mercado, do ativo sem risco (selic-overnight) e variação trimestral do consumo. Brasil.	91
63	Índices acionários brasileiros.	91
64	Mercado versus ativo 'sem risco'.	92
65	Perspectiva mais ampla da relação entre taxa de juros e o índice BOVESPA.	92
66	Séries de interesse para o <i>equity premium</i>	93
67	Ativo "sem risco" versus inflação	93
68	A trajetória do vetor (inflação,overnight) no Brasil é caótica, mas vem convergindo	94
69	O período Collor é responsável pela grande curva envoltória.	94
70	O período hiperinflacionário sobressai-se no gráfico como um terremoto em um sismógrafo.	95
71	Mesmo acompanhando geralmente a inflação, o ativo sem risco às vezes descola-se totalmente dela.	95
72	Consumo versus ativo sem risco: caótico.	96
73	No lado esquerdo, EUA. No direito, Brasil. Esse gráfico comparativo ilustra a caoticidade da economia brasileira, comparada à americana.	97
74	Cálculo do coeficiente de aversão relativa ao risco (ARR) e do fator de desconto subjetivo (beta) usando as equações linearizadas. Séries trimestrais 1992-2003. Brasil.	97
75	ARR e β . Séries trimestrais jun2002-dez2005. Brasil	98
76	Aversão relativa ao risco no Brasil usando a utilidade Cauchy modificada.	99
77	ARR integrado sobre a distribuição do consumo brasileiro, suposta exponencial com média igual ao consumo per capita de cada trimestre.	99
78	Parâmetros ótimos (no sentido de melhor ajuste ao portfolio de Fama e French) e estatísticas de ajuste.	117
79	ARR local (calculado em C =consumo <i>per capita</i>).	118
80	ARR médio (média sobre a distribuição <i>cross – section</i> do consumo).	118
82	Séries americanas	121
84	Séries brasileiras	123
85	Quintis do consumo americano.	124

LISTA DE SÍMBOLOS

Em toda esta tese, à exceção do teorema da seção 7.1, é usada a seguinte notação:

$M \equiv$ fator de desconto estocástico

$Q_t \equiv \frac{1}{\beta} M$

$s(c) \equiv$ taxa de aversão relativa ao risco correspondente ao nível c de consumo (para utilidades em que s não é constante)

$r(c) \equiv \frac{s(c)}{c} \equiv$ taxa absoluta de aversão ao risco

$\beta \equiv$ fator de desconto subjetivo

$\gamma \equiv s(c)$ no caso constante (CRRA)

$m \equiv \ln M$

$q \equiv \ln Q$

$R^m \equiv$ retorno do portfolio de mercado (em torno de 1)

$R^f \equiv R_f \equiv$ retorno do ativo sem risco

$R_e^i \equiv R^i - R^f \equiv$ excesso de retorno do ativo i

$R_e \equiv R^m - R^f =$ excesso de retorno do portfolio de mercado

1 INTRODUÇÃO

Preferências do agente econômico entre diferentes cestas de bens podem ser especificadas por funções-utilidade ordinais ou cardinais. No primeiro caso, não faz sentido dizer que ele acha tal cesta três vezes mais útil do que esta outra. No segundo, embora a adição de uma constante a toda a função não faça diferença (de modo que o nível não importa), os valores relativos são vistos como tendo significado econômico. No caso do valor do dinheiro, por exemplo, pode-se alegar que, quanto mais, melhor, de modo que ambas (ordinal e cardinal) devem ser monótonas crescentes; mas, no caso da ordinal, qualquer função da utilidade original que também seja monótona crescente também serve como utilidade, enquanto, no caso da cardinal, procura-se preservar pelo menos certas características topológicas como o sinal da concavidade de cada trecho da utilidade (ligado à disposição de correr riscos).

O uso de utilidades cardinais em economia sofre uma crítica severa da chamada escola austríaca (CAPLAN, 1999; MAHONEY, 2006), que alega que teoremas que demonstram a existência de utilidades correspondentes a certos padrões de preferências não permitem que se diga, por exemplo, que o bem A é cinco vezes mais útil do que o bem B só porque, com a utilidade usada, $U(A)=5U(B)$. Entretanto, Milton Friedmann já afirmava, na década de 50 do século XX, que o simples fato das utilidades cardinais levarem a modelos que explicam características importantes das economias reais justifica o seu uso. Um exemplo famoso é a resolução dada por Bernoulli ao chamado paradoxo de São Petersburgo (perante uma loteria que paga 2^n dólares com probabilidade 2^{-n} , para qualquer $n > 1$ inteiro, o agente indiferente ao risco - nem amante dele nem avesso a ele - deveria se dispor a pagar infinitos dólares pelo bilhete, enquanto um, cuja função utilidade seja côncava, só se disporá a pagar uma quantia finita - ver Araújo (1983, p. 36) ou Mas-Colell *et al* (1995, p. 185), por exemplo).

A filosofia adotada no presente trabalho é: supondo que os agentes econômicos atribuam valor aos bens de acordo com a utilidade tal, como se comportaria a economia resultante?

A utilidade que Bernoulli usou para resolver aquele paradoxo foi a logarítmica, que até hoje é a preferida de alguns economistas. Ramsey, no início do século XX, usou uma mais geral, que engloba a logarítmica como caso particular - a utilidade potência, também conhecida com CRRA (Constant Relative Risk Aversion) - em seu modelo determinístico de crescimento econômico; estabeleceu-se, a partir daí, uma tradição de se usar essa utilidade em modelos de ciclos reais, que tentam relacionar taxa de crescimento econômico com choques aleatórios de tecnologia e taxa de juros.

O progresso da teoria econômica, entretanto, principalmente com os trabalhos de Lucas, Prescott e Kydland (três prêmios Nobel de economia), levou a um *conundrum*: alguns

autores, no início da década de 80 do século passado, descobriram que os modelos aceitos conflitavam-se com os dados, ao tentar ligar finanças com a economia real. Especificamente, a utilidade CRRA exigia um parâmetro de aversão relativa ao risco muito alto, para que a teoria reproduzisse a realidade.

Seguiram-se, desde então, tentativas de mudar a teoria alterando vários de seus pressupostos básicos e, até 2005, um dos pesquisadores mais ativos nessa área (John Cochrane) "jogava a toalha" e afirmava que, a não ser que alguém tivesse uma idéia muito original, era impossível baixar aquele parâmetro a níveis aceitáveis (Cochrane, 2005b, p.24).¹

A idéia original da presente tese, que assemelha-se à do famoso ovo de Colombo, é, em vez de considerar a ARR (Aversão Relativa ao Risco) do consumidor médio (agente representante), considerar a média da ARR dos consumidores. Agora, isso não faria qualquer diferença, se se continuasse usando a utilidade CRRA, dado que seu ARR é constante. É preciso escolher uma forma funcional adequada para a função utilidade, sem a qual essa idéia seria estéril.

Mehra (1985), sugere, como uma das possíveis linhas de pesquisa para resolver o *equity premium puzzle*, a experimentação com outras utilidades além da CRRA, mas deixa também subentendida a possibilidade de não ser possível resolvê-lo no âmbito da teoria neoclássica, sendo necessária, talvez, a utilização de modelos mais complexos . De qualquer forma, a simples mudança de função-utilidade é uma das esperanças daquele autor. Jackwerth (1997) tem um estudo interessante no qual, calculando a aversão absoluta ao risco pela fórmula

$$r(x) = \frac{q'(x)}{q(x)} - \frac{p'(x)}{p(x)} \quad (1)$$

onde p é a densidade de probabilidade neutra ao risco e q a subjetiva, para opções de compra e venda européias e, usando séries temporais de minuto a minuto ou diárias, conclui que no pós-crash de 1987 r(x) cruza o eixo horizontal de baixo para cima em torno do ponto x=1 (lucro zero), exibindo assim o fenômeno chamado de *aversão a perdas*. Acima de tudo, esse estudo mostra que a taxa de aversão ao risco não é constante (ver a figura 1).

A utilidade CRRA tem dois problemas: um único parâmetro, o que dificulta seu encaixe em duas equações, e o fato de supor taxa relativa de aversão ao risco constante. Por que

9 ¹No model has yet been able to account for the equity premium with low risk aversion, and Campbell and Cochrane (1999) offer some reasons why this is unlikely ever to be achieved. So we may have to accept high risk aversion, at least for reconciling aggregate consumption with market returns in this style of models. [...] One never can tell when a striking new insight will emerge, but I can tell that new twists in the standard framework are attracting less attention.

Figura 1: Aversão absoluta ao risco variável constatada empiricamente para derivativos. FONTE: Jackwerth (1997).

não usar, por exemplo, uma utilidade CARA (constant absolute risk aversion)? Swan (2006) a usa e afirma que recentemente ela tem voltado ao gosto dos pesquisadores desta área.

Mas-Colell *et al* (1995, p. 188, exemplo 6.C.2) mostram que utilidades côncavas induzem o investidor a reservar sempre uma parte de seu capital, por menor que seja, para investimentos de risco, desde que atuarialmente vantajosos (retorno esperado maior do que o investido); no caso de utilidades CRRA, essa parte é um percentual constante do investimento total e, no caso de utilidades CARA, é um valor constante. Entretanto, há quem compre bilhetes de loterias...

Friedman e Savage (1948) já chamavam a atenção para o paradoxo que era o fato de pessoas comprarem bilhetes de loteria (cujo retorno esperado é menor do que o valor pago por eles, sendo, portanto, atuarialmente desvantajosos) e ao mesmo tempo contratarem seguros (pagando mais pelo prêmio do que o valor esperado do prejuízo); no primeiro caso, tem-se um comportamento amante do risco e, no segundo, averso a ele; propuseram, então, o uso de funções-utilidades que contivessem convexidades locais. Markowitz (1952) vai um pouco além, propondo que o ponto que separa a parte convexa da côncava na utilidade seja dependente do nível de riqueza do agente econômico.

Kahneman e Tversky (1979) propuseram a chamada *prospect theory*. Ela supõe que as pessoas tomam decisões com base em metas, definidas por uma média e uma variância de um valor a ser atingido (LICALZI, 2003; BARBERIS, 2001); nesse caso, sempre que

a densidade de probabilidade subjetiva do valor perseguido for unimodal, a utilidade correspondente terá o formato S, o que explica-se como uma predisposição das pessoas a correrem riscos para atingirem ou recuperarem uma meta pré-estabelecida e uma aversão ao risco, quando se trata de ultrapassá-la. Outra maneira de ver isso é a tendência das pessoas de suavizarem seu consumo, isto é, de evitar grandes oscilações dele, o que pressupõe a existência de um nível com o qual sentem-se confortáveis.

A maior ou menor disposição para correr riscos depende não apenas da loteria em consideração, mas também de quantas vezes se vai poder jogar nela (se infinitas, a neutralidade ao risco é a consequência lógica), o que depende do cacife de que se dispõe. Arriscar um mês de salário talvez seja viável; um ano, só com um prêmio de risco muito alto. O fato é que em qualquer lugar do mundo pessoas físicas e jurídicas são amantes do risco, quando a quantia colocada em jogo é pequena em comparação com o total de que se dispõe. Benarzi e Thaler (1995) chamam a atenção para esse tipo de fenômeno, a que denominam "aversão míope a perdas" e propõem - também na linha da *prospect theory* - uma utilidade em S centrada no consumo anterior.

Hamo e Heifetz (2001) propõem uma explicação para o surgimento espontâneo de utilidades em S entre os membros de uma população, usando um modelo de jogos evolutivos. Mostram matematicamente que a sociedade incentiva seus membros a investirem parte de seus recursos em atividades atuarialmente desvantajosas, porque isso diminui o risco sistêmico decorrente da aposta coletiva em uma mesma direção, embora às custas do aumento do risco idiosincrático, desvantajoso para o indivíduo que nele incorre. A criação dessas funções-utilidades subjetivas com formato em S dar-se-ia, no nível individual, pela tradição familiar (propagação de pais para filhos) e se manifestaria coletivamente pelo fato do jogo evolutivo entre indivíduos com os mais diversos tipos de utilidades resultar na eliminação gradual daqueles cuja utilidade não tem o formato em S, de modo que, a longo prazo, 100% da população passa a ser constituída por pessoas com esse tipo de utilidade.

Uma dúvida que poderia surgir é se essa classe de utilidades destruiria o equilíbrio econômico, já que os teoremas clássicos de existência baseiam-se em utilidades côncavas. Xi (2007) prova que, sob condições muito amplas, o equilíbrio de Arrow-Debreu continua a existir, quando a utilidade tem o formato de S.

Esta tese trata do uso de utilidades com a propriedade denominada na literatura de "formação de hábito".

As utilidades com formação de hábito (caso das com formato em S que acompanham o nível da série de consumo) resolvem o *riskfree puzzle*, porque estabelecem o que Mehra e

Cochrane denominam uma "alta aversão a variação do consumo" em torno do consumo *per capita*. Entretanto, a utilidade de Constantinides e sua versão discreta exibida por Cochrane (2005a, p. 468) sofre de três problemas:

1. O consumo tem de estar sempre acima do nível $K = x_t$, pois a utilidade não é definida aí (o denominador zera, enquanto o numerador permanece finito). Esse nível ora é referido como nível de consumo habitual ora como nível de subsistência. Se é habitual, o consumo deveria oscilar em torno dele, ficando às vezes acima e às vezes abaixo. Se é de subsistência, por que seu valor, em dólares constantes do ano 2000, passa de US\$5 mil/ano em 1933 a US\$25 mil/ano em 2004? Afinal, um americano pode viver atualmente com 5 mil dólares por ano ou precisa de no mínimo 25 mil?
2. O parâmetro γ tem de ser um inteiro par, para que a utilidade seja bem definida. Isso elimina a maior parte da flexibilidade da utilidade.
3. Sua função $s(c)$ (coeficiente de aversão relativa ao risco - eq. 146) não é integrável, pois $\int_0^K \frac{c^\gamma}{(c-K)} dc = \infty$.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas palavras de Cochrane (2005b), "a quantidade de tinta que já se gastou para tentar resolver os *equity premium puzzles* daria para afundar o Titanic".

O valor anormalmente alto da taxa de aversão relativa ao risco foi primeiro notado por Grossman e Shiller (1981). Em seguida, Hansen e Singleton (1983) confirmaram essa observação e, finalmente, o artigo de Mehra e Prescott (1985) teve o efeito de estabelecer o paradoxo como uma área de pesquisa merecedora de atenção.

A figura 2 (de autoria de Rajnish Mehra) mostra as diferenças históricas entre a rentabilidade média das ações e a das aplicações de renda fixa no mercado americano.

	% real return on a market index	% real return on a relatively riskless security	% risk premium
Time period	Mean	Mean	Mean
1802-1998	7.0	2.9	4.1
1889-2000	7.9	1.0	6.9
1889-1978	6.98	0.8	6.18
1926-2000	8.7	0.7	8.0
1947-2000	8.4	0.6	7.8
Source: 1802-1998 from Siegel (1998), 1889-200 from Mehra & Prescott (1985). Data updated by the authors. The rest are the authors' estimates.			

Figura 2: Prêmio de risco em diversos períodos

A figura 3 mostra que o paradoxo não é um fenômeno exclusivo dos EUA, mas estende-se aos países da OCDE.

O prêmio de risco do mercado acionário americano aumentou bruscamente de 4% para 9% a partir de 1933, com o abandono do padrão ouro pelo governo daquele país. As conseqüências de longo prazo ficam claras nos gráficos da figura 4.

A figura 5 mostra que a série temporal de retornos anuais do S&P500 é razoavelmente estacionária.

A figura 6 mostra a série de retornos de um ativo sem risco nos EUA.

A queda no nível da série da figura 6 explica o aumento do prêmio de risco a partir de 1933. O fato é que, pela teoria atual, a diferença média entre o retorno das ações e o dos títulos de renda fixa deveria ser de no máximo 1%. Nos dizeres de Mehra "Donde a viabilidade de usar-se essa classe de modelos para qualquer avaliação

Country	Time period	% real return on a market index	% real return on a relatively riskless security	% risk premium
		Mean	Mean	Mean
U.K	1947-1999	5.7	1.1	4.6
Japan	1970-1999	4.7	1.4	3.3
Germany	1978-1997	9.8	3.2	6.6
France	1973-1998	9.0	2.7	6.3
Sweden	1919-2003	11.1	5.6	5.5
Australia	1900-2000	13.3	4.6	8.7

Figura 3: Prêmio de risco nos países da OCDE (FONTE: Mehra)

Figura 4: Distanciamento no longo prazo entre as rentabilidades das aplicações (FONTE: Mehra 2005).

Figura 5: Série de retornos anuais do S&P500

Figura 6: Série de retornos de um ativo sem risco

quantitativa, digamos, por exemplo, para medir as implicações para o bem-estar de políticas alternativas de estabilização, estar sujeita a questionamentos. Por essa razão, ao longo dos últimos 20 anos, tentativas de resolver o paradoxo tornaram-se um ímpeto importante nas pesquisas em finanças e economia."²

Mehra classifica as tentativas de resolver esse problema em 7 linhas de pesquisa:

1. Modificação da função utilidade.
2. Uso de distribuições de probabilidade que modelam explicitamente a ocorrência de eventos raros.
3. *Survival bias* (empresas que desaparecem saem das carteiras de ações).
4. Mercados incompletos
5. Imperfeições de mercado.
6. Participação limitada de consumidores no mercado de ações.
7. Problemas de agregação temporal.

Algumas pesquisas envolvendo a mudança da função utilidade são (MEHRA, 2003):

Nason (1988): limite inferior variante no tempo; Epstein e Zin (1991): utilidade recursiva; Constantinides (1990): formação de hábito; Campbell e Cochrane (1995): hábito e aversão ao risco variante no tempo; Hansen *et al* (1999): tomada robusta de decisão; Barberis *et al*: teoria de prospectos.

Weil (1989) mostra que a utilidade de Epstein-Zin-Weil (inspirada no trabalho de Kreps e Porteus (1978)) sofre de um *risk free puzzle*, como ocorre com a utilidade potência (CRRA). Mehra afirma que, nos modelos de formação de hábito e de consumo relativo ou de subsistência, a aversão ao risco efetiva permanece alta e o sucesso em explicar o paradoxo é limitado.

Algumas pesquisas envolvendo a incorporação de choques de renda individuais e mercados incompletos são: Mankiw (1986), Telmer (1993), Heaton & D.Lucas (1996), Constantinides & Duffie (1996), Storesletten *et al* (2004). Mehra afirma que faz pouca diferença considerar mercados completos ou incompletos, o prêmio de risco continuando alto em ambos os casos.

Algumas pesquisas que introduzem fricções, tais como custos de transação ou de empréstimo ou restrições de crédito em economias com risco de renda não passíveis de serem segurados são (MEHRA, op. cit.): Aiyagari e Gertler (1991), Lucas (1994), Heaton e Lucas (1996), Bansal e Coleman (1996), Alvarez e Jermann (2000). Algumas pesquisas fora da escola das expectativas racionais são (MEHRA, op. cit.): Kurz (1988)

²Hence the viability of using this class of models for any quantitative assessment, say, for instance, to gauge the welfare implications of alternative stabilization policies, is thrown open to question. For this reason, over the last 20 years or so, attempts to resolve the puzzle have become a major research impetus in finance and economics.

(crenças racionais), Kurz e Beltratti (1996), Barberis *et al* (1998). Alguns modelos que incorporam um estado de desastre e viés de sobrevivência são (MEHRA, op. cit.): Rietz (1988), Brown *et al* (1995) e Jorion e Goetzmann (1999). Um modelo que incorpora efeitos de ciclo de vida (pessoas mais velhas, em geral, têm mais patrimônio, de modo que parte de sua renda vem dele) é o de Constantinides *et al* (2002).

Mehra mostra que o paradoxo só existe a longo prazo e ex-post, de modo que alegações de que ele não existe usando modelos condicionais ou ex-ante não fazem sentido e, em julho de 2005, lança um repto: "Antes de descartarmos o prêmio, não só precisamos entender os fenômenos observados, como também necessitamos de uma explicação plausível sobre por que o futuro deve diferir do passado."³

Uma excelente revisão geral dos paradoxos aqui tratados é o trabalho recente de Cochrane (2005b).

Alguns trabalhos de brasileiros também dão contribuições à solução do problema. Araújo *et al* (2005) deduzem um estimador para o fator estocástico de desconto M_t para cada t , baseado apenas nas séries de retorno dos diversos ativos da economia e o compara com os resultados baseados em algumas utilidades importantes. Catalão e Yoshino (2004) realizam várias estimativas da taxa de aversão relativa ao risco usando GMM com muitas diferentes combinações de variáveis instrumentais. Pessoa *et al* (2006) aplicam um modelo markoviano à série de consumo brasileira e a utilidade de Epstein e Zin modificada para incluir desapontamento ao risco generalizado e concluem que conseguem explicar os momentos das séries relevantes. Yoshino (2005) deduz M_t para o caso inflacionário, baseado na utilidade CRRA e incluindo *shopping time* (custo de transação devido à inflação) e aplica ao caso brasileiro. Cysne (2006) analisa as séries brasileiras entre 1992 e 2004 e conclui que no Brasil também existe um *equity premium puzzle*.

O artigo mais próximo do enfoque desta tese é o de Campbell e Cochrane (1995). Os autores retomam a utilidade de Constantinides (1990) e a usam em um modelo de tempo discreto suposto multitemporal

$$\max_{\{c_t\}} E_0 \left(\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, X_t) \right) \quad (2)$$

X_t é a série de consumo C_t suavizada (o equivalente a ζ_t , na presente tese). A utilidade U é definida por

$$U(C_t, X_t) = \frac{(C_t - X_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (3)$$

³Before we dismiss the premium, not only do we need to understand the observed phenomena but we also need a plausible explanation as to why the future is likely to be any different from the past.

Trata-se de uma óbvia generalização da utilidade potência, a diferença sendo que o agente deriva utilidade não mais do nível absoluto do seu consumo, mas da distância entre este e um valor "habitual". As equações geradoras de X_t o fazem depender de valores anteriores do consumo de uma maneira engenhosamente concebida para que X_t seja sempre menor do que C_t . A seção 5.3 mostra o porquê dessa necessidade bem como as outras deficiências dessa função-utilidade. Para evitar entrar em um problema complicado de programação dinâmica, os autores afirmam que o modelo deles é de hábito externo, isto é, X seria o consumo *per capita* suavizado, enquanto C é o consumo de um agente qualquer. No entanto, nas 40 mil simulações que fazem, C parece ser o próprio consumo *per capita*, já que os autores não modelam explicitamente a diferença entre um consumidor individual e o agregado (aquele deve ter uma série de consumo mais volátil do que este, entre outras diferenças). Ora, nesse caso, a supor-se o modelo multitemporal, os problemas de programação dinâmica voltam. Pode-se amenizar essa questão modificando o modelo para um repetido de dois tempos; ainda assim, o fato de X_t depender de C_{t-1} modifica as equações de apreçamento, como mostro na seção 7.1. Afora essas incongruências teóricas, o modelo funciona na prática, porque a maneira como X_t é estimado em função da série $\{C_t\}$ é invisível para os cálculos (na presente tese, em vários casos usei o filtro de Hodrick-Prescott, por exemplo, que usa até valores futuros da série, para suavizá-la). Várias conclusões interessantes são tiradas pelos autores. Primeiramente, denominam a razão $S = (C - X)/C$ de "superavit relativo de consumo" e expressam os resultados em termos dele. Com $\gamma = 2,4$ e $\beta = 0,97$, chegam a um valor estacionário $S=0,05$ ⁴, de modo que a ARR (Aversão Relativa ao Risco) no estado estacionário é $\gamma/S \simeq 50$. A esse mesmo valor chegou-se nesta tese, usando a utilidade Cauchy modificada. Ambas utilidades - a minha e a dos referidos autores - resolvem o *risk-free puzzle*, porque, segundo eles, aumentam o "custo de bem-estar das flutuações". Mehra (2003) cunha a expressão "aversão a variação do consumo", para diferenciar a ARR do parâmetro γ .

O artigo de Hamos e Heifetz (2001) é importante, porque fornece uma justificativa mais sólida para o uso de utilidades em S . O que o distingue dos trabalhos sobre teoria de prospectos é o fato de deduzir matematicamente, a partir da teoria de jogos evolucionários, o formato da utilidade. O modelo usa tempo discreto e considera uma população, cujas gerações duram apenas de t para $t+1$. Um indivíduo se reproduz de um tempo para o seguinte, se, no tempo anterior, ele tiver sido bem sucedido - caso contrário, morre sem deixar descendentes; seu problema, então, é maximizar o valor esperado da utilidade do seu ganho, o que é expresso matematicamente por

⁴ $S = 0,05$ implica em $X = 0,95 C$, onde C é o consumo per capita; assim, se o modelo for de hábito externo e X for o nível de subsistência, o Bureau of Census está contando 150 milhões de americanos a mais, já que a mediana da distribuição do consumo daquele país é $m = 0,7C$!

	estado bom (prob=1-q)	estado ruim (prob=q)
invest. conserv. (investe 1-s)	1	0
invest. inovador (investe s)	$\begin{pmatrix} 1+c \text{ com prob. } p \\ 1-c \text{ com prob. } 1-p \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+c \text{ com prob. } p \\ 1-c \text{ com prob. } 1-p \end{pmatrix}$

Figura 7: Matriz de perdas e ganhos do jogo evolucionário que justifica utilidades em "S". FONTE: Hamos e Heifetz (2001).

$$\max_{s \in [0,1]} pU(1+sc) + (1-p)U(1-sc) \quad (4)$$

onde $U(x)$ é sua função-utilidade, onde s é a proporção de recursos que ele investe em uma atividade inovadora e atuarialmente desvantajosa (valor esperado do retorno menor do que o investimento) e p é a probabilidade dessa atividade render $1+c$ ($c>0$, $p<1/2$). Ele usa, portanto, uma estratégia mista no jogo definido pela tabela da figura 7.

Se a função-utilidade passar de geração para geração (por uma combinação de genética e educação), indivíduos cuja função-utilidade resulte sempre na escolha ótima para s , quaisquer que sejam os valores de p e c , acabarão, a longo prazo, substituindo todos os outros tipos, passando a constituir 100% da população. Os autores provam matematicamente que as funções U que gozam dessa propriedade obedecem à equação

$$\frac{U'(1+x)}{U'(1-x)} = \frac{x+q}{x-q}, \quad q < x < c, q \ll 1 \quad (5)$$

Mostram que utilidades assim têm formato em S (com um pulo infinito no ponto de inflexão, mas que pode ser ignorado - talvez a introdução de ruídos no modelo elimine a necessidade desse pulo).

3 O MODELO

Supondo a economia em equilíbrio, o agente representativo é indiferente entre os ativos. Assim, a diferença de 6 pontos percentuais entre o S&P500 e as T-bills deve ser explicada pela diferença de risco entre esses dois ativos. Isso significa que a aversão relativa ao risco do agente é de tal ordem que ele se dispõe a trocar $(1 + \varepsilon)x$ que deverá ganhar no ano seguinte - onde ε é uma variável aleatória de média zero e desvio padrão 0,20 (correspondente aos 20% de desvio padrão do retorno das ações) - por $(1 - \pi)x$, onde $\pi = 0,06$ é a perda de rendimento compensada pela segurança das notas do tesouro (ativo sem risco). Essa indiferença é expressa pela igualdade (MAS-COLELL, 1995, cap. 6).

$$E\{u[(1 + \varepsilon)x]\} = u[(1 - \pi)x] \quad (6)$$

Expandindo os dois lados em série de Taylor e supondo que σ_ε e π sejam pequenos, vem

$$u[(1 + \varepsilon)x] = u(x + x\varepsilon) \simeq u(x) + u'(x)x\varepsilon + \frac{1}{2}u''(x)x^2\varepsilon^2 \quad (7)$$

$$E[u(x + x\varepsilon)] \simeq u(x) + u'(x)x E(\varepsilon) + \frac{1}{2}u''(x)x^2 E(\varepsilon^2) \quad (8)$$

$$u[x - \pi x] \simeq u(x) - u'(x)\pi x \quad (9)$$

Mas $E(\varepsilon) = 0$. Então:

$$E[u(x + x\varepsilon)] = u(x) + \frac{1}{2}u''(x)x^2 E(\varepsilon^2) \quad (10)$$

$$u[x - \pi(x)] = u(x) - u'(x)\pi(x) \quad (11)$$

E, portanto,

$$u(x) + \frac{1}{2}u''(x)x^2 E(\varepsilon^2) = u(x) - u'(x)\pi x \quad (12)$$

$$\frac{1}{2}u''(x)x^2 \sigma_\varepsilon^2 = -u'(x)\pi x \quad (13)$$

$$\pi = -\frac{1}{2} \frac{x u''(x)}{u'(x)} \sigma_\varepsilon^2 \quad (14)$$

onde $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon^2)$

Agora, $s = -\frac{x u''(x)}{u'(x)}$ é a chamada *taxa de aversão relativa ao risco*. Desse modo, tem-se

$$s = \frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} \simeq \frac{2 \times 0,06}{0,2^2} = \frac{0,12}{0,04} = 3 \quad (15)$$

Considera-se normal s entre 0 e 5.

O problema surge quando se tenta ligar finanças à economia dita real. Afinal, a utilidade que o agente deriva do dinheiro é a utilidade do consumo que ele lhe proporciona.

Seguindo o modelo usado por Cochrane (2005a, cap 1), suponha que um agente econômico qualquer tenha uma utilidade sobre os valores presente e futuro de consumo do tipo

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \quad (16)$$

onde $E_t(\cdot) = E[\cdot|I_t]$

I_t sendo o conjunto de informações disponíveis a ele no instante t ; $\beta \in (0, 1)$ sendo um fator de desconto subjetivo, que mede o grau de impaciência do agente.

O problema consiste em decidir quanto investir agora (e, portanto, quanto de consumo se privar agora), de modo a maximizar a utilidade total $U(c_t, c_{t+1})$. Assim, dispondo inicialmente de um dote e_t , ele comprará uma quantidade ξ de ativos ao preço unitário p_t . No período seguinte, poderá consumir $c_{t+1} = x_{t+1}\xi$, onde x_{t+1} é o ganho unitário resultante da aplicação (novo valor unitário do ativo mais eventuais dividendos recebidos por unidade). O problema de otimização resultante fica:

$$\max_{\xi} U = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \quad (17)$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} c_t = e_t - p_t \xi \\ c_{t+1} = x_{t+1} \xi \end{cases} \quad (18)$$

Substituindo as restrições na função-objetivo, vem:

$$U = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] = u(e_t - p_t \xi) + \beta E_t[u(x_{t+1} \xi)] \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\xi} U = -p_t u'(c_t) + \beta E_t[x_{t+1} u'(c_{t+1})] = 0 \quad (20)$$

Donde,

$$p_t u'(c_t) = \beta E_t[x_{t+1} u'(c_{t+1})] \quad (21)$$

$$p_t = \frac{1}{u'(c_t)} \beta E_t[x_{t+1} u'(c_{t+1})] \quad (22)$$

Ou, a chamada equação básica de apreçamento

$$p_t = E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}] \quad (23)$$

já que β é constante e, no instante t , c_t é conhecido e não aleatório, podendo, assim, ambos entrarem em $E_t(\cdot)$.

A esse preço, para o agente é indiferente comprar qualquer quantidade ξ do ativo. O mesmo ocorre para qualquer outro ativo disponível para compra; desde que a utilidade de consumo que se perde no primeiro período seja igual à que se ganha no segundo (descontada pelo fator β), é indiferente investir ou não no ativo.

Dividindo ambos os membros da eq. 23 por p_t , obtém-se

$$E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \frac{x_{t+1}}{p_t}] = 1 \quad (24)$$

Ou

$$E[M_{t+1} R_{t+1} | I_t] = 1 \quad (25)$$

onde I_t já foi definido acima, $R_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t}$ é o retorno unitário do ativo e $M_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ é o chamado fator de desconto estocástico.

Subtraindo-se duas quaisquer dessas equações uma da outra, obtém-se

$$E[M_{t+1} (R_{t+1}^i - R_{t+1}^j) | I_t] = 0 \quad (26)$$

para qualquer par (i, j) de ativos.

Como $M_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$, tem-se, então,

$$E[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (R_{t+1}^i - R_{t+1}^j) | I_t] = 0 \quad (27)$$

Ou

$$E[Q_{t+1} (R_{t+1}^i - R_{t+1}^j) | I_t] = 0 \quad (28)$$

onde $Q_{t+1} = \frac{M_{t+1}}{\beta}$

Com a utilidade CRRA, $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ tem-se $u'(c) = c^{-\gamma}$. Donde

$$Q_{t+1} = \frac{U(c_{t+1})}{U(c_t)} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \quad (29)$$

3.1 Prêmio de risco

Pode-se explicitar o prêmio de risco $E(R_i^e) = E(R^i - R^f)$ da seguinte maneira:

$$\text{cov}(Q, R_i^e) = E(QR_i^e) - E(Q)E(R_i^e) = -E(Q)E(R_i^e) \quad (30)$$

pois $E(QR_i^e) = 0$

Logo,

$$E(R_i^e) = -\frac{\text{cov}(Q, R_i^e)}{E(Q)} \quad (31)$$

A equação 31, portanto, é equivalente a $E(QR^e) = 0$ e aplica-se ao excesso de retorno de qualquer ativo, se a economia estiver em equilíbrio. Em particular, aplica-se ao portfolio de mercado

$$E(R^e) = -\frac{\text{cov}(Q, R^e)}{E(Q)} \quad (32)$$

Os retornos médios dos ativos podem ser explicitados de maneira análoga.

Por definição de covariância, tem-se:

$$E(R) = \frac{E(QR) - \text{cov}(Q, R)}{E(Q)}$$

Usando

$$E(QR) = \frac{1}{\beta} \quad (33)$$

vem

$$E(R^i) = \frac{\frac{1}{\beta} - \text{cov}(Q, R^i)}{E(Q)} \quad (34)$$

A equação 34 equivale, então, a $E(QR^i) = \frac{1}{\beta}$. Em particular, ela vale para o ativo sem risco:

$$E(R^f) = \frac{\frac{1}{\beta} - \text{cov}(Q, R^f)}{E(Q)} \quad (35)$$

Várias fórmulas podem ser obtidas, dependendo das hipóteses que se façam. Frequentemente supõe-se $\text{cov}(Q, R^f) = 0$. No entanto, como se vê na discussão que vem depois da equação 46 abaixo, não há justificativa teórica para essa hipótese.

Seja $\rho(M, R)$ o coeficiente de correlação linear entre M e R. Então

$$\rho(M, R) = \frac{\text{cov}(M, R)}{\sigma_M \sigma_R} \quad (36)$$

onde σ_M e σ_R são os desvios padrões de M e R. Por extenso, tem-se

$$\rho(M, R) = \frac{E(MR) - E(M)E(R)}{\sigma_M \sigma_R} \quad (37)$$

ou

$$E(MR) - E(M)E(R) = \sigma_M \sigma_R \rho(M, R) \quad (38)$$

Isolando $E(R)$ em 38, vem

$$E(M)E(R) = E(MR) - \sigma_M \sigma_R \rho(M, R) \quad (39)$$

$$E(R) = \frac{E(MR) - \sigma_M \sigma_R \rho(M, R)}{E(M)} \quad (40)$$

Ou

$$E(R) = \frac{E(MR) - \text{cov}(M, R)}{E(M)} \quad (41)$$

Ou, lembrando que $M = \beta Q$ e que $\text{cov}(\alpha X, Y) = \alpha \text{cov}(X, Y)$, $\forall \alpha$,

$$E(R) = \frac{E(QR) - \text{cov}(Q, R)}{E(Q)} \quad (42)$$

Portanto, particularizando para o ativo sem risco,

$$E(R^f) = \frac{E(QR^f) - \text{cov}(Q, R^f)}{E(Q)} \quad (43)$$

Subtraindo a equação 40 dela própria particularizada para $R = R^f$, vem:

$$E(R - R^f) = \frac{1}{E(M)} \{E[M(R - R^f)] - \sigma_M [\sigma_R \rho(M, R) - \sigma_{R^f} \rho(M, R^f)]\}$$

Ou, definindo o excesso de retorno $R^e = R - R^f$,

$$E(R^e) = \frac{1}{E(M)} \{E(MR^e) - \sigma_M [\sigma_R \rho(M, R) - \sigma_{R^f} \rho(M, R^f)]\} \quad (44)$$

Ou, ainda,

$$E(R^e) = \frac{1}{E(M)} [E(MR^e) - \text{cov}(M, R) + \text{cov}(M, R^f)] \quad (45)$$

Ou,

$$E(R^e) = \frac{1}{E(Q)} [E(QR^e) - \text{cov}(Q, R) + \text{cov}(Q, R^f)] \quad (46)$$

Agora, $E_t(M_{t+1}R_{t+1}) = 1 = E_t(M_{t+1}R_{t+1}^f) = E_t(M_{t+1})R_{t+1}^f$, já que o retorno R^f do ativo livre de risco é prefixado de um tempo para o seguinte. Então, denotando a esperança temporal por E^T ($=\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T$), $E(MR^f) = E^T[E_t(M_{t+1}R_{t+1}^f)] =$

$$E^T[E_t(M_{t+1}R_{t+1}^f)] = E^T[E_t(M_{t+1})R_{t+1}^f].$$

$$\text{Ou, } E_t(M_{t+1})R_{t+1}^f = 1 \implies E_t(M_{t+1}) = \frac{1}{R_{t+1}^f} \implies E(M) = E\left(\frac{1}{R^f}\right) \implies$$

$$E(MR^f) = \frac{E(M)}{E\left(\frac{1}{R^f}\right)} \quad (47)$$

Da desigualdade de Jensen, $E\left(\frac{1}{R^f}\right) \geq \frac{1}{E(R^f)}$, vem

$$E(MR) \leq E(M)E(R^f) \quad (48)$$

Escrevendo $R^f = 1 + \varepsilon$, tem-se $\frac{1}{R^f} = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Então, para $\varepsilon \ll 1$, $\frac{1}{R^f} = \frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon$. Onde $E\left(\frac{1}{R^f}\right) \simeq E(1 - \varepsilon)$. Assim,

$$\frac{E(M)}{E\left(\frac{1}{R^f}\right)} \simeq \frac{E(M)}{E(1 - \varepsilon)} = \frac{E(M)}{1 - E(\varepsilon)} \quad (49)$$

Mas, $\varepsilon \ll 1 \rightarrow E(\varepsilon) \ll 1$; então

$$\frac{1}{1 - E(\varepsilon)} \simeq 1 + E(\varepsilon) = E(1 + \varepsilon) = E(R^f) \quad (50)$$

Conclui-se que, para Δt pequeno, $E(MR^f) \simeq E(M)E(R^f)$.

Assim, assumindo que os processos estocásticos $E_t(M_{t+1})$ e R_{t+1}^f são desconhecidos, no sentido de $E^T[E_t(M_{t+1})R_{t+1}^f] = E^T[E_t(M_{t+1})]E^T(R_{t+1}^f)$ (o que não encontra justificativa econômica, já que a taxa de juros é prefixada com base nas informações disponíveis I_t , sendo, portanto, correlacionada com ela) ou que Δt é pequeno (o que proíbe amostragem com intervalos muito grandes), pode-se usar a equação $E(MR^f) = E(M)E(R^f)$ para obter fórmulas alternativas para os valores esperados dos excessos de retorno R_i^e e a taxa de juros R^f .

Substituindo na equação 38, vem:

$$E(M)E(R^f) - E(M)E(R) = \sigma_M \sigma_R \rho(M, R) \quad (51)$$

ou

$$E(R) - E(R^f) = -\rho(M, R) \frac{\sigma_M \sigma_R}{E(M)} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \text{Agora, } \rho(M, R) &= \frac{E(MR) - E(M)E(R)}{\sigma_M \sigma_R} = \frac{E(\beta QR) - E(\beta Q)E(R)}{\sigma_{\beta Q} \sigma_R} = \\ &= \frac{\beta[E(QR) - E(Q)E(R)]}{\sigma_{\beta Q} \sigma_R} = \frac{E(QR) - E(Q)E(R)}{\sigma_Q \sigma_R} = \rho(Q, R) \end{aligned}$$

$$E \frac{\sigma_M \sigma_R}{E(M)} = \frac{\sigma_{\beta Q} \sigma_R}{E(\beta Q)} = \frac{\sigma_Q \sigma_R}{E(Q)}$$

Então, a equação 52 pode ser escrita como

$$E(R) - E(R^f) = -\rho(Q, R) \frac{\sigma_Q \sigma_R}{E(Q)} \quad (53)$$

Ou seja, o prêmio de risco, $E(R^e) = E(R) - E(R^f)$ e o retorno, $E(R)$, podem ser estimados independentemente de β usando 53.

Também a partir da 52 tem-se:

$$E(R) - E(R^f) = -\rho(M, R) \frac{\sigma_M \sigma_R}{E(M)} = -cov(M, R) \frac{1}{E(M)}$$

$$\text{Agora, } cov(M, R - R^f) = E^T[cov_t(M_{t+1}, R_{t+1} - R_{t+1}^f)] = E^T[cov_t(M_{t+1}, R_{t+1})] = cov(M, R)$$

já que $R_{t+1}^f | I_t$ é uma constante e $cov(X, Y+a) = cov(X, Y)$.

Então,

$$E(R) - E(R^f) = -cov(M, R - R^f) \frac{1}{E(M)}$$

$$\text{Mas } E(MR^f) = E(M)E(R^f) = 1 \Rightarrow E(M) = \frac{1}{E(R^f)}$$

Logo, pode-se escrever

$$E(R^e) = -\beta E(R^f) cov(Q, R^e) \quad (54)$$

Da equação (52) resulta a chamada desigualdade de Hansen-Jaganatan

$$\left\| \frac{E(R) - R^f}{\sigma_R} \right\| < \frac{\sigma_M}{E(M)}$$

já que $-1 \leq \rho \leq 1$.

A hipótese de lognormalidade para $G_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t}$ e o uso da utilidade CRRA resultam na aproximação (COCHRANE, 2005a, p. 23):

$$\frac{\sigma(M)}{E(M)} \cong \gamma \sigma(\Delta \ln C) \quad (55)$$

onde $\Delta \ln C = \ln C_{t+1} - \ln C_t = \ln \frac{C_{t+1}}{C_t}$

Na última metade do século XX, considerando-se uma carteira representativa do mercado acionário americano (índice Dow Jones ou SP500, por exemplo), tem-se $E(R) - R^f \simeq 0.09$ e $\sigma(R) \simeq 0.16$. Isso implica em $\gamma \sigma(\Delta \ln c) \geq \frac{0.09}{0.16} = .5625$ (razão de Sharpe). Por outro lado, $\sigma(\ln \frac{C_{t+1}}{C_t}) \simeq 0.01$ (onde c aqui é o consumo agregado americano de bens não duráveis e serviços) nesse período. Assim, para que a desigualdade seja satisfeita, é preciso que $\gamma \geq 56$, que, sendo muito maior do que o valor de 2,5 supra-mencionado, corresponde a uma taxa de aversão relativa ao risco exageradamente alta COHRANE, 2005a, cap. 1).

Esse é o "equity premium puzzle". O "risk free puzzle" refere-se à impossibilidade do mesmo $\gamma = 56$ tornar verdadeira a equação

$$E(MR_f) = 1 \quad (56)$$

3.2 Hipótese de lognormalidade

A equação básica de apreçamento (25), em notação mais simples,

$$E_t[M_{t+1}R_{t+1}] = 1 \quad (57)$$

pode ser escrita, como

$$E_t[e^{\ln(M_{t+1}R_{t+1})}] = 1 \quad (58)$$

ou

$$E_t[e^{\ln M_{t+1} + \ln R_{t+1}}] = 1 \quad (59)$$

Agora, se as variáveis aleatórias $\ln M_{t+1}$ e $\ln R_{t+1}$ puderem ser aceitas como gaussianas, tem-se,

$$E_t[e^{\ln(M_{t+1}R_{t+1})}] = \exp\{E_t[\ln(M_{t+1}R_{t+1})] + \frac{1}{2}\text{var}_t[\ln(M_{t+1}R_{t+1})]\} \quad (60)$$

Definindo-se $m = \ln M$ e $r = \ln R$, vem

$$E_t[M_{t+1}R_{t+1}] = \exp\left\{E_t[m_{t+1} + r_{t+1}] + \frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1} + r_{t+1}]\right\} \quad (61)$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os membros da equação básica, ela pode, então, ser escrita como

$$E_t[m_{t+1} + r_{t+1}] + \frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1} + r_{t+1}] = 0 \quad (62)$$

ou, explicitando o retorno esperado condicional,

$$E_t[r_{t+1}] = -\frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1} + r_{t+1}] - E_t[m_{t+1}] \quad (63)$$

No caso do ativo sem risco, a equação (63) fica

$$r_{t+1}^f = -\frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1}] - E_t[m_{t+1}] \quad (64)$$

pois $\text{var}_t[m_{t+1} + r_{t+1}^f] = \text{var}_t[m_{t+1}]$, já que o retorno dos títulos é prefixado, de modo que $r_{t+1}^f|I_t$ não é uma variável aleatória, mas sim uma constante.

Usando o superscrito i para denotar um ativo de risco qualquer, tem-se, subtraindo (64) de (63),

$$E_t[r_{t+1}^i] - r_{t+1}^f = -\frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1} + r_{t+1}^i] + \frac{1}{2}\text{var}_t[m_{t+1}] \quad (65)$$

ou, lembrando que $\text{var}(x+y) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x,y)$,

$$E_t[r_{t+1}^i] - r_{t+1}^f = -\frac{1}{2} \{ \text{var}_t[m_{t+1}] + \text{var}_t[r_{t+1}^i] + 2\text{cov}_t(m_{t+1}, r_{t+1}^i) \} + \frac{1}{2} \text{var}_t[m_{t+1}] \quad (66)$$

que se reduz a

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] = -\frac{1}{2} \text{var}_t[r_{t+1}^i] - \text{cov}_t(m_{t+1}, r_{t+1}^i) \quad (67)$$

Supondo que as séries temporais presentes na equação (67) sejam estacionárias no sentido amplo, pode-se tomar o valor esperado temporal ($E^T[o]$) de toda a equação, obtendo-se

$$E[r^i - r^f] = -\frac{1}{2} \text{var}[r^i] - \text{cov}(m, r^i) \quad (68)$$

que é o equivalente da equação (52) usando-se os logaritmos das variáveis originais.

Partindo-se da equação (64), tem-se, aplicando a média temporal a ambos os membros,

$$E(r^f) = -\frac{1}{2} \text{var}[m] - E[m] \quad (69)$$

Agora, supondo que $\ln R^f$ seja um processo estocástico estacionário no sentido amplo e gaussiano, tem-se

$$E(R^f) = E(e^{\ln R^f}) = e^{E(\ln R^f) + \frac{1}{2} \text{var}(\ln R^f)}$$

Donde

$$\ln E(R^f) = E(\ln R^f) + \frac{1}{2} \text{var}(\ln R^f) = E(r^f) + \frac{1}{2} \text{var}(r^f)$$

Assim, usando a eq. (69),

$$\ln E(R^f) = -\frac{1}{2} \text{var}[m] - E[m] + \frac{1}{2} \text{var}(r^f) \quad (70)$$

3.3 Linearização

Substituindo na eq. (67), (obtida a partir da hipótese de lognormalidade) a fórmula de m , com a utilidade gama (ver 175),

$$m_{t+1} = \ln \beta + (a-1) \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) - b(C_{t+1} - C_t) \quad (71)$$

tem-se:

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] = -\frac{1}{2} \text{var}_t[r_{t+1}^i] - \text{cov}_t \left[\ln \beta + (a-1) \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) - b(C_{t+1} - C_t), r_{t+1}^i \right] \quad (72)$$

Ou

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] = -\frac{1}{2}var_t[r_{t+1}^i] - (a-1)cov_t\left[\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right] + bcov_t[(C_{t+1} - C_t), r^i] \quad (73)$$

Lembrando que, para $\frac{C_{t+1}}{C_t} \approx 1$, tem-se $C_{t+1} - C_t \simeq C_t \ln \frac{C_{t+1}}{C_t}$, vem

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] \simeq -\frac{1}{2}var_t[r_{t+1}^i] - (a-1)cov_t\left[\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right] + bC_t cov_t\left[\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right] \quad (74)$$

Ou:

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] \simeq -\frac{1}{2}var_t[r_{t+1}^i] + (bC_t - a + 1)cov_t\left[\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right] \quad (75)$$

Agora, com a gama invariante, não faz sentido aplicar o operador esperança temporal à equação (75), porque C_t não é um processo estocástico estacionário. Mas, com a gama variante, em que o parâmetro b é substituído por $\frac{b}{\varsigma_t}$, onde ς_t é a estimativa do consumo no período t , tem-se

$$E_t[r_{t+1}^i - r_{t+1}^f] \simeq -\frac{1}{2}var_t[r_{t+1}^i] + (b\frac{C_t}{\varsigma_t} - a + 1)cov_t\left(\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right) \quad (76)$$

Se a estimativa ς_t for não tendenciosa, tem-se $E\left(\frac{C_t}{\varsigma_t}\right) = 1$, de modo que, se C_t for descorrelatado de $cov_t\left(\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right)$, pode-se escrever

$$E[r^i - r^f] \simeq -\frac{1}{2}var[r^i] + \gamma cov(g, r^i) \quad (77)$$

onde $\gamma = b - (a - 1)$ e $g_{t+1} = \ln \frac{C_{t+1}}{C_t}$, os subscritos temporais podendo agora ser eliminados.

Do mesmo modo, a eq. (113) fica

$$E(r^f) \simeq -\ln \beta + \gamma E[g] - \frac{1}{2}\gamma^2 var[g] \quad (78)$$

Desse modo, vê-se que, sob as três aproximações usadas (lognormalidade, $C_{t+1} - C_t \simeq C_t \ln \frac{C_{t+1}}{C_t}$ e $E\left[C_t cov_t\left(\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right)\right] = E[C_t] \left[cov_t\left(\ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right), r^i\right)\right]$, as equações reduzem-se às da utilidade CRRA com $\gamma = b - (a - 1)$ (=coeficiente de aversão relativa ao risco).

Seja r^m o logaritmo do retorno do índice de mercado.

Com os dados fornecidos por Kocherlakota e usando apenas o período 1951-2001, tem-se a tabela 8.

Com os dados de French referentes ao período 1927-2005, tem-se a tabela da figura 9.

A linearização iguala todas as utilidades esperadas à CRRA, como pode ser visto pelas

S&P500 real	$r_i = \ln R_i$	R_f real	$r_f = \ln R_f$	$(R_i - R_f) * 100$
1.094895141	0.07704125	1.015393	0.0149	7.9501998
desvio padrão	0.16990311	0.028276	0.027636	17.422203
variância	0.02886707	0.0008	0.000764	
$\text{cov}[g(t), r_m(t)]$	0.00040654		ARR:	188.35692
$\text{corr}[g(t), r_m(t)]$	0.11409513		beta:	0.0110195
$E(r_m - r_f)$	0.06214157			
$\text{cov}[g(t+1), r_m(t)]$	0.00184211		ARR:	41.569225
$\text{corr}[g(t+1), r_m(t)]$	0.52834321		beta:	1.4763172

Figura 8: Coeficiente de aversão relativa ao risco (ARR) e fator de desconto subjetivo (beta) usando as equações linearizadas. Dados de Kocherlakota. Período considerado: 1951-2001.

	$g = \ln(G)$	MKT real	$r_m = \ln R_m$	RF REAL	$r_f = \ln(R_f)$
media	0.01842966	8.970962025	0.066749	0.7190633	0.00642
desvpadrão	0.03539158	20.72614022	0.201381	3.8601525	0.039116
variancia	0.00125256	429.5728882	0.040554	14.900777	0.00153
$\text{cov}[g(t-1), r_m(t)]$	-0.0008881	$\text{corr}[g(t-1), r_m(t)]$	-0.12799		
$\text{cov}[g(t), r_m(t)]$	0.00135397	$\text{corr}[g(t), r_m(t)]$	0.193126		
$\text{cov}[g(t+1), r_m(t)]$	0.00427174	$\text{corr}[g(t+1), r_m(t)]$	0.641047		
$\text{cov}[g(t+2), r_m(t)]$	0.00027531	$\text{corr}[g(t+2), r_m(t)]$	0.042734		
ARR:	18.869569				
beta:	0.81591616				

Figura 9: Com os dados de French de 1927 a 2005, tem-se o *equity premium puzzle*, mas não o *risk free puzzle*.

contas seguintes:

$$Q = \frac{M}{\beta} = \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} \quad (79)$$

$$m = \ln \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} + \ln \beta \quad (80)$$

$$q = \ln Q = \ln u'(c_1) - \ln u'(c_0) \quad (81)$$

$$\frac{\ln u'(c_1) - \ln u'(c_0)}{c_1 - c_0} \simeq \frac{d}{dc} \ln u'(c)|_{c=c_0} \quad (82)$$

Mas,

$$\frac{d}{dc} \ln u'(c) = \frac{1}{u'(c)} u''(c) = -r(c) = -\frac{1}{c} s(c) \quad (83)$$

Logo,

$$m = \ln \beta - \frac{1}{c_0} s(c_0) (c_1 - c_0) \simeq \ln \beta - \frac{1}{c_0} s(c_0) c_0 \ln \frac{c_1}{c_0} = \ln \beta - \frac{1}{c_0} s(c) c_0 g \quad (84)$$

Portanto, para $c \simeq c_0$, tem-se

$$m \simeq \ln \beta - s(c_0) g \quad (85)$$

Voltando às variáveis originais, vem:

$$M \simeq e^{\ln \beta - s(c_0) g} = \beta e^{-s(c_0) \ln G} = \beta G^{-s(c_0)} \quad (86)$$

$$M \simeq \beta \left(\frac{c_1}{c_0} \right)^{-s(c_0)} \quad (87)$$

Portanto, sob as aproximações Δt pequeno e $c(t)$ contínua, todo fator de desconto estocástico dependente exclusivamente do consumo reduz-se ao da CRRA. A dependência do fator de desconto estocástico M em relação à função-utilidade dá-se, pois, principalmente através da curvatura desta calculada em torno do consumo médio. Esse efeito é tanto mais pronunciado quanto menor o intervalo de amostragem usado, pois, então, mais próximo c_{t+1} estará de c_t (considerando-se c como consumo agregado de faixas de consumidores contendo um número grande deles e depois das devidas dessazonalizações, no caso de $\Delta t < 1$ ano).

3.4 Expansões de ordem superior

Alguns autores (BRAV *et al.*, 2002, CONSTANTINIDES; DUFFIE, 1996) usam termos além de primeira ordem em modelos de agentes heterogêneos. Os termos de ordem superior são obtidos a seguir.

Expandindo $\ln u'(c)$ em série de Taylor em torno de $c = c_0$, vem:

$$\ln u'(c) = \ln u'(c_0) + \frac{u''(c_0)}{u'(c_0)}(c - c_0) + \frac{1}{2} \frac{u'''(c_0)u'(c_0) - u''(c_0)^2}{u'(c_0)^2}(c - c_0)^2 + \dots \quad (88)$$

Para $c \simeq c_0$ vale a aproximação $c - c_0 = c_0(\frac{c}{c_0} - 1) \simeq c_0 \ln \frac{c}{c_0} = c_0 g$, onde $g = \ln G = \ln \frac{c}{c_0}$. Então, pode-se escrever

$$q = \ln \frac{u'(c)}{u'(c_0)} = \ln u'(c) - \ln u'(c_0) = + \frac{u''(c_0)}{u'(c_0)} c_0 g + \frac{1}{2} \frac{u'''(c_0)u'(c_0) - u''(c_0)^2}{u'(c_0)^2} c_0^2 g^2 + \dots \quad (89)$$

$$q = -s(c_0)g + \frac{1}{2} \left\{ \frac{u'''(c_0)}{u'(c_0)} c_0^2 - \left[\frac{u''(c_0)}{u'(c_0)} c_0 \right]^2 \right\} g^2 + \dots \quad (90)$$

$$q = -s(c_0)g + \frac{1}{2} \left\{ \frac{u'''(c_0)}{u'(c_0)} c_0^2 - s(c_0)^2 \right\} g^2 + \dots \quad (91)$$

O próximo termo é:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{u^{iv}(c_0)u'(c_0) - u'''(c_0)u''(c_0)}{u'(c_0)^2} - 2 \frac{u''(c_0)}{u'(c_0)} \frac{u'''(c_0)u'(c_0) - u''(c_0)^2}{u'(c_0)^2} \right\} \quad (92)$$

Para a utilidade CRRA, $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, tem-se

$$u'(c) = c^{-\gamma} \quad (93)$$

$$u''(c) = -\gamma c^{-\gamma-1} \quad (94)$$

$$u'''(c) = \gamma(\gamma+1)c^{-\gamma-2} \quad (95)$$

$$u^{iv}(c) = -\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)c^{-\gamma-3} \quad (96)$$

$$s(c) = \gamma \quad (97)$$

Então,

$$\frac{u'''(c)}{u'(c)} = \frac{\gamma(\gamma+1)c^{-\gamma-2}}{c^{-\gamma}} = \gamma(\gamma+1)c^{-2} \quad (98)$$

Logo, tem-se, nesse caso,

$$\frac{u'''(c_0)}{u'(c_0)} c_0^2 - s(c_0)^2 = \gamma(\gamma+1) - \gamma^2 = \gamma \quad (99)$$

Donde

$$q = -\gamma g + \frac{1}{2}\gamma g^2 + \dots \quad (100)$$

Trabalhando com o próprio Q , em vez do seu logaritmo, vem:

$$Q(t+dt) = \frac{u'[c(t+dt)]}{u'[c(t)]} \quad (101)$$

O lado direito da eq. 101 fica, então:

$$\frac{1}{u'[c(t)]} \left\{ u'[c(t)] + u''[c(t)][c(t+dt) - c(t)] + \frac{1}{2}u''[c(t)][c(t+dt) - c(t)]^2 + \dots \right\} \quad (102)$$

Donde:

$$Q(t+dt) = 1 + \frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]}[c(t+dt) - c(t)] + \frac{1}{2} \frac{u'''[c(t)]}{u'[c(t)]}[c(t+dt) - c(t)]^2 + \dots \quad (103)$$

Em termos da diferencial dc , tem-se:

$$Q(t+dt) = 1 + \frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]}dc + \frac{1}{2} \frac{u'''[c(t)]}{u'[c(t)]}dc^2 + \dots \quad (104)$$

No caso da utilidade potência, tem-se

$$\frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]} = -\frac{\gamma}{c} \quad (105)$$

$$\frac{u'''[c(t)]}{u'[c(t)]} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{c^2} \quad (106)$$

Desse modo,

$$Q(t+dt) = 1 - \frac{\gamma}{c}dc + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma+1)}{c^2}dc^2 + \dots \quad (107)$$

O próximo termo é $\frac{1}{6} \frac{u''''[c(t)]}{u'[c(t)]}dc^3 = -\frac{1}{6} \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{c^3}dc^3$.

Assim,

$$Q(t + dt) = 1 - \gamma \frac{dc}{c} + \frac{1}{2} \gamma (\gamma + 1) \left(\frac{dc}{c} \right)^2 - \frac{1}{6} \gamma (\gamma + 1) (\gamma + 2) \left(\frac{dc}{c} \right)^3 + \dots \quad (108)$$

3.5 Elasticidade

Pode-se obter uma aproximação para a elasticidade média de substituição do consumo da seguinte maneira:

Tem-se, para a utilidade gama invariante (ver eq. (175)),

$$E_t [m_{t+1}] = E_t [\ln M_{t+1}] = E_t \left\{ \ln \left[\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{a-1} e^{-b(C_{t+1}-C_t)} \right] \right\} \quad (109)$$

Ou

$$E_t [m_{t+1}] = \ln \beta + (a - 1) E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] - b E_t (C_{t+1} - C_t) \quad (110)$$

E

$$var_t [m_{t+1}] = var_t \left[\ln \beta + (a - 1) \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) - b(C_{t+1} - C_t) \right] \quad (111)$$

Ou

$$var_t [m_{t+1}] = (a - 1)^2 var_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] + b^2 var_t [C_{t+1} - C_t] - 2b(a - 1) cov_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right), C_{t+1} - C_t \right]$$

Substituindo em (64), aqui reproduzida, tem-se $\ln R_{t+1}^f = A - B$, onde

$$A = - \left\{ \ln \beta + (a - 1) E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] - b E_t (C_{t+1} - C_t) \right\} \quad (112)$$

$$B = \frac{1}{2} (a - 1)^2 var_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} b^2 var_t [C_{t+1} - C_t] - b(a - 1) cov_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right), C_{t+1} - C_t \right]$$

Observando que, para $\frac{C_{t+1}}{C_t} \simeq 1$, $\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \simeq \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1 = \frac{C_{t+1}-C_t}{C_t} \implies C_{t+1} - C_t \simeq C_t \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)$, obtém-se a aproximação

$$\begin{aligned} \ln R_{t+1}^f &\simeq - \left\{ \ln \beta + (a - 1) E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] - b C_t E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] \right\} - \\ &\frac{1}{2} (a - 1)^2 var_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] + \frac{1}{2} b^2 C_t^2 var_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] - b(a - 1) C_t cov_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right), \ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] \end{aligned}$$

lembrando que C_t pode sair dos momentos condicionados.

Simplificando, vem

$$\ln R_{t+1}^f \simeq - \ln \beta + [(b C_t - (a - 1)) E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right] - \frac{1}{2} [b C_t - (a - 1)]^2 var_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right]] \quad (113)$$

Agora, a elasticidade é dada por

$$L_t = \frac{\partial E_t \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right]}{\partial \ln R_{t+1}^f} = \frac{1}{\frac{\partial \ln R_{t+1}^f}{\partial E \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right]}} \quad (114)$$

Mas,

$$\frac{\partial \ln R_{t+1}^f}{\partial E \left[\ln \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \right]} \simeq bC_t - (a - 1)$$

Logo,

$$L(C_t) \simeq \frac{1}{bC_t - (a - 1)} \quad (115)$$

Lembrando que (ver (174)) a taxa de aversão relativa ao risco da gama é dada por

$$s(C) = (-a + 1 + bC)$$

tem-se

$$L_t(C_t) \simeq \frac{1}{s(C_t)} \quad (116)$$

como é usual nos modelos que usam utilidade esperada separável no tempo (no caso da utilidade CRRA, como s é constante, independente de C , tem-se simplesmente $L = \frac{1}{s} = \frac{1}{\gamma}$).

No caso da utilidade gama variante no tempo, sendo b substituído por $\frac{b}{\varsigma_t}$, onde ς_t é o consumo suavizado no período t (ver a definição (176)), fica-se com

$$L(C_t) \simeq \frac{1}{b \frac{C_t}{\varsigma_t} - (a - 1)} \quad (117)$$

No caso da Cachy modificada, o desenvolvimento análogo resulta na fórmula

$$L(C_t) \simeq \frac{1}{4c \frac{(c-a)^3}{(c-a)^4 + b^4}} = \frac{(c_t - a)^4 + b^4}{4c_t (c_t - a)^3}$$

Com a substituição $a \rightarrow a\varsigma_t$ vem

$$L(C_t) \simeq \frac{(c_t - a\varsigma_t)^4 + b^4}{4c_t (c_t - a\varsigma_t)^3} \quad (118)$$

No entanto, as três hipóteses feitas anulam as vantagens dessas duas funções-utilidade. Constantinides (1990) mostra que sua utilidade com formação de hábito desaclopa o ARR da elasticidade; o mesmo provavelmente ocorre com as aqui propostas; no entanto, dada a maior complexidade delas, as esperanças de se expressar esse fato através de uma fórmula analítica são escassas (o cálculo precisa levar em conta também o modo como a suavização do consumo é feita).

4 ECONOMETRIA

Considere-se o agente representativo dos EUA. Dispõe-se das séries de IPC (índice de preços ao consumidor) e consumo *per capita* desde, pelo menos, o final do século XIX. Dispõe-se também de índices do mercado acionário de longa data. Supondo-se a economia americana em equilíbrio ao longo das séries históricas (e aí seria preciso excetuar o *crash* de 1929 e o período 1942-1944, quando implementou-se racionamento de bens de consumo e controle de preços e a base monetária daquele país quase dobrou, para financiar o esforço de guerra), as equações do modelo anterior se aplicam.

Pode-se, então, acompanhar essas séries históricas, para tentar estimar os parâmetros de uma "utilidade do agente representativo americano". Uma dificuldade aparente é o vetor de séries temporais $\{I_t\}$, que caracteriza o conjunto de informações usadas pelo agente para tomar decisões relativas ao período seguinte. Entretanto, pode-se aplicar o operador $E(\cdot)$ (expectância não condicional) à equação 28, resultando (pois $E[E(X|Y)] = E(X)$) na equação não condicional

$$E[Q_t(R_t^i - R_t^j)] = 0 \quad (119)$$

Agora, desde que a série temporal $E[Q_t(R_t^i - R_t^j)]$ seja estacionária no sentido amplo, esse valor esperado pode ser estimado por

$$\hat{E}[Q_t(R_t^i - R_t^j)] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q_t(R_t^i - R_t^j) \quad (120)$$

Os gráficos dos principais índices acionários americanos, bem como de sua série de consumo agregado *per capita* e a forma funcional das utilidades usadas permitem que se adote essa hipótese. Em consequência, pode-se usar um conjunto de equações do tipo

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q_t(R_t^i - R_t^j) = 0 \quad (121)$$

para estimar os parâmetros da função utilidade que entra em Q, sem necessidade de atribuir distribuições de probabilidade arbitrárias (lognormal, cauda grossa, cauda curta ou o que seja) às variáveis aleatórias envolvidas.

Da mesma forma, não há necessidade de usar variáveis instrumentais, que precisariam antes ser testadas para saber se satisfazem a duas condições estatísticas. Basta, então, que se aplique o método generalizado dos momentos (GMM) às eqs. 121, para um conjunto de ativos $i=1,2,\dots,k$. Modernamente, substitui-se o uso de séries setoriais por portfolios que reúnem ativos com certas características, como alto ou baixo índice de capitalização, razão entre de valor de mercado e valor contábil (*book to market ratio*),

taxas altas ou baixas de retorno (*momentum*).

Foram escolhidos aqui os 25 ativos do portfolio *book to market* de Fama e French, disponíveis na página de French na internet, bem como seu portfolio de mercado, seus fatores SMB e HML e sua série de T-bills de um mês à guisa de ativo sem risco. Com elas, foram geradas as séries $MKTRF = R_{MKT} - R_{RF}$, $SMBMKTRF = R_{SMB}/R_{MKTRF}$, $HMLMKTRF = R_{HML}/R_{MKTRF}$. A série de consumo anual *per capita* foi codificada como CONS e exibe valores em dólares constantes do ano 2000.

Desse modo, introduzi no E-views a equação básica $Q^*MKTRF=0$ e usei como "variáveis instrumentais" $SMBMKTRF$ e $HMLMKTRF$; o programa gera as outras equações multiplicando a equação básica pelas variáveis instrumentais especificadas, de modo que os denominadores se cancelam com o numerador, resultando efetivamente em $Q^*SMB=0$ e $Q^*HML=0$.

Naturalmente, já que $E(XY) = E_Y[E(XY|Y)] = E_Y[Y E(X|Y)]$, tem-se que $E(X|Y) = 0 \rightarrow E(XY) = 0$. Sendo assim, as chamadas equações de Euler (28) $E[Q_{t+1}(R_{t+1}^i - R_{t+1}^j)|I_t] = 0$ geram, cada uma, K equações do tipo

$$E[Q_{t+1}(R_{t+1}^i - R_{t+1}^j)V_t^k] = 0 \quad (122)$$

onde $I_t = (V_t^1, \dots, V_t^K)$, de modo que V_t^k é a k -ésima componente do vetor de informações disponíveis no momento t em que se toma a decisão sobre quanto investir e quanto consumir. Ou, se se quizer que o parâmetro β - fator de desconto subjetivo - também seja estimado, as equações

$$E[(M_{t+1}R_{t+1}^i - 1)V_t^k] = 0 \quad (123)$$

provenientes da eq. (25) $E[M_{t+1}R_{t+1}|I_t] = 1$.

De fato, muitos autores (EPSTEIN e ZIN, 1991; ARAÚJO e al, 2005; CATALÃO e YOSHINO, 2004) usam como variáveis instrumentais V coisas como inflação, taxa de crescimento do consumo, PIB per capita, retornos dos ativos, etc., em tempos anteriores a $t+1$. Conforme o conjunto de variáveis instrumentais usado, as estimativas de β e dos parâmetros da função utilidade bem como seus graus de precisão mudam bastante, freqüentemente sendo impossível descartar estatisticamente a inexistência de um certo parâmetro.

Na prática, tanto com quanto sem o uso de variáveis instrumentais, ocorre freqüentemente de um conjunto de equações de Euler usado para estimar os parâmetros do modelo ser incompatível, o que significa que, mesmo levando-se em conta que o tamanho finito da amostra causa flutuações estatísticas nas estimativas dos valores esperados, não há

conjuntos de parâmetros que satisfaçam a todas as equações simultaneamente. Isso é revelado no GMM pelo alto valor de J (soma dos quadrados das estimativas dos lados esquerdos das equações de Euler ponderadas por certos desvios padrões estimados); a distribuição assintótica de $N \times J$ é uma $\chi^2(m - k)$, onde N é o tamanho das séries temporais usadas, m é o número de equações de momentos e k é o número de parâmetros estimados. Além disso, o fato de uma série informativa estar disponível para o agente representativo americano, no momento em que ele toma sua decisão, não significa necessariamente que sua inclusão como variável instrumental no GMM melhore a precisão das estimativas dos parâmetros do modelo. O acréscimo de um ruído branco de média nula como variável instrumental aumenta a variância das estimativas dos parâmetros. Note-se que qualquer série Y de média nula descorrelacionada com $Q_{t+1}(R_{t+1}^i - R_{t+1}^j)$ atende a condição $E[Q_{t+1}(R_{t+1}^i - R_{t+1}^j)Y] = 0$; é claro que ela não contém informações úteis, mas o problema é que ela prejudica, aumentando as incertezas. Assim, a escolha de variáveis instrumentais deve ser precedida de uma análise judiciosa. Especificamente, é preciso que $E[X(\theta^*)Y] = 0$, mas $E[X(\theta)Y] \neq 0$, para $\theta \neq \theta^*$, onde θ é o vetor de parâmetros a serem estimados e θ^* é o valor teoricamente correto.

Para se ter uma idéia do problema de minimização envolvido no ajuste das utilidades ao prêmio de risco histórico, o gráfico 10 mostra a superfície cujo ponto de mínimo se deseja encontrar - superfície $|\hat{E}(R^e) - 7,87| = f(a, b)$, que mostra como, em vez de um ponto de mínimo, tem-se praticamente uma reta de *mínimo* (na verdade uma curva muito suave contendo um ponto de mínimo). Métodos de programação linear que usam aproximações da matriz hessiana resultam em mensagens de "matriz singular". Mesmo os métodos baseados apenas no gradiente têm dificuldade de encontrar o ponto de mínimo. Por isso, usamos busca exaustiva automática: macros na planilha excel que estabelecem uma grade sobre o espaço paramétrico e percorrem cada um de seus nós até achar o mínimo. Pelo menos, o gráfico mostra que a superfície é suave e não enrugada, como a flutuação estatística dos dados levaria a crer. A figura 11 mostra a mesma superfície vista de outro ângulo.

4.1 Dados

Os dados foram coletados em várias fontes: <http://www.economagic.com/>, IBGE, FGV, IPEA, Bureau of Economic Analysis e outros. As séries de inflação são o INPC do IBGE e o CPI-U. As séries de taxas de juros (ativo sem risco) são o OVER/SELIC (fonte: FGV/ANDIMA) e a "prime loan rate".

O consumo considerado foi o total (tabela NIPA 1.1.5) e não apenas o de serviços e bens não duráveis, o que não afeta muito os resultados, considerando-se que a parte relativa a bens duráveis constitui algo em torno de 10% do total e que certos serviços,

Figura 10: Superfície cujo ponto de mínimo se deseja encontrar.

Figura 11: A superfície da figura 10 vista por outro ângulo.

como educação, podem ser considerados como investimentos (de modo que, a rigor, seria necessário separá-los também).

Usou-se o portfolio de mercado constante na página de French na internet http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html, que combina NYSE, AMEX e NASDAQ. O portfolio de French de 25 ativos classificados segundo a razão valor contábil sobre valor de mercado foi usado para testar a capacidade de precificação de ativos das utilidades. O ativo sem risco de French é a T-Bill de um mês e também foi usado. Preferi séries anuais, sempre que longas o suficiente, já que não é plausível imaginar que oscilações da bolsa minuto a minuto se reflitam em oscilações do consumo minuto a minuto (séries trimestrais, portanto, não tão boas quanto as anuais). Os anexos contêm as séries mais importantes.

4.2 Testes

O procedimento consistiu, em alguns casos, em ajustar os parâmetros de modo que o prêmio médio de risco previsto pela equação 32 fosse o mais próximo possível do valor histórico no período 1951-2001, que é de 7,86%. Os parâmetros encontrados determinam uma série Q_t , que, multiplicada pelos valores históricos R_t^f , é usada para determinar o valor de β , segundo a equação 35. Em outros casos, ajustou-se primeiro o modelo ao portfolio de Fama e French e verificou-se, em seguida, se ele explica o prêmio de risco e a taxa de juros com $\beta < 1$. A sobrestimação do prêmio de risco em até 25% - de 8% para 10% ao ano - não foi considerada problema, já que a grande dificuldade dos modelos é explicar um prêmio de risco tão alto quanto o histórico; significa que há folga.

Note-se, antes, pelas figuras 20, 21 e 22, o fato de que, com os dados de French e a série de consumo real per capita (extraídos da tabela NIPA 1.1.5, consumo total - *personal consumption expenditures* - divididos pela população de cada ano e deflacionados pelo CPI-U - *consumer price index - urban*), é preciso usar $E(Q_{t+2}R_{t+1})$ nas equações de apreçamento; é possível que isso se deva a questões contábeis (diferenças entre ano real e ano fiscal, por exemplo, introduziriam uma defasagem de seis meses entre as séries), mas talvez indique que o que se ganha com ações em um ano só é gasto em consumo no ano seguinte. " $\hat{E}(R_e)$ com $cov(Q, R_m)$ " é uma estimativa para o excesso de risco usando a fórmula alternativa

$$E(R^e) \simeq -\frac{cov(Q, R^m)}{E(Q)} \quad (124)$$

onde R^m é o retorno do portfolio de mercado. Essa fórmula justifica-se como uma aproximação da 35, quando $E(QR^f) \simeq E(Q)E(R^f)$, o que ocorre para taxas de juros pequenas (intervalo de amostragem pequeno). A diferença entre a estimativa obtida por

Figura 12: Suavização da série de consumo americana.

32 e a por 124 deve-se não apenas ao fato desta última ser apenas uma aproximação teórica, mas também à finitude das amostras.

Outra fórmula comumente usada, que exige a mesma hipótese de decorrelação entre Q e R^f , é

$$E(R^e) \simeq -\beta E(R^f) \text{cov}[Q, R^e] \quad (125)$$

(Basta, assumindo a decorrelação, substituir $E(Q)$ no denominador da eq. 32 por $E(QR^e)/E(R^f)$, e, em seguida, $E(QR^e)$ por $1/\beta$, da eq. 33)

O erro médio percentual é definido por

$$FF25 = \frac{\sqrt{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} \Delta_i^2}}{\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} E(R_e^i)} \quad (126)$$

onde $\Delta_i = E(R_e^i) - \hat{E}(R_e^i)$

Outra estatística de ajuste usada foi

$$R^2 = 1 - \frac{\text{var}(\Delta)}{\text{var}[E(R_e^i)]} \quad (127)$$

4.3 Modelo da série de consumo americana

Usei o modelo $\frac{dc}{c} = 0,02dt + dw$, onde w é um ruído browniano padrão (integral de um ruído branco normal(0,1)). Desse modo, c pode se suavizado por $\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$, com o consumo expresso em milhares de dólares de 2000 (ver gráfico 12).

Uma pequena melhora também foi usada em alguns casos substituindo o 0,02 ($=\frac{1}{50}$) do expoente por $\frac{1}{52}$, resultando no gráfico 13.

Figura 13: Mesmo da figura anterior, aumentando-se ligeiramente o denominador do expoente.

Naturalmente, esse é um modelo artificial, já que usa valores futuros da série de consumo, para suavizá-la. O agente econômico, ao tomar sua decisão entre investir ou consumir, só dispõe da série histórica passada do consumo (seu particular, de classes de consumidores ou o agregado *per capita*). Para a utilidade final escolhida (a Cauchy modificada), foi usada a suavização do consumo pela previsão dois passos à frente fornecida pelo método do amortecimento exponencial duplo, com parâmetro α entre 0,1 e 0,3 (ver Farias Neto, 1981, p. 41). O fato da previsão ser dois passos à frente permite que o modelo de dois tempos aqui usado continue separável temporalmente, evitando as complicações decorrentes da inseparabilidade temporal, de modo a continuar isoelástico ($L = 1/s$, onde L é a elasticidade de substituição intertemporal e s é o coeficiente de aversão relativa ao risco).

A suavização por amortecimento exponencial duplo é feita pelas seguintes equações:

$$\varsigma_t = S_{t-2}^{(1)} + 2S_{t-2}^{(2)} \quad (128)$$

$$S_t^{(1)} = c_t - (1 - \alpha)^2(c_t - S_{t-1}^{(1)} - S_{t-1}^{(2)}) \quad (129)$$

$$S_t^{(2)} = S_{t-1}^{(2)} + \alpha^2(c_t - S_{t-1}^{(1)} - S_{t-1}^{(2)}) \quad (130)$$

Com $\alpha = 0,2$, obtém-se o gráfico 14.

Com $\alpha = 0,1$, obtém-se o gráfico 15.

Quanto à distribuição *cross-section* do consumo, ela está intimamente ligada à dis-

Figura 14: Suavização da série de consumo por amortecimento exponencial duplo.

Figura 15: Suavização da série de consumo por amortecimento exponencial duplo com parâmetro diferente.

Figura 16: Distribuição de probabilidade da renda individual americana em 1996. FONTE: Dragulescu e Yakovenko, 2001.

tribuição de renda do país, como mostra Husby (1971), que obtém a relação (Y =renda após impostos, computada trimestralmente):

$$C = 3,64 + 0,9016Y \quad (131)$$

com $R^2 = 0,9973$, $\sigma_\varepsilon = 3,5$ (desvio padrão do erro), sendo a precisão da constante de proporcionalidade dada por $0,9016 \pm 0,0054$.

Muitas funções teóricas têm sido propostas para a distribuição de renda americana, a começar pela de Pareto, mas também incluindo as de Levy, lognormal, Champernowne, gama e duas variantes da Pareto. Yakovenko (2007) e Dragulescu e Yakovenko (2001) mostram que um modelo muito mais simples é admissível: exponencial, isto é:

$$f(y) = \frac{1}{\nu} e^{-\frac{y}{\nu}}, \quad y, \nu > 0 \quad (132)$$

A figura 16 ilustra o grau de encaixe.

Dado que o coeficiente linear (3,64) da equação 131 é da mesma ordem do desvio padrão do erro de regressão (3,5), pode-se aproximar $C \simeq 0,9Y$. Pode-se então assumir que o consumo também tem distribuição exponencial, mudando apenas sua média para $\mu = 0,9\nu$, isto é:

$$f(C) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{C}{\mu}} \quad (133)$$

Assim $\mu_t = c_t$, onde c_t é o consumo *per capita* americano (em dólares constantes do ano 2000), C maiúsculo indicando o consumo de um americano qualquer.

4.4 Modelos de Fama e French

Os modelos M_{FF} e FF regres, referidos na figura 23 e suas similares baseiam-se nos três fatores, MKT, SMB e HML, onde MKT é o portfolio de mercado e:

$SMB = 1/3$ (Small Value + Small Neutral + Small Growth) - $1/3$ (Big Value + Big Neutral + Big Growth).

$HML = 1/2$ (Small Value + Big Value) - $1/2$ (Small Growth + Big Growth)

No modelo M_{FF} , usa-se a equação básica de apreçamento com o fator de desconto estocástico definido por:

$$M = b_1 R_{mkt} + b_2 R_{smb} + b_3 R_{hml} \quad (134)$$

As estimativas para os parâmetros b_j obtidas nesta tese (por regressão) são: $b_1 = -0.024340154$ $b_2 = -0.0100203$ $b_3 = -0.040078199$

De posse dos b 's, estimam-se as médias $\hat{E}(R_i^e)$, $i=1,2,\dots,25$ dos excessos de retorno dos ativos do portfolio de Fama e French pelo equivalente da fórmula 54: $E(R_i^e) = -E(R^f)cov(M, R_i^e)$ (lembrando que $M = \beta Q$). Aqui foram usados M e R^e contemporâneos, isto é $cov_t[M_{t+1}, R_i^e(t+1)]$.

O modelo FF regres, definido por $R_e^i(t) = a_1^i R_{mkt}(t) + a_2^i R_{smb}(t) + a_3^i R_{hml}(t)$, $i=1,2,\dots,25$, é basicamente de apreçamento por arbitragem. Note-se que ele contém 75 parâmetros (3×25) estimados por regressão. Não é, portanto, de se admirar que o encaixe no portfolio seja muito bom.

Os dois modelos de Fama e French são igualados, em sua capacidade de apreçamento, pelo modelo de Lucas com utilidades gama e Cauchy modificada (ver figuras 44 e 52). A vantagem é que o modelo de Lucas presta-se a interpretações econômicas, por conectar finanças com macroeconomia, sendo tão parcimonioso em parâmetros quanto o modelo M_{FF} (dois parâmetros da utilidade Cauchy mais o α do amortecimento exponencial usado para obter a série suavizada do consumo).

4.5 Resíduos das estimações GMM

Os resíduos das estimações GMM revelam que os eventos mais importantes para o mercado financeiro americano depois da Segunda Guerra Mundial foram os dois choques do petróleo (1973 e 1979). Isso pode ser visto nos gráficos correspondentes às utilidades potência (CRRA), gama e Cauchy modificada.

Figura 17: A utilidade CRRA destaca os dois choques do petróleo como as maiores anomalias na economia americana da segunda metade do século XX.

Figura 18: Mesmo da figura anterior, com a utilidade gama.

Figura 19: Resíduos da estimação GMM usando a utilidade Cauchy modificada.

5 UTILIDADES DA LITERATURA

As utilidades mais citadas na literatura, no contexto de modelos de apreçamento de ativos, são a CRRA, a de Epstein-Zin e a de Constantinides com incorporação de hábito e a de Abel. A seguir, são exibidas suas características e os resultados dos testes a que as submetemos.

5.1 CRRA

A utilidade mais comumente usada é a:

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (135)$$

$$Q_{t+1} = \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \quad (136)$$

Seu coeficiente de aversão relativa ao risco é $s = \gamma$, constante. Daí a sigla usada para descrevê-la (Constant Relative Risk Aversion).

Pode-se encontrar um par (β, γ) , com $\beta < 1$, que faz a CRRA explicar a taxa de juros e quase todo o prêmio de risco. De fato, com $\beta = 0,9883$ e $\gamma = 82$, tem-se, com a fórmula aproximada 124, $\hat{E}(R^e) = 7,02\%$ e $\hat{E}(R^f) = 1,22\%$. Esse é o máximo que a CRRA pode fazer, em termos de ajuste ao prêmio de risco e à taxa de risco, como mostra o gráfico 21. Usando-se a fórmula com β (eq. 125), obtém-se no máximo $\hat{E}(R^e) = 6,1$, para todas as combinações possíveis de γ e β , com $0,1 < \beta < 1$ e $0 < \gamma < 200$. Usando-se a fórmula correta, eq. (32), que não exige a suposição $E(QR^f) = E(Q)E(R^f)$, o melhor que a CRRA pode fazer é, com $\gamma = 82$ e $\beta = 0,99926$, $\hat{E}(R^e) = 5,76\%$ e $\hat{E}(R^f) = 1,22\%$; o ajuste ao portfolio de Fama e French fica em $FF25 = 52,7\%$ e $R^2 = 0,09$. Portanto, a utilidade CRRA tem, de fato, dificuldade de explicar simultaneamente o prêmio de risco e a taxa de juros.

Na figura 20, a utilidade CRRA é usada, variando-se o parâmetro γ (=ARR) entre 0 e 100. Na curva mais alta, o valor de β necessário para que $\hat{E}(R^f) = 1,22\%$, usando-se $E[Q_{t+1}R_{t+1}]$. As curvas mais baixas dão os valores correspondentes de $\hat{E}(R^e)$ estimados pelas fórmulas sem β (equações 62 e 31).

A figura 22 usa $E(Q_{t+3}R_{t+1})$. Note-se que, com $\gamma = 300$, a fórmula com R^m (que pressupõe $E(QR^f) = E(Q)E(R^f)$), consegue explicar o prêmio de risco. Entretanto, esse valor de γ requer $\beta = 0,00063$, para explicar a taxa de juros, o que parece ser irrealístico.

Figura 20: Utilidade CRRA. M e R contemporâneos.

Figura 21: O mesmo que a figura 20, mas com M à frente de R..

Figura 22: M dois passos à frente de R. Utilidade CRRA.

Figura 23: Ajuste da utilidade potência (CRRA) ao portfolio de Fama e French, comparado com os dois modelos de três fatores daqueles autores.

Na figura 23, mostra-se o melhor ajuste possível da utilidade potência ao portfolio de Fama e French. Usou-se $\gamma = 80$, que está na fronteira da região admissível (ver gráfico 21). Torna-se clara a inadequação dessa classe de utilidades (que tem a logarítmica como caso particular, para $\gamma = 1$). A série de consumo foi suavizada por amortecimento exponencial duplo com $\alpha = 0,2$ (nos resultados citados anteriormente, foi usada $\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$). Quantitativamente, tem-se $FF25=50\%$ e $R^2 = 0,17$.

5.2 Epstein-Zin-Weil

A utilidade de Epstein e Zin, também obtida independentemente por Weil (EPSTEIN e ZIN, 1989; WEIL, 1989), preocupa-se com a série de dividendos e é feita para o uso em programação dinâmica, ao contrário do modelo repetido de dois tempos aqui usado, que pode ser considerado um caso particular. Ao contrário das anteriores e da gama, o funcional a ser otimizado não é uma utilidade esperada, mas sim recusiva. A fórmula é:

$$U_t = \{(1 - \beta)c_t^\rho + \beta[E_t(U_{t+1}^\alpha)]^\frac{\rho}{\alpha}\} \quad (137)$$

O fator de desconto estocástico correspondente é ($a = \rho$, $b = \frac{\alpha}{\rho}$):

$$M_{t+1}^{EZ} = (\beta G_{t+1}^{a-1})^b \left(\frac{1}{R_{t+1}^m}\right)^{1-b} \quad (138)$$

A taxa de aversão relativa ao risco e a elasticidade de substituição intertemporal do consumo são dadas, nesta utilidade, respectivamente, por:

Figura 24: A utilidade de Epstein e Zin sofre do *risk-free puzzle*.

$$s = 1 - ab = ARR \quad (139)$$

$$L = \frac{1}{1 - a} \quad (140)$$

A utilidade de Epstein-Zin tem a mesma dificuldade que a CRRA, para reproduzir simultaneamente o prêmio de risco e a taxa de juros, como se vê no gráfico 24 (na horizontal, $-2000 < a < -1200$; na vertical, $0 < b < 1$). A utilidade de Epstein-Zin, como a CRRA, tem dificuldade de explicar o *risk free puzzle*. Note-se como o ponto vermelho, que indica $|\hat{E}(R^e) - 7,86| = 0$, está fora da região factível ($E(QR^f) > 1$). Pode-se encontrar pontos na fronteira que aproximam o prêmio de risco, mas com erro mínimo de 0,42).

O parâmetros que minimizam $|\hat{E}(R^e) - 7,86|$ mantendo-se dentro da região factível são $a = -1760$, $b = 0,050$; donde $ARR = 1 - ab = 89$. Para reproduzir a taxa de juros de 1,22%, tem-se $\beta^b = 0,99984$, donde $\beta = 0,9968$. Com esses valores, tem-se $\hat{E}(R^e) = 7,45\%$, $FF25 = 31,9\%$ e $R^2 = 0,36$, revelando um ajuste pobre ao portfolio de Fama e French e uma subestimação do prêmio de risco (todos os números aqui foram obtidos com as fórmulas corretas - que não supõem $cov(Q, R^f) = 0$ - 35, 32 e 33). O fator de desconto estocástico M de Epstein-Zin foi fatorado em $M_{t+1} = \beta^b Q_{t+1} = \beta^b (G_{t+1}^{a-1})^b (\frac{1}{R_{t+1}^m})^{1-b}$; portanto, $Q_{t+1} = (G_{t+1}^{a-1})^b (\frac{1}{R_{t+1}^m})^{1-b}$. Nesse caso, tem-se $E(QR^i) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^b$. Foi usado aqui $M_{t+1} = \beta^b Q_{t+2}$, por causa do deslocamento mencionado acima a respeito da CRRA. Entretanto, isso implica em usar R_{t+2}^m também, o que não faz muito sentido. Para verificar se há mudanças qualitativas, refiz as contas usando $M_{t+1} = \beta^b (G_{t+2}^{a-1})^b (\frac{1}{R_{t+1}^m})^{1-b}$. Não há alterações qualitativas. O único par (a, b) que reproduz exatamente o prêmio de risco histórico 7,869 está dentro da região não

Figura 25: Epstein e Zin modificada. Mesmo problema.

factível (que exige $\beta > 1$) (ponto vermelho mais baixo da figura 25); tratam-se dos valores $a = -100$ e $b = 0,46$, o que dá um $ARR = 47$. O melhor par factível é $a = -480$ e $b = 0,18$, o que dá um $ARR=87$, mas ele está na fronteira da região factível, como no caso da utilidade CRRA, como mostra a figura 25 (na horizontal, da esquerda para a direita, a indo de -500 a zero; na vertical, de cima para baixo, b indo de 0 a 1; o par (a, b) que ajusta-se ao prêmio de risco está dentro da região proibida ($\beta > 1$); o melhor par dentro da região factível é o ponto vermelho mais à esquerda.); nesse caso, $\hat{E}(R^e) = 7,82$ e $\beta = 0,84$ é o valor necessário para ajustar a taxa de juros ao valor histórico de 1,22%. Com esse par (a, b) , o ajuste ao portfolio de Fama e French é $FF25 = 31,2\%$ e $R^2 = 0,35$ (ver a figura 26, onde, ao contrário dos outros resultados aqui citados, em que usou-se $\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$, foi usado o consumo suavizado por amortecimento exponencial duplo - $FF25$ e R^2 não se alteraram). Há, no entanto, uma melhora em relação à elasticidade de substituição intertemporal do consumo, $L = \frac{1}{1-a}$, que, com $a = -1760$, dava $L=0,00057$ usando Q_{t+2} , enquanto agora dá um valor mais razoável: $L=0,0021$.

Outra possibilidade, a inicial, na verdade, é usar a fórmula prevista teoricamente, isto é $cov_t(Q_{t+1}, R_{t+1}^e)$, em vez de $cov_t(Q_{t+2}, R_{t+1}^e)$, como feito na figura 24, ou $cov_t(Q_{t+1}, R_{t+1}^e)$ com $Q_{t+1} = (G_{t+2}^{a-1})^b (\frac{1}{R_{t+1}^m})^{1-b}$, como feito na figura 25. Entretanto, a exemplo da utilidade CRRA com $cov_t(Q_{t+1}, R_{t+1}^e)$, o resultado é péssimo: $a = 40$, $b = -0,92$, implicando em elasticidade negativa $L = \frac{1}{1-a} = -0,02$. O ajuste ao portfolio de Fama e French também é muito ruim: $FF25=42,8\%$ e $R^2 = 0,27$. O correto aqui deve ser usar a segunda fórmula: $cov_t(Q_{t+1}, R_{t+1}^e)$ com $Q_{t+1} = (G_{t+2}^{a-1})^b (\frac{1}{R_{t+1}^m})^{1-b}$.

Figura 26: Ajuste da Epstein-Zin ao portfolio de Fama e French.

5.3 Constantinides

A utilidade usada por Constantinides é:

$$u(c) = \frac{(c - K)^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \quad (141)$$

No artigo original de Constantinides, tem-se K definido como uma combinação linear dos valores passados do consumo, de modo que acompanha o nível deste a certa distância, mantendo-se sempre abaixo dele. Optou-se aqui por reproduzir esse comportamento por meio da fórmula $K_t = \varsigma_t - k$, onde ς_t é a série de consumo suavizada.

O fator de desconto estocástico correspondente é:

$$Q_{t+1} = \left(\frac{C_{t+1} - \varsigma_{t+1} + k}{C_t - \varsigma_t + k} \right)^{-\gamma} \quad (142)$$

Não apenas tem essa utilidade taxa de aversão relativa variável com c , como também apresenta uma descontinuidade em $c = K$ e um comportamento bastante diferente das utilidades CARA e CRRA, pois

$$u'(c) = \frac{1}{(c - K)^\gamma} \quad (143)$$

$$u''(c) = -\frac{\gamma}{(c - K)^{\gamma+1}} \quad (144)$$

$$r(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)} = \frac{\gamma}{(c - K)} \quad (145)$$

Figura 27: Para γ ímpar, a utilidade de Constantinides é decrescente no primeiro trecho!

$$s(c) = -c \frac{u''(c)}{u'(c)} = c\gamma \frac{(c-K)^\gamma}{(c-K)^{\gamma+1}} = \frac{c\gamma}{(c-K)} \quad (146)$$

Para $\gamma > 1$ ímpar, a utilidade é decrescente (!) no trecho $0 < c < K$. Por exemplo, $\gamma = 3$ resulta em

$$u(c) = \frac{(c-K)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(c-K)^2} \quad (\text{ver figura 27, onde } K = 30).$$

Esse comportamento inadmissível ocorre porque essa utilidade pode ser reescrita como $u(c) = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{(c-K)^{\gamma-1}}$, de modo que, para $\gamma > 1$ e $c < K$, tem-se u crescente em módulo e negativa ou positiva dependendo do sinal de $(c-K)^{1-\gamma}$, que é um número negativo elevado a um expoente real; se $1-\gamma$ for inteiro, sua paridade determina o sinal de $(c-K)^{1-\gamma}$. Mas, e se $1-\gamma$ não for inteiro? E, pior, se for irracional?

Com $\gamma = 2$ e $K = 30$ (mil dólares por ano), tem-se os gráficos 28 e 29.

.

Assim, nessa classe de utilidades, o consumo torna-se infinitamente útil, à medida que se aproxima do valor habitual, partindo de valores inferiores a ele e, para valores apenas infinitesimalmente maiores do que ele, é infinitamente inútil. O comportamentamento frente ao risco também é bastante inusual: à medida que o consumo se aproxima do valor habitual, partindo de valores inferiores a ele, o agente torna-se infinitamente amante do risco e, para níveis de consumo apenas infinitesimalmente maiores do que o habitual, é infinitamente avesso ao risco.

A utilidade de Constantinides exige $C > K$, pois seu autor alega que K representa consumo de subsistência e não consumo médio, embora o título de seu artigo mencione

Figura 28: Utilidade de Constantinides com γ par.

Figura 29: Aversão relativa ao risco da utilidade de Constantinides.

Figura 30: A utilidade de Constantinides resolve o risk-free puzzle.

"hábito"(de continuar vivo?). Como o consumo real per capita americano varia entre 4,8 e 25 (milhares de dólares constantes de 2000 no período 1927-2004, conclui-se que o nível de subsistência nos EUA é inferior a U\$4800 por ano, de modo que K não poderia ser maior do que 4,8. Com $K=0$, essa utilidade reduz-se à CRRA usual. Otimizando seus parâmetros para melhor ajuste ao portfolio de Fama e French (no sentido de minimização da soma dos desvios quadráticos - FF25), variando K entre 0 e 5 (no período usado, 1951-1952, $C>8$) e, depois, entre 0 e 8, tem-se péssimos resultados com $Q(t+1)R(t+1)$ e, ao se usar $Q(t+2)R(t+1)$, resultados equivalentes aos obtidos com a CRRA, incorrendo-se no mesmo problema do risk-free puzzle: beta necessário para explicar a taxa de juros maior do que 1. Os resultados são: com $Q(t+2)R(t+1)$, $0 < K < 8$, $0 < \gamma < 100 \implies K^*=8$, $\gamma^*=30 \implies \beta_{nec} = 1,34$, $FF25=17,3\%$, $R^2 = 0,65$, $\hat{E}(R^e)=8,8$. Otimizando-se em (γ, k) , com $\gamma \in [0, 100]$ e $k \in [2, 10]$, para ajustar-se ao prêmio de risco histórico, obtém-se $\gamma^* = 50$ e $k = 7,9$; com esses valores, tem-se $FF25=35,9\%$, $R^2 = -0,06$, $\beta_{nec} = 0,604$ e $\hat{E}(R^e) = 7,87$; nesse caso há folga, como mostra o gráfico 30 (o ponto vermelho indica o local no plano (γ, K) em que o prêmio de risco previsto é igual ao histórico. Como ele não está dentro nem na fronteira da região proibida (onde o β necessário para reproduzir a taxa de juros histórica é maior do que 1), conclui-se que a utilidade de Constantinides com $K_t = \varsigma_t - k$ resolve o risk-free puzzle).

A utilidade de Constantinides modificada dessa forma resolve, portanto, o *risk-free puzzle*. Quanto ao *equity premium*, tem-se

$$s(c) = \frac{c\gamma}{(c - K)} = \frac{50c}{(c - \varsigma_t + 7.9)} \quad (147)$$

Com K fixo, $s(c) \rightarrow \gamma$, quando $c \rightarrow \infty$. No caso aqui referido, como ς_t acompanha o nível de consumo c , tem-se $s(c)$ assintótica a uma reta crescente no plano $ARR \times c$.

5.4 Abel

Abel (2006) chama a atenção para o fato da utilidade de Constantinides exigir $c_t > \varsigma_t$ e propõe uma utilidade que dispensa essa exigência. Sua fórmula, na notação desta tese, é:

$$u(C_t) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^{1-\alpha} \quad (148)$$

com

$$\varsigma_t = C_{t-1}^D \left(c_t^{\theta_0} c_{t-1}^{\theta_1} G^t \right)^{1-D} \quad (149)$$

onde C é o consumo de um americano qualquer e c é o consumo *per capita*. Tem, portanto, 6 parâmetros $(\alpha, \gamma, \theta_0, \theta_1, D, G)$.

Essa utilidade não foi analisada empiricamente nesta tese, mas é pouco parcimoniosa. A utilidade Cauchy aqui proposta tem apenas três parâmetros - contando com o α do amortecimento exponencial usado para obter $\{\varsigma_t\}$ - e também resolve aquele problema da utilidade de Constantinides. O coeficiente de aversão relativa ao risco da utilidade de Abel é constante, pois:

$$\frac{\partial}{\partial C_t} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^{1-\alpha} = \frac{1}{\varsigma_t^\gamma \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^\alpha} \quad (150)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_t} \frac{1}{\varsigma_t^\gamma \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^\alpha} = - \frac{\alpha}{\varsigma_t^{2\gamma} \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^{\alpha+1}} \quad (151)$$

$$s(C_t) = -C_t \frac{- \frac{\alpha}{\varsigma_t^{2\gamma} \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^{\alpha+1}}}{\frac{1}{\varsigma_t^\gamma \left(\frac{C_t}{\varsigma_t^\gamma} \right)^\alpha}} = \alpha \quad (152)$$

Seu fator de desconto estocástico M pode ser obtido particularizando a fórmula 200, no modelo de dois tempos, ou a 209, no caso de horizonte infinito. Essas fórmulas mais complicadas são necessárias devido à presença de C_{t-1} na utilidade, caracterizando formação de hábito interno.

Para o modelo de dois tempos, tem-se (ver apêndice, para a dedução):

$$M_{t+1} = \beta C_t K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \frac{C_t^{\alpha+D\gamma+D\gamma(\alpha-1)}}{\left(C_t K_t C_t^{D\gamma} C_{t+1}^\alpha C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^\alpha C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \right)} \quad (153)$$

onde

$$K_t = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{(c_t^{\theta_0} c_{t-1}^{\theta_1} G^t)^{(1-D)\gamma(1-\alpha)}}$$

No modelo de horizonte infinito sem o custo inflacionário (*shopping time*), tem-se:

$$M_{t+1} = \beta C_t C_t^\alpha C_{t-1}^{D\gamma} \frac{D\beta\gamma C_t^{D\gamma} C_{t+2} K_{t+2} C_{t+1}^{\alpha+D\alpha\gamma} + C_t^{D\alpha\gamma} K_{t+1} C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma+1}}{C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma+1} \left(K_t C_{t+1}^\alpha C_t^{D\gamma+1} C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^{\alpha+D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \right)} \quad (154)$$

Com séries anuais, tem-se $G = 1,02$ e os parâmetros $\alpha, \gamma, \theta_0, \theta_1, D$ podem, em princípio (a menos de problemas numéricos) ser estimados por GMM usando as equações $E(MR_i^e) = 0$, $i=1,2,\dots,25$, correspondentes aos 25 ativos do portfolio de Fama e French, com M dado por 153 ou, mais realisticamente, por 154.

6 UTILIDADES PROPOSTAS

6.1 Utilidade logística

A utilidade logística tem a vantagem de sua acumulada poder ser expressa como uma fórmula fechada:

$$U(c) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{c-a}{b}}} \quad (155)$$

Nela tem-se $\mu = a$ e $\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3}}b$, média e desvio padrão da variável aleatória que a tem como distribuição. Não é difícil verificar que:

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{e^{-\frac{1}{b}(c_t-a)} + 1}{e^{-\frac{1}{b}(c_{t+1}-a)} + 1} \right)^2 e^{-\frac{1}{b}(c_{t+1}-c_t)} \quad (156)$$

$$s(c) = \frac{c}{b} \frac{1 - e^{\frac{1}{b}(a-c)}}{e^{\frac{1}{b}(a-c)} + 1} \quad (157)$$

O gráfico correspondente à equação 157, com $a = 30$ e $b = 1.2$ é o 31.

Figura 31: Aversão relativa ao risco da utilidade logística.

$$r(c) = \frac{1}{b} \frac{1 - e^{\frac{1}{b}(a-c)}}{e^{\frac{1}{b}(a-c)} + 1} \quad (158)$$

O gráfico correspondente à equação 158 é o 32.

$$U(c) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{c-a}{b}}} \quad (159)$$

Figura 32: Aversão absoluta ao risco da utilidade logística.

Figura 33: Utilidade logística

O gráfico correspondente à equação 159 está na figura 33.

Nesse caso, a taxa de aversão absoluta ao risco tem um gráfico simétrico, mas o da relativa é mais difícil de ser justificado do que a simples reta correspondente à $s(c)$ da utilidade gama (figura 40).

Variante Fazendo o parâmetro a acompanhar o nível crescente de consumo, $a_t = \varsigma_t$, tem-se

Figura 34: Usando séries contemporâneas, isto, é, $M(t+1)$ com $R(t+1)$, a logística resolve o risk-free puzzle com folga.

$$U(c) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{c-\varsigma_t}{b}}} \quad (160)$$

Assim, para $c_t = \varsigma_t$, fica-se com $U(c) = \frac{1}{2}$, que é o ponto de inflexão da curva. Tem-se, então, uma utilidade temporalmente variante ($\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$) ou com inclusão de hábito ($\varsigma_t = \sum_{j=1}^T \alpha^j c_{t-j}$, $\alpha < 1$). Considere-se o primeiro caso, para simplificar; então há apenas um parâmetro a ser estimado (além do 9 e do 0,02 que aparecem na fórmula de ς_t , já fixados). O fator de desconto estocástico correspondente é obtido por:

$$Q = \frac{U'(c_1)}{U'(c_0)} = \frac{\frac{e^{-\frac{1}{b}(c_1-\varsigma_1)}}{\left(e^{-\frac{1}{b}(c_1-\varsigma_1)}+1\right)^2}}{\frac{e^{-\frac{1}{b}(c_0-\varsigma_0)}}{\left(e^{-\frac{1}{b}(c_0-\varsigma_0)}+1\right)^2}} \quad (161)$$

resultando em:

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{e^{-\frac{1}{b}(c_t-\varsigma_t)} + 1}{e^{-\frac{1}{b}(c_{t+1}-\varsigma_{t+1})} + 1} \right)^2 e^{-\frac{1}{b}[(c_{t+1}-c_t) - (\varsigma_{t+1}-\varsigma_t)]} \quad (162)$$

A logística variante com as fórmulas corretas e usando Q_{t+1} ao invés de Q_{t+2} (como na CRRA e na gama) não tem problemas em explicar o prêmio de risco e a taxa de juros (ver gráfico 34). Os resultados são: $b=0,1872$, $\hat{E}(R^e)=7,87\%$, $\hat{E}(R^e)=1,22\%$, $\beta=0,404036$. O ajuste ao portfolio de Fama e French, no entanto, é ruim: $FF25=43,9\%$, $R^2 = -0,24$. Com $Q(t+2)R(t+1)$, obtém-se o gráfico 35 (a folga continua a existir, mas o ajuste ao portfolio de Fama e French piora: $b=0,17 \Rightarrow R^2 = -1,7$, $FF25=48\%$, $\beta_{nec} = 0,317$, $\hat{E}(Re)=7,7$).

Com $Q(t)R(t+1)$, obtém-se o gráfico 36

Os resultados acima foram obtidos com $\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$. Suavizando o consumo

Figura 35: Utilidade logística usando $M(t+2)R(t+1)$.

Figura 36: Com consumo precedendo retorno, a logística, como era de se esperar, não funciona.

Figura 37: Ajuste da utilidade logística ao portfolio de Fama e French.

Figura 38: Logística: taxa de juros e prêmio de risco reproduzíveis com folga.

pelo método de amortecimento exponencial duplo com $\alpha = 0,2$, o resultado piora sensivelmente. Usando consumo suavizado $\varsigma_t = 9\exp[(t-1950)/50]$ e as equações de Euler $E[Q(t+2)R_i^c(t+1)] = 0$, $i=1,2,\dots,25$, o melhor ajuste ao portfolio é obtido com $b=0.182$; as medidas de ajuste correspondentes são: $FF=42\%$ $R^2=-1,5$; o gráfico de espalhamento nesse caso está na figura 37; a figura 38 mostra que a taxa de juros é reproduzida com folga com $\beta < 1$.

6.2 Utilidade Gama

Uma taxa de aversão relativa ao risco crescente linearmente equivale à equação diferencial

$$-\frac{cu''(c)}{u'(c)} = \alpha + \beta c \quad (163)$$

cuja família de soluções é a distribuição gama acumulada:

$$u(c) = \int_0^c f(t)dt \quad (164)$$

onde

$$f(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} \quad (165)$$

Chamando de T a variável aleatória cuja distribuição é f(t), tem-se

$$\mu = E(T) = \frac{a}{b} \quad (166)$$

$$\sigma^2 = var(T) = \frac{a}{b^2} \quad (167)$$

As restrições são: $a, b, t > 0$.

$$a = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (168)$$

$$b = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (169)$$

Portanto,

$$u(C) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^C \frac{1}{t} e^{-bt} (bt)^a dt \quad (170)$$

$$u'(C) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} C^{a-1} e^{-bC} \quad (171)$$

$$\frac{d^2}{dC^2} u(C) = -\frac{1}{C^2} e^{-bC} \frac{-a+1+bC}{\Gamma(a)} (bC)^a \quad (172)$$

Conclui-se que u tem um ponto de inflexão ($u''=0$) em $C = \frac{a-1}{b}$

As taxas de aversão ao risco são:

Taxa absoluta de aversão ao risco:

$$r(C) = \frac{1}{C} (-a+1+bC) \quad (173)$$

Taxa relativa de aversão ao risco:

$$s(C) = (-a+1+bC) \quad (174)$$

Assim, se $a > 1$, $u(C)$ terá o formato de um S no primeiro quadrante do seu gráfico. A aversão relativa ao risco passa de negativa a positiva e cresce linearmente; numa analogia com as siglas CARA e CRRA, poderia-se denominar a essa classe de utilidades

Figura 39: Aversão absoluta ao risco da gama invariante.

Figura 40: Aversão relativa ao risco da gama invariante.

CIRRA (*Constantly Increasing Relative Risk Aversion*). Suponha-se, por exemplo, a meta individual de consumir U\$30 mil por ano, com uma incerteza de 50%. Introduzindo-se esses valores na função gama e usando-se como unidade milhões de dólares, tem-se: $\mu = 30/1000$, $\sigma = 15/1000$, $a = 4$, $b = \frac{400}{3} = 133.33$, o que resulta nos gráficos 39, 40 e 41.

Figura 41: Utilidade gama.

O fator de desconto estocástico correspondente é:

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{a-1} e^{-b(C_{t+1}-C_t)} \quad (175)$$

Note-se que, quando $b = 0$, M reduz-se ao fator estocástico da utilidade CRRA com $\gamma = 1 - a$; e, quando $a = 1$, ao da CARA. Uma maneira de fazer essa utilidade acompanhar o nível da série de consumo é substituir o parâmetro b por $\frac{b'}{\varsigma_t}$, onde ς_t é c_t suavizada. Fica-se com a fórmula:

$$u(C_t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{C_t} \frac{1}{\xi} e^{-\frac{b}{\varsigma_t} \xi} \left(\frac{b}{\varsigma_t} \xi \right)^a d\xi \quad (176)$$

Os momentos da variável aleatória implícita na gama ficam:

$$\mu = E(T) = \frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{b}{\varsigma_t}} = \frac{a}{b} \varsigma_t \quad (177)$$

$$\sigma^2 = var(T) = \frac{a}{b^2} = \frac{a}{\left(\frac{b}{\varsigma_t}\right)^2} = \frac{a}{b^2} \varsigma_t^2 \quad (178)$$

O fator de desconto estocástico fica:

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} = \beta \frac{\left(\frac{b}{\varsigma_{t+1}}\right)^a C_{t+1}^{a-1} e^{-\frac{b}{\varsigma_{t+1}} C_{t+1}}}{\left(\frac{b}{\varsigma_t}\right)^a C_t^{a-1} e^{-\frac{b}{\varsigma_t} C_t}} \quad (179)$$

Ou, simplificando,

$$M_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{a-1} \left(\frac{\varsigma_t}{\varsigma_{t+1}} \right)^a e^{b \left(\frac{C_t}{\varsigma_t} - \frac{C_{t+1}}{\varsigma_{t+1}} \right)} \quad (180)$$

Usando as fórmulas 35, 33 e 32, e $Q(t+2)$ como na CRRA, consegue-se, com a utilidade gama variante, $\hat{E}(R^e) = 7,86\%$, $\hat{E}(R^f) = 1,22\%$, com $\beta = 0.493117$ (a taxa de juros é extremamente sensível ao valor de β), explicando o prêmio de risco e a taxa de juros com folga (no sentido de sobrar espaço para aumentar ou diminuir β dentro do intervalo admissível $[0,1]$); além disso, o ARR diminui de 82 da CRRA para 51 ($=b-a+1$, com $b = 180$, $a = 130$); o encaixe no portfolio de Fama e French, com esses valores de a e b é muito melhor do que o da CRRA: $FF25 = 18,8\%$ e $R^2 = 0,72$, comparável ao obtido com o fator de desconto estocástico de Fama e French (combinação linear dos fatores MKT, SMB e HML), que tem $FF25 = 15,0\%$ e $R^2 = 0,73$ (com o excesso de retorno R_i^e de cada componente i do portfolio calculado agora pela fórmula correta (31)). A referida folga pode ser vista no gráfico 42 (Na horizontal, a variando de 100 a 200. Na vertical, de cima para baixo, b variando de 100 a 200. Para cada par (a,b) , a tabela exibe (invisível, devido à redução da imagem) $|E(R^e) - 7,86|$. No ponto vermelho abaixo à esquerda,

Figura 42: Mapa da gama variante.

Figura 43: Aversão relativa ao risco da gama variante com $a = 130$ e $b = 180$.

esse valor é zero. A faixa laranja indica pares (a,b) cuja série Q correspondente tem $E(QR^f) < 1$, exigindo assim $\beta = \frac{1}{E(QR^f)} > 1$. Como o ponto de mínimo não está na fronteira da região factível, conclui-se que a gama variante explica o *risk free puzzle* com folga, ao contrário da utilidade CRRA.).

A série $ARR = s(c_t) = b \frac{c_t}{\varsigma_t} - a + 1$ da gama variante com parâmetros $a = 130$ e $b = 180$ pode ser vista na figura 43.

Nos resultados acima foi usada $\varsigma_t = 9e^{0.02(t-1950)}$.

Na figura 44, exibe-se o ajuste (bom) da gama ao portfolio de Fama e French. Foi usada a série ς_t obtida por amortecimento exponencial duplo com $\alpha = 0,2$. Os parâmetros

Figura 44: Ajuste da gama ao portfolio de Fama e French.

da gama são $a = 137$ e $b = 170$. O ajuste é medido numericamente por $FF=19,4\%$ e $R^2 = 0,61$. Os pontos correspondentes aos modelos de Fama e French (M FF e FF regres) estão presentes, para comparação.

6.3 Utilidade Cauchy

A utilidade de Cauchy, definida como a distribuição de Cauchy acumulada, é:

$$u(c) = \int_{-\infty}^c \frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)} dx \quad (181)$$

Com $a = 30$ e $b = 2$, tem-se o gráfico 45.

Seus coeficientes de aversão ao risco são (r : absoluta e s : relativa):

$$r(c) = 2 \frac{c - a}{(c - a)^2 + b^2} \quad (182)$$

$$s(c) = 2c \frac{c - a}{(c - a)^2 + b^2} \quad (183)$$

Com aqueles valores dos parâmetros, tem-se os gráficos 182 e 47.

O núcleo de apreçamento é:

$$M = \beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} = \beta \frac{\frac{1}{b^2} (c_0 - a)^2 + 1}{\frac{1}{b^2} (c_1 - a)^2 + 1} \quad (184)$$

Ou, simplificando,

Figura 45: Utilidade Cauchy

Figura 46: Aversão absoluta ao risco da utilidade Cauchy

Figura 47: Aversão relativa ao risco da utilidade Cauchy

$$M = \beta \frac{(c_0 - a)^2 + b^2}{(c_1 - a)^2 + b^2} \quad (185)$$

Para fazer o parâmetro a acompanhar o nível da série de consumo *per capita*, tem-se duas opções: $a \rightarrow \varsigma - a$ e $a \rightarrow a\varsigma$. Note-se que a fórmula acima reduz-se à do fator de desconto estocástico de Constantinides (eq. 142) com $\gamma = 2$, quando $b = 0$.

Com a fórmula aditiva, obteve-se, usando o portfolio de mercado e o ativo sem risco de Fama e French, $E(M_{t+2}R_{t+1}^i) = 1$, $a = 0,4$ e $b = 0,098$ e consumo ς suavizado pelo filtro de Hodrick-Prescott: FF25=22%, $R^2=0,61$, $E(R^e)=7,7$ e $\beta_{nec} = 0,312$ (valor do fator de desconto subjetivo necessário para reproduzir a taxa de juros histórica média anual do período considerado - 1951 a 2001 - que é de 1,22%). No entanto, o filtro HP é não causal, pois usa valores futuros da série de consumo para suavizá-la.

Com a fórmula multiplicativa, obteve-se, usando o portfolio de mercado e o ativo sem risco de Fama e French, $E(M_{t+2}R_{t+1}^i) = 1$, $a = 0,992$ e $b = 0,244$ e $\alpha = 0,1$ (no amortecimento exponencial que gera a série suavizada ς): FF25=28%, $R^2=0,1$, $E(R^e)=8,4$ e $\beta_{nec} = 0,64058$.

6.4 Utilidade Cauchy modificada

Pode-se mudar o expoente da distribuição de Cauchy para outros números pares além de 2. Considere-se a seguinte definição de função utilidade, que será chamada de Cauchy modificada:

Figura 48: Utilidade Cauchy modificada

$$u(c) = \int_{-\infty}^c \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^4\right)} dx \quad (186)$$

Com os valores ótimos encontrados no caso multiplicativo com $\alpha = 0,2$ (parâmetro do amortecimento exponencial usado para obter $\{\varsigma_t\}$, para o ano 2004, $a^* = 0,92$ e $\varsigma_{2004} = 25,2$, $a = a^* \varsigma_t = 23.2 (=0,92 \times 25,2)$ e $b = 0.568$, tem-se o gráfico 48.

O fator de desconto estocástico fica:

$$Q = \frac{(c_0 - a)^4 + b^4}{(c_1 - a)^4 + b^4} \quad (187)$$

Note-se que a fórmula acima reduz-se à de Constantinides (eq. 142) com $\gamma = 4$, quando $b = 0$.

Os coeficientes de aversão ao risco ficam:

$$s = 4c \frac{(c - a)^3}{(c - a)^4 + b^4} \quad (188)$$

$$r = 4 \frac{(c - a)^3}{(c - a)^4 + b^4} \quad (189)$$

Com aqueles valores dos parâmetros, obtêm-se os gráficos de $r(C)$ (fig. 49) e $s(C)$ (fig. 50).

Para fazer o parâmetro a acompanhar o nível da série de consumo per capita, tem-se, novamente, duas opções: $a \rightarrow \varsigma - a$ e $a \rightarrow a\varsigma$.

Figura 49: Aversão absoluta ao risco da utilidade Cauchy modificada.

Figura 50: Aversão relativa ao risco da Cauchy modificada.

Método dos Momentos Generalizado				
Amostra (ajustada): 1951 2000				
Observações incluídas: 50				
Kernel: Quadrático, Largura de banda: Fixa (3), Pré-branqueamento				
Iterações dos coeficientes e da matriz ponderadora simultâneas				
Convergência obtida após: 6 matrizes ponderadoras, 7 iterações dos coeficientes				
(((CONS(0)-CE2(0)*C(1))^4+C(2)^4)/ ((CONS(1)- CE2(1)*C(1))^4 +C(2)^4))*MKTRF(0)-(0)				
Lista de instrumentos: HMLMKTRF SMBMKTRF				
	Coeficiente	Desvio pad.	Estatística t	Prob.
C(1)	0.924436	0.019672	46.99268	0.0000
C(2)	0.589522	0.158986	3.708008	0.0005
Média da var. dep.	0.000000	D.P. da var. depend.		0.000000
Erro padrão da regressão	60.44772	Soma dos resíduos quadráticos		175388.5
Estat. Durbin-Watson	1.661289	Estatística J		0.008993

Figura 51: Estimação GMM dos parâmetros da utilidade Cauchy modificada multiplicativa, usando os três fatores de Fama e French (MKT, HML e SMB).

Com a fórmula aditiva, obteve-se, usando o portfolio de mercado e o ativo sem risco de Fama e French, $E(M_{t+2}R_{t+1}^i) = 1$, $a = 1,34$ e $b = 0,5$ e $\alpha = 0,2$ (no amortecimento exponencial que gera a série suavizada ς): $FF25=13\%$, $R^2=0,80$, $E(R^e)=8,9$ e $\beta_{nec} = 0,42439$ (valor do fator de desconto subjetivo necessário para reproduzir a taxa de juros histórica média anual do período considerado - 1951 a 2001 - que é de 1,22%). Com a multiplicativa, sob as mesmas condições, mas $a = 0,92$ e $b = 0,568$, obteve-se: $FF25=14,2\%$, $R^2=0,76$, $E(R^e)=9,1$ e $\beta_{nec} = 0,538244$. A aplicação de GMM a este último caso fornece desvios padrões para os parâmetros (o J baixo confirma a aceitação estatística do modelo: $50J = 0,45 \simeq \chi_{0,5}^2(1) =$ mediana da distribuição χ^2 com um grau de liberdade), como mostra a figura 51.

A capacidade de precificar os ativos do portfolio de Fama e French é ilustrada pelo gráfico 52.

Os valores do ARR correspondentes, calculados em c_t estão no gráfico 53. Note-se, no gráfico 50, correspondente ao ano de 2004, como o ponto de operação $C = c_{2004} = 25,5$ corresponde a $s(C) \simeq 50$.

O ARR médio, calculado por

$$E[s(C)] = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{-\frac{c}{\mu}} 4c \frac{(c-a)^3}{(c-a)^4 + b^4} dc \quad (190)$$

com $\mu_t = c_t$

está no gráfico 54. O apêndice exhibe outros casos.

Figura 52: Precificação do portfólio de Fama e French pela utilidade Cauchy modificada.

Figura 53: Coeficiente de aversão relativa ao risco da Cauchy modificada, calculado em $C_t = c_t$.

Figura 54: ARR integrado sobre a distribuição do consumo. Utilidade Cauchy modificada.

7 AGENTES HETEROGÊNEOS: HÁBITO INTERNO VERSUS EXTERNO

Duas interpretações são possíveis para a utilidade Cauchy modificada obtida nesta tese:

1. Todos os americanos podem ter a mesma utilidade, isto é

$$U(C^i) = \int_{-\infty}^{C^i} \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x - a\varsigma_t}{b}\right)^4\right)} dx \quad (191)$$

onde ς_t é o consumo *per capita* americano suavizado e a e b têm o mesmo valor para todos os agentes.

Nesse caso, o ARR do i -ésimo americano é dado por

$$s = 4C^i \frac{(C^i - a\varsigma_t)^3}{(C^i - a\varsigma_t)^4 + b^4} \quad (192)$$

de modo que, se $C^i < a\varsigma_t$, seu ARR é negativo, isto é, ele é amante do risco.

Essa situação é referida na literatura como *catching up with the joneses* - expressão cunhada por Abel (ABEL, 2006) - ou "hábito externo". Os agentes comparam-se com a média e, se estiverem abaixo dela, correm riscos para atingi-la, enquanto, se estiverem acima, acomodam-se. Campbel e Cochrane (1995) usam a utilidade de Constantinides nesse contexto.

2. A função-utilidade de cada americano pode ser diferente, embora todas sejam Cauchy modificada, com os mesmos parâmetros a e b , isto é

$$U(C^i) = \int_{-\infty}^{C^i} \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x - a\varsigma_t^i}{b}\right)^4\right)} dx \quad (193)$$

onde ς_t^i é o consumo suavizado do i -ésimo americano.

Nesse caso, ele compara o seu consumo atual com sua própria média móvel histórica. Tem-se aí o que se denomina no jargão da área "hábito interno". Embora a idéia venha de mais longe, o artigo crucial para a área de apreçamento de ativos é o de Constantinides (1990).

A modelagem de hábito interno apresenta um problema matemático, quando se considera a otimização multiperíodo em vez do modelo a dois períodos aqui considerado. Isso é mostrado na próxima seção.

Pode-se também combinar os dois tipos acrescentando um parâmetro $\kappa \in [0, 1]$ à função-utilidade, de modo que os extremos correspondam aos modelos acima e casos intermediários sejam codificados pelos outros valores:

$$U(C^i) = \int_{-\infty}^{C^i} \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a(\varsigma_t^i)^\kappa (\varsigma_t)^{(1-\kappa)}}{b} \right)^4 \right)} dx \quad (194)$$

Abel faz isso em sua utilidade definida por 148 e 149. A diferença é que ele usa um modelo mais sujeito a flutuações para ς_t : $\varsigma_t = c_{t-1}$. O uso dos quintis da distribuição de renda permitiria, em tese estimar κ .

7.1 Hábito interno

As fórmulas do fator de desconto estocástico com as utilidades gama e Cauchy ingênuas ($\varsigma_t = c_{t-1}$) são impraticáveis, para uso em programas estatísticos, por envolverem irredutivelmente integrais. Na verdade, mesmo no caso a dois tempos (eqs. 17 e 18) o fator de desconto estocástico já adquire uma forma intratável, como se vê a seguir.

Denotem-se por u_1 e u_2 as derivadas parciais da utilidade u em relação aos seus primeiro e segundo argumentos, respectivamente. Substituindo as restrições na função-objetivo, vem:

$$U = u(c_t, c_{t-1}) + \beta E_t[u(c_{t+1}, c_t)] = u(e_t - p_t \xi, c_{t-1}) + \beta E_t[u(x_{t+1} \xi, e_t - p_t \xi)] \quad (195)$$

$$\frac{d}{d\xi} U = -p_t u_1(c_t, c_{t-1}) + \beta E_t[x_{t+1} u_1(c_{t+1}, c_t) - p_t u_2(c_{t+1}, c_t)] = 0 \quad (196)$$

Donde,

$$p_t [u_1(c_t, c_{t-1}) + \beta E_t[u_2(c_{t+1}, c_t)]] = \beta E_t[x_{t+1} u_1(c_{t+1}, c_t)] \quad (197)$$

$$p_t = \frac{1}{u_1(c_t, c_{t-1}) + \beta E_t[u_2(c_{t+1}, c_t)]} \beta E_t[x_{t+1} u_1(c_{t+1}, c_t)] \quad (198)$$

Ou, a chamada equação básica de apreçamento

$$p_t = E_t \left[\beta \frac{u_1(c_{t+1}, c_t)}{u_1(c_t, c_{t-1}) + \beta u_2(c_{t+1}, c_t)} x_{t+1} \right] \quad (199)$$

Donde,

$$M_{t+1} = \beta \frac{u_1(c_{t+1}, c_t)}{u_1(c_t, c_{t-1}) + \beta u_2(c_{t+1}, c_t)} \quad (200)$$

7.1.1 Com a utilidade gama Se $\varsigma_t = c_{t-1}$ tem-se:

$$u(c_t, c_{t-1}) = \frac{\left(\frac{b}{C_{t-1}}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_{t-1}}\xi} d\xi \quad (201)$$

de modo que

$$u_1(c_t, c_{t-1}) = \frac{1}{\Gamma(a)} c_t^{a-1} \left(\frac{b}{C_{t-1}}\right)^a e^{-b\frac{c_t}{C_{t-1}}} \quad (202)$$

$$u_2(c_{t+1}, c_t) = \frac{-a \left(\frac{b}{C_t}\right)^{a-1} \frac{b}{C_t^2}}{\Gamma(a)} \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_t}\xi} d\xi + \frac{\left(\frac{b}{C_t}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} b \xi \frac{1}{C_t^2} e^{-\frac{b}{C_t}\xi} d\xi \quad (203)$$

Resultando na seguinte fórmula para $Q_{t+1}(= M_{t+1}/\beta)$:

$$\frac{\frac{1}{\Gamma(a)} c_{t+1}^{a-1} \left(\frac{b}{C_t}\right)^a e^{-b\frac{c_{t+1}}{C_t}}}{\frac{1}{\Gamma(a)} c_t^{a-1} \left(\frac{b}{C_{t-1}}\right)^a e^{-b\frac{c_t}{C_{t-1}}} + \beta \frac{-a \left(\frac{b}{C_t}\right)^{a-1} \frac{b}{C_t^2}}{\Gamma(a)} \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_t}\xi} d\xi + \beta \frac{\left(\frac{b}{C_t}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_{t+1}} \xi^a b \frac{1}{C_t^2} e^{-\frac{b}{C_t}\xi} d\xi} \quad (204)$$

já com integrais irredutíveis no denominador.

7.1.2 Com a Cauchy modificada O mesmo ocorre com as utilidades Cauchy. No caso da modificada, a definição $\varsigma_t = c_{t-1}$ resulta em:

$$u(c_t, c_{t-1}) = \int_{-\infty}^{c_t} \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x - ac_{t-1}}{b}\right)^4\right)} dx \quad (205)$$

$$u_1(c_t, c_{t-1}) = \frac{1}{\pi b} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{b^4} (c_t - ac_{t-1})^4 + 1} \quad (206)$$

$$u_2(c_{t+1}, c_t) = \int_{-\infty}^{c_{t+1}} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3 a (x - ac_t)^3}{(b^4 + x^4 - 4ax^3c_t + a^4c_t^4 - 4a^3xc_t^3 + 6a^2x^2c_t^2)^2} dx \quad (207)$$

Desse modo, tem-se:

$$M_{t+1} = \beta \frac{\frac{1}{\pi b} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{b^4} (c_{t+1} - ac_t)^4 + 1}}{\frac{1}{\pi b} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{b^4} (c_t - ac_{t-1})^4 + 1} + \beta \int_{-\infty}^{c_{t+1}} \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3 a (x - ac_t)^3}{(b^4 + x^4 - 4ax^3c_t + a^4c_t^4 - 4a^3xc_t^3 + 6a^2x^2c_t^2)^2} dx} \quad (208)$$

Mais simples do que a gama, porém com uma integral irredutível no denominador.

Esse é o motivo pelo qual o amortecimento exponencial usado nesta tese fornece

$c_t = f(c_{t-2}, c_{t-3}, \dots)$, não dependendo, portanto de c_{t-1} . Para um modelo a dois tempos como o aqui usado, isso resolve. Para modelos multitemporais, o problema é mais complexo, como mostra-se a seguir.

7.1.3 Caso multitemporal Yoshino (2005) desenvolve uma fórmula para apreçamento de ativos sob inflação, que incorpora "shopping time", isto é, custos de transação decorrentes do regime inflacionário. A dedução, entretanto, está particularizada para utilidades do tipo c^a/a . Aquela fórmula é obtida aqui para utilidades mais gerais e, em seguida, particularizada para a gama (com média variante e invariante) e a de Constantinides (com uma modificação).

Considere-se uma economia com inflação alta e as variáveis $s, b, m, d, v, \theta, p, R, \pi, x, \xi, z$ etc. (vide apêndice, para as definições). Então pode-se enunciar o seguinte teorema, de minha autoria:

TEOREMA: O fator de desconto estocástico correspondente ao problema

$$\text{Max}_{s,b,m,d,v} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, c_{t-1})$$

sujeito a, $\forall t$:

$$c_t = H(m_t, d_t) f(s_t)$$

$$c_t = h_t + \xi_t + 1 - m_{t+1}\pi_{t+1} + m_t + \theta_t - x_t v_{t-1} + p_t v_t + R_t^g b_t^g - b_{t+1}^g - s_t - (1-z)R_t^l d_t + R_t^d d_t$$

é dado por

$$M_{t+1} = \beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \quad (209)$$

A demonstração está no apêndice.

Essa dependência de consumos futuros é mencionada em Cochrane (2005b), ao citar autores (Restoy e Weil) que aproximam o portfolio de mercado (incluindo bens não transacionados em bolsa, como imóveis e capital humano) por uma fórmula que contém $\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \ln(c_{t+j+1}/c_{t+j})$. Assim, como observa Cochrane, variáveis que predizem taxas de crescimento futuras do consumo passam a entrar como fatores adicionais de risco.

Note-se que, sem os custos de transação ($s=0$), M fica:

$$M_{t+1} = \beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \quad (210)$$

A particularização para $U = U(c_t)$ é:

$$M_{t+1} = \beta \frac{U'(c_{t+1})}{U'(c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \quad (211)$$

COROLÁRIO:

Para U dependente do consumo em três períodos anteriores, o numerador da equação 210 ficaria:

$$U_1(c_{t+1}, c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1}, c_t) + \beta^2 U_3(c_{t+3}, c_{t+2}, c_{t+1}) \quad (212)$$

A generalização para utilidades dependentes do consumo anterior em T períodos é:

$$M_{t+1} = \beta \frac{\sum_{i=0}^T \beta^i U_{1+i}(c_{t+1+i}, c_{t+i}, \dots, c_{t+1})}{\sum_{i=0}^T \beta^i U_{1+i}(c_{t+i}, c_{t+i-1}, \dots, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \quad (213)$$

A seguir, são exibidas particularizações para três utilidades diferentes.

Com a utilidade gama ingênua O modelo de horizonte infinito com a $\varsigma_t = c_{t-1}$ na utilidade gama resulta em (ver apêndice, para a dedução)

$$M_{t+1} = c_t^2 C_{t-1}^a c_t^a \mathcal{F} \quad (214)$$

onde $\mathcal{F}$ é dado pela fórmula:

$$\frac{-\exp\left(-b \frac{-c_t C_t + c_{t+1} C_{t-1}}{C_{t-1} C_t}\right) c_{t+1}^{a+1} + e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_t^a c_{t+1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+2}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_{t+1}} \xi} d\xi - b e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_t^a C_{t+1}^{-a} \int_0^{c_{t+2}} \xi^a e^{-\frac{b}{C_{t+1}} \xi} d\xi}{c_{t+1}^2 \left(-c_t^{2a+1} C_t^a + c_t a \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_t} \xi} d\xi e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_{t-1}^a C_t^{-b} \int_0^{c_{t+1}} \xi^a e^{-\frac{b}{C_t} \xi} d\xi e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_{t-1}^a c_t^a \right)}$$

Utilidade de Constantinides A utilidade de Constantinides, transcrita para tempo discreto, é do tipo:

$$U(c_t, x_t) = \frac{(c_t - x_t)^b}{b} \quad (215)$$

onde

$$x_t = a^t x_0 + \sum_{r=1}^t a^{t-r} c_{t-r} \quad (216)$$

Assim, $U(c_t, x_t) = U(c_t, c_{t-1}, c_{t-2}, \dots, c_1; x_0, a, b)$

Desse modo, a fórmula 213 aplica-se, desde que a definição de x seja alterada para

$$x_t = a^t x_0 + \sum_{r=1}^T a^{t-r} c_{t-r} \quad (217)$$

(Caso contrário, o número de argumentos de U cresceria com t)

Então,

$$U(c_t, x_t) = \frac{1}{b} \left(c_t - a^t x_0 - \sum_{r=1}^T a^{t-r} c_{t-r} \right)^b \quad (218)$$

E

$$U_1(c_t, c_{t-1}, \dots, c_{t-T}) = (c_t - x_t)^{b-1} \quad (219)$$

$$U_k(c_t, c_{t-1}, \dots, c_{t-T}) = \frac{\partial}{\partial c_{t-k+1}} U = -(c_t - x_t)^{b-1} a^{t-k+1}, \text{ para } k > 1 \quad (220)$$

Assim,

$$M_{t+1} = \beta \frac{\sum_{i=0}^T \beta^i U_{1+i}(c_{t+1+i}, c_{t+i}, \dots, c_{t+1})}{\sum_{i=0}^T \beta^i U_{1+i}(c_{t+i}, c_{t+i-1}, \dots, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \quad (221)$$

Então, $Q=M/\beta$ fica:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \frac{(c_{t+i+1} - x_{t+i+1})^{b-1} - \sum_{i=1}^T \beta^i (c_{t+i+1} - x_{t+i+1})^{b-1} a^{t-k+1}}{(c_{t+i} - x_{t+i})^{b-1} - \sum_{i=1}^T \beta^i (c_{t+i} - x_{t+i})^{b-1} a^{t-k+1}} \quad (222)$$

7.2 Hábito externo

Para testar se o modelo correto é hábito interno ou externo, foram obtidas (na página <http://www.bls.gov/cex/>) as séries despesas anuais de consumo das famílias americanas no período 1984-2005 (ver figura 55) e usada a utilidade Cauchy generalizada 194. Usei planilha Excel, para minimizar a soma dos erros quadráticos

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \left[E(R_j^e) - \hat{E}_i(R_j^e) \right]^2 \quad (223)$$

onde $\hat{E}_i(R_j^e)$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ são as estimativas para os excessos de retorno dos três fatores de Fama e French (MKT-Rf, SMB e HML) e i denota os quintis de renda. A figura 56 mostra os gráficos das séries anuais de despesas das famílias americanas. Não foi possível reduzir o erro relativo percentual

$$\varepsilon\% = 100 \sqrt{\frac{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 \left[E(R_j^e) - \hat{E}_i(R_j^e) \right]^2}{\frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 E(R_j^e)^2}} \quad (224)$$

Figura 55: Séries temporais dos quintis de renda das famílias (*households*) americanas. Dólares constantes de 1993.

Figura 56: Séries das despesas de consumo anual das famílias, por quintis de renda.

a menos de 90%.

Esse resultado negativo mostra a total desconexão entre as séries $Q^i(t+1)$ e $R_j^e(t)$ correspondentes aos dados usados e à utilidade 194. A figura 57 mostra a insensibilidade do erro (equivalente ao J do GMM) ao parâmetro κ . Os parâmetros ótimos aqui são $a = 0,9$, $b = 0,35$ e $\kappa = 0,35$.

Figura 57: Insensibilidade ao parâmetro κ no caso do M não agregado.

7.3 Agregação do fator de desconto estocástico

Brav *et al* (2002) chamam a atenção para o fato, já notado anteriormente por Constantinides, em 1982, de que a equação básica de apreçamento 25 é válida para cada um dos agentes econômicos, de modo que pode-se escrever:

$$E[M_{t+1}^i R_{t+1} | I_t] = 1 \quad (225)$$

Desse modo, pode-se somar I equações desse tipo, para obter:

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I E[M_{t+1}^i R_{t+1} | I_t] = 1 \quad (226)$$

ou

$$E \left[\left(\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I M_{t+1}^i \right) R_{t+1} | I_t \right] = 1 \quad (227)$$

Ou seja, o correto é agregar o M e não o consumo! Sob certas circunstâncias (mercados completos, principalmente), as duas coisas são equivalentes, mas em geral não. O departamento do trabalho americano faz questão de definir unidades de consumo como sendo grupos de pessoas que tomam decisões econômicas de comum acordo; assim, uma pessoa que more em um quarto alugado em casa de família não é agrupada com esta, mas considerada ela mesma como uma *household*. Assim, a única justificativa para se usar consumo *per capita* é o fato do país contar com um governo central, que toma decisões econômicas pela sua população com a aquiescência implícita ou explícita dela.

Considerando-se cada quintil de renda como uma unidade de consumo, tem-se

$$\bar{M}_{t+1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 M_{t+1}^i \quad (228)$$

Figura 58: Usando M agregado e $M(t+2)R(t+1)$, não há um mínimo global bem definido.

Supondo que β , a , b e κ sejam comuns aos cinco grupos de renda, tem-se

$$\bar{M}_{t+1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \beta Q_{t+1}^i(c_{t+1}^i, c_t^i; a, b, \kappa) \quad (229)$$

Usando a utilidade Cauchy generalizada 194 e a equação de apreçamento $E_t[M_{t+2}R_{t+1}] = 1$, conseguiu-se aqui $\varepsilon\% = 29\%$, com $a = 0,8$, $b = 0,05$ e $\kappa = 0,55$. A figura 58 indica a não confiabilidade desse resultado, devido à inexistência de um claro ponto de mínimo global.

Usando as equações $E_t[\bar{M}_{t+1}R_{t+1}^j] = 0$, $j = \text{MKT-RF, SMB, HML}$, tem-se o gráfico 59, obtido com $a = 0,9$ e $b = 0,2$. Em $\kappa = 0$, $\varepsilon\%$ desce a $6,9\%$. Nesse caso, parece haver um mínimo global bem definido. A se confirmar esse resultado, concluiria-se que o modelo deve ser de hábito externo puro, como o de Campbell e Constantinides (1995).

Observe-se também que o parâmetro b tem dimensão de dinheiro, de modo que importa saber a unidade monetária usada. Os parâmetros correspondentes às figuras 57, 58 e 59 foram obtidos com as séries de consumo familiar expressas em dólares de 1893 divididos por 100.

Uma maneira indireta de agregar o fator de desconto estocástico é simplesmente expandi-lo em série de Taylor e reter até o termo de segunda ou terceira ordem. Dessa forma, consideram-se variância e/ou momentos superiores da distribuição *cross-section* do consumo. A seção 3.4 exhibe as expressões gerais, para qualquer utilidade, e as referentes à utilidade potência. É possível particularizá-las para a Cauchy modificada. A aproximação quadrática fica (ver apêndice, para a dedução):

Figura 59: Gráfico do erro médio para M e R contemporâneos. M agregado.

$$Q(t + dt) = 1 + \frac{(-4)(C-a)^3}{(a^4+b^4+C^4-4aC^3-4a^3C+6a^2C^2)}dC + \frac{1}{4}\frac{\pi}{b^3}\sqrt{2}(a^4+b^4+C^4-4aC^3-4a^3C+6a^2C^2) \cdot \left(\frac{32}{\pi}\sqrt{2}\frac{b^3(C-a)^6}{(a^4+b^4+C^4-4aC^3-4a^3C+6a^2C^2)^3} - \frac{12}{\pi}\sqrt{2}\frac{b^3(C-a)^2}{(a^4+b^4+C^4-4aC^3-4a^3C+6a^2C^2)^2} \right) dC^2 + \dots$$

$$\text{Agora, } a^4 + b^4 + C^4 - 4aC^3 - 4a^3C + 6a^2C^2 = (C - a)^4 + b^4$$

Então,

$$Q(t + dt) = 1 - s(C)\frac{dC}{C} + \left[s(C)^2 - \frac{3}{2}\frac{C}{C-a}s(C) \right] \left(\frac{dC}{C} \right)^2 + \dots$$

onde $s(C) = 4C\frac{(C-a)^3}{(C-a)^4+b^4}$ é o coeficiente de aversão relativa ao risco calculado em C . Para intervalos temporais finitos (tempo discreto), tem-se $dC \simeq C_{t+1} - C_t$.

Somando nas famílias ⁵ (*households*: $C = C^i$) e dividindo toda a equação pelo número total de famílias, obtém-se uma expressão para M , na qual aparecem os momentos amostrais de ordem superior referidos.

Essa linha de pesquisa, adotada pioneiramente por Constantinides e Duffie (1996), tem o potencial de baixar o ARR local de ~ 50 para algo bem menor.

⁵Tenha-se em conta que as famílias pertencentes ao quintil superior são, em média, duas vezes maiores do que aquelas pertencentes ao quintil inferior (3,2 pessoas por família contra 1,7) e que o número de pessoas que ganham dinheiro na família do quintil superior é, em média, quatro vezes maior do que no quintil inferior (2,1 contra 0,5).

8 BRASIL

No caso de países em desenvolvimento, como o Brasil, a dificuldade de obtenção de dados estatísticos é flagrante. Séries setoriais da BOVESPA, por exemplo, só passaram a existir há menos de 5 anos. Por isso, autores que estudam o "equity premium" brasileiro, como Bonomo, Cia, Yoshino e outros, usam dados trimestrais; o mesmo teve que ser feito no presente trabalho. A sazonalidade que esse tipo de série apresenta é um problema, que, para ser resolvido, requer a introdução de mais parâmetros no modelo.

Os gráficos 60 a 72 dão uma visão geral dos dados. É importante exibí-los, para mostrar as semelhanças e diferenças com os EUA. O gráfico da figura 60 mostra o caráter fortemente sazonal da série trimestral do consumo brasileiro. O da figura 61 dá uma perspectiva de mais longo prazo da mesma série. A figura 62 mostra como, a exemplo dos EUA, a volatilidade da séries e retornos do índice do mercado acionário (R_m) é uma ordem de grandeza maior do que as do consumo e do ativo sem risco. A figura 63 mostra a co-evolução do IBOVESPA, do ITEL e do IEE (índices dos setores de telecomunicações e energia elétrica, respectivamente). A figura 64 mostra a série mensal recente bivariada (juros, ibovespa), representada por pontos consecutivos no gráfico; a evolução é caótica. A figura 65 mostra a evolução do mesmo vetor ao longo de 12 anos; a caoticidade permanece. A figura 66 mostra a evolução recente dos retornos dos índices acionários, de consumo e de taxa de juros, contrastando a estabilidade destes dois últimos com a alta volatilidade dos primeiros. A figura 67 mostra a evolução mensal recente do vetor (inflação, juros), começando do ponto mais alto do gráfico. A figura 68 mostra a mesma evolução, mas a partir do plano real; pode-se perceber uma convergência ao longo de 10 anos, iniciando-se no canto superior direito e estabilizando-se no embolado inferior esquerdo. A figura 69 mostra uma perspectiva de 30 anos do mesmo vetor; a grande curva envoltória pertence ao período Collor, estabelecendo uma distinção radical entre essa e as outras presidências nas três décadas que o gráfico abrange. A figura 70 mostra a taxa de juros de curto prazo (*overnight*) ao longo de três décadas; o período hiperinflacionário sobressai-se no gráfico como um terremoto em um sismógrafo. A figura 71 mostra que mesmo a taxa de juros real parece indicar a ocorrência de um fenômeno tectônico. Finalmente, a figura 72 mostra a evolução caótica ao longo de dez anos do vetor trimestral (juros, variação do consumo).

Torna-se claro, pelos gráficos 69, 70 e 71, que usar dados do período inflacionário é temerário.

Figura 60: Consumo trimestral *per capita* em reais

Figura 61: Consumo timestral ao longo de 12 anos.

Figura 62: Retornos reais de mercado, do ativo sem risco (selic-overnight) e variação trimestral do consumo. Brasil.

Figura 63: Índices acionários brasileiros.

Figura 64: Mercado versus ativo 'sem risco'.

Figura 65: Perspectiva mais ampla da relação entre taxa de juros e o índice BOVESPA.

Figura 66: Séries de interest para o *equity premium*.

Figura 67: Ativo "sem risco" versus inflação

Figura 68: A trajetória do vetor (inflação,overnight) no Brasil é caótica, mas vem convergindo

Figura 69: O período Collor é responsável pela grande curva envoltória.

Figura 70: O período hiperinflacionário sobressai-se no gráfico como um terremoto em um sismógrafo.

Figura 71: Mesmo acompanhando geralmente a inflação, o ativo sem risco às vezes descola-se totalmente dela.

Figura 72: Consumo versus ativo sem risco: caótico.

8.1 Comparação entre Brasil e EUA

A diferença entre as duas economias é bem ilustrada pela figura 73. Os gráficos anteriores mostram que, no caso brasileiro, além das séries temporais serem muito curtas, o relacionamento entre elas é de tal forma caótico que a comparação com a economia americana deve ser feita com uma certa dose de cautela.

8.2 Equações linearizadas

Com as equações linearizadas (77 e 78) o ARR e o β obtidos, usando o período 1992-2003 trimestral, estão na tabela 74.

Usando apenas o período jun2002-dez2005, tem-se a tabela 75.

Como se pode ver pela tabela 75, as séries temporais de tamanho 15 correspondentes ao período 2002-2005 não são suficientes para estimar o ARR e o β . Não é, portanto, de surpreender que também não sejam suficientes para estimar os parâmetros de uma utilidade mais complexa, como a Cauchy modificada. De fato, tem-se $E(R_{IBOV} - R^f) = 0,0034 \pm 0,04 \simeq 0$, $E(R_{IEE} - R^f) = -0,0025 \pm 0,04 \simeq 0$ e $E(R_{ITEL} - R^f) = 0,029 \pm 0,03 \simeq 0$ (onde o número que vem depois do $\pm$ é o desvio padrão da série dividido por $\sqrt{n}$ - no caso, $n=15$). Ou seja, esses excessos de retorno dos índices sobre o ativo sem risco são estatisticamente nulos. Assim, qualquer série temporal $Q(t)$ com média não nula gerada independentemente do mercado financeiro resulta em $\hat{E}(R_i^e) = -\frac{cov(Q, R^e)}{E(Q)} = 0$, reproduzindo, portanto, aqueles excessos de retorno. Isso significa que quase quaisquer

Figura 73: No lado esquerdo, EUA. No direito, Brasil. Esse gráfico comparativo ilustra a caoticidade da economia brasileira, comparada à americana.

ano	ações real	$rm=\ln(Rm)$	Rf	$rf=\ln(Rf)$	cons. Real	$g=\ln(G)$
média	1.058058085	0.031467875	1.032457530	0.031318602	1.002596734	0.002318397
desvpad	0.236547249	0.22758108	0.036734178	0.035708562	0.023843659	0.023637504
variância	0.055954601	0.051793148	0.0013494	0.001275101	0.00056852	0.000558732
-						
$cov[rm(t+1),g(t)]$	0.000997805					
$cov[rm(t),g(t)]$	0.0001206					
$cov[rm(t),g(t+1)]$	0.000748103	$correl[rm(t),g(t+1)]:$	0.152852405			
-						
$cov[rm(t),g(t+2)]$	0.000360944					
ARR	34.81586476					
beta trimestr	0.748837476	beta^4: anual	0.314449048			

Figura 74: Cálculo do coeficiente de aversão relativa ao risco (ARR) e do fator de desconto subjetivo (beta) usando as equações linearizadas. Séries trimestrais 1992-2003. Brasil.

	Rm	rm=ln(Rm)	rf=ln(Rf)		
MÉDIAS	1.048	0.038	1.045	0.044	1.020
DESV PAD	0.1446	0.1415	0.0067	0.0064	0.0796
VAR	0.020904863	0.020030094	4.49284E-05	4.0985E-05	0.006340528
cov(rm,g)	0.00145181			t,t-1	
cov(rm,g)	0.002296513	correl(rm,g):	0.213346209	t,t	
cov(rm,g)	0.002628221	correl(rm,g):	-0.231806067	t,t+1	
cov(rm,g)	0.000789221			t,t+2	
ARR t,t	58.83952777				
beta	2.56023E-05	beta^4:	4.29654E-19		
ARR t,t+1	51.41338633				
beta	6.34612E-05	beta^4:	1.62193E-17		

Figura 75: ARR e β . Séries trimestrais jun2002-dez2005. Brasil

valores dos parâmetros da utilidade são aceitos. Por isso o GMM não funciona aqui, resultando em mensagens como "matriz singular" ou "overflow".

8.3 Utilidade Cauchy modificada

Usando os dados da tabela 74, os parâmetros encontrados para a utilidade Cauchy modificada foram $a = 0,984$ e $b = 0,056$. A suavização ς da série de consumo foi obtida com o filtro de Hodrick-Prescott usando os valores *default* do pacote E-views 4. Com essas especificações, o modelo resultante explica o prêmio trimestral médio de 2,56% e, com $\beta_{anual} = 0,45058$ ($\beta_{trim} = 0,8193$), a taxa de juros trimestral média do período (3,2%). O ARR calculado no valor médio *per capita* do trimestre tem sua série temporal exibida na figura 76.

O ARR integrado sobre a distribuição do consumo tem seu gráfico exposto na figura 77. Ele tem média ligeiramente abaixo do correspondente americano (1,2 em vez de 1,5), oscilando entre 1 e 1,5.

Figura 76: Aversão relativa ao risco no Brasil usando a utilidade Cauchy modificada.

Figura 77: ARR integrado sobre a distribuição do consumo brasileiro, suposta exponencial com média igual ao consumo per capita de cada trimestre.

9 CONCLUSÕES

A utilidade de Constantinides-Campbell-Cochrane não permite o uso do conceito de ARR médio ($E[s(C)] = \int s(c)f(c)dc$), que deu margem, nesta tese, a um forma de resolução do *equity premium puzzle*, ao se constatar que $E[s(C)] = 1,5 \pm 0,2$, no caso da utilidade Cauchy modificada (e $E[s(C)] \simeq 1,2$, para o mercado brasileiro).

Note-se que, no caso da utilidade gama, sendo $s(C) = -a+1+bC$ linear, não há diferença entre o ARR calculado no nível médio e sua média *cross-section*, pois a linearidade do operador esperança resulta em $E[s(C)] = E[(-a+1+bC)] = -a+1+bE(C) = -a+1+bc = s[E(C)]$. Desse modo, seja qual for a distribuição do consumo americano, o alto nível em torno do valor per capita (~ 50 cf. fig. 43) reproduz-se no ARR médio.

A utilidade logística tem $E[s(C)] \neq s[E(C)]$, mas tem baixa capacidade de apreçamento dos ativos do portfolio de Fama e French e, como a gama, tem $s(c)$ crescente, o que não é bem aceito pela opinião corrente em economia.

Assim, exibi aqui uma utilidade - a Cauchy modificada - que goza de propriedades muito interessantes: explica as apostas em loteria pelos americanos de baixo poder aquisitivo, resolve o *riskfree puzzle*, resolve, no conceito de ARR médio, o *equity premium puzzle* e tem coeficiente de aversão relativa ao risco tendendo assintoticamente para $s=4$, quando $c \rightarrow \infty$. Se essa for de fato a função-utilidade dos americanos, significa que, em média, o ARR americano é 1,5, o que ameniza a descoberta perturbadora de que o ARR do agente representante daquele país deve ser maior do que 40, para explicar as séries temporais históricas do seu mercado financeiro. O agente representante é uma abstração e nada impede que seu ARR seja diferente dos das pessoas reais e que estas tenham valores diferentes desse coeficiente conforme seu nível de consumo.

Não ficou claro, pela análise relativa a agentes heterogêneos, se deve-se considerar a Cauchy com hábito interno ou externo. Talvez isso se deva ao pequeno tamanho das séries disponíveis (1984 a 2005) ou talvez haja questões mais profundas envolvidas. Por exemplo, quintis não são unidades decisórias, ao contrário das famílias e do país. O estudo de Brav *et al* mencionado usa famílias mesmo (entre 500 e 800 mapeadas pelo governo americano em amostragem por domicílios) e relata sucesso na obtenção de ARR baixo (entre 3 e 4) com o fator de desconto estocástico da utilidade potência agregado. Cochrane (2005b), no entanto, estranha que esse resultado se choque com os resultados opostos de outros trabalhos que também usam agregação. Cabe mencionar que, para que o resultado com M agregado seja diferente do obtido com o consumo *per capita*, é preciso que os agentes econômicos estejam impossibilitados de fazer seguro completo contra variações bruscas do seu consumo; se esse seguro for possível, os M^i (do i -ésimo

agente) igualam-se estado por estado da natureza. A maioria dos autores concorda que, para agentes que auferem a maior parte de seus rendimentos de seu próprio trabalho (caso de mais de 2/3 dos americanos), esse tipo de seguro é muito difícil, devido a problemas relacionados ao jogo agente-principal.

Uma descoberta estranha é a de que a correlação entre as séries de taxa de crescimento do consumo e taxa de retorno de índices amplos do mercado acionário atinge seu pico no lag 1, isto é $\rho(g_{t+j}, r_t^m)$ é máximo para $j=1$ ($g=\ln G$, $r=\ln R$, sendo G a taxa de crescimento do consumo e R o retorno das ações). Isso ocorre tanto nas séries anuais americanas quanto nas séries trimestrais brasileiras. A questão de quanto tempo as oscilações na bolsa levam para se refletirem no consumo merece exame mais detalhado (alguns autores propõem um modelo em que, ao longo do ano, investe-se em renda fixa e uma vez por ano toma-se uma decisão a respeito de investir ou não em bolsa...).

A função $s(C)$ (aversão ao risco relativa) da utilidade Cauchy (figura 50, na qual o agente representante opera no nível ~ 25) corresponde ao que se observa na prática em psicologia: vindo da direita para esquerda, isto é, diminuindo-se o nível de consumo, caindo um pouco abaixo do nível habitual, o agente é primeiro tomado de pânico (alta ARR) e em seguida, quando o consumo cai mais ainda, de desespero (ARR negativa) e, portanto, disposição de arriscar tudo para voltar ao normal; para valores ainda menores, o sentimento é de desolação e vaga esperança (ARR negativo porém pequeno em módulo). O modelo de Hamos e Heifetz (2001) poderia ser generalizado e servir de *testbed* para funções-utilidade com formato em S. Pesquisas futuras poderiam examinar modelos multitemporais (o daqui sendo de dois tempos) a tempo discreto e contínuo e as consequências para os modelos de ciclos reais, usando a utilidade Cauchy modificada aqui proposta.

REFERÊNCIAS

- ABEL, Andrew B. Equity Premia with Benchmark Levels of Consumption: Closed-form Results. **NBER Working Paper** 12290, 2006. Disponível em <<http://www.nber.org/papers/w12290>>. Acesso em: 24/09/2007.
- AYAGARI, S.R. e GERTLER, M. *Asset Returns with Transactions Costs and Uninsured Individual Risk*. **Journal of Monetary Economics**, vol. 27, n.º 3 (junho):311331, 1991.
- ALVAREZ, F.; JERMANN, U. *Efficiency, Equilibrium, and Asset Pricing with Risk of Default*. **Econometrica**, vol. 68, n.º 4 (julho):775797, 2000.
- ARAÚJO, A. **Introdução à Economia Matemática**. Minicurso, 14.º. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA. Poços de Caldas, 1983.
- ARAÚJO, F. *et al.* *Estimating the Discount Factor without a Utility Function*. **Ensaio econômico**. n.º 583, FGV-EPGE. Rio de Janeiro, 2005.
- BANSAL, R.; COLEMAN, J.W. *A Monetary Explanation of the Equity Premium, Term Premium, and Risk-Free Rate Puzzles*. **Journal of Political Economy**. vol. 104, n.º 6 (dezembro):113571,1996.
- BARBERIS, N., *et al.* *Prospect Theory and Asset Prices*. **Quarterly Journal of Economics**. vol. 116, no. 1, (fevereiro): 153, 2001.
- BARBERIS, N. *et al.* *A Model of Investor Sentiment*. **Journal of Financial Economics**. v. 49 pp. 307—343, 1998.
- BARRO, R.J. *Rare Events and the Equity Premium*. **NBER Working Paper**. No. 11310, 2005.
- BENARTZI, S.; THALER, H. R. *Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle*. **The Quarterly Journal of Economics**, fev., 73-92. 1995.
- BRAV, A. *et al.* *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and Limited Participation: Empirical Evidence*. **Journal of Political Economy**, vol 110, n. 4, pp 793-824. 2002.
- BROWN, S. *et al.* *Survival*. **Journal of Finance**, vol. 50, n.º 2 (junho):853873. 1995.

CAMPBELL, John Y.; COCHRANE, John H.. *By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market behavior*. **NBER Working Paper Series**. Cambridge, MA, n°. 4995, jan. 1995.

CAPLAN, B. *The Austrian Search for Realistic Foundations*. **Southern Economic Journal**. 65, 4, 823-838, 1999.

CATALÃO, A. B; YOSHINO, J. A. *The Equity Premium Puzzle: Brasil e Estados Unidos*. **USP Working Paper**, 2004.

COCHRANE, John H. **Asset Pricing**. Princenton University Press. 2005a.

COCHRANE, John. H. *Financial Markets and the Real Economy*. **National Bureau of Economic Research**. Working paper 11193, 2005b.

CONSTANTINIDES, George M. *Market Organization and the Prices of Financial Assets*. **The Manchester School Supplement** , 1463–6786, 1–23, 2006.

CONSTANTINIDES, George M. *Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle*. **Journal of Political Economy**. Vol. 98, n°. 3, 519-542, 1990.

CONSTANTINIDES, Geoge M.*et al.* *Junior Must Pay: Pricing the Implicit Put in Privatizing Social Security*, **NBER Working Papers**. 8906, 2002.

CONSTANTINIDES, George M.; DUFFIE, D. *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*. **Journal of Political Economy**, vol. 104, n°. 2 (abril):219240, 1996.

CYSNE, R. P. *Equity-Premium Puzzle: Evidence from Brazilian Data*. **Revista de Economia Aplicada**, São Paulo, v. 10, n°. 2, p. 161-180, 2006.

DRAGULESCU, A; YAKOVENKO, V.M. *Evidence for the exponential distribution of income in the USA*. **The European Physical Journal B**. Vol. 20, pp. 585-589, 2001.

EPSTEIN, L. G.; ZIN, S. E. *Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis*. **Journal of Political Economy**. Vol. 99, n°. 2, pp. 263-286, 1991.

EPSTEIN, L. G.; ZIN, S. E. *Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework*. **Econometrica**. Vol. 57, No. 4, pp. 937-969, 1989.

FAMA, E.F.; FRENCH, K.R. *The Equity Premium Puzzle*. **Journal of Finance**. Abril, 637-659, 2002.

FAMA, E.F.; FRENCH, K.R. *Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies*. **The Journal of Finance**, Vol. 51, No. 1. março, pp. 55-84, 1996.

FARIAS NETO, João José. Modelo Bayesiano de Crescimento Linear para Previsão de Séries Temporais. Dissertação de mestrado. PUC-Rio, DEE, 1981.

FRIEDMAN, M.; SAVAGE, J. *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*. **Journal of Political Economy**, 56, 279-304, 1948.

GROSSMAN, S.J.; SHILLER, R.J. *The Determinants of the Variability of Stock Market Prices*. **American Economic Review**, 71, 222-227, 1981.

HAMO, Y.; HEIFETZ, A. *An Evolutionary Perspective on Goal Seeking and Escalation of Commitment*. **CALTECH Social Science Working Paper** 1109, 2001.

HANSEN, L. P. et al. *Robust Permanent Income and Pricing*, **Review of Economic Studies**. Blackwell Publishing, vol. 66(4), pages 873-907, 1999.

HANSEN, L.P.; SINGLETON, K.J. *Stochastic Consumption, Risk Aversion and the Temporal Behaviour of Asset Returns*. **Journal of Political Economy** 91, 249-268, 1983.

HEATON, J.; LUCAS, D. J. *Evaluating the Effects of Incomplete Markets on Risk Sharing and Asset Pricing*. **Journal of Political Economy**, vol. 104, no. 3 (June):443-487, 1996.

HEATON, J. *Market Frictions, Savings Behavior and Portfolio Choice*. **Journal of Macroeconomic Dynamics**, vol. 1, nº. 1:76-101, 1997.

HUSBY, R.D. *A Nonlinear Consumption Function Estimated from Time-Series and Cross-Section Data*. **The Review of Economics and Statistics**, Vol. 53, No. 1, fev., pp. 76-79, 1971.

IBBOTSON ASSOCIATES. **Stocks, Bonds, Bills, and Inflation**. 2000 Yearbook. Chicago, IL: Ibbotson Associates. 2001.

JACKWERTH, J. C. *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*. **Berkeley University Working Paper**, 1997.

JERMANN, U. *Asset Pricing in Production Economies*. **Journal of Monetary Eco-**

nomics, 41, 257-275, 1998.

JORION, P.; GOETZMANN, W. N. *Global Stock Markets in the Twentieth Century*. **Journal of Finance**, American Finance Association, vol. 54(3), pages 953-980, 06, 1999.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*. **Econometrica**, 47, 263-291, 1979.

KREPS, D.M.; PORTEUS, E.L. *Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory*. **Econometrica**, vol. 46, n^o.1, 185-200, 1978.

KURTZ, M. *Social States of Belief and the Determinants of the Equity Risk Premium in a Rational Belief Equilibrium*. In **Functional Analysis and Economic Theory**, Y.A. Abramovich, E. Avgerinos and N.C. Yannelis (eds.), pp. 171 - 220, Springer Verlag, 1988.

KURTZ, M.; BELTRATTI, A. *The Equity Premium is no Puzzle*. **Banca D'Italia Temi di Discussione** n^o. 282. Outubro, 1996.

LICALZI, M.; SORATO, A. *The Pearson System of Utility Functions*. **European Journal of Operational Research** 172, 560-573, 2003.

LUCAS JUNIOR, R.E. *Asset Prices in an Exchange Economy*. **Econometrica**, vol. 46, n^o. 6 (November):142945, 1978.

LUCAS, D. *Asset Pricing with Undiversifiable Risk and Short Sales Constraints: Deepening the Equity Premium Puzzle*. **J. Monet. Econ.**, 34(3), pp. 325-42, 1994.

MAHONEY, D. *On the Representation Theorems of Neoclassical Utility Theory: A Comment*. **Working paper, Instituto Ludwig von Mises**, 2006. Disponível em: <<http://www.mises.org/journals/scholar/Utility1.PDF>>. Acesso em: 24/09/2007.

MANKIW, N.G. *The Equity Premium and the Concentration of Aggregate Shocks*. **Journal of Financial Economics**, vol. 17, n^o. 1 (setembro):211219, 1986.

MARKOWITZ, H. *The Utility of Wealth*. **Journal of Political Economy**, 60, 151-158, 1952.

MAS-COLELL, A. *et al.* **Microeconomic Theory**. Oxford University Press. NY. 1995.

MEHRA, Rajnish. *The Equity Premium: Why is it a Puzzle?* **National Bureau of Economic Research**, Working Paper n^o. 9512, 2003.

MEHRA, Rajnish. Palestra proferida no Quinto Encontro Brasileiro de Finanças. São Paulo. 2005.

MEHRA, Rajnish; PRESCOTT, E. C. *The Equity Premium: A Puzzle*. **Journal of Monetary Economics**, vol. 15, n^o. 2 (March):145161, 1985.

NASON, J. *The Equity Premium and Time- Varying Risk Behavior*. **Federal Reserve Board of Governors**, Working Paper, 1988.

PESSOA, M. *et al.* Reproduzindo os Momentos dos Retornos dos Ativos Brasileiros com Aversão a Desapontamento Generalizada. **Anais eletrônicos do Sexto Encontro Brasileiro de Finanças**. Vitória. 2006. CD-ROM.

PRESCOTT, E.C., and R. MEHRA. *Recursive Competitive Equilibrium: The Case of Homogeneous Households*. **Econometrica**, vol. 48, n^o. 6 (setembro):136579, 1980.

Restoy, F. e Weil, P. Approximate Equilibrium Asset Prices. Working paper 6611, NBER. Cambridge, MA. Junho, 1998.

RIETZ, T.A. *The Equity Risk Premium: A Solution*. **Journal of Monetary Economics**, vol. 22, n^o. 1 (julho):117131, 1988.

STORESLETTEN, K. *et al.* *Consumption and risk sharing over the life cycle*. **Journal of Monetary Economics**, vol. 51, n^o.3, pp. 609-633, 2004.

SWAN, Peter. *Can “Illiquidity” Explain the Equity Premium Puzzle? The Value of Endogenous Market Trading*. **Working Paper, School of Banking and Finance, Faculty of Commerce, UNSW, Sydney**. 2006.

TELMER, C. I. *Asset Pricing Puzzles and Incomplete Markets*, **J. Finance**, Dez., 48(5), pp. 1803–32, 1993.

WEIL, P. *The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle*. **Journal of Monetary Economics**, vol. 24, no. 3 (November):401421, 1989.

XI, Y. *Existence of Arrow-Debreu Equilibrium with S-shaped Utility Function*. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, English Series, vol. 23, n. 1, 149-154, 2007.

YAKOVENKO, Victor. *Statistical Mechanics of Money, Income, and Wealth*. **International Conference on Complex Systems 2007**. 28

de outubro a 2 de novembro, Boston, MA. Abstract disponível em:
<<http://knowledgetoday.org/wiki/index.php/ICCS07/152>>. Acesso em: 24/09/2007.

YOSHINO, J. A. **A Second-Best Asset Pricing for Explaining the Equity Premium.** Working paper FEA/USP, 2005.

10 APÊNDICE

No teorema da subseção 7.1, é usada a seguinte notação (a economia é constituída por famílias, que têm ações de uma firma e de um banco, e governo):

$h \rightarrow$ ganhos de seignorage obtidos pelas famílias

$m \rightarrow$ papel-moeda

$\pi \rightarrow$ taxa bruta de inflação

$\theta \rightarrow$ lucro da firma

$x \rightarrow$ ganho unitário das ações da firma (preço+dividendos)

$v \rightarrow$ quantidade de ações lançadas pela firma

$p \rightarrow$ preço das ações da firma

$R^g \rightarrow$ taxa de juros oferecida pelo governo

$b^g \rightarrow$ débito do governo

$s \rightarrow$ shopping time (custo decorrente da necessidade de não manter papel-moeda no bolso)

$z \rightarrow$ proporção de depósito bancário compulsório (exigido pelo banco central)

$R^l \rightarrow$ taxa de juros exigidos pelo banco, para emprestar dinheiro

$d \rightarrow$ depósitos à vista

$R^d \rightarrow$ taxa de juros oferecida pelo banco, para captar depósitos

$\xi \rightarrow$ lucro do banco

10.1 Demonstração do teorema 7.1

TEOREMA:

$$Max_{s,b,m,d,v} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, c_{t-1})$$

sujeito a, $\forall t$:

$$c_t = H(m_t, d_t) f(s_t)$$

$$c_t = h_t + \xi_t + 1 - m_{t+1}\pi_{t+1} + m_t + \theta_t - x_t v_{t-1} + p_t v_t + R_t^g b_t^g - b_{t+1}^g - s_t - (1-z)R_t^l d_t + R_t^d d_t$$

Implica em

$$M_{t+1} = \beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}}$$

DEMONSTRAÇÃO:

O lagrangeano é:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \lambda_t \left[\begin{array}{c} \beta^t U(H(m_t, d_t)f(s_t), H(m_{t-1}, d_{t-1})f(s_{t-1})) + \\ -H(m_t, d_t)f(s_t) + h_t + \xi_t + 1 - m_{t+1}\pi_{t+1} + m_t + \\ \theta_t - x_tv_{t-1} + p_tv_t + R_t^g b_t^g - b_{t+1}^g - s_t - (1-z)R_t^l d_t + R_t^d d_t \end{array} \right] \right\}$$

Chamando de U_1 e U_2 as derivadas parciais de U em relação ao seu primeiro e segundo argumentos, respectivamente, tem-se as seguintes condições de primeira ordem:

$$\begin{aligned} L_{s_t} &= \beta^t U_1(H(m_t, d_t)f(s_t), H(m_{t-1}, d_{t-1})f(s_{t-1}))H(m_t, d_t)f'(s_t) + \\ &\beta^{t+1} U_2(H(m_{t+1}, d_{t+1})f(s_{t+1}), H(m_t, d_t)f(s_t))H(m_t, d_t)f'(s_t) - \\ \lambda_t [H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1] &= 0 \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H(m_t, d_t)f'(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H(m_t, d_t)f'(s_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1} \\ \lambda_t &= \frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1} H(m_t, d_t)f'(s_t) \end{aligned} \quad (230)$$

$$L_{b_t^g} = R_t^g \lambda_t - \lambda_{t-1} = 0$$

Donde,

$$R_t^g \lambda_t = \lambda_{t-1} \quad (231)$$

Definindo H_1 e H_2 como as derivadas parciais de H em relação, respectivamente, ao seu primeiro e ao seu segundo argumento, tem-se:

$$\begin{aligned} L_{m_t} &= \beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \\ &+ \lambda_t [-H_1(m_t, d_t)f(s_t) + 1] - \lambda_{t-1}\pi_t = 0 \\ L_{d_t} &= \beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_2(m_t, d_t)f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_2(m_t, d_t)f(s_t) + \\ &+ \lambda_t [-H_2(m_t, d_t)f(s_t) + R_t^d - (1-z)R_t^l] = 0 \end{aligned}$$

Usando as equações para λ , a condição em L_{m_t} fica:

$$\begin{aligned} L_{m_t} &= \beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \\ &+ \lambda_t [-H_1(m_t, d_t)f(s_t) + 1] - R_t^g \lambda_t \pi_t = 0 \\ L_{m_t} &= \beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_1(m_t, d_t)f(s_t) + \\ &+ \lambda_t [-H_1(m_t, d_t)f(s_t) + 1 - R_t^g \pi_t] = 0 \\ \lambda_t (R_t^g \pi_t - 1) &= \beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_1 f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_1 f(s_t) - \lambda_t H_1 f(s_t) \\ (R_t^g \pi_t - 1) &= \frac{1}{\lambda_t} [\beta^t U_1(c_t, c_{t-1})H_1 f(s_t) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)H_1 f(s_t)] - H_1 f(s_t) \\ (R_t^g \pi_t - 1) &= \frac{1}{\lambda_t} \beta^t [U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)] H_1 f(s_t) - H_1 f(s_t) \end{aligned}$$

$$(R_t^g \pi_t - 1) = \left\{ \frac{1}{\lambda_t} \beta^t [U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)] - 1 \right\} H_1 f(s_t)$$

$$\begin{aligned} i_t^g &= \left\{ \frac{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1}{[\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)]H(m_t, d_t)f'(s_t)} \beta^t [U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)] - 1 \right\} H_1 f(s_t) \\ i_t^g &= \left\{ \frac{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1}{[U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)]H(m_t, d_t)f'(s_t)} [U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)] - 1 \right\} H_1 f(s_t) \end{aligned}$$

$$i_t^g = \left[\frac{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1}{H(m_t, d_t)f'(s_t)} - 1 \right] H_1 f(s_t)$$

$$i_t^g = \frac{H_m f(s_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t)} \quad (232)$$

Analogamente, a condição em L_{d_t} fica:

$$(1 - z)R_t^l - R_t^d = \frac{H_d f(s_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t)} \quad (233)$$

Esta última equação também pode ser escrita como

$$g'(d_t) + z i_t^g = \frac{H_d f(s_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t)} \quad (234)$$

Finalmente,

$$L_{v_t} = -\lambda_{t+1}x_{t+1} + \lambda_t p_t = 0$$

$$p_t = \frac{\lambda_{t+1}x_{t+1}}{\lambda_t} \quad (235)$$

Ou, como $R_t^g \lambda_t = \lambda_{t-1}$:

$$p_t = \frac{x_{t+1}}{R_{t+1}^g} \quad (236)$$

Como, no tempo t , as variáveis em $t+1$ não são conhecidas, seus valores são os estimados com as informações disponíveis em t . Logo,

$$p_t = E\left[\frac{x_{t+1}}{R_{t+1}^g} | I_t\right] = E_t\left[\frac{x_{t+1}}{R_{t+1}^g}\right]$$

onde I_t é o conjunto de todas as informações disponíveis em t usadas para estimar as variáveis futuras.

Desse modo,

$$p_t = E_t\left[\frac{x_{t+1}}{R_{t+1}^g}\right] \quad (237)$$

Ou, dividindo tudo por p_t e definindo $R_{t+1}^s = \frac{x_{t+1}}{p_t}$:

$$1 = E_t\left[\frac{R_{t+1}^s}{R_{t+1}^g}\right] \quad (238)$$

Assumindo tecnologia linear para os recursos usados em transações, isto é, $f(s) = as$, vem:

$$c_t = H(m_t, d_t)f(s_t) = H(m_t, d_t)as_t$$

de modo que

$$H(m_t, d_t)f'(s_t) = H(m_t, d_t)a = \frac{c_t}{s_t}$$

Logo, a equação

$$\lambda_t = \frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)}{H(m_t, d_t)f'(s_t) + 1} H(m_t, d_t)f'(s_t)$$

pode ser escrita como:

$$\lambda_t = \frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)}{\frac{c_t}{s_t} + 1} \frac{c_t}{s_t} = \frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)}{c_t + s_t} c_t$$

Assim, a condição em L_v fica:

$$p_t = \frac{\lambda_{t+1} x_{t+1}}{\lambda_t} = \frac{\frac{\beta^{t+1} U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta^{t+2} U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{c_{t+1} + s_{t+1}} c_{t+1}}{\frac{\beta^t U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta^{t+1} U_2(c_{t+1}, c_t)}{c_t + s_t} c_t} x_{t+1}$$

$$p_t = E_t \left[\beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} x_{t+1} \right] \quad (239)$$

ou

$$p_t = E_t[M_{t+1} x_{t+1}] \quad (240)$$

onde M é o fator de desconto estocástico, definido por

$$M_{t+1} = \beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \frac{c_{t+1}}{c_t} \frac{c_t + s_t}{c_{t+1} + s_{t+1}} \quad (241)$$

C.Q.D

10.2 Obtenção de M para a gama ingênua

$$U(c_t, c_{t-1}) = \frac{\left(\frac{b}{c_{t-1}}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi$$

tem-se

$$U_1(c_t, c_{t-1}) = \frac{\partial}{\partial c_t} \frac{\left(\frac{b}{c_{t-1}}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi = \frac{1}{\Gamma(a)c_t} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} c_t} \left(\frac{b}{c_{t-1}} c_t\right)^a$$

$$U_2(c_t, c_{t-1}) = \frac{\partial}{\partial c_{t-1}} \frac{\left(\frac{b}{c_{t-1}}\right)^a}{\Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial w} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{w} \xi} d\xi = \frac{b}{w^2} \int_0^{c_t} \xi^a e^{-\frac{b}{w} \xi} d\xi$$

E

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{b}{w} \right)^a = - \left(\frac{b}{w} \right)^a \frac{a}{w \Gamma(a)}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 U_2(c_t, c_{t-1}) &= - \left(\frac{b}{w} \right)^a \frac{a}{w \Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi + \frac{\left(\frac{b}{c_{t-1}} \right)^a}{\Gamma(a)} \frac{b}{w^2} \int_0^{c_t} \xi^a e^{-\frac{b}{w} \xi} d\xi \\
 U_2(c_t, c_{t-1}) &= - \left(\frac{b}{c_{t-1}} \right)^a \frac{a}{c_{t-1} \Gamma(a)} \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi + \frac{\left(\frac{b}{c_{t-1}} \right)^a}{\Gamma(a)} \frac{b}{c_{t-1}^2} \int_0^{c_t} \xi^a e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi = \\
 &= - \frac{b^a c_{t-1}^{-a+1} a \int_0^{c_t} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi - b^{a+1} C_{t-1}^{-a} \int_0^{c_t} \xi^a e^{-\frac{b}{c_{t-1}} \xi} d\xi}{c_{t-1}^2 \Gamma(a)} \\
 &= \frac{\frac{1}{\Gamma(a) c_t} e^{-\frac{b}{c_{t-1}} c_t} \left(\frac{b}{c_{t-1}} c_t \right)^a - \frac{b^a c_{t-1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi - b^{a+1} C_t^{-a} \int_0^{c_{t+1}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi}{c_t^2 \Gamma(a)}}{-e^{-\frac{b}{c_{t-1}} c_t} b^a C_{t-1}^{-a} c_t^{a+1} + b^a c_{t-1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi - b^{a+1} C_t^{-a} \int_0^{c_{t+1}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi} = \\
 &= \frac{\frac{1}{\Gamma(a) c_{t+1}} e^{-\frac{b}{c_t} c_{t+1}} \left(\frac{b}{c_t} c_{t+1} \right)^a - \frac{b^a c_{t+1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+2}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi - b^{a+1} C_{t+1}^{-a} \int_0^{c_{t+2}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi}{c_{t+1}^2 \Gamma(a)}}{-e^{-\frac{b}{c_t} c_{t+1}} b^a C_t^{-a} c_{t+1}^{a+1} + b^a c_{t+1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+2}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi - b^{a+1} C_{t+1}^{-a} \int_0^{c_{t+2}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi} = \\
 M &= \frac{-e^{-\frac{b}{c_t} c_{t+1}} b^a C_t^{-a} c_{t+1}^{a+1} + b^a c_{t+1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+2}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi - b^{a+1} C_{t+1}^{-a} \int_0^{c_{t+2}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_{t+1}} \xi} d\xi}{c_{t+1}^2 \Gamma(a)} \\
 &= \frac{-e^{-\frac{b}{c_{t-1}} c_t} b^a C_{t-1}^{-a} c_t^{a+1} + b^a c_{t-1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi - b^{a+1} C_t^{-a} \int_0^{c_{t+1}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi}{c_t^2 \Gamma(a)}
 \end{aligned}$$

Então, M_{t+1} é dado pela fórmula:

$$c_t^2 C_{t-1}^a c_t^a \frac{-\exp\left(-b \frac{-c_t C_t + c_{t+1} C_{t-1}}{C_{t-1} C_t}\right) c_{t+1}^{a+1} + e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_t^a c_{t+1}^{-a+1} a \int_0^{c_{t+2}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{C_{t+1}} \xi} d\xi - b e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_t^a C_{t+1}^{-a} \int_0^{c_{t+2}} \xi^a e^{-\frac{b}{C_{t+1}} \xi} d\xi}{c_{t+1}^2 \left(-c_t^{2a+1} C_t^a + c_t a \int_0^{c_{t+1}} \xi^{a-1} e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_{t-1}^a C_t^{-a} - b \int_0^{c_{t+1}} \xi^a e^{-\frac{b}{c_t} \xi} d\xi e^{\frac{b}{C_{t-1}} c_t} C_{t-1}^a c_t^a \right)}$$

10.3 Obtenção de M para a utilidade de Abel

10.3.1 Modelo a dois tempos A fórmula geral do modelo a dois tempos é a 200.

Aa utilidade de Abel é:

$$u(C_t, C_{t-1}) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{C_t}{\left(C_{t-1}^D (c_t^{\theta_0} c_{t-1}^{\theta_1} G^t)^{1-D} \right)^\gamma} \right)^{1-\alpha} \quad (242)$$

$$u(C_t, C_{t-1}) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\left(c_t^{\theta_0} c_{t-1}^{\theta_1} G^t \right)^{(1-D)\gamma(1-\alpha)}} \frac{C_t^{1-\alpha}}{C_{t-1}^{D\gamma(1-\alpha)}} \quad (243)$$

$$u(C_t, C_{t-1}) = K \frac{C_t^{1-\alpha}}{C_{t-1}^{D\gamma(1-\alpha)}} \quad (244)$$

onde

$$K_t = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(c_t^{\theta_0} c_{t-1}^{\theta_1} G^t)^{(1-D)\gamma(1-\alpha)}} \quad (245)$$

Assim,

$$u_1(C_t, C_{t-1}) = K_t \frac{\partial}{\partial C_t} \frac{C_t^{1-\alpha}}{C_{t-1}^{D\gamma(1-\alpha)}} = \frac{K_t}{C_t^\alpha} (1-\alpha) C_{t-1}^{D\gamma(\alpha-1)} \quad (246)$$

Logo,

$$u_1(C_{t+1}, C_t) = \frac{K_{t+1}}{C_{t+1}^\alpha} (1-\alpha) C_t^{D\gamma(\alpha-1)} \quad (247)$$

E

$$u_2(C_t, C_{t-1}) = K_t \frac{\partial}{\partial C_{t-1}} \frac{C_t^{1-\alpha}}{C_{t-1}^{D\gamma(1-\alpha)}} = K_t D\gamma (1-\alpha) \frac{C_t^{1-\alpha}}{C_{t-1}^{D\gamma(1-\alpha)+1}} \quad (248)$$

Logo,

$$u_2(C_{t+1}, C_t) = K_{t+1} D\gamma (1-\alpha) \frac{C_{t+1}^{1-\alpha}}{C_t^{D\gamma(1-\alpha)+1}} \quad (249)$$

Substituindo em M , vem:

$$M_{t+1} = \beta \frac{\frac{K_{t+1}}{C_{t+1}^\alpha} (1-\alpha) C_t^{D\gamma(\alpha-1)}}{\frac{K_t}{C_t^\alpha} (1-\alpha) C_{t-1}^{D\gamma(\alpha-1)} + \beta K_{t+1} D\gamma (1-\alpha) \frac{C_{t+1}^{1-\alpha}}{C_t^{D\gamma(1-\alpha)+1}}} \quad (250)$$

$$M_{t+1} = K_{t+1} (\beta - \alpha\beta) \frac{C_t^{D\gamma(\alpha-1)}}{C_{t+1}^\alpha \left(\frac{1}{C_t^\alpha} (K_t - \alpha K_t) C_{t-1}^{D\gamma(\alpha-1)} + \beta K_{t+1} (D\gamma - D\alpha\gamma) C_t^{D\gamma(\alpha-1)-1} C_{t+1}^{1-\alpha} \right)} \quad (251)$$

$$M_{t+1} = K_{t+1} (\beta - \alpha\beta) \frac{C_t^{D\gamma(\alpha-1)}}{C_{t+1}^\alpha \left(C_t^{-1} (C_t K_t C_t^{D\gamma} C_{t+1}^\alpha C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + \beta D\gamma C_t^\alpha C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma}) (1-\alpha) \frac{1}{C_{t-1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_{t+1}^\alpha} \frac{1}{C_t^{D\gamma}} \frac{1}{C_t^\alpha} \right)}$$

E, finalmente,

$$M_{t+1} = \beta C_t K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \frac{C_t^{\alpha+D\gamma+D\gamma(\alpha-1)}}{\left(C_t K_t C_t^{D\gamma} C_{t+1}^\alpha C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^\alpha C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \right)} \quad (252)$$

10.3.2 Modelo de horizonte infinito No modelo de horizonte infinito sem o custo inflacionário (*shopping time*), tem-se, impondo $s_t = 0$ na eq. 209:

$$M_{t+1} = \beta \frac{U_1(c_{t+1}, c_t) + \beta U_2(c_{t+2}, c_{t+1})}{U_1(c_t, c_{t-1}) + \beta U_2(c_{t+1}, c_t)} \quad (253)$$

A diferença em relação à eq. 200 é o acréscimo do termo

$$\beta u_2(C_{t+2}, C_{t+1}) = \beta K_{t+2} D\gamma (1 - \alpha) \frac{C_{t+2}^{1-\alpha}}{C_{t+1}^{D\gamma(1-\alpha)+1}} \quad (254)$$

ao numerador da 250. Então:

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= \beta \frac{\frac{K_{t+1}}{C_{t+1}^\alpha} (1 - \alpha) C_t^{D\gamma(\alpha-1)} + \beta K_{t+2} D\gamma (1 - \alpha) \frac{C_{t+2}^{1-\alpha}}{C_{t+1}^{D\gamma(1-\alpha)+1}}}{\frac{K_t}{C_t^\alpha} (1 - \alpha) C_{t-1}^{D\gamma(\alpha-1)} + \beta K_{t+1} D\gamma (1 - \alpha) \frac{C_{t+1}^{1-\alpha}}{C_t^{D\gamma(1-\alpha)+1}}} \\ &= \frac{\beta}{C_t^{-1} (C_t K_t C_t^{D\gamma} C_{t+1}^\alpha C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^\alpha C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma}) (1-\alpha) \frac{1}{C_{t-1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_{t+1}^\alpha} \frac{1}{C_t^{D\gamma}} \frac{1}{C_t^\alpha}} \\ &\quad \left((C_{t+1})^{-1} \left(C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma} + D\beta\gamma C_t^{D\gamma} C_{t+2} K_{t+2} C_{t+1}^\alpha C_{t+1}^{D\alpha\gamma} \right) (1 - \alpha) \frac{1}{C_{t+1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_{t+2}^\alpha} \frac{1}{C_{t+1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_t^{D\gamma}} \right) \\ M_{t+1} &= \beta \frac{(C_{t+1})^{-1} (C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma} + D\beta\gamma C_t^{D\gamma} C_{t+2} K_{t+2} C_{t+1}^\alpha C_{t+1}^{D\alpha\gamma}) (1-\alpha) \frac{1}{C_{t+1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_{t+2}^\alpha} \frac{1}{C_{t+1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_t^{D\gamma}}}{C_t^{-1} (C_t K_t C_t^{D\gamma} C_{t+1}^\alpha C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^\alpha C_t^{D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma}) (1-\alpha) \frac{1}{C_{t-1}^{D\gamma}} \frac{1}{C_{t+1}^\alpha} \frac{1}{C_t^{D\gamma}} \frac{1}{C_t^\alpha}} \\ &\quad \beta C_t C_t^\alpha \frac{C_{t-1}^{D\gamma}}{C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma+1} (K_t C_{t+1}^\alpha C_t^{D\gamma+1} C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^{\alpha+D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma})} \left(D\beta\gamma C_t^{D\gamma} C_{t+2} K_{t+2} C_{t+1}^{\alpha+D\alpha\gamma} + C_t^{D\alpha\gamma} K_{t+1} C_{t+2}^\alpha \right) \end{aligned}$$

E, finalmente,

$$M_{t+1} = \beta C_t C_t^\alpha C_{t-1}^{D\gamma} \frac{D\beta\gamma C_t^{D\gamma} C_{t+2} K_{t+2} C_{t+1}^{\alpha+D\alpha\gamma} + C_t^{D\alpha\gamma} K_{t+1} C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma+1}}{C_{t+2}^\alpha C_{t+1}^{D\gamma+1} \left(K_t C_{t+1}^\alpha C_t^{D\gamma+1} C_{t-1}^{D\alpha\gamma} + D\beta\gamma C_t^{\alpha+D\alpha\gamma} C_{t+1} K_{t+1} C_{t-1}^{D\gamma} \right)} \quad (256)$$

10.4 Expansão quadrática do M da Cauchy modificada

$$u'(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{c-a}{b} \right)^4 \right)} \quad (257)$$

$$u''(c) = -\frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3 (c-a)^3}{(a^4 + b^4 + c^4 - 4ac^3 - 4a^3c + 6a^2c^2)^2} \quad (258)$$

$$u'''(c) = \frac{8}{\pi} \sqrt{2} \frac{4b^3(c-a)^6}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^3} - \frac{12}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^2}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2}$$

Substituindo-se na eq. 104, aqui reproduzida,

$$Q(t+dt) = 1 + \frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]} dc + \frac{1}{2} \frac{u'''[c(t)]}{u'[c(t)]} dc^2 + \dots \quad (259)$$

vem:

$$Q(t) + dt = 1 + \frac{-\frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^3}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{c-a}{b} \right)^4 \right)}} dc +$$

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{8}{\pi} \sqrt{2} \frac{4b^3(c-a)^6}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^3} - \frac{12}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^2}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^4\right)}} dc^2$$

Agora,

$$\frac{-\frac{4}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^3}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^4\right)}} = \frac{(-4)(c-a)^3}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)} \quad (260)$$

E

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\frac{8}{\pi} \sqrt{2} \frac{4b^3(c-a)^6}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^3} - \frac{12}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^2}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{\pi b \left(1 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^4\right)}} = \\ & \frac{1}{4} \frac{\pi}{b^3} \sqrt{2} (a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2) \left(\frac{32}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^6}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^3} - \frac{12}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^2}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2} \right) dc^2 + \dots \end{aligned}$$

Então, fica-se com:

$$\begin{aligned} Q(t+dt) &= 1 + \frac{(-4)(c-a)^3}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)} dc + \frac{1}{4} \frac{\pi}{b^3} \sqrt{2} (a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2) \cdot \\ & \left(\frac{32}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^6}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^3} - \frac{12}{\pi} \sqrt{2} \frac{b^3(c-a)^2}{(a^4+b^4+c^4-4ac^3-4a^3c+6a^2c^2)^2} \right) dc^2 + \dots \end{aligned}$$

Para intervalos temporais finitos (tempo discreto), tem-se $dc \simeq c_{t+1} - c_t$.

10.5 Sensibilidade da utilidade Cauchy modificada ao método de suavização usado

$ce(t)=9\exp[(t-1950)/50]$			
$Q(t+2)R(t+1)$			
a	b		
0.924	0.1882		
(Ajuste ao portfolio)			
$ F(a,b,beta)/E(Re) $	R2		
22.8%	0.464	Cauchy	
$ce(t)=9\exp[(t-1950)/52]$			
$Q(t+2)R(t+1)$			
a	b		
0.946	0.208		
(Ajuste ao portfolio)			
$ F(a,b,beta)/E(Re) $	R2		
19.7%	0.543	Cauchy	
Amort. Exp. (alfa=0,1)			
a	b		
0.946	0.6436		
(Ajuste ao portfolio)			
$ F(a,b,beta)/E(Re) $	R2		
16.7%	0.714	Cauchy	
$Q(t+2)R(t+1)$			
Amort. Exp. (alfa=0,2)			
a	b	$\hat{E}(Re)=-cov(Q,Re)/E(Q)$	
0.924	0.4852	9.15526192	
(Ajuste ao portfolio)			
$ F(a,b,beta)/E(Re) $	R2		
14.3%	0.756	Cauchy	
beta			
necessario			
0.461607392			

Figura 78: Parâmetros ótimos (no sentido de melhor ajuste ao portfolio de Fama e French) e estatísticas de ajuste.

Figura 79: ARR local (calculado em $C=\text{consumo per capita}$).

Figura 80: ARR médio (média sobre a distribuição *cross – section* do consumo).

.

11 ANEXOS

	Annual Factors: January-December			FAMA E FRENCH			SM RF
	Mkt-RF	SMB	HML	RF	INFLACAO	RF REAL	
1927	30.12	-2.49	-5.14	3.13	-1.8870	5.0170	
1928	35.36	3.81	-5.48	3.54	-1.3460	4.8860	
1929	-19.39	-30.35	12.53	4.74	0.0000	4.7400	
1930	-31.09	-4.78	-13.28	2.43	-2.5340	4.9640	
1931	-45.53	4.23	-16.17	1.09	-8.8000	9.8900	
1932	-9.49	6.14	5.82	0.95	-10.3070	11.2570	
1933	57.22	54.37	14.93	0.3	-5.1340	5.4340	
1934	4.06	25.3	-29.33	0.18	3.3510	-3.1710	
1935	44.66	12.55	7.28	0.14	2.4940	-2.3540	
1936	31.98	16.42	29.37	0.18	0.9730	-0.7930	
1937	-34.93	-13.62	-4.01	0.29	3.6140	-3.3240	
1938	28.12	12.35	-14.29	-0.04	-1.8600	1.8200	
1939	2.05	5.46	-17.4	0.01	-1.4220	1.4320	
1940	-7.43	0.74	-0.82	-0.02	0.9620	-0.9820	
1941	-9.67	-4.34	11.64	0.04	5.0000	-4.9600	
1942	16.02	5.28	19.09	0.28	10.6580	-10.3780	
1943	27.67	31.74	34.61	0.36	6.1480	-5.7880	
1944	21.03	16.9	18.29	0.33	1.7370	-1.4070	
1945	38.14	25.29	13.49	0.32	2.2770	-1.9570	
1946	-6.27	-4.17	2	0.36	8.5340	-8.1740	
1947	2.89	-7.51	9.49	0.5	14.3590	-13.8590	
1948	1.52	-9.19	3.1	0.81	7.7730	-6.9630	
1949	18.92	4.15	-4.72	1.12	-0.9710	2.0910	
1950	28.81	1.02	27.15	1.22	0.9800	0.2400	
1951	19.34	-4.75	-5.54	1.49	7.9060	-6.4160	
1952	11.64	-6.77	4.64	1.65	2.1850	-0.5350	
1953	-1.47	-0.59	-8.52	1.83	0.7550	1.0750	
1954	49.41	-2.15	25.19	0.86	0.4990	0.3610	
1955	23.74	23.74	5.03	1.57	-0.3730	1.9430	
1956	6	-0.73	-2.11	2.47	1.4960	0.9740	
1957	-13.52	-2.55	-6.77	3.15	3.5630	-0.4130	
1958	43.3	14.71	11.97	1.53	2.7280	-1.1980	
1959	9.62	5.43	1.9	2.98	0.8080	2.1720	
1960	-1.52	-2.23	-4.75	2.67	1.6040	1.0660	
1961	24.82	0.21	6.53	2.12	1.0150	1.1050	
1962	-13.05	-8.3	9.02	2.73	1.1160	1.6140	
1963	17.77	-6.26	16.15	3.11	1.2140	1.8960	
1964	12.78	-1.88	10.02	3.53	1.3090	2.2210	
1965	10.47	21.56	7.67	3.92	1.7220	2.1980	
1966	-13.44	2.65	-0.58	4.75	2.8570	1.8930	
1967	24.36	51.19	-9.57	4.21	2.8810	1.3290	
1968	8.95	24.22	18.24	5.22	4.2000	1.0200	
1969	-17.41	-14.34	-10.43	6.57	5.3740	1.1960	
1970	-6.44	-11.76	21.91	6.52	5.9200	0.6000	
1971	11.81	6.13	-11.25	4.39	4.2990	0.0910	
1972	13.5	-12.11	2.19	3.84	3.2980	0.5420	
1973	-25.7	-23.7	17.74	6.93	6.2250	0.7050	
1974	-35.95	-0.62	10.08	8.01	10.9690	-2.9590	

Figura 81

1975	31.56	15.16	8.92	5.8	9.1400	-3.3400
1976	21.68	14.4	24.27	5.08	5.7690	-0.6890
1977	-8.1	23.1	7.77	5.13	6.4520	-1.3220
1978	1.36	14.32	0.67	7.19	7.6580	-0.4680
1979	14.03	20.51	-2.2	10.38	11.2590	-0.8790
1980	21.97	5.64	-24.52	11.26	13.5230	-2.2630
1981	-18.7	7.01	24.94	14.72	10.3730	4.3470
1982	9.89	9.07	13.73	10.53	6.1310	4.3990
1983	13.85	13.63	20.56	8.8	3.2170	5.5830
1984	-6.68	-8.02	19.33	9.84	4.2560	5.5840
1985	23.69	0.1	1.44	7.72	3.5680	4.1520
1986	9.4	-9.85	9.23	6.16	1.9240	4.2360
1987	-3.65	-10.75	-1.15	5.47	3.6540	1.8160
1988	11.2	5.76	14.67	6.36	4.0830	2.2770
1989	20.06	-12.28	-5.02	8.38	4.7980	3.5820
1990	-13.92	-13.97	-9.75	7.84	5.4130	2.4270
1991	28.05	16.05	-14.24	5.6	4.2410	1.3590
1992	5.56	7.59	23.88	3.5	3.0150	0.4850
1993	8.69	6.01	19.03	2.9	2.9500	-0.0500
1994	-4.67	-1.4	-0.73	3.91	2.6120	1.2980
1995	30.07	-7.68	1.39	5.6	2.8150	2.7850
1996	15.96	-2.33	3.44	5.2	2.9350	2.2650
1997	25.08	-4.87	12.37	5.25	2.3200	2.9300
1998	17.43	-25.24	-9.52	4.85	1.5600	3.2900
1999	20.57	14.72	-33.16	4.69	2.1910	2.4990
2000	-16.93	-2.08	39.96	5.88	3.4070	2.4730
2001	-15.13	18.58	18.27	3.86	2.7910	1.0690
2002	-22.47	3.37	10.25	1.63	1.5837	0.0463
2003	32.12	27.39	4.69	1.02	2.2829	-1.2629
2004	11.82	4.86	9.42	1.19	2.6674	-1.4774
2005	4.33	-2.19	8.68	2.98	3.3934	-0.4134
Médias	8.25	4.14	5.11	3.76	3.1665	0.5934
Desv. P.	20.69	14.77	14.06	3.14	4.0808	3.8651

Figura 82: Séries americanas

BRASIL		2	3	4	
ano	Rm	Rf	cons. real	deflator	
28/jun/91	1.655070794	1.090681685	1.067635	1.2726267	
30/set/91	1.194592585	1.018318998	1.0488012	1.5140405	
31/dez/91	1.284668795	1.110420532	0.9463906	1.9330974	
31/mar/92	1.511908381	1.111215798	0.985505	1.9104833	
30/jun/92	0.648650242	1.074183378	0.9883046	1.7624399	
30/set/92	1.139385922	1.048892897	0.997762	1.9458299	
31/dez/92	0.793777956	1.090094143	1.0164743	1.9198232	
31/mar/93	1.358708232	1.041680428	1.0111405	2.0814697	
30/jun/93	1.264313088	1.01064596	1.0261814	2.2167944	
30/set/93	1.130019855	0.997090402	0.9935586	2.4138475	
31/dez/93	1.01577937	1.029315777	0.9801434	2.5212665	
30/mar/94	0.844230209	1.035983736	1.0225489	2.9326993	
30/jun/94	0.812253274	1.112331975	1.0110577	2.9432890	
30/set/94	1.15658472	1.025	1.047862	1.3086987	
30/dez/94	0.751200309	1.050563278	1.0609316	1.0568789	
31/mar/95	0.655427491	1.046380392	1.0327116	1.0438854	
30/jun/95	1.147585608	1.064509045	0.9709412	1.0540456	
29/set/95	1.265237254	1.076481415	0.9737261	1.0243628	
29/dez/95	0.903947684	1.058719987	1.015479	1.0183521	
29/mar/96	1.121259175	1.034504183	0.9923249	1.0279250	
28/jun/96	1.176888412	1.015497977	1.0268606	1.0364298	
30/set/96	1.053760815	1.036783525	1.0413818	1.0122600	
31/dez/96	1.077081221	1.031901353	0.9992847	1.0138503	
31/mar/97	1.24492342	1.013619222	0.9900445	1.0319328	
30/jun/97	1.367723755	1.026019129	1.0070284	1.0159508	
30/set/97	0.932822594	1.034397445	0.991731	1.0063311	
31/dez/97	0.848382706	1.047657063	0.9879949	1.0187472	

Figura 83

31/mar/98	1.158487762	1.052489413	0.9936727	1.0113494
30/jun/98	0.807152079	1.041301149	0.9923829	1.0037088
30/set/98	0.685152254	1.04672372	1.0066407	0.9942838
31/dez/98	1.021142648	1.059857452	0.973479	1.0076654
31/mar/99	1.463631116	0.9958753	0.9935132	1.0772188
30/jun/99	1.079387237	1.045876636	0.9943173	1.0070050
30/set/99	0.91342501	0.993088199	1.0090823	1.0458140
31/dez/99	1.45509993	0.979027354	1.0072131	1.0575891
31/mar/00	1.028212821	1.021977219	0.9951715	1.0140450
30/jun/00	0.92265568	1.017549587	1.0104799	1.0173507
29/set/00	0.908306863	0.985012916	1.0134354	1.0483604
29/dez/00	0.943571965	1.014182575	1.0021906	1.0152893
30/mar/01	0.930928971	1.013275553	0.9951897	1.0163994
29/jun/01	0.978521393	1.001277594	1.0009398	1.0305147
28/set/01	0.709712145	1.010358305	0.9624413	1.0292567
31/dez/01	1.246669942	1.013707847	0.9952498	1.0240351
29/mar/02	0.971523125	1.030540313	1.0090206	1.0048240
28/jun/02	0.811382146	1.00170377	1.0107963	1.0357950
30/set/02	0.721885784	0.969470788	0.9740304	1.0722433
31/dez/02	1.153751383	0.917882614	0.9852065	1.1327305
31/mar/03	0.948088907	0.994181485	0.9805713	1.0552214
30/jun/03	1.161805835	1.061591197	0.9825185	0.9904530
30/set/03	1.216277984	1.031003134	0.9995212	1.0147324
31/dez/03	1.368005499	1.024490168	1.0115639	1.0152605

Figura 84: Séries brasileiras

Year	despesa média das residências	consumo real per capita (dólares de 2000)	1	2	3	4	5
1984	21975	17593	10894	14337	19469	26138	41825
1985	23490	18298	11417	15092	20374	27760	45166
1986	23866	18972	11477	14639	21088	28698	46242
1987	24414	19396	10355	15686	21708	29603	46470
1988	25892	19966	10893	16880	23290	32084	48718
1989	27810	20247	12119	17616	24476	34231	53093
1990	28381	20280	12909	17927	24687	34265	55437
1991	29614	19987	13464	18986	26144	36151	57597
1992	29846	20383	12643	19257	26573	36094	57981
1993	30692	20701	13957	19712	26603	37299	59521
1994	31731	21171	14356	20891	28513	39033	60803
1995	32264	21393	14607	22126	29125	39395	62639
1996	33797	21753	15896	22799	30402	41965	66794
1997	34819	22226	16008	23558	31447	42846	66800
1998	35535	22984	16630	23709	31400	43811	70648
1999	36995	23813	16750	24840	33029	45998	75015
2000	38045	23882	17940	26550	34716	46794	75102
2001	39518	24061	18883	26492	35660	48722	77125
2002	40677	24436	19061	27140	36881	50432	79199
2003	40817	24813	18492	26729	36213	50468	81731
2004	43395	25500	17837	27410	36980	50974	83710
2005	46409		19120	28921	39098	54354	90469

Figura 85: Quintis do consumo americano.