UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

DINÂMICA ÓTIMA DA DÍVIDA PÚBLICA

Juliana Inhasz

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

SÃO PAULO

2013

Prof. Dr. João Grandino Rodas
Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Reinaldo Guerreiro
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Joaquim José Martins Guilhoto
Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Márcio Issao Nakane
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Economia

JULIANA INHASZ

DINÂMICA ÓTIMA DA DÍVIDA PÚBLICA

Tese apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Teoria Econômica

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo De Losso da Silveira Bueno

Versão Original

SÃO PAULO

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Inhasz, Juliana
Dinâmica ótima da dívida pública / Juliana Inhasz. – São Paulo, 2013.
142 p.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2013.
Orientador: Rodrigo De Losso da Silveira Bueno.

1. Macroeconomia 2. Dívida pública 3. Inflação. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. II. Título.

CDD – 339

À minha família.

Primeiramente, agradeço a Deus pela oportunidade de concluir mais esta etapa ao lado daqueles que amo. Aos meus pais, Marta e Luiz, pelo apoio, amor e compreensão neste longo caminho, e aos meus irmãos, Rafael e Fernanda, pelo companheirismo desde sempre. Também agradeço aos meus cunhados, Thalita e Leandro, pela ajuda, apoio e acolhimento nos momentos certos. Agradecimento especial ao meu noivo e grande amigo, Elson, por me dar motivos para, dia após dia, seguir adiante.

Ao meu orientador, Rodrigo De Losso da Silveira Bueno, pela paciência e compreensão infinitas, além de todos os comentários, cobranças e especialmente pela confiança em mim depositada ao longo desses vários anos de parceria.

Aos professores da FEA que me acompanharam nesta trajetória acadêmica, iniciada na mesma faculdade em 2001, em especial Fabio Kanczuk, Hélio Zylberstajn, José Carlos de Souza Santos e Carlos Eduardo Gonçalves. Também agradeço aos professores da FGV-EESP, dos quais destaco Cláudio Lucinda, por contribuírem para meu desenvolvimento acadêmico.

Aos grandes amigos que fiz no IPE-USP, sem os quais estes anos de estudo não seriam tão memoráveis: Thiago Alexandrino, Joelson Sampaio, Andrea Luchessi, Paula Pereda, Eliane Teixeira, Sarah Bretones, Guilherme Attuy, Laura Comparini, Renata Gukovas, Vivian Amorin, Leonardo Ferreira, Otávio Sidone, Rafael Proença, André Roncaglia, Tarik Migliorini, e todos aqueles que fizeram parte desta trajetória.

Por valiosos comentários e sugestões, agradeço especialmente a José Carlos de Souza Santos, Fabio Kanczuk, Carlos Eduardo Gonçalves, Helder Ferreira de Mendonça e Fernando Motta Correia.

Agradeço também a todos os funcionários da FEA, sempre prestativos em todos os momentos, e à FIPE por todo o apoio. Pela confiança e compreensão, agradeço aos amigos do Insper, em especial Luciana Yeung, Caio Mussolini, Marcelo Moura, Ricardo Brito, e aos amigos do Banco Votorantim, dos quais destaco Rubens Scanferla, Wagner Nishikawa, Natalia Ferrari, Natalia Fazzani e Vanessa Soreira.

Por fim, agradeço ao amigo Fabio Menezes dos Anjos, pela valiosa ajuda nestes últimos meses de doutorado.

**“A economia é uma virtude distributiva
e consiste não em poupar
mas em escolher.”**

Edmund Burke

RESUMO

Os modelos expostos nesta Tese possuem em comum a discussão macroeconômica sobre a composição ótima da dívida pública brasileira. Logo, esta Tese busca preencher lacunas presentes na literatura sobre a escolha ótima da composição do endividamento público, tendo em vista o modelo de suavização da tributação, exposto inicialmente em Goldfajn (2000).

Logo, os modelos aqui utilizados estudam a composição ótima da dívida pública, tendo como ponto de partida o modelo clássico de suavização da tributação, exposto em Goldfajn (2000), no qual pressupõe-se a existência de três tipos de endividamento (nominal, ou prefixado; cambial; e pós-fixado), e repactuação constante da dívida pública indexada (de modo que a composição do endividamento público pode ser completamente alterada a cada período). A discussão se distingue da abordagem tradicional por utilizar informação condicional, ao invés da abordagem não condicional, incrementando precisão e qualidade aos resultados em termos de erro quadrático médio. Naturalmente, temos no GARCH multivariado um método de estimação mais adequado.

Outra dimensão aqui discutida é a expansão do modelo tradicional com o estudo de outras abordagens, que consideram a decomposição da dívida pós-fixada em duas proporções distintas de acordo com o instrumento de indexação utilizado (a saber, dívida flutuante, quando os títulos são indexados a taxas de juros, e dívida pós-fixada em preços, quando o instrumento de indexação utilizado é representado por um índice de preços), além de considerar a possibilidade de resolução do problema em horizonte infinito (no qual a autoridade fiscal pode considerar a existência de diferentes maturidades para os títulos públicos, sem repactuação completa da composição a cada período). A abordagem com três dívidas e horizonte infinito já havia sido proposta por Cysne (2007), muito embora tenha sido estimada de forma não condicional.

Os resultados obtidos mostram que as proporções teóricas ótimas apresentam dinâmicas muito próximas àsquelas observadas na gestão da dívida pública, com maior precisão nos modelos solucionados em dois períodos. Além disso, os resultados também comprovam os trade-offs tradicionalmente observados na gestão do endividamento público, além de propor e confirmar novos trade-offs, compatíveis com as expansões teóricas realizadas.

Palavras-chave: Macroeconomia, Dívida pública, Inflação.

ABSTRACT

The models shown in this thesis have in common the macroeconomic discussion on the optimal composition of the public debt. Therefore, this thesis seeks to fill gaps in the literature about the optimal choice of the composition of public debt, in view of the tax smoothing model, exposed initially in Goldfajn (2000).

Thus, the models used here to study the optimal composition of the public debt, taking as its starting point the classic model of tax smoothing, exposed in Goldfajn (2000), which assumes the existence of three types of debt (nominal; exchange-rate-denominated, and indexed), and constant renegotiation of the public debt indexed (so that the composition of public debt can be completely changed every period). The discussion distinguishes itself from the traditional approach by using conditional information, rather than the non-conditional approach, increasing accuracy and quality of the results in terms of mean square error. Of course, we have one in multivariate GARCH estimation method more suitable.

Another dimension discussed here is the expansion of the traditional model to the study of other approaches that consider the decomposition of indexed debt in two different proportions according to the instrument used for indexing (ie, interest rate indexing when the bonds are indexed in interest rates and indexing price debt when the instrument used index is represented by a price index), and consider the possibility of solving the problem in infinite period (where the government may consider the existence of different maturities for the bonds, without complete renegotiation the composition in each period). The approach with three debts and infinite horizon had already been proposed by Cysne (2007), although it has been estimated and not conditional.

The results show that the proportions have great theoretical dynamics very close to those observed in the management of public debt, more accurately models solved in two periods. Moreover, the results also show the trade-offs traditionally observed in the management of public debt, and to propose and confirm new trade-offs, consistent with the theoretical expansions performed.

Keywords: *Macroeconomics, Public debt, Inflation.*

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	3
1 INTRODUÇÃO	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
3 MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO	15
3.1 O modelo tradicional de suavização da tributação	15
3.2 Estratégia empírica	22
3.2.1 Etapas de estimação	22
3.2.1.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries	23
3.2.1.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública	23
3.2.1.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)	24
3.2.2 M-GARCH	25
3.2.2.1 Modelo GARCH BEKK	26
3.2.3 Dados	27
3.3 Resultados	29
3.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries	29
3.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública	30
3.3.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)	36
3.4 Conclusões	40
4 MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO – HORIZONTE INFINITO	45
4.1 O modelo de suavização da tributação em horizonte infinito	45
4.2 Estratégia empírica	51
4.2.1 Etapas de estimação	51
4.2.2 M-GARCH	53
4.2.3 Dados	54
4.3 Resultados	55
4.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries	55
4.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública	56
4.3.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)	61
4.4 Conclusões	67
5 MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE..	69

5.1	O modelo de suavização da tributação com dívida flutuante	70
5.2	Estratégia empírica	76
5.2.1	Etapas de estimação	76
5.2.2	M-GARCH	76
5.2.3	Dados	78
5.3	Resultados	78
5.3.1	Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries	78
5.3.2	Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública	79
5.3.3	Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)	85
5.4	Conclusões.....	91
6	MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE EM HORIZONTE INFINITO.....	93
6.1	O modelo de suavização da tributação com dívida flutuante em horizonte infinito.....	93
6.2	Estratégia empírica	97
6.2.1	Etapas de estimação	97
6.2.2	M-GARCH	98
6.3	Resultados	99
6.3.1	Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries	99
6.3.2	Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública	100
6.3.3	8.4.3 Terceiro estágio: Regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).....	107
6.4	Conclusões.....	112
7	CONCLUSÕES.....	115
	REFERÊNCIAS.....	119
	APÊNDICES.....	123

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 - Composição da Dívida Pública – resumo dos modelos estudados</i>	<i>8</i>
<i>Tabela 2 – Modelo tradicional de suavização da tributação: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil – 2000 a 2012</i>	<i>38</i>
<i>Tabela 3 – Modelo tradicional de suavização da tributação: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil – 2000 a 2012.....</i>	<i>39</i>
<i>Tabela 4 - Modelo de suavização da tributação com período infinito: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil - 2000 a 2012.....</i>	<i>64</i>
<i>Tabela 5 - Modelo de suavização da tributação com período infinito: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil - 2000 a 2012</i>	<i>65</i>
<i>Tabela 6 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil - 2000 a 2012</i>	<i>87</i>
<i>Tabela 7 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil - 2000 a 2012</i>	<i>88</i>
<i>Tabela 8 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Flutuante no Brasil - 2000 a 2012</i>	<i>89</i>
<i>Tabela 9 – Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil – 2000 a 2012</i>	<i>109</i>
<i>Tabela 10 – Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil – 2000 a 2012</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 11- Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Flutuante no Brasil - 2000 a 2012</i>	<i>111</i>
<i>Tabela 12 - Resultados</i>	<i>116</i>

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1 – Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses</i>	<i>31</i>
<i>Figura 2 – Modelo tradicional: Dívida Nominal – Dispersão</i>	<i>32</i>
<i>Figura 3 - Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses</i>	<i>33</i>
<i>Figura 4 – Modelo tradicional: Dívida Cambial - Dispersão</i>	<i>34</i>
<i>Figura 5 – Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada</i>	<i>35</i>
<i>Figura 6 – Modelo tradicional: Dívida Pós-fixada – Dispersão</i>	<i>35</i>
<i>Figura 7 – Composição observada da Dívida Pós-fixada</i>	<i>42</i>
<i>Figura 8 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses</i>	<i>57</i>
<i>Figura 9 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Nominal 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 10 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses..</i>	<i>58</i>
<i>Figura 11 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Cambial 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>59</i>
<i>Figura 12 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses</i>	<i>60</i>
<i>Figura 13 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Pós-fixada 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>61</i>
<i>Figura 14 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses</i>	<i>80</i>
<i>Figura 15 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Nominal 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>81</i>
<i>Figura 16 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses</i>	<i>81</i>
<i>Figura 17 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Cambial 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>82</i>
<i>Figura 18 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses</i>	<i>83</i>
<i>Figura 19 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Pós-fixada 12 meses – Dispersão....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 20 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Flutuante 12 meses</i>	<i>84</i>
<i>Figura 21 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Flutuante 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>85</i>
<i>Figura 22 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 23 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Nominal 12 meses – Dispersão.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 24 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses</i>	<i>102</i>
<i>Figura 25 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Cambial 12 meses - Dispersão</i>	<i>103</i>
<i>Figura 26 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses</i>	<i>104</i>
<i>Figura 27 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Pós-fixada 12 meses - Dispersão</i>	<i>105</i>
<i>Figura 28 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Flutuante 12 meses</i>	<i>106</i>
<i>Figura 29 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Flutuante 12 meses - Dispersão</i>	<i>106</i>

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, uma parcela crescente da literatura em dívida pública preocupa-se em integrar teorias de gestão do endividamento público com os modelos de escolha de política fiscal ótima. A relevância da junção dessas duas preocupações fica evidente quando observamos que a escolha da composição da dívida pública pode ser efetuada de modo a compensar, no mercado, as flutuações do valor desta com mudanças nos déficits futuros esperados. Inúmeras são as referências nesse sentido, entre elas Goldfajn (2000), Faraglia, Marcet e Scott (2008a), Mendonça (2004), Cysne (2007), entre outros.

Este trabalho estuda a composição ótima da dívida pública, tendo como ponto de partida o modelo clássico de suavização da tributação, exposto em Goldfajn (2000), no qual pressupõe-se a existência de três tipos de endividamento (nominal, ou prefixado; cambial; e pós-fixado), e repactuação constante da dívida pública indexada (de modo que a composição do endividamento público pode ser completamente alterada a cada período). A discussão se distingue da abordagem tradicional por utilizar informação condicional, ao invés da abordagem não condicional, incrementando precisão e qualidade aos resultados em termos de erro quadrático médio. Naturalmente, temos no GARCH multivariado um método de estimação mais adequado.

Outra dimensão aqui discutida é a expansão do modelo tradicional com o estudo de outras abordagens, que consideram a decomposição da dívida pós-fixada em duas proporções distintas de acordo com o instrumento de indexação utilizado (a saber, dívida flutuante, quando os títulos são indexados a taxas de juros, e dívida pós-fixada em preços, quando o instrumento de indexação utilizado é representado por um índice de preços), além de considerar a possibilidade de resolução do problema em horizonte infinito (no qual a autoridade fiscal pode considerar a existência de diferentes maturidades para os títulos públicos, sem repactuação completa da composição a cada período). A abordagem com três dívidas e horizonte infinito já havia sido proposta por Cysne (2007), muito embora tenha sido estimada de forma não condicional.

O objetivo deste trabalho é, portanto, verificar se a composição ótima da dívida pública brasileira se aproxima daquela observada empiricamente, comprovando ou refutando a aderência da atual gestão do endividamento público brasileiro aos modelos de suavização da tributação estudados. Além disso, também se analisa a contribuição das variáveis macroeconômicas, bem como a interação entre elas, como justificativa para a alteração das proporções de endividamento público. Em síntese, este trabalho procura definir características interessantes do modelo de suavização da tributação (em suas vertentes) que encontram suporte empírico na composição da dívida pública no Brasil.

A dívida pública é um interessante instrumento de política econômica, por tornar factível a minimização de variações de bem-estar, por meio da suavização de impactos relacionados a eventos adversos no tempo. A possibilidade de emissão de dívida pública dá às autoridades fiscais maior flexibilidade para amortecer impactos inesperados sem alterar significativamente a estrutura de tributos e gastos públicos. Nesse sentido, a gestão do endividamento prioriza quantidade e qualidade do gasto público e encontra nos modelos de equilíbrio do endividamento um interessante aparato teórico.

Bohn (1988, 1990), um dos precursores dos modelos de suavização da tributação em dois períodos, baseia-se em Barro (1979) para comprovar, através do uso de vetores autorregressivos (doravante, VAR) a importância da matriz de covariâncias entre PIB e nível de preços para determinar o volume de dívida nominal. Mais adiante, Missale (1997) adota a metodologia defendida por Bohn (1998, 1990) para endossar seus resultados, em horizonte infinito.

Procedendo à junção entre as ideias de Bohn (1998, 1990) e os argumentos de Missale (1997) em favor do endividamento nominal (ou prefixado), Goldfajn (1996, 2000) pontua a solução analítica para um modelo de suavização da tributação no qual as dívidas nominal (ou prefixada) e cambial devem ser administradas de modo a atender proporções ótimas da dívida total, capazes de minimizar as perdas de bem-estar dos agentes. O autor confirma empiricamente a existência do *trade-offs* entre o problema de consistência temporal e a suavização da tributação: economias com elevada proporção de dívida indexada apresentam pequenas flutuações no valor da dívida total quando afetadas por variações nos preços, oferecendo previsibilidade ao endividamento público; porém, se alterações nos gastos públicos mostrarem-se positivamente correlacionadas

aos choques inflacionários, os títulos prefixados possibilitam a redução do valor real da dívida, ocasionando redução real da dívida total. Os resultados empíricos comprovam a existência destes efeitos.

Outros trabalhos também abordam o tema, porém com viés empírico. Isso é consistente com Maia e Garcia (2012), entre outros. Enquanto Cysne (2007) defende que os modelos de suavização da tributação encontram pouco suporte empírico para dados recentes, Maia e Garcia (2012) estudam o impacto das volatilidades da inflação e do câmbio sobre a composição da dívida pública, concluindo pela existência da correlação entre dívida prefixada e volatilidade da inflação, mas refutando a hipótese de influência das variáveis sobre a dívida cambial.

A maioria dos trabalhos citados, no entanto, utiliza modelos de dois períodos, que adotam claramente a hipótese de que toda a dívida emitida pelo governo em um período vence no período posterior. Essa hipótese é pouco realista, dado que é praxe dos gestores do endividamento público optarem, muitas vezes, pela rolagem da dívida, administrando o principal e pagando os juros. Essa postura garante a solvência do sistema econômico sem, no entanto, alterar significativamente as despesas e receitas do governo, já que o principal se reduz gradativamente ao longo do tempo. Além disso, na prática, há dívidas com diversas maturidades, e o que se convencionou chamar de dívida pós-fixada une dívidas indexadas a preços e indexadas a juros (dívidas flutuantes) que reagem de formas diferentes a choques macroeconômicos.

Portanto, este trabalho baseia-se no modelo desenvolvido por Goldfajn (2000), e abordado por Cysne (2007), aprimorado por meio de modificações estruturais para acomodar dívidas com maturidades em períodos infinitos e com uma formulação mais específica de dívida pós-fixada. Essas abordagens permitirão maior comparabilidade dos valores estimados àqueles efetivamente utilizados na gestão do endividamento público, já que tornam o modelo de suavização da tributação muito mais próximo ao ambiente real da dívida pública brasileira.

Um resumo dos modelos estudados, com a nomenclatura adotada e suas referências bibliográficas (quando existentes) encontra-se na Tabela 1 - Composição da Dívida Pública – resumo dos modelos estudados. Os resultados obtidos nos quatro modelos

alinham-se àqueles esperados pela literatura, confirmando, para dados recentes, os *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000), muito embora os efeitos adicionais estimados nos modelos com 4 tipos de endividamento não encontrem pares para comparação (apesar de apresentarem sinais estimados alinhados àqueles esperados).

Tabela 1 - Composição da Dívida Pública – resumo dos modelos estudados¹

	Três tipos de dívida Nominal, Cambial, Pós-fixada	Quatro tipos de dívida Nominal, Cambial, Pós-fixada em Preços, Flutuante
dois períodos	Modelo tradicional Goldfajn (2000)	Modelo para dívida flutuante em dois períodos
infinitos períodos	Modelo tradicional em infinitos períodos Cysne (2007)	Modelo para dívida flutuante em infinitos períodos

O trabalho está dividido da seguinte forma. Após esta introdução, encontra-se uma breve revisão bibliográfica. O modelo tradicional de suavização de tributação em dois períodos encontra-se no capítulo 3, assim como os resultados de sua estimação. No capítulo 4 está exposto o modelo de suavização de tributação para período infinito, e seus resultados. O capítulo 5 expõe o modelo de suavização da tributação expandido para a dívida flutuante, com resolução do problema de minimização em dois períodos, seguido dos resultados. No capítulo 6 expõe-se o modelo de suavização da tributação expandido para a dívida flutuante, com resolução em horizonte infinito. Por fim, no capítulo 7 estão as conclusões e, nos apêndices, a solução analítica dos modelos utilizados.

¹ Os modelos estudados se inspiram em Goldfajn (2000) e Cysne (2007), cuja dívida pública encontra-se fragmentada em três tipos de endividamento (nominal ou prefixado, cambial e pós-fixado) e a minimização da função de perda social acontece de forma não condicional. Sobre estes modelos são feitos incrementos e modificações, que tornam os resultados mais próximos da composição observada da dívida pública. O modelo I replica o trabalho de Goldfajn (2000), com nova abordagem econométrica, agora condicional. O modelo II inspira-se em Cysne (2007), apurando a composição ótima do endividamento público para período infinito, também em abordagem condicional. Os modelos III e IV são expansões dos modelos I e II, respectivamente, pressupondo o desmembramento da dívida pós-fixada em dois grupos distintos: dívida flutuante e dívida pós-fixada em preços.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A literatura existente sobre a dívida pública é bem extensa, e possui diversas vertentes de estudo, preocupadas com diversos aspectos do gerenciamento do endividamento público. Dentre os diferentes aspectos estudados, destacam-se os modelos preocupados com a emissão, com o custo de rolagem da dívida, além da composição do endividamento e sustentabilidade. Além disso, uma parcela crescente desta literatura tem se preocupado em integrar teorias de gestão do endividamento com modelos de escolha ótima de política fiscal.

Os modelos que versam sobre a emissão do endividamento, e seus possíveis desdobramentos sobre a sustentabilidade da dívida encontram sustentação teórica nos trabalhos de Calvo (1988), Giavazzi e Pagano (1990), Calvo e Guidotti (1990), Alesina, Prati e Tabellini (1990), além de Missale e Blanchard (1994) e Bevilaqua e Garcia (1999), este último aplicado ao caso brasileiro. Já os modelos preocupados com a composição da dívida pública são representados, principalmente, por Bohn (1990), Goldfajn (1995), Goldfajn (2000), Missale e Giavazzi (2003), Cysne (2007), além de Mendonça (2004) e Maia e Garcia (2010), estes aplicados aos dados brasileiros.

Calvo (1988) formula modelos baseados em expectativas nos quais considera a possibilidade de rejeição à dívida pública, seja diretamente ou via inflação. Através da maximização da utilidade de um agente representativo, o autor comprova que, ainda que a dívida nominal seja a melhor opção apontada pelo problema de otimização, as restrições ao comprometimento levam a uma situação de múltiplos equilíbrios, onde a indexação é superior àquela apontada pela solução ótima do problema.

Giavazzi e Pagano (1990) desenvolvem um modelo onde o ponto central de estudo é o problema da rolagem da dívida pública, no qual tem fundamental importância o tamanho, o prazo médio e a estrutura de vencimentos. São estes fatores, inclusive, os responsáveis por possíveis crises de confiança, que acontecem quando mudanças de expectativa sobre o comportamento do governo alteram a probabilidade de ocorrência

de *default*. Os autores comprovam, supondo uma pequena economia aberta com câmbio fixo, que dívidas com poucos vencimentos prejudicam a administração pública, já que em momentos de crise de confiança o governo deveria pagar elevados prêmios de risco (supondo existir demanda para os títulos públicos). Neste sentido, a recomendação de alongar prazos, uniformizar vencimentos ao longo do tempo e indexar a dívida seriam interessantes alternativas para minimizar estes efeitos indesejados.

Os mesmos resultados são endossados por Calvo e Guidotti (1990), quando analisam o impacto e o grau de indexação, bem como a estrutura de vencimentos ótima, levando em consideração uma função de perda social. Os resultados apontam para a superioridade da dívida indexada sobre a dívida do tipo nominal.

Alesina, Prati e Tabellini (1990) estudam, da mesma forma, os benefícios de alongar a dívida, reduzindo a frequência com que são efetuados os refinanciamentos da mesma. Segundo os autores, a quantia de dívida vincenda em cada momento do tempo é tão ou mais importante que sua composição. Isso porque a maturidade da dívida pode alterar a probabilidade de ocorrência de crises de confiança, caso os prazos médios sejam extremamente curtos, forçando refinanciamentos constantes. Portanto, prazos mais alongados e menores concentrações de vencimentos reduzem o risco de crises de confiança, ainda que existam custos para tal, como elevação das taxas de juros e, por consequência, dos prêmios de risco.

Missale e Blanchard (1994) testam, para países da OCDE, a relação inversa entre o nível da dívida pública e sua maturidade², como forma de manter a credibilidade da política anti-inflacionária. Os autores mostram, através de um modelo de inconsistência temporal, que, para economias com grau de endividamento elevado, existe um *trade-offs* entre inflacionar a dívida no período inicial (e arcar com os custos de uma maior inflação nos períodos seguintes) ou permanecer com inflação baixa, mas com maior estoque de dívida ao longo do tempo. Como existe incentivo ao governo para inflacionar a economia, dados elevados níveis de dívida e maturidade efetiva, a redução da parcela de dívida nominal e a redução da maturidade efetiva são interessantes

² Para os autores, a maturidade efetiva do endividamento público corresponde à maturidade da dívida que pode ser afetada pelo aumento dos preços. Neste aspecto, a dívida indexada apresenta maturidade igual a zero.

alternativas para a manutenção da credibilidade do governo, quando este julgar ser inevitável aumentar o endividamento público.

Finalizando o conjunto de trabalhos preocupados com a emissão do endividamento, temos o trabalho de Bevilaqua e Garcia (1999), que analisa, à luz de tais modelos, a ocorrência de crises de confiança durante a evolução da dívida pública brasileira. Segundo os autores, a dívida pública brasileira possui características peculiares que dificultam a ocorrência de crises de confiança, como viés interno³, que reduz a volatilidade da demanda por dívida interna no caso de crise doméstica, e intermediação bancária, uma vez que a demanda por títulos públicos no Brasil sempre foi altamente correlacionada à demanda bancária para a proteção de perdas. Ambos os fatores tornam a demanda por títulos menos volátil, ficando a economia menos suscetível a crises de confiança.

Já entre os trabalhos que se preocupam com a composição do endividamento público, e mais especificamente sobre modelos que visam suavizar variações na tributação, o precursor foi o trabalho de Barro (1979). O autor postula que variações não antecipadas na trajetória de dispêndios por parte do governo podem ocasionar variações indesejadas no bem-estar dos indivíduos da economia. Com acentuado ambiente de incerteza, e frente às mudanças de políticas fiscais, que alteram o total de gastos públicos, os indivíduos mudariam suas alocações de recursos, repensando suas escolhas ótimas. Assim, se consideramos a gestão econômica como minimizadora de perdas no bem-estar, a melhor resposta da autoridade econômica seria internalizar tal fato, alterando de forma eficaz a estrutura tributária.

Bohn (1990), seguindo a argumentação exposta em Barro (1979), objetiva a maximização da utilidade, através da escolha do nível de consumo. Desenvolvendo seu referencial teórico em versão estocástica, o autor utiliza vetores autorregressivos para confirmar a importância da covariância entre produto interno e inflação (interna e externa) na determinação da composição ótima da dívida pública, assumindo como premissa que a autoridade governamental deseja reduzir as incertezas sobre a riqueza e consumo dos agentes. Seus resultados confirmam as percepções acerca da importância

³ Quando a maior parcela da dívida pública está em poder dos residentes.

da correlação entre inflação e produto: frente às opções de endividamento em moeda doméstica ou em moeda estrangeira, os agentes preferirão dívida em moeda externa caso as correlações citadas sejam negativas, sendo esta também uma forma de proteção contra choques no produto⁴.

Considerando a preocupação dos gestores públicos com o custo de variação da dívida pública ao longo do tempo, Missale (1997) define um modelo de suavização de tributação nos moldes daquele delimitado por Bohn (1990), presumindo, no entanto, uma especificação em horizonte infinito para a estimação dos coeficientes ótimos. Os resultados, testados para as economias inglesa e italiana, endossam àqueles obtidos, onde a composição ótima do endividamento público depende essencialmente das covariâncias entre os choques inflacionários, a taxa de câmbio real, os gastos públicos e o produto.

O trabalho de Missale, Giavazzi e Benigno (1997) também procura encontrar a composição ótima da dívida, agora sob a ótica de economias em processos de estabilização. Segundo os autores, a dívida nominal de longo prazo tende a ser elevada quanto maior for a volatilidade dos juros de curto prazo. Também responderá positivamente às expectativas de menores juros futuros no longo prazo, e à redução dos juros após o início do plano de estabilização. Sob a ótica de dois tipos de gestão pública (de acordo com a qualidade da informação, simétrica ou assimétrica), os autores concluem que quanto maiores a credibilidade do governo e a volatilidade das taxas de juros de curto prazo, maiores serão as proporções de dívida pública com prazos mais longos.

Goldfajn (2000) agrega a ideia de Bohn (1990) aos argumentos de Missale (1997), para explicitar um modelo de suavização de tributação pelo qual as proporções ótimas de dívida nominal e cambial são proporções derivadas da dívida total, que dependem da inflação, do crescimento dos gastos públicos e da apreciação real do câmbio. Em um modelo de dois períodos, o autor mostra que a decisão da administração pública deve considerar a existência do *trade-off* entre o problema de consistência temporal e a suavização da tributação: de um lado, a emissão de títulos indexados permite que o

⁴ Uma vez que a dívida cambial não gera problemas de inconsistência temporal, como acontece com a dívida interna.

governo minimize as flutuações do valor real de sua dívida, caso ocorram variações na inflação; por outro lado, se as mudanças no total de endividamento estiverem positivamente correlacionadas com os choques inflacionários, os títulos prefixados reduzem o valor real da dívida total. Os resultados encontrados pelo autor, com dados da economia brasileira, confirmam as evidências anteriormente expostas.

Tanto Cysne (2007) quanto Maia e Garcia (2012) abordam o tema da composição ótima, porém com viés empírico. Enquanto Cysne (2007) defende que os modelos de suavização da tributação encontram pouco suporte empírico para dados recentes, Maia e Garcia (2012) estudam o impacto das volatilidades da inflação e do câmbio sobre a composição da dívida pública, concluindo pela existência da correlação entre dívida prefixada e volatilidade da inflação, mas refutando a hipótese de influência das variáveis sobre a dívida cambial.

3 MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO

Motivado em Barro (1979) e exposto com detalhes em Goldfajn (2000), o modelo de suavização da tributação defende que variações excessivas na estrutura tributária teriam o efeito de impor uma significativa perda de bem-estar aos agentes econômicos, na medida em que expõe a economia a um maior grau de incerteza, forçando os agentes a refazerem frequentemente suas escolhas ótimas. Nesse sentido, caso o objetivo precípua da gestão da dívida pública seja minimizar tal desconforto, deverá internalizar o fato de que eventos inesperados poderão alterar a trajetória dos gastos públicos, traduzindo-se em mudanças no total dos tributos.

Apresenta-se aqui o modelo tradicional de suavização da tributação, no qual se reconhece a existência de três tipos de dívida e administração da dívida em dois períodos, bem como três possíveis extensões, a saber: o modelo tradicional com horizonte infinito, modelo com 4 tipos de dívida resolvido em dois períodos, e modelo com 4 tipos de dívida resolvido em horizonte infinito.

3.1 O modelo tradicional de suavização da tributação

Goldfajn (2000), especificamente, estuda a suavização da tributação em um modelo simples, para dois períodos do tempo. O autor deriva a solução analítica para o problema de minimização de uma função de perda social, sujeita à restrição orçamentária do governo, sabendo-se que esta considera, entre outros, as proporções ótimas de dívida pública (prefixada, indexada e cambial).

Os títulos públicos podem ser prefixados ou pós-fixados, e os agentes definem sua demanda por tais papéis levando em consideração suas expectativas quanto aos rendimentos esperados dos mesmos. Os títulos prefixados, também chamados de dívida nominal, são aqueles que possuem rentabilidade definida no momento da comercialização do mesmo. Desta forma, o investidor tem conhecimento sobre o valor que ira receber se o título permanecer em sua posse até o vencimento. São representados pelas Letras do Tesouro Nacional (LTN) e pelas Notas do Tesouro Nacional - Série F

(NTN-F), e demandados quando os investidores acreditam que a taxa de juros prefixada será superior àquela taxa básica da economia.

Os títulos pós-fixados, por sua vez, apresentam seus valores corrigidos através de um indexador, o que faz com que sua rentabilidade dependa do desempenho deste indexador ao longo do tempo, bem como da taxa acordada no momento da compra do título.

Os títulos pós-fixados se dividem em três grupos, que diferem principalmente no instrumento utilizado para corrigir o valor do endividamento: dívida indexada em juros, cujo título comercializado pelo Tesouro Nacional é a Letra Financeira do Tesouro (LFT); dívida indexada em índices de preços, representada pelas Notas do Tesouro Nacional - Série B (NTN-B) e Notas do Tesouro Nacional - Série B - Principal (NTN-B Principal), ambas indexadas à variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), e pelas Notas do Tesouro Nacional - Série C (NTN-C), esta última atrelada à variação do Índice Geral de Preços ao Mercado (IGP-M); por fim, a dívida cambial, colocada no mercado através da comercialização dos títulos globais (*Global-Bonds*, quando negociados em dólar, ou *Euro-Bonds*, quando negociados em euros)⁵.

Reconhece-se, portanto, a existência de três fontes de incerteza na economia: o crescimento dos gastos do governo, a taxa real de câmbio e a demanda por moeda. Também se delimitam três instrumentos financeiros, capazes de minimizar os impactos de tais fontes de incerteza: títulos nominais, cuja taxa de retorno real é dada por $\frac{1+i}{1+\pi}$, sendo i a taxa de juros nominal da economia, e π a taxa de inflação do período; títulos indexados, cuja taxa nominal é $(1+r)(1+\pi)$, sendo r a taxa de juros real; e títulos cambiais, que pagam $(1+i^*)(1+e)$, sendo i^* a taxa de juros internacional e e a taxa de apreciação cambial.

⁵ Muito embora ainda existam em circulação no mercado os chamados *A-Bonds*, títulos emitidos em operações de troca com o *C-Bond* em 2005.

O objetivo do governo é minimizar uma função de perda de bem-estar social⁶, dada por:

$$\min_{\theta, \theta^*} E_{t-1} \left[A \frac{\tau_t^2}{2} + \frac{\pi_t^2}{2} \right] \quad (3.1)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- π_t é a taxa de inflação vigente em t ;
- A é uma constante de proporcionalidade que pondera o comprometimento do governo junto às políticas monetária e fiscal;
- θ e θ^* são, respectivamente, as proporções de dívida prefixada e cambial existentes na economia, de modo que a proporção de dívida pós-fixada é igual a $1 - \theta - \theta^*$.

Os consumidores, por sua vez, são avessos ao risco, e demandam taxas de juros da forma:

$$i_t = \pi_t^e + r \quad (3.2)$$

sendo que o superescrito e corresponde a variável em seu valor esperado.

Presume-se, também, a paridade descoberta de juros, com $i_t = e_t^e + i_t^*$. A inflação, por sua vez, decorre de:

$$\pi_t = m_t + v_t \quad (3.3)$$

em que m_t representa o crescimento da oferta monetária no período t , e v_t é a velocidade dos choques, considerada como um ruído branco.

Em equilíbrio, investidores racionais antecipam as decisões da autoridade monetária quanto ao crescimento da moeda, de modo que:

⁶ Vale ressaltar que, apesar da presença e relevância das variáveis A e π na formulação da função de perda social, como assumimos comprometimento do governo com as metas estabelecidas para a economia, tais variáveis não influenciam a resolução do problema de minimização.

$$\pi_t^e = E(\pi_t) = m_t \quad (3.4)$$

A restrição orçamentária do governo é dada por:

$$\tau_t = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})(1 - \theta_t - \theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \right) \theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1 + i^*)(1 + e_t)}{(1 + \pi_t)} \right] \theta_t^* B_{t-1} \quad (3.5)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- g_t é a taxa de crescimento dos gastos do governo no período t ;
- G_t representa o total de gastos públicos no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;
- θ e θ^* representam, respectivamente, as proporções de dívida nominal e cambial, de modo que a proporção de dívida pós-fixada é igual a $1 - \theta - \theta^*$;
- B_t corresponde ao nível total de dívida pública em t ;
- i_t é a taxa de juros nominal doméstica em t ;
- π_t consiste na taxa de inflação em t ;
- i_t^* é a taxa de juros nominal externa em t ;
- e_t é uma medida de apreciação cambial em t .

O superescrito e , novamente, corresponde às variáveis em seu valor esperado. A apreciação cambial é apurada como a diferença entre a taxa de variação da inflação e a taxa de variação do câmbio (e_t):

$$q_t = \pi_t - e_t \quad (3.6)$$

A escolha do governo quanto à composição do endividamento é efetuada levando em consideração a existência de *trade-offs* entre os custos implícitos à administração de

dívida pública nominal e o risco de perdas associadas à opção de manter uma composição do endividamento essencialmente indexada.

A dívida indexada mostra-se como uma alternativa ao governo e à sociedade quando a economia apresenta-se excessivamente suscetível a choques de demanda. Uma vez que estes choques adversos levam à contração do produto e do nível de preços, uma economia com considerável quantidade de dívida indexada a preços observaria, neste contexto, a redução do serviço da dívida indexada. Este mecanismo configura-se, inclusive, como uma interessante proteção ao equilíbrio fiscal da economia frente às alterações na demanda agregada, por penalizar as contas públicas caso a autoridade monetária faça emissões monetárias desmedidas para cobrir déficits públicos.

Porém, a economia também pode ser afetada por choques adversos de oferta. Tais eventos levam à queda do nível de produto, conjuntamente à elevação no nível de preços. Os efeitos sobre receitas e gastos do governo, nesse cenário, são opostos (retração no primeiro, expansão no segundo) e, assim sendo, uma elevada parcela de dívida indexada figuraria como um gasto adicional, já que o aumento da inflação levaria ao aumento do serviço desta dívida. Nesse contexto, dívidas nominais poderiam ser uma melhor alternativa na condução da política econômica, pois teriam por efeito reduzir o serviço da dívida em termos reais, oferecendo proteção e previsibilidade ao balanço fiscal do governo. Logo, uma possível emissão monetária para cobrir eventuais déficits públicos agiria no sentido de socializar o aumento da dívida do governo, impondo uma perda de valor aos títulos prefixados em posse do público, reduzindo a dívida real do governo.

Assim sendo, a delimitação de tais *trade-offs* mostra-nos que a escolha da composição da dívida pública pelo governo deve levar em consideração o fato de que suas políticas fiscal e monetária podem estimular diferentes choques na economia, causando impactos distintos na inflação. Estes devem alterar o serviço da dívida indexada e o montante real de dívida pública influenciando diretamente a oferta por determinados tipos de títulos. Além disso, as políticas públicas também podem beneficiar ou prejudicar o total de riqueza em poder do público, agindo sobre a demanda por determinados tipos de títulos. Tendo em vista tais efeitos, a solução para a composição ótima do endividamento público deve ser aquela que concilia, de maneira ótima, os *trade-offs* explicitados.

Log-linearizando a equação (3.5), e tendo em vista a relação expressa na equação (3.6), temos:

$$\tau_t \approx (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})B_{t-1} \left[1 - \theta_t (\pi_t - \pi_t^e) - \theta_t^* (q_t - q_t^e) \right] \quad (3.7)$$

A solução do problema de escolha da composição ótima do endividamento público no modelo explicitado por Goldfajn (2000) acontece em dois estágios. No primeiro período o governo escolhe a composição de dívida que será vendida ao público, tendo em vista que tais montantes têm seu vencimento no período seguinte, além de considerar suas expectativas quanto aos possíveis choques econômicos. Conhecidos os choques, no período seguinte o governo delibera sobre o crescimento ótimo da quantidade de moeda na economia, sabendo que tal variável tem influência direta sobre a inflação.

A solução analítica do problema proposto por Goldfajn (2000), minimizando a equação (3.1) sujeita à restrição orçamentária expressa pela equação (3.7), retorna as proporções ótimas para as dívidas nominal (ou prefixada) (representada pelo coeficiente θ) e cambial (representa pelo coeficiente θ^*):

$$\theta_t = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{g\pi,t} \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t} \sigma_{q\pi,t})}{(1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2]} \quad (3.8)$$

e

$$\theta_t^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{qg,t} \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t} \sigma_{q\pi,t})}{(1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2]} \quad (3.9)$$

em que:

- θ_t é a proporção ótima de dívida prefixada no período t ;
- G_t é o nível de gastos públicos no período t ;

- $\sigma_{g\pi,t}$ corresponde à covariância condicional entre a taxa de crescimento do gasto do governo e a inflação;
- $\sigma_{q,t}^2$ é a variância condicional da apreciação cambial;
- $\sigma_{gq,t}$ corresponde à covariância condicional entre a taxa de crescimento do gasto do governo e a apreciação cambial;
- $\sigma_{q\pi,t}$ representa a covariância condicional entre a apreciação cambial e a inflação;
- B_t representa o total de dívida pública no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;
- $\sigma_{\pi,t}^2$ é a covariância condicional da inflação; e
- θ_t^* representa a parcela ótima de dívida cambial no período t .

A dívida pós-fixada, neste caso, é apurada como o complementar do total das proporções de dívida nominal e cambial, de modo que a soma das três proporções é igual a um (ou o total da dívida pública).

A análise das proporções ótimas encontradas seguindo o modelo de Goldfajn (2000) confirma as conclusões sobre os *trade-offs* anteriormente enunciados. A proporção ótima de dívida nominal é crescente com relação a covariância entre inflação e gastos públicos, confirmando a premissa de que esse tipo de dívida é uma atrativa proteção para o governo toda vez que choques nos gastos públicos são acompanhados por variações também nos níveis de inflação. Logo, sendo essa covariância positiva, a expansão dos gastos deve ser acompanhada de aumentos no nível de preços, reduzindo o valor real da dívida pública.

Igualmente, a variância da inflação tende a reduzir o total de dívida nominal, uma vez que a variação pura da inflação acrescenta uma significativa parcela de incerteza na restrição orçamentária pública. Nesse cenário, a resposta ótima dos agentes econômicos seria o aumento do total de dívida indexada, como maneira de se proteger contra a perda real de valor dos títulos públicos.

A quantia de dívida cambial representa, por sua vez, uma nova forma de proteção para o governo, desde que a correlação entre a apreciação cambial real e as demais variáveis presentes na restrição orçamentária do governo seja diferente de zero. Por outro lado, a inclusão de uma nova forma de dívida pública introduz na economia uma nova fonte de incerteza. Portanto, caso a variância da apreciação cambial seja alta, a parcela de dívida cambial tende a ser pequena, uma vez que as taxas de retorno intrínsecas precisariam flutuar muito para compensar movimentos do valor real da dívida em câmbio.

Os resultados empíricos de Goldfajn (2000) confirmam as evidências teóricas sobre o comportamento de θ_t . A parcela de dívida nominal estimada em seu trabalho se eleva com acréscimos na covariância entre inflação e gastos públicos, e retrai-se com aumentos da variância da inflação. O comportamento da parcela de dívida cambial, no entanto, apresentou comportamento destoante daquele previsto pelo modelo: aumentos da variância da medida de apreciação cambial, segundo a aplicação empírica de Goldfajn (2000), contribuíram positivamente para a evolução da parcela de dívida em câmbio.

Mais recentemente, os trabalhos de Bevilaqua, Garcia e Nechio (2004) e Maia e Garcia (2012) indicam que, para períodos recentes, a evidência empírica pode não corresponder às expectativas teóricas. Maia e Garcia (2012), em especial, defendem uma maior parcela de dívida pública do tipo nominal em detrimento às demais, como resposta à correlação positiva entre gastos públicos e taxa de inflação.

Conforme os argumentos de Cysne (2007), apesar das constatações empíricas em torno dos determinantes da proporção de dívida nominal, os estudos sobre a parcela ótima de dívida cambial não encontram sustentação empírica para a evidência teórica.

3.2 Estratégia empírica

3.2.1 Etapas de estimação

Uma vez encontradas as soluções analíticas do modelo de suavização da tributação na versão tradicional⁷, o primeiro objetivo empírico deste estudo é encontrar a composição teórica da dívida pública, e compará-la àquela efetivamente observada. O que se pretende, portanto, é verificar se o modelo de suavização da tributação encontra suporte empírico na composição observada para o endividamento público.

Além de comparar a composição teórica àquela observada, também se pretende confirmar a existência dos *trade-offs* anteriormente citados, verificando se, de fato, as variâncias e covariâncias das variáveis macroeconômicas são elementos fundamentais, e levados em consideração, na decisão da autoridade fiscal por alterar a composição do endividamento público.

Dessa forma, a estratégia empírica passa, necessariamente, por três estágios, conforme descrição a seguir.

3.2.1.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries

No primeiro estágio de estimação, o objetivo é estimar as variâncias condicionais das variáveis de interesse, bem como as covariâncias condicionais entre elas.

São essas medidas que, em conjunto com os níveis de dívida líquida do setor público e de gasto do governo, determinarão as proporções ótimas de dívida pública, conforme os resultados obtidos via minimização da função objetivo (que é a função de perda social) frente à restrição orçamentária.

3.2.1.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública

Uma vez encontradas as séries de variâncias e covariâncias, é possível aferir quais seriam as proporções teóricas ótimas para as parcelas de dívida pública, de modo a garantir a suavização de choques macroeconômicos via emissão de dívida adicional.

⁷ A mesma estratégia empírica, contemplando os estágios de estudo, dados utilizados e técnica econométrica utilizada, será replicada para os demais modelos, propostos nos capítulos seguintes.

Essa forma de gerenciamento da dívida deve ser suficiente para minimizar as variações no bem-estar dos agentes. Portanto, após a obtenção das variâncias e covariâncias condicionais anteriormente mencionadas (através do primeiro estágio desta estratégia empírica), procede-se à substituição dos valores encontrados nas soluções analíticas de cada um dos modelos, bem como os valores realizados para o gasto público e a dívida pública.

Encontradas as proporções teóricas ótimas, é possível compará-las às composições efetivamente observadas para a dívida pública, observando se as séries utilizadas efetivamente se aproximam daquelas determinadas pelo modelo, seja no nível do endividamento, ou no comportamento da dívida ao longo do tempo. Esta comparação é feita através da análise gráfica das séries.

Os resultados apurados neste estágio também se caracterizam como uma inovação deste trabalho, já que os trabalhos usados como referencial teórico para este estudo de modelos de suavização da tributação não expõem as composições teóricas ótimas. Os trabalhos de Goldfajn (2000) e de Maia e Garcia (2010) não objetivam encontrar os valores teóricos ótimos seguindo a solução do problema de minimização. Sua preocupação central está em estudar de que forma as variâncias e covariâncias relevantes auxiliam na variação das proporções que são efetivamente realizadas pelo governo. Nesse sentido, os resultados a serem obtidos no segundo estágio da estimação não possuem meios de comparação com estes outros trabalhos.

3.2.1.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

Por fim, encontradas as variâncias e covariâncias das variáveis de interesse, e as proporções ótimas de dívida indexada, concentra-se a atenção na contribuição que essas variâncias e covariâncias fornecem para explicar a evolução das proporções das dívidas realmente observadas.

O principal interesse desta etapa é verificar a validade dos *trade-offs* já enunciados. Caso verifique-se a existência destes através das regressões das parcelas do

endividamento indexado frente às variâncias e covariâncias estimadas, será possível concluir que as interações entre as variáveis macroeconômicas fornecem relevante informação para a administração do endividamento público no período estudado.

Nesse estágio, portanto, abandona-se parcialmente a ideia de formular valores teóricos ótimos para as proporções da dívida, concentrando-se no estudo do sinal das variáveis de interesse para a determinação das proporções ótimas de indexação. É essa, em linhas gerais, a análise empírica efetuada por Goldfajn (2000) e Maia e Garcia (2012)⁸.

3.2.2 M-GARCH

O objetivo de encontrar a composição ótima do endividamento público requer o conhecimento da evolução e comportamento das variâncias e covariâncias condicionais das variáveis relevantes, de acordo com as minimizações condicionais postuladas em cada modelo exposto. Nesse sentido, é preciso determinar a forma mais adequada de se apurar as matrizes de covariâncias.

Os trabalhos de Goldfajn (2000) e Maia e Garcia (2012) estimam a matriz de covariâncias das séries de interesse por meio dos resíduos da estimação de um vetor autorregressivo (VAR). Conforme argumenta Maia e Garcia (2012), o uso dos resíduos de um VAR como fonte de dados justifica-se pela quantificação de inovações não esperadas pelos agentes de forma mais precisa, uma vez que nesse tipo de modelagem os resíduos são encontrados conjuntamente.

Mas nem sempre a estimação da matriz de covariâncias por meio de vetores autorregressivos é uma alternativa adequada. Quando se tem por objetivo a obtenção de variâncias e covariâncias condicionais por meio de dados macroeconômicos, uma metodologia mais apropriada é, por exemplo, a utilização de modelos de heterocedasticidade condicional (GARCH) multivariados. Tais modelos possibilitam

⁸ Esses trabalhos preocupam-se, exclusivamente, em estudar de que forma variações na matriz de covariâncias alteram as decisões da administração pública no que diz respeito à composição do endividamento.

que a informação seja utilizada de forma plena, sendo possível estimar coeficientes mais robustos e consistentes.

Os modelos de heterocedasticidade condicional, tanto em sua forma original ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedasticity* (Engle, 1982)), quanto em sua forma generalizada (GARCH (Bollerslev, 1986)) representam uma importante contribuição aos modelos econométricos, uma vez que permitem incluir na estimação econométrica (univariada ou multivariada) uma forma funcional específica para a variância do erro.

3.2.2.1 Modelo GARCH BEKK

A especificação BEKK é uma parametrização particular para o modelo GARCH multivariado, desenvolvida por Baba, Engle, Kraft e Kroner. Nela, garante-se que a matriz de covariâncias é positiva definida em cada momento do tempo⁹.

O modelo GARCH BEKK utilizado pode ser expresso, seguindo De-Losso (2011), como o sistema no qual as variáveis do vetor de médias podem ser expressas segundo a seguinte especificação¹⁰:

$$\begin{aligned}\pi_t &= c_{1,1} + c_{1,2}\pi_{t-1} + c_{1,3}\pi_{t-2} + \varepsilon_{\pi,t} \\ q_t &= c_{2,1} + c_{2,2}q_{t-1} + \varepsilon_{q,t} \\ g_t &= c_{3,1} + \varepsilon_{g,t}\end{aligned}$$

sendo que:

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{q,t} \\ \varepsilon_{g,t} \end{pmatrix} / I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$$

e

$$\Sigma_t = CC' + A_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A_1' + B_1 \Sigma_{t-1} B_1'$$

em que:

⁹ Para maiores detalhes, veja Engle e Kroner (1995).

¹⁰ Vale ressaltar que a definição do sistema a ser estimado muda essencialmente de acordo com as variáveis envolvidas no modelo utilizado.

- π_t é a inflação no período t ;
- q_t representa a medida de apreciação cambial, anteriormente postulada;
- g_t é a taxa de crescimento do gasto do governo; e
- $\varepsilon_t/\Gamma_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$ é um vetor de perturbações aleatórias.

C, A_1, B_1 são, respectivamente, matrizes $n \times n$, sendo C uma matriz triangular superior¹¹, e n o número de variáveis que compõem o sistema¹².

A escolha da ordem de defasagens das variáveis utilizadas foi feita através da análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, bem como da percepção econômica sobre as estruturas auto-regressivas das séries. Nesse sentido, tanto inflação quanto prêmio de risco apresentaram estrutura auto-regressiva de segunda ordem, apreciação cambial com dependência temporal de primeira ordem, e taxa de crescimento do gasto público e medida de diferença entre a dívida pública modeladas apenas na constante.

3.2.3 Dados

Serão utilizados dados mensais dessazonalizados entre janeiro/2000 e março/2012¹³. Tais dados estão disponíveis na base de dados do Tesouro Nacional, bem como na base de dados do Banco Central do Brasil e do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)¹⁴.

No primeiro estágio de estimação, no qual encontramos as variâncias e covariâncias necessárias para o cálculo dos coeficientes ótimos da dívida pública indexada, foram utilizados:

¹¹ O apóstrofo indica transposição da matriz em questão.

¹² A quantia de variáveis muda de acordo com o modelo estimado.

¹³ Muito embora na extensão do modelo para dívida flutuante, por conta da limitação de dados, tal período se estabelece entre janeiro/2004 e março/2012.

¹⁴ <http://www.bcb.gov.br>; <http://www.tesouro.fazenda.gov.br>; <http://www.ipeadata.gov.br>.

- gastos totais do Governo Central, excluídos os pagamentos de juros, como medida para o total de gastos do governo, em sua forma acumulada nos últimos 12 meses (utilizados em sua taxa de crescimento, conforme já especificado);
- taxa de câmbio comercial - venda (para a composição da medida de apreciação cambial, conforme já especificado anteriormente), em periodicidade mensal;
- taxa de inflação, medida através das variações mensais do Índice de Preços ao Consumidor (IPC), da Fundação Getulio Vargas (FGV), em sua forma acumulada nos últimos 12 meses;

Importante ressaltar que as séries utilizadas para o cálculo da matriz de variâncias e covariâncias condicionais (a saber, inflação, medida de apreciação cambial, taxa de crescimento dos gastos do governo) mostraram-se estacionárias no período estudado, ao nível de significância mínimo de 5%.

No segundo estágio de estimação, em que encontramos os coeficientes ótimos da dívida pública indexada, utilizamos, além das séries de variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio, as séries da dívida líquida do setor público (em termos nominais), bem como a série de despesas totais do Governo Central, de forma acumulada nos últimos 12 meses.

Para a obtenção dos diagramas de dispersão entre os coeficientes observados e os coeficientes teóricos ótimos, estes últimos estimados de acordo com o modelo, foram também utilizados os dados referentes à composição percentual da dívida pública (nominal, cambial e pós-fixada).

No terceiro estágio de estimação, onde objetivamos comparar os resultados obtidos por Goldfajn (2000), utilizamos, além das variâncias e covariâncias estimadas, e das proporções observadas para a dívida pública, a série de dívida líquida do setor público como proporção do Produto Interno Bruto (PIB). Nessa etapa, efetuam-se regressões lineares¹⁵ para confirmar a existência dos *trade-offs* postulados.

¹⁵ As regressões lineares foram realizadas levando em consideração a técnica de Newey-West para correção de autocorrelação e heterocedasticidade.

Importante ressaltar que todas as variáveis serão utilizadas em medida acumulada nos últimos 12 meses, uma vez que este padrão temporal resolve problemas de sazonalidade, que podem ser comuns em séries macroeconômicas, bem como suaviza possíveis choques existentes na economia. Estes choques, em específico, levariam a acentuadas mudanças na composição teórica ótima do endividamento público, que não são desejáveis na prática, uma vez que podem acarretar um elevado custo envolvido na troca da composição do endividamento público.

3.3 Resultados

Os resultados apresentados estão expostos de acordo com as etapas de estimação a serem consideradas (descritas anteriormente). Assim, abaixo listamos os resultados apresentados em cada etapa, bem como seus desdobramentos.

3.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries

Seguindo a especificação do modelo tradicional de suavização da tributação, a estimação da matriz de variâncias e covariâncias foi efetuada utilizando-se o modelo de heterocedasticidade condicional multivariado (GARCH multivariado) já especificado, sendo as variáveis envolvidas a inflação, a medida de apreciação cambial, e a taxa de crescimento dos gastos do governo. As séries utilizadas mostraram-se estacionárias no período, conforme já citado, assegurando a validade dos resultados.

Os resultados dos coeficientes estimados nesta primeira etapa encontram-se a seguir¹⁶:

¹⁶ Nota 1: Desvio-padrão das estimativas entre parênteses. Nota 2: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5% e (***) representa significância estatística a 1%.

$$\pi_t = 0,002^{***} + 1,650^{***} \pi_{t-1} - 0,682^{***} \pi_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{\pi,t}$$

$$(0,000) \quad (0,065) \quad (0,064)$$

$$q_t = 0,003 + 0,959^{***} q_{t-1} + \hat{\varepsilon}_{q,t}$$

$$(0,005) \quad (0,027)$$

$$g_t = 0,0102^{***} + \hat{\varepsilon}_{g,t}$$

$$(0,000)$$

Os resultados das variâncias e covariâncias estimadas por meio do modelo GARCH multivariado indicam variância decrescente para as variáveis no período. Vale ressaltar a queda da variância da medida de apreciação cambial (o que teoricamente implicaria em aumento da parcela de dívida pública alocada sob a forma cambial, seguindo as conclusões de Goldfajn (2000)), bem como a queda da variância da inflação, especialmente a partir de 2004 (o que, segundo Goldfajn (2000), agiria no sentido de aumentar a parcela de dívida nominal).

3.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública

Obtidas as séries de variâncias e covariâncias no primeiro estágio, procedeu-se à substituição dos valores encontrados nos coeficientes ótimos de dívida nominal, cambial e pós-fixada, sintetizando valores ótimos para essas proporções de dívida em cada período do tempo. Tais proporções ótimas foram expressas nas equações (3.8) e (3.9), e estão representadas graficamente nas Figuras 1 a 6, suavizadas para o período de 12 meses¹⁷.

¹⁷ Utiliza-se a média suavizada no período de 12 meses levando em consideração que, caso o governo se depare com um choque que altere significativamente o ambiente macroeconômico, presume-se que este estudará custos e benefícios de se alterar a composição da mesma e, por isso, levando um tempo para se ajustar. O mesmo raciocínio se aplica à existência de ciclos, que podem alterar a ordem econômica durante um período relativamente curto de tempo. Nesses casos, alterar a composição da dívida pública de forma radical pode não ser uma resposta ótima da administração pública, caso o custo de fazê-la seja superior aos benefícios. Para maiores detalhes, veja Cysne (2007). De forma prática, os resultados suavizados em 12 meses apresentam comportamento semelhante aos resultados mensais, de modo que aqui optou-se por mostrar apenas os primeiros.

Figura 1 – Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses

A evolução conjunta das séries de dívida nominal (ou prefixada), observada e teórica ótima, é vista na Figura 1. Os resultados indicam que a quantidade ótima de dívida nominal é crescente no período, com proporção de aproximadamente 45% da dívida total no início de 2012. Esse resultado alinha-se às expectativas de aumento da dívida nominal previsto pelo modelo, e é observado na prática, tendo em vista a queda da variância da inflação, bem como o aumento da covariância entre a inflação e o crescimento do gasto público no período. Estes dois últimos movimentos, em especial, reduzem a incerteza dos agentes quanto à remuneração real dos títulos nominais em seu poder.

Apesar das diferenças no nível de dívida nominal (em março/2012, a dívida nominal observada foi de 37%, enquanto a dívida teórica ótima foi de 45%), o comportamento dinâmico da dívida nominal ótima foi muito próximo ao comportamento da dívida observado no período, com correlação de 0,77 entre os dados. Esse comportamento pode ser visto no gráfico de dispersão da Figura 2, em que se representa o

comportamento conjunto das proporções ótima e observada. Os coeficientes estimados para a reta de ajuste do gráfico mostram-se estatisticamente significantes. Uma vez que o poder explicativo apresenta coeficiente próximo a 1, é possível concluir que a diferença entre as proporções acontece no nível das variáveis, e não na variação.

Figura 2 – Modelo tradicional: Dívida Nominal – Dispersão

É possível notar que, a partir de meados do ano de 2003, a proporção ótima reflete, na média, comportamento mais próximo àquele observado, muito embora, em praticamente todo o período de estudo, o modelo subestima as proporções ótimas frente àquelas observadas (exceto no período pós 2010, onde o modelo mostra uma proporção de dívida prefixada mais volátil e superior àquela observada).

No que diz respeito à proporção ótima de dívida cambial, os resultados, aparentemente, destoam daqueles observados.

As proporções ótimas de dívida cambial são muito próximas a zero, e apresentam comportamento crescente ao longo do período de estudo, conforme expresso na Figura 3. Quando analisado apenas por esta ótica, tal comportamento parece contraditório frente à queda observada da proporção de dívida cambial, com evidente redução da

mesma ao longo do tempo. O gráfico de dispersão, expresso na Figura 4, também explicita tal percepção, uma vez que poderíamos esperar que tais proporções mostrassem o mesmo comportamento (crescente ou decrescente), fato este que não se confirma.

Figura 3 - Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses

Porém, acredita-se que as proporções de dívida cambial estimadas pelo modelo não estão equivocadas. É importante enfatizar que a instabilidade inflacionária dos períodos passados (especialmente anteriores ao plano de estabilização) levou a uma proporção de dívida cambial elevada, e esse fenômeno não pode ser captado pelo modelo com o intervalo de dados utilizado. Mas, conforme observamos na Figura 3, as proporções de dívida cambial reduziram-se ao longo do tempo, convergindo, com o passar dos anos, para as proporções de dívida cambial estimada. Justamente por isso, o comportamento do gráfico de dispersão expresso na Figura 4 pode ser considerado coerente: enquanto a parcela estimada de dívida cambial apresenta leve aumento com o tempo, a elevada proporção de dívida cambial observada se retrai, convergindo para os valores ótimos estimados e reduzindo a diferença entre a parcela estimada e a parcela observada.

Figura 4 – Modelo tradicional: Dívida Cambial - Dispersão

Além das análises anteriores, podemos também observar o comportamento das proporções ótimas e observadas da dívida pós-fixada. O comportamento conjunto das séries ótima e observada da dívida pós-fixada pode ser observado na Figura 5. Nela, percebemos que há convergência entre os valores ótimo e observado ao longo do tempo, assim como no caso da dívida cambial, muito embora o modelo apontasse para dívida ótima totalmente pós-fixada no início do período estudado. Ao longo do período, no entanto, os valores ótimos se aproximam daqueles observados, ficando extremamente próximos a partir de meados do ano de 2010, como podemos perceber graficamente.

Figura 5 – Modelo tradicional: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada

O diagrama de dispersão, explicitado na Figura 6, mostra justamente essa convergência entre os valores ótimos e observados, uma vez que a reta de regressão entre os pontos apresenta inclinação negativa.

Figura 6 – Modelo tradicional: Dívida Pós-fixada – Dispersão

Por fim, também comprovou-se a robustez do modelo utilizado, testando outras especificações para as variáveis macroeconômicas além da especificação aqui adotada, assim como diferentes períodos de estudo. Os resultados encontrados corroboram os resultados aqui expostos, mostrando que a variação da dívida nominal estimada alinha-se a variação da dívida nominal observada, ainda que, em nível, os valores estimados subestimem as proporções observadas. Da mesma forma, a dívida cambial mostrou o mesmo perfil de convergência, salientando a aderência do modelo aos dados observados nos períodos mais recentes. Tal convergência também foi observada quando analisamos o comportamento da dívida pós-fixada.

Assim, é possível concluir que os elementos captados pelo modelo, e que alteram as proporções ótimas de dívida nominal e de dívida cambial, também são considerados na prática da gestão da dívida pública, já que valores observados e ótimos convergem ao longo do tempo.

3.3.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

De posse das séries de variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio, regredimos as proporções efetivamente realizadas de dívida nominal e dívida cambial contra as variâncias e covariâncias que efetivamente as compõe. Este estágio tem a finalidade de confirmar a existência dos *trade-offs* já enunciados, além de comparar os resultados com aqueles encontrados por Goldfajn (2000).

Diferentes especificações de modelo são testadas, e os resultados encontram-se reportados nas tabelas 2 e 3.

Na Tabela 2 encontram-se as regressões para a dívida nominal. Os modelos testam a existência dos *trade-offs* entre custo e risco da emissão de dívida nominal (ou prefixada), tendo em vista os impactos da variância da inflação, e da covariância entre inflação e expansão dos gastos do governo.

Dos seis modelos estimados para a dívida nominal, três utilizam a dívida do setor público como proporção do PIB $\left(\frac{D_t}{Y_t}\right)$ como regressor. Este último regressor, em específico, indica qual é o impacto sobre a dívida nominal quando o governo decide elevar a dívida pública como proporção do PIB. Caso o governo pretenda elevar o endividamento e inflacionar a economia (de modo a reduzir o serviço da dívida nominal), o sinal esperado para este coeficiente deve ser positivo. Caso contrário (quando o aumento do endividamento é acompanhado do comprometimento do governo no controle da política fiscal e da inflação), o sinal esperado para este coeficiente é negativo. No período estudado espera-se que o sinal deste coeficiente seja negativo, refletindo o comprometimento do governo com as políticas estabilizadoras e o plano de metas de inflação.

Os sinais dos coeficientes estimados, em todos os modelos, alinharam-se às expectativas descritas pelos *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000). A variância da inflação apresentou sinal negativo e estatisticamente significativo a 1% em todos os modelos, confirmando a percepção de que aumentos na taxa de inflação inibem a demanda por títulos nominais, uma vez que estes perdem valor real frente a choques inflacionários, elevando a preferência do público por títulos pós-fixados. Períodos de grande incerteza quanto à evolução do nível de preços refletem-se, necessariamente, em diminuições na parcela de dívida nominal.

Os coeficientes estimados para a covariância entre inflação e gastos públicos apresentaram sinal positivo nas especificações estudadas, com exceção a dois modelos, onde os coeficientes apresentaram-se negativos, porém estatisticamente insignificantes. Este resultado confirma a percepção de que aumentos nos gastos públicos podem incentivar o governo a emitir moeda pois, dessa forma, provocaria elevações da taxa de inflação, reduzindo o valor real da dívida pública nominal e da dívida pública total. Assim, o aumento da oferta de títulos públicos nominais é uma alternativa racional para a autoridade pública quando aumentos dos gastos públicos estão correlacionados com o aumento da inflação.

Tabela 2 – Modelo tradicional de suavização da tributação: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil – 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_{\pi}^2 \cdot 10^{-3}$	σ_q^2	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	D/Y	R ²
1	-1,204*** (0,222)	-4,861** (2,160)	7,835** (3,355)	0,717 (1,209)	0,0474 (0,074)	-0,4799*** (0,1293)	0,89
2	-1,114*** (0,218)	- -	8,447** (3,289)	1,542 (1,166)	- -	-0,5022*** (0,0001)	0,89
3	-1,126*** (0,223)	- -	8,193** (3,402)	1,521 (1,172)	0,022 (0,074)	-0,4923*** (0,1274)	0,89
4	-1,521*** (0,201)	-6,462*** (2,154)	0,750 (2,436)	0,272 (1,235)	0,118* (0,072)	- -	0,88
5	-1,481*** (0,207)	- -	-0,489 (2,469)	1,370 (1,225)	- -	- -	0,87
6	-1,495*** (0,206)	- -	-0,626 (2,463)	1,294 (1,222)	0,102 (0,073)	- -	0,88
Sinal esperado	(-)		(+)			(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida nominal no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_{\pi}^2 + \beta_2 \cdot \sigma_q^2 + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \sigma_{gq} + \beta_5 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_6 \cdot \frac{D}{Y} + \varepsilon_{\theta}$

Tabela 3 – Modelo tradicional de suavização da tributação: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil – 2000 a 2012

Modelo	σ_q^2	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	D/Y	R ²
1	4,348 (2,755)	-2,037 (1,549)	-0,186** (0,091)	0,286** (0,134)	0,89
2	3,692 (2,769)	-2,357 (1,560)	- -	0,325** (0,135)	0,89
3	4,863* (2,671)	- -	- -	0,284** (0,132)	0,89
4	5,931** (2,687)	-1,329 (1,533)	-0,213** (0,091)	- -	0,89
5	5,417** (2,722)	-1,591 (1,554)	- -	- -	0,88
6	6,086** (2,643)	- -	- -	- -	0,88
Sinal esperado	(-)	(+)	(-)		

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida cambial no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta^* = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_q^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{gq} + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \frac{D}{Y}$

O coeficiente explicativo ajustado (R^2), que se encontra na última coluna da tabela, apresentou elevados valores, indicando elevada explicabilidade entre os regressores e a variável dependente.

Quanto à dívida cambial, podemos observar que a covariância entre inflação e apreciação cambial apresentou sinal negativo em todos os modelos propostos, bem como significância estatística a 5%. Sendo essa covariância negativa em todo o período, aumentos nessa medida indicam que aumentos da inflação devem ser acompanhados de quedas na apreciação cambial, inibindo a demanda por títulos indexados em câmbio.

A variância da medida de apreciação cambial apresentou sinal positivo e estatisticamente significativa na maioria dos modelos estimados, indicando que aumentos desta levariam a aumentos da proporção de dívida cambial. Este resultado é, no entanto, contraditório, uma vez que se esperava que aumentos da variância da apreciação cambial incluíssem uma maior parcela de incerteza ao cenário econômico, reduzindo a exposição da dívida pública em sua forma cambial.

Já a covariância entre os gastos públicos e a medida de apreciação cambial apresentou sinal negativo em todos os modelos. Apesar do sinal esperado para esta variável ser positivo (indicando que aumentos do gasto do governo poderiam ser acompanhados de elevações na proporção de dívida cambial), este resultado é inconclusivo uma vez que os coeficientes não mostraram-se estatisticamente significantes.

Por fim, vale ressaltar que alguns dos resultados dos coeficientes estimados para a dívida cambial apresentam relevância estatística, contrariando as conclusões de Goldfajn (2000) e Maia e Garcia (2012), que argumentam ser inconclusivo qualquer resultado no que diz respeito aos determinantes da dívida cambial.

3.4 Conclusões

Os resultados obtidos nas três etapas de estimação mostram que o modelo de suavização da tributação é consistente com o objetivo de minimizar o custo social imposto pela

variação da estrutura tributária. Tal conclusão se confirma quando observamos tanto a dinâmica conjunta das proporções ótimas e observadas para cada tipo de endividamento.

Apesar da diferença de nível do endividamento nominal, foi possível perceber um comportamento conjunto das séries observada e ótima, comportamento este que se verificou também no diagrama de dispersão e na confirmação dos *trade-offs* anunciados, indicando que a gestão do endividamento público realmente levou em consideração a dinâmica das variáveis macroeconômicas para a definição de tais proporções.

Para a dívida cambial, foi possível perceber a convergência entre as proporções ótimas e observadas, resultado este em linha com a política de redução de exposição à dívida cambial, ocorrida após o plano de estabilização econômica.

A mesma convergência também foi observada para a dívida pós-fixada, sendo que, neste caso, para o período posterior a 2010 não é possível observar diferenças entre as séries teórica e observada.

Entretanto, apesar da consistência observada através dos resultados, é possível apontarmos algumas importantes limitações desta abordagem.

A primeira diz respeito ao prazo em que a dívida é repactuada. Na abordagem tradicional, o governo emite sua dívida no período t , e toda essa dívida tem maturidade para a data $t+1$, de modo que o endividamento público é repactuado a cada período. Nessa abordagem, o governo não transmite dívida entre períodos. Na prática, porém, sabemos que isso não acontece: o endividamento público possui, na realidade, diversos títulos com maturidades diferentes, de modo que o governo carrega dívida entre períodos, ora repactuando a dívida, ora rolando dívida de um período para outro.

Apesar desta ser uma limitação pontual, não configura-se como um importante efeito sobre os resultados¹⁸. Na prática, o modelo é bem flexível a mudanças estruturais, e tem dinâmica, o que permite a adaptação para casos mais complexos e próximos da estrutura

¹⁸ Nos próximos capítulos são apresentados os aspectos do exercício empírico, e este resultado será abordado novamente. Entretanto, cabe adiantar que um dos principais efeitos de tal limitação recai sobre o nível da dívida pública ótima estimada: as estimações mostram que o modelo não é capaz de replicar o nível de endividamento ao longo do tempo, embora consiga captar sua dinâmica.

atual do mercado mobiliário brasileiro. Tais adaptações são efetuadas nos modelos apresentados na sequência.

Outra limitação do modelo é a forma como a dívida indexada é tratada. Apesar de se reconhecer a existência de dívida indexada a preços e dívida indexada a juros (ou dívida flutuante), nesta primeira abordagem ambas são tratadas como uma única dívida, chamada de pós-fixada. Porém, as referidas proporções apresentam comportamento bem diferente quando observamos o endividamento público após 2004: é possível observar, ao longo do tempo, uma maior exposição em dívida indexada a preços, em detrimento da exposição em dívida flutuante. Este comportamento pode ser observado na Figura 7.

Figura 7 – Composição observada da Dívida Pós-fixada

Considerar ambas as proporções somadas formando uma única dívida pós-fixada minimiza a importância das variáveis macroeconômicas sobre a composição da dívida indexada já que, na média, as duas proporções totalizam cerca de 60% do endividamento público em praticamente todo o período de estudo. Uma vez que tal soma apresenta comportamento praticamente constante ao longo do tempo, não é

possível captar efeitos dos choques macroeconômicos sobre as proporções de dívida indexada.

4 MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO – HORIZONTE INFINITO

O modelo tradicional de suavização da tributação, exposto em Goldfajn (2000), assim como outros que nele se baseiam, utiliza a premissa de que toda a dívida emitida em determinado período vence no período seguinte.

Este pressuposto, muito embora seja importante para simplificar a solução analítica do problema para um cenário de dois períodos, torna o exercício pouco compatível com o perfil do endividamento brasileiro, no qual os vencimentos dos títulos públicos distribuem-se ao longo do tempo, sendo comum a rolagem da dívida pública¹⁹. Nesse sentido, seria ideal considerar o problema de escolha da composição ótima em um horizonte suficientemente grande, capaz de reproduzir o ambiente no qual o governo administra sua dívida em períodos relativamente longos.

Na tentativa de tornar o modelo de suavização de tributação mais coerente com o perfil do endividamento brasileiro, é possível expandir o modelo tradicional de maneira a contemplar a característica de endividamento com vencimentos suficientemente alongados. Assim, o propósito deste exercício é testar a aderência do modelo de suavização da tributação tradicional com títulos com perfis alongados de dívida pública.

4.1 O modelo de suavização da tributação em horizonte infinito

Considerando o modelo de suavização de tributação solucionado em horizonte infinito, o objetivo dos gestores da dívida pública continua sendo minimizar a perda esperada de bem-estar dos indivíduos frente a variações na estrutura tributária no período t , medida pela função perda de bem-estar social²⁰, de forma que:

¹⁹ Quando a dívida vincenda é financiada pela emissão de novo lote de dívida.

²⁰ Novamente, vale ressaltar que, apesar da presença e relevância das variáveis A , π e $\tilde{\tau}$ na formulação da função de perda social, como assumimos comprometimento do governo com as metas estabelecidas para a economia, tais variáveis não influenciam a resolução do problema de minimização. Logo, não aparecerão na resolução do problema, ainda que persistam na função de perda social.

$$\min_{\theta, \theta^*} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right] \quad (4.1)$$

em que:

- τ_j caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período j ;
- $\tilde{\tau}_j$ representa o nível de impostos determinado ou anunciado previamente pelo governo;
- π_j consiste na taxa de inflação vigente em j ;
- A é uma constante de proporcionalidade que pondera o comprometimento do governo junto às políticas monetária e fiscal²¹;
- α corresponde ao fator de desconto;
- θ e θ^* são, respectivamente, as proporções de dívida prefixada e cambial existentes na economia, de modo que a proporção de dívida pós-fixada é igual a $1 - \theta - \theta^*$.

O operador E indica o valor esperado do objeto de análise, e a minimização acontece em horizonte infinito (considerando o alongado prazo de vencimento dos títulos públicos e, consequentemente, seu impacto na economia ao longo do tempo).

Aqui também se presumem as hipóteses de aversão ao risco (que determina o perfil da demanda dos agentes com relação às taxas de juros) e de paridade descoberta de juros, garantindo equilíbrio de divisas entre os mercados interno e externo. Assim:

$$i_t = \pi_t^e + r_t \quad (4.2)$$

sendo que o superescrito e corresponde a variável em seu valor esperado, com $i_t = e_t^e + i_t^*$.

²¹ Aqui, consideramos que o governo se compromete crivelmente em atingir as metas predeterminadas para a política fiscal, de modo que A é normalizado, e não interfere no resultado final do problema de escolha ótima do endividamento público. O mesmo acontece com o nível de impostos anunciado previamente.

Os movimentos inflacionários também apresentam a mesma dinâmica da formulação original de Goldfajn (2000), assumindo, portanto, a racionalidade dos agentes econômicos, já que:

$$\pi_t = m_t + v_t \quad (4.3)$$

Sendo:

- m_t o crescimento da oferta monetária no período t ; e
- v_t é a velocidade dos choques, considerada como um ruído branco.

Em equilíbrio, investidores racionais antecipam as decisões da autoridade monetária quanto ao crescimento da moeda, de modo que:

$$\pi_t^e = E(\pi_t) = m_t \quad (4.4)$$

Por fim, a restrição orçamentária, considerando a formulação do problema em horizonte infinito, leva em consideração o fato de que o governo pode definir o perfil de seus gastos tendo em vista um horizonte de longo prazo, de maneira que o equilíbrio entre gastos e receitas públicos não ocorre mais em cada um dos períodos de forma isolada, mas em conjunto, de maneira intertemporal. Assim sendo, temos:

$$\tau_t = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})(1 - \theta_t - \theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}\right)\theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1 + i^*)(1 + e_t)}{(1 + \pi_t)}\right]\theta_t^* B_{t-1} - b_t \quad (4.5)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- g_t é a taxa de crescimento dos gastos do governo no período t ;
- G_t representa o total de gastos públicos no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;

- θ e θ^* representam, respectivamente, as proporções de dívida nominal e cambial, de modo que a proporção de dívida pós-fixada é igual a $1 - \theta - \theta^*$;
- B_t corresponde ao nível total de dívida pública em t ;
- i_t é a taxa de juros nominal doméstica em t ;
- π_t consiste na taxa de inflação em t ;
- i_t^* é a taxa de juros nominal externa em t ;
- e_t é uma medida de apreciação cambial em t ; e
- b_t corresponde à diferença entre a dívida pública em dois períodos consecutivos, t e $t-1$.

O superescrito e corresponde a variáveis em seu valor esperado.

A diferença entre a dívida pública em dois períodos é medida pela variável b_t , de modo que:

$$b_t = B_t - B_{t-1} \quad (4.6)$$

A apreciação cambial continua sendo considerada segundo a forma funcional adotada anteriormente, expressa pela equação (3.6), ou seja:

$$q_t = \pi_t - e_{t,t} \quad (3.6)$$

A log-linearização da equação (4.5), tendo em vista a equação da apreciação cambial expressa em (3.6) retorna a seguinte restrição orçamentária:

$$\tau_t \approx (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})B_{t-1} [1 - \theta_t(\pi_t - \pi_t^e) - \theta_t^*(q_t - q_t^e)] - b_t \quad (4.7)$$

A resolução do problema de minimização da função de perda social, com objetivo de escolha da composição ótima do endividamento público, continua ocorrendo em dois estágios. Agora, no primeiro momento, t_0 , a autoridade fiscal delibera sobre o montante e a composição da dívida que será vendida, bem como a quantidade de endividamento

que permanecerá em poder do público, sabendo que tais montantes tem vencimento nos períodos seguintes (porém não necessariamente no período imediatamente seguinte). Tais vencimentos dependerão, principalmente, das escolhas da autoridade fiscal quanto à forma de financiamento de seus déficits, e devem considerar expectativas quanto aos possíveis choques econômicos. A cada período, o governo toma conhecimento dos choques que afetam a economia, e delibera sobre o crescimento ótimo da quantidade de moeda na economia sabendo que, dessa forma, estará atuando diretamente sobre a inflação.

A solução analítica do problema proposto, no qual se minimiza a equação (4.1) sujeita à restrição orçamentária (4.7), retorna as seguintes proporções ótimas para as dívidas nominal (θ) e cambial (θ^*):

$$\theta_t = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{g\pi,t} \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{b\pi,t} \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t} \sigma_{q\pi,t} + \sigma_{bq,t} \sigma_{q\pi,t})}{\left\{ (1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2] \right\}} \quad (4.8)$$

e

$$\theta_t^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{qg,t} \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{bq,t} \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t} \sigma_{q\pi,t} + \sigma_{b\pi,t} \sigma_{q\pi,t})}{\left\{ (1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2] \right\}} \quad (4.9)$$

em que:

- θ_t é a proporção ótima de dívida nominal no período t ;
- G_t é o nível de gastos públicos no período t ;
- $\sigma_{g\pi,t}$ corresponde à covariância condicional entre a taxa de crescimento do gasto do governo e a inflação;
- $\sigma_{b\pi,t}$ representa a covariância condicional entre a variação da dívida pública entre dois períodos e a inflação;
- $\sigma_{q,t}^2$ é a variância condicional da apreciação cambial;
- $\sigma_{gq,t}$ corresponde à covariância condicional entre a taxa de crescimento do gasto do governo e a apreciação cambial;

- $\sigma_{q\pi,t}$ representa a covariância condicional entre a apreciação cambial e a inflação;
- $\sigma_{bq,t}$ é a covariância entre a variação da dívida pública e a medida de apreciação cambial;
- B_t representa o total de dívida pública no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;
- $\sigma_{\pi,t}^2$ é a covariância condicional da inflação; e
- θ_t^* representa a parcela ótima de dívida cambial no período t .

As proporções ótimas apuradas no caso com horizonte infinito diferem daquelas encontradas no caso simplificado de dois períodos pela presença dos termos de interação entre inflação e apreciação cambial e a medida de variação da dívida pública.

Os efeitos postulados por Goldfajn (2000) no que diz respeito aos *trade-offs* existentes entre risco e custo da dívida são verificados: economias suscetíveis a choques de demanda se enquadram melhor em ambiente fiscal com parcela relativamente elevada de dívida indexada a preços (já que o aumento dos preços reduz o serviço da dívida), enquanto que economias expostas a choques adversos de oferta demandariam parcela relativamente maior de dívida prefixada, uma vez que o aumento da inflação advindo da elevação dos custos reduziria o serviço real da dívida.

Entretanto, efeitos adicionais aparecem na formulação em horizonte infinito.

No que diz respeito à dívida prefixada, além dos efeitos já conhecidos de aumento desta dívida frente a reduções da variância da inflação e a aumentos na covariância entre inflação e gastos públicos, esta também deve aumentar com aumentos da covariância entre a variação da dívida pública e a inflação: se a dívida do governo aumenta de um período para o outro, a autoridade monetária tem incentivos a aumentar a emissão de moeda, de modo a forçar o aumento do nível de preços. Nesse cenário, sendo positiva a covariância entre inflação e a variação da dívida pública, há incentivos a aumentar a quantidade de dívida sob a forma prefixada, de modo a reduzir o valor real da dívida pública.

Já quanto a dívida cambial, apesar de configurar-se como uma maneira alternativa de proteção para o governo (desde que a correlação entre a apreciação cambial real e as demais variáveis presentes na restrição orçamentária do governo seja diferente de zero), não se despreza o fato de que a inclusão de uma nova forma de dívida pública introduz uma nova fonte de incerteza econômica, sujeita a novos desdobramentos. Portanto, além dos efeitos já conhecidos (nos quais se destaca a grande relevância da variância da apreciação cambial para a redução da parcela de dívida em moeda estrangeira), outro efeito faz-se notar: o efeito da covariância entre a medida de apreciação cambial e a variação da dívida pública. Esta variável deve apresentar o mesmo sinal verificado quando da redução da dívida cambial, já que caso a variação da dívida pública seja positivamente correlacionada com a medida de apreciação cambial, o aumento da dívida total deve levar a um aumento menos do que proporcional na dívida cambial (já que haverá perda de valor real), reduzindo a parcela relativa de dívida cambial frente ao total.

Os efeitos relacionados à variação da dívida pública entre diferentes períodos, conforme enunciado anteriormente, não foram abordados em outros trabalhos, uma vez que todas as referências utilizam-se do modelo simplificado em dois períodos. Sendo assim, não possuímos parâmetros de comparação para tais efeitos.

4.2 Estratégia empírica

4.2.1 Etapas de estimação

A estratégia empírica utilizada neste estudo é exatamente a mesma utilizada no modelo tradicional.

Tem-se, como objetivos empíricos, encontrar a composição teórica da dívida pública, comparando-a com aquela efetivamente observada (verificando a aderência do modelo empírico aos dados observados), bem como confirmar a existência dos *trade-offs* já

citados, verificando se as variâncias e covariâncias das variáveis macroeconômicas são importantes para a definição da composição do endividamento público.

Logo, temos novamente os três estágios já citados, a saber:

Primeiro estágio: estimação das variâncias e covariâncias das séries – com o objetivo de estimar, de forma condicional, as matrizes de variâncias e covariâncias entre inflação, apreciação cambial, taxa de crescimento dos gastos públicos, e variação do endividamento entre dois períodos. Em conjunto com os níveis de dívida líquida do setor público e de gasto do governo, é possível determinar as proporções ótimas de endividamento.

Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública – proporções estas apuradas utilizando os resultados do primeiro estágio com o objetivo de encontrar a composição ótima que garanta a suavização de choques macroeconômicos. Tais proporções são obtidas substituindo as variâncias e covariâncias estimadas nas equações (4.8) e (4.9), e então comparadas àquelas efetivamente utilizadas. Assim, os resultados apurados poderão ser comparados àqueles obtidos no modelo tradicional solucionado em dois períodos, concluindo pela melhora ou piora dos coeficientes estimados, quando comparados àqueles efetivamente observados. Novamente, estes resultados não apresentam pares para comparação.

Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) – Finalmente, neste estágio verificamos as contribuições das variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio para explicar a composição efetivamente utilizada para a dívida pública. Neste sentido, o maior interesse é verificar se os *trade-offs* enunciados inicialmente continuam válidos quando confrontamos variâncias e covariâncias estimadas com proporções efetivamente utilizadas para o endividamento público. Dessa forma, os resultados confirmam ou refutam a tese de que as variáveis macroeconômicas são importantes fontes de informação para a administração do endividamento público no período estudado.

4.2.2 M-GARCH

Novamente, como objetiva-se encontrar a composição ótima do endividamento público através do conhecimento e comportamento das variâncias e covariâncias condicionais das variáveis relevantes, a forma mais adequada de se apurar tais matrizes de variâncias e covariâncias é através do uso de um modelo de heterocedasticidade condicional multivariado – M-GARCH.

Continua-se com a parametrização BEKK, na qual garante-se que a matriz de covariâncias é positiva definida em cada momento do tempo²².

O modelo GARCH BEKK utilizado pode ser expresso como o seguinte sistema, no qual as variáveis do vetor de médias possuem a seguinte especificação:

$$\begin{aligned}\pi_t &= c_{1,1} + c_{1,2}\pi_{t-1} + c_{1,3}\pi_{t-2} + \varepsilon_{\pi,t} \\ q_t &= c_{2,1} + c_{2,2}q_{t-1} + \varepsilon_{q,t} \\ g_t &= c_{3,1} + \varepsilon_{g,t} \\ b_t &= c_{4,1} + \varepsilon_{b,t}\end{aligned}$$

onde:

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{q,t} \\ \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{b,t} \end{pmatrix} / I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$$

e

$$\Sigma_t = CC' + A_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A_1' + B_1 \Sigma_{t-1} B_1'$$

em que:

- π_t é a inflação no período t ;
- q_t representa a medida de apreciação cambial, anteriormente postulada;

²² Para maiores detalhes, veja Engle e Kroner (1995).

- g_t é a taxa de crescimento do gasto do governo;
- b_t corresponde à diferença da dívida pública entre dois períodos; e
- $\varepsilon_t/\Gamma_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$ é um vetor de perturbações aleatórias.

C, A_1, B_1 são, respectivamente, matrizes $n \times n$, sendo C uma matriz triangular superior²³, e n o número de variáveis que compõem o sistema (neste caso, igual a 4).

A escolha da ordem de defasagens das variáveis utilizadas seguiu as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, indicando qual a estrutura auto-regressiva adequada para cada série. Adicionalmente às análises já expostas no primeiro modelo estudado, a variável b_t , a exemplo da taxa de crescimento do gasto público, foi considerada apenas na constante.

4.2.3 Dados

Os dados utilizados são aqueles expostos na seção 3.2.3, na mesma ordem de utilização. As fontes permanecem as mesmas.

Continua-se utilizando a taxa de crescimento dos gastos públicos, a medida de apreciação cambial e a taxa de inflação no primeiro estágio de estimação. Entretanto, inclui-se a diferença da dívida pública entre dois períodos como argumento para o M-GARCH, no primeiro estágio de estimação. Assim como as demais variáveis, a diferença da dívida pública entre dois períodos mostrou-se estacionária ao nível mínimo de significância estatística de 5%.

No segundo estágio de estimação utiliza-se as séries de variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio, conjuntamente com as séries da dívida líquida do setor público em termos nominais, e a série de despesas totais do Governo Central acumuladas nos últimos 12 meses. Também utilizamos a composição efetiva da dívida pública para a comparação entre valores teóricos e observados.

²³ O apóstrofo indica transposição da matriz em questão.

Por fim, no terceiro estágio de estimação comprovam-se os *trade-offs* postulados por Goldfajn (2000), através de regressões lineares entre as variâncias e covariâncias estimadas e a composição efetiva da dívida pública. Testam-se, também, os efeitos adicionais postulados na seção anterior.

4.3 Resultados

4.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias e covariâncias das séries

Seguindo a especificação do modelo de suavização da tributação em horizonte infinito, a estimação da matriz de variâncias e covariâncias foi efetuada utilizando-se o mesmo modelo de heterocedasticidade condicional multivariado (GARCH multivariado) já especificado anteriormente, agora sendo as variáveis envolvidas a inflação, a medida de apreciação cambial, a taxa de crescimento dos gastos do governo, e a diferença na dívida pública entre dois períodos. As séries utilizadas mostraram-se estacionárias²⁴ no período, conforme já citado, assegurando a validade dos resultados.

Os resultados dos coeficientes estimados para as equações, através do modelo GARCH multivariado, encontram-se a seguir²⁵:

²⁴ O teste de Ng-Perron para a presença de raiz unitária não aceita a hipótese nula de não estacionariedade. As séries mostraram-se estacionárias ao nível de significância estatística de 5%.

²⁵ Nota 1: Desvio-padrão das estimativas entre parênteses. Nota 2: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5% e (***) representa significância estatística a 1%.

$$\pi_t = 0,002^{***} + 1,559^{***} \pi_{t-1} - 0,604^{***} \pi_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{\pi,t}$$

$$(0,000) \quad (0,083) \quad (0,084)$$

$$q_t = 0,068^{***} + 0,451^{***} q_{t-1} + \hat{\varepsilon}_{q,t}$$

$$(0,008) \quad (0,049)$$

$$g_t = 0,0102^{***} + \hat{\varepsilon}_{g,t}$$

$$(0,000)$$

$$b_t = 0,006^{***} + \hat{\varepsilon}_{b,t}$$

$$(0,000)$$

Os resultados estimados nesta etapa corroboram aqueles encontrados anteriormente, com mesmos sinais e valores muito próximos. Os coeficientes estimados mostraram-se estatisticamente significantes a 1%. Além disso, as séries de variâncias e covariâncias estimadas através do modelo GARCH multivariado mostraram-se decrescentes para o período. A variância da medida de apreciação cambial mostrou padrão decadente, bem como a queda da variância da inflação, especialmente após 2004. Por fim, o coeficiente estimado para a equação da diferença da dívida pública entre dois períodos apresentou sinal positivo e significância estatística a 1%, de acordo com as expectativas para tal variável.

4.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública

De posse das séries estimadas de variâncias e covariâncias condicionais, encontramos, por meio das equações (4.8) e (4.9), os coeficientes teóricos ótimos de dívida nominal e de dívida cambial. Esses resultados, suavizados para o horizonte de 12 meses e representados de maneira gráfica, estão expressos nas Figuras 8 a 13.

Figura 8 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses

Figura 9 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Nominal 12 meses – Dispersão

Os resultados indicam que a quantidade ótima de dívida nominal é crescente em praticamente todo o período, atingindo valor máximo de 14,4% em setembro do ano de 2010. O resultado encontrado alinha-se às expectativas de aumento da dívida prefixada previsto pelo modelo, bem como àquele apurado no modelo tradicional, e confirma-se

com os valores observados na prática da gestão pública. Em especial, ressalta-se a redução da variância da inflação e o aumento da covariância entre inflação e gasto público, que agem reduzindo o grau de incerteza dos agentes a respeito da remuneração real dos títulos nominais.

Apesar da diferença no nível de dívida nominal (e fica claro que o modelo sintetiza valores inferiores àqueles utilizados na prática), ambas as séries apresentam comportamentos muito semelhantes. A correlação entre as séries foi de 0,88, é confirmada quando observamos o gráfico de dispersão entre os pontos das séries, como expresso na Figura 9, no qual a reta de ajuste apresenta coeficientes estatisticamente significantes a 5%, com poder explicativo de 0,78.

Figura 10 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses

A evolução conjunta das séries de dívida nominal permite que algumas conclusões sejam apontadas. As duas séries apresentam comportamentos semelhantes a partir de meados de 2004 e, muito embora não apresentem o mesmo nível, esse padrão comportamental faz com que os pontos se concentrem ao redor (e por vezes muito próximos) à reta de ajuste da Figura 9. Dessa forma, podemos concluir que as

proporções ótimas da dívida nominal, apesar de não atingirem o mesmo nível da dívida observada, caminham na mesma direção, com comportamento similar.

A dívida cambial, por sua vez, mostrou novamente resultados bem diferentes, em nível, daqueles observados. Enquanto o modelo prevê proporção máxima inferior a 5% do endividamento total, a dívida cambial observada atingiu 46% em meados do ano de 2003. Este resultado corrobora àqueles encontrados no modelo tradicional, onde a dívida cambial apresentava contribuição inferior a 0,5% em toda a dívida pública.

Figura 11 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Cambial 12 meses - Dispersão

Entretanto, apesar da diferença de nível, agora notamos que as séries de dívida (teórica ótima e observada) apresentam o mesmo comportamento ao longo do tempo: independente do valor absoluto, as duas séries mostram tendência declinante no período estudado. Esse comportamento fica evidente quando observamos a linha de ajuste do gráfico de dispersão da Figura 11 com inclinação positiva, indicando que ambas as proporções se reduzem ao longo do tempo. Este resultado difere daquele encontrado no modelo tradicional, quando se observou crescimento da dívida pública cambial teórica ao longo do tempo (quando, na prática, as políticas públicas fomentaram a redução da exposição externa da economia brasileira, com a redução da dívida cambial).

Por fim, o comportamento da dívida pós-fixada ótima mostrou dinâmica contrária àquela observada para a dívida pós-fixada observada, mas com sinais de convergência entre ambas ao longo do tempo. Enquanto tal proporção da dívida observada permaneceu em torno de 60% do endividamento total, o modelo apontou proporção ótima de praticamente 100% para este endividamento no início do período estudado, e redução gradual ao longo do tempo, atingindo aproximados 93% no final do período (com mínimo de 89% em agosto/2010). Este resultado pode ser comprovado na Figura 12, onde percebemos que há convergência entre os valores ótimos, muito embora tais comportamentos sejam distintos.

Figura 12 - Modelo tradicional com período infinito: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses

Figura 13 - Modelo tradicional com período infinito: Dívida Pós-fixada 12 meses - Dispersão

Este resultado se confirma na Figura 13, onde comparamos os resultados ótimo e observado para tal proporção de endividamento. Muito embora o modelo indique comportamentos distintos para as proporções, a reta de ajuste salienta a convergência entre elas, com inclinação negativa.

Vale ressaltar que outras especificações de modelos GARCH-M foram testadas, bem como amostras com diferentes períodos de estudo. Os resultados corroboram aqueles já expostos, sendo nossas conclusões compatíveis com tais especificações, e comprovam a robustez da modelagem proposta para o cálculo das proporções ótimas da dívida. Portanto, concluímos que os elementos macroeconômicos captados pelo modelo alteram as proporções ótimas da dívida pública indexada e são considerados, na prática, pela gestão da dívida pública.

4.3.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

A terceira etapa de estimação consiste na confirmação da existência dos *trade-offs* anteriormente citados. Neste estágio, de posse das variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio, efetuamos a regressão das proporções efetivamente observadas de

dívida nominal (ou prefixada) e dívida cambial contra as séries de variâncias e covariâncias estimadas. Os resultados aqui obtidos são diretamente comparáveis àqueles encontrados por Goldfajn (2000) e aos resultados apurados anteriormente para o modelo tradicional, salvo as devidas alterações de metodologia econométrica.

Diferentes especificações de modelo foram testadas, sempre tendo em vista os modelos utilizados por Goldfajn (2000), e os resultados encontram-se reportados nas tabelas 4 e 5.

Os modelos que se referem à dívida nominal encontram-se na tabela 4. Como podemos notar, tais modelos testam a existência dos *trade-offs* entre custo e risco da emissão de dívida nominal, tendo em vista a participação das variâncias e covariâncias entre as séries estudadas. A contribuição deste trabalho, neste estágio, reside na inclusão da covariância entre inflação e variação da dívida pública como variável explicativa da proporção de dívida nominal.

Os sinais dos coeficientes estimados, em todos os modelos, alinharam-se àqueles esperados, descritos pela teoria através dos *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000), bem como aqueles testados no modelo tradicional.

A variância da inflação apresentou sinal negativo e estatisticamente significativo a 1% em todos os modelos, repetindo qualitativamente os resultados encontrados por Goldfajn (2000) e na estimação do modelo tradicional. Este resultado, em particular, confirma a percepção de que aumentos na taxa de inflação reduzem a demanda por títulos nominais, já que estes perdem valor real na presença de choques inflacionários, alterando a predileção dos agentes por títulos pós-fixados, cuja rentabilidade é corrigida levando em consideração tais eventos. Além disso, é importante salientar que períodos com variância da inflação elevada tendem a ser períodos com maior incerteza, o que impulsiona o aumento da demanda por títulos pós-fixados.

Os coeficientes estimados para a covariância entre inflação e gastos públicos também se mostraram estatisticamente significantes em todos os modelos, apresentando sinal positivo e, portanto, alinhando-se ao sinal predito pela teoria. Este resultado, em especial, confirma a percepção de que acréscimos nos gastos públicos podem gerar

grande incentivo para que a autoridade monetária decida pela emissão de moeda, uma vez que, dessa maneira, ocasionaria choques inflacionários, que teriam por efeito a redução da proporção real de dívida nominal, além da diminuição da dívida pública real total. Neste cenário, é racional que os gestores da dívida pública sintam-se inclinados a emitir títulos nominais quando acréscimos nos gastos públicos são acompanhados de aumentos de inflação.

A dívida pública como proporção do PIB mostrou-se estatisticamente significativa e com coeficiente negativo em todos os modelos testados. Isso se explica, em parte, pelo fato de que o aumento da dívida pública, via de regra, reflete-se na forma de aumento nos gastos públicos que, por sua vez, estão correlacionados positivamente com a inflação. Logo, elevações da parcela de endividamento devem inibir a demanda por títulos nominais, já que estes perdem valor real frente a aumento nos níveis de preços.

O outro coeficiente que aqui é citado como determinante da dívida pública nominal é a covariância entre a expansão do endividamento e a inflação. Enquanto que, do lado da demanda, o aumento da inflação inibe a demanda por títulos públicos nominais, do lado da oferta percebemos que quanto maior o impacto do choque inflacionário, menor é o valor da dívida real nominal e, portanto, menor o valor da dívida pública real total, beneficiando a administração pública. Logo, o coeficiente encontrado alinha-se com aquele esperado: quanto maior for a correlação entre a variação da dívida pública e a inflação, maior deve ser a oferta de títulos nominais, de modo a reduzir o valor real da dívida total.

Quanto à dívida cambial, apresentam interessantes contribuições a variância da medida de apreciação cambial, a covariância entre a inflação e a medida de apreciação cambial, além da covariância entre variação da dívida pública e a medida de apreciação cambial.

Tabela 4 - Modelo de suavização da tributação com período infinito: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_{\pi}^2 \cdot 10^{-3}$	σ_q^2	$\sigma_{\pi g} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi b} \cdot 10^{-3}$	D/Y	R ²
1	-3,604*** (0,344)	- -	16,923*** (2,499)	- -	- -	0,598*** (0,218)	-0,506*** (0,147)	0,93
2	-3,429*** (0,346)	- -	14,192*** (2,349)	- -	- -	- -	-0,301*** (0,130)	0,93
3	-3,502*** (0,348)	- -	16,507*** (2,497)	0,115 (0,072)	- -	0,637*** (0,219)	-0,540*** (0,148)	0,94
4	-3,338*** (0,353)	- -	13,720*** (2,376)	0,091 (0,073)	- -	- -	-0,316*** (0,130)	0,93
5	-3,840*** (0,350)	-0,421** (0,191)	16,536*** (2,530)	0,078 (0,070)	-0,101** (0,042)	-0,264 (0,523)	-0,542*** (0,142)	0,94
6	-3,832*** (0,348)	-0,445** (0,185)	16,419*** (2,512)	0,080 (0,070)	-0,082** (0,018)	- -	-0,557*** (0,139)	0,94
Sinal esperado	(-)		(+)			(+)	(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida nominal no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo
$$\theta = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_{\pi}^2 + \beta_2 \cdot \sigma_q^2 + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi g} + \beta_4 \cdot \sigma_{gq} + \beta_5 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_6 \cdot \sigma_{\pi b} + \beta_7 \cdot \frac{D}{Y}$$

Tabela 5 - Modelo de suavização da tributação com período infinito: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	σ_q^2	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	σ_{qb}	D/Y	R ²
1	0,483** (0,245)	-0,288*** (0,097)	-0,0726*** (0,024)	- -	0,436** (0,175)	0,92
2	0,278 (0,262)	-0,296*** (0,096)	-0,050* (0,026)	-8,518** (4,152)	-0,295 (0,186)	0,93
3	0,162 (0,253)	-0,286*** (0,097)	-0,062** (0,025)	-10,947*** (3,882)	- -	0,93
4	0,364 (0,261)	-0,313*** (0,097)	- -	- -	0,397 (0,180)	0,93
5	0,226 (0,257)	-0,305*** (0,098)	- -	-16,495*** (3,202)	0,375** (0,186)	0,92
6	0,508* (0,266)	- -	- -	-11,811*** (3,959)	- -	0,92
Sinal esperado	(-)	(+)	(-)	(-)		

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida cambial no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta^* = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_q^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{gq} + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \sigma_{qb} + \beta_5 \cdot \frac{D}{Y}$

A variância da medida de apreciação cambial apresentou sinal positivo em todos os modelos estimados, mas em sua maioria não significantes estatisticamente. Esse resultado também foi verificado no modelo tradicional. No entanto, apesar de contrário à teoria, é possível que a taxa de câmbio tenha se apreciado ao longo do período estudado e, nesse sentido, quanto maior for a variação da taxa de apreciação cambial, melhor é para a gestão da dívida pública que os agentes tenham títulos indexados em câmbio, pois nesse cenário a apreciação cambial reduz o principal da dívida cambial do governo em moeda nacional.

A covariância entre a inflação e a medida de apreciação cambial apresentou sinal negativo nos modelos propostos, e significância estatística de 5%. Como a covariância entre as variáveis foi negativa no período estudado, conclui-se que as reduções na apreciação cambial levaram a aumentos na medida de inflação, resultando em redução da demanda por títulos indexados a câmbio, que teriam redução de valor real nesse cenário.

No que diz respeito à covariância entre a medida de apreciação cambial e os gastos do governo, todos os modelos apresentaram coeficientes negativos e estatisticamente significantes. Sendo assim, aumentos nos gastos públicos que sejam acompanhados de reduções da medida de apreciação cambial levarão a diminuição da parcela de dívida cambial.

Quanto à covariância entre a variação da dívida pública e a medida de apreciação cambial, esta apresentou sinal negativo nos modelos estimados, indicando que, caso os incrementos de dívida pública impulsionem positivamente a medida de apreciação cambial, a proporção de dívida cambial deverá se reduzir, uma vez que os agentes percebem a apreciação cambial como uma perda real no valor dos títulos indexados em câmbio (já que seu valor principal, em moeda doméstica, se reduz).

Vale ressaltar que, diferente dos trabalhos de Goldfajn (2000) e Maia e Garcia (2012), os coeficientes aqui estimados apresentam, em grande parte, relevância estatística, em linha com aqueles apurados para o modelo tradicional, muito embora parte significativa

dos resultados não se enquadre nos sinais preditos pela teoria. Esses resultados contrariam parte das conclusões de Goldfajn (2000) e Maia e Garcia (2012), que afirmam serem inconclusivos quaisquer resultados a respeito dos determinantes da dívida cambial.

Por fim, também é importante salientar que a adaptação do modelo tradicional para horizonte de tempo infinito melhorou o poder explicativo das regressões desta etapa de estimação, tanto para a dívida nominal quanto para a dívida cambial. É possível notar que, no modelo tradicional, as estimações desta etapa atingiam R^2 ajustado máximo de 0,84 para a dívida nominal e valor de 0,89 para o caso da dívida cambial. No modelo ajustado para período infinito o R^2 ajustado para a dívida nominal apresentava valor máximo de 0,94, e valor de 0,93 para a dívida cambial.

4.4 Conclusões

A extensão proposta para o modelo tradicional, considerando a possibilidade de rolagem de dívida ao longo dos períodos, resolve uma das limitações anteriormente descritas. Considerar que o governo pode transmitir dívida entre os períodos torna o exercício mais factível, já que a prática da gestão da dívida pública prevê a existência de endividamento de diversas maturidades, de modo que é possível carregar dívida entre os diferentes períodos sem a necessidade de repactuá-la a cada instante do tempo. Neste contexto, é importante garantir o equilíbrio das contas públicas de maneira intertemporal. É justamente isso que se considera nesta abordagem. Vale destacar que esta nova formulação é possível, dadas as características do modelo, extremamente flexível, e facilmente adaptável a novas dinâmicas.

Os resultados apurados sob esta modelagem mostram-se próximos dos valores efetivamente utilizados na gestão do endividamento público, muito embora o modelo ainda não seja capaz de replicar o nível de endividamento ao longo do tempo²⁶.

²⁶ Nos próximos capítulos, onde estão apresentados os resultados empíricos, este ponto será abordado novamente. Cabe, porém, adiantar que a diferença no nível do endividamento permanece, ainda que a dinâmica da dívida já seja captada por esta abordagem.

Entretanto, o modelo é capaz de replicar os movimentos utilizados na gestão do endividamento público. Esse resultado pode ser comprovado pela análise dos diagramas de dispersão, que apresentam, em sua quase totalidade, inclinação positiva, mostrando que os movimentos sugeridos pelo modelo encontram-se alinhados com aqueles efetivamente utilizados.

Por fim, o estudo dos *trade-offs* enunciados mostra que o modelo com período infinito é capaz de melhorar o poder explicativo das regressões para a dívida nominal, replicando os sinais dos coeficientes encontrados no modelo solucionado em dois períodos. Os ganhos são maiores no caso da dívida cambial, onde mais coeficientes passam a ser estatisticamente significantes, sendo que agora é possível encontrar coeficientes com sinais corretos para a covariância entre gastos públicos e apreciação cambial.

Entretanto, outra limitação anteriormente apontada ainda permanece: a existência de um conjunto de dívida indexada, que ainda não é capaz de distinguir efeitos distintos sobre dívida flutuante e dívida indexada em preços. Apesar do modelo refletir a manutenção da proporção da dívida pós-fixada, ele ainda é incapaz de refletir as mudanças da composição deste tipo de endividamento.

5 MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE

O modelo tradicional de suavização da tributação exposto anteriormente, bem como sua expansão para horizonte infinito, considera a dívida pública pós-fixada como um único tipo de dívida. Nesse aspecto, todo o endividamento indexado, seja a preços ou a taxas de juros, é conjuntamente considerado para a formulação da solução ótima do problema de minimização da função de perda social.

Entretanto, apesar desta forma de agregação do endividamento público indexado levar à simplificação do problema proposto sem perda de sentido (verificando-se os *trade-offs* postulados e esperados, conforme explícito nos próximos capítulos, na descrição dos resultados do modelo tradicional), também leva a certo viés na análise dos resultados encontrados, já que a dívida pós-fixada engloba dois tipos de dívida com características muito distintas, conforme explicitado anteriormente.

Assim, considerar um único grupo de dívida pós-fixada simplifica excessivamente o modelo, minimizando a percepção dos impactos dos choques macroeconômicos sobre a composição do endividamento pós-fixado, já que essa parcela ficou praticamente estável no período. Isso ocorre porque a parcela de dívida indexada a preços possui dinâmica contrária àquela observada na dívida flutuante. Este comportamento é fruto da gestão do endividamento no período pós-estabilização, onde houve uma troca gradual da dívida flutuante pela dívida indexada a preços, muito mais barata para o governo comprometido com inflação baixa e controlada. Desta maneira, praticamente desconsideram-se os efeitos dos preços e dos juros sobre a composição do endividamento.

Logo, faz-se relevante verificar de que forma a dinâmica das variáveis macroeconômicas impacta a determinação dessas proporções de dívida.

Tal extensão do modelo, a exemplo do modelo tradicional, será efetuada, inicialmente, levando em consideração a resolução do problema em dois períodos (onde a dívida é

totalmente repactuada a cada período). No próximo capítulo, apresentamos o modelo com períodos infinitos adaptado para a dívida flutuante.

5.1 O modelo de suavização da tributação com dívida flutuante

O modelo de suavização da tributação com quatro tipos de dívida apresenta a mesma estrutura do modelo proposto anteriormente. Supondo o mesmo ambiente econômico com fontes de incerteza, buscaremos a solução ótima do problema de minimização do custo social através de instrumentos capazes de reduzir tais fontes de incerteza.

Sob as fontes de incerteza já citadas, reconhece-se agora uma nova fonte de incerteza, caracterizada pela inflação, captando a diferença entre o nível de preços efetivo e o nível de preços esperado pelos agentes. Desta forma, também é possível delimitar quatro instrumentos financeiros capazes de minimizá-las: além das dívidas nominal e cambial já consideradas (cujas taxas de retorno já foram delimitadas), temos agora o desmembramento da dívida pós-fixada em duas partes: a dívida flutuante (ou indexada a juros), cuja taxa de retorno é $\frac{(1+i)(1+d)}{(1+\pi)}$, e a dívida indexada a preços, com retorno esperado $(1+r)(1+\pi)$, sendo i a taxa de juros nominal interna, e π a taxa de inflação do período, r a taxa de juros real, e d o prêmio de risco que o agente demanda para aceitar um título pós-fixado frente à opção de compra de um título nominal.

Considerando a especificação tradicional com repactuação da dívida a todo período, conforme descrito anteriormente, temos o seguinte problema de minimização da função de perda social:

$$\min_{\theta, \theta^*, \tilde{\theta}} E_{t-1} \left[A \frac{\tau_t^2}{2} + \frac{\pi_t^2}{2} \right] \quad (5.1)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;

- π_t é a taxa de inflação vigente em t ;
- A é uma constante de proporcionalidade que pondera o comprometimento do governo junto às políticas monetária e fiscal; e
- θ , θ^* e $\tilde{\theta}$ representam, respectivamente, as proporções de dívida nominal, cambial e flutuante, de modo que a proporção de dívida pós-fixada em preços é igual a $1 - \theta - \theta^* - \tilde{\theta}$.

A função perda social conserva as mesmas propriedades daquelas postuladas anteriormente, diferenciando-se apenas nos argumentos da minimização.

Sob a hipótese de aversão ao risco por parte dos consumidores, paridade descoberta de juros e equilíbrio monetário, continuam válidas as equações (3.2) a (3.4).

Por fim, supomos que o retorno de um título flutuante terá por base o retorno de um título nominal, acrescido de um prêmio de risco, ou seja:

$$(1 + i_A) = \frac{(1 + i)(1 + p)}{(1 + \pi)} \quad (5.2)$$

onde:

- i_A é o retorno esperado de um título pós-fixado em juros;
- i_t é a taxa de juros nominal doméstica em t ;
- π_t é a taxa de inflação no período; e
- p é o prêmio de risco demandado pelos agentes.

Sob a validade da equação de Fischer (do qual temos a aproximação na equação (3.2)) e levando em consideração o papel das expectativas de inflação na formação do preço dos títulos, temos que a taxa de retorno demandada deverá ser igual àquela ofertada pelo mercado, de modo que:

$$\frac{(1+r)(1+\pi^e)(1+p)}{(1+\pi)} = (1+r) \Rightarrow (1+p) = \frac{(1+\pi)}{(1+\pi^e)} \quad (5.3)$$

sendo π^e a taxa de inflação esperada.

Ainda considerando a alocação de equilíbrio, investidores racionais antecipam as decisões da autoridade monetária quanto ao crescimento da moeda, de modo que continua válida a restrição de equilíbrio do mercado monetário (expressa pela equação (3.4)).

Quanto à restrição orçamentária do governo, esta agora é dada por:

$$\begin{aligned} \tau_t = (1+g_t)G_{t-1} + (1+r_{t-1})(1-\theta_t - \theta_t^* - \tilde{\theta}_t)B_{t-1} + \left(\frac{1+i_t}{1+\pi_t} \right) \theta_t B_{t-1} \\ + \left[\frac{(1+i_t^*)(1+e_t)}{(1+\pi_t)} \right] \theta_t^* B_{t-1} + \left[\frac{(1+i_t)(1+p_t)}{(1+\pi_t)} \right] \tilde{\theta}_t B_{t-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- g_t é a taxa de crescimento dos gastos do governo no período t ;
- G_t representa o total de gastos públicos no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;
- θ , θ^* e $\tilde{\theta}$ representam, respectivamente, as proporções de dívida nominal, cambial e flutuante, de modo que a proporção de dívida pós-fixada em preços é igual a $1 - \theta - \theta^* - \tilde{\theta}$.
- B_t corresponde ao nível total de dívida pública em t ;
- i_t é a taxa de juros nominal doméstica em t ;
- π_t consiste na taxa de inflação em t ;
- i_t^* é a taxa de juros externa em t ;
- e_t é uma medida de apreciação cambial em t ;

- p_t é o prêmio de risco exigido pelos agentes econômicos para aquisição dos títulos de dívida flutuante.

A apreciação cambial continua sendo apurada como a diferença entre a taxa de variação da inflação e a taxa de variação do câmbio (e_t), conforme expresso pela equação (3.6).

Por fim, assumindo a validade da teoria de preferência pela liquidez, sabemos que o prêmio de risco pode ser postulado como a diferença entre uma taxa presente e a expectativa de taxa futura, de modo que:

$$p_t = d_t - d_t^e \quad (5.5)$$

onde d_t representa a taxa de juros efetiva do título para um agente, e d_t^e a expectativa desta para o período t .

A log-linearização da restrição orçamentária (descrita na equação (5.4)), tendo em vista as relações expressas nas equações (3.2) a (3.4) e (5.5), nos fornece a seguinte equação de restrição orçamentária:

$$\tau_t \approx (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})B_{t-1} \left[1 - \theta_t(\pi_t - \pi_t^e) - \theta_t^*(q_t - q_t^e) - \tilde{\theta}_t(p_t - p_t^e) \right] \quad (5.6)$$

A solução do problema de minimização da função de perda social, restrita à equação de restrição orçamentária log-linearizada, acontece neste modelo em duas etapas, assim como no problema proposto por Goldfajn (2000). Inicialmente, a autoridade fiscal escolhe quantidade e composição da dívida que será emitida e vendida ao público. A cada período, a autoridade monetária toma conhecimento dos choques ocorridos na economia, e decide sobre o crescimento ótimo da quantidade de moeda existente na economia, tendo ciência de que, desta forma, estará atuando diretamente sobre a variação dos preços.

A solução analítica do problema, portanto, retorna proporções ótimas para as dívidas nominal, cambial e flutuante que são função das seguintes variâncias e covariâncias:

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \sigma_\pi^2, & \sigma_{\pi g}, & \sigma_{\pi p}, & \sigma_{\pi q} \\ (-) & (+) & (+) & (-) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\theta_t^* = \begin{pmatrix} \sigma_q^2, & \sigma_{qg}, & \sigma_{qp}, & \sigma_p^2 \\ (-) & (+) & (+) & (+) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\tilde{\theta}_t = \begin{pmatrix} \sigma_p^2, & \sigma_{pg}, & \sigma_{\pi p}, & \sigma_{qp} \\ (-) & (+) & (+) & (+) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Onde:

- σ_π^2 é a variância condicional da inflação;
- $\sigma_{\pi g}$ é a covariância condicional entre a inflação e a taxa de crescimento do gasto público;
- $\sigma_{\pi p}$ é a covariância condicional entre a inflação e a medida de prêmio de risco;
- $\sigma_{\pi q}$ é a covariância condicional entre a inflação e a medida de apreciação cambial;
- σ_q^2 é a variância condicional da apreciação cambial;
- σ_{qg} é a covariância condicional entre a apreciação cambial e a taxa de crescimento do gasto público;
- σ_{qp} é a covariância condicional entre a apreciação cambial e a medida de prêmio de risco;
- σ_p^2 é a variância condicional do prêmio de risco;
- σ_{pg} é a covariância condicional entre o prêmio de risco e a taxa de crescimento do gasto público.

A escolha do governo quanto à proporção e à composição do endividamento é efetuada observando-se os *trade-offs* existentes entre custos e risco, dadas variações nessa composição. Os *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000) continuam válidos: economias muito expostas a choques de demanda se enquadram em ambientes econômicos com maior exposição à dívida pós-fixada, enquanto que economias muito mais suscetíveis a choques de oferta teriam maior disposição à exposição em dívida

nominal, já que na efetivação dos choques de oferta o valor real da dívida se reduziria (já que o aumento dos gastos públicos levaria a um aumento de inflação, e redução da dívida real dada uma parcela significativa de dívida nominal).

No entanto, a fragmentação do conjunto de dívida pós-fixada inclui, agora, novos efeitos.

No caso da dívida flutuante, aumentos da variância do prêmio de risco incluem maior risco na economia, de modo a reduzir a exposição neste tipo de endividamento. Já a covariância entre gasto do governo e prêmio de risco age em sentido contrário: supondo que exista correlação positiva entre as duas variáveis, um aumento dessa medida desestimula os agentes a permanecerem com os demais tipos de endividamento (e em especial o endividamento nominal), presumindo que o governo enxergará incentivos a inflacionar a economia para reduzir o serviço real da dívida. Neste contexto, os agentes prefeririam endividamento pós-fixado, garantindo retornos positivos em ambiente sob maior incerteza.

Resultados semelhantes são esperados quando observamos a covariância entre prêmio de risco e inflação, e prêmio de risco e medida de apreciação cambial. No primeiro caso, quanto maior for essa covariância, maior será a disposição do governo em elevar a parcela de dívida nominal (já que a inflação reduz o valor real da dívida, o que se configura como um bom resultado para o governo). Em um ambiente inflacionário, onde verificamos covariância positiva entre inflação e prêmio de risco, o governo trocará dívida pós-fixada por dívida nominal quanto maior for esta covariância. No segundo caso, o aumento da covariância entre apreciação cambial e prêmio de risco mostra que ambientes com maior incerteza sobre o câmbio impulsionam aumentos no prêmio de risco do mercado. Neste contexto, estando as variáveis positivamente correlacionadas, os agentes percebem aumentos do prêmio de risco como sinal para mudança na taxa de câmbio, elevando a parcela de dívida alocada na forma cambial.

No caso da dívida nominal, aumentos na covariância entre inflação e prêmio de risco devem aumentar a exposição nesse tipo de dívida, já que neste caso a melhor resposta do governo frente a aumentos de inflação é aumentar a exposição à dívida nominal. O mesmo raciocínio vale para a dívida cambial, quando observamos o efeito do aumento

da covariância entre a medida de apreciação cambial e o prêmio de risco aumentando a exposição em dívida atrelada a câmbio.

5.2 Estratégia empírica

5.2.1 Etapas de estimação

Novamente, as etapas de estimação continuam as mesmas, de acordo com os objetivos específicos existentes em cada uma delas.

No primeiro estágio, de posse das séries de inflação, taxa de crescimento dos gastos públicos, apreciação cambial e prêmio de risco estimam-se as variâncias e covariâncias condicionais das séries. Tais valores serão utilizados em conjunto com os níveis de dívida líquida do setor público e de gasto do governo para encontrar, no segundo estágio, as proporções ótimas de endividamento público, explicitadas pelas funções (5.7), (5.8) e (5.9).

Na sequencia, tais valores são analisados frente àqueles efetivamente utilizados na gestão do endividamento público, indicando pela aderência ou não do modelo às proporções efetivamente utilizadas.

Por fim, testam-se as contribuições das variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio para explicar a composição efetiva da dívida pública, verificando a existência dos *trade-offs* enunciados.

5.2.2 M-GARCH

Assim como as etapas de estimação, o modelo econométrico para estimar a matriz de variâncias e covariâncias permanece o mesmo. Sob uma parametrização BEKK, utiliza-

se o modelo GARCH multivariado para estimar variâncias e covariâncias condicionais. O sistema estimado pode ser definido, nas médias, como segue:

$$\begin{aligned}\pi_t &= c_{1,1} + c_{1,2}\pi_{t-1} + c_{1,3}\pi_{t-2} + \varepsilon_{\pi,t} \\ q_t &= c_{2,1} + c_{2,2}q_{t-1} + \varepsilon_{q,t} \\ g_t &= c_{3,1} + \varepsilon_{g,t} \\ p_t &= c_{5,1} + c_{5,2}p_{t-1} + c_{5,3}p_{t-2} + \varepsilon_{p,t}\end{aligned}$$

onde:

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{q,t} \\ \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{p,t} \end{pmatrix} / I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$$

e

$$\Sigma_t = CC' + A_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1} A_1' + B_1 \Sigma_{t-1} B_1'$$

em que:

- π_t é a inflação no período t ;
- q_t representa a medida de apreciação cambial, anteriormente postulada;
- g_t é a taxa de crescimento do gasto do governo;
- p_t corresponde ao prêmio de risco no período t ; e

O vetor $\varepsilon_t / I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$ é um vetor de perturbações aleatórias, e C , A_1 , B_1 são, respectivamente, matrizes $n \times n$, sendo que C é uma matriz triangular superior, e n continua sendo o número de variáveis que compõem o sistema (neste caso, igual a 4).

A ordem de defasagens das variáveis utilizadas foi definida através das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, conforme já definido. Adicionalmente, a variável p_t , a exemplo da inflação, apresentou estrutura auto-regressiva de ordem 2.

5.2.3 Dados

Os dados utilizados são aqueles expostos na seção 3.2.3, permanecendo as mesmas fontes de informação.

No primeiro estágio, utiliza-se, além da taxa de crescimento dos gastos públicos, da medida de apreciação cambial e da taxa de inflação, o prêmio de risco como argumento para o M-GARCH. A exemplo das demais variáveis, o prêmio de risco apurado mostrou-se estacionário ao nível de significância estatística de 5%.

No segundo estágio de estimação, assim como nos demais modelos, utilizam-se as séries de variâncias e covariâncias estimadas anteriormente, conjuntamente com as séries da dívida líquida do setor público em termos nominais, e a série de despesas totais do Governo Central acumuladas nos últimos 12 meses de forma a sintetizar séries ótimas de endividamento. Da mesma forma, é utilizada a composição efetiva da dívida pública para fins de comparação entre valores teóricos e observados. Aqui é importante ressaltar que ao invés de estimarmos 3 tipos de endividamento, agora estima-se 4 tipos de dívida.

Finalmente, no terceiro estágio de estimação testam-se os *trade-offs* postulados por Goldfajn (2000), através de regressões lineares entre as variâncias e covariâncias estimadas e a composição efetiva da dívida pública. Diferente dos outros modelos, surgem novos efeitos, advindos do desmembramento da dívida pós-fixada, conforme já explicitado.

5.3 Resultados

5.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries

A matriz de covariância condicional, estimada através do modelo de heterocedasticidade condicional multivariado (GARCH multivariado), conforme

descrito na seção 5.2.2, nos retorna os seguintes resultados para os coeficientes estimados²⁷.

$$\pi_t = 0,002^{***} + 1,678^{***} \pi_{t-1} - 0,713^{***} \pi_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{\pi,t}$$

(0,000) (0,076) (0,075)

$$q_t = 0,009 + 0,929^{***} q_{t-1} + \hat{\varepsilon}_{q,t}$$

(0,007) (0,039)

$$g_t = 0,009^{**} + \hat{\varepsilon}_{g,t}$$

(0,004)

$$p_t = 0,000 + 0,391^{***} p_{t-1} + 0,277^{***} p_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{p,t}$$

(0,000) (0,097) (0,098)

Os resultados estimados nesta etapa corroboram aqueles encontrados para o modelo tradicional, tanto em dois períodos quanto em horizonte infinito, em magnitude e em sinal. Além disso, as séries de variâncias e covariâncias estimadas através do modelo GARCH multivariado mostraram-se decrescentes para o período, salientando que a variância da apreciação cambial mostrou padrão decadente, mesmo comportamento percebido para a série de variância da inflação (neste caso, especialmente após 2004).

5.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública

Após apurarmos as variâncias e covariâncias condicionais das séries através do modelo GARCH-M, encontramos as proporções ótimas, segundo a solução analítica do problema de minimização condicional. As séries sintetizadas, suavizadas segundo a média dos últimos 12 meses, bem como o diagrama de dispersão entre as séries ótimas e observadas encontram-se nas Figuras (14) a (21).

²⁷ Nota 1: Desvio-padrão das estimativas entre parênteses. Nota 2: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5% e (***) representa significância estatística a 1%.

Figura 14 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses

Os resultados encontrados mostram maior coerência entre as proporções teóricas ótimas e aquelas efetivamente observadas na gestão do endividamento público, quando comparados aos resultados dos modelos anteriormente estimados.

No que diz respeito à dívida nominal, a proporção teórica ótima mostrou-se, em todo período, inferior àquela observada. Apesar da diferença existente no nível, podemos ver, pela Figura 14, que as séries apresentam o mesmo comportamento crescente ao longo do tempo. Este resultado é confirmado pelo gráfico de dispersão, presente na Figura 15. A reta de regressão do gráfico mostra elevado coeficiente explicativo, indicando aderência da variação dos valores estimados à variação dos valores observados.

Figura 15 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Nominal 12 meses - Dispersão

Figura 16 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses

Quanto à dívida cambial, esta apresentou, ao longo do tempo, convergência entre a taxa ótima e a taxa observada, como podemos observar na Figura 16. Este resultado também

foi apurado nos modelos já expostos, muito embora anteriormente a dívida cambial apresentava variabilidade ao redor do eixo (oscilando valores positivos e negativos). Agora, no entanto, existe um comportamento comum: ambas as séries se reduzem no período, estreitando a diferença existente ao longo do tempo.

Figura 17 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Cambial 12 meses - Dispersão

O diagrama de dispersão, presente na Figura 17, indica essa convergência, muito embora o coeficiente explicativo ajustado da regressão seja baixo. Na prática, esta diferença de comportamento reflete a influência do plano de estabilização e a redução da inflação ao longo do tempo, e tais eventos não são capturados pelo modelo na periodicidade de dados escolhida.

Já as dívidas indexada a preços e flutuante mostraram-se muito próximas das proporções efetivamente observadas. Ambas as dívidas apresentaram proporção ótima superior àquela observada, porém com valores convergentes ao longo do tempo. Este fato, em específico, indica que a diferença entre os valores observados e ótimos tende a se estreitar com o alongamento da série.

Figura 18 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses

Figura 19 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Pós-fixada 12 meses - Dispersão

A dívida indexada a preços (ou dívida pós-fixada) mostrou valores iniciais estimados muito próximos àqueles observados, e comportamentos semelhantes ao longo do tempo,

muito embora tais níveis de endividamento tenham se distanciando ao longo do tempo. O gráfico de dispersão desta dívida, presente na Figura 19, confirma a elevada correlação entre os valores teóricos ótimos e observados.

Figura 20 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Proporção Ótima de Dívida Flutuante 12 meses

Por fim, as proporções teóricas ótimas de dívida flutuante tornaram-se mais próximas daquelas observadas, conforme indicado na Figura 20. Tal comportamento também se mostra presente na Figura 21, quando observamos que ambas as séries apresentam comportamento muito semelhante, endossado pelo gráfico de dispersão.

Figura 21 - Modelo com dívida flutuante e dois períodos: Dívida Flutuante 12 meses - Dispersão

5.3.3 Terceiro estágio: regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

A terceira etapa de estimação, conforme efetuado nos demais modelos, consiste na confirmação dos *trade-offs* citados. Os resultados aqui obtidos são diretamente comparáveis àqueles encontrados anteriormente para o modelo tradicional, salvo as devidas alterações de metodologia econométrica.

Diferentes especificações de modelo foram testadas, e os resultados encontram-se reportados nas tabelas 6 a 8.

Os modelos que se referem à dívida nominal encontram-se na tabela 6. Como já citado, tais modelos testam a existência dos *trade-offs* entre custo e risco da emissão de dívida nominal, através da participação das variâncias e covariâncias entre as séries estudadas.

Os sinais dos coeficientes estimados, em todos os modelos, alinharam-se àqueles esperados, descritos pela teoria através dos *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000), bem como aqueles testados no modelo tradicional.

A variância da inflação apresentou sinal negativo e estatisticamente significativo a 1% em todos os modelos, conforme apurado nos modelos anteriores, e repetindo qualitativamente os resultados encontrados por Goldfajn (2000). Este resultado endossa a percepção de que aumentos na taxa de inflação reduzem a demanda por títulos nominais, já que estes perdem valor real na presença de choques inflacionários, modificando a preferência dos agentes por títulos pós-fixados, cuja rentabilidade é corrigida levando em consideração tais eventos. Além disso, é importante salientar que períodos com variância da inflação elevada tendem a ser períodos com maior incerteza, o que impulsiona o aumento da demanda por títulos pós-fixados.

Os coeficientes estimados para a covariância entre inflação e gastos públicos também se mostraram estatisticamente significantes nos modelos que incluem a dívida total como proporção do PIB, apresentando sinal positivo e, portanto, alinhando-se ao sinal predito pela teoria. Este resultado confirma a percepção de que elevações dos gastos públicos podem gerar incentivos para que a autoridade monetária inflacione a economia por meio da emissão de moeda, já que, dessa forma, ocasionaria choques inflacionários, que reduziriam a proporção de dívida nominal, além da diminuição da dívida pública real.

A dívida pública como proporção do PIB mostrou-se estatisticamente significativa e com coeficiente negativo em todos os modelos testados, conforme visto anteriormente. De fato, o aumento da dívida pública, via de regra, reflete-se na forma de aumento nos gastos públicos que, por sua vez, estão correlacionados positivamente com a inflação. Aumentos da parcela de endividamento devem inibir a demanda por títulos nominais, já que estes perdem valor real frente a elevações nos preços.

Tabela 6 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_{\pi}^2 \cdot 10^{-3}$	σ_q^2	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi p} \cdot 10^{-6}$	D/Y	R ²
1	-9,597*** (0,686)	-1,832** (0,837)	5,028** (2,018)	0,0135 (0,013)	-0,215 (0,184)	0,163*** (0,026)	-0,194 (0,157)	0,93
2	-9,640*** (0,548)	-1,600* (0,943)	5,267** (1,999)	0,010 (0,007)	- -	0,166*** (0,017)	-0,174 (0,151)	0,93
3	-9,522*** (0,547)	- -	5,884*** (1,965)	0,020 (0,474)	- -	0,158*** (0,016)	-0,239* (0,139)	0,93
4	-8,637*** (0,563)	-2,159*** (0,754)	2,464 (1,651)	0,141* (0,074)	-0,176 (0,160)	0,197*** (0,020)	- -	0,94
5	-8,671*** (0,555)	-1,947** (0,791)	2,710 (1,649)	0,113* (0,067)	- -	0,199*** (0,021)	- -	0,94
6	-8,460*** (0,555)	- -	3,175* (1,671)	0,141 (0,495)	- -	0,191*** (0,021)	- -	0,93
Sinal esperado	(-)		(+)			(+)	(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida nominal no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteses.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_{\pi}^2 + \beta_2 \cdot \sigma_q^2 + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \sigma_{gq} + \beta_5 \cdot \sigma_{\pi p} + \beta_6 \cdot \frac{D}{Y}$

Tabela 7 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	σ_q^2	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	σ_{qp}	D/Y	R ²
1	-0,791 (0,833)	0,195* (0,105)	3,182 (3,354)	0,300 (1,911)	0,113 (0,156)	0,83
2	-1,159 (0,762)	0,244*** (0,086)	- -	0,120 (0,177)	0,141 (0,144)	0,81
3	-0,174 (0,731)	- -	4,083 (3,137)	0,100 (0,189)	0,096 (0,161)	0,82
4	-1,007 (0,762)	0,126 (0,115)	3,815 (3,435)	0,685 (1,577)	- -	0,81
5	-1,153* (0,873)	0,178* (0,095)	- -	0,157 (0,128)	- -	0,81
6	-0,566 (0,743)	- -	4,323 (3,233)	0,064 (0,159)	- -	0,82
Sinal esperado	(-)	(+)	(-)	(+)		

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida cambial no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta^* = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_q^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{gq} + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \frac{D}{Y}$

Tabela 8 - Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e dois períodos: Determinantes da Dívida Flutuante no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_p^2 \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{pg} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{np} \cdot 10^{-4}$	$\sigma_{qp} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{ng} \cdot 10^{-3}$	D/Y	R ²
1	-6,103*** (1,648)	-2,610 (2,707)	8,388** (4,139)	0,031 (0,254)	0,611 (1,813)	-0,384*** (0,131)	0,91
2	-6,149*** (1,710)	-2,618 (2,700)	8,391** (4,052)	- -	0,572 (1,930)	-0,383*** (0,131)	0,91
3	-6,086*** (1,645)	-2,694 (2,536)	8,509** (4,008)	0,027 (0,258)	- -	-0,395*** (0,130)	0,91
4	-5,766*** (1,740)	-1,452 (2,085)	4,535* (2,678)	-0,051 (0,190)	3,220* (1,771)	- -	0,93
5	-5,653*** (1,728)	-1,491 (2,059)	4,503* (2,724)	- -	3,290* (1,771)	- -	0,92
6	-5,806*** (1,806)	-1,872 (1,936)	4,489* (2,563)	-0,078 (0,190)	- -	- -	0,92
Sinal esperado	(-)	(+)	(+)			(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida pós-fixada em preços no período de janeiro de 1997 a março de

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteses.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística

Nota 4: Modelo $\tilde{\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_p^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{pg} + \beta_3 \cdot \sigma_{np} + \beta_4 \cdot \sigma_{qp} + \beta_5 \cdot \sigma_{ng} + \beta_6 \cdot \frac{D}{Y}$

O outro coeficiente que aqui é citado como determinante da dívida pública nominal é a covariância entre o prêmio de risco e a inflação. Enquanto que, do lado da demanda, o aumento da inflação inibe a demanda por títulos públicos nominais, do lado da oferta percebemos que quanto maior o impacto do choque inflacionário, maior é o prêmio de risco e, portanto, menor o valor da dívida pública real total, beneficiando a administração pública. Logo, o coeficiente encontrado alinha-se com aquele esperado: quanto maior for a correlação entre o prêmio de risco e a inflação, maior deve ser a oferta de títulos nominais, de modo a reduzir o valor real da dívida total.

Quanto à dívida cambial, podemos notar que, apesar dos sinais dos coeficientes estimados se alinharem àqueles esperados pela teoria, não podemos ter grandes conclusões já que a grande maioria dos coeficientes mostrou-se estatisticamente não significativa.

A variância da medida de apreciação cambial apresentou sinal negativo em todos os modelos estimados, mas não significantes estatisticamente. Esse resultado é contrário àqueles verificados nos modelos tradicionais, muito embora lá também não verificássemos significância estatística.

A covariância entre a inflação e a medida de apreciação cambial apresentou sinal positivo nos modelos propostos, mas sem significância estatística.

Quanto à covariância entre o prêmio de risco e a medida de apreciação cambial, esta apresentou sinal positivo nos modelos estimados, indicando que, caso os incrementos de dívida pública impulsionem positivamente a medida de apreciação cambial, a proporção de dívida cambial deverá aumentar. Este resultado, no entanto, não é conclusivo já que os coeficientes não apresentaram significância estatística.

Já para a dívida flutuante (ou indexada a juros), podemos notar que a variância da medida de prêmio de risco apresenta sinal negativo, e significância estatística de 1% em todos os modelos. Este resultado alinha-se à expectativa, uma vez que aumentos da variância do prêmio de risco aumentam a insegurança do agente, que preferirá opções com rendimento garantido ao invés de títulos com retorno muito incerto.

Ainda para a dívida pós-fixada em juros, confirmou-se a contribuição positiva da covariância entre inflação e prêmio de risco. Este resultado indica que, estando positivamente correlacionados inflação e prêmio de risco, aumentos da inflação incentivam os agentes a tomarem mais dívida pós-fixada em juros, já que estes criam expectativas também sobre o aumento do prêmio de risco, tornando o título indexado em preços menos atrativo.

Por fim, é importante salientar que a adaptação do modelo tradicional para a dívida flutuante piorou o poder explicativo das regressões desta etapa de estimação para a dívida cambial.

5.4 Conclusões

A extensão do modelo de suavização da tributação aqui proposta considera a existência de quatro tipos de dívida ao invés de três tipos, como na abordagem tradicional. Resolve uma significativa limitação do modelo tradicional de suavização da tributação, que considera a dívida pós-fixada como um agregado, sem distinguir diferentes mecanismos de indexação.

Portanto, considerar que a dívida pós-fixada apresenta duas diferentes formulações, de acordo com o instrumento de indexação utilizado, torna o exercício mais realista e próximo da estrutura de endividamento efetivamente utilizada, o que melhora as estimativas das proporções ótimas de dívida pública. Estes resultados foram comprovados através da aderência das séries estimadas àsquelas observadas na gestão do endividamento público.

Comparando os resultados estimados neste modelo com aqueles obtidos no modelo tradicional, também resolvido em dois períodos, é possível notar que há uma significativa melhora na precisão dos valores estimados frente àquelas observados. Os valores estimados agora estão mais próximos daqueles observados, o que indica uma significativa redução na diferença de nível do endividamento.

Além disso, o modelo mostra-se capaz de explicar as distintas parcelas que formam a dívida pós-fixada. Isso é comprovado pela comparação entre as séries ótimas e observadas de dívida flutuante e dívida pós-fixada em preços. Em ambos os casos, as proporções estimadas ficam muito próximas daquelas observadas, e o comportamento efetivo das séries é captado com grande precisão pelas proporções estimadas. Este resultado, em particular, é comprovado pelos coeficientes explicativos das retas presentes nos diagramas de dispersão, superiores a 80%. Este resultado comprova, mais uma vez, a aderência do modelo aos dados efetivamente observados.

Da mesma forma, os *trade-offs* enunciados para a dívida nominal permanecem válidos nesta abordagem, inclusive confirmando um efeito adicional, advindo da interação entre inflação e prêmio de risco (coeficiente este que mostrou-se estatisticamente significativo em todos os modelos estimados). Já os efeitos para a dívida cambial não foram comprovados neste modelo. Apesar das proporções estimadas convergirem para aquelas observadas (comportamento apurado nos demais modelos), os coeficientes estimados nas regressões efetuadas na terceira etapa de estimação não mostraram significância estatística.

Entretanto, apesar do elevado poder de previsão desta abordagem para as dívidas nominal, flutuante e pós-fixada em preços, o modelo ainda apresenta uma limitação temporal, já que a dívida pode ser, na prática, carregada por longos períodos de tempo, e esse fato deve ser levado em consideração quando o governo decide alterar a quantidade de dívida à disposição dos agentes no mercado, ou ainda mudar a composição do endividamento público. Assim, essa hipótese será considerado no próximo capítulo, quando abordamos o modelo de suavização da tributação expandido para a dívida flutuante em horizonte infinito.

6 MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE EM HORIZONTE INFINITO

O modelo tradicional de suavização da tributação ampliado para suportar a dívida flutuante (exposto no capítulo 5) considera que o endividamento possui maturidade para o período imediatamente posterior à sua emissão, de modo que os agentes não carregam dívida ao longo do tempo: a cada período, os agentes zeram suas posições e escolhem novas proporções de dívida pública, sabendo que esta vencerá no período seguinte.

Entretanto, apesar dos resultados encontrados anteriormente alinharem-se àqueles observados na gestão da dívida pública (salvo diferenças no nível do endividamento, conforme já explicitado), as premissas assumidas para encontrar tais resultados não são, na prática, factíveis. Há consenso de que os agentes possuem títulos de diferentes maturidades, e que estes decidem por carregá-los ao longo do tempo de acordo com suas expectativas para o cenário macroeconômico nos períodos seguintes.

Logo, esta extensão do modelo de suavização da tributação para 4 tipos de endividamento e horizonte infinito é feita com o intuito de aproximar ainda mais o modelo teórico da realidade da gestão do endividamento público. Neste caso, basta que o governo mantenha equilíbrio em suas contas de maneira intertemporal, e isso deve ser levado em consideração nas equações de perda social e restrição orçamentária do governo.

6.1 O modelo de suavização da tributação com dívida flutuante em horizonte infinito

Sob as mesmas fontes de incerteza e os mesmos instrumentos utilizados para minimizá-las, conforme descrito no modelo solucionado em dois períodos, temos o seguinte problema de minimização da função de perda social:

$$\min_{\theta, \theta^*, \tilde{\theta}} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right] \quad (6.1)$$

em que:

- τ_t caracteriza o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- $\tilde{\tau}_j$ representa o nível de impostos determinado ou anunciado previamente pelo governo;
- π_t consiste na taxa de inflação vigente em t ;
- A é uma constante de proporcionalidade que pondera o comprometimento do governo junto às políticas monetária e fiscal;
- α corresponde ao fator de desconto;
- o operador E indica o valor esperado do objeto de análise, sendo que a minimização acontece em horizonte infinito;
- θ , θ^* e $\tilde{\theta}$ são os argumentos de minimização da função de perda social; respectivamente: as proporções de dívida nominal, cambial e flutuante, de modo que a proporção de dívida pós-fixada em preços é igual a $1 - \theta - \theta^* - \tilde{\theta}$.

Mantidas as hipóteses de aversão ao risco, de paridade descoberta de juros, de crescimento da moeda, e de paridade entre retorno demandado e ofertado para títulos pós-fixados (equações (3.2) a (3.4) e (5.5)), é possível definir a seguinte restrição orçamentária para o caso com dívida flutuante e infinitos períodos:

$$\begin{aligned} \tau_t = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})(1 - \theta_t - \theta_t^*)B_{t-1} + \left(\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t} \right) \theta_t B_{t-1} + \left[\frac{(1 + i^*)(1 + e_t)}{(1 + \pi_t)} \right] \theta_t^* B_{t-1} \\ + \left[\frac{(1 + i_t)(1 + d_t)}{(1 + \pi_t)} \right] \tilde{\theta}_t B_{t-1} - b_t \end{aligned} \quad (6.2)$$

Da mesma forma, as variáveis aqui utilizadas conservam o mesmo sentido daquelas enunciadas no problema anterior, ou seja:

- τ_t é o total de impostos arrecadados pelo governo no período t ;
- g_t corresponde à taxa de crescimento dos gastos do governo no período t ;
- G_t representa o total de gastos públicos no período t ;
- r_t é a taxa de juros real no período t ;
- θ , θ^* e $\tilde{\theta}$ representam, respectivamente, as proporções de dívida nominal, cambial e flutuante, sendo que a proporção de dívida pós-fixada em preços pode ser apurada como $1 - \theta - \theta^* - \tilde{\theta}$.
- B_t corresponde ao nível total de dívida pública em t ;
- i_t é a taxa de juros nominal doméstica em t ;
- π_t consiste na taxa de inflação em t ;
- i_t^* é a taxa de juros nominal externa em t ;
- e_t é uma medida de apreciação cambial em t ;
- p_t é o prêmio de risco exigido pelos agentes econômicos para aquisição dos títulos de dívida flutuante; e
- b_t é a diferença entre a dívida pública em dois períodos; algebricamente, $b_t = B_t - B_{t-1}$

Supondo a apreciação cambial apurada conforme a equação (3.6) e o prêmio de risco conforme descrito em (5.2), podemos log-linearizar a restrição orçamentária, de modo que:

$$\tau_t \approx (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r_{t-1})B_{t-1} \left[1 - \theta_t (\pi_t - \pi_t^e) - \theta_t^* (q_t - q_t^e) - \tilde{\theta}_t (p_t - p_t^e) \right] - b_t \quad (6.3)$$

Agora, a solução do problema de minimização da função de perda social, restrita à equação de restrição orçamentária log-linearizada, acontece neste modelo em tempo infinito: a cada momento, a autoridade fiscal decide quantidade e composição da dívida que será, então, emitida, bem como o crescimento ótimo da quantidade de moeda, tendo por base os choques econômicos vistos naquele e nos períodos anteriores. É fundamental, apenas, garantir que existe consistência intertemporal na restrição orçamentária, conforme já mencionado.

A solução analítica do problema, sob a hipótese de tempo infinito, retorna proporções ótimas para as dívidas nominal, cambial e flutuante, que são função das mesmas variâncias e covariâncias listadas anteriormente, mas agora acrescidas de interações entre as variáveis de interesse e a diferença da dívida pública entre períodos:

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \sigma_\pi^2, & \sigma_{\pi g}, & \sigma_{\pi p}, & \sigma_{\pi q}, & \sigma_{\pi b} \\ (-) & (+) & (+) & (-) & (+) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\theta_t^* = \begin{pmatrix} \sigma_q^2, & \sigma_{qg}, & \sigma_{qp}, & \sigma_p^2, & \sigma_{qb} \\ (-) & (+) & (+) & (+) & (-) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\tilde{\theta}_t = \begin{pmatrix} \sigma_p^2, & \sigma_{pg}, & \sigma_{pp}, & \sigma_{pq}, & \sigma_{pb} \\ (-) & (+) & (+) & (+) & (-) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

A escolha do governo quanto à proporção e à composição do endividamento é efetuada, sob este contexto, observando-se os *trade-offs* já existentes entre custos e risco (enunciados por Goldfajn (2000)), porém considerando os efeitos causados pela administração do endividamento entre períodos.

A proporção de dívida nominal, além dos efeitos já conhecidos, reage positivamente a mudanças na covariância entre inflação e variação da dívida: sendo estas duas variáveis positivamente correlacionadas, o aumento do endividamento (como forma de acomodar melhor choques adversos) levaria a um aumento no nível de preços, reduzindo assim o valor da dívida prefixada. A autoridade fiscal teria, portanto, incentivos a alavancar a quantia de dívida nominal ao perceber como factível a possibilidade de administração da dívida em infinitos períodos.

No que diz respeito à dívida cambial, a correlação entre a medida de apreciação cambial e a variação do endividamento deve contribuir negativamente para esta exposição. Isso porque, dada a suposição de paridade descoberta de juros, desvalorizações cambiais devem vir acompanhadas de aumento do prêmio de risco (já que a economia apresenta maior exposição ao risco cambial, o mercado se ajusta oferecendo maior compensação

pelo aumento da exposição). Nesse sentido, os agentes devem preferir, em situações mais arriscadas, títulos pós-fixados (indexados em preços ou em juros).

Por fim, o montante de dívida indexada em preços deve, além dos efeitos já discutidos, responder negativamente a variações da covariância entre o prêmio de risco e os gastos do governo, já que sendo tais variáveis negativamente correlacionadas, o aumento dos gastos públicos levaria a uma redução do prêmio de risco, reduzindo a demanda por estes títulos. Outro efeito relevante é a redução do endividamento pós-fixado frente a covariância entre os gastos públicos e a variação da dívida. Se tais variáveis estiverem negativamente correlacionadas (de modo que a covariância seja negativa), aumentos do gasto levariam a reduções do prêmio de risco, inibindo a demanda por tais papéis.

6.2 Estratégia empírica

6.2.1 Etapas de estimação

As etapas de estimação seguem a mesma estrutura já descrita para os outros três modelos, e acontecem de acordo com os objetivos específicos de cada uma delas.

O primeiro estágio é aquele no qual o principal objetivo é encontrar séries de variâncias e covariâncias condicionais para as variáveis de interesse. Neste caso, as matrizes de variâncias e covariâncias condicionais são calculadas para as séries de inflação, taxa de crescimento dos gastos públicos, apreciação cambial, prêmio de risco e variação do endividamento entre dois períodos. Estimadas as variâncias e covariâncias condicionais das séries, tais valores serão utilizados como insumos para a definição das proporções ótimas de endividamento nominal, cambial, flutuante e pós-fixado em preços, implícitos nas funções (6.4), (6.5) e (6.6).

Portanto, o segundo estágio de estimação visa encontrar as proporções ótimas, segundo o modelo de suavização da tributação aqui proposto, e compará-las com as proporções efetivamente utilizadas na gestão do endividamento público. Espera-se que sejam relativamente próximas daquelas que são observadas na prática.

No último estágio de estimação, após conhecidas as dinâmicas ótimas das séries de endividamento público, tem-se por objetivo testar se há contribuições significativas das variâncias e covariâncias estimadas no primeiro estágio do estudo para explicar a dinâmica da composição efetiva da dívida pública, verificando a existência e consistência dos *trade-offs* enunciados.

6.2.2 M-GARCH

Como já mencionado, o modelo econométrico entendido como adequado para estimar a matriz de variâncias e covariâncias permanece o mesmo. Sob uma parametrização BEKK, utiliza-se o modelo GARCH multivariado para estimar variâncias e covariâncias condicionais.

Sob tal modelo, o sistema estimado para as médias das variáveis pode ser descrito como segue:

$$\begin{aligned}\pi_t &= c_{1,1} + c_{1,2}\pi_{t-1} + c_{1,3}\pi_{t-2} + \varepsilon_{\pi,t} \\ q_t &= c_{2,1} + c_{2,2}q_{t-1} + \varepsilon_{q,t} \\ g_t &= c_{3,1} + \varepsilon_{g,t} \\ b_t &= c_{4,1} + \varepsilon_{b,t} \\ p_t &= c_{5,1} + c_{5,2}p_{t-1} + c_{5,3}p_{t-2} + \varepsilon_{p,t}\end{aligned}$$

sendo que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pi,t} \\ \varepsilon_{q,t} \\ \varepsilon_{g,t} \\ \varepsilon_{b,t} \\ \varepsilon_{p,t} \end{pmatrix} / I_{t-1} \sim N(0, \Sigma_t)$$

e

$$\Sigma_t = CC' + A_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}' A_1' + B_1 \Sigma_{t-1} B_1'$$

onde:

- π_t corresponde à inflação no período t ;
- q_t é a medida de apreciação cambial, já postulada na equação (3.6);
- g_t é a taxa de crescimento do gasto do governo;
- b_t representa a diferença entre a dívida pública em dois períodos distintos;
- p_t é o prêmio de risco exigido pelos agentes para aquisição de títulos públicos da dívida flutuante; e
- $\varepsilon_t/\mathbf{I}_{t-1} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_t)$ é um vetor de perturbações aleatórias.

As matrizes C , A_1 , B_1 possuem dimensão $n \times n$, sendo C uma matriz triangular superior²⁸, e n o número de variáveis que compõem o sistema²⁹. Neste caso, como temos 5 variáveis no vetor de médias, teremos matrizes de ordem 5.

Vale ressaltar que a escolha da ordem de defasagens das variáveis utilizadas foi feita através do procedimento padrão para tal, conforme já enunciado. Nesse sentido, tanto inflação quanto prêmio de risco apresentaram estrutura auto-regressiva de segunda ordem, apreciação cambial com dependência temporal de primeira ordem, e taxa de crescimento do gasto público e a diferença entre a dívida pública modeladas apenas na constante.

6.3 Resultados

6.3.1 Primeiro estágio: estimação das variâncias covariâncias das séries

A matriz de covariância condicional foi estimada através do modelo de heterocedasticidade condicional multivariado (GARCH multivariado). Mantidas as

²⁸ O apóstrofo indica transposição da matriz em questão.

hipóteses adotadas na exposição do modelo resolvido nas seções anteriores, retorna os seguintes resultados para os coeficientes estimados³⁰.

$$\pi_t = 0,002^{***} + 1,679^{***} \pi_{t-1} - 0,716^{***} \pi_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{\pi,t}$$

(0,000) (0,079) (0,078)

$$q_t = 0,009 + 0,927^{***} q_{t-1} + \hat{\varepsilon}_{q,t}$$

(0,005) (0,028)

$$g_t = 0,010^{**} + \hat{\varepsilon}_{g,t}$$

(0,004)

$$p_t = 0,000 + 0,396^{***} p_{t-1} + 0,281^{***} p_{t-2} + \hat{\varepsilon}_{p,t}$$

(0,000) (0,111) (0,112)

$$b_t = 0,0006^{*} + \hat{\varepsilon}_{b,t}$$

(0,0003)

Os resultados estimados nesta etapa mais uma vez corroboram aqueles encontrados nos demais modelos estudados, com variâncias e covariâncias estimadas condizentes com os resultados apurados em outros trabalhos. Mais do que isso, os valores encontrados neste modelo são muito próximos daqueles valores encontrados nos outros modelos, mostrando a robustez segundo o método utilizado.

6.3.2 Segundo estágio: proporções teóricas ótimas para as parcelas da dívida pública

As proporções teóricas ótimas, encontradas através da utilização das variâncias e covariâncias estimadas no primeiro passo, são apresentadas nas Figuras (22) a (29).

Os resultados encontrados mostram coerência entre as proporções ótimas e aquelas efetivamente observadas na gestão do endividamento público, muito embora as

³⁰ Nota 1: Desvio-padrão das estimativas entre parênteses. Nota 2: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5% e (***) representa significância estatística a 1%.

proporções ótimas apresentem maior volatilidade que aquelas apuradas para o modelo no modelo anterior (com 4 dívidas e dois períodos). Justamente por conta deste comportamento, não raro as curvas das proporções ótimas se interceptam com as curvas do endividamento efetivo, ora acima, ora abaixo dos valores observados.

Figura 22 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Nominal 12 meses

Quanto à dívida nominal, a proporção ótima mostrou-se crescente em praticamente todo o período, sendo inferior àquela observada até 2009 e superior a partir de então. Este comportamento pode ser visto na Figura 22. Persiste, ainda, a diferença de nível observada nos demais modelos, e neste aspecto o modelo em horizonte infinito apresenta resultados relativamente inferiores àqueles apurados no modelo em dois períodos, já que agora as proporções ótima e observada ficam, por vezes, mais distantes uma da outra.

Apesar da diferença existente no nível, podemos ver que as séries apresentam o mesmo comportamento crescente ao longo do tempo, muito embora o coeficiente explicativo da regressão no gráfico de dispersão seja inferior àquele apurado para o modelo em dois períodos. Estes resultados estão expressos na Figura 23, que traz o diagrama de dispersão das séries.

Figura 23 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Nominal 12 meses - Dispersão

Figura 24 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Cambial 12 meses

A dívida cambial apresentou, assim como no modelo de dois períodos, convergência entre a taxa ótima e a taxa observada ao longo do tempo. Este resultado pode ser observado na Figura 24. Porém, os valores teóricos ótimos oscilam entre proporções positivas e negativas. Justamente por isso a reta de regressão entre tais proporções mostra-se incapaz de explicar conjuntamente o movimento das duas séries, conforme expresso na Figura 25.

Entretanto, apesar da diferença nos níveis, o comportamento da dívida cambial converge entre aquilo que é proposto na teoria e a prática da gestão da dívida pública. Os resultados teóricos ótimos ainda apontam que a estratégia que minimiza a perda social se escora em proporções de dívida cambial muito próximas a zero (conforme os resultados do modelo de dois períodos, como aqueles já expostos anteriormente).

Figura 25 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Cambial 12 meses - Dispersão

O comportamento da dívida indexada em preços foi bem diferente daquele apurado no modelo em dois períodos.

Apesar do crescimento observado entre o início e o final da série ótima, o comportamento é volátil, alternando períodos de elevação e redução desta proporção, conforme podemos observar na Figura 26.

Entretanto, apesar deste comportamento, é possível notar que até o final de 2011 a proporção ótima oscilava ao redor daquela proporção efetivamente utilizada. Este comportamento pode ser apurado com a análise da Figura 27, na qual se apresenta o gráfico de dispersão entre as proporções teórica ótima e observada.

Figura 26 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Pós-fixada 12 meses

Figura 27 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Pós-fixada 12 meses - Dispersão

Por fim, a parcela da dívida na forma flutuante mostrou queda significativa em parte do período estudado, também com amplitude superior às variações efetivamente ocorridas. Apesar da volatilidade da série teórica ótima, conforme observamos na Figura 28, as variações ocorreram em mesmo sentido, como podemos perceber através da reta de regressão entre as proporções ótima e observada, na Figura 29.

Figura 28 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Proporção Ótima de Dívida Flutuante 12 meses

Figura 29 - Modelo com dívida flutuante e infinitos períodos: Dívida Flutuante 12 meses - Dispersão

6.3.3 8.4.3 Terceiro estágio: Regressão via Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)

Novamente, a terceira etapa de estimação consiste na confirmação dos *trade-offs* citados. Os resultados obtidos são diretamente comparáveis àqueles encontrados anteriormente, tanto para o modelo tradicional, quanto para o modelo com dívida flutuante e dois períodos, salvo as devidas alterações de metodologia econométrica.

Diferentes especificações de modelo foram testadas, e os resultados encontram-se reportados nas tabelas 9 a 11.

Na tabela 9 encontramos os modelos que se referem à dívida nominal. Os sinais dos coeficientes estimados, em alguns casos, não se alinham àqueles esperados, descritos pela teoria através dos *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000), bem como aqueles testados no modelo tradicional.

A variância da inflação continuou apresentando sinal negativo e estatisticamente significativa a 1% em todos os modelos, conforme apurado nos modelos anteriores, o que repete qualitativamente os resultados encontrados por Goldfajn (2000). Novamente, endossa-se a percepção de que aumentos na taxa de inflação reduzem a demanda por títulos nominais, já que estes perdem valor real na presença de choques inflacionários, e isso modifica a preferência dos agentes por títulos pós-fixados, além de considerarmos que períodos com elevações da inflação caracterizam períodos de maior incerteza, impulsionando a demanda por títulos pós-fixados.

Os coeficientes estimados para a covariância entre inflação e gastos públicos, no entanto, mostraram-se estatisticamente significantes nos modelos que incluem a dívida total como proporção do PIB, mas apresentaram sinal negativo, o que contraria as conclusões obtidas nos demais modelos. Este resultado nega a percepção de que elevações dos gastos públicos podem gerar incentivos para que a autoridade monetária inflacione a economia por meio da emissão de moeda.

A dívida pública como proporção do PIB apresentou o sinal predito pela teoria, mas mostrou-se estatisticamente significativa em apenas um dos modelos testados. De fato, é previsto que o aumento da dívida pública, em geral, reflete-se na forma de elevação nos gastos públicos, que estão correlacionados positivamente com a inflação. Aumentos no endividamento devem, assim, reduzir a demanda por títulos nominais.

Os coeficientes de covariância entre o prêmio de risco e a inflação mostraram-se, assim como no modelo anterior, positivos e estatisticamente significantes, confirmando a percepção de que a correlação entre inflação e prêmio de risco aumenta a oferta de títulos nominais, reduzindo o valor real da dívida.

Um novo efeito aqui testado é a covariância entre a inflação e a medida de variação da dívida pública. Apesar do sinal dos coeficientes estimados se alinharem àquele esperado, não apresentaram significância estatística, de modo que não é possível tirar conclusões sobre tal efeito.

Tabela 9 – Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Nominal no Brasil – 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_{\pi}^2 \cdot 10^{-3}$	σ_q^2	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi p} \cdot 10^{-6}$	$\sigma_{\pi b} \cdot 10^{-6}$	D/Y	R ²
1	-10,551*** (0,782)	-1,871** (0,889)	-3,057** (1,296)	0,030 (0,019)	-0,196 (0,206)	0,129*** (0,021)	0,113 (0,187)	-0,194 (0,157)	0,93
2	-10,533*** (0,789)	-1,203 (0,785)	-3,485*** (1,277)	- -	-0,146 (0,206)	0,129*** (0,021)	0,070 (0,185)	-0,174 (0,151)	0,93
3	-10,616*** (0,794)	- -	-3,723*** (1,278)	- -	-0,119 (0,207)	0,124*** (0,021)	0,105 (0,185)	-0,239* (0,139)	0,93
4	-8,750*** (0,595)	-2,290** (0,875)	-4,941 (1,180)	0,028 (0,019)	-0,220 (0,205)	0,160*** (0,018)	0,047 (0,182)	- -	0,94
5	-8,762*** (0,599)	-1,608** (0,755)	-9,394 (10,869)	- -	-0,174 (0,204)	0,158*** (0,018)	0,100 (0,180)	- -	0,94
6	-8,733*** (0,610)	- -	-1,012 (1,106)	- -	-0,133 (0,270)	0,154*** (0,018)	0,165 (0,180)	- -	0,93
Sinal esperado	(-)		(+)			(+)	(+)	(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida nominal no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 \cdot \sigma_{\pi}^2 + \beta_2 \cdot \sigma_q^2 + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_4 \cdot \sigma_{gq} + \beta_5 \cdot \sigma_{\pi q} + \beta_6 \cdot \sigma_{\pi p} + \beta_7 \cdot \sigma_{\pi b} + \beta_8 \cdot \frac{L}{Y}$

Tabela 10 – Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Cambial no Brasil – 2000 a 2012

Modelo	σ_q^2	$\sigma_{gq} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi q} \cdot 10^{-3}$	σ_{qp}	$\sigma_p^2 \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{qb} \cdot 10^{-6}$	D/Y	R ²
1	1,489 (2,085)	0,269 (0,320)	0,313 (0,327)	0,117 (0,241)	-3,468 (2,880)	-0,130 (0,093)	-0,027 (0,255)	0,83
2	1,361 (2,080)	0,347 (0,291)	- -	0,206 (0,223)	-3,115 (2,854)	-0,144 (0,091)	0,063 (0,253)	0,83
3	1,568 (2,110)	- -	0,286 (0,303)	0,178 (0,256)	-3,551 (2,855)	-0,187* (0,093)	-0,011 (0,244)	0,81
4	2,250 (2,150)	0,171 (0,303)	0,295 (0,327)	0,189 (0,232)	-3,464 (2,845)	-0,177* (0,093)	- -	0,83
5	2,153 (2,147)	0,236 (0,294)	- -	0,260 (0,218)	-3,301 (2,837)	-0,193** (0,091)	- -	0,83
6	2,312 (2,159)	- -	0,301 (0,358)	0,187 (0,222)	-3,228 (3,021)	-0,178* (0,081)	- -	0,82
Sinal esperado	(-)	(+)	(-)	(+)				

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida cambial no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo $\theta^* = \alpha_0 + \alpha_1 t + \beta_1 \cdot \sigma_q^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{gq} + \beta_3 \cdot \sigma_{\pi p} + \beta_4 \cdot \frac{D}{Y}$

Tabela 11- Modelo de suavização da tributação com dívida flutuante e infinitos períodos: Determinantes da Dívida Flutuante no Brasil - 2000 a 2012

Modelo	$\sigma_p^2 \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{pg} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi p} \cdot 10^{-4}$	$\sigma_{qp} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{\pi g} \cdot 10^{-3}$	$\sigma_{bg} \cdot 10^{-3}$	D/Y	R ²
1	-4,370** (1,832)	4,111*** (1,531)	8,326*** (1,881)	-0,424 (1,335)	-0,490 (1,065)	-2,119** (1,030)	-0,451*** (0,150)	0,93
2	-4,369** (1,781)	4,112*** (1,511)	8,326*** (1,869)	- -	0,490 (1,059)	-2,118** (1,011)	-0,450*** (0,146)	0,93
3	-4,389** (1,772)	4,278*** (1,461)	8,391*** (1,855)	- -	- -	-2,165** (1,001)	-0,435*** (0,142)	0,93
4	-4,483** (1,874)	3,438** (1,497)	6,020*** (1,917)	-0,078 (0,134)	-0,657 (1,025)	-2,122* (1,095)	- -	0,93
5	-4,260** (1,829)	3,580** (1,472)	5,953*** (1,906)	- -	0,667 (1,021)	-2,033* (1,080)	- -	0,93
6	-4,238** (1,823)	3,679** (1,460)	6,080*** (1,891)	- -	- -	-2,121* (1,068)	- -	0,93
Sinal esperado	(-)	(+)	(+)			(-)	(-)	

Nota 1: a variável dependente nos modelos é a proporção observada de dívida pós-fixada em preços no período de janeiro de 1997 a março de 2012.

Nota 2: desvio-padrão das estimativas entre parênteres.

Nota 3: sinal (*) representa significância estatística a 10%, (**) representa significância estatística a 5%, e (***) representa significância estatística a 1%.

Nota 4: Modelo
$$\tilde{\theta} = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta_1 \cdot \sigma_p^2 + \beta_2 \cdot \sigma_{pg} + \beta_3 \cdot \sigma_p + \beta_4 \cdot \sigma_{qp} + \beta_5 \cdot \sigma_g + \beta_6 \cdot \sigma_{bg} + \beta_7 \cdot \frac{L}{Y}$$

Quanto à dívida cambial, podemos notar que, apesar dos sinais dos coeficientes estimados se alinharem àqueles esperados pela teoria, novamente não podemos tirar grandes conclusões já que praticamente todos os coeficientes estimados não apresentaram significância estatística. É interessante ressaltar que nas duas extensões do modelo para dívida cambial (seja em dois períodos, seja horizonte infinito), os resultados da terceira etapa não mostraram-se estatisticamente significantes na grande maioria dos coeficientes testados.

Por fim, quando analisamos a tabela 11 podemos confirmar os efeitos postulados anteriormente para a dívida pós-fixada em preços, especialmente a contribuição negativa da covariância entre prêmio de risco e gastos públicos (confirmando que aumentos dos gastos provocam aumento do prêmio de risco, reduzindo a exposição neste endividamento) e o efeito positivo entre os gastos públicos e a variação da dívida pública. Este último efeito, em específico, indica que se o aumento dos gastos públicos elevar a dívida pública, os agentes perceberão maior risco na sustentabilidade do endividamento público, e demandarão maiores prêmios de risco. Esse aumento do prêmio de risco faz como que aumente a demanda por títulos pós-fixados em juros.

Outro efeito interessante pode ser visto através da contribuição da covariância entre a variação da dívida pública e o gasto do governo sobre a dívida pós-fixada em preços. Aumentos dessa medida tendem a reduzir o endividamento pós-fixado em preços, uma vez que estando positivamente correlacionadas as duas medidas citadas, o governo perceberá aumentos de sua dívida real caso também se perceba um aumento da inflação. Neste caso, a autoridade fiscal tenderia a elevar a proporção de dívida prefixada, de modo a reduzir o valor real de seu endividamento.

6.4 Conclusões

O modelo proposto parte do modelo tradicional de suavização da tributação, e faz duas significativas modificações: inclui a dívida flutuante como um dos argumentos da função de perda social, e estende a análise para período infinito.

Os resultados aqui encontrados corroboram as conclusões dos modelos anteriores no que diz respeito às proporções teóricas ótimas. As proporções de dívida nominal se elevaram ao longo do tempo, da mesma forma que a proporção de dívida pública pós-fixada em preços. A dívida flutuante, assim como nos outros modelos, apresentou trajetória ótima descendente no período estudado, enquanto a dívida cambial caracterizou-se por parcela muito reduzida do endividamento total em todo o período. Este fato, em particular, mostra que a política de gestão da dívida pública convergiu, ao longo do tempo, para o resultado do modelo aqui estudado.

Entretanto, apesar dos comportamentos semelhantes, e em alguns casos até da proximidade de valores ótimos e observados, o modelo com quatro tipos de dívida em horizonte infinito mostra, a exemplo do modelo com três dívidas em horizonte infinito, grande variabilidade das proporções ótimas e distância relativamente grande frente aos valores observados (quando comparada aos resultados utilizando resolução em dois períodos).

Quando o objetivo de análise é o estudo dos sinais dos *trade-offs* enunciados, que teriam grande influência na gestão do endividamento público, os resultados mostram que tais efeitos se comprovam para a dívida nominal, muito embora os resultados sejam inconclusivos para a dívida cambial.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho estudou a composição ótima do endividamento público para o período de 2000 a meados de 2012, sob a ótica da indexação, considerando quatro diferentes modelos de suavização da tributação: o modelo tradicional (com três tipos de dívida) em dois períodos e horizonte infinito, e o modelo com quatro tipos de dívida, em dois períodos e tempo infinito.

Através do modelo de suavização da tributação tradicional, encontramos a solução analítica para o caso onde a dívida pública se divide em dívida nominal (ou comumente chamada de prefixada), dívida cambial, dívida indexada em preços e dívida flutuante (ou dívida indexada em juros), obtendo as proporções ótimas que são capazes de minimizar as perdas de bem-estar ocasionadas pelas variações não antecipadas tanto no total tributado quanto na taxa de inflação. Neste sentido, o agente leva em consideração o padrão temporal de resolução do problema para decidir a composição de endividamento que deseja.

A estratégia empírica foi dividida em três etapas, e os resultados estão assim apresentados, divididos pelo modelo estudado. Num primeiro momento, estimamos, através de um modelo de heterocedasticidade condicional (M-GARCH) as matrizes de variâncias e covariâncias condicionais entre as séries. Estas séries foram, então, utilizadas para, na segunda etapa, sintetizarmos as proporções ótimas de endividamento público, utilizando para tal as soluções analíticas de cada um dos problemas. Essas proporções, quando comparadas com aquelas efetivamente observadas, mostraram, para o modelo de dois períodos, coerência quanto aos valores e sentido das variações ao longo do tempo (inclusive com valores previstos muito próximos àqueles observados em alguns modelos); para o modelo com quatro tipos de dívida e infinitos períodos, porém, ficou evidente a maior volatilidade das séries ótimas, piorando o resultado qualitativo apurado, muito embora ainda seja possível perceber comportamentos comuns entre séries ótimas e observadas.

Tabela 12 - Resultados

	Três tipos Nominal, Cambial, Pós-fixada	Quatro tipos Nominal, Cambial, Pós-fixada em Preços, Flutuante
	Modelo I	Modelo III
d o i s p e r í o d o s	<p>Etapas I e II</p> <p>Valor ótimo para a dívida nominal segue o comportamento do endividamento observado, porém com significativa diferença no nível de endividamento; o valor ótimo de dívida cambial converge para o observado.</p> <p>Etapa III</p> <p><i>Trade-offs</i> confirmados para a dívida nominal; resultados inconclusivos para a dívida cambial, inclusive com inversão dos sinais esperados.</p>	<p>Etapas I e II</p> <p>Valor ótimo para a dívida nominal segue o comportamento do endividamento observado, com redução da diferença no nível do endividamento. A dívida cambial ótima continua convergindo para o valor observado. Resultados igualmente bons são observados para as dívidas flutuante e pós-fixada em preços.</p> <p>Etapa III</p> <p><i>Trade-offs</i> confirmados para a dívida nominal; resultados também confirmados para a dívida cambial, com sinais esperados alinhados àqueles observados, muito embora alguns efeitos tornem-se não significantes estatisticamente. Piores coeficientes explicativos.</p>
	Modelo II	Modelo IV
i n f i n i t o s p e r í o d o s	<p>Etapas I e II</p> <p>Valor ótimo para a dívida nominal segue o comportamento do endividamento observado: a diferença no nível do endividamento permanece, porém reduzida. O valor ótimo de dívida cambial converge para o observado.</p> <p>Etapa III</p> <p><i>Trade-offs</i> confirmados para a dívida nominal; resultados também confirmados para a dívida cambial, com sinais esperados alinhados àqueles observados. Melhoria do coeficiente explicativo das regressões</p>	<p>Etapas I e II</p> <p>Apesar do valor ótimo para a dívida nominal seguir o comportamento do endividamento observado, a variação da dívida ótima é muito superior àquela observada. O mesmo efeito é percebido para os demais tipos de endividamento. O comportamento observado no período, no entanto, continua a ser confirmado pelos valores ótimos.</p> <p>Etapa III</p> <p><i>Trade-offs</i> confirmados para a dívida nominal, muito embora há inversão do sinal esperado da covariância entre inflação e gasto público; resultados inconclusivos para a dívida cambial, com coeficientes estatisticamente insignificantes, e sinais invertidos. Piores coeficientes explicativos, especialmente para a dívida cambial.</p>

Na última etapa, testamos a existência dos *trade-offs* enunciados por Goldfajn (2000), e Maia e Garcia (2012), considerando, porém, a existência de novos termos, de acordo com a inclusão de um novo tipo de endividamento e um perfil temporal infinito. Foi possível confirmar a redução da dívida nominal frente a aumentos na variância da inflação, bem como nos casos onde gastos públicos e choques inflacionários são positivamente correlacionados.

Concluímos também, agora em contribuição teórica, que a dívida nominal tende se a elevar frente a aumentos da covariância entre a inflação e a variação da dívida pública, bem como com a covariância entre a inflação e o prêmio de risco.

Para a dívida cambial, captamos participação negativa da covariância entre inflação e apreciação cambial na formulação do endividamento cambial, confirmando resultados anteriores de que a demanda por títulos indexados em câmbio se retraem frente ao aumento da covariância entre inflação e apreciação cambial. Além disso, a covariância entre apreciação cambial e aumento da dívida pública colabora negativamente na composição da dívida total. No entanto, os modelos com quatro tipos de endividamento não mostraram resultados estatisticamente significantes para esta dívida. Os resultados, sumarizados, podem ser vistos na Tabela 12.

REFERÊNCIAS

ALESINA, A; PRATI, A; TABELLINI, G. Public confidence and debt management: a model and a case study of Italy. Dornbusch, R. e M. Dragui. Org., **Public Debt Management: Theory and History**, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

ARAÚJO, C. **Mercado de Títulos Públicos e Operações de Mercado Aberto no Brasil – Aspectos Históricos e Operacionais**, Nota Técnica do Banco Central do Brasil, n. 12, 2002.

BARRO R. On the determination of the public debt. **Journal of Political Economy**, v. 87, p. 940-971, 1979.

_____. **Optimal Debt Management**. National Bureau of Economic Research Working Paper n. 5327, 1995.

_____. **Optimal Management of Indexed and Nominal Debt**. National Bureau of Economic Research Working Paper n. 6197, 1997.

BEVILAQUA, A.S. et. al. **The Structure of the Public Sector Debt in Brazil**, Inter-American Development Bank, 1999.

_____. **State Governments Bailouts in Brazil**, Inter-American Development Bank Working Paper, n. R-441, 2002.

BEVILAQUA, A.S., GARCIA, M. G. P. Debt Management in Brazil: evaluation of the Real Plan and challenges ahead. **International Journal of Finance and Economics**, n.7, p. 15-35, 2002.

BEVILAQUA, A. S., GARCIA, M. G. P. E NECHIO, F. **Títulos Cambiais e Composição Ótima da Dívida**. Mimeo, PUC-Rio, Departamento de Economia, 2004.

BLANCHARD, O. **Fiscal Dominance and Inflation Targeting: Lessons from Brazil**. . National Bureau of Economic Research Working Paper n. 10389, 2004.

BOHN, H. Why do we have nominal government debt?, **Journal of Monetary Economics** n.21, p.127-140, 1988.

_____. A Positive theory of foreign currency debt. **Journal of International Economic** n.29, p.273-329, 1990.

_____. Tax Smoothing with Financial Instruments, **The American Economic Review** n.80, v.5, p. 1217-1230, 1990.

CALVO, G. Servicing the Public Debt: The Role of Expectations. **American Economic Review**, v.78, n.4, 1988.

CYSNE, R. (2005), Public Debt Indexation and Denomination, The Case of Brazil: A Comment. **Ensaios Econômicos EPGE**, 2007.

DE-LOSSO, R. **Econometria de Séries Temporais**. São Paulo: Cengage, 2011.

FARAGLIA, E., MARCET, A., SCOTT, A.. Fiscal Insurance and Debt Management in OECD Economies. **The Economic Journal**, n.118, p.363-386, 2008.

GARCIA, M. G. P. **Public Debt Management, Monetary Policy and Financial Institutions**. Texto para discussão n.464, Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

GARCIA, M.; RIGOBON, R. **A risk management approach to Emerging Market's Sovereign Debt Sustainability with Application to Brazilian data**. National Bureau of Economic Research Working Paper n.10336, 2004.

GIAVAZZI, F. e. PAGANO, M. Confidence crises and public debt management. Dornbusch e M. Draghi, Org. **Public Debt Management: Theory and History**, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

GOLDFAJN, I. Public Debt Indexation and Denomination: The Case of Brazil, **International Journal of Finance and Economics** n.5, v.4, 2000.

GOLDFAJN, I., DE PAULA, A. **Uma nota sobre a composição ótima da dívida pública - reflexões para o caso brasileiro**. Texto para discussão, n.411, Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.

GOLDFAJN, I.; GUARDIA, E.R. **Fiscal Rules and Debt Sustainability in Brazil**. International Monetary Fund. IMF Working Paper, 1998.

INHASZ, J.; DE-LOSSO, R.. **Equilíbrio Dinâmico da Dívida Pública - uma abordagem M-GARCH**. Revista Estudos Econômicos do Ministério da Fazenda. Texto para discussão n. 06, 2012.

LUCAS, R. E.; STOKEY, N. L. Optimal fiscal and monetary policy in an economy without capital. **Journal of Monetary Economics** n.12, p. 55-93, 1983.

MAIA, P.; GARCIA, M.G.P. A gerência recente do endividamento público brasileiro. **Revista de Economia Política**, n.32. 2010.

MENDONÇA, H.F.; PIRES, M.C.C. **A interdependência fiscal-monetária: uma análise da importância da suavização da taxa de juros e do gerenciamento da dívida pública sobre o equilíbrio fiscal**. Caderno de Finanças Públicas, Brasília, n. 8, p. 101-122, 2007.

MISSALE, A.; BLANCHARD, O. The Debt Burden and Debt Maturity. **American Economic Review**, v. 84, n.1, p.309-319, 1994.

MISSALE, A. Tax Smoothing with price-index-linked bonds: a case study of Italy and the United Kingdom. De Cecco, M, Pechi, L, Piga, G, Org.. **Managing Public Debt**, Edward Elgan, 1997.

_____. **Public Debt Management**, Oxford University Press, 1999.

MISSALE, A.; GIAVAZZI, F. **Public Debt Management in Brazil**. World Bank, 2003.

NECHIO, F. **Dívida Pública Brasileira: Decomposição de seu crescimento recente e simulação de sua trajetória para o futuro**. Rio de Janeiro, 2001. Monografia – Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PIEROTTI, P. **Choques de Orçamento e o Manejo Ótimo da Dívida Pública Brasileira**. Rio de Janeiro, 1998. Dissertação de Mestrado – Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

SILVA, A.C.; CARVALHO, L.O.; MEDEIROS, O.L. **Dívida Pública: a experiência brasileira**. Tesouro Nacional. Brasília, 2009.

TESOURO NACIONAL. **Composição Ótima da Dívida Pública: Definição de uma Referência de Longo Prazo**. Brasília: 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – LOG-LINEARIZAÇÃO DA RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA

A.1.1 – RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA COM 3 TIPOS DE DÍVIDA PÚBLICA

A.1.2 – RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA COM 4 TIPOS DE DÍVIDA PÚBLICA

APÊNDICE 2 – DERIVAÇÃO DOS MODELOS DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO

A.2.1 – MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO

A.2.2 – MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO EM HORIZONTE INFINITO

A.2.3 – MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE

A.2.4 – MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO PARA DÍVIDA FLUTUANTE EM HORIZONTE INFINITO

APÊNDICE 1 – LOG-LINEARIZAÇÃO DA RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA³¹

A.1.1 – RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA COM 3 TIPOS DE DÍVIDA PÚBLICA³²

Sabemos que a dívida nominal apresenta retorno igual a $\frac{(1+i)}{(1+\pi)}$, bem como a dívida cambial efetiva retorno igual a $\frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)}$ e a dívida pós-fixada tem retorno efetivo igual a $(1+r)$.

Dessa forma, temos a seguinte restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*)B_{t-1} + \frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)}\theta^*B_{t-1} + \frac{(1+i)}{(1+\pi)}\theta B_{t-1} \quad (\text{A.1.1.1})$$

Sob a validade da hipótese de Fischer, sabemos que:

$$(1+i) = (1+r)(1+\pi^e) \quad (\text{A.1.1.2})$$

Também assumindo que a paridade descoberta de juros é válida, temos:

$$(1+i^*) = \frac{(1+i)}{(1+e^e)} \quad (\text{A.1.1.3})$$

Assim, manipulando a hipótese de Fischer e a equação da paridade descoberta de juros, temos:

³¹ A nomenclatura utilizada para as variáveis continua a mesma utilizada no texto. Assim, somente novas nomenclaturas serão expostas.

³² Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i^*)(1+e^e)}{(1+\pi)} &= \frac{(1+i)}{(1+e^e)} \frac{(1+e)}{(1+\pi)} \\
&= \frac{(1+\pi^e)(1+t)}{(1+e^e)} \frac{(1+e)}{(1+\pi)} \\
&= (1+r) \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \frac{(1+e)}{(1+e^e)}
\end{aligned} \tag{A.1.1.4}$$

Logo, utilizando esta última relação, podemos definir a restrição orçamentária como:

$$\begin{aligned}
\tau_t &= G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*)B_{t-1} + \frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)} \theta^* B_{t-1} + \frac{(1+i)}{(1+\pi)} \theta B_{t-1} \\
&= G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*)B_{t-1} + (1+r) \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \frac{(1+e)}{(1+e^e)} \theta^* B_{t-1} + \frac{(1+r)(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \theta B_{t-1} \\
&= G_t + (1+r)B_{t-1} \left[(1-\theta-\theta^*) + \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \frac{(1+e)}{(1+e^e)} \theta^* + \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \theta \right]
\end{aligned} \tag{A.1.1.5}$$

Sabendo que $q \approx e - \pi$, podemos log-linearizar a restrição orçamentária de forma que:

$$\begin{aligned}
\tau_t &= G_t + (1+r)B_{t-1} \left[(1-\theta-\theta^*) + (1+\pi^e + e - \pi - e^e) \theta^* + (1+\pi^e - \pi) \theta \right] \\
&= G_t + (1+r)B_{t-1} \left[1 + \theta^* (\pi^e - \pi) - \theta^* (e^e - e) + \theta (\pi^e - \pi) \right] \\
&= G_t + (1+r)B_{t-1} \left[1 + \theta^* (q^e - q) + \theta (\pi^e - \pi) \right]
\end{aligned} \tag{A.1.1.6}$$

Considerando os gastos do governo em sua taxa de crescimento, de modo que

$G_t = (1+g_t)G_{t-1}$, temos a restrição orçamentária:

$$\tau_t = (1 + g_t)G_{t-1} + (1 + r)B_{t-1} \left[1 + \theta^*(q^e - q) + \theta(\pi^e - \pi) \right] \quad (\text{A.1.1.7})$$

A.1.2 – RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA COM 4 TIPOS DE DÍVIDA PÚBLICA³³

Agora, considerando que o endividamento público pode ser fracionado em quatro tipos de dívida, é necessário delimitar qual é o retorno dessa dívida adicional.

Sabemos que a dívida nominal apresenta retorno igual a $\frac{(1+i)}{(1+\pi)}$, bem como a dívida cambial efetiva retorno igual a $\frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)}$. Como agora consideramos a dívida pós-fixada particionada em dois componentes (dívida flutuante e dívida pós-fixada em preços), também definimos o retorno para cada uma destas parcelas.

Consideremos, portanto, que a dívida pós-fixada em preços efetiva retorno igual a $(1+r)$, e a dívida flutuante apresenta retorno igual a $\frac{(1+i)(1+d)}{(1+\pi)}$.

Dessa forma, temos a seguinte restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*-\tilde{\theta})B_t + \frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)}\theta^*B_t + \frac{(1+i)}{(1+\pi)}\theta B_t + \frac{(1+i)(1+d)}{(1+\pi)}\tilde{\theta}B_t \quad (\text{A.1.2.1})$$

Sob a validade da hipótese de Fischer, sabemos que:

$$(1+i) = (1+r)(1+\pi^e) \quad (\text{A.1.2.2})$$

Também assumindo que a paridade descoberta de juros é válida, temos:

³³ Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

$$(1+i^*) = \frac{(1+i)}{(1+e^e)} \quad (\text{A.1.2.3})$$

Assim, manipulando a hipótese de Fischer e a equação da paridade descoberta de juros, temos:

$$\begin{aligned} \frac{(1+i^*)(1+e^e)}{(1+\pi)} &= \frac{(1+i)}{(1+e^e)} \frac{(1+e)}{(1+\pi)} \\ &= \frac{(1+\pi^e)(1+t)}{(1+e^e)} \frac{(1+e)}{(1+\pi)} \\ &= (1+r) \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)} \frac{(1+e)}{(1+e^e)} \end{aligned} \quad (\text{A.1.2.4})$$

Logo, utilizando esta última relação, podemos definir a restrição orçamentária como:

$$\begin{aligned} \tau_t &= G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*-\tilde{\theta})B_{t-1} + \frac{(1+i^*)(1+e)}{(1+\pi)}\theta^*B_{t-1} + \frac{(1+i)}{(1+\pi)}\theta B_{t-1} + \frac{(1+i)(1+d)}{(1+\pi)}\tilde{\theta}B_{t-1} \\ &= G_t + (1+r)(1-\theta-\theta^*)B_{t-1} + (1+r)\frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)}\frac{(1+e)}{(1+e^e)}\theta^*B_{t-1} + \frac{(1+r)(1+\pi^e)}{(1+\pi)}\theta B_{t-1} \\ &\quad + \frac{(1+r)(1+\pi^e)(1+d)}{(1+\pi)}\tilde{\theta}B_{t-1} \\ &= G_t + (1+r)B_{t-1} \left[(1-\theta-\theta^*) + \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)}\frac{(1+e)}{(1+e^e)}\theta^* + \frac{(1+\pi^e)}{(1+\pi)}\theta + \frac{(1+\pi^e)(1+d)}{(1+\pi)}\tilde{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.2.5})$$

Podemos log-linearizar a restrição orçamentária de forma que:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_t \left[(1-\theta-\theta^*-\tilde{\theta}) + (1+\pi^e+e-\pi-e^e)\theta^* + (1+\pi^e-\pi)\theta + (1+\pi^e+d-\pi-d^e)\tilde{\theta} \right] \quad (\text{A.1.2.6})$$

Sabendo que $q \approx e - \pi$, supondo que $d^e = 0$ (já que, por não arbitragem, o diferencial de juros esperado deve ser nulo) e sendo $p \approx \pi - d$, temos que:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_t \left[1 + (\pi^e - \pi)\theta + (q^e - q)\theta^* + (p^e - p_t)\tilde{\theta} \right] \quad (\text{A.1.2.7})$$

Por fim, considerando os gastos do governo em sua taxa de crescimento, de modo que

$G_t = (1 + g_t)G_{t-1}$, temos a restrição orçamentária:

$$\tau_t = (1 + g_t)G_{t-1} + (1+r)B_t \left[1 + (\pi^e - \pi)\theta + (q^e - q)\theta^* + (p^e - p_t)\tilde{\theta} \right] \quad (\text{A.1.2.8})$$

APÊNDICE 2 – DERIVAÇÃO DOS MODELOS DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO

A.2.1 – MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO³⁴

O modelo tradicional de suavização da tributação pressupõe a existência de 3 tipos de endividamento (nominal, cambial e pós-fixado), e solução em dois períodos (dada a premissa de que toda a dívida que o governo emite em um período vence no período imediatamente posterior).

Assim, o problema a ser resolvido é:

$$\min_{\theta, \theta^*} E_{t-1} \left[A \frac{\tau_t^2}{2} + \frac{\pi_t^2}{2} \right] \quad (\text{A.2.1.1})$$

Sujeito à restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_{t-1} \left[1 + \theta^* (q^e - q) + \theta (\pi^e - \pi) \right] \quad (\text{A.2.1.2})$$

A solução do problema retorna as seguintes equações normais:

$$[\theta]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1} (\pi - \pi^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.1.3})$$

e

$$[\theta^*]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1} (q - q^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.1.4})$$

Da equação (A.2.1.3). temos:

$$-A(1+r)BE_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] \quad (\text{A.2.1.5})$$

Da mesma forma, pela equação (A.2.1.4). temos:

³⁴ Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

$$-A(1+r)BE_t[\tau_t(q-q^e)]=0 \Rightarrow E_t[\tau_t(q-q^e)] \quad (\text{A.2.1.6})$$

Multiplicando a restrição orçamentária (A.2.1.2) por $E(\pi - \pi^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(\pi - \pi^e)] &= E[G_t(\pi - \pi^e)] + (1+r)B_{t-1}E(\pi - \pi^e) - (1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi - \pi^e)]^2 \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(q - q^e)(\pi - \pi^e)] \\ 0 &= \sigma_{G\pi} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_\pi^2 - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.7})$$

Agora, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.1.2) por $E(q - q^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(q - q^e)] &= E[G_t(q - q^e)] + (1+r)B_{t-1}E(q - q^e) - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)(q - q^e)] \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(q - q^e)]^2 \\ 0 &= \sigma_{Gq} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q} - (1+r)B\theta^*\sigma_q^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.1.8})$$

Isolando θ^* na equação (A.2.1.8), temos que:

$$\theta^* = \frac{\sigma_{Gq} - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q}}{(1+r)B\theta^*\sigma_q^2} \quad (\text{A.2.1.9})$$

Da equação (A.2.1.7), encontramos a seguinte relação:

$$\theta = \frac{\sigma_{G\pi} - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi}}{(1+r)B\sigma_\pi^2} \quad (\text{A.2.1.10})$$

Substituindo a relação (A.2.1.10) na equação (A.2.1.9), e rearranjando as equações resultantes (considerando também que $G_t = (1 + g_t)G_{t-1}$), encontramos:

$$\theta_t = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{g\pi,t} \sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t} \sigma_{q\pi,t})}{\left\{ (1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2] \right\}} \quad (3.8)$$

e

$$\theta_t^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{qg,t} \sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t} \sigma_{q\pi,t})}{\left\{ (1 + r_{t-1}) [\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2] \right\}} \quad (3.9)$$

A.2.2 – MODELO TRADICIONAL DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO EM HORIZONTE INFINITO³⁵

Aqui ainda considera-se o modelo tradicional de suavização da tributação, que pressupõe a existência de 3 tipos de endividamento (nominal, cambial e pós-fixado), mas admite-se a solução do problema em período infinito, ou seja, considera-se que a autoridade fiscal pode carregar dívida entre diferentes períodos, acabando com a premissa de que toda a dívida que o governo emite em um período vence no período imediatamente posterior.

Dessa forma, a função de perda social passa a ser:

$$\min_{\theta, \theta^*} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right] \quad (\text{A.2.2.1})$$

Sujeito à restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_{t-1} \left[1 + \theta^*(q^e - q) + \theta(\pi^e - \pi) \right] \quad (\text{A.2.2.2})$$

Entretanto, como os agentes podem carregar dívida entre vários períodos, devemos considerar a diferença entre restrições orçamentárias entre dois períodos distintos. Isso significa retirar da restrição orçamentária a diferença entre a dívida pública em dois períodos distintos, ou seja:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_{t-1} \left[1 + \theta^*(q^e - q) + \theta(\pi^e - \pi) \right] - b_t \quad (\text{A.2.2.3})$$

A solução do problema de minimização (A.2.2.1) sujeita à restrição (A.2.2.3) retorna as seguintes equações normais:

$$[\theta]: E_t \left\{ A \tau_t \left[- (1+r_t) B_{t-1} (\pi - \pi^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.2.4})$$

e

³⁵ Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

$$[\theta^*]: E_t \{ A \tau_t [-(1+r_t)B_{t-1}(q-q^e)] \} = 0 \quad (\text{A.2.2.5})$$

Da equação (A.2.2.4). temos:

$$-A(1+r)BE_t[\tau_t(\pi-\pi^e)] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t[\tau_t(\pi-\pi^e)] \quad (\text{A.2.2.6})$$

Da mesma forma, pela equação (A.2.2.5). temos:

$$-A(1+r)BE_t[\tau_t(q-q^e)] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t[\tau_t(q-q^e)] \quad (\text{A.2.2.7})$$

Multiplicando a restrição orçamentária (A.2.2.3) por $E(\pi-\pi^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(\pi-\pi^e)] &= E[G_t(\pi-\pi^e)] + (1+r)B_{t-1}E(\pi-\pi^e) - (1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi-\pi^e)]^2 \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(q-q^e)(\pi-\pi^e)] - E[b_t(\pi-\pi^e)] \\ 0 &= \sigma_{G\pi} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_\pi^2 - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi} - \sigma_{\pi b} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.8})$$

Agora, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.2.3) por $E(q-q^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(q-q^e)] &= E[G_t(q-q^e)] + (1+r)B_{t-1}E(q-q^e) - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi-\pi^e)(q-q^e)] \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(q-q^e)]^2 - E[b_t(q-q^e)] \\ 0 &= \sigma_{Gq} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q} - (1+r)B\theta^*\sigma_q^2 - \sigma_{bq} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.9})$$

Isolando θ^* na equação (A.2.2.9), temos que:

$$\theta^* = \frac{\sigma_{Gq} - \sigma_{bq} - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q}}{(1+r)B\theta^*\sigma_q^2} \quad (\text{A.2.2.10})$$

Da equação (A.2.2.8), encontramos a seguinte relação:

$$\theta = \frac{\sigma_{G\pi} - \sigma_{b\pi} - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi}}{(1+r)B\sigma_\pi^2} \quad (\text{A.2.2.11})$$

Substituindo a relação (A.2.2.11) na equação (A.2.2.10), e rearranjando as equações resultantes (considerando também que $G_t = (1+g_t)G_{t-1}$), encontramos:

$$\theta_t = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{g\pi,t}\sigma_{q,t}^2 - \sigma_{b\pi,t}\sigma_{q,t}^2 - \sigma_{gq,t}\sigma_{q\pi,t} + \sigma_{bq,t}\sigma_{\pi q,t})}{\left\{ (1+r_{t-1}) \left[\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2 \right] \right\}} \quad (4.8)$$

e

$$\theta_t^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_{qg,t}\sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{bq,t}\sigma_{\pi,t}^2 - \sigma_{g\pi,t}\sigma_{q\pi,t} + \sigma_{b\pi,t}\sigma_{q\pi,t})}{\left\{ (1+r_{t-1}) \left[\sigma_{\pi,t}^2 \sigma_{q,t}^2 - (\sigma_{q\pi,t})^2 \right] \right\}} \quad (4.9)$$

A.2.3 – MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO COM DÍVIDA FLUTUANTE³⁶

Quando consideramos que o endividamento público pode ser fracionado em quatro tipos de dívida, é necessário refazer toda a solução do problema de minimização. Logo, sabemos que a função de perda social a ser minimizada (agora considerando que a proporção de dívida flutuante ($\tilde{\theta}$) é um dos argumentos da minimização) é dada por:

$$\min_{\theta, \theta^*, \tilde{\theta}} E_{t-1} \left[A \frac{\tau_t^2}{2} + \frac{\pi_t^2}{2} \right] \quad (\text{A.2.3.1})$$

A restrição orçamentária neste caso deve levar em consideração a existência de um quarto tipo de endividamento, conforme expresso na seção A.1.2. Assim, a minimização deverá ser feita sujeita à seguinte restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_t \left[1 + (\pi^e - \pi)\theta + (q^e - q)\theta^* + (p^e - p_t)\tilde{\theta} \right] \quad (\text{A.2.3.2})$$

A minimização da função (A.2.3.1) frente à restrição orçamentária (A.2.3.2) nos retorna as seguintes equações normais:

$$[\theta]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(\pi - \pi^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.3.3})$$

$$[\theta^*]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(q - q^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.3.4})$$

$$[\tilde{\theta}]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(p - p^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.3.5})$$

Da equação (A.2.3.3), temos:

$$-A(1+r)BE_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] \quad (\text{A.2.3.6})$$

³⁶ Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

Da mesma forma, pela equação (A.2.3.4). temos:

$$-A(1+r)BE_t[\tau_t(q-q^e)]=0 \quad \Rightarrow \quad E_t[\tau_t(q-q^e)] \quad (\text{A.2.3.7})$$

Por fim, da equação (A.2.3.5). temos:

$$-A(1+r)BE_t[\tau_t(p-p^e)]=0 \quad \Rightarrow \quad E_t[\tau_t(p-p^e)] \quad (\text{A.2.3.8})$$

Multiplicando a restrição orçamentária (A.2.3.2) por $E(\pi - \pi^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(\pi - \pi^e)] &= E[G_t(\pi - \pi^e)] + (1+r)B_{t-1}E(\pi - \pi^e) - (1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi - \pi^e)]^2 \\ &\quad - (1+r)B_{t-1}\theta^*E[(q - q^e)(\pi - \pi^e)] - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)(\pi - \pi^e)] \\ 0 &= \sigma_{G\pi} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi}^2 - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi} - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_{p\pi} \end{aligned} \quad (\text{A.2.3.9})$$

Agora, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.3.2) por $E(q - q^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(q - q^e)] &= E[G_t(q - q^e)] + (1+r)B_{t-1}E(q - q^e) - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)(q - q^e)] \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(q - q^e)]^2 - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)(q - q^e)] \\ 0 &= \sigma_{Gq} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q} - (1+r)B\theta^*\sigma_q^2 - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_{pq} \end{aligned} \quad (\text{A.2.3.10})$$

Finalmente, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.3.2) por $E(p - p^e)$, temos:

$$\begin{aligned} E[\tau_t(p - p^e)] &= E[G_t(p - p^e)] + (1+r)B_{t-1}E(p - p^e) - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)(p - p^e)] \\ &\quad - (1+r)B\theta^*E[(p - p^e)(q - q^e)] - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)]^2 \end{aligned}$$

$$0 = \sigma_{\tilde{G}p} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi p} - (1+r)B\theta^*\sigma_{qp} - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_p^2 \quad (\text{A.2.3.11})$$

A solução analítica do problema acontece, como nas demonstrações dos outros modelos, com a resolução do sistema formado pelas equações (A.2.3.9), (A.2.3.10) e (A.2.3.11).

Tal solução retorna as seguintes equações, já levando em consideração que $G_t = (1 + g_t)G_{t-1}$:

$$\theta = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{(\sigma_q^2\sigma_{\pi p} - \sigma_{\pi q}\sigma_{qp})(\sigma_p^2\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi p}\sigma_{pg}) - (\sigma_{\pi p}\sigma_{pq} - \sigma_p^2\sigma_{\pi q})(\sigma_{\pi g}\sigma_{qp} - \sigma_{\pi p}\sigma_{qg})}{(1+r)[\sigma_\pi^2\sigma_q^2\sigma_p^2 - \sigma_p^2\sigma_{\pi q}^2 - \sigma_q^2\sigma_{\pi p}^2 - 2\sigma_{\pi q}\sigma_{\pi p}\sigma_{pq} + \sigma_\pi^2\sigma_{pq}^2]} \quad (\text{A.2.3.12})$$

$$\theta^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{\sigma_{\pi p}(\sigma_{qp}\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi p}\sigma_{qg}) + \sigma_{\pi q}(\sigma_{pg}\sigma_{\pi p} - \sigma_p^2\sigma_{g\pi}) + \sigma_\pi^2(\sigma_p^2\sigma_{gq} - \sigma_{qp}\sigma_{gp})}{(1+r)[\sigma_\pi^2\sigma_q^2\sigma_p^2 - \sigma_p^2\sigma_{\pi q}^2 - \sigma_q^2\sigma_{\pi p}^2 - 2\sigma_{\pi q}\sigma_{\pi p}\sigma_{pq} + \sigma_\pi^2\sigma_{pq}^2]} \quad (\text{A.2.3.13})$$

$$\tilde{\theta} = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{\sigma_{\pi q}(\sigma_{qp}\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi p}\sigma_{qg}) - \sigma_{\pi q}^2\sigma_{pq} - \sigma_q^2\sigma_{p\pi}\sigma_{g\pi} + \sigma_\pi^2(\sigma_q^2\sigma_{gp} - \sigma_{qp}\sigma_{gg})}{(1+r)[\sigma_\pi^2\sigma_q^2\sigma_p^2 - \sigma_p^2\sigma_{\pi q}^2 - \sigma_q^2\sigma_{\pi p}^2 - 2\sigma_{\pi q}\sigma_{\pi p}\sigma_{pq} + \sigma_\pi^2\sigma_{pq}^2]} \quad (\text{A.2.3.14})$$

A.2.4 – MODELO DE SUAVIZAÇÃO DA TRIBUTAÇÃO PARA DÍVIDA FLUTUANTE EM HORIZONTE INFINITO³⁷

Por fim, podemos encontrar a solução do modelo de suavização da tributação com dívida flutuante resolvido em horizonte infinito.

Assim, admite-se a solução do problema em período infinito, ou seja, considera-se que a autoridade fiscal pode carregar dívida entre diferentes períodos, acabando com a premissa de que toda a dívida que o governo emite em um período vence no período imediatamente posterior.

Logo, sabemos que a função de perda social a ser minimizada (agora considerando que a proporção de dívida flutuante ($\tilde{\theta}$) é um dos argumentos da minimização, e que a dívida pode ser carregada por vários períodos) é dada por:

$$\min_{\theta, \theta^*, \tilde{\theta}} E_{t-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} \alpha^{j-1} \left[A \frac{(\tau_j - \tilde{\tau}_j)^2}{2} + \frac{\pi_j^2}{2} \right] \quad (\text{A.2.4.1})$$

A restrição orçamentária neste caso leva em consideração a existência de um quarto tipo de endividamento, conforme expresso na seção A.1.2, mas adaptada para a possibilidade de dívida rolada entre diversos períodos. Assim, a minimização deverá ser feita sujeita à seguinte restrição orçamentária:

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_t \left[1 + (\pi^e - \pi)\theta + (q^e - q)\theta^* + (p^e - p_t)\tilde{\theta} \right] \quad (\text{A.2.4.2})$$

Entretanto, como já dito, os agentes podem carregar dívida entre vários períodos, e por isso devemos considerar a diferença entre restrições orçamentárias entre dois períodos distintos. Isso significa retirar da restrição orçamentária a diferença entre a dívida pública em dois períodos distintos, ou seja:

³⁷ Para não poluir as fórmulas, alguns subscritos foram omitidos.

$$\tau_t = G_t + (1+r)B_t \left[1 + (\pi^e - \pi)\theta + (q^e - q)\theta^* + (p^e - p_t)\tilde{\theta} \right] - b_t \quad (\text{A.2.4.3})$$

A minimização da função (A.2.4.1) frente à restrição orçamentária (A.2.4.2) nos retorna as seguintes equações normais:

$$[\theta]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(\pi - \pi^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.4.3})$$

$$[\theta^*]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(q - q^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.4.4})$$

$$[\tilde{\theta}]: E_t \left\{ A \tau_t \left[-(1+r_t)B_{t-1}(p - p^e) \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.2.4.5})$$

Da equação (A.2.4.3). temos:

$$-A(1+r)BE_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t \left[\tau_t (\pi - \pi^e) \right] \quad (\text{A.2.4.6})$$

Da mesma forma, pela equação (A.2.4.4). temos:

$$-A(1+r)BE_t \left[\tau_t (q - q^e) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t \left[\tau_t (q - q^e) \right] \quad (\text{A.2.4.7})$$

Por fim, da equação (A.2.4.5). temos:

$$-A(1+r)BE_t \left[\tau_t (p - p^e) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t \left[\tau_t (p - p^e) \right] \quad (\text{A.2.4.8})$$

Multiplicando a restrição orçamentária (A.2.4.2) por $E(\pi - \pi^e)$, temos:

$$\begin{aligned}
E[\tau_t(\pi - \pi^e)] &= E[G_t(\pi - \pi^e)] + (1+r)B_{t-1}E(\pi - \pi^e) \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\theta[E(\pi - \pi^e)]^2 \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\theta^*E[(q - q^e)(\pi - \pi^e)] \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)(\pi - \pi^e)] \\
&\quad - E[b_t(\pi - \pi^e)]
\end{aligned}$$

$$0 = \sigma_{G\pi} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi}^2 - (1+r)B\theta^*\sigma_{q\pi} - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_{\pi p} - \sigma_{\pi b} \quad (\text{A.2.4.9})$$

Agora, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.4.2) por $E(q - q^e)$, temos:

$$\begin{aligned}
E[\tau_t(q - q^e)] &= E[G_t(q - q^e)] + (1+r)B_{t-1}E(q - q^e) \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)(q - q^e)] \\
&\quad - (1+r)B\theta^*E[(q - q^e)]^2 \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)(q - q^e)] \\
&\quad - E[b_t(q - q^e)]
\end{aligned}$$

$$0 = \sigma_{Gq} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi q} - (1+r)B\theta^*\sigma_q^2 - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_{pq} - \sigma_{bq} \quad (\text{A.2.4.10})$$

Finalmente, multiplicando a restrição orçamentária (A.2.4.2) por $E(p - p^e)$, temos:

$$\begin{aligned}
E[\tau_t(p - p^e)] &= E[G_t(p - p^e)] + (1+r)B_{t-1}E(p - p^e) \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\theta E[(\pi - \pi^e)(p - p^e)] \\
&\quad - (1+r)B\theta^*E[(p - p^e)(q - q^e)] \\
&\quad - (1+r)B_{t-1}\tilde{\theta}E[(p - p^e)]^2 \\
&\quad - E[b_t(p - p^e)]
\end{aligned}$$

$$0 = \sigma_{Gp} + 0 - (1+r)B\theta\sigma_{\pi p} - (1+r)B\theta^*\sigma_{qp} - (1+r)B\tilde{\theta}\sigma_p^2 - \sigma_{bp} \quad (\text{A.2.4.11})$$

A solução analítica do problema acontece, como nas demonstrações dos outros modelos, com a resolução do sistema formado pelas equações (A.2.4.9), (A.2.4.10) e (A.2.4.11).

Tal solução retorna as seguintes equações, já levando em consideração que $G_t = (1 + g_t)G_{t-1}$:

$$\theta = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{\left\{ \left(\sigma_p^2 \sigma_{\pi q} - \sigma_{\pi p} \sigma_{qp} \right) \left[\sigma_{qp} (\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi b}) - \sigma_{\pi p} (\sigma_{pg} - \sigma_{qb}) \right] + \left(\sigma_q^2 \sigma_{\pi p} - \sigma_{\pi q} \sigma_{qp} \right) \left[\sigma_p^2 (\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi b}) - \sigma_{\pi p} (\sigma_{pg} - \sigma_{bp}) \right] \right\}}{(1+r) \left[-\sigma_{\pi}^2 \sigma_q^2 \sigma_p^2 \sigma_{\pi p} + \sigma_p^2 \sigma_{\pi q}^2 \sigma_{\pi p} + \sigma_q^2 \sigma_{\pi p}^3 - 2\sigma_{\pi q} \sigma_{\pi p}^2 \sigma_{pq} + \sigma_{\pi}^2 \sigma_{\pi p} \sigma_{pq}^2 \right]} \quad (\text{A.2.4.12})$$

$$\theta^* = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{\left\{ \sigma_{\pi p} \left[\sigma_{\pi g} \sigma_{qp} - \sigma_{\pi p} \sigma_{gp} - \sigma_{qp} \sigma_{\pi b} + \sigma_{\pi p} \sigma_{bq} \right] + \sigma_{\pi q} \left[\sigma_{\pi p} (\sigma_{pg} - \sigma_{pb}) - \sigma_p^2 (\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi b}) \right] + \sigma_{\pi}^2 \left[-\sigma_{qp} (\sigma_{pg} - \sigma_{pb}) + \sigma_p^2 (\sigma_{qg} - \sigma_{pg}) \right] \right\}}{(1+r) \left[\sigma_{\pi}^2 \sigma_q^2 \sigma_p^2 - \sigma_p^2 \sigma_{\pi q}^2 - \sigma_q^2 \sigma_{\pi p}^2 - 2\sigma_{\pi q} \sigma_{\pi p} \sigma_{pq} + \sigma_{\pi}^2 \sigma_{pq}^2 \right]} \quad (\text{A.2.4.13})$$

$$\tilde{\theta} = \frac{G_{t-1}}{B_{t-1}} \frac{\left\{ -\sigma_{\pi q}^2 (\sigma_{pg} - \sigma_{bp}) - \sigma_q^2 \sigma_{\pi p} (\sigma_{\pi g} - \sigma_{\pi b}) \sigma_{pg} + \sigma_{\pi q} (\sigma_{\pi g} \sigma_{qp} + \sigma_{\pi p} \sigma_{qg} - \sigma_{qp} \sigma_{\pi b} - \sigma_{\pi p} \sigma_{bq}) + \sigma_{\pi}^2 \left[\sigma_q^2 (\sigma_{pg} - \sigma_{pb}) - \sigma_{qp} (\sigma_{qg} - \sigma_{pg}) \right] \right\}}{(1+r) \left[\sigma_{\pi}^2 \sigma_q^2 \sigma_p^2 - \sigma_p^2 \sigma_{\pi q}^2 - \sigma_q^2 \sigma_{\pi p}^2 - 2\sigma_{\pi q} \sigma_{\pi p} \sigma_{pq} + \sigma_{\pi}^2 \sigma_{pq}^2 \right]} \quad (\text{A.2.4.14})$$