A FEA e a USP respeitam os direitos autorais deste trabalho. Nós acreditamos que a melhor proteção contra o uso ilegítimo deste texto é a publicação online. Além de preservar o conteúdo motiva-nos oferecer à sociedade o conhecimento produzido no âmbito da universidade pública e dar publicidade ao esforço do pesquisador. Entretanto, caso não seja do interesse do autor manter o documento online, pedimos compreensão em relação à iniciativa e o contato pelo e-mail bibfea@usp.br para que possamos tomar as providências cabíveis (remoção da tese ou dissertação da BDTD).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TEORIA ECONÔMICA

ANÁLISE DE UM MONOPÓLIO VIA MECANISMOS DE LEILÃO

Arthur Carbonare de Avila

Orientadora: Profa. Dra. Marilda Sotomayor

SÃO PAULO

2005

T381.17 A958a e.2

T87388

2060027740

Powered by MiiProStar - www.togonoss.com.br

Prof. Dr. Adolpho José Melfi
Reitor da Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Maria Tereza Leme Fleury
Diretora da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Ricardo Abramovay
Chefe do Departamento de Economia

Profa. Dra. Fabiana Rocha
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Teoria Econômica

T381.17
A958a
e.2

ARTHUR CARBONARE DE AVILA

DEDALUS - Acervo - FEA

20600027740

ANÁLISE DE UM MONOPÓLIO VIA MECANISMOS DE LEILÃO

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Teoria Econômica.

Orientadora: Profa. Dra. Marilda Sotomayor

SÃO PAULO

2005

87388

87388

Dissertação defendida, em 02.06.2005, e aprovada no Programa de Pós-Graduação em Economia pela seguinte comissão julgadora que fez questão de ressaltar a qualidade do trabalho apresentado pelo candidato:

Prof.^a Dr.^a Marilda Antonia de Oliveira Sotomayor

Prof. Dr. Décio Katsushigue Kadota

Prof. Dr. Maurício Soares Bugarin

Avila, Arthur Carbonare de

Análise de um Monopólio via Mecanismos de Leilão / Arthur Carbonare de Avila – São Paulo, 2005.

89 p.

12pt

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, 2005

Bibliografia.

1. Leilão 2. Monopólio I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP II. Título.

CDD – 381.17

Resumo

Modelamos um monopólio de objetos indivisíveis com compradores de demanda unitária. Determinamos o núcleo do jogo cooperativo e o equilíbrio competitivo. Apresentamos três mecanismos (Leilão Discriminatório, Leilão de Preço Uniforme Mínimo e Leilão de Preço Uniforme Máximo) para produzir resultados do núcleo e do equilíbrio competitivo que induzem um jogo não cooperativo de informação completa. Para cada mecanismo determinamos todos os equilíbrios de Nash e, ao eliminar estratégias dominadas, vimos que os *payoffs* de equilíbrio são os mesmos e idênticos ao resultado ótimo para os compradores no núcleo. Relaxamos a hipótese de informação completa e derivamos as estratégias de equilíbrio simétrico com e sem preço de reserva para o vendedor. Provamos então o Teorema de Equivalência de Receitas, aplicável aos leilões apresentados, e determinamos o preço de reserva ótimo para o vendedor.

Abstract

We modeled a monopoly with indivisible objects and single unity demand buyers. We determine the core of the cooperative game and the competitive equilibrium of the market. We present three mechanisms (Discriminatory Auction, Minimum Uniform Price Auction and Maximum Uniform Price Auction) to produce results of the core and the competitive equilibrium. These mechanisms introduce a non-cooperative game with complete information. To each mechanism, we determine all Nash Equilibriums and, eliminating dominated strategies, we show that the equilibrium payoffs are the same and identical to the best result for the buyers in the core. Then we relax the hypothesis of complete information and we found symmetric equilibrium with and without reservation price for the seller. Then we prove the Revenue Equivalence Theorem, that applies to the auctions presented, and we determine the best reservation price to the seller.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	A Troca Como um Jogo Cooperativo	6
2.1	O Modelo Cooperativo	10
2.1.1	O Núcleo do Jogo	13
2.2	O Preço Como um Mecanismo de Alocação num Jogo de Mercado	19
3	A Troca Como um Jogo Não Cooperativo de Informação Completa	25
3.1	Uma Regra de Alocação Padrão	29
3.2	Leilão de Preço Uniforme Mínimo	30
3.3	Leilão Discriminatório	34
3.4	Leilão de Preço Uniforme Máximo	37
4	Leilões de Múltiplos Objetos Idênticos com Demanda Unitária como Jogos de Informação Incompleta	42
4.1	Modelo de Valores Privados Independentes	45

4.1.1	Leilão de Preço Uniforme Mínimo	48
4.1.2	Leilão Discriminatório	50
4.1.3	Leilão de Preço Uniforme Máximo	52
4.1.4	Teorema de equivalência de receitas	56
4.2	Preços de reserva	59
4.2.1	Equilíbrios Simétricos com preços de reserva	60
4.2.2	Teorema de Equivalência de Receitas	63
5	Comentários Finais	70
	Bibliografia	74
A	Provas omitidas	76
B	Estatísticas de Ordem	79

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar um mercado composto por um monopolista que vende vários objetos idênticos e indivisíveis a um conjunto de compradores que demandam um único objeto cada. Todo agente atribui um mesmo valor monetário (número real não negativo) a todos os objetos. Inicialmente consideramos que o preço de reserva do vendedor para seus objetos é zero. Esta hipótese será relaxada posteriormente e será permitido qualquer preço de reserva (número real não negativo).

Supomos que todos os agentes estão presentes ao mesmo tempo no mercado. O conceito solução para este jogo cooperativo é o conceito de núcleo. Mostramos que o núcleo é não vazio, caracterizamos o núcleo do jogo e mostramos que todo resultado do núcleo leva a uma alocação ótima dos objetos e que toda alocação ótima dos objetos é compatível com um resultado do núcleo. Também mostramos que no núcleo há um resultado ótimo para o vendedor e outro ótimo para os compradores. Além disso, determinamos o equilíbrio competitivo, conceito solução que reúne as propriedades de eficiência de Pareto e ausência de inveja. Mostramos que os *payoffs* de equilíbrio competitivo são um subconjunto do núcleo e que há um preço máximo e um preço mínimo de equilíbrio competitivo. O vetor de *payoffs* de equilíbrio competitivo com preço mínimo coincide com o vetor de

payoffs do resultado ótimo para os compradores no núcleo; o vetor de *payoffs* de equilíbrio competitivo de preço máximo pode ser distinto do vetor de *payoffs* correspondente ao resultado ótimo para o vendedor no núcleo.

Em seguida, com o intuito de obter um resultado do núcleo, utilizamos três mecanismos de venda centralizados, que operam sob a hipótese de informação completa sobre os verdadeiros valores dos compradores. Esta hipótese é relaxada posteriormente. Os mecanismos produzem, respectivamente, o resultado do núcleo ótimo para o vendedor (Leilão Discriminatório), o resultado de preço máximo de equilíbrio competitivo (Leilão de Preço Uniforme Máximo) e o resultado de preço mínimo de equilíbrio competitivo ou equivalentemente o resultado ótimo para os compradores no núcleo (Leilão de Preço Uniforme Mínimo). Para cada um dos mecanismos de leilão determinamos todos os equilíbrios de Nash. Finalmente verificamos que se nenhum comprador joga uma estratégia dominada, os compradores podem forçar, via equilíbrio de Nash, o resultado ótimo para eles no núcleo do jogo cooperativo.

A partir daí, passamos a analisar os jogos induzidos pelos três mecanismos de leilão sob o enfoque de informação incompleta sobre os verdadeiros valores dos compradores. Procuramos por equilíbrios de Nash Bayesianos, utilizando o instrumental introduzindo por Vickrey (1961). Limitamos nossa análise ao Modelo Simétrico de Valores Privados em que os licitantes são neutros ao risco. Determinamos as estratégias de equilíbrio de Nash Bayesiano para cada uma das regras de preço. Mostramos que os três mecanismos geram a mesma receita esperada através do Teorema de Equivalência de Receitas. Isso preenche uma lacuna na literatura, que não trata desses leilões com regra de preço uniforme máximo. Finalmente, permitimos que o preço de reserva do vendedor seja qualquer número real não negativo. Então, encontramos as estratégias de equilíbrio de Nash Bayesiano e derivamos o Teorema de Equivalência de Receitas. Determinamos o preço de reserva ótimo do vendedor, isto é, aquele que maximiza a receita esperada do leilão. Tanto quanto saibamos, este resultado, embora esperado, está sendo demonstrado aqui pela primeira

vez. Como ele é independente do número de compradores e do número de objetos à venda, sua expressão é idêntica à encontrada por Riley e Samuelson (1981), trabalho que deriva o Teorema de Equivalência de Receitas e o preço de reserva ótimo para o vendedor em leilões de um único objeto no Modelo de Valores Privados Independentes.

O modelo do jogo cooperativo será exposto no Capítulo 2. Segue o jogo não cooperativo com informação completa e a descrição dos mecanismos no Capítulo 3. O modelo com informação incompleta será apresentado no Capítulo 4. Um último capítulo contém comentários finais e um guia para a literatura. Temos dois apêndices, o primeiro contendo provas omitidas no decorrer do texto e o segundo sobre estatísticas de ordem, que são necessárias para o entendimento do Capítulo 4.

Capítulo 2

A Troca Como um Jogo Cooperativo

A escolha de modelar a troca como um jogo cooperativo pode ser motivada a partir do princípio de que a troca em si é a formação de uma parceria entre um comprador e um vendedor que juntos obtêm um ganho melhor do que o que obteriam separadamente. O modelo que nos propomos a estudar, consiste de um monopolista com vários objetos idênticos e indivisíveis e um conjunto de compradores que desejam comprar, no máximo, um objeto cada. Cada agente atribui um valor monetário ao objeto. Se todos puderem se comunicar livremente, de tal forma que ofertas e contra-ofertas sejam feitas, *que resultados podemos esperar observar?* Isto é, *para quem e a que preço cada um dos objetos será vendido?*

Para responder esta pergunta, somos levados a utilizar o instrumental de jogos cooperativos, modelando o mercado na forma de um jogo coalizional com *payoff* transferível. Quando os agentes podem se comunicar livremente, sem custos, podemos esperar que um comprador e o vendedor realizarão uma troca somente quando o vendedor estiver certo de que não conseguirá vender seu objeto para outro comprador por um preço mais alto e o comprador estiver certo de que está disposto a pagar o preço pedido pelo objeto. Não se impõe nenhum mecanismo para a realização das trocas. O conceito solução adequado

é o conceito de núcleo.

Apesar do núcleo se referir apenas a vetores de *payoffs*, seus resultados estão intimamente ligados à alocação dos objetos, por isso começamos nosso problema fazendo algumas considerações sobre a alocação, que chamaremos de *matching*. Diremos que um *matching* é factível se não aloca mais de um objeto a um mesmo comprador e se cada objeto é alocado a, no máximo, um comprador. Se, além disso, ainda alocar os objetos aos compradores que tiverem as maiores avaliações, teremos um *matching* ótimo.

A lógica do *matching* ótimo serve tanto para o conjunto de todos os jogadores (compradores e vendedor) como para um subconjunto S deles, por isso traremos um conceito de *matching* ótimo para um mercado restrito a um subconjunto de jogadores. Isto será útil pois, uma vez que as trocas serão realizadas somente quando comprador e vendedor estiverem certos de que não há nada melhor disponível no mercado, então teremos que verificar qual o maior ganho que cada subconjunto de jogadores pode obter ao se juntarem. Obviamente, se um subconjunto contiver apenas o vendedor ou somente compradores, nenhuma troca será realizada e não há ganho algum (ganho zero). Já se houver vendedor e compradores, o ganho máximo é obtido vendendo os objetos aos compradores com maiores avaliações dentro do subconjunto, resultando num ganho igual à soma das avaliações dos compradores que recebem um objeto.

A partir desta lógica definiremos a função coalizional do jogo cooperativo, que utilizaremos para determinar o núcleo. Esta função, no entanto, trata do ganho total de uma coalizão e não de como este *payoff* é dividido entre os elementos que a formam. O núcleo, como veremos, analisa vetores de *payoffs*, ou seja, como o ganho se distribui entre os jogadores, por isso algumas definições serão necessárias.

Um vetor de *payoffs* será factível se a soma dos *payoffs* dos jogadores não exceder o máximo que todos (compradores e vendedor) puderem obter juntos, logo somente *payoffs* factíveis podem ser esperados. Um vetor de *payoffs* factível também pode ser tal que

a soma dos ganhos de um determinado subconjunto de jogadores seja menor do que o máximo que estes jogadores podem obter juntos. Isto significa que eles podem se juntar e adicionar ao ganho original de cada um uma quantidade estritamente positiva, sem o auxílio dos demais jogadores fora da coalizão, ou seja, com seus próprios recursos. Quando tal situação ocorre, dizemos que a coalizão bloqueia o resultado e, portanto, algo que esperamos não observar.

Figura 2.1: Oferta e demanda do mercado com as verdadeiras avaliações dos compradores.

O núcleo é o conjunto de vetores de *payoffs* factíveis que não são bloqueados por nenhuma coalizão. Em sua determinação, mostraremos que qualquer alocação ótima dos objetos pode ser esperada e somente alocações ótimas podem ser esperadas (Proposições 2.1 e 2.2). Além disso, compradores que não recebem objetos deverão ter ganho nulo. Já compradores que recebem um objeto não pagarão mais do que sua avaliação por ele nem menos que a maior avaliação de quem não recebe (Proposições 2.3 a 2.5). Podemos observar na

Figura 2.1 um exemplo com K objetos sendo ofertados a um conjunto de demandantes cujas avaliações formam uma demanda. Os compradores com avaliação menor que v_K não recebem nenhum objetos e não têm ganho algum. Já os demais compradores recebem e pagam uma quantia entre sua avaliação e v_{K+1} resultando num ganho não negativo.

Na mesma Figura 2.1 ilustramos uma situação em que dois compradores não pagam o mesmo preço e o comprador com avaliação maior paga menos que o outro. O núcleo nos indica que este é um resultado que podemos esperar observar, entre muitos outros. No entanto, ressaltaremos dois resultados do núcleo em particular. Um deles é o ótimo para os compradores, onde todos os que recebem pagam a maior avaliação dos que não recebem (ou zero, se não há mais compradores do que objetos). O outro é o ótimo para o vendedor, onde cada comprador que recebe um objeto paga sua avaliação por ele. Este resultado corresponde à discriminação de primeiro grau do monopolista enquanto aquele corresponde a um resultado de um mercado em concorrência perfeita.

Todos os resultados do núcleo são Pareto eficientes, mas estes dois ressaltados nos permitem observar que nem todos são livres de inveja, uma vez que, por causa da possibilidade de discriminação de preços por parte do vendedor, um comprador que paga um preço mais alto gostaria de pagar o preço mais baixo, já que todos os objetos são idênticos.

Existe um conceito solução que captura a idéia de eficiência de Pareto e ausência de inveja: o Equilíbrio Competitivo. Ele é definido por uma alocação e um preço. Nele, todos os objetos são vendidos ao mesmo preço, nenhum comprador que não recebe um objeto paga mais do que está disposto pelo objeto e nenhum comprador que não recebe um objeto obteria um ganho positivo em receber o objeto pagando o preço.

Assim como no núcleo, os objetos deverão ser alocados aos compradores com maiores avaliações no equilíbrio competitivo. Quanto aos preços, veremos que se há mais objetos do que compradores, o preço é zero; se há tantos objetos quanto compradores, o preço pode ser qualquer valor entre zero e a menor avaliação; e se houver mais compradores do

que objetos, o preço pode ser qualquer valor entre a maior avaliação dos compradores que não recebem e a menor avaliação dos que recebem um objeto.

Como cada equilíbrio competitivo resulta num vetor de *payoffs*, podemos relacionar cada resultado com o núcleo do jogo cooperativo. Veremos que todo equilíbrio competitivo resulta num vetor de *payoffs* do núcleo. O inverso não é verdadeiro, uma vez que o núcleo permite discriminação de preços e o equilíbrio competitivo não. Também veremos que o equilíbrio competitivo com preço mínimo resulta no vetor de *payoffs* ótimo para os compradores no núcleo. Já o vetor de *payoffs* resultante do preço máximo de equilíbrio competitivo é distinto do resultado ótimo para o vendedor no núcleo, a não ser que todos os compradores que recebam um objeto tenham a mesma avaliação, no caso de mais compradores que objetos.

2.1 O Modelo Cooperativo

Temos K objetos idênticos e indivisíveis que pertencem a um vendedor q e que podem ser vendidos a K dos N potenciais compradores $1, \dots, N$, que demandam um único objeto cada. Denotaremos por $Q \equiv \{q\}$ e $P \equiv \{1, \dots, N\}$. Cada comprador i possui uma avaliação $v_i \in [0, \omega]^1$ sobre o objeto e o vetor de avaliações é $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$.² Suporemos, sem perda de generalidade, que $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_N$. O preço de reserva de cada um dos objetos é suposto ser 0 (obtido após normalizações). O mercado é então descrito por $\mathcal{M} \equiv (P, Q, \mathbf{v})$.

¹Não excluimos os compradores com avaliação zero pois este mercado pode ser pensado como a normalização de um mercado maior com um preço de reserva para o vendedor. A normalização consistiria em subtrair o preço de reserva de todas as avaliações e excluir do mercado os que teriam avaliação menor que o preço de reserva. Desta forma, um indivíduo com avaliação nula seria um comprador com avaliação idêntica ao preço de reserva e pagaria uma quantidade positiva, no mercado não normalizado, ao receber o objeto.

²Podemos interpretar que a utilidade de um indivíduo i é dada por $u_i(x_i, w_i) = v_i(x_i) + w_i$ onde x_i é a quantidade do objeto que pode assumir os valores 0 ou 1, logo $v_i = v_i(1)$, e w_i indica a quantidade do bem que serve de numerário, de forma que a utilidade é identificada com o numerário.

Um *matching* é uma alocação dos objetos para os compradores.

Definição 2.1: Um *matching* é factível se não aloca mais de um objeto para um mesmo comprador e não designa mais de um comprador para um mesmo objeto. Formalmente, um *matching* factível para um mercado $\mathcal{M}$ será expresso por um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ de zeros e uns tal que $\sum_{i=1}^N x_i \leq K$, onde x_i indica o número de objetos alocados para $i \in P$.

Definição 2.2: Um *matching* $\mathbf{x}$ é ótimo para $\mathcal{M}$ se é factível e $\sum_{i \in P} v_i x_i \geq \sum_{i \in P} v_i x'_i$ para $\forall \mathbf{x}'$ factível.

Em outras palavras, um *matching* é ótimo se maximiza a soma das avaliações dos compradores que recebem os objetos. É claro que existe sempre um *matching* ótimo, pois o número de *matchings* factíveis é finito. Sem perda de generalidade suporemos que se existir algum objeto não alocado por um *matching* ótimo $\mathbf{x}$, então todos os compradores estão sendo designados a algum objeto por $\mathbf{x}$; da mesma forma, se existir algum comprador que não recebe nenhum objeto num *matching* ótimo $\mathbf{x}$, então todos os objetos estão sendo alocados por $\mathbf{x}$. Assim, um *matching* ótimo aloca m objetos para os compradores de avaliação $v_1, \dots, v_m$ com $m = \min\{K, N\}$. Desta forma, um *matching* ótimo aloca os objetos eficientemente. Doravante denotaremos $m \equiv \min\{K, N\}$.

Também será necessário para a análise restringir o conjunto dos agentes a uma coalizão $S \subset P \cup Q$, de forma que não é factível alocar objetos para compradores que estejam fora de S e denominaremos este mercado por $\mathcal{M}^S$.

Definição 2.3: Um *matching* ótimo para $\mathcal{M}^S$ aloca os objetos disponíveis para os compradores dentro de S de forma que maximize a soma das avaliações dos compradores em S .

A este *matching* ótimo para $\mathcal{M}^S$ associamos um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ onde $x_i = 1$ se $i \in S$ e recebe um objeto no *matching* ótimo para $\mathcal{M}^S$ e $x_i = 0$ se $i \notin S$ ou se $i \in S$

mas não recebe um objeto no *matching* ótimo para $\mathcal{M}^S$. Obviamente, se $q \notin S$, não há objetos disponíveis no mercado restrito a S , da mesma forma que se $P \cap S = \emptyset$, não há compradores em $\mathcal{M}^S$. Em ambos os casos teremos $\mathbf{x} = (0, \dots, 0)$.

Com isso podemos definir uma função coalizional $\mathcal{V} : \mathcal{P}(P \cup Q)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\mathcal{V}(S) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \text{ onde } \mathbf{x} \text{ é um } \textit{matching} \text{ ótimo para } \mathcal{M}^S,$$

donde podemos concluir que $\mathcal{V}(P \cup Q) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$ para todo *matching* $\mathbf{x}$ ótimo para $\mathcal{M}$. Logo, seja $S \subseteq P$. Se $|S| \leq m$, então $\mathcal{V}(S \cup Q) = \sum_{i \in S} v_i$. Se $|S| > m$, então $N > K$. Neste caso, $\mathcal{V}(S \cup Q) = \max_{S'} \sum_{i \in S'} v_i$, onde $S' \subseteq S$ e $|S'| = m$. É claro então que:

$$\mathcal{V}(P \cup Q) = \sum_{i=1}^m v_i \tag{2.1}$$

O par $(P \cup Q, \mathcal{V})$ define um jogo cooperativo na forma coalizional com *payoffs* transferíveis, assumindo que a utilidade seja identificada com Dinheiro. Desta forma, o *payoff* ou ganho de um comprador é a diferença entre a quantidade de dinheiro que ele está disposto a pagar pelo objeto menos a quantidade que ele efetivamente paga e o *payoff* do vendedor é a soma do que recebe de todos os compradores.

No decorrer deste trabalho usaremos as seguintes notações: Se S é um conjunto de agentes, então S_{-i} denota o conjunto $S - \{i\}$; se $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ então $\mathbf{a}_{-i}$ denota o vetor $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N)$.

³ $\mathcal{P}(P \cup Q)$ é o conjunto das partes de $P \cup Q$.

2.1.1 O Núcleo do Jogo

Definição 2.4: Um vetor de *payoffs* $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ é factível se

$$\sum_{i \in P} a_i + a_q \leq \mathcal{V}(P \cup Q), \quad a_i \geq 0 \quad \forall i \in P \cup Q.$$

Definição 2.5: Dizemos que $\mathbf{x}$ é compatível com $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ se $\sum_{i \in P} a_i + a_q = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$.

Podemos interpretar a_i como o ganho de $i \in P$ na transação com q e a_q como o ganho total do vendedor com todas as transações que tiver feito com os compradores. O par $((a_q, a_1, \dots, a_N), \mathbf{x})$ é chamado resultado factível.

Uma coalizão S bloqueia um vetor de *payoffs* factível $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ se consegue garantir com seus próprios recursos um *payoff* maior para todos seus membros. Formalmente:

Definição 2.6: Uma coalizão S bloqueia um vetor de *payoffs* factível $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ se $\sum_{i \in S} a_i < \mathcal{V}(S)$.

A interpretação desta condição é que, se não fosse satisfeita, então poderíamos acrescentar uma quantidade positiva ao *payoff* de cada membro de S que obteria assim um *payoff* maior que o original.

Definição 2.7: O núcleo do jogo, $\mathcal{N}$, é o conjunto de vetores de *payoffs* $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ factíveis que não são bloqueados por nenhuma coalizão.

Isso equivale a requerer que:

$$\sum_{i \in S} a_i \geq \mathcal{V}(S) \quad \forall S \in \mathcal{P}(P \cup Q) \quad (2.2)$$

e,

$$\sum_{i \in P \cup Q} a_i = \mathcal{V}(P \cup Q). \quad (2.3)$$

Todos os resultados do núcleo são Pareto Eficientes pois, se for possível melhorar a situação de alguém sem piorar a de outros, então seria possível repartir esse ganho adicional entre todos os outros, o que daria um novo resultado preferido ao anterior por todos os jogadores. Isso implicaria que o resultado anterior seria dominado via $P \cup Q$, o que é uma contradição. Vejamos então a determinação do núcleo e seus resultados.

Proposição 2.1. *Se $\mathbf{x}$ é ótimo, então $\mathbf{x}$ é compatível com qualquer payoff do núcleo.*

Demonstração. Se $\mathbf{x}$ é ótimo, então $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathcal{V}(P \cup Q)$. Por outro lado, para todo $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$ temos $\sum_{i \in P \cup Q} a_i = \mathcal{V}(P \cup Q)$ por (2.3). Então $\sum_{i \in P \cup Q} a_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ é compatível com qualquer vetor de *payoffs* do núcleo. ■

Proposição 2.2. *Se $\mathbf{x}$ é compatível com um payoff do núcleo, então $\mathbf{x}$ é ótimo.*

Demonstração. Seja $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$. Então $\sum_{i \in P \cup Q} a_i = \mathcal{V}(P \cup Q)$. Se $\mathbf{x}$ é compatível com $(a_q, a_1, \dots, a_N)$, então $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i \in P \cup Q} a_i = \mathcal{V}(P \cup Q)$. Logo $\mathbf{x}$ é ótimo. ■

Proposição 2.3. *Se $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$, e $\mathbf{x}$ é ótimo, então $a_j = 0 \forall j \in P$ tal que $x_j = 0$.*

Demonstração. Como $\mathbf{x}$ é ótimo, $x_i = 1$, para todo $i = 1, \dots, m$. Logo se existe j tal que $x_j = 0$, então $j > K$ e $N > K$.⁴ Se $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$, e $\mathbf{x}$ é ótimo, então $\mathbf{x}$ é compatível com $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ e $\sum_{i \in P \cup Q} a_i = \sum_{i=1}^K v_i$. Pela definição do núcleo, $\sum_{i=1}^K a_i + a_q \geq \sum_{i=1}^K v_i$, usando $S = \{q, 1, \dots, K\}$ em (2.2). Logo $\sum_{i=1}^K a_i + a_q = \sum_{i=1}^K v_i$, donde $a_{K+1} + \dots + a_N = 0$. Como $a_i \geq 0$ para todo $i \in P \cup Q$, concluímos que $a_j = 0 \forall j \in P$ tal que $x_j = 0$. ■

Proposição 2.4. *Sejam $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$ e $\mathbf{x}$ um matching ótimo. Seja $(p_1, \dots, p_K)$ tal que $p_i = v_i - a_i \forall i = 1, \dots, m$ e $p_i = 0 \forall i = N+1, \dots, K$ se $K > N$. Então:*

$$a) \ a_q = \sum_{i=1}^K p_i;$$

⁴Lembre que existe uma ordenação dos compradores tal que $v_1 \geq \dots \geq v_N$ e $x_i = 1, i = 1, \dots, m$

b) $0 \leq p_i \leq v_i \forall i = 1, \dots, m$;

c) Se $N > K$, então $p_i \geq v_{K+1} \forall i = 1, \dots, K$.

Chamamos o vetor $(p_1, \dots, p_K)$ de configuração de preços compatível com o resultado $((a_q, a_1, \dots, a_N), \mathbf{x})$.

Demonstração. Seja $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$. Pela Proposição 2.3, se $x_j = 0$, $a_j = 0$ para $\mathbf{x}$ ótimo, logo por (2.3) temos:

$$a_q = \sum_{i=1}^m (v_i - a_i) \quad (2.4)$$

donde, por (2.4), $a_q = \sum_{i=1}^K p_i$, e temos provado a). Como $a_i \geq 0$, então $p_i \leq v_i$. Seja $S^* = \{q, 1, \dots, m\}$ e $i \in S^* \cap P$. Tomando S_{-i}^* em (2.2) temos que $\sum_{l \in S_{-i}^*} a_l \geq \mathcal{V}(S_{-i}^*)$, donde $\sum_{l \in S^*} a_l - a_i \geq \sum_{l \in S_{-i}^* \cap P} v_l$. Então $\sum_{l=1}^m a_l + a_q - a_i \geq \sum_{l=1}^m v_l - v_i$, donde segue que $v_i - a_i \geq \sum_{l=1}^m (v_l - a_l) - a_q$.

Usando a expressão de a_q em (2.4) obtemos que $v_i - a_i \geq 0$, donde $p_i \geq 0$. Logo $0 \leq p_i \leq v_i \forall i = 1, \dots, m$ e temos provado b). Finalmente, se $N > K$, $S^* = \{q, 1, \dots, K\}$. Tome $i \in S^* \cap P$ e $j \in P - S^*$. Seja $S_{ij} = \{j\} \cup S_{-i}^*$. Com S_{ij} em (2.2) temos $\sum_{l \in S_{ij}} a_l \geq \mathcal{V}(S_{ij}) = \sum_{l \in S_{ij} \cap P} v_l$. Como $a_j = 0$ pela Proposição 2.3, e $\sum_{l \in S^*} a_l = \sum_{l=1}^K v_l$, pela factibilidade de $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ temos que:

$$\sum_{l=1}^K v_l - a_i = \sum_{l \in S^*} a_l - a_i = \sum_{l \in S^*} a_l - a_i + a_j = \sum_{l \in S_{ij}} a_l \geq \sum_{l \in S_{ij} \cap P} v_l = \sum_{l=1}^K v_l - v_i + v_j$$

Portanto, $-a_i \geq -v_i + v_j$, donde $p_i = v_i - a_i \geq v_j$. Assim $p_i \geq v_j$. Como j é arbitrário segue que $p_i \geq v_{K+1}$. Logo $p_i \geq v_{K+1} \forall i = 1, \dots, K$, e temos provado c). ■

Proposição 2.5. O núcleo é definido por

$$A \equiv \{(a_q, a_1, \dots, a_N) \mid 0 \leq a_i \leq v_i; a_q = \sum_i (v_i - a_i); i = 1, \dots, N\} \text{ se } N \leq K \quad (2.5)$$

$$B \equiv \{(a_q, a_1, \dots, a_N) | a_j = 0; 0 \leq a_i \leq v_i - v_{K+1};$$

$$a_q = \sum_i (v_i - a_i); i = 1, \dots, K; j = K + 1, \dots, N\} \text{ se } N > K \quad (2.6)$$

Demonstração. Denotemos por P^* o conjunto $\{1, \dots, m\}$ e por P_* o conjunto $\{K + 1, \dots, N\}$ quando $N > K$. Vamos mostrar inicialmente que $A \subseteq \mathcal{N}$ e $B \subseteq \mathcal{N}$. Então seja $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in A$. Temos que $m = N = |P|$. Que este vetor de *payoffs* é factível segue do fato que:

$$\sum_{i \in P} a_i + a_q = \sum_{i \in P} a_i + \sum_{i \in P} (v_i - a_i) = \sum_{i \in P} v_i = \sum_{i \in P^*} v_i = \mathcal{V}(P \cup Q).$$

Para ver que não existem coalizões bloqueantes, seja $S \subseteq P$. Então,

$$\sum_{i \in S} a_i + a_q = \sum_{i \in S} a_i + \sum_{i \in P} (v_i - a_i) = \sum_{i \in S} v_i + \sum_{i \notin S} (v_i - a_i) \geq \sum_{i \in S} v_i = \mathcal{V}(S \cup Q)$$

onde na desigualdade usamos que $v_i - a_i \geq 0$ para todo $i \in P$. Logo $\sum_{i \in S \cup Q} a_i \geq \mathcal{V}(S \cup Q)$. É claro que $\sum_{i \in S} a_i \geq 0 = \mathcal{V}(S)$ e $a_q \geq 0 = \mathcal{V}(Q)$. Portanto $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$ e $A \subseteq \mathcal{N}$.

Seja agora $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in B$. Então $m = K < N = |P|$. A factibilidade segue de:

$$\sum_{i \in P} a_i + a_q = \sum_{i \in P} a_i + \sum_{i \in P^*} (v_i - a_i) = \sum_{i \in P^*} a_i + \sum_{i \in P_*} a_i + \sum_{i \in P^*} (v_i - a_i) =$$

$$\sum_{i \in P^*} v_i + \sum_{i \in P_*} a_i = \sum_{i \in P^*} v_i = \mathcal{V}(P \cup Q),$$

onde na última igualdade usamos que $a_i = 0 \forall i \in P_*$.

Como antes, para ver que não existem coalizões bloqueantes basta mostrar que $\sum_{i \in S \cup Q} a_i \geq$

$\mathcal{V}(S \cup Q)$, onde $S \subseteq P$. Então, seja $S' \subseteq S$, $|S'| \leq m$. Então,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in S} a_i + a_q &= \sum_{i \in S} a_i + \sum_{i \in P^*} (v_i - a_i) \\
 &\geq \sum_{i \in S'} a_i + \sum_{i \in P^*} (v_i - a_i) \\
 &= \sum_{i \in S' \cap P^*} a_i + \sum_{i \in P^*} (v_i - a_i) \\
 &= \sum_{i \in S' \cap P^*} a_i + \sum_{i \in S' \cap P^*} (v_i - a_i) + \sum_{i \in P^* - S'} (v_i - a_i) \\
 &= \sum_{i \in S' \cap P^*} v_i + \sum_{i \in P^* - S'} (v_i - a_i), \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos que $a_i = 0 \forall i \in P_*$. Observe que $(v_i - a_i) \geq v_{K+1} \forall i \in P^*$, por (2.6). Também, $v_{K+1} \geq v_j \forall j \in (S' - P^*)$. Como $|S'| \leq |P^*|$, segue que $|P^* - S'| \geq |S' - P^*|$. Então existe uma aplicação biunívoca de $(S' - P^*)$ em $(P^* - S')$ que a cada $j \in S' - P^*$ associa algum $i \in P^* - S'$ e $(v_i - a_i) \geq v_j$. Desta forma $\sum_{i \in P^* - S'} (v_i - a_i) \geq \sum_{i \in S' - P^*} v_i$. Levando esta desigualdade em (2.7) obtemos:

$$\sum_{i \in S} a_i + a_q \geq \sum_{i \in S' \cap P^*} v_i + \sum_{i \in P^* - S'} (v_i - a_i) = \sum_{i \in S'} v_i$$

Assim, $\sum_{i \in S} a_i + a_q \geq \sum_{i \in S'} v_i$, $\forall S' \subseteq S$, com $|S'| \leq m$, donde segue que $\sum_{i \in S} a_i + a_q \geq \max_{S'} \sum_{i \in S'} v_i = \mathcal{V}(S \cup Q)$, como queríamos demonstrar.

Resta ver que $\mathcal{N} \subseteq A$ quando $N \leq K$ e $\mathcal{N} \subseteq B$ caso contrário. Então seja $\mathbf{a} = (a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$. Que $\mathbf{a} \in A$ quando $N \leq K$ segue diretamente da Proposição 2.4-a). Então suponha $N > K$. Observe que o *matching* que aloca um objeto para cada comprador de P^* é compatível com $\mathbf{a}$ e é portanto ótimo, pela Proposição 2.2. Logo $a_j = 0 \forall j \in P_*$, pela Proposição 2.3. O resultado desejável segue então da aplicação direta da Proposição 2.4-a), b), c), e a demonstração está completa. ■

Definição 2.8: O vetor de *payoffs* do núcleo $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ é ótimo para o vendedor se

$a_q \geq a'_q \forall (a'_q, a'_1, \dots, a'_N) \in \mathcal{N}$. Analogamente, o vetor de *payoffs* do núcleo $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ é ótimo para os compradores se $a_i \geq a'_i \forall (a'_q, a'_1, \dots, a'_N) \in \mathcal{N}$ para $i = 1, \dots, N$.

A existência desses vetores de *payoffs* é dada nas Proposições 2.6 e 2.7 a seguir. Denotaremos por $(a_q^*, a_{*1}, \dots, a_{*N})$ o vetor de *payoffs* ótimo para o vendedor e por $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ o vetor de *payoffs* ótimo para os compradores.

Proposição 2.6. *O vetor de payoffs do núcleo $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ é dado por:*

$$\begin{cases} a_{*q} = Kv_{K+1}; a_i^* = v_i - v_{K+1}, i = 1, \dots, K; a_j^* = 0, j = K+1, \dots, N; & \text{se } N > K \\ a_{*q} = 0; a_i^* = v_i, i = 1, \dots, N & \text{se } N \leq K \end{cases}$$

Demonstração. Caso $N > K$, seja $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ tal que $a_{*q}^* = Kv_{K+1}$; $a_i^* = v_i - v_{K+1}$ para $i = 1, \dots, K$ e $a_j^* = 0$ para $j = K+1, \dots, N$. É imediato que $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*) \in \mathcal{N}$, pois satisfaz (2.6). Por esta mesma condição, se um vetor qualquer $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$, então $a_i \leq v_i - v_{K+1} = a_i^*$ para $i = 1, \dots, K$ e $a_j = 0 = a_j^*$ para $j = K+1, \dots, N$, logo $a_i^* \geq a_i \forall (a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$ para $i = 1, \dots, N$, donde $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ é ótimo para os compradores.

Caso $N \leq K$, seja $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ tal que $a_{*q} = 0$ e $a_i^* = v_i$ para $i = 1, \dots, N$. É imediato que $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*) \in \mathcal{N}$ pois satisfaz (2.5). Por esta condição, se um vetor qualquer $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$, então $a_i \leq v_i = a_i^*$ para $i = 1, \dots, N$, logo $a_i^* \geq a_i \forall (a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$ para $i = 1, \dots, N$, donde $(a_{*q}, a_1^*, \dots, a_N^*)$ é ótimo para os compradores. ■

Proposição 2.7. *O vetor de payoffs do núcleo $(a_q^*, a_{*1}, \dots, a_{*N})$ é dado por $a_q^* = \sum_{i=1}^m v_i$ e $a_{*i} = 0$ para $i = 1, \dots, N$.*

Demonstração. Seja $(a_q^*, a_{*1}, \dots, a_{*N})$ tal que $a_q^* = \sum_{i=1}^m v_i$ e $a_{*i} = 0$ para $i = 1, \dots, N$. É imediato pela Proposição 2.5 que $(a_q^*, a_{*1}, \dots, a_{*N}) \in \mathcal{N}$. Se um vetor de *payoffs* qualquer $(a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$, então $a_q = \sum_{i=1}^m (v_i - a_i)$ e $a_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, N$, de forma

que $a_q^* \geq a_q$ para qualquer $(a_q, a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}$, donde $(a_q^*, a_{*1}, \dots, a_{*N})$ é ótimo para o vendedor. ■

Das Proposições 2.5 e 2.6 segue que o vetor de *payoffs* do núcleo ótimo para os compradores é o “pior” vetor de *payoffs* do núcleo do ponto de vista do vendedor. Simultaneamente, das Proposições 2.5 e 2.7 segue que o vetor de *payoffs* do núcleo ótimo para o vendedor é o “pior” vetor de *payoffs* do núcleo do ponto de vista dos compradores. Formalmente,

Corolário 2.1. *Temos que $a_{*q} \leq a_q$ e $a_{*i} \leq a_i \forall (a_q, a_1, \dots, a_N) \in \mathcal{N}$.*

2.2 O Preço Como um Mecanismo de Alocação num Jogo de Mercado

Apesar de todas as alocações no Núcleo serem Pareto eficientes, nem sempre elas são livres de inveja. No caso de dois compradores adquirirem uma unidade do objeto por preços distintos, então aquele que pagou mais terá inveja, isto é, gostaria de ter comprado o objeto que o outro comprou, no sentido de pagar o mesmo preço. Em algumas situações é razoável esperar que somente alocações do núcleo, livres de inveja, ocorrerão. Estas são situações em que o mecanismo de alocação é dado pelos preços dos objetos, de forma que objetos idênticos são vendidos ao mesmo preço. Os compradores demandam o(s) objeto(s) que maximiza(m) seu *payoff*, assumindo que este *payoff* é não negativo.

O equilíbrio competitivo é o conceito solução que captura a idéia de alocações justas, ou seja, Pareto eficientes e livres de inveja.

Definição 2.9: O equilíbrio competitivo é representado por um vetor de preços factível $(p_1, \dots, p_K)$ e um *matching* factível x tal que:

- (i) Se x aloca o objeto q_j para i , então i não está pagando mais do que está disposto

a pagar e q_j é o objeto preferido entre todos os que pode pagar, isto é, $v_i \geq p_j$ e $v_i - p_j \geq v_i - p_l, \forall l = 1, \dots, K$.

(ii) Se x não aloca nenhum objeto para i , então nenhum objeto poderá dar a i um ganho positivo, i.e., $v_i \leq p_j, \forall j = 1, \dots, K$.

(iii) Vale a Lei de Walras: o valor da demanda agregada é igual ao da oferta agregada.

Daí, se um objeto é não vendido ele terá preço 0.

As condições (i) e (ii) da Definição 2.9 garantem que $(p_1, \dots, p_K)$ seja um preço competitivo.

Da Definição 2.9 (i) concluímos que $p_j \leq p_l, \forall l = 1, \dots, K$, logo **todos os objetos alocados por x tem preços iguais**. Se existir algum objeto não alocado, seu preço deve ser 0 pela Definição 2.9 (iii), e por ser o menor preço, será também o preço de qualquer objeto alocado. Em qualquer caso, portanto, todas as componentes de $(p_1, \dots, p_K)$ são iguais a um mesmo número p . **Por simplicidade denotaremos por (p, x) um equilíbrio competitivo onde p é o preço de um objeto qualquer**. O *matching* x é dito ser *compatível* com o preço de equilíbrio competitivo p .

Observação 2.1: É claro que, dado $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_N$, então m objetos serão alocados para os compradores $1, \dots, m$. De fato, se j recebe um objeto e i não recebe nenhum, então da Definição 2.9 (i) e (ii) segue que $v_j \geq p \geq v_i$ e portanto os compradores que recebem objetos são os que têm as m maiores avaliações. Isso implica que **o *matching* compatível com um preço de equilíbrio competitivo é ótimo**, o que garante eficiência de Pareto.

Do exposto acima podemos obter os seguintes resultados.

Proposição 2.8. *Seja (p, x) um equilíbrio competitivo. Se $N < K$, então $p = 0$.*

Demonstração. Se $N < K$, então haverá algum objeto não vendido e pela Definição 2.9-(iii) o preço desse objeto é 0. Como todos os preços são iguais, o resultado segue. ■

Proposição 2.9. *Seja $N > K$. Então o conjunto dos equilíbrios competitivos é dado por $\mathcal{A} = \{(p, \mathbf{x}); v_K \geq p \geq v_{K+1} \text{ e } \mathbf{x} \text{ é um matching ótimo}\}$.*

Demonstração. Suponha que $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo. Então, $\mathbf{x}$ é ótimo pela Observação 2.1. Por esta mesma observação, se $N > K$, então os compradores $K + 1, \dots, N$ não receberão objetos. Pela Definição 2.9 (ii) temos que $v_j \leq p \forall j = K + 1, \dots, N$. Por outro lado, os compradores $1, \dots, K$ recebem um objeto cada, pela Observação 2.1, donde pela Definição 2.9 (i) temos que $v_j \geq p \forall j = 1, \dots, K$. Como $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_N$, $v_K \geq p \geq v_{K+1}$. Portanto $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$.

Suponha agora que $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo. Como $\mathbf{x}$ é ótimo, $x_i = 1 \forall i = 1, \dots, K$. Como $v_1 \geq \dots \geq v_N$ e $p \in [v_{K+1}, v_K]$, nenhum comprador que recebe um objeto está pagando mais do que está disposto por ele e, como todos os objetos têm o mesmo preço, cada comprador recebe o preferido entre os que pode pagar, logo vale a Definição 2.9-(i). Por outro lado, $x_i = 0 \forall i = K + 1, \dots, N$ e como $v_{K+1} \leq p \leq v_K$, todo i que não recebe um objeto tem avaliação $v_i \leq p$. Logo vale a Definição 2.9-(ii). Finalmente, o valor da oferta agregada é $K \cdot p$, assim como o da demanda agregada, de forma que vale a Definição 2.9-(iii). Portanto $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo. ■

Proposição 2.10. *Seja $N = K$. Então o conjunto dos equilíbrios competitivos é dado por $\mathcal{B} = \{(p, \mathbf{x}); v_K \geq p \geq 0 \text{ e } \mathbf{x} \text{ é um matching ótimo}\}$.*

Demonstração. Suponha que $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo. Então, $\mathbf{x}$ é ótimo pela Observação 2.1. Por esta mesma observação, se $N = K$, então todos os objetos são vendidos e todos os compradores recebem um objeto cada. Então $0 \leq p \leq v_j \forall j = 1, \dots, N$, pela Definição 2.9 (i), donde segue que $0 \leq p \leq v_K$ (pois $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_N$). Logo $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{B}$.

Suponha agora que $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{B}$. Como $\mathbf{x}$ é ótimo, todos os compradores recebem um objeto e como $p \leq v_K$, nenhum paga mais do que sua avaliação pelo objeto que recebe.

Como todos os objetos têm o mesmo preço, cada comprador está recebendo o objeto preferido entre todos os que pode comprar, logo vale a Definição 2.9-(i). O valor da oferta agregada é $K \cdot p$, assim como o da demanda, logo vale a Definição 2.9-(iii). Como não há compradores que não recebem objetos, podemos concluir que $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo. ■

Proposição 2.11. *Todo matching ótimo é compatível com qualquer preço de equilíbrio competitivo.*

Demonstração. Se $\mathbf{x}$ é ótimo, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'$, $\forall \mathbf{x}'$ factível, donde os m compradores com maiores avaliações receberão um objeto cada. Então $x_i = 1$, $i = 1, \dots, m$ e $x_i = 0$ caso contrário. Agora, é uma questão de verificação de que, tomando $p = 0$ se $N < K$, $p \in [0, v_K]$ se $N = K$ ou $p \in [v_{K+1}, v_K]$ se $N > K$, então $(p, \mathbf{x})$ satisfaz a Definição 2.9 (i), (ii) e (iii). Logo $\mathbf{x}$ é compatível com qualquer preço de equilíbrio competitivo. ■

Também podemos relacionar o equilíbrio competitivo com o núcleo.

Definição 2.10: $((a_q, a_1, \dots, a_N), \mathbf{x})$ é o resultado correspondente ao equilíbrio competitivo $(p, \mathbf{x})$ se:

$$\begin{cases} a_q = p \cdot m \\ a_i = v_i - p & \text{se } x_i = 1 \\ a_i = 0 & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Chamamos $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ de *payoff* de equilíbrio competitivo.

Proposição 2.12. *Se $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo, então o resultado de equilíbrio competitivo $((a_q, a_1, \dots, a_N), \mathbf{x})$ é um resultado do núcleo do mercado cooperativo onde $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$ é a configuração de preços compatível.*

Demonstração. Se $(p, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo, então $\mathbf{x}$ é ótimo e p satisfaz $0 \leq p \leq v_i$, $\forall i = 1, \dots, m$ e se $K < N$, $p \geq v_{K+1}$. Cada comprador i que recebe um objeto tem um ganho de $a_i = v_i - p$, ($i = 1, \dots, m$) e cada comprador que não recebe um objeto,

caso $K < N$, tem *payoff* 0. O vendedor tem um ganho de $a_q = m \cdot p = \sum_{i=1}^m p$. Com isso, $(a_q, a_1, \dots, a_N)$ satisfaz as condições (2.5) se $N \leq K$ e (2.6) se $N > K$ e portanto pertence a $\mathcal{N}$. ■

Proposição 2.13. *Se $(p_{\min}, \mathbf{x})$ o equilíbrio competitivo de preço mínimo, então o correspondente resultado do núcleo é o ótimo para os compradores. Conseqüentemente, $p_{\min} = v_{K+1}$ se $N > K$ e $p_{\min} = 0$ se $N \leq K$.*

Demonstração. Se $(p_{\min}, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo e $p_{\min}$ é o preço mínimo de equilíbrio competitivo, então $p_{\min} = v_{K+1}$ se $N > K$ pela Proposição 2.9 e $p_{\min} = 0$ se $N \leq K$ pelas Proposições 2.8 e 2.10. Se $N > K$, cada comprador $i = 1, \dots, K$ terá *payoff* $a_i = v_i - v_{K+1}$ e cada comprador $i = K + 1, \dots, N$ terá *payoff* zero e o vendedor terá *payoff* $a_q = K \cdot v_{K+1}$. Se $N \leq K$, cada comprador $i \in P$ terá *payoff* $a_i = v_i$ e o vendedor terá *payoff* zero. Ambos os casos representam o resultado ótimo para os compradores pela Proposição 2.6. ■

Proposição 2.14. *Se $(p_{\max}, \mathbf{x})$ é o equilíbrio competitivo de preço máximo, então o correspondente resultado do núcleo pode não ser o ótimo para o vendedor.*

Demonstração. Suponha que $K = 2$, $N = 3$ e $\mathbf{v} = (8, 7, 6)$. O *matching* ótimo para este mercado é $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$. Pelas Proposições 2.4, 2.5 e 2.7 temos que o núcleo será dado por $\mathcal{N} = \{(a_q, a_1, a_2, a_3) \mid a_3 = 0, 0 \leq a_1 \leq 2, 0 \leq a_2 \leq 1; a_q = 15 - a_1 - a_2\}$, o vetor de *payoffs* ótimo para o vendedor por $(15, 0, 0, 0)$ e as configurações de preços compatíveis com os *payoffs* do núcleo por $\mathcal{T} = \{(p_1, p_2) \mid 6 \leq p_1 \leq 8, 6 \leq p_2 \leq 7\}$. Pelas Proposição 2.9 e Definição 2.10 temos que o conjunto de preços de equilíbrio competitivo será dado por $\mathcal{U} = \{(p_1, p_2) \mid p_1 = p_2 = p, 6 \leq p \leq 7\}$ e o conjunto de *payoffs* de equilíbrio competitivo por $\mathcal{E} = \{(a_q, a_1, a_2, a_3) \mid a_q = 2p, a_1 = 8 - p, a_2 = 7 - p, a_3 = 0; 6 \leq p \leq 7\} = \{(a_q, a_1, a_2, a_3) \mid 1 \leq a_1 \leq 2, 0 \leq a_2 \leq 1, a_3 = 0, a_q = 15 - a_1 - a_2\}$. Logo, o *payoff* de equilíbrio competitivo dado pelo preço máximo é $(14, 1, 0, 0)$ distinto do ótimo para o vendedor no núcleo. ■

Figura 2.2: Em (a) a representação gráfica dos conjuntos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$ e em (b) a representação gráfica de $\mathcal{N}_P$ e $\mathcal{E}_P$ do exemplo na demonstração da Proposição 2.14.

Existe um caso particular em que, se $(p_{max}, \mathbf{x})$ for um equilíbrio competitivo, então o resultado do núcleo correspondente é o ótimo para o vendedor. Isto ocorre quando $\min\{K, N\} = N$ e $v_1 = v_2 = \dots = v_K$. Desta forma, cada comprador que recebe um objeto paga sua avaliação ficando com *payoff* zero e o vendedor recebe a soma das avaliações dos compradores com as K maiores avaliações resultando no vetor de *payoffs* da Proposição 2.7.

Observe que no exemplo apresentado na demonstração da Proposição 2.14, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N}$. A conexão entre o núcleo e o conjunto dos preços de equilíbrio competitivo pode ser vista na Figura 2.2, onde $\mathcal{N}_P \equiv \{(a_1, a_2, a_3) | (a_q, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{N} \text{ para algum } a_q \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_P \equiv \{(a_1, a_2, a_3) | (a_q, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{E} \text{ para algum } a_q \in \mathbb{R}\}$.

A Proposição 2.12 implica que o conjunto dos *payoffs* de equilíbrio competitivo é um subconjunto do núcleo. Também, o conjunto de preços de equilíbrio competitivo é subconjunto do conjunto das configurações de preços compatíveis com os resultados do núcleo. Da Proposição 2.14 podemos concluir que o conjunto dos *payoffs* de equilíbrio competitivo pode ser menor que o núcleo. O *payoff* do núcleo ótimo para os compradores coincide com o de equilíbrio competitivo ótimo para os compradores pela Proposição 2.13.

Capítulo 3

A Troca Como um Jogo Não Cooperativo de Informação Completa

No capítulo anterior modelamos a troca como um jogo cooperativo e definimos o núcleo e o equilíbrio competitivo. Ressaltamos quatro resultados em particular: os ótimos para os compradores e para o vendedor no núcleo e os de preços mínimo e máximo de equilíbrio competitivo (Proposições 2.6, 2.7, 2.13 e 2.14). Mostramos que o resultado do núcleo ótimo para os compradores coincide com o resultado de preço mínimo de equilíbrio competitivo (Proposição 2.13). Já resultado do núcleo ótimo para o vendedor em geral não coincide com o resultado de preço máximo de equilíbrio competitivo (Proposição 2.14).

O problema agora é como obter esses resultados através de um mecanismo centralizado. Apresentaremos neste capítulo três mecanismos centralizados que produzem os resultados desejados. Veremos como os jogadores se comportam diante dos mecanismos no contexto de informação completa sobre os verdadeiros preços de reserva dos compradores. De modo geral, conhecendo o preço de reserva do vendedor, os compradores declaram suas avaliações (lances) sobre os objetos. Cada mecanismo então utilizará esses dados para determinar a alocação dos objetos para os compradores de acordo com uma regra de

alocação (*matching*) e o preço de cada objeto vendido, de acordo com uma regra de preço, estabelecidas *a priori*. Analisaremos o jogo estratégico induzido por cada um dos mecanismos que se inicia quando os compradores são chamados a jogar.

As estratégias disponíveis para cada comprador são os lances, que podem ser distintos de suas verdadeiras avaliações. O conceito solução que aplicaremos é o de equilíbrio de Nash, que traz uma noção de não arrependimento *ex-post*, ou seja, ao final do jogo, ninguém se arrepende da estratégia que escolheu depois de tomar conhecimento das ações dos outros jogadores. Veremos que existirá uma multiplicidade de equilíbrios que satisfazem essa noção, por isso procuraremos refinar esses equilíbrios determinando aqueles que não envolvem estratégias dominadas, ou seja, estratégias que resultam num ganho pior ou igual a outra quando comparadas variando todas as estratégias possíveis dos outros ganhadores.

A diferença de cada leilão que analisaremos está exclusivamente na regra de preço. Todos eles utilizarão a mesma regra de alocação, que chamaremos de regra de alocação padrão. Esta regra escolherá um *matching* ótimo a partir dos lances submetidos pelos compradores, ou seja, alocará os objetos aos compradores que deram os maiores lances e terá uma regra de desempate no caso de haver mais de um *matching* ótimo sob esta perspectiva. Leilões que utilizam a regra de alocação padrão são leilões padrões.

Começaremos a análise pelo Leilão de Preço Uniforme Mínimo, que determina que os objetos sejam vendidos pelo maior lance perdedor, ou seja, o maior lance dos compradores que não recebem um objeto. Caso os compradores lancem as verdadeiras avaliações, o resultado é o ótimo para os compradores no núcleo, ou o equilíbrio competitivo de preço mínimo. Este mecanismo é bastante valorizado na literatura porque faz com que lançar a verdadeira avaliação seja uma estratégia dominante para todos os compradores, ou seja, para cada jogador, lançar a verdadeira avaliação lhe proporciona um ganho maior ou igual ao que obteria lançando outro valor, independente das estratégias dos outros compradores. Com isso, existirá um equilíbrio onde todos os compradores lançam suas verdadeiras

avaliações. A determinação de todos os equilíbrios nos mostra, no entanto, alguns resultados pouco intuitivos para este mecanismo de leilão. Veremos que os equilíbrios de Nash são tais que o maior lance perdedor será menor que a menor avaliação dos ganhadores e que o menor lance ganhador será maior que a maior avaliação dos perdedores. Estas condições, necessárias e suficientes, podem levar a equilíbrios de Nash que resultam em alocações ineficientes dos objetos, ou seja, os compradores que recebem os objetos no equilíbrio podem não ser aqueles que possuem as verdadeiras avaliações. Com isso não é possível estabelecer uma relação direta entre os resultados de equilíbrio de Nash e o núcleo ou o equilíbrio competitivo, o que será diferente para os outros dois mecanismos.

Passaremos então para o Leilão Discriminatório, que faz com que os compradores que recebem um objeto paguem seus lances. Teríamos que o resultado deste leilão seria o ótimo para o vendedor no núcleo caso os lances correspondessem às verdadeiras avaliações. Veremos que, em equilíbrio, todos os lances ganhadores serão iguais entre si e iguais ao maior lance perdedor. Esses lances estarão entre a maior avaliação dos perdedores e a menor avaliação dos ganhadores. Veremos que a alocação dos objetos será eficiente. Poderemos então concluir que todos os resultados de equilíbrio de Nash correspondem a algum resultado do equilíbrio competitivo.

Já no Leilão de Preço Uniforme Máximo, os compradores que recebem os objetos pagam o menor lance ganhador. No caso dos lances corresponderem às verdadeiras avaliações, o resultado do leilão seria o equilíbrio competitivo de preço máximo. Neste caso, teremos o equilíbrio caracterizado pelo menor lance ganhador sendo igual ao maior lance perdedor e estará entre a maior avaliação dos perdedores e a menor avaliação dos ganhadores. Assim como no caso do Leilão Discriminatório, os objetos serão alocados eficientemente em equilíbrio e poderemos estabelecer que cada equilíbrio de Nash corresponderá a um resultado de equilíbrio competitivo.

Uma característica muito importante de todos estes mecanismos é o resultado de refina-

mento de equilíbrios. Tanto no Leilão Discriminatório quanto no Leilão de Preço Uniforme Máximo, lançar acima da própria avaliação é uma estratégia dominada. Já no Leilão de Preço Uniforme Mínimo, declarar a verdadeira avaliação é estratégia dominante. Ao eliminarmos os equilíbrios que envolvem estratégias dominadas, os restantes nos levam a resultados correspondentes ao ótimo para os compradores no núcleo do jogo cooperativo.

Formalmente, os jogadores são os compradores; uma estratégia b_i para o jogador i é qualquer número real não negativo. Dado um perfil de estratégias $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ (perfil de lances), a função resultado dada pelas regras de preço e alocação, determina um *payoff* para cada jogador. Se por exemplo um objeto é alocado para o comprador i pelo preço p então o *payoff* de i será $u_i = v_i - p$.

Para as próximas seções necessitamos de mais algumas definições.

Definição 3.1: Para cada mecanismo de leilão, uma estratégia para um licitante i é um lance b_i não negativo.

Definição 3.2: Uma estratégia b_i **domina fracamente** uma outra b'_i para o jogador i , se para qualquer configuração de lances para os outros jogadores, $\mathbf{b}_{-i}$, o *payoff* de i quando lança b_i é maior ou igual ao seu *payoff* quando lança b'_i com desigualdade estrita para pelo menos uma configuração de lances $\mathbf{b}_{-i}$ dos outros jogadores. Isto é,

$$u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) \geq u_i(b'_i, \mathbf{b}_{-i}) \quad \forall \mathbf{b}_{-i}$$

com desigualdade estrita para algum $\mathbf{b}_{-i}$. Se a desigualdade for estrita para todo $\mathbf{b}_{-i}$, então b_i **domina estritamente** b'_i .

Definição 3.3: Uma estratégia b_i é (fracamente) **dominante** se domina fracamente toda estratégia $b'_i \neq b_i$. Similarmente, uma estratégia b_i é **estritamente dominante** se domina estritamente toda estratégia $b'_i \neq b_i$.

Definição 3.4: Um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$ tal que para todo licitante i , seu *payoff* $u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i})$ é maior ou igual ao *payoff* que obteria lançando qualquer outro lance b'_i , ou seja:

$$u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) \geq u_i(b'_i, \mathbf{b}_{-i}) \quad \forall b'_i, \quad \forall i$$

3.1 Uma Regra de Alocação Padrão

Suponha que cada $i \in P$ lance b_i . O mercado correspondente é então dado por $\mathcal{M}^b \equiv (P, Q, \mathbf{b})$ com $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$.

Figura 3.1: Oferta e demanda do mercado com os lances dos compradores. O K -ésimo maior lance é b^* e o $K+1$ -ésimo maior lance é b_+ . Os compradores que recebem os objetos por darem os maiores lances formam o conjunto B^* e os demais, o conjunto B_+ .

Notação: Denominaremos por b^* o K -ésimo maior lance e por b_* o $(K + 1)$ -ésimo maior lance dos compradores.

A regra de alocação utilizada por nossos mecanismos aloca os K objetos para os licitantes com os K mais altos lances. Esta regra é conhecida na literatura como *regra de alocação padrão*. O *matching* resultante é por conseguinte ótimo para $\mathcal{M}^b$, e portanto suporta qualquer resultado do núcleo, em particular qualquer equilíbrio competitivo.

Quando houver mais de um *matching* ótimo para $\mathcal{M}^b$, $b^* = b_*$, a regra de alocação padrão utilizada aqui opera em duas etapas. Primeiro, encontra todos os *matchings* ótimos. Em seguida, seleciona os *matchings* ótimos que maximizam a soma das verdadeiras avaliações, o que resulta num conjunto $\mathcal{X}^* = \{x \text{ é ótimo} \mid x \cdot v \geq x' \cdot v \ \forall x' \text{ ótimo}\}$. Se $\mathcal{X}^*$ não for unitário, seleciona-se equiprovavelmente um de seus elementos.

Todo mecanismo de venda que utiliza a regra de alocação padrão é um **leilão padrão**. Com isso podemos dar outras duas definições:

Definição 3.5: Uma alocação de equilíbrio de Nash é o *matching* ótimo para $\mathcal{M}^b$ escolhido pelo mecanismo de alocação padrão quando $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash.

Definição 3.6: O vetor de *payoffs* de equilíbrio de Nash é o vetor $(a_q; a_1, \dots, a_N)$, onde $a_i = u_i(b)$ e $a_q = \sum_{i=1}^N x_i(v_i - a_i)$, com b equilíbrio de Nash e x a correspondente alocação de equilíbrio.

3.2 Leilão de Preço Uniforme Mínimo

No primeiro mecanismo de nossa análise, o vendedor declara uma quantidade K de objetos à venda e os compradores submetem seus lances em envelopes lacrados. O mecanismo aplica então a regra de alocação padrão e determina que os compradores que recebem um

objeto paguem o maior lance perdedor, isto é, b_* se $K < N$ e 0 caso contrário. Denominaremos este mecanismo de **Leilão de Preço Uniforme Mínimo**. Para o mercado $\mathcal{M}^b$, temos que o maior lance perdedor (se $N > K$) ou zero (se $N \leq K$) determinam o preço mínimo de equilíbrio competitivo (Proposições 2.8 a 2.10) e, como a regra de alocação padrão determina um *matching* ótimo segundo os lances, então o Leilão de Preço Uniforme Mínimo produz o equilíbrio competitivo de preço mínimo e equivalentemente o resultado do núcleo ótimo para os compradores no mercado $\mathcal{M}^b$ (Proposição 2.13).

Veremos agora o comportamento estratégico dos compradores no subjogo definido após o anúncio da quantidade de objetos vendidos. Quando $K \geq N$, todos os compradores recebem um objeto cada e não pagam nada por isso, independentemente de seus lances, por isso não faz sentido analisar este caso. Logo trataremos somente do caso em que $K < N$.

Proposição 3.1. *No Leilão de Preço Uniforme Mínimo, é estratégia dominante para cada comprador declarar a verdadeira avaliação sobre o objeto.*

Demonstração. Suponha que um comprador i com avaliação v lance um outro valor b e que o K -ésimo maior lance dos outros jogadores seja c_K . Se $b > v$, então ou $b \geq c_K \geq v$, donde i recebe o objeto mas paga $c_K \geq v$, resultando-lhe um *payoff* negativo ou nulo, ou $c_K \geq b \geq v$, situação em que i tem *payoff* nulo, que também seria obtido lançando v , ou ainda $b \geq v \geq c_K$, o que leva i a ganhar o objeto sem alterar o quanto pagaria por ele, e conseqüentemente sem alterar seu *payoff*, caso declarasse v . Assim, lançar $b > v$ resulta sempre em um *payoff* menor ou igual a lançar v .

Similarmente, se i lançar $b < v$, ou $c_K \geq v > b$, ou $v > b \geq c_K$, situações em que seu *payoff* não se altera quer lance b ou v , ou $v > c_K > b$, donde i deixa de ganhar o objeto e tem *payoff* nulo quando poderia tê-lo positivo lançando v . ■

Corolário 3.1. *O perfil de estratégias em que todos os compradores declaram suas verdadeiras avaliações é um equilíbrio de Nash no Leilão de Preço Uniforme Mínimo.*

Precisamos agora determinar todos os equilíbrios de Nash. Para tanto analisaremos cada resultado a partir do conjunto de compradores que recebem os objetos.

Notação: Para cada perfil de lances $(b_1, \dots, b_N)$, denominaremos B^* o conjunto dos K compradores que recebem os objetos e por B_* o dos $N - K$ compradores que não recebem os objetos.

Proposição 3.2. *Seja $(b_1, \dots, b_N)$ um equilíbrio de Nash no Leilão de Preço Uniforme Mínimo. Então $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$.*

Demonstração. Seja um equilíbrio de Nash $(b_1, \dots, b_N)$ no Leilão de Preço Uniforme Mínimo, o que gera um conjunto B^* e outro B_* . Suponha que $b_* > \min_{i \in B^*} v_i$. Seja $v_j = \min_{i \in B^*} v_i$. Temos que $j \in B^*$ lança b_j , recebe um objeto e paga b_* , de forma que tem *payoff* $v_j - b_* < 0$, quando poderia ter *payoff* 0 lançando sua verdadeira avaliação. Logo lançar b_j não é ótima resposta de j para os lances dos outros compradores, o que é uma contradição. Portanto, $b_* \leq v_j$.

Da mesma forma, suponha $b^* < \max_{i \in B_*} v_i$. Seja $j \in B_*$ tal que $v_j = \max_{i \in B_*} v_i$. Então $v_j > b^*$ e j não recebe nenhum objeto. Este comprador j tem *payoff* 0 quando poderia lançar b'_j com $b'_j > b^*$, e receber um objeto pagando b^* , o que lhe resultaria num *payoff* $v_j - b^* > 0$. Logo lançar b_j não é ótima resposta de j para os lances dos outros compradores, contradição. Portanto, $b^* \geq v_j$. ■

Proposição 3.3. *Seja um perfil de estratégias $(b_1, \dots, b_N)$ no Leilão de Preço Uniforme Mínimo. Se $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$, então $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. Seja um perfil de estratégias $(b_1, \dots, b_N)$ no Leilão de Preço Uniforme Mínimo de forma que $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$. Tome um comprador $j \in B_*$. Então $v_j \leq b^*$ e lança $b_j \leq b_* \leq b^*$. Se j lançasse $b'_j < b_j$, não alteraria seu *payoff* pois continuaria sem receber um objeto. Se lançasse $b''_j > b_j$, só alteraria seu *payoff* se passasse a receber um objeto. Neste caso pagaria b^* pelo objeto e teria *payoff* $v_j - b^* \leq 0$. Portanto b_j é ótima resposta para os lances dos outros compradores.

Agora tome um comprador $j \in B^*$. Então $v_j \geq b^* \geq b_*$ e j recebe um objeto e paga b_* , o que lhe dá um *payoff* $v_j - b_* \geq 0$. Temos que $b_j \geq b^* \geq b_*$. Portanto, se j lançasse $b'_j > b_j$, continuaria a receber o objeto sem alterar o quanto paga por ele. Se lançasse $b''_j < b_j$, só alteraria seu *payoff* se deixasse de receber o objeto, o que lhe resultaria em *payoff* 0. Logo b_j é resposta ótima para o lance dos outros compradores. ■

As Proposições 3.2 e 3.3 definem todos os equilíbrios de Nash no Leilão de Preço Uniforme Mínimo. Uma infinidade de equilíbrios de Nash neste mecanismo não encontram nenhuma correspondência com os resultados do núcleo do jogo cooperativo. Para tanto, observe o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1: Considere o Leilão de Preço Uniforme Mínimo com $N = 4$, $K = 2$ e $\mathbf{v} = (8, 7, 6, 5)$. Observe alguns dos equilíbrios de Nash com os respectivos *payoffs* de equilíbrio e alocação dos objetos.

Perfil de estratégias de equilíbrio de Nash	Vetor de <i>payoffs</i> de equilíbrio de Nash $(a_0; a_1, a_2, a_3; a_4)$	Alocação dos objetos (<i>matching</i>)
(8,7,6,5)	(12;2,1,0,0)	(1,1,0,0)
(7,7,1,1)	(2;7,6,0,0)	(1,1,0,0)
(8,6,7,5)	(12;2,0,0,0)	(1,0,1,0)
(1,1,9,9)	(2;0,0,5,4)	(0,0,1,1)

Repare que no último exemplo os objetos são alocados para os compradores com as menores avaliações e somente o vetor de *payoffs* (12; 2, 1, 0, 0) está no núcleo. Os preços dos objetos em cada um dos exemplos são dados respectivamente por 6, 1, 6 e 1. □

Apesar de haver diversos equilíbrios de Nash, cujos *payoffs* não estão no núcleo do jogo cooperativo, existe apenas um equilíbrio em que os compradores não jogam estratégias (fracamente) dominadas, que é justamente o equilíbrio descrito pelo Corolário 3.1, que, pelo fato dos compradores declararem as verdadeiras avaliações, resulta exatamente no *payoff* de equilíbrio competitivo ótimo para os compradores.

3.3 Leilão Discriminatório

No segundo mecanismo de leilão de nossa exposição, o vendedor declara uma quantidade K de objetos à venda e os compradores submetem seus lances em envelopes lacrados. O mecanismo aplica então a regra de alocação padrão e determina que os compradores que recebem um objeto paguem o equivalente a seus lances. Chamaremos este mecanismo de **Leilão Discriminatório**. Como os lances são avaliações declaradas e a regra de alocação padrão determina um *matching* ótimo segundo os lances, então o Leilão Discriminatório produz o resultado ótimo para o vendedor no núcleo para o mercado $\mathcal{M}^b$ (Proposição 2.7).

Analisaremos o comportamento estratégico dos compradores no subjogo definido após o anúncio da quantidade de objetos vendidos. Determinaremos todos os equilíbrios de Nash neste mecanismo. Antes, veremos na Proposição 3.4 que lançar acima da avaliação é uma estratégia dominada, resultado que pode ser usado no refinamento dos equilíbrios, e na Proposição 3.5 que é uma estratégia estritamente dominante lançar 0 quando $N \leq K$.¹

Proposição 3.4. *No Leilão Discriminatório, para cada comprador, submeter um lance maior que a verdadeira avaliação é uma estratégia dominada pelas estratégias de lançar a verdadeira avaliação ou lançar 0.*

Demonstração. Se um comprador com avaliação v lança $b > v$, então ou ele pode não receber o objeto, o que resulta em *payoff* 0, igual ao que obteria lançando v ou 0; ou ele pode ganhar o objeto e ter *payoff* $v - b < 0$, quando poderia garantir *payoff* 0 (recebendo ou não o objeto) lançando v ou 0. ■

Proposição 3.5. *No Leilão Discriminatório, se $K \geq N$, é uma estratégia estritamente dominante para cada comprador lançar 0.*

Demonstração. Se $K \geq N$, então todos os compradores recebem um objeto e pagam seus lances. Lançando 0 eles continuariam recebendo um objeto, mas não pagariam nada. Logo lançar 0 é sempre melhor que lançar $b > 0$ para cada comprador. ■

¹Lembre que cada comprador possui uma avaliação $v \in [0, \omega]$ sobre o objeto.

Corolário 3.2. *No Leilão Discriminatório, se $K \geq N$ então o perfil de estratégias em que todos os compradores lançam 0 é o único equilíbrio de Nash.*

Com isso, já temos determinado o equilíbrio de Nash quando $N \leq K$. Quando $N > K$, veremos nas Proposições 3.6, 3.7 e 3.8 algumas condições necessárias para que um perfil de lances seja um equilíbrio de Nash e na Proposição 3.9 veremos que essas condições são também suficientes, determinando assim os equilíbrios de Nash.

Proposição 3.6. *Seja $(b_1, \dots, b_N)$ um equilíbrio de Nash no Leilão Discriminatório com $N > K$. Então $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$.*

Demonstração. Se $b_* > \min_{i \in B^*} v_i$, então o comprador $j \in B^*$, com avaliação $v_j = \min_{i \in B^*} v_i$, lança $b_j \geq b_* > v_j$, recebe um objeto e tem *payoff* $v_j - b_j < 0$, quando poderia ter *payoff* 0 lançando sua verdadeira avaliação, logo lançar b_j não é ótima resposta de j para os lances dos outros compradores, o que contraria a hipótese de que $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash. Logo $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$.

Da mesma forma, se $b^* < \max_{i \in B_*} v_i$, então o comprador $j \in B_*$, com avaliação $v_j = \max_{i \in B_*} v_i$, lança $b_j \leq b^* < v_j$. Este comprador j tem *payoff* 0 quando poderia lançar $b'_j = b^* + \epsilon < v_j$, para algum ϵ positivo suficientemente pequeno, e receber um objeto pagando b'_j , o que lhe resultaria num *payoff* $v_j - b'_j > 0$, logo lançar b_j não é ótima resposta de j para os lances dos outros compradores, o que é uma contradição. Logo, $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$. ■

Proposição 3.7. *Se $N > K$ e $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash no Leilão Discriminatório, então $b^* = b_*$.*

Demonstração. Naturalmente, $b^* \geq b_*$. Se $b^* > b_*$, o jogador j que lança b^* tem *payoff* $v_j - b^*$ quando poderia lançar $b' = b_* + \epsilon < b^*$, para algum ϵ positivo suficientemente pequeno, e ainda receber o objeto tendo *payoff* $v_j - b' > v_j - b^*$, logo b^* não é ótima resposta para os lances dos outros compradores e não podemos ter $b^* > b_*$ em equilíbrio. ■

Proposição 3.8. *Se $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash no Leilão Discriminatório, então todos os compradores que recebem um objeto submetem o mesmo lance.*

Demonstração. Seja $(b_1, \dots, b_N)$ um equilíbrio de Nash no Leilão Discriminatório. Sejam $i, j \in B^*$. Suponha $b_i > b_j$, então i tem *payoff* $v_i - b_i$ quando poderia lançar $b'_i = \alpha b_i + (1 - \alpha)b_j$ com $\alpha \in [0, 1)$ e ainda receber o objeto tendo *payoff* $v_i - b'_i > v_i - b_i$, logo b_i não é ótima resposta de i para os lances dos outros compradores, o que é uma contradição. ■

Juntando os resultados das Proposições 3.6 e 3.7 podemos ver que $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ quando $N > K$, logo os compradores que recebem os objetos num equilíbrio de Nash são aqueles que possuem as maiores avaliações. Portanto $b^* \in [v_{K+1}, v_K]$, uma vez que $v_1 \geq \dots \geq v_N$. Juntando a Proposição 3.8, temos então demonstrado que:

Corolário 3.3. *No Leilão Discriminatório, se $N > K$ então os compradores que recebem os objetos num equilíbrio de Nash são aqueles que possuem as maiores avaliações. Além disso, se $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash, então $b^* \in [v_{K+1}, v_K]$ e $b_1 = \dots = b_K = b^* = b_*$.*

Finalmente podemos determinar todos os equilíbrios de Nash para este mecanismo de leilão.

Proposição 3.9. *Num Leilão Discriminatório com $N > K$, se $(b_1, \dots, b_N)$ for tal que $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e para todo $i \in B^*$, $b_i = b^*$, então $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. Seja $(b_1, \dots, b_N)$ tal que $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e para todo $i \in B^*$, $b_i = b^*$. Se $j \in B^*$, então j tem *payoff* $v_j - b^* \geq 0$. Se j lançasse $b'_j > b^*$, continuaria recebendo um objeto, porém pagaria b'_j e teria um *payoff* menor. Se j lançasse $b''_j < b^*$, então como $b^* = b_*$, ele deixaria de receber um objeto e passaria a ter *payoff* zero. Logo lançar $b_j = b^*$ é uma resposta ótima do comprador j para os lances dos outros compradores.

Se $j \in B_*$, então lança $b_j \leq b^*$ e tem *payoff* 0. Se j lançasse $b'_j < b_j$, continuaria sem receber um objeto. Se j lançasse $b''_j > b_j$, então ou $b_j < b''_j \leq b^*$, o que ainda lhe resultaria em *payoff* 0 (lembre que se $b_j = b^*$ ele não recebe o objeto pela regra de desempate), ou $b''_j > b^* \geq b_j$, o que lhe garantiria um objeto. Porém $v_j \leq b^* < b''_j$, o que implicaria que $v_j - b''_j < 0$. Logo lançar b_j é uma resposta ótima do comprador j para os lances dos outros compradores. ■

As Proposições 3.4 a 3.9, juntamente com o Corolário 3.1, definem todos os equilíbrios de Nash para o Leilão Discriminatório. Se $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash num Leilão Discriminatório, observando que $b^* \in [v_{K+1}, v_K]$ quando $N > K$, temos que $(b^*, \mathbf{x})$ é um equilíbrio competitivo, onde $\mathbf{x}$ é uma alocação de equilíbrio de Nash. Mas nem todo preço de equilíbrio competitivo é o preço produzido por um equilíbrio de Nash. Quando $N = K$, o intervalo de preços de equilíbrio competitivo é $[0, v_K]$, mas o equilíbrio de Nash neste caso nos dará sempre preço 0 que pode ser menor que v_K .

Finalmente, se usarmos a Proposição 3.4 como forma de refinar os equilíbrios de Nash, assumindo que os jogadores não jogarão estratégias dominadas, veremos que o único *payoff* de equilíbrio será o *payoff* do núcleo ótimo para os compradores, obtido quando $b^* = v_{K+1}$.

3.4 Leilão de Preço Uniforme Máximo

No terceiro mecanismo de leilão de nosso trabalho, o vendedor declara uma quantidade K de objetos à venda e os compradores submetem seus lances em envelopes lacrados. O mecanismo aplica então a regra de alocação padrão e determina que os compradores que recebem um objeto paguem o equivalente a b^* se $K \leq N$ e 0 caso contrário. Denominaremos este mecanismo por **Leilão de Preço Uniforme Máximo**. Para o mercado definido por $\mathcal{M}^b$, temos que b^* (se $N \geq K$) ou zero (se $N < K$) determinam o preço má-

ximo de equilíbrio competitivo. Como a regra de locação padrão determina um matching ótimo para o mercado, temos que o Leilão de Preço Uniforme Máximo produz o equilíbrio competitivo de preço máximo (Proposições 2.8 a 2.10). Veremos agora o comportamento estratégico dos compradores no subjogo definido após o anúncio da quantidade de objetos vendidos.

Para este mecanismo, quando $K > N$ não faz sentido analisar o comportamento estratégico, uma vez que todos os compradores recebem um objeto e não pagam nada desde que lancem algum valor. A exemplo do que fizemos no Leilão Discriminatório, temos uma série de proposições que nos dão condições necessárias para os equilíbrios de Nash quando $N > K$ e depois mostramos que estas condições são suficientes. Começamos com o caso em que $N = K$. A Proposição 3.10 nos diz que submeter um lance maior que a avaliação é uma estratégia dominada por lançar a própria avaliação; a Proposição 3.11 nos diz que é uma estratégia dominante lançar 0. Logo em seguida determinamos os equilíbrios de Nash para o caso em que $N = K$, na Proposição 3.12.

Proposição 3.10. *Para cada comprador, lançar $b > v$ é uma estratégia fracamente dominada por lançar v no Leilão de Preço Uniforme Máximo.*

Demonstração. Se um comprador lançar $b > v$, pode não receber o objeto e ter *payoff* 0, ou pode receber o objeto e ter *payoff* $v - b^*$. Se $v \geq b^*$, então lançar v lhe dá o mesmo *payoff* que tem lançando b . Se $v < b^*$, então ele poderia lançar v e ter *payoff* 0 ao invés de $v - b^* < 0$. ■

Proposição 3.11. *Se $K = N$, é uma estratégia fracamente dominante para cada comprador lançar 0 no Leilão de Preço Uniforme Máximo.*

Demonstração. Se $N = K$ todos os compradores recebem um objeto e pagam o menor lance. Suponha que um comprador i lança $b_i > 0$ e seja d o menor lance dos outros compradores. Então o *payoff* de i é dado por $v_i - \min\{b_i, d\}$. Como os lances não podem ser negativos, quando i lançar 0 terá *payoff* $v_i \geq v_i - \min\{b_i, d\}$. ■

Proposição 3.12. *Se $K = N$ no Leilão de Preço Uniforme Máximo, todo perfil $(b_1, \dots, b_N)$ tal que algum comprador lança 0 é um equilíbrio de Nash e todo equilíbrio de Nash é dado por um perfil $(b_1, \dots, b_N)$ onde algum comprador lança 0.*

Demonstração. Seja um Leilão de Preço Uniforme Máximo onde $N = K$. Suponha que $(b_1, \dots, b_N)$ é tal que algum comprador lança 0. Então todo comprador j obtém o *payoff* máximo de v_j lançando b_j . Logo todo j está jogando sua ótima resposta para os lances dos outros compradores. Agora suponha que todo comprador j lança $b_j > 0$, então cada um receberá um objeto e terá um *payoff* $v_i - \min_j b_j$. Mas se um comprador i se desviar e lançar 0 ao invés de b_i , terá *payoff* $v_i > v_i - \min_j b_j$, de forma que lançar b_i não é resposta ótima de i para os lances dos outros compradores. ■

Agora faremos a análise do caso em que $N > K$. Com as Proposições 3.13 e 3.14 definimos algumas condições necessárias para que um perfil de lances seja um equilíbrio de Nash. Logo em seguida veremos, na Proposição 3.15, que essas condições são também suficientes.

Proposição 3.13. *Seja $(b_1, \dots, b_N)$ um equilíbrio de Nash no Leilão de Preço Uniforme Máximo com $N > K$. Então $b^* \geq \max_{i \in B_*} v_i$ e $b_* \leq \min_{i \in B^*} v_i$.*

Demonstração. Se $b_* > \min_{i \in B^*} v_i$, então seja j um comprador com avaliação $v_j = \min_{i \in B^*} v_i$. Temos que j lança $b_j \geq b_*$, recebe o objeto e paga b^* , donde tem *payoff* $v_j - b^* < 0$ quando poderia ter *payoff* 0 lançando sua verdadeira avaliação, logo lançar b_j não é ótima resposta de j para os lances dos outros compradores.

Da mesma forma, se $b^* < \max_{i \in B_*} v_i$, então o comprador $j \in B_*$ com avaliação $v_j = \max_{i \in B_*} v_i$ lança $b_j \leq b^* < v_j$. Este comprador j tem *payoff* 0 quando poderia lançar $b'_j = b^* + \epsilon < v_j$, para algum ϵ positivo suficientemente pequeno, e receber um objeto pagando um novo K -ésimo maior lance que será no máximo b'_j , o que lhe resultaria num *payoff* positivo, logo lançar b_j não é ótima resposta para os lances dos outros compradores. ■

Proposição 3.14. *Se $N > K$ e $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash no Leilão de Preço Uniforme Máximo, então $b^* = b_*$.*

Demonstração. Mesma demonstração da Proposição 3.7. ■

Com as Proposições 3.13 e 3.14 podemos ver que num equilíbrio de Nash, no Leilão de Preço Uniforme Máximo com $N > K$, $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B} v_i$, logo os compradores que recebem os objetos num equilíbrio da Nash são aqueles que possuem as maiores avaliações. Com isso temos que $b^* \in [v_{K+1}, v_K]$. Podemos então enunciar:

Corolário 3.4. *No Leilão de Preço Uniforme Máximo, se $N > K$ então os compradores que recebem os objetos num equilíbrio da Nash são aqueles que possuem as maiores avaliações. Além disso, se $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash, então $b^* \in [v_{K+1}, v_K]$.*

Proposição 3.15. *Se $N > K$ e $(b_1, \dots, b_N)$ for tal que $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B} v_i$, então $(b_1, \dots, b_N)$ é um equilíbrio de Nash para o Leilão de Preço Uniforme Máximo.*

Demonstração. Seja um Leilão de Preço Uniforme Máximo com $N > K$. Suponha que $(b_1, \dots, b_N)$ é tal que $\min_{i \in B^*} v_i \geq b_* = b^* \geq \max_{i \in B} v_i$.

Se $j \in B^*$, então j tem *payoff* $v_j - b^* \geq 0$. Se j lançasse $b'_j > b_j \geq b^*$, continuaria recebendo um objeto e pagaria um novo K -ésimo maior lance que seria no máximo b'_j e teria um *payoff* menor ou igual ao anterior. Se j lançasse $b''_j < b_j$, então ou continuaria a receber um objeto sem alterar seu *payoff* ou deixaria de receber um objeto e passaria a ter *payoff* zero. Logo lançar b_j é uma resposta ótima do comprador j para os lances dos outros compradores.

Se $j \in B_*$, então j lança $b_j \leq b^*$ e tem *payoff* 0. Se j lançasse $b'_j < b_j$, continuaria sem receber um objeto. Se j lançasse $b''_j > b_j$, então ou $b_j < b''_j \leq b^*$, o que ainda lhe resultaria em *payoff* 0, ou $b''_j > b^* \geq b_j$, o que lhe garantiria um objeto. Porém $v_j \leq b^* < b''_j$, o que implicaria que $v_j - b''_j < 0$. Logo lançar b_j é uma resposta ótima do comprador j para os lances dos outros compradores. ■

As Proposições 3.10 a 3.15 definem os equilíbrios de Nash para o Leilão de Preço Uniforme Máximo. Da mesma forma que ocorre no Leilão Discriminatório, este mecanismo, quando os compradores jogam em equilíbrio, produz equilíbrios competitivos segundo as verdadeiras avaliações. Mas novamente, nem todo preço de equilíbrio competitivo pode ser produzido por um equilíbrio de Nash, uma vez que quando $N = K$ o equilíbrio de Nash se dá com preço 0 quando o intervalo de preços de equilíbrio competitivo é $[0, v_K]$.

Além disso, se usarmos a Proposição 3.10 para refinarmos os equilíbrios de Nash, teremos que os equilíbrios em que os jogadores não jogam estratégias dominadas produzem um vetor de *payoffs* que é o ótimo para os compradores no núcleo do jogo cooperativo que corresponde ao *payoff* de equilíbrio competitivo ótimo para os compradores, pois vende os objetos pelo preço mínimo de equilíbrio competitivo. Finalmente podemos enunciar:

Corolário 3.5. *Para Todos os três mecanismos propostos, se os compradores não jogam estratégias dominadas o único payoff de equilíbrio de Nash para cada mecanismo é o payoff ótimo para os compradores no núcleo do jogo cooperativo.*

Capítulo 4

Leilões de Múltiplos Objetos Idênticos com Demanda Unitária como Jogos de Informação Incompleta

No capítulo anterior provamos que, sob o enfoque de informação completa, o Leilão de Preço Uniforme Mínimo produz o resultado do núcleo ótimo para os compradores, o Leilão Discriminatório produz o resultado do núcleo ótimo para o vendedor e o Leilão de Preço Uniforme Máximo produz o resultado de preço máximo de equilíbrio competitivo. Neste capítulo, os problemas de decisão com que se deparam os licitantes serão modelados como um jogo de informação incompleta.

Veremos que num leilão de informação incompleta, os compradores não sabem mais as avaliações dos outros, a penas a própria. No entanto, a distribuição de probabilidades que origina as avaliações será a mesma para todos os compradores e de conhecimento comum. A partir disto e das regras de cada leilão, os compradores buscarão uma estratégia, função da avaliação, que maximize seu *payoff* esperado (assumindo neutralidade ao risco). O resultado que buscamos é o equilíbrio Nash-Bayesiano, que traz consigo uma noção de

otimalidade *ex-ante*, uma vez que cada jogador estará dando a ótima resposta para uma distribuição de probabilidades. Como os compradores são todos simétricos, buscaremos aqui apenas equilíbrios simétricos, ou seja, equilíbrios onde a função da estratégia seja a mesma para todos os compradores.

O caminho para se chegar aos equilíbrios é amplamente conhecido na literatura. A partir das regras do leilão escreve-se a função *payoff*. Supondo algumas propriedades para o equilíbrio simétrico escreve-se a função *payoff* esperado para um jogador qualquer assumindo que os demais estão jogando a estratégia de equilíbrio. Fazemos com que este jogador em particular maximize seu *payoff* esperado que deve resultar na escolha de uma estratégia idêntica à dos demais. Obtendo essa estratégia, verifica-se que as hipóteses assumidas são atendidas.

Apesar de o princípio ser padronizado, a determinação do equilíbrio no caso do leilão de preço uniforme máximo é um pouco mais complexa por exigir a abertura das distribuições de probabilidade das estatísticas de ordem, que serão definidas adiante, para resolver a equação diferencial resultante da otimização do *payoff* esperado que determinará a estratégia de equilíbrio simétrico.

Veremos que os três mecanismos apresentados levam a uma alocação eficiente dos objetos em equilíbrio. Além disto, todos geram o mesmo pagamento esperado para os compradores e a mesma receita esperada para o vendedor. Este resultado faz parte de um resultado maior, o Teorema de Equivalência de Receitas, que diz que todo equilíbrio simétrico e crescente de qualquer leilão padrão produz o mesmo pagamento esperado para os compradores e a mesma receita esperada para o vendedor, resultado que será demonstrado adiante.

Incluiremos também o preço de reserva em nossa análise, a partir da seção 4.2. As funções *payoff* esperado serão ligeiramente alteradas, por isso novas estratégias de equilíbrio serão derivadas. O teorema de equivalência de receitas continuará valendo com a inclusão do

preço de reserva e permitirá chegar no preço de reserva que maximiza a receita esperada do vendedor, que será uma regra de *mark-up*. A inclusão do preço de reserva fará com que os leilões percam eficiência, pois existirá uma probabilidade positiva de que algum objeto deixe de ser vendido a um comprador com avaliação positiva enquanto o vendedor está disposto a vender os objetos por qualquer quantia positiva.

Formalmente, num jogo de informação incompleta, o *payoff* de um jogador não depende somente das ações dos outros jogadores, mas também da informação que é conhecida só parcialmente pelo jogador. Por causa disto, cada jogador avalia suas estratégias de acordo com o *payoff* esperado condicionado na informação disponível para o jogador.

Definição 4.1: Um jogo de informação incompleta Γ consiste de:

- (i) um conjunto P de jogadores, $P = \{1, \dots, N\}$;
- (ii) para cada jogador $i \in P$ um conjunto $\mathcal{B}_i$ não vazio de ações;
- (iii) para cada jogador $i \in P$ um conjunto $\mathcal{X}_i$ de sinais;
- (iv) para cada jogador $i \in P$ uma função *payoff* $u_i : \times_j \mathcal{B}_j \times_j \mathcal{X}_j \rightarrow \mathbb{R}$;
- (v) uma função de distribuição de probabilidades $p(\cdot)$ sobre o produto cartesiano de sinais $\times_j \mathcal{X}_j \equiv \mathcal{X}$.

Definição 4.2: Uma estratégia (pura) para o jogador i é uma função $\beta_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{B}_i$ que mapeia sinais em ações.

Denotaremos o perfil de ações $(\beta_1(v_1), \dots, \beta_N(v_N))$ por $\beta(v_1, \dots, v_N)$, o perfil de estratégias $(\beta_1(\cdot), \dots, \beta_N(\cdot))$ por $\beta(\cdot)$ e o perfil de variáveis aleatórias $(\beta_1(V_1), \dots, \beta_N(V_N))$ por $\beta(\mathbf{V})$ onde $\mathbf{V} \equiv (V_1, \dots, V_N)$.

Esta formulação postula a seguinte seqüência de eventos. Primeiro, o vetor de sinais $\mathbf{V}$ é distribuído de acordo com $p(\cdot)$ e cada jogador i toma conhecimento de $V_i = v_i$, seu sinal.

Segundo, ciente de que $V_i = v_i$, cada jogador escolhe sua ação b_i . Finalmente, baseado nos sinais $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ de todos os jogadores e suas ações $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$, são realizados os *payoffs*.

Definição 4.3: Uma estratégia β_i **domina** (fracamente) β'_i se para todo $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) \in \mathcal{X}$ e todo $\mathbf{b}_{-i}$,

$$u_i(\beta_i(v_i), \mathbf{b}_{-i}, \mathbf{v}) \geq u_i(\beta'_i(v_i), \mathbf{b}_{-i}, \mathbf{v})$$

com desigualdade estrita para algum $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}_{-i}$.

Definição 4.4: A estratégia β_i é (fracamente) **dominante** se domina (fracamente) qualquer outra estratégia β'_i .

Definição 4.5: Um **equilíbrio de Nash Bayesiano** de um jogo de informação incompleta Γ é um perfil de estratégias β^* tal que para todo i , para todo $v_i \in \mathcal{X}_i$ e para todo $b_i \in \mathcal{B}_i$,

$$E[u_i(\beta^*(\mathbf{V}), \mathbf{V}) | V_i = v_i] \geq E[u_i(b_i, \beta^*_{-i}(\mathbf{V}_{-i}), \mathbf{V}) | V_i = v_i].$$

4.1 Modelo de Valores Privados Independentes

Suporemos que é de conhecimento comum que cada licitante $i \in \{1, \dots, N\}$ tem alguma avaliação v_i sobre qualquer dos K objetos idênticos que é uma realização de uma variável aleatória V_i , que é independente e identicamente distribuída em $[0, \omega]$, de acordo com a distribuição $F(\cdot)$, estritamente crescente. É assumido que $F(\cdot)$ é diferenciável com $F'(\cdot) \equiv f(\cdot)$. Os licitantes são neutros ao risco, *i.e.*, procuram maximizar seus lucros esperados.

É assumido também que cada licitante i tem recursos suficientes para pagar ao vendedor

qualquer quantia até seu valor v_i e conhece apenas sua própria avaliação.

Os licitantes são considerados **simétricos** no sentido de que a distribuição dos valores é a mesma para todos eles. Este modelo é conhecido como Modelo Simétrico de Valores Privados Independentes.

Como a avaliação é a única informação que não é de conhecimento comum para todos os jogadores, podemos dizer que ela define o *tipo* de cada licitante i . Como as avaliações dos licitantes são realizações de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, temos bem definida a distribuição conjunta de todas as avaliações no espaço $[0, \omega]^N$, que denotaremos por $p(\cdot)$, assim como a distribuição condicional de $N - 1$ avaliações dado o valor de uma qualquer. O lance de cada licitante é qualquer valor não negativo. Com isso temos todos os componentes para um Jogo Bayesiano: O conjunto de jogadores é o conjunto P de licitantes; uma ação corresponde a um lance; o conjunto de ações é $[0, \infty)$; uma estratégia para cada jogador i é uma função de decisão $\beta_i(\cdot)$ que leva cada tipo possível do jogador i , v_i , num lance $b_i = \beta_i(v_i)$; uma função *payoff* para cada jogador que depende dos lances e valores de cada licitante e cuja regra é definida para cada mecanismo de leilão; os tipos possíveis (avaliações) e a distribuição de probabilidade sobre os tipos.

Definição 4.6: Se $(\beta_1(\cdot), \dots, \beta_N(\cdot))$ for um equilíbrio de Nash Bayesiano tal que $\beta_i(\cdot) = \beta_j(\cdot) = \beta(\cdot) \forall i, j$, então $(\beta(\cdot), \dots, \beta(\cdot))$ é um equilíbrio simétrico. Por simplicidade nos referiremos a um equilíbrio simétrico como apenas "equilíbrio".

Considerando que a função densidade de probabilidade marginal é estritamente positiva em $[0, \omega]$, esta condição é equivalente a cada licitante i maximizar seu *payoff* esperado condicionado em v_i para cada valor de v_i .

Logo é muito importante a referência de um jogador qualquer em relação a todos os outros, pois cada jogador escolherá sua estratégia com base na distribuição de probabilidades

sobre os tipos de seus adversários com base em sua avaliação. Por isso introduziremos uma notação especial.

Notação: Se $(b_1, \dots, b_N)$ é o vetor de lances submetidos, denotaremos a reordenação de lances $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_N)$ concorrentes para o comprador i por $\mathbf{c}^{-i} = (c_1, c_2, \dots, c_{N-1})$ de forma que $c_j \geq c_{j+1}$.

Assim, por exemplo, a fim do licitante i ganhar um dos objetos deve-se ter que $b_i > c_K$.

Definição 4.7: Sejam $V_1, V_2, \dots, V_n$ n variáveis aleatórias contínuas independentes com função de distribuição $F(\cdot)$ e correspondente densidade $f(\cdot)$. Considere um rearranjo $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ dessas variáveis de tal sorte que $Y_1^{(n)} \geq Y_2^{(n)} \geq \dots \geq Y_n^{(n)}$. As variáveis aleatórias $Y_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n$ são chamadas estatísticas de ordem. A função de distribuição acumulada de uma estatística de ordem $Y_k^{(n)}$ é dada por $F_k^{(n)}(\cdot)$ e a função densidade é dada por $f_k^{(n)}(\cdot)$

Estatísticas de ordem serão necessárias para a determinação dos equilíbrios de Nash Bayesianos nos leilões a seguir. Os detalhes sobre estatísticas de ordem são dados no Apêndice B. Utilizaremos $Y_k^{(n)}$ para denotar estatísticas de ordem para as avaliações dos compradores.

Notação: Quando o tamanho da amostra for $N - 1$, suprimiremos a notação do tamanho da amostra nas estatísticas de ordem, ou seja, $Y_k^{(N-1)} \equiv Y_k$; $F_k^{(N-1)}(\cdot) \equiv F_k(\cdot)$ e $f_k^{(N-1)}(\cdot) \equiv f_k(\cdot)$.

Fixado um licitante i , definiremos C_K como a variável aleatória correspondente ao K -ésimo maior lance dos outros compradores. A função densidade de probabilidade e a distribuição de C_K serão denotadas por $h_K(\cdot)$ e $H_K(\cdot)$, respectivamente.

Sempre que tivermos que as estratégias de equilíbrio $\beta(\cdot)$ são funções estritamente crescentes, o K -ésimo maior valor dentre os rivais de i será o lance do licitante de K -ésimo

maior valor dentre esses jogadores. Assim, $C_K = \beta(Y_K)$ nessas situações. Nesses casos, teríamos:

$$H_K(b) = \Pr(C_K < b) = \Pr(\beta(Y_K) < b) = \Pr(Y_K < \beta^{-1}(b)) = F_K(\beta^{-1}(b)) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \Pr[\beta(Y_K) < b < \beta(Y_{K-1})] &= \Pr[Y_K < \beta^{-1}(b) < Y_{K-1}] \\ &= \Pr[Y_K < \beta^{-1}(b)] \cdot \Pr[\beta^{-1}(b) < Y_{K-1} | Y_K < \beta^{-1}(b)] \\ &= \Pr[Y_K < \beta^{-1}(b)] \cdot \{1 - \Pr[Y_{K-1} < \beta^{-1}(b) | Y_K < \beta^{-1}(b)]\} \\ &= F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Trabalharemos neste capítulo apenas com os casos em que há mais compradores do que objetos.

Nesta seção discutiremos este modelo sem preço de reserva e com licitantes neutros ao risco. Levaremos em conta apenas o caso de distribuição contínua dos valores e com isso mostramos a existência do equilíbrio simétrico para as três regras de preço propostas assim como suas expressões. Além disso, mostramos que todas elas geram a mesma receita esperada para o vendedor. De todos estes resultados o único novo para a literatura de leilões, para nosso conhecimento, é a estratégia de equilíbrio para o Leilão de Preço Uniforme Máximo derivada na seção 4.1.3.

4.1.1 Leilão de Preço Uniforme Mínimo

O Leilão de Preço Uniforme Mínimo foi descrito na seção 3.2. No contexto de jogos de informação incompleta, este é o leilão de preço uniforme mais estudado na literatura. Foi primeiramente proposto por Vickrey (1961), por isto também é conhecido como leilão de Vickrey, para o caso de demandas unitárias.

Para o Leilão de Preço Uniforme Mínimo, como temos K objetos e N licitantes, podemos escrever o *payoff* de cada licitante i com avaliação v_i e lance b_i como:

$$\begin{cases} v_i - c_K & \text{se } b_i > c_K; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como pode-se observar da prova da Proposição 3.1, ela também é válida para o jogo de informação incompleta. O único requisito para sua validade é a independência das avaliações sobre o objeto, portanto ela é válida também para modelos em que os licitantes são assimétricos e mesmo quando não são neutros ao risco.

Corolário 4.1. *No Leilão de Preço Uniforme Mínimo, o perfil de estratégias em que todo comprador segue $\beta^V(v) = v$ é um equilíbrio.*

Vamos mostrar agora que este é o único equilíbrio. Considere um comprador que tem avaliação v e lança b . O *payoff* esperado deste comprador é dado por:

$$\Pi(b, v) = E[v - C_K | C_K < b] Pr(C_K < b) = H_K(b) \int_0^b (v - x) \frac{h_K(x)}{H_K(b)} dx = \int_0^b (v - x) h_K(x) dx$$

Logo o *payoff* esperado será maximizado quando $\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) = (v - b)h_K(b) = 0$. Logo $b = v$ para todo lance no suporte de $h_K(\cdot)$. Portanto $\beta^V(v) = v$ é o único equilíbrio e temos provado:

Proposição 4.1. *No Leilão de Preço Uniforme Mínimo o único equilíbrio é dado por $\beta^V(v) = v$.*

Uma consequência dessa proposição é que o Leilão de Preço Uniforme Mínimo alocará os objetos aos compradores que possuem as maiores avaliações e, portanto, será eficiente. A

partir daí é razoavelmente direto observar que a receita esperada do vendedor será dada por $K \cdot E[Y_{K+1}^{(N)}]$ uma vez que espera-se vender cada objeto pelo equivalente à $K + 1$ -ésima maior avaliação.

4.1.2 Leilão Discriminatório

Para o Leilão Discriminatório, podemos escrever o *payoff* de cada licitante i com avaliação v_i e lance b_i como:

$$\begin{cases} v_i - b_i & \text{se } b_i > c_K; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A partir disto podemos determinar uma estratégia de equilíbrio simétrico.

Sob a perspectiva do licitante i e considerando que os lances são funções crescentes dos valores, de tal forma que os K licitantes com os maiores valores recebem um objeto, ele será um dos ganhadores quando sua avaliação for maior do que a estatística de ordem K de uma amostra $\{V_1, \dots, V_{i-1}, V_{i+1}, \dots, V_N\}$. Logo, o lance ótimo deve ser o valor esperado de Y_K condicionado a ganhar um objeto.

Proposição 4.2. *No Leilão Discriminatório, a estratégia de equilíbrio é dada por cada comprador seguindo:*

$$\beta^D(v) = E[Y_K^{(N-1)} | Y_K^{(N-1)} \leq v]$$

que corresponde ao valor esperado da K -ésima maior avaliação dos outros compradores dado que esta K -ésima maior avaliação é menor que seu valor.

A demonstração desta Proposição pode ser obtida determinando o preço de reserva como 0 na demonstração da Proposição 4.6 encontrada no Apêndice A. Como a estratégia de equilíbrio simétrico é crescente na avaliação do jogador, o leilão, em equilíbrio, alocará os

K objetos aos compradores com as maiores avaliações e portanto também será eficiente.

Para obtermos uma receita esperada, vejamos um exemplo:

Exemplo 4.1: Tomemos $N = 5$, $K = 3$ e $F(x) = x$ com $x \in [0, 1]$. O equilíbrio simétrico nos dá que um comprador com avaliação v deve lançar $E[Y_3^{(4)} | Y_3^{(4)} \leq v]$. Como $F_3^{(4)}(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, então:

$$\beta^D(v) = \frac{12v^3 - 30v^2 + 20v}{15v^2 - 40v + 30}$$

O pagamento esperado de um comprador é $m^D(v) = \beta(v)F_3^{(4)}(v)$, seu lance vezes a probabilidade de ganhar, o que nos dá:

$$m^D(v) = \frac{12}{5}v^5 - 6v^4 + 4v^3$$

Isso nos dá que o pagamento esperado *ex-ante* do comprador é:

$$E[m^D(V)] = \int_0^1 \frac{12}{5}v^5 - 6v^4 + 4v^3 dv = \frac{1}{5}$$

E a receita esperada do vendedor é a soma dos pagamentos esperados de cada licitante ou simplesmente:

$$R = 5E[m^D(V)] = 1$$

□

4.1.3 Leilão de Preço Uniforme Máximo

Para o Leilão de Preço Uniforme Máximo, podemos escrever o *payoff* de cada licitante i com avaliação v_i e lance b_i como:

$$\begin{cases} v_i - c_{K-1} & \text{se } b_i > c_{K-1}; \\ v_i - b_i & \text{se } c_K < b_i < c_{K-1}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 4.3. *No Leilão de Preço Uniforme Máximo, o equilíbrio é dado por cada comprador seguindo:*

$$\beta^U(v) = E[Y_{K+1}^{(N)} | Y_K^{(N)} = v]$$

que corresponde ao valor esperado do $K+1$ -ésimo maior valor dado que o K -ésimo maior valor é igual ao do comprador.

Demonstração. Suponha que exista uma estratégia de equilíbrio $\beta(v)$ estritamente crescente e diferenciável com $\beta(0) = 0$. Suponha que todos os licitantes menos o i estejam seguindo esta estratégia. Então o licitante i tem o seguinte *payoff* esperado quando tem valor v e lança b :

$$\Pi(b, v) = E[v - C_{K-1} | C_{K-1} < b] Pr(C_{K-1} < b) + E[v - b | C_K < b < C_{K-1}] Pr(C_K < b < C_{K-1})$$

Usando (4.1) e (4.2) obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi(b, v) = & v[F_{K-1}(\beta^{-1}(b)) + F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - b[F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - \\ & - E(\beta^{-1}(b) | \beta^{-1}(b) < b) F_{K-1}(\beta^{-1}(b)), \end{aligned}$$

donde

$$\Pi(b, v) = vF_K(\beta^{-1}(b)) - b[F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - \int_0^{\beta^{-1}(b)} \beta(x)f_{K-1}(x)dx \quad (4.3)$$

Tomando a condição de primeira ordem para o máximo em b temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) &= v \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - [F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - b \left[\frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - \frac{f_{K-1}(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \right] - \\ &\quad - \beta(\beta^{-1}(b)) \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) &= (v - b) \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - [F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para que $\beta(\cdot)$ seja equilíbrio, devemos ter que $b = \beta(v)$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) \Big|_{b=\beta(v)} &= (v - \beta(v)) \frac{f_K(v)}{\beta'(v)} - [F_K(v) - F_{K-1}(v)] = 0 \\ \beta'(v)[F_K(v) - F_{K-1}(v)] + \beta(v)f_K(v) &= v f_K(v) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dividindo a equação por $[F_K(v) - F_{K-1}(v)]$ temos:¹

$$\beta'(v) + \frac{(N - K)f(v)}{F(v)}\beta(v) = v(N - K)\frac{f(v)}{F(v)}$$

Multiplicando toda a equação por $F(v)^{N-K}$:

$$\beta'(v)F(v)^{N-K} + (N - K)F(v)^{N-K-1}f(v)\beta(v) = v(N - K)F(v)^{N-K-1}f(v)$$

¹De (B.4) no Apêndice B com $n = N - 1$

$$\frac{f_K(v)}{F_K(v) - F_{K-1}(v)} = (N - K)\frac{f(v)}{F(v)}$$

Ou simplesmente:

$$[\beta(v)F(v)^{N-K}]' = v(N-K)F(v)^{N-K-1}f(v) \quad (4.6)$$

Segue então do fato que $\beta(0) = 0$ e do teorema fundamental do cálculo que a solução da equação diferencial acima é dada por:

$$\beta^U(v) = \frac{1}{F(v)^{N-K}} \int_0^v x(N-K)F(x)^{N-K-1}f(x)dx \quad (4.7)$$

$$\beta^U(v) = E[Y_1^{(N-K)} | Y_1^{(N-K)} \leq v],$$

onde a última expressão segue do fato que $F_1^{(N-K)}(\cdot) = F(\cdot)^{N-K}$. Temos que $\beta^U(\cdot)$ é claramente diferenciável pelo fato de ser solução de uma equação diferencial. Alternativamente podemos escrever essa expressão como:²

$$\beta^U(v) = E[Y_{K+1}^{(N)} | Y_K^{(N)} = v] \quad (4.8)$$

Integrando (4.7) por partes temos:

$$\beta^U(v) = v - \int_0^v \left[\frac{F(x)}{F(v)} \right]^{N-K} dx \quad (4.9)$$

Usando este resultado em (4.5) temos que para $v \in (0, \omega)$:

$$\beta^{U'}(v) \underbrace{[F_K(v) - F_{K-1}(v)]}_{>0} = \underbrace{[v - \beta^U(v)]}_{>0} \underbrace{f_K(v)}_{>0}$$

Logo $\beta^{U'}(v) > 0$ e a função de fato é estritamente crescente. Assim, a função $\beta^U(\cdot)$ satisfaz as hipóteses que assumimos para encontrá-la, no entanto ainda é preciso provar que ela de

²Veja (B.7) no Apêndice B

fato maximiza e não minimiza o *payoff* esperado do jogador. Basta mostrar que $\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v)$ é uma função estritamente decrescente de b . Utilizando (4.4) com $b = \beta(z)$ temos:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) \right|_{b=\beta(z)} &= (v - \beta(z)) \frac{f_K(z)}{\beta'(z)} - [F_K(z) - F_{K-1}(z)] \\
 &= \frac{1}{\beta'(z)} [(v - \beta(z)) f_K(z) - (F_K(z) - F_{K-1}(z)) \beta'(z)] \\
 &= \frac{f_K(z)}{\beta'(z)} [v - \beta(z) - z + \beta(z)] \\
 &= \frac{f_K(z)}{\beta'(z)} (v - z)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Em que na terceira igualdade usamos (4.5) com $v = z$. Note que $\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v)$ é decrescente em b . De fato, a expressão (4.10) é menor que zero se $v < z$ e maior que zero se $v > z$. Como $\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v)$ se anula para $v = z$, segue que é decrescente estritamente. Logo temos que $\beta(v)$ dada por (4.8) maximiza o *payoff* esperado do jogador quando todos os outros seguem essa estratégia. ■

Nota-se que, no equilíbrio (4.9), o licitante deve lançar um valor abaixo de sua avaliação, resultado que difere do Leilão de Preço Uniforme Mínimo, mais estudado na literatura. Mais uma vez, o fato da estratégia de equilíbrio ser crescente na avaliação do jogador levará à eficiência do leilão. Vejamos agora um exemplo para a receita esperada.

Exemplo 4.2: Tomando o intervalo de avaliações $[0,1]$ com distribuição uniforme, um jogador com avaliação v deverá lançar em equilíbrio, segundo (4.7):

$$\beta^U(v) = \frac{1}{v^{N-K}} \int_0^v x(N-K)x^{N-K-1} dx = \frac{N-K}{N-K+1} v$$

Caso $N = 5$ e $K = 3$, teremos:

$$\beta^U(v) = \frac{2}{3} v$$

O licitante deverá pagar seu lance se entre o segundo e o terceiro maiores dos concorrentes

e pagará o lance do segundo maior concorrente se este for menor que o seu, o que nos dá um pagamento esperado de:

$$\begin{aligned}
 m^U(v) &= \beta^U(v)[F_K^{(N-1)}(v) - F_{K-1}^{(N-1)}(v)] + \int_0^v \beta^U(x)f_{K-1}^{(N-1)}(x)dx \\
 &= 4(v^3 - 2v^4 + v^5) + \int_0^v 8(x^3 - 4x^4)dx \\
 &= \frac{12}{5}v^5 - 6v^4 + 4v^3
 \end{aligned}$$

Assim, o pagamento esperado *ex-ante* será dado por $E[m^U(V)]$ e a receita esperada do vendedor será a soma dos pagamentos dos compradores resultando em:

$$R = 5E[m^U(V)] = 1$$

Idêntica à receita esperada do leilão discriminatório. $\square$

4.1.4 Teorema de equivalência de receitas

Veremos agora que qualquer estratégia equilíbrio e crescente de um leilão padrão gera o mesmo pagamento esperado para os compradores e a mesma receita esperada para o vendedor. Este resultado conhecido como Teorema de Equivalência de Receitas está enunciado e provado na Proposição 4.4. O fato das estratégias de equilíbrio serem crescentes num leilão padrão implica que os objetos são alocados aos compradores com as maiores avaliações.

Observação 4.1: Como, num mecanismo de leilão A , os lances são funções dos valores $\beta_i^A(v_i)$ para cada licitante i e o pagamento deve ser uma função $\rho(\cdot) = \rho(\beta_1^A(v_1), \dots, \beta_i^A(v_i), \dots, \beta_N^A(v_N))$, então o pagamento esperado do jogador i é dado por:

$$m^A(x) = E[\rho(\beta_1^A(V_1), \dots, \beta_{i-1}^A(V_{i-1}), \beta_i^A(x), \beta_{i+1}^A(V_{i+1}), \dots, \beta_N^A(V_N))]$$

Proposição 4.4. *Se todos os valores são independente e identicamente distribuídos e todos os N licitantes com demandas unitárias são neutros ao risco, então qualquer equilíbrio crescente de qualquer leilão padrão para K objetos idênticos tal que o pagamento esperado de um licitante com valor zero é zero produz:*

(a) *O mesmo pagamento esperado pelos compradores, dado por:*

$$F_K(v) \cdot E[Y_K | Y_K < v]$$

(b) *A mesma receita esperada para o vendedor, dada por:*

$$K E[Y_{K+1}^{(N)}]$$

Demonstração. Considere um mecanismo de leilão padrão, A , e seja β uma estratégia de equilíbrio crescente para A . Seja $m^A(v)$ o pagamento esperado de equilíbrio para um licitante que avalia o objeto em v , no leilão A , e suponha que β é tal que $m^A(0) = 0$.

Considere um licitante em particular e suponha que todos os outros estejam seguindo a estratégia de equilíbrio β . Vamos supor que este licitante com avaliação v lança $\beta(z)$, de forma que ele ganha um objeto se $\beta(z) > \beta(Y_K)$, ou seja, se $z > Y_K$, visto que β é crescente. Seu *payoff* esperado será o valor do objeto, se ele ganha, menos o pagamento esperado.

$$\Pi^A(z, v) = v F_K(z) - m^A(z)$$

Maximizando com respeito a z temos que a condição de primeira ordem é dada por:

$$\frac{\partial \Pi^A}{\partial z}(z, v) = v f_K(z) - \frac{d}{dz} m^A(z)$$

No equilíbrio devemos ter $\frac{\partial \Pi^A}{\partial z}(v, v) = 0$. Logo para todo v temos:

$$\frac{d}{dv} m^A(v) = v f_K(v)$$

Logo,

$$m^A(v) = m^A(0) + \int_0^v x f_K(x) dx = \int_0^v x f_K(x) dx = F_K(v) \cdot E[Y_K | Y_K < v]$$

que independe do mecanismo de leilão.³ Com isso temos provado (a).

Tomando a esperança da expressão acima em v :

$$\begin{aligned} E[m^A(V)] &= \int_0^\omega \int_0^v x f_K(x) dx f(v) dv = \int_0^\omega \int_x^\omega x f_K(x) f(v) dv dx = \\ &= \int_0^\omega x f_K(x) [1 - F(x)] dx = \frac{K}{N} \int_0^\omega x f_{K+1}^{(N)}(x) dx = \frac{K}{N} E[Y_{K+1}^{(N)}] \end{aligned}$$

Que é o pagamento esperado *ex ante* do licitante. Na segunda igualdade apenas invertemos a ordem de integração e na quarta utilizamos (B.3) do Apêndice B. Agora basta observar que a receita esperada é a soma dos pagamentos esperados. Logo:

$$NE[m^A(V)] = KE[Y_{K+1}^{(N)}]$$

que independe do mecanismo de leilão. Logo, temos provado (b). ■

³Integrando a segunda igualdade por partes resulta em $m^A(z) = zF_K(z) - \int_0^z F_K(x) dx$ e substituindo no *payoff* esperado obtemos

$$\Pi^A(z, v) = (v - z)F_K(z) + \int_0^z F_K(x) dx$$

e fazendo

$$\Pi^A(v, v) - \Pi^A(z, v) = (z - v)F_K(z) - \int_v^z F_K(x) dx \geq 0$$

para qualquer valor de z , o que nos dá um máximo.

Esta Proposição foi provada independentemente por Riley e Samuelson (1981) e Myerson (1981). O mais interessante da expressão da receita esperada é revelar que o vendedor espera vender seus K objetos ao preço da $(K + 1)$ -ésima maior avaliação, ou seja, o preço mínimo de equilíbrio competitivo. Isso nos dá uma comparação direta com o Corolário 3.5 onde destacamos um resultado semelhante para os três mecanismos de leilão apresentados. Adicionalmente, os três mecanismos de leilão apresentados são mecanismos de leilão padrão e seus equilíbrios simétricos são crescentes, logo satisfazem as condições do Teorema de Equivalência de Receitas e geram a mesma receita esperada.

É possível determinar estratégias de equilíbrio a partir do Teorema de Equivalência de Receitas e chegar nos mesmos equilíbrios simétricos que chegamos antes de demonstrar o teorema, mas deixaremos para fazer isso depois de incluir o preço de reserva, que é o caso mais geral, uma vez que supusemos até aqui que o preço de reserva era zero.

4.2 Preços de reserva

Nos livros didáticos de economia, todo monopolista, por menor que seja seu poder de monopólio, sempre pode limitar a oferta para aumentar o preço ou fixar um preço abaixo ao qual atenderá a demanda.

No caso de leilões, para melhorar sua receita esperada, o vendedor pode estipular um preço de reserva para a venda dos objetos, de forma que nenhum objeto é vendido abaixo deste preço. Conseqüentemente, quaisquer lances abaixo do preço de reserva não geram *payoff* positivo para os compradores.

4.2.1 Equilíbrios Simétricos com preços de reserva

A inclusão do preço de reserva no Leilão de Preço Uniforme Mínimo não altera em nada o argumento da Proposição 3.1, basta pensar o preço de reserva como lances de outros compradores. Com isso, continua sendo uma estratégia dominante para cada comprador declarar sua verdadeira avaliação. Com isso temos que:

Corolário 4.2. *No Leilão de Preço Uniforme Mínimo com preço de reserva r o perfil de estratégias em que cada comprador segue $\beta^V(v) = v$ é um equilíbrio.*

Proposição 4.5. *O único equilíbrio no Leilão de Preço Uniforme Mínimo com preço de reserva r é dado por todos os compradores seguindo $\beta^V(v) = v$.*

Demonstração. Para vermos que é o único equilíbrio, basta observar o *payoff* esperado:

$$\begin{aligned}\Pi(b, v) &= vPr(\max\{C_K, r\} < b) - E[\max\{C_K, r\} | \max\{C_K, r\} < b]Pr(\max\{C_K, r\} < b) \\ &= (v - r) \int_0^r h_K(x)dx + \int_r^b (v - x)h_K(x)dx\end{aligned}$$

Maximizando a expressão com relação a b temos $\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) = (v - b)h_K(b) = 0$, logo $b = v$ para todo o suporte de $h_K(\cdot)$, o que implica que o único equilíbrio simétrico é $\beta^V(v) = v$.

■

Para o Leilão Discriminatório temos a estratégia de equilíbrio dada pela Proposição 4.6 cuja demonstração está no Apêndice A.

Proposição 4.6. *No Leilão Discriminatório para a venda de K objetos com preço de reserva r , a estratégia de equilíbrio é:*

$$\beta^D(v) = E[\max\{r, Y_K^{(N-1)}\} | Y_K^{(N-1)} \leq v]$$

que corresponde ao valor esperado do máximo entre o preço de reserva e o K -ésimo maior valor dos outros compradores, dado que esse valor é menor do que sua avaliação.

No Leilão de Preço Uniforme Máximo, a função *payoff* esperado de um licitante qualquer com avaliação v e que lança $b \geq \tau$ muda para:

$$\begin{aligned} \Pi(b, v) = & (v - b)Pr(C_K < b < C_{K-1}) + \\ & + E[v - \max\{C_{K-1}, \tau\} | \max\{C_{K-1}, \tau\} < b]Pr(\max\{C_{K-1}, \tau\} < b) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \Pi(b, v) = & vF_K(\beta^{-1}(b)) - b[F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - \\ & - \tau F_{K-1}(\tau) - \int_{\tau}^{\beta^{-1}(b)} \beta(x)f_{K-1}(x)dx \end{aligned} \quad (4.12)$$

cuja única diferença com relação a (4.3) é o fato do pagamento esperado quando $b \geq c_{K-1}$ levar em consideração o $\max\{c_{K-1}, \tau\}$ ao invés de apenas c_K .

Novamente ele deve maximizar esta função com respeito a b o que resulta na condição de primeira ordem dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) = & v \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - [F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] - b \left[\frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - \frac{f_{K-1}(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \right] - \\ & - \beta(\beta^{-1}(b)) \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) = & (v - b) \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - [F_K(\beta^{-1}(b)) - F_{K-1}(\beta^{-1}(b))] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Que é visualmente idêntica a (4.4) e resultará na equação diferencial:

$$[\beta(v)F(v)^{N-K}]' = v(N - K)F(v)^{N-K-1}f(v) \quad (4.14)$$

Cuja única diferença com respeito a (4.6) é a condição inicial de sua solução, dado que

agora temos $\beta(r) = r$ ao invés de $\beta(0) = 0$. Com isto, a solução será:

$$\beta^U(v) = r \frac{F(r)^{N-K}}{F(v)^{N-K}} + \frac{1}{F(v)^{N-K}} \int_r^v x(N-K)F(x)^{N-K-1}f(x)dx \quad (4.15)$$

Diferenciável por ser solução de uma equação diferencial. Por (B.10) do Apêndice B, a expressão pode ser reescrita como:

$$\beta^U(v) = E[\max\{r, Y_{K+1}^{(N)}\} | Y_K^{(N)} = v]$$

Integrando (4.15) por partes teremos:

$$\beta^U(v) = v - \int_r^v \frac{F(x)^{N-K}}{F(v)^{N-K}} dx$$

Logo $\beta^U(v) < v$ para $v > r$ e como de (4.14)

$$\beta^{U'}(v) = (v - \beta^U(v))(N-K) \frac{f(v)}{F(v)} > 0,$$

então $\beta^U(v)$ é estritamente crescente. Também teremos que:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) \right|_{b=\beta^U(z)} = \frac{f_K(z)}{\beta^{U'}(z)}(v - z)$$

De forma que $\beta^U(v)$ de fato maximiza o *payoff* esperado do licitante. Com isso generalizamos a Proposição 4.3 para incluir preços de reserva como:

Proposição 4.7. *No Leilão de Preço Uniforme Máximo para a venda de K objetos com preço de reserva r , a estratégia de equilíbrio é:*

$$\beta^U(v) = E[\max\{r, Y_{K+1}^{(N)}\} | Y_K^{(N)} = v].$$

que é o valor esperado do máximo entre o preço de reserva e o $K + 1$ -ésimo maior valor de todos os compradores dado que este valor é menor do que a avaliação do jogador.

4.2.2 Teorema de Equivalência de Receitas

O Teorema de Equivalência de Receitas vale também quando temos preços de reserva. Assumindo que β seja uma função crescente da avaliação, então um leilão padrão alocará os objetos para os compradores com maiores avaliações e a probabilidade de um licitante levar o objeto será dada pela probabilidade de ser uma das K maiores avaliações ou, caso declare uma avaliação z , a probabilidade de levar o objeto será $F_K(z)$ e seu *payoff* esperado será:

$$\Pi(z, v) = vF_K(z) - m^A(z) \quad (4.16)$$

Tomando a condição de primeira ordem em z teremos:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}(z, v) = v f_K(z) - \frac{d}{dz} m^A(z) \quad (4.17)$$

Que pelo equilíbrio será ótimo escolher $z = v$, logo:

$$v f_K(v) - \frac{d}{dv} m^A(v) = 0 \quad (4.18)$$

Esta condição deve ser satisfeita para todo valor $v \geq r$, o preço de reserva do vendedor que faz o comprador ser indiferente entre submeter o lance $\beta(r)$ e não participar do leilão.

Desta forma, por (4.16) temos:

$$\Pi(r, r) = rF_K(r) - m^A(r) = 0$$

Donde

$$m^A(r) = rF_K(r) \quad (4.19)$$

Agora reescrevendo a equação diferencial (4.18) para $m^A(v)$ temos:

$$\frac{d}{dv}m^A(v) = vf_K(v)$$

Cuja condição inicial é dada por (4.19) e a solução será:

$$m^A(v) = rF_K(r) + \int_r^v xf_K(x)dx \quad (4.20)$$

Que também pode ser escrita, integrando por partes, como:

$$m^A(v) = vF_K(v) - \int_r^v F_K(x)dx \quad (4.21)$$

Substituindo v por z em (4.18) obtemos uma expressão para $\frac{d}{dz}m^A(z)$ que substituindo em (4.17) resulta em:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}(z, v) = (v - z)f_K(z)$$

Que indica que $\Pi(z, v)$ é crescente em z para $z < v$ e crescente para $z > v$, logo é maximizada quando $z = v$.

Agora, tomando o problema do ponto de vista do vendedor, o pagamento esperado de um comprador é dado pela esperança de (4.21) em v :

$$E[m^A(V)] = \int_r^\omega vF_K(v)f(v)dv - \int_r^\omega \int_r^v F_K(x)f(v)dx dv$$

Invertendo a ordem de integração da integral dupla resulta em:

$$E[m^A(V)] = \int_r^\omega v F_K(v) f(v) dv + \int_r^\omega \int_x^\omega F_K(x) f(v) dv dx$$

Resolvendo a segunda integral temos $\int_r^\omega F_K(x)(1 - F(v)) dv dx$ e trocando v por x na primeira unimos as integrais:

$$E[m^A(V)] = \int_r^\omega F_K(x)[F(x) + xf(x) - 1] dx$$

Que é o pagamento esperado de cada licitante *ex ante*. A receita esperada é a soma dos pagamentos esperados e uma função do preço de reserva r dada, portanto, por:

$$R(r) = N \int_r^\omega F_K(x)[F(x) + xf(x) - 1] dx \quad (4.22)$$

Que independe do mecanismo de leilão. Assim temos provado:

Proposição 4.8. *Suponha que todos os valores são independente e identicamente distribuídos e todos os N licitantes com demandas unitárias são neutros ao risco. Então, qualquer equilíbrio e crescente de qualquer leilão padrão para K objetos idênticos com preço de reserva r produz:*

(a) *O mesmo pagamento esperado pelos compradores, dado por:*

$$m^A(v) = r F_K(r) + \int_r^v x f_K(x) dx$$

(b) *A mesma receita esperada para o vendedor, dada por:*

$$R(r) = N \int_r^\omega F_K(x)[F(x) + xf(x) - 1] dx$$

Proposição 4.9. *O preço de reserva r que maximiza a receita esperada do vendedor é dado por:*

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)}$$

Demonstração. O preço de reserva ótimo para o vendedor é aquele que maximiza (4.22) e deve satisfazer a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial R}{\partial r}(r) = -NF_K(r)[F(r) + rf(r) - 1] = 0 \quad (4.23)$$

Que no ótimo nos dá:

$$r = \frac{1 - F(r)}{f(r)} = \frac{1}{\lambda(r)} \quad (4.24)$$

Se $r > (1 - F(r))/f(r)$ teremos que (4.23) será negativo e (4.22) será decrescente e se $r < (1 - F(r))/f(r)$, (4.23) será positivo e (4.22) crescente, de forma que a condição dada por (4.24) de fato maximiza (4.22). ■

$\lambda(r)$ em (4.24) é a função risco, que representa a probabilidade instantânea do evento ocorrer em r dado que não ocorreu até r . Neste caso, pode-se interpretar como uma regra de *mark up*. Este preço de reserva ótimo é que independe tanto do número de licitantes como do número de objetos que estão sendo vendidos, de forma que é exatamente igual ao encontrado por Riley e Samuelson (1981) para leilões de um único objeto.

Proposição 4.10. *Tanto o Leilão Discriminatório como o Leilão de Preço Uniforme Mínimo e o Leilão de Preço Uniforme Máximo geram o mesmo pagamento esperado pelos compradores e a mesma receita esperada pelo vendedor para um dado preço de reserva r .*

Demonstração. Vamos determinar estratégias de equilíbrio para leilões a partir da Proposição 4.8 e aplicá-la para completar a demonstração.

Leilão Discriminatório: O pagamento esperado é dado pelo próprio lance vezes a

probabilidade de ganhar, de forma que, por (4.20) podemos escrever:

$$m^D(v) = rF_K(r) + \int_r^v xf_K(x)dx = \beta^D(v)F_K(v)$$

Ou simplesmente:

$$\beta^D(v) = r \frac{F_K(r)}{F_K(v)} + \frac{1}{F_K(v)} \int_r^v xf_K(x)dx \quad (4.25)$$

Que por (B.9) nos dá:

$$\beta^D(v) = E[\max\{r, Y_k^{(n)}\} | Y_k^{(n)} \leq v]$$

Derivando (4.25), podemos verificar que a estratégia é crescente e portanto satisfaz as condições que supusemos sobre ela:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta^D}{dv}(v) &= \frac{vf_K(v)F_K(v) - f_K(v) \int_r^v xf_K(x)dx}{F_K(v)^2} \\ &= \frac{f_K(v)}{F_K(v)^2} \left[vF_K(v) - vF_K(v) + rF_K(r) + \int_r^v F_K(x)dx \right] \\ &= \underbrace{\frac{f_K(v)}{F_K(v)^2}}_{>0} \underbrace{\left[rF_K(r) + \int_r^v F_K(x)dx \right]}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Como o Leilão Discriminatório é um leilão padrão e o equilíbrio é crescente, então se enquadra nos pressupostos da Proposição 4.8.

Leilão de Preço Uniforme Mínimo: O pagamento esperado de um comprador é o valor esperado do máximo entre o K -ésimo maior lance dos outros compradores e o preço de reserva. Como um comprador com avaliação r deve ser indiferente entre participar ou não do leilão, então $\beta(r) = r$. Isso porque se $\beta(r) > r$, então o comprador teria *payoff* negativo com probabilidade positiva e não maximizaria seu *payoff* esperado. Portanto podemos escrever, usando (4.20):

$$m^V(v) = rF_K(r) + \int_r^v \beta(x)f_K(x)dx = rF_K(r) + \int_r^v xf_K(x)dx$$

Manipulando algebricamente chegamos que:

$$\int_r^v \underbrace{(\beta(x) - x)}_{>0} \underbrace{f_K(x)}_{>0} dx = 0$$

Logo $\beta^V(v) = v$. Obviamente é uma função crescente e portanto satisfaz a condição que supusemos para encontrá-la. Como o Leilão de Preço Uniforme Mínimo é um leilão padrão e o equilíbrio é crescente, então se enquadra nos pressupostos da Proposição 4.8.

Leilão de Preço Uniforme Máximo: O pagamento esperado pode ser escrito como:

$$m^U(v) = rF_K(r) + \beta(v)[F_K(v) - F_{K-1}(v)] + \int_r^v \beta(x)f_{K-1}(x)dx$$

Igualando esta expressão a (4.20) e manipulando algebricamente chegamos a:

$$\beta(v)[F_K(v) - F_{K-1}(v)] + \int_r^v \beta(x)f_{K-1}(x)dx - \int_r^v xf_K(x)dx = 0$$

Derivando esta expressão com relação a v chegamos a:

$$\beta'(v)[F_K(v) - F_{K-1}(v)] + \beta(v)f_K(v) = vf_K(v)$$

Esta equação diferencial é visualmente idêntica a (4.5). A única diferença entre elas é a condição inicial, que para esta nova é dada por $\beta(r) = r$ pelo mesmo motivo dado para a

estratégia do Leilão de Preço Uniforme Mínimo. Com isso, a solução será dada por:

$$\beta^U(v) = r \frac{F(r)^{N-K}}{F(v)^{N-K}} + \frac{1}{F(v)^{N-K}} \int_r^v x(N-K)F(x)^{N-K-1}f(x)dx$$

Integrando por partes:

$$\beta^U(v) = v - \int_r^v \frac{F(x)^{N-K}}{F(v)^{N-K}} dx$$

Logo $\beta^U(\cdot)$ é crescente uma vez que $\beta^U(v) < v$ e:⁴

$$\frac{d\beta^U}{dv} = (v - \beta^U(v))(N-K) \frac{f(v)}{F(v)} > 0$$

Sendo assim, a função satisfaz as condições que supusemos para encontrá-la. Como o Leilão de Preço Uniforme Máximo é um leilão padrão e o equilíbrio é crescente, então se enquadra nos pressupostos da Proposição 4.8. ■

Finalmente, ao estipular um preço de reserva, os leilões perdem sua característica de eficiência. Isso porque, se o vendedor está disposto a vender os objetos por qualquer quantia não negativa, existe uma probabilidade de $F_K^{(N)}(r)$ de que pelo menos uma unidade deixe de ser vendida a um comprador com avaliação positiva, porém abaixo do preço de reserva, e o vendedor estaria disposto a vender a unidade por este preço. Esta perda pode ser interpretada como o peso morto decorrente do exercício do poder de monopólio do vendedor.

⁴Lembrando que

$$\frac{f_K(v)}{F_K(v) - F_{K-1}(v)} = (N-K) \frac{f(v)}{F(v)}.$$

Capítulo 5

Comentários Finais

Leilões são mecanismos de compra e venda utilizados desde a Antigüidade. Provavelmente o primeiro registro foi dado por Heródoto sobre um leilão esposas na Babilônia por volta de 500 A.C. Sua utilização na sociedade é bastante ampla, abrangendo desde a venda de obras de arte, vinhos, flores, gado até títulos de dívida soberana, inclusive os brasileiros. Também observamos leilões de compra, usado para as licitações do governo ou de empresas em busca da melhor oferta em termos de preço para prover suas necessidades de consumo. Leilões são utilizados pela rapidez na realização da troca, por revelar informações sobre as avaliações dos licitantes e como forma de prevenir a desonestidade na transação entre comprador e vendedor. Por isso, há um grande interesse em pesquisar os diferentes mecanismos e suas propriedades.

A literatura sobre leilões como jogo de informação incompleta é relativamente recente, tendo início com o trabalho de Vickrey (1961), porém bastante vasta. Atualmente já existem livros textos condensando uma boa parte da literatura e unificando as notações, como Krishna (2002), de onde procuramos extrair o padrão de nossas notações.

O caso de leilões de um único objeto é o mais estudado nesta literatura. Dentre os

mecanismos que se destacam estão os leilões de envelope selado de primeiro ou segundo preços e os leilões abertos inglês e holandês. Já os leilões de vários objetos ainda são pouco explorados na literatura. A maior dificuldade em estudar estes leilões vem da impossibilidade de estender alguns resultados do caso mais simples, de um único objeto. No entanto, existe um caso particular, quando os objetos são idênticos e as demandas são unitárias, em que se elimina o problema de assimetria com que os compradores tratam cada um dos objetos que demandam.¹ Com isso é possível estender vários resultados dos leilões de um único objeto.

Neste trabalho procuramos explorar uma lacuna na literatura de leilões de vários objetos idênticos. Essa lacuna surge da possibilidade de existir mais de um preço possível para um leilão de preço uniforme. Isso porque o preço que equilibra a oferta fixada pelo vendedor com a demanda formada pelos lances dos compradores admite que as trocas sejam realizadas a qualquer preço entre o maior lance perdedor e o menor vencedor. Apesar de ser mais natural esperar observar a utilização do menor lance ganhador como determinante do preço,² a literatura enfocou o estudo no caso em que se paga o maior lance perdedor, o que resulta em uma estratégia dominante declarar a verdadeira avaliação pelo primeiro objeto que os compradores demandam. Esta lacuna existe tanto no caso de demanda múltipla como unitária.

Outra contribuição marginal, até onde vai nosso conhecimento, foi no estudo de leilões ótimos, literatura que começa com os trabalhos de Riley e Samuelson (1981) e Myerson (1981) para um único objeto. O primeiro trabalha de maneira mais simples, em busca de um preço de reserva ótimo para uma certa família de leilões, enquanto o segundo procura qual de todos os mecanismos possíveis otimiza a receita esperada do vendedor. Harris e Raviv (1981) observam que a equivalência de receitas obtida nos dois trabalhos anteriores

¹Veja, por exemplo, em Engelbrecht-Wiggans e Kahn (1998) a dificuldade que surge para determinar a estratégia de equilíbrio quando os compradores demandam dois objetos.

²Esta é a regra utilizada para leilões de títulos públicos do Brasil quando se opta pelo preço uniforme ao invés do discriminatório

pode ser generalizada para o caso de vários objetos e demandas unitárias, porém não há nenhuma derivação explícita para o preço ótimo de reserva, no qual chegamos, que é independente do número de compradores e de objetos vendidos, de forma que é o mesmo encontrado por Riley e Samuelson (1981) em sua análise de um único objeto.

Também motivamos o estudo dos mecanismos de leilão partindo da análise da troca entre um vendedor e vários compradores a partir de um jogo cooperativo. A primeira abordagem de jogos cooperativos para o fenômeno da troca foi dada por Shapley e Shubik (1972) no jogo de designação, onde havia vários compradores e vários vendedores cada um demandando ou possuindo um único objeto que poderia diferir entre os vendedores. A justificativa desta escolha foi analisar o problema independentemente do mecanismo de venda que será utilizado e determinar qual a gama de resultados que podemos esperar observar.

Encontramos no núcleo a possibilidade de discriminação de preços de forma tal que o monopolista poderia cobrar de cada comprador exatamente o valor que está disposto a pagar, ou seja, a discriminação de primeiro grau, no resultado ótimo para o vendedor no núcleo. Também encontramos um resultado ótimo para os compradores no núcleo que corresponde a um resultado do equilíbrio competitivo, especificamente quando o preço de equilíbrio competitivo é mínimo. Adicionalmente, na determinação do equilíbrio competitivo encontramos um resultado de preço máximo que é o melhor para o vendedor entre os possíveis equilíbrios competitivos, mas que não necessariamente corresponde ao ótimo para o vendedor no núcleo. Um ganho de se introduzir na análise a abordagem de jogos cooperativos se dá na interpretação de alguns resultados do jogo não-cooperativo.

A idéia de relacionar a teoria de leilões com o modelo clássico de monopólio não é nova. Está presente em McAfee e McMillan (1987) e em Bulow e Roberts (1989). Da mesma forma que usar o equilíbrio competitivo para determinar um conjunto de resultados possíveis e depois jogos não-cooperativos para analisar mecanismos que tentem implementar

estes resultados está presente em Sotomayor (1998, 1999). Nossa abordagem a partir do núcleo nos mostra que, apesar de os resultados de discriminação perfeita ou de equilíbrio competitivo de preço máximo serem esperados, ao introduzirmos mecanismos de leilões que produzem estes resultados, o comportamento estratégico dos compradores, nos modelos que estudamos, os permite tirar o poder de monopólio do vendedor. Resta a ele seu poder mais fraco, que é a determinação de um preço de reserva. Este vínculo entre os resultados do núcleo com o Teorema de Equivalência de Receitas, até onde vai nosso conhecimento da literatura, é nova. A interpretação deste resultado é que o monopolista perde poder de barganha ao se comprometer com as regras do leilão.

Ainda há muito o que fazer dentro de nosso modelo com demandas unitárias. É preciso estudar os casos de valores comuns, interdependentes e afiliados. Talvez seja possível estender os resultados de Maskin e Riley (2003) de unicidade das estratégias de equilíbrio para o caso de demandas unitárias, resultado que seria muito interessante já que vimos apenas os equilíbrios simétricos e a princípio nada impediria que houvesse outros assimétricos.

Bibliografia

- BULOW, J.; ROBERTS, J. The simple economics of optimal auctions. *Journal of Political Economy*, v. 97, n. 5, p. 1060–1090, 1989.
- DAVID, H. A. *Order Statistics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1970.
- ENGELBRECHT-WIGGANS, R.; KAHN, C. M. Multi-unit pay-your-bid auctions with variable awards. *Games and Economic Behavior*, v. 23, p. 25–42, 1998.
- HARRIS, M.; RAVIV, A. Allocation mechanisms and the design of auctions. *Econometrica*, v. 49, n. 6, p. 1477–1499, November 1981.
- KOSBIAU, A. R.; SOTOMAYOR, M. Leilões de objetos idênticos com demanda unitária: resultados introdutórios. *Economia Aplicada*, v. 5, n. 1, p. 175–211, 2001.
- KRISHNA, V. *Auction Theory*. [S.l.]: Academic Press, 2002.
- MASKIN, E.; RILEY, J. G. Uniqueness of equilibrium in sealed high-bid auctions. *Games and Economic Behavior*, v. 45, p. 395–409, 2003.
- MCAFEE, R. P.; MCMILLAN, J. Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature*, v. 25, p. 699–738, June 1987.
- MILGROM, P. R. Auctions and bidding: A primer. *Journal of Economic Perspectives*, v. 3, n. 3, p. 3–22, Summer 1989.
- MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the theory of statistics*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1963.
- MYERSON, R. B. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, v. 6, p. 58–73, 1981.
- RILEY, J. G.; SAMUELSON, W. F. Optimal auctions. *American Economic Review*, v. 71, n. 3, p. 381–392, June 1981.
- SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory*, v. 1, p. 111–130, 1972.
- SOTOMAYOR, M. Um simples mercado de compra e venda. *Revista de Econometria*, v. 18, n. 2, p. 171–214, Novembro 1998.

SOTOMAYOR, M. Estrutura estratégica de um simples mercado de compra e venda. *Revista de Econometria*, v. 19, n. 2, p. 421-468, Novembro 1999.

SPANOS, A. *Probability theory and statistical inference: econometric modeling with observational data*. New York: Cambridge University Press, 1999.

VICKREY, W. Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders. *Journal of Finance*, v. 16, p. 8-37, 1961.

WOLFSTETTER, E. Auctions: An introduction. *Journal of Economic Surveys*, v. 10, n. 4, p. 367-420, 1996.

Apêndice A

Provas omitidas

Demonstração da Proposição 4.6. Suponha que no leilão discriminatório com preço de reserva r exista uma estratégia de equilíbrio simétrico $\beta(v)$ crescente e diferenciável. Em equilíbrio, um licitante com valor r deve ser indiferente entre submeter um lance e não participar do leilão, de forma que:

$$\Pi(\beta(r), r) = (r - \beta(r))F_K(r) = 0$$

O que nos dá $\beta(r) = r$. Suponha que todos os licitantes menos o i estejam seguindo esta estratégia. Então o licitante i tem o seguinte *payoff* esperado quando tem valor $v \geq r$ e lança b :

$$\Pi(b, v) = (v - b)F_K(\beta^{-1}(b)) \tag{A.1}$$

Para maximizar (A.1) escolhendo b , temos a condição de primeira ordem: Leilão discriminatório:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b}(b, v) = (v - b) \frac{f_K(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - F_K(\beta^{-1}(b))$$

Mas como $\beta(\cdot)$ é equilíbrio simétrico, devemos ter que no ótimo $b = \beta(v)$, logo:

$$(v - \beta(v)) \frac{f_K(v)}{\beta'(v)} - F_K(v) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Rearranjando temos:

$$\beta'(v)F_K(v) + \beta(v)f_K(v) = vf_K(v)$$

Em que o primeiro termo é uma derivada de um produto. Logo, aplicando o teorema fundamental do cálculo e o fato de $\beta(\tau) = \tau$ temos:

$$\beta(v) = \tau \frac{F_K(\tau)}{F_K(v)} + \frac{1}{F_K(v)} \int_{\tau}^v x f_K(x) dx \quad (\text{A.3})$$

Que por (B.9) corresponde a:

$$\beta(v) = E[\max\{\tau, Y_K^{(N-1)}\} | Y_K^{(N-1)} < v]$$

Agora é necessário mostrar que a expressão satisfaz as propriedades que supusemos para encontrá-la. A diferenciabilidade segue da diferenciabilidade da função de distribuição $F(\cdot)$, que leva à diferenciabilidade das distribuições das estatísticas de ordem correspondentes.

Para o fato de ser crescente, podemos integrar por partes o segundo membro de (A.3):

$$\beta(v) = v - \int_r^v x \frac{F_K(x)}{F_K(v)} dx \quad (\text{A.4})$$

Logo $\beta(v) < v$, o que em (A.2) resulta em $\beta'(v) > 0$, uma vez que $F_K(\cdot)$ e $f_K(\cdot)$ são sempre positivas.

Falta apenas mostrar que $\beta(\cdot)$ maximiza, e não minimiza, o *payoff* esperado, uma vez que só temos até agora a satisfação da condição de primeira ordem. De fato, se tomarmos um valor z qualquer, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Pi(\beta(z), v) &= \left(v - \frac{\int_r^z x f_K(x) dx}{F_K(z)} \right) F_K(z) \\ &= v F_K(z) - z F_K(z) + \int_r^z F_K(x) dx \\ &= (v - z) F_K(z) + \int_r^z F_K(x) dx \end{aligned}$$

usando (A.4) na segunda igualdade.

Logo obtemos

$$\Pi(\beta(v), v) - \Pi(\beta(z), v) = (z - v) F_K(z) - \int_v^z F_K(x) dx \geq 0$$

seja $z \geq v$ ou $z \leq v$. Para ver isso, note que se $z > v$, então $F_K(z) > F_K(v)$, logo $F_K(x)$ na integral será sempre menor que no primeiro termo. Por outro lado, se $z < v$, então $F_K(z) < F_K(v)$ e $F_K(x)$ na integral será sempre maior que no primeiro termo. Como o Teorema 4.2 é um caso particular com $r = 0$, então a prova está completa. ■

Determinando $r = 0$ temos a demonstração da Proposição 4.2

Apêndice B

Estatísticas de Ordem

Este apêndice oferece os conceitos básicos de estatísticas de ordem suficientes para este trabalho. Sua maior parte foi baseada nos apêndices de Krishna (2002) e em David (1970). Nos trabalhos sobre leilões as estatísticas de ordem são numeradas na ordem reversa do que se costuma na literatura de estatística, por isso a nomenclatura aqui não confere com a de David (1970). Outro apêndice útil pode ser encontrado em Kosbiau e Sotomayor (2001) e resultados mais básicos de teoria de probabilidade e distribuição de variáveis aleatórias podem ser encontrados em Spanos (1999) e Mood *et al.* (1963).

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variáveis aleatórias contínuas independentes com função de distribuição $F(\cdot)$ e correspondente densidade $f(\cdot)$. Considere um rearranjo $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ dessas variáveis de tal sorte que $Y_1^{(n)} \geq Y_2^{(n)} \geq \dots \geq Y_n^{(n)}$. As variáveis aleatórias $Y_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n$ são chamadas estatísticas de ordem.

A função de distribuição de uma estatística de ordem $Y_k^{(n)}$ é dada por:

$$F_k^{(n)}(y) = \underbrace{F_{k-1}^{(n)}(y)}_{(i)} + \underbrace{\binom{n}{k-1} F(y)^{n-k+1} [1 - F(y)]^{k-1}}_{(ii)} \quad (\text{B.1})$$

Em que (i) corresponde à probabilidade de $Y_{k-1}^{(n)} < y$ e (ii) corresponde à probabilidade de exatos $n - k + 1$ valores de X estarem abaixo de y e $k - 1$ estarem acima vezes as combinações possíveis que essa configuração pode ocorrer. No caso de $k = 1$ temos:

$$F_1^{(n)}(y) = F(y)^n$$

A função densidade de probabilidade de $Y_k^{(n)}$ pode ser obtida a partir da análise do evento $y < Y_k^{(n)} \leq y + dy$ que deve se realizar da seguinte maneira: $X_i \leq y$ para $n - k$ dos X_i , $y < X_i \leq y + dy$ para um X_i e $X_i > y$ para os $k - 1$ dos X_i restantes. O número de configurações possíveis em que isso pode ocorrer é dado por

$$\frac{n!}{(n - k)!1!(k - 1)!}$$

e cada probabilidade por

$$F(y)^{n-k} [F(y + dy) - F(y)] [1 - F(y + dy)]^{k-1}$$

de forma que para dy pequeno,

$$\begin{aligned} Pr\{y < Y_k^{(n)} \leq y + dy\} &= \frac{n!}{(n - k)!(k - 1)!} \times \\ &\times F(y)^{n-k} [F(y + dy) - F(y)] [1 - F(y + dy)]^{k-1} + O(dy^2) \end{aligned}$$

em que $O(dy^2)$ significa um termo de ordem $(dy)^2$ representando a probabilidade da realização de $y < Y_k^{(n)} \leq y + dy$ em que mais de um X_i está em $[y, y + dy]$. Dividindo ambos os lados da equação por dy e fazendo $dy \rightarrow 0$ chegamos à expressão

$$f_k^{(n)}(y) = \frac{n!}{(n - k)!(k - 1)!} F(y)^{n-k} [1 - F(y)]^{k-1} f(y) \quad (B.2)$$

Também é fácil perceber que:

$$f_k^{(n-1)}(y)[1 - F(y)] = \frac{k}{n} f_{k+1}^{(n)}(y) \quad (\text{B.3})$$

A partir de (B.2) e (B.1) podemos escrever a seguinte relação útil:

$$\frac{f_k^{(n)}(y)}{F_k^{(n)}(y) - F_{k-1}^{(n)}(y)} = (n - k + 1) \frac{f(y)}{F(y)} \quad (\text{B.4})$$

De maneira similar podemos escrever a função densidade de probabilidade conjunta de duas estatísticas de ordem $Y_k^{(n)}$ e $Y_s^{(n)}$ com $s > k$ como:

$$f_{k,s}^{(n)}(y_k, y_s) = \frac{n! F(y_s)^{n-s} [F(y_k) - F(y_s)]^{s-k-1} [1 - F(y_k)]^{k-1} f(y_s) f(y_k)}{(n-s)!(s-k-1)!(k-1)!} \quad (\text{B.5})$$

Sendo assim podemos escrever a função densidade de probabilidade de uma variável $Y_s^{(n)}$ condicionada a um certo valor de $Y_k^{(n)} = y_k$ como a razão entre (B.5) e (B.2), logo:

$$f_{s|Y_k^{(n)}=y_k}^{(n)}(y_s) = \frac{(n-k)!}{(n-s)!(s-k-1)!} \frac{F(y_s)^{n-s} [F(y_k) - F(y_s)]^{s-k-1} f(y_s)}{F(y_k)^{n-k}}$$

Se $s = k + 1$ e $y_k = v$ podemos então escrever:

$$f_{k+1|Y_k^{(n)}=v}^{(n)}(y_{k+1}) = (n-k) \frac{F(y_{k+1})^{n-k-1} f(y_{k+1})}{F(v)^{n-k}} \quad (\text{B.6})$$

É direto observar que (B.6) corresponde à função densidade de probabilidade de $Y_1^{(n-k)}$ condicionado a $Y_1^{(n-k)} \leq v$ também. Com isso temos que:

$$E[Y_1^{(n-k)} | Y_1^{(n-k)} \leq v] = E[Y_{k+1}^{(n)} | Y_k^{(n)} = v] \quad (\text{B.7})$$

Para funções de variáveis aleatórias, temos que se Z tem distribuição $F_Z(\cdot)$ com densidade $f_Z(\cdot)$, então:

$$E[g(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f_Z(z) dz$$

Em particular, se $Z = Y_k^{(n)}$ e $g(z) = \max\{r, z\}$, então:

$$\begin{aligned} E[\max\{r, Y_k^{(n)}\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \max\{r, y\} f_k^{(n)}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^r r f_k^{(n)}(y) dy + \int_r^{\infty} y f_k^{(n)}(y) dy \end{aligned}$$

Logo,

$$E[\max\{r, Y_k^{(n)}\}] = r F_k^{(n)}(r) + \int_r^{\infty} y f_k^{(n)}(y) dy \quad (\text{B.8})$$

Resultado este que é facilmente estendido, caso $v \geq r$, para:

$$E[\max\{r, Y_k^{(n)}\} | Y_k^{(n)} \leq v] = r \frac{F_K^{(n)}(r)}{F_K^{(n)}(v)} + \frac{1}{F_K^{(n)}(v)} \int_r^v y f_k^{(n)}(y) dy \quad (\text{B.9})$$

Ou para:

$$E[\max\{r, Y_{k+1}^{(n)}\} | Y_k^{(n)} = v] = r \frac{F(r)^{n-k}}{F(v)^{n-k}} + \frac{1}{F(v)^{n-k}} \int_r^v y dF(y)^{n-k} \quad (\text{B.10})$$

Ademais, se Z e W são duas variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada pela

densidade $f_{Z,W}(\cdot, \cdot)$, então:

$$\begin{aligned} E_Z[E[g(W)|Z]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[g(W)|Z = z]f_Z(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(w)f_{W|Z}(w)dwf_Z(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(w)\frac{f_{Z,W}(z, w)}{f_Z(z)}f_Z(z)dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(w)f_{Z,W}(z, w)dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(w)f_W(w)dw \end{aligned}$$

Logo:

$$E_Z[E[g(W)|Z]] = E[g(W)]$$