CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA RENDA E DA POSSE DA TERRA NO BRASIL

RODOLFO HOFFMANN

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz», da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Livre-docente.

PIRACICABA
Estado de São Paulo
1971

A meus pais

CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DA RENDA E DA POSSE DA TERRA NO BRASIL

Rodolfo Hoffmann

UMA CORREÇÃO - 2/8/1972

Nos cálculos que levaram aos resultados apresentados no Quadro (p.) as pessoas inativas sem rendimento foram, incorretamente, consideradas nos totais referentes ao setor urbano e à economia como um todo. Considerando-se apenas as pessoas que recebem renda e as pessoas ativas sem rendimento os resultados são:

Quadro 3 (corrigido) - Pessoas Ativas com Renda Nula como Fração (S) da Soma do Número de Pessoas que Recebem Renda com o Número de Pessoas Ativas com Renda Nula, e Valor da Expressão S+T (1-S), para o Brasil, por Regiões e Setores, em 1960.

Setor		Brasil	Região		
			Nordeste	Leste	Sul
Total	S	0,144	0,182	0,125	0,135
	S + T (1 - S)	0,457	0,635	0,485	0,352
Primário	S	0,261	0,254	0,242	0,288
	S + T (1 - S)	0,484	0,492	0,484	0,441
Urbano	S	0,014	0,028	0,009	0,013
	S + T (1 - S)	0,332	0,605	0,367	0,239

Note-se, entretanto, que essa correção não altera nenhuma das conclusões obtidas a partir desse quadro.

AGRADECIMENTOS

Somos gratos ao Professor Érico da Rocha Nobre, pelo estímulo constante e pela cuidadosa revisão do texto original.

Somos gratos ao Professor Izaias Rangel Nogueira pela revisão crítica do capítulo de metodologia.

Agradecemos ao Professor Donald W. Larson, que leu o manuscrito e fez sugestões muito úteis, e também a todos os membros do Departamento de Ciências Sociais Aplicadas da ESALQ, cujo apôio foi de grande valia.

Agradecemos à Fundação Ford que, através de convênio com a ESALQ/USP, forneceu os recursos financeiros para realização desta pesquisa.

Agradecemos à Sra. Elisa S. Peron pelo cuidadoso trabalho de datilografia realizado.

Resta apenas acrescentar, como é de praxe, que os que acabam de ser mencionados nenhuma responsabilidade têm pelos erros cometidos, dos quais nem seus dedicados esforços combinados nos puderam salvar.

ÍNDICE

Pág.

LISTA DOS QUADROS VI

LISTA DAS FIGURAS X

LISTA DOS APÊNDICES XI

1. INTRODUÇÃO 1

2. MÉTODOS DE MENSURAÇÃO DO GRAU DE CONCENTRAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA RENDA 4

2.1. A Curva de Lorenz e o Índice de Gini 4

2.2. Uma Modificação no Método de Obtenção do Índice de Gini 8

2.3. A Redundância e o Índice de Theil 16

2.4. A Curva de Pareto 20

2.5. A Equação da Curva de Lorenz correspondente a uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros 25

2.6. O Índice de Lorenz como Função do Parâmetro α de uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros 27

2.7. A Redundância como Função do Parâmetro α de uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros 28

2.8. A Equação da Curva de Lorenz Correspondente a uma Distribuição de Pareto com três Parâmetros 30

2.9. O Índice de Lorenz como Função dos Parâmetros α e K de uma Distribuição de Pareto com três Parâmetros 32

2.10. Estimação dos Parâmetros da Equação de Pareto 33

3. A CONCENTRAÇÃO DA POSSE DA TERRA NO BRASIL 39

3.1. Comparação entre os Índices de Gini e de Lorenz da Concentração da Posse da Terra no Brasil 39

Pág.

3.2. Variação da Concentração da Posse da Terra no Brasil ... 41
3.3. Decomposição da Redundância da Distribuição da Posse da Terra no Brasil 47
3.4. Concentração da Posse da Terra Quando se Consideram as Famílias sem Terra Ligadas à Agropecuária 49
3.5. A Distribuição da Posse da Terra em Nove Regiões Agríoolas do Estado de São Paulo 52
3.6. Distribuição da Posse da Terra no Brasil de Acôrdo com o Número de Módulos de cada Imóvel Rural 54
3.7. Origens Históricas da Concentração da Posse da Terra no Brasil 60

4. A DISTRIBUIÇÃO DA RENDA NO BRASIL 65
4.1. Índices já Publicados 65
4.2. Estimativas dos Três Parâmetros da Equação de Pareto ... 71
4.3. Distribuição da Renda por Estratos 75
4.4. Índices de Concentração da Renda no Brasil 77
4.5. Decomposição, Conforme Setores e Regiões, da Redundância da Distribuição da Renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul 83
4.6. Distribuição da Renda Familiar no Brasil Urbano 86
4.7. Distribuição dos Empregados Administrativos e Operários em Estratos Conforme o Salário 90
4.8. Variações na Concentração da Distribuição da Renda no Brasil 99
4.9. Algumas Causas do Grau de Concentração da Distribuição da Renda 105

5. RESUMO E CONCLUSÕES 113

6. SUMMARY AND CONCLUSIONS 122

7. BIBLIOGRAFIA 131

LISTA DOS QUADROS

Pág.

1. Comparação entre os Índices de Gini e de Lorenz da Concentração da Posse da Terra no Brasil 40

2. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo de 1940 43

3. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Regiões e Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo Agrícola de 1950 44

4. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Regiões e Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo Agrícola de 1960 45

5. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Unidades da Federação, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967 46

6. Decomposição da Redundância da Distribuição da Posse da Terra no Brasil em 1950, 1960 e 1967 48

7. Número de Famílias oujo Chefe tem Como Atividade Principal a Agricultura, a Pecuária ou a Silvicultura, Fração (S) dessas Famílias que não Possuem Terra e Valor da Expressão S + T(1 - S) 51

8. Índices de Concentração da Posse da Terra no Estado de São Paulo, por Região Agrícola, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967 (dados tabulados pelo IEA) 53

Pág.

9. Componentes Intrarregional e Interregional da Redundância da Concentração da Posse da Terra no Estado de São Paulo, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967 (dados tabulados pelo IEA) 53

10. Distribuição dos Imóveis Rurais Conforme o Número de Módulos no Brasil em 1967. Estimativas dos Parâmetros da Equação de Pareto 56

11. Índice de Gini (G e P), Redundância (R) e Índice de Theil (T) da Concentração da Propriedade da Terra, Conforme o Número de Módulos de cada Imóvel Rural, no Brasil, por Regiões e Unidades da Federação, em 1967 59

12. Índice de Gini da Concentração da Renda em Diversos Países .. 67

13. Índice de Gini da Concentração da Renda, em Seis Países Latinoamericanos 68

14. Índice de Gini da Concentração da Renda no Brasil, por Setores e Regiões 69

15. Distribuição da Renda no Brasil, por Regiões e Setores. Estimativas dos Parâmetros da Equação de Pareto 74

16. Rendas Totais e Médias, por Setores e Regiões do Brasil, em 1960 76

17. Índice de Gini (G e P), Redundância (R) e Índice de Theil (T) da Concentração da Renda no Brasil, por Setores e Regiões, em 1960 78

18. Pessoas Ativas com Renda Nula como Fração do Número Total de Pessoas com Declaração de Renda (S) e Valor da Expressão S + T (1 - S) para o Brasil, por Regiões e Setores, em 1960 82

Pág.

19. Decomposição, Conforme Setores e Regiões, da Redundância da Distribuição da Renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul do Brasil, em 1960 85

20. Índices de Concentração da Renda Familiar em Cidades Brasileiras 88

21. Distribuição dos Empregados em Estratos Quanto ao Salário no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em abril de 1966. Estimativas dos Parâmetros da Equação de Pareto 91

22. Rendas Totais e Salários Médios dos Empregados no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966 92

23. Índice de Gini (G e P), Redundância (R) e Índice de Theil (T) da Concentração da Renda (recebida como salário) entre Empregados Administrativos e Operários, no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966 94

24. Decomposição da Redundância da Distribuição da Renda do Trabalho entre Empregados no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966 95

25. Índices do Salário Real e da Produtividade na Indústria Brasileira, no Período 1955-66 (Base: 1955 = 100) 100

26. Valor do Salário Mínimo Real Médio na Cidade de São Paulo de 1952 a 1970 101

27. Evolução da Taxa de Mortalidade Infantil no Município de São Paulo de 1960 a 1967 103

Pág.

28. Distribuição da Renda no Brasil em 1960. Porcentagem do Número de Pessoas em cada Estrato, Respectiva porcentagem da Renda Total Recebida e Renda Média do Estrato 150

29. Distribuição dos Empregados em Estratos Conforme o Salário, no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966. Porcentagem dos Empregados em cada Estrato, Respectiva Porcentagem de Renda Total do Trabalho Recebida e Salário Médio do Estrato 157

LISTA DAS FIGURAS

Pág.

1. Curva de Lorenz para Análise da Distribuição da Renda (X é a fração acumulada das pessoas e Y é a fração acumulada da renda) 5

2. Arcos de Parábola não se Ajustam bem aos Pontos da Curva de Lorenz 10

3. Determinação do Índice de Gini Modificado 11

4. Determinação da área ρ 14

5. A Curva de Pareto 23

6. Curva de Pareto (com 2 Parâmetros) ajustada aos dados de Distribuição da Renda na Região Sul, em 1960 70

LISTA DOS APÊNDICES

Pág.

1. Outra Dedução das Fórmulas para Obtenção das Estimativas dos Três Parâmetros da Equação de Pareto 141

2. Distribuição da Renda no Brasil em 1960. Porcentagem do Número de Pessoas em cada Estrato, Respectiva Porcentagem da Renda Total Recebida e Renda Média do Estrato 150

3. Distribuição dos Empregados em Estratos Conforme o Salário, no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966. Porcentagem dos Empregados em Cada Estrato, Respectiva Porcentagem de Renda Total do Trabalho Recebida e Salário Médio do Estrato 157

1. INTRODUÇÃO

Os ideais de igualdade apresentam-se com grande constância na história do pensamento humano. Os revolucionários francêses de 1789 clamavam por liberdade, fraternidade e igualdade. Para MYRDAL (1965, p. 167) "as origens dessas idéias encontram-se em período bem mais remoto da história da humanidade. Em linhas gerais, tôdas as grandes religiões e filosofias foram igualitárias. Por que e como se originou essa concepção idealista e pura da dignidade do homem e de que maneira manteve sua fôrça através de séculos e séculos de desigualdade e opressão esmagadora, é problema sociológico que ainda não tem solução".

Embora não devamos esquecer os aspectos filosóficos e sociológicos da distribuição da renda e da riqueza, neste trabalho analisaremos essencialmente os seus aspectos estatísticos e econômicos.

Êste trabalho visa, por um lado, contribuir para o aperfeiçoamento dos métodos de mensuração do grau de concentração da renda e da riqueza e, por outro lado, fornecer subsídios para a análise da distribuição da renda e da posse da terra no Brasil.

Às características da distribuição da riqueza e da renda ligam-se uma série de problemas de grande relevância para o desenvolvimento de um país. A distribuição da renda é uma das condicionantes básicas da poupança, do tipo de consumo e das importações de um país. FURTADO (1968) coloca como ponto central de sua explicação da relativa estagnação da economia brasileira, a partir de 1962, o "perfil de demanda" originado pela "tendência à concentração da renda que se tornou inerente ao processo de industrialização entre nós, reforçada por outros elementos da estrutura econômica nacional, particularmente o sistema fundiário".

A seguir descrevemos o conteúdo dos próximos capítulos dêsse trabalho.

No 2º capítulo, tratamos dos problemas estatísticos e matemáticos de mensuração do grau de desigualdade de distribuições de renda e riqueza. Propomos uma modificação no método de cálculo do índice de Gini, de maneira a levar em consideração a desigualdade dentro dos estratos de renda. Outro aspecto original dêsse capítulo é o ajustamento da curva de Pareto com três parâmetros de acôrdo com o método dos quadrados mínimos. Analisamos, também, as relações entre o índice de Lorenz e a redundância e os parâmetros da distribuição de Pareto.

No 3º capítulo, analisamos a distribuição da posse da terra no Brasil, utilizando os dados dos Censos Agrícolas de 1940, 1950 e

1960 e as informações do Cadastro do IBRA (Instituto Brasileiro de Reforma Agrária, hoje Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária) referentes a 1967.

No 4º capítulo, procuramos analisar, com os poucos dados disponíveis, a distribuição da renda no Brasil. Os "Resultados Preliminares" do Censo Demográfico de 1960, publicados pelo IBGE em 1965, são os únicos dados existentes que permitem uma análise da distribuição da renda no Brasil de âmbito nacional. Utilizamos também alguns dos resultados dos "Inquéritos Econômicos" publicados pelo IBGE em 1967 e, com base em dados de vários levantamentos (do Banco do Nordeste do Brasil, da Fundação Getúlio Vargas, etc.), determinamos índices de concentração da renda familiar em diversas cidades do Brasil. No 4º capítulo também discutimos, sumàriamente, alguns dos principais aspectos da estrutura econômica que condicionam a distribuição da renda.

No 5º capítulo resumimos o trabalho e assinalamos as suas principais conclusões.

2. MÉTODOS DE MENSURAÇÃO DO GRAU DE CONCENTRAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA RENDA

Para maior facilidade na explanação, referir-nos-emos, neste capítulo, à distribuição da renda, embora os mesmos métodos (índices) possam ser usados para medir o grau de concentração na distribuição da posse da terra (ver capítulo 3), da riqueza, da educação escolar, etc.

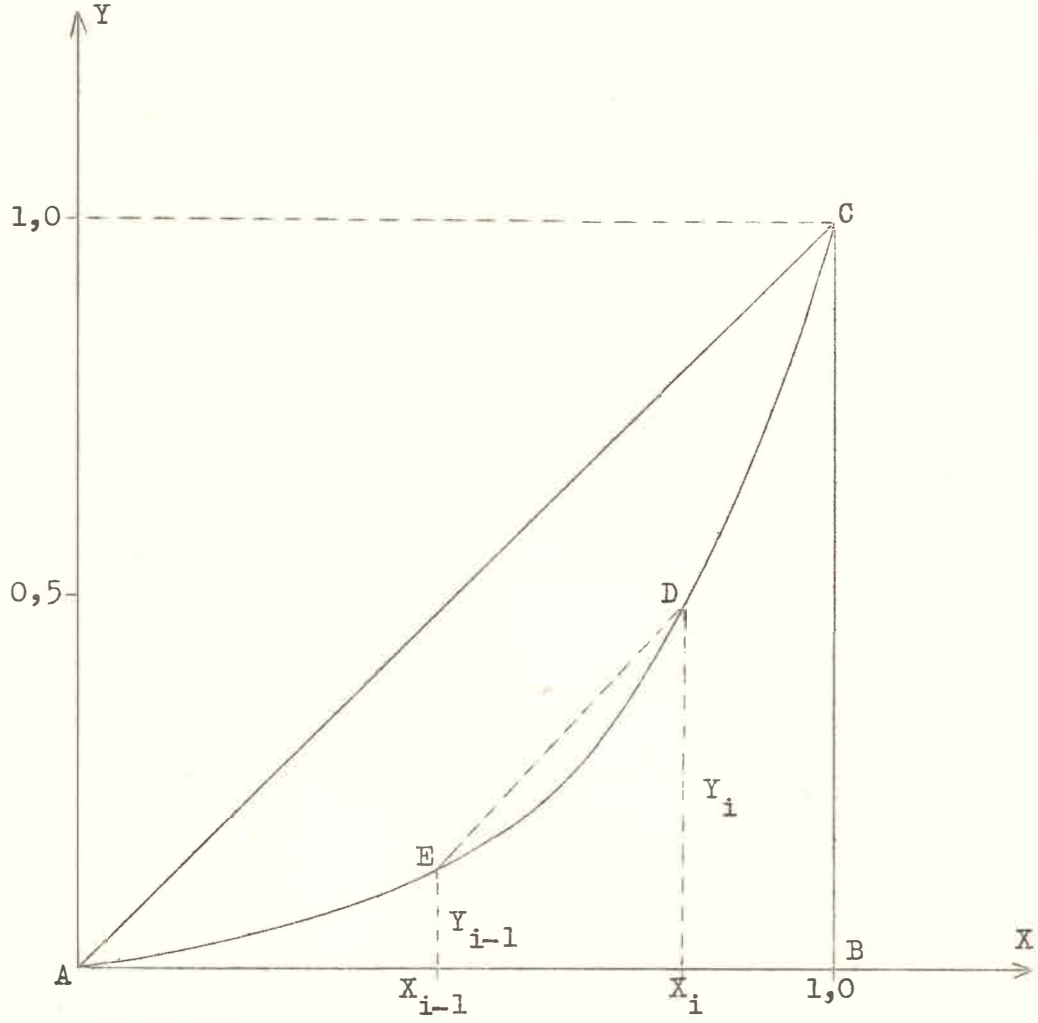
Consideraremos, inicialmente, os índices de concentração que podem ser obtidos quando dispomos do número de pessoas (ou famílias) em cada estrato de renda e da renda total auferida pelos elementos do estrato (secções 2.1, 2.2 e 2.3) e, posteriormente, analisaremos os métodos de determinação da renda total por estrato, quando os dados originais fornecem apenas o número de pessoas em cada estrato de renda (secção 2.4).

2.1. A Curva de Lorenz e o Índice de Gini

O grau de concentração da distribuição da renda pode ser visualizado mediante o traçado da curva de concentração ou curva de

Lorenz. Para traçar essa curva, num sistema de eixos cartesianos ortogonais, tomam-se como abscissas as frações acumuladas do número de pessoas, a partir daquelas de menor renda, e como ordenadas tomam-se as frações acumuladas da renda total recebida.

Figura 1. Curva de Lorenz para análise da distribuição da renda (X é a fração acumulada das pessoas e Y é a fração acumulada da renda).



Se a renda fôsse igualitàriamente distribuida, a cada fração acumulada do número de pessoas (X_i, i = 1,2,...,n) corresponderia uma igual fração acumulada da renda recebida (Y_i, i = 1,2,...,n). Tal situação seria representada pelo segmento de reta AC (ver Figura 1), chamado linha de perfeita igualdade ou reta de equidistribuição. No outro extremo teríamos o caso hipotético da perfeita desigualdade, representado pela linha ABC, a linha da perfeita desigualdade. Uma distribuição qualquer será, normalmente, representada por uma curva localizada entre as linhas da perfeita igualdade e da perfeita desigualdade, como a curva ADC na Figura 1. O nível de desigualdade da distribuição pode ser medido pela área compreendida entre a reta de equidistribuição e a curva de Lorenz (a área ACD na Figura 1), chamada "área de desigualdade". Definimos Índice de Lorenz (L) como a razão entre a área de desigualdade, medida no gráfico por meio de um planímetro, e a área do triângulo formado pela reta de equidistribuição e a linha de perfeita desigualdade (ver HOFFMANN, 1967, p. 13). No caso da Figura 1, temos:

$$L = \frac{\text{Área ACD}}{\text{Área ACB}}$$

O índice de Lorenz pode ser dado em porcentagem.

O índice de Gini (G), que, como veremos, é uma subestimativa do índice de concentração, pode ser obtido da seguinte maneira:

Inicialmente obtemos um valor aproximado da área compreendida entre a curva de Lorenz e o eixo das abscissas, calculando a área

do polígono cujos vértices são a origem dos eixos, o ponto B (ver Figura 1) e os pontos $(X_i; Y_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Êsse polígono pode ser decomposto em n trapézios (ou, mais precisamente, um triângulo e n - 1 trapézios). As bases do i-ésimo trapézio são Y_i e Y_{i-1} e sua altura é $(X_i - X_{i-1})$.

Note-se que $X_0 = 0$ e $Y_0 = 0$.

A área do i-ésimo trapézio é

$$S_i = \frac{Y_i + Y_{i-1}}{2} \quad (X_i - X_{i-1}) \tag{1}$$

Um valor aproximado da área de desigualdade é dado por

$$0,5 - \sum_{i=1}^{n} S_i$$

uma vez que, a área do triângulo ABC é 0,5. O índice de Gini é dado por

$$G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{0,5} = 1 - 2 \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2) obtemos:

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{n} (Y_i + Y_{i-1}) \quad (X_i - X_{i-1}) \tag{3}$$

Para exprimir o índice de Gini em porcentagem basta multiplicar o resultado acima por 100.

Observe-se que, no cálculo do índice de Gini, não se incluem na área de desigualdade as áreas compreendidas entre a curva de Lorenz e a poligonal cujos vértices são a origem dos eixos e os pontos $(X_i; Y_i)$. Isso faz com que o índice de Gini seja sempre uma subestimação da desigualdade real. Quando substituimos a curva de Lorenz pela poligonal estamos admitindo que dentro dos estratos a renda seja igualitàriamente distribuida.

É fácil verificar que para calcular o índice de Gini não precisamos calcular as frações acumuladas do número de pessoas (X_i) e da renda recebida (Y_i), podendo-se efetuar os cálculos diretamente com o número acumulado de pessoas (W_i) e a renda acumulada recebida (Z_i). Temos que $W_i = W_n \cdot X_i$ e $Z_i = Z_n \cdot Y_i$ pois W_n e Z_n são, respectivamente, o número total de pessoas e a renda total recebida. Multiplicando e dividindo a expressão (3) por $W_n \cdot Z_n$ obtemos:

$$G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (Z_i + Z_{i-1})(W_i - W_{i-1})}{W_n \cdot Z_n} \qquad (4)$$

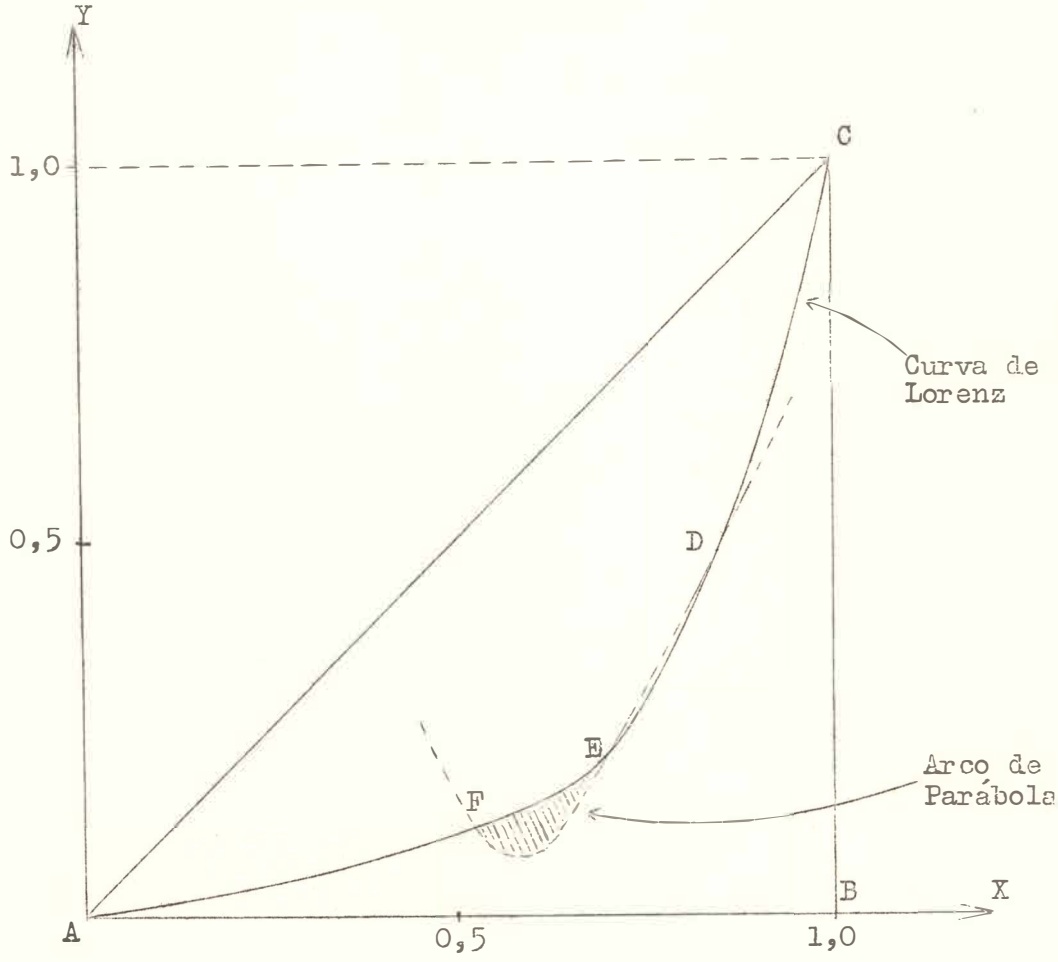
2.2. Uma Modificação no Método de Obtenção do Índice de Gini

Existe uma analogia evidente entre o método de cálculo do índice de Gini descrito na secção anterior e a "regra do trapézio" para integração aproximada (ver, por exemplo, GRANVILLE, SMITH e LONGLEY, 1956, p. 301 ou ALLEN, 1960, p. 450). Inspirados na regra de Simpson

para integração aproximada, pensamos em estimar a área entre a curva de Lorenz e o eixo das abscissas ajustando arcos de parábola aos pontos $(X_i; Y_i)$. Verificamos, entretanto, que a parábola não é uma função apropriada, conduzindo, frequentemente, a uma superestimativa da área de desigualdade. A Figura 2 mostra como isso acontece. A parábola que passa por três pontos (F, E e D) conhecidos da curva de Lorenz frequentemente apresenta vértice (ponto mínimo) dentro dos intervalos delimitados por êsses pontos. Se tomássemos o arco de parábola FED como parte da curva de Lorenz estaríamos incorrendo em êrro evidente pois, por definição, a curva de Lorenz nunca é descendente. Na Figura 2 hachuriamos a área que seria, indevidamente, incorporada à área de desigualdade.

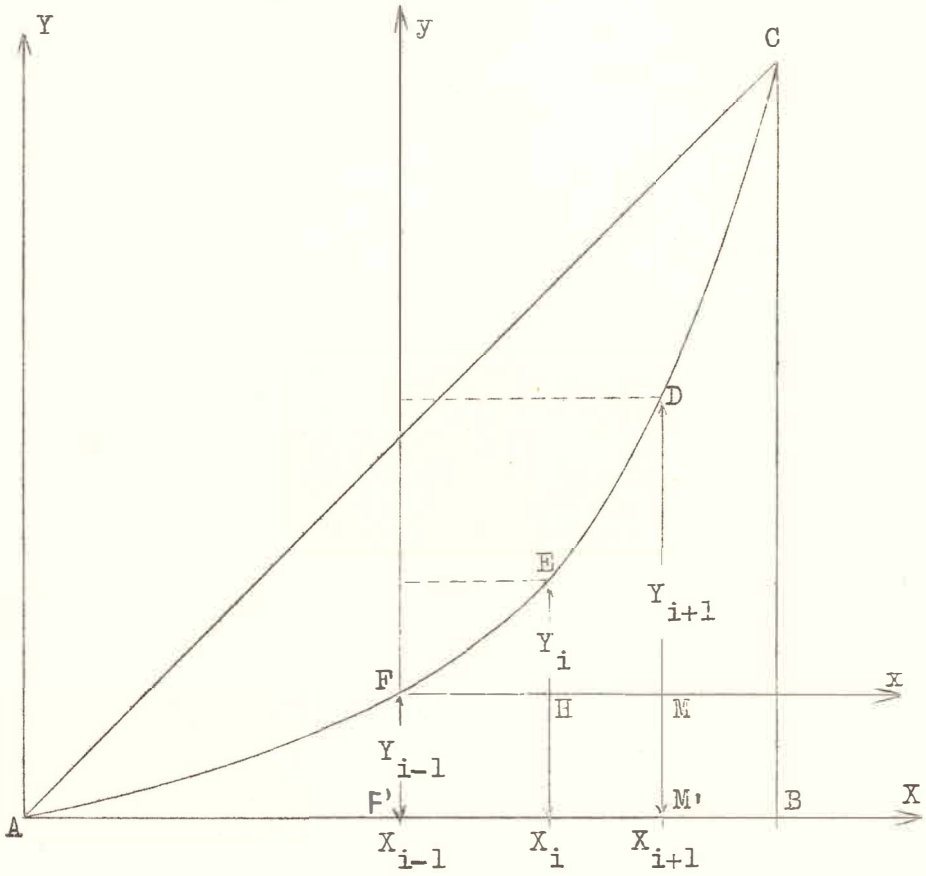
Tendo em vista os inconvenientes de utilizar arcos de parábola (como é feito na regra de Simpson para integração aproximada) optamos por utilizar arcos da função potência $Y = a X^b$ (onde a e b são parâmetros). Passemos então à dedução da fórmula de cálculo do índice de Gini modificado (índice P), obtido com base em arcos da função $Y = a X^b$.

Figura 2. Arcos de parábola não se ajustam bem aos pontos da curva de Lorenz.



Consideremos três pontos da curva de Lorenz: F, E e D (ver Figura 3), de tal maneira que, sendo E o i-ésimo ponto conhecido da curva (depois de A), i seja impar. Considerando um sistema de eixos

Figura 3. Determinação do índice de Gini modificado



coordenados com origem no ponto F, as coordenadas dêsses pontos são: $F(0;0)$, $E(x_i;y_i)$ e $D(x_i + x_{i+1}; y_i + y_{i+1})$ sendo $x_i = X_i - X_{i-1}$ a fração de pessoas no i-ésimo estrato, $x_i + x_{i+1} = X_{i+1} - X_{i-1}$ a fração de

pessoas nos estratos de ordem $\underline{i}$ e $\underline{(i + 1)}$, $y_i = Y_i - Y_{i-1}$ a fração da renda recebida pelos elementos do i-ésimo estrato e $y_i + y_{i+1} = Y_{i+1} - Y_{i-1}$ a fração da renda recebida pelos membros dos estratos de ordem $\underline{i}$ e $\underline{(i + 1)}$.

Os valores dos parâmetros da função $y = ax^b$, de maneira que a curva passe pelos pontos F, E e D, são dados pela resolução do sistema de equações

$$\begin{cases} y_i = ax_i^b \\ y_i + y_{i+1} = a(x_i + x_{i+1})^b \end{cases}$$

Obtemos:

$$b = \frac{\log (y_i + y_{i+1}) - \log y_i}{\log (x_i + x_{i+1}) - \log x_i} \qquad (5)$$

$$a = \text{antilog} \frac{\log (x_i + x_{i+1}) \cdot \log y_i - \log x_i \cdot \log (y_i + y_{i+1})}{\log (x_i + x_{i+1}) - \log x_i} \qquad (6)$$

Conhecidos os valores dos parâmetros $\underline{a}$ e $\underline{b}$, podemos determinar a área FEDM, dada por

$$\int_0^{x_i + x_{i+1}} ax^b \, dx = \frac{a\,(x_i + x_{i+1})^{b+1}}{b + 1}$$

Denominemos de θ_i a área F'FEDM'. Esta, composta pela área FEDM e pelo retângulo F'FMM', é dada por

$$\theta_i = Y_{i-1} \cdot (x_i + x_{i+1}) + \frac{a(x_i + x_{i+1})^{b+1}}{b + 1} \qquad (7)$$

Se n fôr par, o valor da área ϕ compreendida entre a curva de Lorenz e o eixo dos X é

$$\phi = \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \cdots + \theta_{n-3} + \theta_{n-1} \qquad (8)$$

Caso n seja impar, a área entre a curva de Lorenz e o eixo dos X é

$$\phi = \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \cdots + \theta_{n-2} + \rho \qquad (9)$$

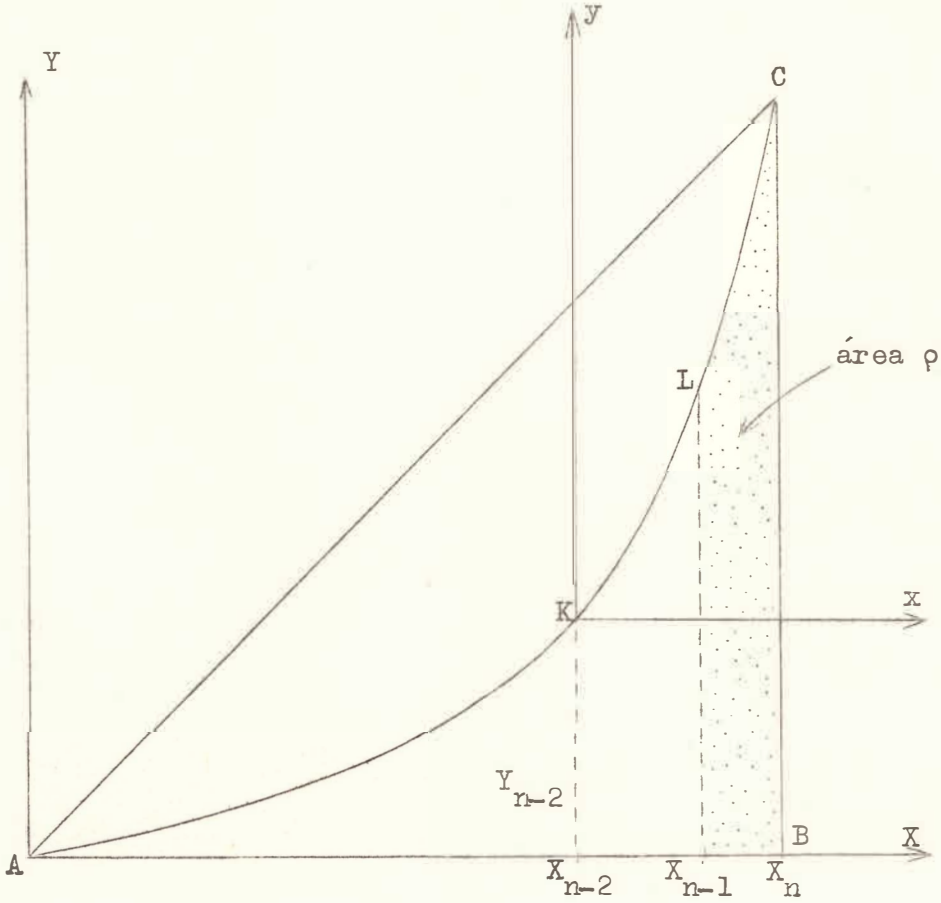
sendo ρ a área abaixo da curva de Lorenz, entre os pontos de abscissa X_{n-1} e X_n.

Vejamos como pode ser estimada a área ρ.

Considerando um sistema de eixos coordenados com origem no ponto K, o antipenúltimo ponto conhecido da curva de Lorenz (ver Figura 4), determinaremos inicialmente os parâmetros da função $y = ax^b$ de tal maneira que a curva passe pelos pontos K (0;0), $L(x_{n-1};y_{n-1})$ e $C(x_{n-1} + x_n; y_{n-1} + y_n)$. Para isso, resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} y_{n-1} = a \cdot x_{n-1}^b \\ y_{n-1} + y_n = a \cdot (x_{n-1} + x_n)^b \end{cases}$$

Figura 4. Determinação da área ρ



Obtemos:

$$b = \frac{\log (y_{n-1} + y_n) - \log y_{n-1}}{\log (x_{n-1} + x_n) - \log x_{n-1}} \qquad (10)$$

$$a = \text{antilog}\ \frac{\log(x_{n-1} + x_n) \cdot \log y_{n-1} - \log x_{n-1} \cdot \log(y_{n-1} + y_n)}{\log\ (x_{n-1} + x_n) - \log x_{n-1}} \qquad (11)$$

Em seguida, obtemos

$$\rho = Y_{n-2} \cdot x_n + \int_{x_{n-1}}^{x_{n-1} + x_n} ax^b dx =$$

$$= Y_{n-2} \cdot x_n + \frac{a\left[(x_{n+1} + x_n)^{b+1} - x_{n-1}^{b+1}\right]}{b + 1} \qquad (12)$$

As relações (5) a (12) mostram que a área ϕ pode ser obtida em função de ordenadas de pontos conhecidos da curva de Lorenz. Obtida a área ϕ , o índice P é dado por

$$P = 1 - \frac{\phi}{0,5} = 1 - 2\ \phi \qquad (13)$$

Caso, nas expressões (5) a (12), façamos os cálculos com w_i (Nº de pessoas em cada estrato), z_i (renda recebida pelos membros de um estrato) e Z_i em lugar de x_i, y_i e Y_i, respectivamente, o índice de Gini modificado é

$$P = 1 - \frac{2 \cdot \phi}{W_n \cdot Z_n} \qquad (14)$$

2.3. A Redundância e o Índice de Theil

Recentemente THEIL (1967) introduziu uma nova medida de concentração, baseada em conceitos da teoria da informação.

Se tivermos uma população com m indivíduos, sendo p_1, $p_2, \ldots, p_m$ as frações da renda total que cada um recebe, a redundância (R) da distribuição será

$$R = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log m \cdot p_j \qquad (15)$$

Quando usamos logaritmos naturais, como neste trabalho, a redundância é medida em nits.

No caso de completa igualdade na distribuição da renda, quando $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = \frac{1}{m}$, $R = 0$. No caso de perfeita desigualdade, isto é, quando um indivíduo recebe tôda a renda e os demais nada recebem, $R = \log m$, tomando-se

$$0 \cdot \log 0 = \lim_{x \to 0} x \cdot \log x = 0.$$

Verifica-se, portanto, que o valor máximo da redundância da distribuição de renda depende do número de indivíduos da população.

Consideremos uma população de m indivíduos em que T.m indivíduos nada recebem (T é a fração da população que não recebe renda) e a renda total está igualmente distribuida entre os m(1 - T) indivíduos restantes, de modo que cada um recebe a fração $\frac{1}{m(1-T)}$ da renda

total. Verifica-se fàcilmente que, neste caso, a redundância da distribuição da renda é $R = \log \frac{1}{1-T}$, ou seja, a redundância é uma função crescente da fração (T) da população sem renda. Se trabalhamos com logaritmos naturais temos:

$$T = 1 - e^{-R} \tag{16}$$

Dada uma população com uma distribuição de renda qualquer podemos determinar, aplicando sucessivamente (15) e (16), a fração da população que ficaria sem renda se a renda total fosse igualitàriamente distribuida entre os indivíduos restantes, mantendo-se constante a redundância. A fração T, que, de acôrdo com CEPAL (1970), chamaremos índice de Theil, contribui, como vemos, para a compreensão do significado do valor da redundância de uma distribuição.

Se dispomos de informações por estratos de renda, podemos obter o valor de R, supondo que a renda seja igualitàriamente distribuida dentro de cada estrato. Consideremos n estratos, sendo w_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ o número de indivíduos no i-ésimo estrato, z_i a renda recebida pelos elementos dêsse estrato, m o número total de pessoas e Z a renda total da população. O número de pessoas no i-ésimo estrato como fração da população é $x_i = \frac{w_i}{m}$ e a fração da renda total que recebem é $y_i = \frac{z_i}{Z}$, cada indivíduo recebendo $\frac{y_i}{w_i} = \frac{y_i}{x_i \cdot m}$ da renda total.

A redundância é

$$R = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log m \cdot p_j = \sum_{i=1}^{n} m \cdot x_i \cdot \frac{y_i}{x_i \cdot m} \log m \frac{y_i}{x_i \cdot m} \quad \text{ou}$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \log \frac{y_i}{x_i} \tag{17}$$

ou ainda, se quizermos o valor de R em função de w_i e z_i,

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{Z} \log \frac{z_i \cdot m}{w_i \cdot Z} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{n} z_i \log \frac{z_i}{w_i} - \log \frac{Z}{m} \tag{18}$$

Pode demonstrar-se que, se a renda não é igualitàriamente distribuida dentro de cada estrato, a fórmula (17) e, também, a fórmula (18) subestimam a redundância da distribuição da renda. A fórmula (17) dá apenas a redundância <u>entre</u> estratos, como veremos a seguir.

$$R = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log m \cdot p_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{w_i} p_j \cdot \log m \cdot p_j \right) - \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \log \frac{y_i}{x_i}$$

Como $\sum_{j=1}^{w_i} p_j = y_i$, segue-se que

$$R = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \log \frac{y_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{w_i} p_j \cdot \log m \cdot p_j - \sum_{j=1}^{w_i} p_j \cdot \log \frac{y_i}{x_i} \right)$$

ou

$$R = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \log \frac{y_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{w_i} \frac{p_j}{y_i} \log m \cdot x_i \frac{p_j}{y_i} \right) \qquad (19)$$

Na fórmula (19), a expressão entre parênteses mede a redundância dentro do i-ésimo estrato. Note-se que $\frac{p_j}{y_i}$ representa a fração da renda do estrato que é recebida por certo indivíduo e $m \cdot x_i = w_i$ é o número de indivíduos do estrato. O segundo têrmo do segundo membro da relação (19) é, portanto, uma média ponderada das redundâncias dentro dos estratos (ou redundâncias intra-estratos), sendo fatôres de ponderação as frações da renda total recebidas por cada estrato. O primeiro têrmo, que coincide com a expressão (17), representa a redundância entre estratos. Se a renda não é igualitàriamente distribuida dentro dos estratos, as redundâncias intra-estratos são positivas (ver THEIL, 1967) e a fórmula (17) fornece, portanto, uma subestimativa da redundância da população.

Uma propriedade importante da redundância, como medida de concentração na distribuição da renda, é que, quando dispomos de dados por regiões (ou por setores da economia) a redundância total pode ser decomposta em uma redundância interregional e uma média ponderada das redundâncias intrarregionais. Note-se que o índice de Gini não permite tal decomposição.

Considere-se que dispomos de dados sôbre L regiões. Denominemos x_{ki} a fração da população total no i-ésimo estrato da k-ésima

região e y_{ki} a fração da renda total recebida por essa fração da população. Seja $x_{k.} = \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki}$ a fração da população que está na k-ésima região e $y_{k.} = \sum_{i=1}^{n_k} y_{ki}$ a renda correspondente, sendo n_k o número de estratos nessa região. Demonstra-se fàcilmente que

$$R = \sum_{k=1}^{L} \left(\sum_{i=1}^{n_k} y_{ki} \cdot \log \frac{y_{ki}}{x_{ki}} \right) = \sum_{k=1}^{L} y_{k.} \cdot \log \frac{y_{k.}}{x_{k.}} + \sum_{k=1}^{L} y_{k.} \cdot R_k \qquad (20)$$

onde

$$R_k = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{y_{ki}}{y_{k.}} \cdot \log \frac{y_{ki}/y_{k.}}{x_{ki}/x_{k.}}$$ é a redundância na k-ésima região.

2.4. A Curva de Pareto

Neste trabalho utilizamos a equação de Pareto com três parâmetros (ver PARETO, 1949, vol. II, pp. 327-385)

$$u = \frac{A}{(v + K)^{\alpha}} \qquad (21)$$

onde:

v = renda por pessoa

u = número de pessoas com renda maior que v

A, K, α = parâmetros.

Comumente se usa uma forma simplificada da equação de Pareto, com apenas dois parâmetros, isto é,

$$u = \frac{A}{v^{\alpha}}$$

A distribuição de Pareto pode ser obtida como versão estável de uma cadeia de Markov, em que a probabilidade de passar de um estrato de renda a outro depende da renda inicial. Assim, se v_t é a renda de um indivíduo no período t, o processo (autorregressivo) que dá origem à distribuição de Pareto pode ser representado por

$$v_t = v_{t-1} + \omega_t$$

sendo que

$\omega_t = \rho\omega_{t-1} + \eta_t$, onde ρ é uma constante e η_t são variáveis aleatórias independentes. O parâmetro de auto-correlação ρ é, em valor absoluto, menor que a unidade (ver CEPAL, 1970, e CHAMPERNOWNE, 1953). Uma análise simplificada dessas justificativas teóricas para o uso da curva de Pareto é apresentada por LANGE (1967, pp. 151-169).

PARETO (1949, p. 344) considerava que a distribuição da renda e da riqueza nas sociedades humanas tendia a se ajustar à lei que êle estabeleceu, independentemente da sua organização econômico-social. Êle verificou que a sua "curva das rendas" era semelhante para diferentes países e em diversos períodos (Inglaterra, Prússia e Saxônia no século XIX, no Perú do século XVIII, na Basiléia medieval,etc.). Com base em dados apresentados por HUBERMAN (1966, p. 147), verificamos que a curva de Pareto se ajusta bastante bem à distribuição dos escravos entre seus senhores, nos EUA, em 1850 (neste caso u passa a ser

o número de senhores que possuem v ou mais escravos cada um). O sistema social (capitalista, feudal, escravista) varia, mas a lei de distribuição - como afirmava PARETO - permanece válida. LANGE (1967) nega que a lei descoberta por PARETO seja uma lei natural, válida em todos os sistemas sociais. Êsse autor conclui que as rendas de um grupo social homogêneo se distribuem segundo uma curva normal simples ou logarítmica (p. 163); mostra ainda que a distribuição dos trabalhadores e empregados na Polônia, segundo seus salários no mês de setembro de 1965, se ajusta à distribuição logarítmica-normal, e não à distribuição de Pareto. Diríamos, portanto, que a lei de Pareto é uma característica, não de qualquer sociedade humana, mas de sistemas sociais em que a riqueza acumulada possibilita controlar o trabalho criador de nova riqueza.

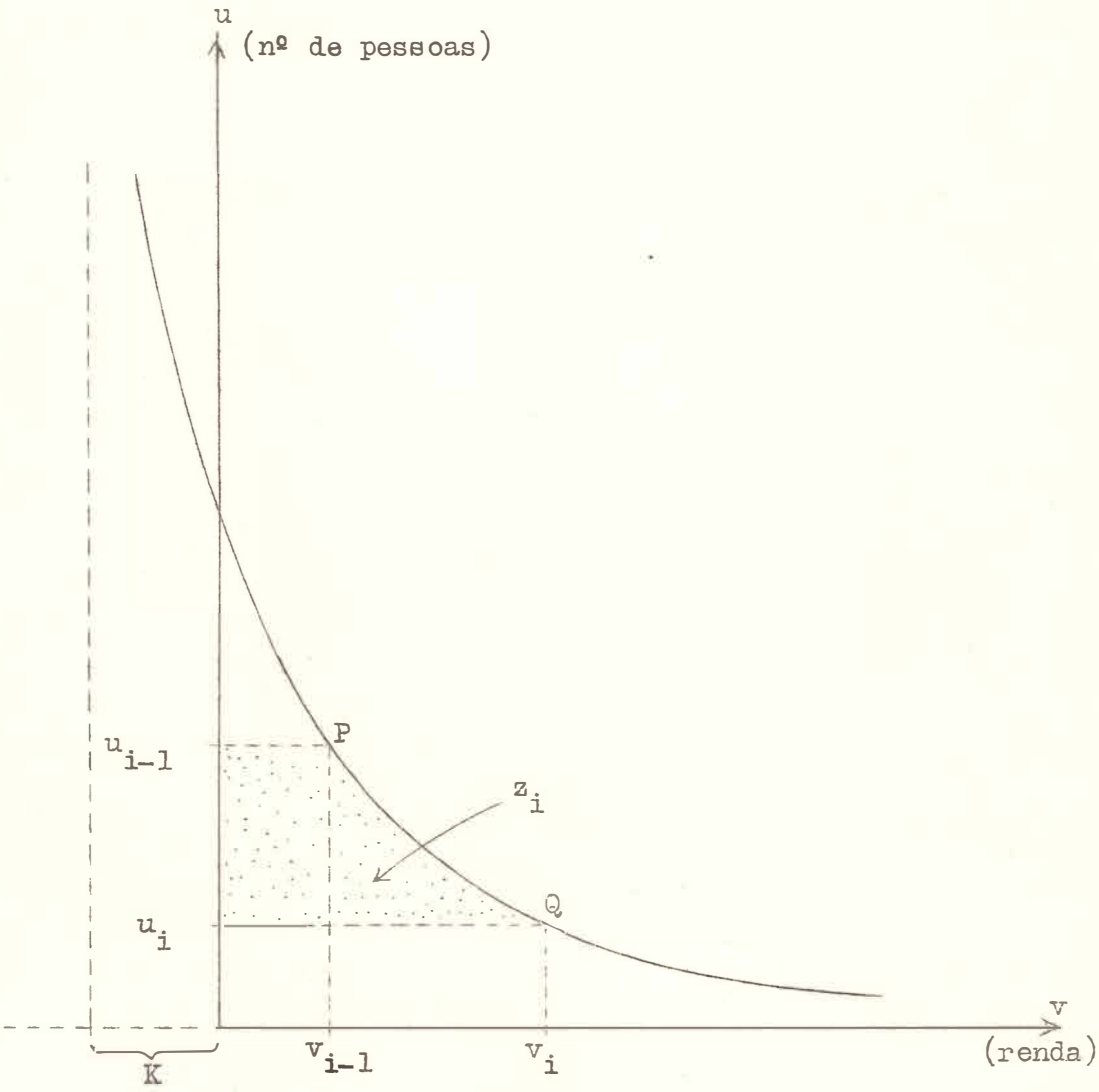
Num gráfico em escala normal a equação (21) é representada por uma curva semelhante a uma hipérbole, a curva de Pareto. Essa curva tem duas assíntotas: o eixo das abscissas e a reta $v = -K$.

A equação de Pareto permite calcular a renda total (z_i) recebida pelos membros de determinado estrato de renda. Sejam v_{i-1} e v_i os limites do estrato (ver Figura 5).

O número de pessoas cuja renda por indivíduo está compreendida entre v_{i-1} e v_i é dado por

$$w_i = u_{i-1} - u_i = \frac{A}{(v_{i-1} + K)^{\alpha}} - \frac{A}{(v_i + K)^{\alpha}} \qquad (22)$$

Figura 5. A Curva de Pareto



A renda total dessas pessoas é

$$z_i = \int_{u_i}^{u_{i-1}} v \cdot du \qquad (23)$$

Da equação (21) obtemos:

$$v = A^{\frac{1}{\alpha}} \cdot u^{-\frac{1}{\alpha}} - K$$

Substituindo em (23) obtemos:

$$z_i = A^{\frac{1}{\alpha}} \int_{u_i}^{u_{i-1}} u^{-\frac{1}{\alpha}} \, du - K \int_{u_i}^{u_{i-1}} du =$$

$$= \frac{A^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \left(u_{i-1}^{1-\frac{1}{\alpha}} - u_i^{1-\frac{1}{\alpha}} \right) - K \left(u_{i-1} - u_i \right) \qquad (24)$$

Para colocar z_i em função de v_{i-1} e v_i, substituimos u_{i-1} e u_i pelas expressões correspondentes, de acôrdo com (21). Simplificando obtemos:

$$z_i = \frac{\alpha \cdot A}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{(v_{i-1} + K)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(v_i + K)^{\alpha-1}} \right] -$$

$$- K \cdot A \left[\frac{1}{(v_{i-1} + K)^{\alpha}} - \frac{1}{(v_i + K)^{\alpha}} \right] \qquad (25)$$

Sendo $\alpha > 1$, a renda total das pessoas cuja renda por indivíduo é superior a v_{i-1} é dada por

$$\lim_{v_i \to \infty} z_i = \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1)(v_{i-1} + K)^{\alpha - 1}} - \frac{K \cdot A}{(v_{i-1} + K)^{\alpha}} \tag{26}$$

No caso da equação de Pareto com dois parâmetros as expressões (22), (25) e (26) ficam

$$w_i = u_{i-1} - u_i = \frac{A}{v_{i-1}^{\alpha}} - \frac{A}{v_i^{\alpha}} \tag{27}$$

$$z_i = \frac{\alpha \cdot A}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{v_{i-1}^{\alpha - 1}} - \frac{1}{v_i^{\alpha - 1}} \right) \tag{28}$$

$$\lim_{v_i \to \infty} z_i = \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1) \cdot v_{i-1}^{\alpha - 1}} \tag{29}$$

2.5. A Equação da Curva de Lorenz correspondente a uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros

Quando a distribuição de renda de uma população obedece à equação de Pareto é possível determinar a equação da curva de Lorenz correspondente. Analisemos inicialmente o caso de uma distribuição de Pareto com dois parâmetros (ver CLINE, 1969),

$$u = \frac{A}{v^{\alpha}}, \text{ com } \alpha > 1$$

Consideremos, para maior simplicidade nas deduções que se seguem, que u seja medido como fração do número total de pessoas. Seja

v_0 a renda mínima, de maneira que

$$1 = \frac{A}{v_0^{\alpha}} \tag{30}$$

Consideremos ainda que z (a renda de um estrato) e v (a renda por indivíduo) sejam medidos como fração da renda total da população. Então temos, pela expressão (29), que

$$1 = \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1)\, v_0^{\alpha - 1}} \tag{31}$$

De (30) e (31) segue-se que

$$v_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Substituindo êsse resultado em (30) obtemos

$$\frac{\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha - 1} = 1 \tag{32}$$

A abscissa (X) da curva de Lorenz correspondente a um ponto u, v da curva de Pareto é a fração de indivíduos com renda menor ou igual a v, ou seja,

$$X = 1 - u = 1 - \frac{A}{v^{\alpha}}$$

Donde

$$\frac{1}{v} = \left(\frac{1 - X}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{33}$$

A ordenada (Y) da curva de Lorenz é a fração acumulada da renda, ou seja, um menos a fração da renda auferida pelas pessoas com renda superior ao limite ($\underline{v}$) considerado. De acôrdo com (29), obtemos:

$$Y = 1 - \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1) \cdot v^{\alpha - 1}}$$

Donde

$$\frac{1}{v} = \left[\frac{(1 - Y)(\alpha - 1)}{\alpha \cdot A} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1}} \qquad (34)$$

De (33) e (34) obtemos

$$1 - Y = \frac{\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha - 1} \; (1 - X)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}$$

Considerando (32), segue-se que

$$Y = 1 - (1 - X)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \qquad (35)$$

Esta é a equação da curva de Lorenz correspondente a uma distribuição de Pareto com dois parâmetros.

2.6. O Índice de Lorenz como Função do Parâmetro α de uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros

Conhecida a equação da curva de Lorenz, a área Φ compreendida entre essa curva e o eixo das abscissas é dada por

$$\phi = \int_0^1 Y \cdot dX = \int_0^1 \left[1 - (1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right] \cdot dX = 1 - \frac{\alpha}{2\alpha - 1}$$

Como $\alpha > 1$, verifica-se que $0 < \phi < 0,5$

O índice de Lorenz é

$$L = 1 - 2 \cdot \phi$$

ou

$$L = \frac{1}{2 \cdot \alpha - 1} \qquad (36)$$

Note-se que $0 < L < 1$

2.7. A Redundância como Função do Parâmetro α de uma Distribuição de Pareto com dois Parâmetros[1/]

Conhecida a equação da curva de Lorenz podemos dividir a população num número suficientemente grande de estratos de renda, de tal maneira que a expressão (17) fica

$$R = \int_0^1 dY \cdot \log \frac{dY}{dX}$$

De (35) obtemos

$$dY = \frac{\alpha - 1}{\alpha} (1 - X)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot dX$$

1/ Ver THEIL (1967), pp. 97-98, para uma demonstração distinta da apresentada aqui.

Donde

$$R = \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\alpha} (1 - X)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \log \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha} (1 - X)^{-\frac{1}{\alpha}} \right] \cdot dX$$

Fazendo $\lambda = 1 - X$ obtemos

$$R = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \log \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^1 \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} d\lambda + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \int_0^1 \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \log \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot d\lambda =$$

$$= \log \frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \int_0^1 \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \log \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot d\lambda \qquad (37)$$

Resolvendo a última integral por partes obtemos:

$$\int_0^1 \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \log \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot d\lambda = \lim_{t \to 0} \int_t^1 \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \log \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot d\lambda =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left[\lambda^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \cdot \log \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right]_t^1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_t^1 \lambda^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \cdot \frac{-\lambda^{-\frac{1}{\alpha} - 1}}{\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \alpha} \cdot d\lambda \right\} =$$

$$= 0 + \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} \lim_{t \to 0} \left[\lambda^{1 - \frac{1}{\alpha}} \right]_t^1 = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} \qquad (38)$$

De (37) e (38) obtemos:

$$R = \log \frac{\alpha - 1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}$$

ou

$$K = \frac{1}{\alpha - 1} - \log \frac{\alpha}{\alpha - 1} \tag{39}$$

2.8. A Equação da Curva de Lorenz Correspondente a uma Distribuição de Pareto com três Parâmetros

Consideremos agora a equação

$$u = \frac{A}{(v + K)^{\alpha}}$$

onde u é medido como fração do número total de pessoas. Seja v_0 a renda mínima, de maneira que

$$1 = \frac{A}{(v_0 + K)^{\alpha}} \tag{40}$$

Se v e z são medidos como fração da renda total da população, temos, de acôrdo com (26), que:

$$1 = \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1) \cdot (v_0 + K)^{\alpha - 1}} - \frac{K \cdot A}{(v_0 + K)^{\alpha}} \tag{41}$$

De (40) e (41), simplificando, obtemos:

$$K = \alpha\,(1 - v_0) - 1$$

ou

$$v_0 = 1 - \frac{K + 1}{\alpha} \tag{42}$$

Substituindo êsse resultado em (40) obtemos:

$$\frac{\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha - 1} = K + 1 \tag{43}$$

A abscissa (X) da curva de Lorenz correspondente a um ponto u, v da curva de Pareto é dada por

$$X = 1 - u = 1 - \frac{A}{(v+K)^{\alpha}}$$

Donde

$$\frac{1}{v+K} = \left(\frac{1-X}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{44}$$

A ordenada (Y) da curva de Lorenz no mesmo ponto é, de acôrdo com (26),

$$Y = 1 - \frac{\alpha \cdot A}{(\alpha - 1)(v+K)^{\alpha - 1}} + \frac{K \cdot A}{(v+K)^{\alpha}} \tag{45}$$

Substituindo (44) em (45) obtemos:

$$Y = 1 - \frac{\alpha \cdot A^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha - 1} \cdot (1 - X)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} + K(1 - X)$$

Considerando (43), segue-se que

$$Y = 1 - (K + 1)(1 - X)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} + K(1 - X) \tag{46}$$

Esta é a equação da curva de Lorenz correspondente a uma distribuição de Pareto com três parâmetros. Note-se que para $K = 0$ esta equação se reduz à forma (35).

2.9. O Índice de Lorenz como Função dos Parâmetros α e K de uma Distribuição de Pareto com três Parâmetros

Determinemos inicialmente, com base na equação (46), a área ϕ compreendida entre a curva de Lorenz e o eixo das abscissas. Essa área é

$$\phi = \int_0^1 Y \cdot dX = \int_0^1 \left[1 - (K+1)(1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + K(1-X) \right] \cdot dX =$$

$$= 1 - (K+1) \cdot \int_0^1 (1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot dX + K \cdot \int_0^1 (1-X) \cdot dX = 1 - \frac{\alpha \cdot (K+1)}{2 \cdot \alpha - 1} + \frac{K}{2}$$

Substituindo êsse resultado na relação

$$L = 1 - 2 \cdot \phi$$

obtemos a função procurada

$$L = \frac{K+1}{2 \cdot \alpha - 1} \tag{47}$$

Note-se que para $K = 0$ esta expressão se reduz à forma (36).

2.10. Estimação dos Parâmetros da Equação de Pareto

É fácil estimar os parâmetros da equação de Pareto na forma $u = \frac{A}{v^{\alpha}}$. Por anamorfose (aplicando logarítmos) obtemos uma relação linear à qual se aplicam os métodos usuais de análise de regressão linear simples. Já no caso da equação com três parâmetros, $u = \frac{A}{(v+K)^{\alpha}}$, o problema é mais complexo e trabalhoso. Apresentaremos aqui dois métodos de ajustamento: o primeiro nos foi indicado por PIMENTEL GOMES e o segundo desenvolvemos inspirados em trabalho de STEVENS (1951). O primeiro método, que passamos a deduzir, é análogo ao que foi apresentado por PIMENTEL GOMES e MALAVOLTA (1949) para determinar os parâmetros da equação de Mitscherlich.

Considerando um êrro multiplicativo a equação (21) fica

$u_i = \frac{A}{(v_i + K)^{\alpha}} \cdot E_i$, $i=1,\ldots,n$, sendo n o número de pares de valores v_i, u_i disponíveis.

Aplicando logarítmos neperianos (para facilitar derivações posteriores) obtemos:

$$\log u_i = \log A - \alpha \cdot \log (v_i + K) + \log E_i$$

ou, fazendo

$\log u_i = t_i$; $\log A = a$; $-\alpha = b$ e $\log E_i = e_i$,

$$t_i = a + b \cdot \log (v_i + K) + e_i$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[t_i - a - b \cdot \log (v_i + K) \right]^2$$

De acôrdo com o método dos quadrados mínimos as estimativas dos parâmetros a, b e K são os valores que minimizam $\Sigma\, e_i^2$. Consequentemente devemos ter

$$\frac{\partial (\Sigma\, e_i^2)}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial (\Sigma\, e_i^2)}{\partial b} = 0 \text{ e } \frac{\partial (\Sigma\, e_i^2)}{\partial K} = 0$$

Obtemos assim o sistema de equações normais:

$$\begin{cases} \Sigma\, t_i - n \cdot a - b \cdot \Sigma \log (v_i + K) = 0 \\ \Sigma\, t_i \cdot \log (v_i + K) - a\, \Sigma \log (v_i + K) - b\, \Sigma \log^2 (v_i + K) = 0 \\ b \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K} - a \cdot b \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K} - b^2\, \Sigma \dfrac{\log (v_i + K)}{v_i + K} = 0 \end{cases}$$

Êsse sistema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \Sigma \log (v_i + K) = \Sigma\, t_i \\ a \cdot \Sigma \log (v_i + K) + b \cdot \Sigma \log^2 (v_i + K) = \Sigma\, t_i \cdot \log (v_i + K) \\ a \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K} + b \cdot \Sigma \dfrac{\log (v_i + K)}{v_i + K} = \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K} \end{cases}$$

Encarando o sistema anterior como um sistema linear com três equações e duas incógnitas (a e b), o sistema só terá solução, de acôrdo com o teorema de ROUCHÉ-CAPELLI, se a característica da matriz completa fôr igual à característica da matriz incompleta. Para que isso aconteça é necessário que seja nulo o determinante de 3ª ordem da matriz completa, ou seja,

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma \log (v_i + K) & \Sigma\, t_i \\ \Sigma \log (v_i + K) & \Sigma \log^2 (v_i + K) & \Sigma\, t_i \cdot \log (v_i + K) \\ \Sigma \dfrac{1}{v_i + K} & \Sigma \dfrac{\log (v_i + K)}{v_i + K} & \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K} \end{vmatrix} = 0$$

o que nos leva a uma única equação com K como incógnita. Resolvendo-se essa equação (por um processo de tentativa) obtemos o valor da estimativa $\hat{K}$ e, a partir dela, obtemos fàcilmente os valores das estimativas $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

Passemos ao segundo método de determinação das estimativas dos parâmetros a, b e K. Consideremos novamente a relação

$$t_i = a + b \cdot \log (v_i + K) + e_i$$

Encarando-se $\underline{t}$ como função de $\underline{K}$,

$t = f(K) = a + b \cdot \log (v + K)$, temos, de acôrdo com a série de Taylor, a seguinte relação, aproximadamente,

$$t = f(K_0) + f'(K_0) \cdot (K - K_0)$$

onde K_0 é uma estimativa preliminar do parâmetro K.

Uma vez que $f'(K) = \dfrac{b}{v + K}$, obtemos:

$$t_i = a + b \cdot \log (v_i + K_0) + \frac{b}{v_i + K_0} (K - K_0) + e_i$$

Esta expressão pode ser considerada o modêlo estatístico de uma regressão linear múltipla com duas variáveis, $\log (v_i + K_0)$ e $\dfrac{1}{v_i + K_0}$. Os três parâmetros dêsse modêlo são $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c} = b(K - K_0)$ e suas estimativas são dadas por

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i+K_0) & \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_0} \\ \Sigma \log(v_i+K_0) & \Sigma \log^2(v_i+K_0) & \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_0)}{v_i + K_0} \\ \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_0} & \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_0)}{v_i + K_0} & \Sigma \dfrac{1}{(v_i + K_0)^2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma t_i \cdot \log(v_i+K_0) \\ \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K_0} \end{bmatrix}$$

Em seguida, obtemos a estimativa da correção que deve ser feita na estimativa preliminar K_0

$$K - K_0 = \frac{\hat{c}}{\hat{b}}$$

Se o valor da correção $\frac{\hat{c}}{\hat{b}}$ não fôr desprezível, repetem-se os cálculos indicados pela relação matricial acima, utilizando-se agora a nova estimativa preliminar de K, isto é, $\hat{K}_1 = K_0 + \frac{\hat{c}}{\hat{b}}$. O processo será repetido até que se verifique que a correção adicional em K possa ser desprezada.

Há casos em que o método não apresenta convergência, isto é, o valor absoluto da correção $\frac{\hat{c}}{\hat{b}}$ não diminui a cada repetição do processo. Nestes casos é necessário determinar a estimativa do parâmetro K pelo primeiro método apresentado[2].

Indicando por q_{ij} os elementos da matriz inversa de 3ª ordem na expressão que dá as estimativas dos parâmetros a, b e c, as estimativas das variâncias e covariâncias das estimativas $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{K}$ são dadas por:[3]

2/ Nas regressões feitas neste trabalho tentamos sempre o segundo método de ajustamento, tomando $K_0 = 0$. Em alguns casos referentes à distribuição de renda (secção 4.2 dêste trabalho) não obtivemos convergência. Utilizamos, então, o primeiro método para determinar a estimativa do parâmetro K.

Os cálculos foram efetuados no computador eletrônico da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", utilizando programas que elaboramos.

3/ A outra demonstração dêsse método de obtenção das estimativas dos parâmetros da equação de Pareto que apresentamos no Apêndice 1 permite justificar mais fàcilmente estas fórmulas.

$$\hat{V}(\hat{a}) = q_{11} \cdot s^2$$

$$\hat{V}(\hat{b}) = q_{22} \cdot s^2$$

$$\hat{V}(\hat{K}) = \frac{q_{33}}{\hat{b}^2} \cdot s^2$$

$$\hat{Cov}(\hat{a},\hat{b}) = q_{12} \cdot s^2$$

$$\hat{Cov}(\hat{a},\hat{K}) = \frac{q_{13}}{\hat{b}} \cdot s^2$$

$$\hat{Cov}(\hat{b},\hat{K}) = \frac{q_{23}}{\hat{b}} \cdot s^2$$

onde s^2 é a variância residual, dada por

$$s^2 = \frac{\Sigma \left[t_i - \hat{a} - \hat{b} \cdot \log(v_i + \hat{K}) \right]^2}{n-3}$$, com n-3 graus de liberdade.

3. A CONCENTRAÇÃO DA POSSE DA TERRA NO BRASIL

3.1. Comparação entre os Índices de Gini e de Lorenz da Concentração da Posse da Terra no Brasil

Já vimos que o próprio método de cálculo do índice de Gini (G) implica numa subestimação do índice de desigualdade real. A comparação entre os valores do índice de Gini (G), do índice P e do índice de Lorenz (L) apresentados no quadro 1 indica a grandeza dêsse êrro sistemático. Devemos lembrar que o índice de Lorenz também apresenta erros, neste caso originários do traçado dos gráficos e da medida da área de desigualdade com o planímetro. O índice P, por sua vez, difere do verdadeiro índice de desigualdade na medida que os arcos da função potência se afastam da verdadeira curva de Lorenz.

Observa-se, como seria de esperar, que o índice de Gini é sempre menor que o índice de Lorenz e o índice P, sendo que êsses últimos apresentam valores relativamente mais próximos. Quando temos um número grande de pontos bem distribuidos ao longo da curva as diferenças P-G e L-G são pequenas. Inversamente, o valor da diferença P - G

(ou L-G) nos indica se dispomos, ou não, de dados sôbre um número suficiente de estratos para obter um índice de Gini de boa precisão.

Comparando os valores dos índices P e L, observamos que em geral P > L (além dos índices do quadro 1 consideramos os valores do índice P do quadro 3 e os correspondentes valores do índice de Lorenz apresentados por HOFFMANN, 1967). Isso sugere que o índice P tende a superestimar ligeiramente o índice de desigualdade real.

Quadro 1. Comparação entre os índices de Gini e de Lorenz da Concentração da Posse da Terra no Brasil

Fonte e ano em que os dados foram obtidos	Nº de estratos (n)*	Índice de Gini (G)	Índice de Gini Modificado (P)	Índice de Lorenz (L)
Censo de 1920	7	0,798	0,850	0,840
Censo de 1940	15	0,826	0,833	0,830
Censo de 1950	16	0,838	0,844	0,842
Censo de 1960	15	0,836	0,843	0,846
Cadastro-1967	6	0,780	0,855	0,833

* Os limites dos estratos no Censo de 1920 são: 100, 200, 1.000, 2.000, 5.000 e 10.000 hectares. Para o Censo de 1950 os limites são: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1.000, 2.000, 2.500, 5.000, 10.000 e 100.000 hectares. No caso do Censo de 1940, os estabelecimentos com 1.000 a menos de 2.500 hectares são colocados num único estrato. No caso do Censo de 1960, os estabelecimentos com 2.000 a menos de 5.000 hectares são colocados num único estrato (ver IBGE, 1967a). Os limites dos 6 estratos em que foram classificados os imóveis rurais do Cadastro do IBRA em 1967 são: 10, 100, 1.000, 10.000 e 100.000 hectares (ver IBGE, 1968).

3.2. Variação da Concentração da Posse da Terra no Brasil

Examinemos os diversos índices de concentração (G, P, L, R, T) da posse da terra no Brasil nos anos de 1920, 1940, 1950, 1960 e 1967 apresentados nos quadros 1 a 5. Para 1920 obtivemos uma redundância de 2,001 nits e o índice de Theil correspondente é 0,865. Lembremos que os índices G, R e T para 1920 e 1967 apresentam maior êrro de subestimação da desigualdade devido ao pequeno número de estratos de área disponível. Apesar dos valores do índice de Lorenz apresentados no quadro 1 indicarem que de 1940 a 1960 teria aumentado a concentração, o conjunto dos índices calculados leva-nos à conclusão de que não há tendência para diminuir ou aumentar a concentração da posse da terra no Brasil.

Estes resultados vêm mostrar que não podemos esperar que a estrutura fundiária brasileira se torne mais igualitária sem uma reforma agrária.

Observando os valores do índice P referentes a 1940, 1950 e 1960 (quadros 2, 3 e 4), verificamos que 9 Estados (Acre, Amazonas, Piauí, Ceará, Paraiba, Pernambuco, Minas Gerais, Espírito Santo e Mato Grosso) apresentam acréscimos no valor do índice nos dois períodos; 2 Estados (Guanabara e São Paulo) apresentam índice invariável em um período e crescente em outro; 6 Estados (Maranhão, Rio Grande do Norte, Sergipe, Bahia, Rio de Janeiro e Goiás) apresentam variações em

sentidos opostos nos dois períodos e 5 Estados (Pará, Alagoas, Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul) apresentam decréscimo no valor do índice nos dois períodos. Quase sempre o índice de Gini apresenta variações de mesma natureza e as modificações do índice de Theil são similares na maioria dos casos.

Vejamos agora a posição dos diversos Estados dentro da classificação dos valores do índice de Gini proposta por CÂMARA (1949). Essa classificação é a seguinte:

De 0,000 a 0,100 - concentração nula

De 0,101 a 0,250 - concentração nula a fraca

De 0,251 a 0,500 - concentração fraca a média

De 0,501 a 0,700 - concentração média a forte

De 0,701 a 0,900 - concentração forte a muito forte

De 0,901 a 1,000 - concentração muito forte a absoluta.

Com base no valor do índice de Gini modificado (P) para 1960 verificamos que 4 Estados (Acre, Amazonas, Maranhão e Mato Grosso) apresentam distribuição da posse da terra com concentração muito forte a absoluta, 3 Estados apenas (Espírito Santo, Paraná e Santa Catarina) apresentam concentração média a forte e os demais Estados apresentam concentração forte a muito forte. Note-se que sòmente 2 Estados (Espírito Santo e Santa Catarina) apresentavam concentração média a forte em 1940 e 1950.

As regiões com maiores índices de concentração são a Norte e a Nordeste e as com índices menores são a Sul e a Leste.

Quadro 2. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo de 1940.

Unidades da Federação	Nº de estratos (n)	Índice de Gini (G) *	Índice de Gini modificado (P)	Redundância (R)	Índice de Theil (T)
Brasil	15	0,826	0,833	2,189	0,888
Acre	15	0,792	0,820	1,416	0,757
Amazonas	15	0,904	0,909	2,457	0,914
Pará	15	0,901	0,905	3,212	0,960
Maranhão	14	0,908	0,914	2,791	0,939
Piauí	14	0,777	0,789	1,458	0,767
Ceará	14	0,735	0,748	1,324	0,734
R.G.do Norte	14	0,764	0,776	1,524	0,782
Paraíba	14	0,768	0,779	1,598	0,798
Pernambuco	13	0,771	0,782	1,541	0,786
Alagoas	14	0,852	0,858	2,243	0,894
Sergipe	13	0,814	0,823	1,915	0,853
Bahia	14	0,784	0,793	1,864	0,845
Minas Gerais	14	0,741	0,753	1,453	0,766
Espírito Santo	12	0,501	0,529	0,596	0,449
Rio de Janeiro	14	0,732	0,744	1,309	0,730
Dist. Federal	9	0,622	0,643	1,010	0,636
São Paulo	14	0,763	0,773	1,665	0,811
Paraná	14	0,738	0,749	1,537	0,785
Santa Catarina	14	0,679	0,693	1,323	0,734
R.G. do Sul	14	0,756	0,767	1,629	0,804
Goiás	14	0,784	0,797	1,461	0,768
Mato Grosso	15	0,809	0,819	1,621	0,802

* Estes índices foram apresentados pela primeira vez por CÂMARA (1949)

Quadro 3. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Regiões e Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo Agrícola de 1950

Regiões e Unidades da Federação	Nº de estratos (n)	Índice de Gini (G)	Índice de Gini modificado (P)	Redundância (R)	Índice de Theil (T)
Brasil	16	0,838	0,844	2,305	0,900
Norte	15	0,942	0,944	3,720	0,976
Nordeste	15	0,861	0,867	2,195	0,889
Leste	15	0,778	0,788	1,706	0,818
Sul	15	0,745	0,756	1,647	0,807
Centro-Oeste	15	0,820	0,829	1,826	0,839
Guaporé	14	0,924	0,934	2,600	0,926
Acre	15	0,892	0,904	2,095	0,877
Amazonas	15	0,921	0,924	3,052	0,953
Rio Branco	14	0,600	0,619	0,742	0,524
Pará	15	0,884	0,889	3,558	0,972
Amapá	14	0,661	0,677	1,802	0,835
Maranhão	15	0,930	0,934	2,786	0,938
Piauí	15	0,794	0,805	1,792	0,833
Ceará	14	0,739	0,752	1,371	0,746
R.G.do Norte	14	0,803	0,812	1,872	0,846
Paraíba	14	0,803	0,811	1,814	0,837
Pernambuco	14	0,829	0,837	2,060	0,873
Alagoas	14	0,841	0,848	2,070	0,874
Sergipe	13	0,808	0,816	1,702	0,818
Bahia	15	0,794	0,802	1,935	0,856
Minas Gerais	15	0,752	0,764	1,541	0,786
Serra dos Aimorés	11	0,566	0,590	0,821	0,560
Espírito Santo	13	0,513	0,541	0,633	0,469
Rio de Janeiro	14	0,769	0,779	1,474	0,771
Distrito Federal	12	0,690	0,709	1,424	0,759
São Paulo	14	0,763	0,773	1,587	0,796
Paraná	15	0,721	0,734	1,758	0,828
Santa Catarina	15	0,658	0,674	1,413	0,757
R.G. do Sul	14	0,750	0,761	1,685	0,814
Mato Grosso	15	0,826	0,834	1,715	0,820
Goiás	15	0,754	0,768	1,345	0,739

Quadro 4. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Regiões e Unidades da Federação, de Acôrdo com o Censo Agrícola de 1960

Regiões e Unidades da Federação	Nº de estratos (n)	Índice de Gini (G)	Índice de Gini modificado (P)	Redundância (R)	Índice de Theil (T)
Brasil	15	0,836	0,843	2,271	0,897
Norte	15	0,942	0,944	3,969	0,981
Nordeste	15	0,861	0,868	2,171	0,886
Leste	15	0,772	0,781	1,605	0,799
Sul	15	0,741	0,752	1,633	0,805
Centro-Oeste	15	0,839	0,846	1,916	0,853
Rondônia	12	0,900	0,910	3,403	0,967
Acre	14	0,918	0,954	2,361	0,906
Amazonas	15	0,956	0,958	4,612	0,990
Roraima	14	0,656	0,672	0,845	0,570
Pará	15	0,824	0,831	2,504	0,918
Amapá	14	0,932	0,940	3,411	0,967
Maranhão	14	0,917	0,923	3,011	0,951
Piauí	15	0,826	0,835	1,850	0,843
Ceará	14	0,744	0,755	1,412	0,756
R.G.do Norte	14	0,797	0,806	1,708	0,819
Paraíba	14	0,811	0,820	1,851	0,843
Pernambuco	14	0,839	0,848	2,178	0,887
Alagoas	14	0,831	0,839	2,071	0,874
Sergipe	14	0,825	0,832	1,967	0,860
Bahia	14	0,778	0,788	1,673	0,812
Minas Gerais	15	0,754	0,766	1,493	0,775
Serra dos Aimorés	14	0,545	0,569	0,960	0,617
Espírito Santo	14	0,528	0,554	0,705	0,506
Rio de Janeiro	14	0,757	0,768	1,433	0,761
Guanabara	12	0,690	0,709	1,678	0,813
São Paulo	14	0,788	0,796	1,702	0,818
Paraná	15	0,687	0,700	1,433	0,761
Santa Catarina	14	0,652	0,668	1,291	0,725
R.G.do Sul	15	0,746	0,757	1,728	0,822
Mato Grosso	15	0,898	0,903	2,212	0,890
Goiás	15	0,759	0,772	1,395	0,752
Distrito Federal	13	0,768	0,780	1,305	0,729

Quadro 5. Índices de Concentração da Posse da Terra no Brasil, por Unidades da Federação, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967

Unidades da Federação	Nº de estratos (n)	Índice de Gini (G)	Índice de Gini modificado (P)	Redundância (R)	Índice de Theil (T)
Brasil	6	0,780	0,855	1,998	0,864
Rondônia	6	0,938	0,950	2,925	0,946
Acre	6	0,938	0,957	2,703	0,933
Amazonas	6	0,824	0,868	1,819	0,838
Roraima	5	0,443	0,517	0,406	0,334
Pará	6	0,825	0,868	2,265	0,896
Amapá	5	0,742	0,784	1,257	0,715
Maranhão	5	0,754	0,834	1,448	0,765
Piauí	6	0,725	0,811	1,414	0,757
Ceará	5	0,706	0,790	1,348	0,740
R.G.do Norte	5	0,736	0,806	1,518	0,781
Paraíba	5	0,736	0,798	1,485	0,774
Pernambuco	5	0,770	0,831	1,727	0,822
Alagoas	5	0,740	0,799	1,572	0,792
Sergipe	5	0,748	0,814	1,571	0,792
Bahia	5	0,703	0,777	1,385	0,750
Minas Gerais	5	0,709	0,789	1,346	0,740
Espírito Santo	4	0,431	0,547	0,536	0,415
Rio de Janeiro	5	0,685	0,763	1,212	0,702
Guanabara	4	0,715	0,836	2,160	0,885
São Paulo	5	0,689	0,768	1,345	0,739
Paraná	6	0,624	0,691	1,485	0,774
Santa Catarina	5	0,578	0,657	1,164	0,688
R.G.do Sul	5	0,674	0,731	1,448	0,765
Mato Grosso	6	0,818	0,856	1,692	0,816
Goiás	5	0,701	0,809	1,374	0,747
Distrito Federal	5	0,808	0,846	3,154	0,957

3.3. Decomposição da Redundância da Distribuição da Posse da Terra no Brasil

Já vimos que, quando dispomos de dados por regiões, a redundância, como medida de desigualdade de uma distribuição, pode ser decomposta em uma redundância intrarregional e uma redundância interregional (ver secção 2.3). Com base nessa propriedade da redundância, podemos determinar a contribuição das diferenças entre estados e entre regiões para a redundância total da distribuição da posse da terra no Brasil, como é feito no quadro 6.

Observa-se que:

a) as diferenças entre estados representam de um quinto a um quarto da desigualdade total no Brasil;

b) as diferenças entre regiões representam de um oitavo a um quinto da desigualdade total no Brasil;

c) a participação das diferenças entre estados na redundância total é relativamente alta na Região Norte, está ao redor de 10% na Região Nordeste e é relativamente baixa nas Regiões Leste e Sul; no caso da Região Centro-Oeste essa participação era relativamente alta (15%) em 1950, diminuindo para 5% e 7% em 1960 e 1967, respectivamente.

Nota-se que as redundâncias totais para o Brasil e para as regiões apresentadas no Quadro 6 são geralmente algo superiores aos

valores correspondentes apresentados nos quadros 3, 4 e 5. Isso se deve ao fato de que no Quadro 6 essas redundâncias incluem o efeito das diferenças, de um estado para outro, na área média dos estabelecimentos de um estrato de área.

Quadro 6. Decomposição da Redundância da Distribuição da Posse da Terra no Brasil em 1950, 1960 e 1967

Região ou País	Caracterização da redundância	Fonte dos Dados e Ano					
		Censo de 1950		Censo de 1960		Cadastro 1967	
		Redundância	%	Redundância	%	Redundância	%
Norte	Intraestadual	2,715	73	3,020	76	2,155	89
	Interestadual	1,018	27	0,960	24	0,273	11
	Total	3,733	100	3,980	100	2,428	100
Nordeste	Intraestadual	1,969	90	2,000	92	1,463	88
	Interestadual	0,227	10	0,173	8	0,196	12
	Total	2,196	100	2,173	100	1,659	100
Leste	Intraestadual	1,602	94	1,508	94	1,319	98
	Interestadual	0,106	6	0,098	6	0,023	2
	Total	1,708	100	1,606	100	1,342	100
Sul	Intraestadual	1,635	99	1,617	99	1,394	97
	Interestadual	0,013	1	0,016	1	0,044	3
	Total	1,648	100	1,633	100	1,438	100
Centro-Oeste	Intraestadual	1,545	85	1,816	95	1,558	93
	Interestadual	0,282	15	0,100	5	0,123	7
	Total	1,827	100	1,916	100	1,681	100
Brasil	Intrarregional	2,010	87	2,009	88	1,620	80
	Interregional	0,296	13	0,266	12	0,393	20
	Total	2,306	100	2,275	100	2,013	100
Brasil	Intraestadual	1,773	77	1,836	81	1,509	75
	Interestadual	0,533	23	0,439	19	0,504	25
	Total	2,306	100	2,275	100	2,013	100

3.4. Concentração da Posse da Terra Quando se Consideram as Famílias Sem Terra Ligadas à Agropecuária

Os índices apresentados até aqui mostram a concentração da posse da terra entre aquêles que possuem terra na qualidade de proprietários, arrendatários ou posseiros.

O índice de Theil (T) pode ser utilizado, em combinação com a fração (S) das famílias sem terra, para indicar o grau de concentração da posse da terra considerando-se tôdas as famílias cujo chefe tem na agricultura, pecuária ou silvicultura seu ramo de atividade principal.

Uma vez que os resultados definitivos do Censo Demográfico de 1960 não foram publicados, utilizamos os dados do Censo Demográfico de 1950. No Quadro 7 reproduzimos os resultados dêsse Censo referentes ao número de famílias cujo chefe tem na agricultura, pecuária ou silvicultura seu ramo de atividade principal. No mesmo quadro apresentamos a fração (S) dessas famílias que não possuem terra na qualidade de proprietários, arrendatários ou posseiros.

Lembremos que o índice de Theil corresponde à fração dos possuidores de terra que ficaria sem terra numa população com distribuição de posse da terra "equivalente" (de mesma redundância) à da população considerada, a terra sendo igualitàriamente distribuida entre

a fração restante da população. Se consideramos essa população "equivalente" (à dos atuais possuidores de terra) dentro do total de famílias ligadas à agricultura, pecuária e silvicultura, a fração das famílias sem terra passa a ser $S + T(1 - S)$. Considerando os valores do índice de Theil (T) do Quadro 3 obtivemos os valores dessa expressão, para o Brasil e para cada uma das unidades da Federação, apresentados no Quadro 7.

Note-se, inicialmente, que o valor da expressão $S + T(1 - S)$ indica, em geral, um grau de concentração da posse da terra extremamente elevado. Considerando que a terra é, no Brasil, o principal componente do capital das emprêsas agrícolas, podemos concluir que o grau de concentração da riqueza no setor primário da economia do País é muito elevado.

Os Estados para os quais o valor da expressão $S + T(1 - S)$ é mais baixo são Espírito Santo, Santa Catarina e Rio Grande do Sul. Isso, provàvelmente, se deve ao fato de a propriedade familiar ter aí se constituido mais cedo, através, especialmente, da colonização estrangeira (ver secção 3.7).

Quadro 7. Número de Famílias Cujo Chefe Tem Como Atividade Principal a Agricultura, a Pecuária ou a Silvicultura, Fração (S) Dessas Famílias que não Possuem Terra (na qualidade de proprietários, arrendatários ou posseiros) e valor da expressão S + T (1 - S), onde T é o índice de Theil apresentado no Quadro 3, para o Brasil e as unidades da Federação, em 1950.

Unidades da Federação	Nº de famílias	S	S + T (1 - S)
Brasil	5.405.224	0,618	0,962
Guaporé	1.828	0,710	0,978
Acre	5.085	0,665	0,959
Amazonas	31.600	0,518	0,977
Rio Branco	1.853	0,760	0,886
Pará	85.325	0,298	0,980
Amapá	2.348	0,807	0,968
Maranhão	213.063	0,553	0,972
Piauí	135.474	0,748	0,958
Ceará	327.507	0,735	0,933
R.Grande do Norte	119.918	0,713	0,956
Paraíba	226.544	0,695	0,950
Pernambuco	396.673	0,566	0,945
Alagoas	149.132	0,652	0,956
Sergipe	81.002	0,472	0,904
Bahia	619.652	0,584	0,940
Minas Gerais	905.913	0,707	0,937
Espírito Santo	105.310	0,580	0,777
Rio de Janeiro	172.797	0,765	0,946
Distrito Federal	9.786	0,462	0,870
São Paulo	735.174	0,698	0,938
Paraná	263.202	0,660	0,941
Santa Catarina	161.688	0,354	0,843
Rio Grande do Sul	408.764	0,298	0,870
Mato Grosso	55.860	0,713	0,948
Goiás	164.965	0,614	0,899

3.5. A Distribuição da Posse da Terra em Nove Regiões Agrícolas do Estado de São Paulo

Em 1969, o IEA (Instituto de Economia Agrícola, da Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo) publicou uma tabulação dos imóveis rurais do Estado de São Paulo, classificando-os em 15 estratos de área. As informações básicas foram extraidas do Cadastro organizado pelo IBRA (Instituto Brasileiro de Reforma Agrária) para 1967. A classificação dos imóveis foi feita para os Municípios, para as Casas da Agricultura (conjunto de Municípios sob a responsabilidade de um Engenheiro-Agrônomo), para as Sub-Regiões e Regiões Agrícolas. Estas, em número de nove, correspondem às Regiões Administrativas do Estado, com exceção da Região Agrícola de São Paulo, que engloba as Regiões Administrativas do Grande São Paulo e São Paulo Exterior.

Com base nos dados publicados nesse trabalho do IEA, calculamos os diversos índices de concentração da posse da terra, para o Estado e para cada Região Agrícola, apresentados no Quadro 8. No quadro seguinte mostramos a divisão da redundância total do Estado num componente intrarregional e num componente interregional. Nota-se que as diferenças entre as nove Regiões Agrícolas representam apenas 4% da redundância total da posse da terra em São Paulo. Outro aspecto notável é que os índices de concentração variam relativamente pouco de uma região para outra (há diferenças maiores nos índices relativos às regiões do Brasil e aos Estados).

Quadro 8. Índices de Concentração da Posse da Terra no Estado de São Paulo, por Região Agrícola, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967 (dados tabulados pelo IEA).

Estado e Regiões	Índice de Gini (G)	Índice de Gini modificado (P)	Redundância (R)	Índice de Theil (T)
São Paulo (total)	0,771	0,777	1,572	0,792
Araçatuba	0,781	0,787	1,618	0,802
Bauru	0,716	0,724	1,227	0,707
Campinas	0,749	0,756	1,326	0,734
São Paulo	0,825	0,830	2,093	0,877
Pres. Prudente	0,799	0,804	1,921	0,854
Ribeirão Preto	0,718	0,726	1,174	0,691
S.José Rio Preto	0,700	0,709	1,228	0,707
Sorocaba	0,785	0,790	1,734	0,824
Vale do Paraiba	0,738	0,745	1,508	0,779

Quadro 9. Componentes Intrarregional e Interregional da Redundância da Concentração da Posse da Terra no Estado de São Paulo, de Acôrdo com o Cadastro de Imóveis Rurais do IBRA em 1967 (dados tabulados pelo IEA).

Caracterização da redundância	Redundância em nits (R)	Participação porcentual
Intrarregional	1,517	96
Interregional	0,058	4
Total	1,575	100

3.6. Distribuição da Posse da Terra no Brasil de Acôrdo com o Número de Módulos de cada Imóvel Rural

Uma grande limitação dos resultados obtidos anteriormente é o fato de que a área de terra não mede exatamente a quantidade do fator de produção terra pois variações na fertilidade (qualidades físicas e químicas do solo), no clima e na localização fazem com que pequenas áreas de solo fértil e bem localizado sejam econômicamente equivalentes a grandes áreas de solo pobre e mal localizado. O conceito de módulo rural "foi definido com a finalidade primordial de estabelecer uma unidade de medida que exprima a interdependência entre a dimensão, a situação geográfica dos imóveis rurais e condições de seu aproveitamento econômico" (IBRA, 1967b)[4/]. Com base nesse conceito, o IBRA estabeleceu as dimensões dos módulos por categoria (dependendo do potencial demográfico da região e do tamanho dos núcleos urbanos existentes) e tipo de exploração (IBRA, 1967b). Foi publicada, com base em dados do Cadastro de Imóveis Rurais para 1967, a classificação dos estabelecimentos rurais do Brasil em seis estratos, segundo o número de módulos: menos de um; de um a menos de 10; de 10 a menos de 80; de 80 a menos de 300; de 300 a menos de 600, e de 600 e mais módulos. (IBGE,

---

4/ "Módulo Rural" é a área da "Propriedade Familiar", sendo esta "o imóvel rural que, direta e pessoalmente explorado pelo agricultor e sua família, lhes absorva tôda a fôrça de trabalho, garantindo-lhe a subsistência e o progresso social e econômico, com área máxima fixada para cada região e tipo de exploração, e eventualmente trabalhado com a ajuda de terceiros" (Incisos II e III do artigo 4º do ESTATUTO DA TERRA, Lei nº 4.504, de 30 de novembro de 1964).

1968, pp. 129-131). Infelizmente estas informações não incluem o número total de módulos correspondentes aos imóveis de cada estrato, sendo impossível, portanto, calcular diretamente os índices de concentração. Podemos, entretanto, estimar o número total de módulos em cada estrato por integração de uma equação de Pareto, como vimos no capítulo anterior.

Considerando os dados referentes aos imóveis com um ou mais módulos ajustamos a curva de Pareto com três parâmetros, obtendo os resultados apresentados no Quadro 10. Observa-se que os coeficientes de determinação são quase iguais a um. Entretanto, como teste estatístico, o valor do coeficiente de determinação é, nêsse caso, bastante frágil, pois contamos, em geral, com apenas 5 pontos observados para ajustar uma função com três parâmetros, ou seja, ficamos com apenas dois graus de liberdade para o resíduo da análise de variância da regressão.

Para estimar o número total de módulos dos imóveis com menos de um módulo multiplicamos o número de estabelecimentos dêsse estrato pelo ponto médio do intervalo correspondente (0,5 módulo). No que se refere aos demais estratos, que estão na parte da distribuição em que foi ajustada a curva de Pareto, passamos a utilizar o número de imóveis e o número total de módulos por estrato obtidos através das expressões (22), (25) e (26) (secção 2.4). O número total de módulos no Brasil, por regiões e estados, obtidos dessa maneira, é dado no Quadro 10.

Quadro 10. Distribuição dos Imóveis Rurais Conforme o Número de Módulos no Brasil em 1967. Estimativas dos parâmetros a(=$\log_e A$), K e α da equação de Pareto, respectivos desvios padrões (colocados entre parênteses logo abaixo), coeficiente de determinação (R^2) da regressão e estimativa do número total de módulos.

Regiões e unidades da Federação	Nº de pontos na regressão	a	K	α	R^2	Nº Total de módulos, em milhares
Brasil	5	14,822 (0,328)	1,30 (0,53)	1,461 (0,062)	0,999	6130
Norte	5	11,564 (0,284)	2,40 (0,78)	1,181 (0,053)	0,999	510
Nordeste	5	13,498 (0,240)	1,74 (0,40)	1,608 (0,045)	1,000	1080
Leste	5	13,754 (0,128)	1,17 (0,16)	1,730 (0,024)	1,000	1371
Sul	5	13,972 (0,146)	1,24 (0,21)	1,619 (0,028)	1,000	2012
Centro-Oeste	5	14,004 (0,932)	5,56 (3,41)	1,459 (0,167)	0,995	1224
Amazonas	5	11,170 (0,707)	4,02 (2,20)	1,403 (0,129)	0,996	106
Pará	5	10,581 (0,307)	1,41 (0,63)	1,197 (0,058)	0,999	192
Maranhão	5	12,866 (0,574)	4,26 (1,51)	1,717 (0,104)	0,998	206
Piauí	5	12,108 (0,271)	1,91 (0,44)	1,769 (0,051)	1,000	171

Quadro 10. Continuação

Regiões e unidades da Federação	Nº de pontos na regressão	a	K	α	R^2	Nº Total de módulos, em milhares
Ceará	5	12,146 (0,832)	1,61 (1,25)	1,739 (0,157)	0,996	222
R.Grande do Norte	5	9,985 (0,380)	0,55 (0,44)	1,479 (0,073)	0,999	69,9
Paraíba	5	11,783 (0,550)	2,62 (1,20)	1,558 (0,102)	0,998	170
Pernambuco	5	10,685 (0,669)	0,59 (0,81)	1,434 (0,129)	0,996	183
Alagoas	4	10,534 (0,378)	1,65 (0,51)	1,834 (0,079)	1,000	54,9
Sergipe	4	8,804 (0,835)	0,33 (0,76)	1,573 (0,182)	0,997	37,8
Bahia	5	11,689 (0,319)	0,53 (0,34)	1,568 (0,062)	0,999	356
Minas Gerais	5	13,691 (0,426)	1,67 (0,63)	1,810 (0,080)	0,999	839
Espírito Santo	3	10,384 -	0,36 -	2,117 -	1,000	61,7
Rio de Janeiro	5	11,168 (0,630)	1,50 (0,89)	1,780 (0,119)	0,998	74,2
Guanabara	3	6,320 -	0,41 -	1,440 -	1,000	2,2
São Paulo	5	12,991 (0,246)	1,45 (0,38)	1,616 (0,047)	1,000	593
Paraná	5	11,835 (0,104)	0,29 (0,11)	1,424 (0,020)	1,000	536

Quadro 10. Continuação

Regiões e unidades da Federação	Nº de pontos na regressão	a	K	α	R^2	Nº Total de módulos, em milhares
Santa Catarina	5	9,992 (0,274)	- 0,20 (0,20)	1,367 (0,054)	0,999	202
R.Grande do Sul	5	15,071 (1,223)	4,75 (2,75)	2,151 (0,221)	0,996	700
Mato Grosso	5	16,470 (1,942)	27,54 (14,68)	1,947 (0,319)	0,995	663
Goiás	5	12,153 (0,101)	1,44 (0,19)	1,313 (0,019)	1,000	542

Quando somamos o número de módulos dos Estados do Nordeste obtemos 1077 milhares, o que está bastante próximo do valor obtido no caso da distribuição referente à Região como um todo, ou seja, 1080 mil módulos. Também do caso das Regiões Leste e Sul podemos observar que a consistência dos resultados é bastante boa, o mesmo acontecendo quando comparamos o total referente ao Brasil com a soma dos módulos para as 5 regiões. Uma vez que não estimamos o número total de módulos para Rondônia, Acre, Roraima, Amapá e o Distrito Federal, não é possível verificar essa consistência dos resultados para as Regiões Norte e Centro-Oeste.

Dispondo do número total de módulos por estrato passamos ao cálculo dos índices de concentração. Os resultados obtidos estão no Quadro 11.

Quadro 11. Índice de Gini (G e P), redundância (R) e índice de Theil (T) da concentração da propriedade da terra, conforme o número de módulos de cada imóvel rural, no Brasil, por regiões e unidades da Federação, em 1967.

Regiões e unidades da Federação	Nº de estratos (n)	G	P	R	T
Brasil	6	0,643	0,750	1,556	0,789
Norte	6	0,861	0,893	3,225	0,960
Nordeste	6	0,597	0,738	1,277	0,721
Leste	6	0,529	0,667	0,919	0,601
Sul	6	0,566	0,701	1,122	0,674
Centro-Oeste	6	0,774	0,831	1,854	0,843
Amazonas	6	0,794	0,846	2,140	0,882
Pará	6	0,820	0,857	2,985	0,949
Maranhão	6	0,705	0,774	1,400	0,753
Piauí	6	0,582	0,701	1,051	0,650
Ceará	6	0,558	0,696	1,020	0,639
R.Grande do Norte	6	0,537	0,687	1,175	0,691
Paraíba	6	0,663	0,790	1,597	0,797
Pernambuco	6	0,479	0,710	1,178	0,692
Alagoas	5	0,387	0,697	0,677	0,492
Sergipe	5	0,288	0,644	0,489	0,387
Bahia	6	0,484	0,660	0,930	0,605
Minas Gerais	6	0,560	0,674	0,944	0,611
Espírito Santo	4	0,364	0,520	0,369	0,308
Rio de Janeiro	6	0,560	0,664	0,941	0,610
Guanabara	4	0,459	0,670	0,821	0,560
São Paulo	6	0,610	0,685	1,166	0,688
Paraná	6	0,549	0,674	1,244	0,712
Santa Catarina	6	0,365	0,627	0,836	0,566
R.Grande do Sul	6	0,579	0,756	1,059	0,653
Mato Grosso	6	0,788	0,858	1,565	0,791
Goiás	6	0,726	0,777	2,043	0,870

Como seria de esperar, os índices de concentração obtidos quando se considera a distribuição dos imóveis rurais conforme o número de módulos (Quadro 11) são, em geral, menores que os índices de concentração correspondentes calculados com base na distribuição dos imóveis segundo sua área (Quadro 5).

Devido ao pequeno número de estratos, os índices G, R e T subestimam bastante o grau de concentração.

O índice P indica que a concentração da distribuição da propriedade da terra conforme o número de módulos de cada imóvel é maior nas Regiões Norte e Centro-Oeste e menor nas Regiões Leste e Sul.

O índice P assume valor superior a 0,8 nos Estados do Norte e em Mato Grosso. Nos Estados do Nordeste êsse coeficiente toma valores entre 0,68 e 0,79. Nos Estados do Leste e do Sul, com exceção do Rio Grande do Sul, o índice de Gini modificado é inferior a 0,69, destacando-se os casos do Espírito Santo, com P = 0,520, e de Santa Catarina, com P = 0,627.

3.7. Origens Históricas da Concentração da Posse da Terra no Brasil

É na formação histórica da estrutura agrária brasileira que devemos procurar as explicações, tanto para os valores elevados dos índices de concentração da posse da terra encontrados, como para as diferenças entre estados no grau de concentração. Não pretendemos desenvolver

essa análise neste trabalho, mas lembraremos sumàriamente algumas indicações existentes na literatura de nosso conhecimento.

A forma básica (legal) de constituição da propriedade rural no Brasil, até 1822, era a sesmaria. Mas as sesmarias não eram as únicas vias de acesso à ocupação territorial. "Desafiando o poder das oligarquias agrárias, multiplicavam-se as posses e, com elas, ganhava largas dimensões e consistência a nova classe dos pequenos cultivadores da terra". (GUIMARÃES, 1968, p. 118).

A partir de 1822 "...sucedem-se as doações das terras públicas que se iriam converter em imensos latifúndios, mas também prosseguem as ocupações de lotes menores, por parte dos pequenos cultivadores, intensificando-se os litígios, as contendas entre sesmeiros e posseiros confinantes, os esbulhos dos lavradores sem recursos pelos senhores dos latifúndios.

Na primeira metade do século XIX o número de "posses" já igualava ou superava o número de propriedades obtidas por meios diferentes da simples ocupação.

Ressalve-se, porém, que onde o velho tipo de latifúndio colonial, feudal e escravista lançara raízes mais profundas como, por exemplo, no Nordeste açucareiro, a posse difìcilmente teria tomado, àquela época, proporções muito extensas" (GUIMARÃES, 1968, pp.118 e 119).

Para VINHAS DE QUEIROZ (1967, p. 139), "o período imperial pode ser dividido muito nìtidamente em duas fases. A primeira vai da Independência exatamente à metade do século XIX, ao ano de 1850, e caracteriza-se pela crise aguda pela qual então passou o regime de grandes propriedades agrícolas que vinha da Colônia e que, nos tempos a que nos referimos, foi afetado pela expansão livre e impetuosa da economia dos posseiros, os quais se atiravam sôbre as terras inexploradas em um ritmo até então desconhecido. Em 1850 êsse processo - que levado às últimas consequências tornaria o Brasil um país de estrutura agrária muito diversa da atual - foi dràsticamente interrompido, e assistimos aí uma nítida opção da classe que usufruía o poder político: podemos denominar essa derradeira etapa do Império a da consolidação da grande propriedade rural ou do sistema de "plantations" em moldes bastante diversos, a da severa limitação dos direitos que tinham sido conquistados pelos posseiros e a da gradual passagem das formas escravistas a outras formas de trabalho no campo mais ou menos livres, dentro dos mesmos latifúndios".

"Se às vesperas de 1850 a sociedade tradicional brasileira quase que sofreu um colapso, presenciamos a partir dessa data o impacto de um processo de modernização livremente consentido, senão orientado e planejado" (VINHAS DE QUEIROZ, 1967, p. 140). O autor citado esclarece que "o processo de modernização - que se acentuaria entre nós durante a "República dos coronéis" (até 1930) - longe de confundir-se com o desenvolvimento, pode apresentar-se até como contrário dêste".

Para GUIMARÃES (1968, p.134) a Lei nº 601 de 1850, a famosa Lei de Terras, baseava-se nos postulados da "colonização sistemática" de Wakefield[5/] e visava, fundamentalmente, a três objetivos: 1) proibir as aquisições de terras por outro meio que não a compra (Art. 1º) e, por conseguinte, extinguir o regime de "posses"; 2) elevar os preços das terras e dificultar sua aquisição (o Art. 14 determinava que os lotes deveriam ser vendidos em hasta pública, oom pagamento à vista, fixando preços mínimos que eram considerados superiores aos vigentes no país); e 3) destinar o produto das vendas de terras à importação de "colonos"[6/].

Contudo, assinala GUIMARÃES, "as resistências à promulgação dessa lei foram muito grandes, bastando ver que o projeto, apresentado em 1843, demorou no Senado sete anos, voltando para a Câmara, depois de várias alterações, só no ano de 1850... Por fim, mesmo aprovada, ficou sem executar durante quatro anos, até surgir seu Regulamento, baixado em 1854".

5/ Para uma análise das idéias de Wakefield veja-se MARX (1968, Livro 1, capítulo XXV).

6/ É interessante, nesse assunto, contrastar a legislação brasileira com a correspondente legislação norte-americana, no século XIX. Antes de 1820 o govêrno dos EUA vendia os lotes a 2 dólares o acre; nesse ano o preço foi reduzido a US$ 1,25 por acre e em 1862 é decretado o "Homestead Aot", estabelecendo a distribuição gratuita de terras, à razão de 160 acres (cêrca de 65 ha) por família (ver GUIMARÃES, 1968, p. 135 e HUBERMAN, 1966, pp. 94, 95, 123 e 176).

"O ano de 1850 - já assinalado por tão importantes acontecimentos - marcou também o início da imigração européia em larga escala. Neste ano, colonos alemães no interior de São Paulo, contratados como "parceiros" nas fazendas de café, já protestavam contra as condições de trabalho e o ludíbrio de que tinham sido vítimas. Foi ainda em 1850 que chegou ao Brasil o socialista alemão Dr. Herman Blumenau, à frente de centenas de colonos que se tornariam pequenos proprietários no vale do Itajaí, hoje uma região de agricultura próspera, e indústria relativamente avançada. Como se sabe, a cidade de Blumenau é atualmente a mais importante dessa área, que conserva ainda, dentro de seus limites, o regime de pequena propriedade agrícola. Pelo decreto de 15 de maio de 1850 foi aprovado um contrato com a Sociedade Colonizadora de Hamburgo para fundação de uma colônia agrícola em Santa Catarina". (VINHAS DE QUEIROZ, 1967, pp. 145 e 146). CÂMARA (1949) afirma que o valor relativamente baixo do índice de Gini da concentração da posse da terra em Santa Catarina resultou de orientação da política de colonização, tornando o colono dono do seu lote.

Apesar da importância que concede às "posses", GUIMARÃES, (1967, p. 106) considera correto situar "o aparecimento da pequena propriedade no Brasil, como instituição consolidada, durante o primeiro quartel do século passado, após a introdução de imigrantes europeus nas regiões meridionais". O mesmo autor (p. 186) coloca o Espírito Santo e Santa Catarina entre os Estados em que a pequena propriedade se cristalizou mais cedo.

4. A DISTRIBUIÇÃO DA RENDA NO BRASIL

4.1. Índices Já Publicados

Conhecemos apenas três trabalhos em que são apresentadas estimativas de índices de concentração da renda no Brasil: CEPAL (1967), CLINE (1969) e CEPAL (1970). Os Quadros 12, 13 e 14 reproduzem os índices de Gini apresentados nesses estudos. Nota-se que apenas no último trabalho da CEPAL são calculados índices de concentração da renda por setores e regiões. Êsses índices (Quadro 14) foram obtidos ajustando-se aos resultados preliminares do Censo Demográfico de 1960 (ver IBGE, 1965) uma distribuição mista lognormal-Pareto; embora reconhecessem que o ajustamento não foi bom, os autores preferiram manter o modêlo utilizado, tendo em vista que é "um modêlo mais ou menos clássico - talvez a única linha de pensamento teórico (na Economia) que dá origem a distribuições estatísticas empìricamente observáveis" (CEPAL, 1970, pp. 31 e 32). Para ilustrar o problema de ajustamento encontrado mostramos na Figura 6 a curva de Pareto com dois parâmetros ajustada aos dados do Censo Demográfico de 1960 para a Região Sul. Sendo u a fração dos que recebem renda que auferem renda mensal "per capita" maior que v, a equação da

curva é

$$u = \frac{2647}{v^{1,394}}$$

No trabalho da CEPAL (1970) esta equação foi utilizada para, por integração, estimar a renda das classes com renda maior que Cr$ 2.647 por mês e por pessoa. É evidente, pelo gráfico, que, dessa maneira, a renda total de grupos com renda entre Cr$ 3.300 e Cr$ 10.000 foi subestimada em relação ao que indicam os dados; a renda de grupos com renda superior a Cr$ 20.000, por outro lado, provàvelmente está sendo superestimada7/.

O índice de Gini da concentração da renda no Brasil encontrado por CLINE (1969) (G = 0,619) é relativamente alto essencialmente devido à sua estimativa da renda da classe com renda superior a Cr$20.000; CLINE estimou que essa classe recebia 45,90% da renda total. Essa porcentagem foi obtida por integração, com base numa curva de Pareto com 2 parâmetros com α = 1,299. Êsse valor parece-nos subestimado devido às razões já apontadas acima, isto é, êle foi obtido ajustando-se a curva de Pareto a todos os pontos observados e essa curva não se ajusta bem a tais pontos.

7/ Utilizamos aqui o símbolo Cr$ para cruzeiros ("velhos") de 1960.

Outros aspectos dos trabalhos citados serão discutidos adiante, após apresentarmos os índices de concentração da renda que obtivemos.

Quadro 12. Índice de Gini da Concentração da Renda em Diversos Países

País	Índice de Gini
El Salvador	0,54
México	0,53
Costa Rica	0,52
Panamá	0,49
Argentina	0,48
Brasil	0,48
Colombia	0,48
Estados Unidos	0,40
Reino Unido	0,34

FONTE: CEPAL (1967), p. 153

Quadro 13. Índice de Gini da Concentração da Renda, em Seis Países Latinoamericanos

País	Descrição dos dados	Ano	Índice de Gini
Argentina	a) Pessoas ativas	1961	0,487
	b) Famílias	1961	0,434
Brasil	a) Pessoas ativas	1960	0,619
	b) Pessoas ativas, incluindo trabalhadores agrícolas não remunerados	1960	0,657
	c) Pessoas ativas, incluindo trabalhadores agrícolas não remunerados, e ajustando para "auto consumo"	1960	0,590
Chile	Famílias	1968	0,446
Colombia	Pessoas ativas	1964	0,640
México	Famílias	1963	0,534
Venezuela	Famílias	1962	0,438

FONTE: CLINE (1969), p. 64.

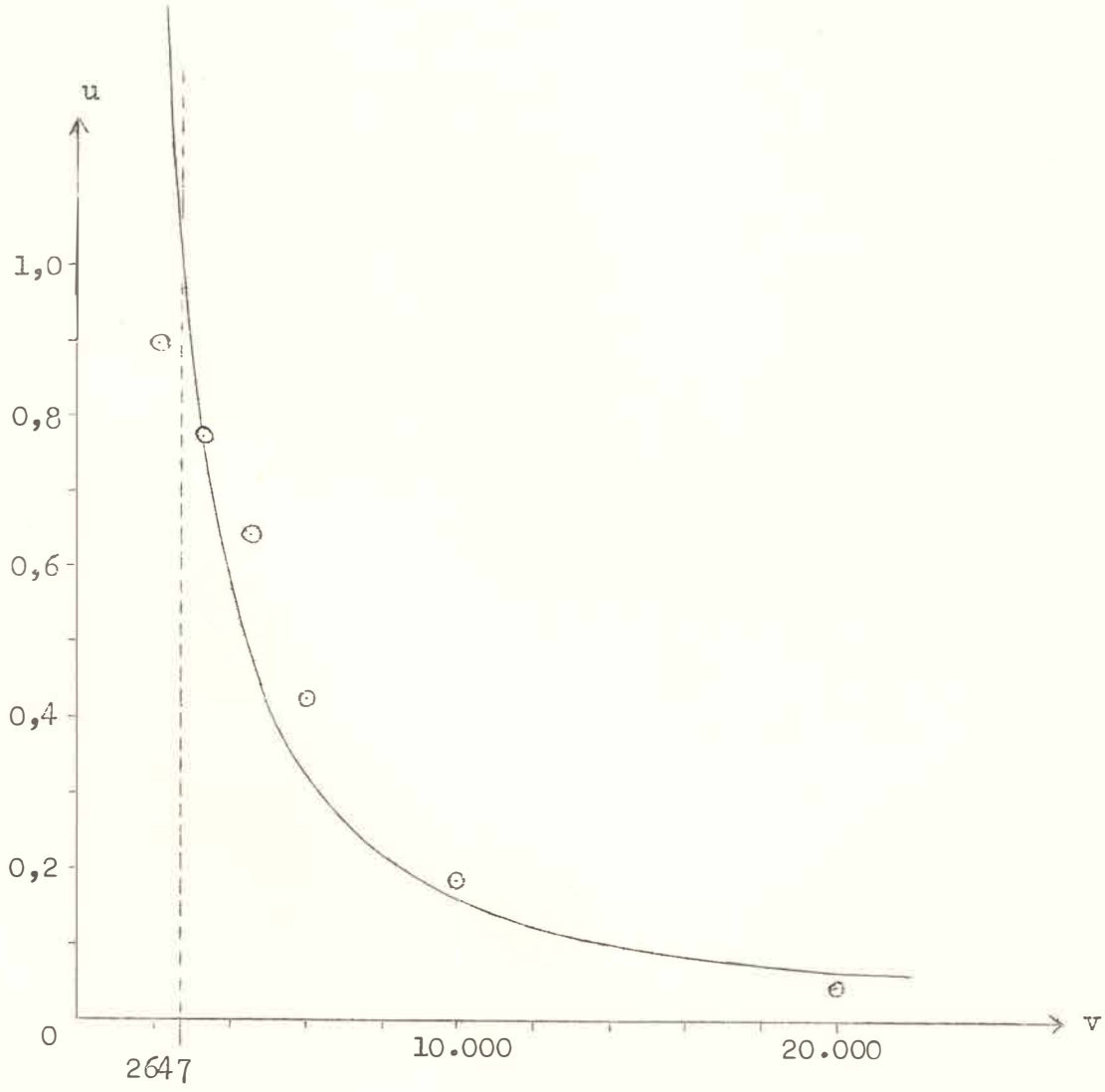
Quadro 14. Índice de Gini da Concentração da Renda no Brasil, por Setores e Regiões

Setor	Brasil	Região			
		Nordeste	Leste	Sul	Norte e Centro-Oeste
Total	0,555	0,502	0,606	0,534	0,498
Primário	0,381	0,387	0,374	0,354	0,377
Urbano	0,574	0,555	0,633	0,575	0,517
Secundário	0,545*	0,452	0,503	0,492	0,446
Terciário e inativos	0,668	0,581	0,720	0,664	0,691

* No original consta o valor 0,5547. Entretanto, refazendo os cálculos, obtivemos 0,5447.

FONTE: CEPAL (1970), p. 50.

Figura 6. Curva de Pareto (com 2 parâmetros) ajustada aos dados de distribuição da renda na Região Sul, em 1960 ($u = \frac{2647}{v^{1,394}}$, sendo u a fração dos que recebem renda que auferem renda mensal "per capita" maior que v).



4.2. Estimativas dos Três Parâmetros da Equação de Pareto

Os únicos dados disponíveis que permitem uma análise de âmbito nacional da distribuição da renda no Brasil são os "Resultados Preliminares" do Censo Demográfico de 1960, publicados pelo IBGE em 1965. Êsses resultados foram obtidos de uma amostra de aproximadamente 1,27% da população e dos domicílios e consistem no número de pessoas, de 10 ou mais anos de idade, distribuido por sete estratos conforme a renda por mês e por pessoa (até Cr$ 2.100; de 2.101 a 3.300; de 3.301 a 4.500; de 4.501 a 6.000; de 6.001 a 10.000; de 10.001 a 20.000 e de 20.001 e mais); também é dado o número de pessoas "sem rendimento" e "sem declaração". Estas informações são fornecidas para o Brasil e para as Regiões Nordeste, Leste e Sul; são também discriminados quatro setores: "atividades agropecuárias e extrativas" (setor primário), "atividades industriais", "outras atividades" e "condições inativas". Da mesma maneira que foi feito em CEPAL (1970), englobamos os três últimos setores no denominado "setor urbano".

Inicialmente, iremos estimar as rendas totais de cada estrato e os índices de concentração procurando ater-nos, até onde fôr possível, aos dados. Posteriormente, discutiremos as limitações dos dados e dos métodos usados, procurando indicar de que maneira, provàvelmente, os verdadeiros índices de concentração diferem das estimativas obtidas.

Uma análise gráfica dos resultados preliminares do Censo Demográfico de 1960 mostrou que, frequentemente, a curva de Pareto só poderia ser ajustada para rendas maiores que Cr$ 4.500, uma vez que só a partir daí os segmentos de reta unindo pontos observados consecutivos apresentavam declividade, em valor absoluto, decrescente. Note-se que a declividade da curva de Pareto é dada por $\frac{du}{dv} = - \frac{\alpha A}{(v+K)^{\alpha+1}}$, sendo u o número de pessoas com renda maior que v.

Pretendíamos, então, para maior uniformidade, ajustar a curva sempre levando em consideração apenas os dados referentes a rendas superiores a Cr$ 4.500 por mês e por pessoa. No caso da Região Nordeste, entretanto, isso levou a estimativas de α menores que um, o que impossibilita estimar-se a renda total do último estrato, com rendas maiores que Cr$ 20.000 por mês e por pessoa (ver expressões 25 e 26 na seção 2.4). Experimentando ajustar a curva, no caso do Nordeste, considerando os estratos com renda superior a Cr$ 3.300, obtivemos, para o total e o setor primário, estimativas de α muito próximas a um (o que leva a estimativas relativamente muito elevadas para a renda média do estrato com renda superior a Cr$ 20.000). Optamos então pelas curvas ajustadas considerando uma renda mínima de: Cr$ 2.100 no caso do Nordeste (total) e do setor primário do NE; Cr$ 3.300 no caso do setor urbano do NE; Cr$ 4.500 nos demais casos analisados. Os resultados obtidos estão no Quadro 15.

Observa-se que, excluindo a região Nordeste, os coeficientes de determinação são, pràticamente, iguais a um. Isso indica que a curva ajustada quase que passa pelos pontos observados. Entretanto, como teste estatístico da validade do modêlo de regressão usado, o valor do coeficiente de determinação é, nesse caso, extremamente frágil, uma vez que estamos ajustando uma função com três parâmetros a 4 pontos observados, ou seja, ficamos com apenas um grau de liberdade para o resíduo na análise de variância da regressão. Para justificar o uso da distribuição de Pareto, temos que nos apoiar no fato de que em trabalhos anteriores foi observado que, para rendas elevadas, essa curva se ajusta bem às distribuições de renda em países capitalistas (ver LANGE, 1967, pp. 151-169) e também no fato de que a distribuição de Pareto pode, até certo ponto, ser justificada teòricamente (ver secção 2.4).

No caso da Região Nordeste, o ajustamento da curva foi menos satisfatório, como é indicado pelos valores do coeficiente de determinação. Além disso, uma análise gráfica mostrou que, para o setor urbano do NE, os segmentos de reta unindo pontos observados consecutivos só apresentavam declividade decrescente, em valor absoluto, a partir da renda de Cr$ 4.500.

Quanto ao valor do parâmetro K, nota-se que êle é negativo nas equações referentes ao NE (a região mais pobre) e ao setor primário (o setor mais pobre), excluindo-se o setor primário da Região Sul.

Quadro 15. Distribuição da Renda no Brasil, por Regiões e Setores. Estimativas dos parâmetros a (= $\log_e$ A), K e α da equação de Pareto, respectivos desvios padrões (colocados entre parênteses logo abaixo) e coeficiente de determinação (R^2) da regressão.

Setor	Nº de pontos (n), parâmetros, R^2	Brasil	Região		
			Nordeste	Leste	Sul
	n	4	6	4	4
	a	35,987 (0,055)	25,014 (1,665)	33,234 (1,630)	43,160 (1,083)
Total	K	2909 (29)	- 536 (514)	2785 (927)	6045 (542)
	α	2,244 (0,005)	1,420 (0,174)	2,059 (0,155)	3,004 (0,101)
	R^2	1,000	0,994	1,000	1,000
	n	4	6	4	4
	a	30,051 (0,332)	25,135 (2,515)	26,552 (1,417)	34,203 (0,173)
Primário	K	-1059 (124)	-1141 (479)	-1687 (523)	280 (64)
	α	1,905 (0,033)	1,627 (0,270)	1,686 (0,143)	2,396 (0,017)
	R^2	1,000	0,986	1,000	1,000
	n	4	5	4	4
	a	39,286 (1,616)	22,759 (1,100)	35,726 (4,434)	49,579 (1,163)
Urbano	K	5495 (915)	-1081 (497)	4848 (2674)	10346 (617)
	α	2,557 (0,151)	1,208 (0,112)	2,296 (0,416)	3,594 (0,106)
	R^2	1,000	0,998	0,999	1,000

4.3. Distribuição da Renda por Estratos

Para calcular índices de concentração da renda necessitamos do número de pessoas e da renda total por estratos de renda. Na parte das distribuições em que foi ajustada a curva de Pareto passamos a utilizar os valores obtidos através das expressões (22), (25) e (26) (secção 2.4). No caso dos dois estratos de renda entre Cr$2.100 e Cr$ 4.500, quando a curva de Pareto foi ajustada apenas para rendas maiores, a renda total dos estratos foi obtida multiplicando o número de pessoas do estrato pelo ponto médio do intervalo correspondente, ou seja, Cr$ 2.700 e Cr$ 3.900 por mês e por pessoa. Para o estrato de rendas mais baixas considerou-se uma renda média mensal "per capita" de Cr$ 1.200 nas distribuições referentes ao Brasil, Cr$ 1.050 nas distribuições referentes ao NE, Cr$ 1.150 nas distribuições referentes ao Leste e Cr$ 1.500 nas distribuições referentes ao Sul. Essas rendas médias dos estratos são valores aproximados, baseados numa análise gráfica dos dados disponíveis. Êsses valores foram estabelecidos de maneira que a renda total do estrato correspondesse, aproximadamente, à área entre o eixo das ordenadas e a provável posição da curva no intervalo delimitado pelas abscissas 0 e 2.100.

As rendas totais e médias, por setores e regiões, obtidas dessa maneira, são dadas no Quadro 16.

Quadro 16. Rendas Totais e Médias, por Setores e Regiões do Brasil, em 1960.

Setor	Brasil		Região					
			Nordeste		Leste		Sul	
	Renda total*	Renda média**	Renda total*	Renda média**	Renda total*	Renda média**	Renda total*	Renda média**
Total	117.732	5.967	14.551	3.512	43.584	6.088	51.655	7.256
Primário	33.068	3.685	5.710	2.203	10.122	3.301	13.043	5.012
Urbano	83.684	7.757	11.061	7.166	32.987	8.039	38.262	8.461

* Em milhões de cruzeiros de 1960 por mês

** Em cruzeiros de 1960 por mês e por pessoa

Quando somamos a renda total do setor primário (33.068 milhões de cruzeiros por mês) com a renda total do setor urbano (83.684 milhões de cruzeiros por mês) obtemos 116.752, o que está bastante próximo do valor obtido no caso da distribuição referente ao Brasil como um todo, 117.732 milhões de cruzeiros por mês. Também no caso das Regiões Leste e Sul podemos observar que a consistência dos resultados é bastante boa[8/]. Os resultados são menos satisfatórios no caso do Nordeste. Observamos ainda que a renda média do estrato com renda maior

8/ O mesmo tipo de análise foi feita no estudo da CEPAL (1970, p. 40) e foram encontrados resultados bastante inconsistentes. Basta dizer que a renda total do setor urbano superou o valor total para o Brasil.

que Cr$ 20.000 do setor urbano do NE (111 mil cruzeiros por mês e por pessoa) discrepava bastante das demais estimativas da renda média dêsse estrato (variando de 32 a 66 mil cruzeiros por mês e por pessoa). Optamos então por abandonar os resultados obtidos para o setor urbano do NE e passar a utilizar, neste caso, os valores obtidos subtraindo-se, estrato por estrato, os valores referentes ao setor primário dos valores referentes ao total da Região Nordeste. Obtivemos assim, para o setor urbano do NE, uma renda total de 8.841 milhões de cruzeiros de 1960 por mês, e uma renda média mensal de Cr$ 5.702 por pessoa.

O apêndice 2 fornece os valores que obtivemos para as porcentagens do número de pessoas em cada estrato, a correspondente porcentagem da renda total recebida e a renda média em cada estrato. Com base nesses resultados, conseguimos os índices de concentração da renda apresentados na próxima secção.

4.4. Índices de Concentração da Renda no Brasil

No Quadro 17 encontram-se os índices de concentração da renda no Brasil, por regiões e setores, que obtivemos.

Quadro 17. Índice de Gini (G e P), Redundância (R) e Índice de Theil (T) da Concentração da Renda no Brasil, por Setores e Regiões, em 1960

Setor		Brasil	Região		
			Nordeste	Leste	Sul
Total	G	0,488	0,550	0,523	0,396
	P	0,504	0,579	0,537	0,414
	R	0,455	0,807	0,531	0,290
	T	0,366	0,554	0,412	0,251
Primário	G	0,415	0,380	0,414	0,348
	P	0,436	0,434	0,439	0,364
	R	0,360	0,385	0,384	0,242
	T	0,302	0,319	0,319	0,215
Urbano	G	0,460	0,616	0,491	0,378
	P	0,476	0,633	0,507	0,399
	R	0,389	0,900	0,449	0,260
	T	0,322	0,593	0,362	0,229

Vejamos, inicialmente, as limitações dêsses resultados:

a) Lembremos que os índices de Gini (G), a redundância (R) e o índice de Theil (T) são subestimativas dos verdadeiros índices de concentração, pois no seu cáloulo admite-se que a renda seja igualitàriamente distribuida dentro dos estratos. As diferenças entre os índices G e P indicam a ordem de grandeza dessa subestimação.

b) A renda total está subestimada e, provàvelmente, isso se deve sobretudo à subdeclaração das rendas altas. Tal incorreção dos dados leva à subestimação dos índices de concentração.

c) Na coleta dos dados "indagou-se das pessoas de 10 anos e mais quanto ganhavam por mês. Para as pessoas que auferiam rendimentos fixos (salários, ordenados, etc.) foi considerado o rendimento do último mês. Para aquêles que recebiam rendimentos variáveis foi considerada a renda média dos últimos 12 meses" (IBGE, 1965, p. IV).Uma vez que nesses 12 meses houve uma inflação de cêrca de 27%, a média das receitas mensais em moeda corrente subestima a renda real. Como rendimentos variáveis são mais comuns em estratos de renda alta, esta incorreção nos dados conduz a uma subestimação dos índices de concentração.

d) Na coleta dos dados não se levou em consideração a produção para consumo do próprio produtor, fenômeno relativamente importante para pequenos proprietários. Considerando que êsses pequenos proprietários em geral fazem parte de estratos de renda baixa, tal imperfeição das informações leva a superestimar os índices de concentração. Para uma avaliação da importância do fenômeno em questão na distribuição da renda veja-se o Quadro 13 e CLINE (1969).

e) Os executivos (diretores, gerentes, presidentes) de emprêsas, integrantes de estratos de renda alta, recebem benefícios "em espécie" que certamente não foram incluidos nas informações utilizadas.

Tal incorreção conduz a uma subestimação dos índices de concentração. MILLS (1968, pp. 184-185) comenta, em relação a êsse fenômeno nos EUA, que "como pràticamente tôdas as estatísticas de rendas se baseiam nas declarações dos contribuintes, não revelam totalmente as diferenças de "renda" entre os ricos associados e outros americanos. De fato, uma diferença principal são os privilégios deliberadamente criados para a exclusão da "renda" dos lançamentos de impostos... . Quando os impostos são altos, os ricos associados são bastante espertos para imaginar formas de receber a renda, ou as coisas e experiências que esta proporciona, de modo a escapar dos lançamentos". Outro sociólogo norte-americano, KOLKO (1962, pp. 16-20), também dá bastante importância ao fenômeno e fornece informações adicionais sôbre os métodos usados pelos executivos. Embora não tenhamos conhecimento de estudos sôbre benefícios "em espécie" recebidos pelos executivos de emprêsas no Brasil, parece-nos que o padrão de comportamento é, no caso, semelhante ao norte-americano, mesmo porque são profundas as vinculações internacionais, e especialmente com os EUA, das grandes emprêsas que operam no Brasil (vejam-se em VINHAS DE QUEIROZ, 1965, os resultados de pesquisa sôbre os grandes grupos econômicos no Brasil, realizada com base em dados de 1962).

f) Não foram consideradas as variações no custo de vida, de uma região para outra, e de um setor para outro. Se o custo de vida estiver positivamente correlacionado com a renda "per capita", os índices calculados tendem, sob êsse aspecto, a superestimar a concentração

da renda real.

g) Os índices de concentração do Quadro 17 não levam em consideração a fração (S) da população ativa que declarou renda nula. CLINE (1969) admitiu que as pessoas ocupadas no setor primário que declararam renda nula são trabalhadores não pagos, membros de famílias onde o chefe declarou a renda correspondente a todos, e procurou corrigir essa imperfeição dos dados do Censo Demográfico. (ver no Quadro 13 a modificação que essa correção causou no índice de Gini da concentração da renda obtido por CLINE).

O índice de Theil (T) pode ser utilizado, em combinação com a fração S, para indicar a ordem de grandeza das modificações que sofrem os índices do Quadro 17 se consideramos as pessoas ativas que declararam renda nula. Lembremos que o índice de Theil corresponde à fração de pessoas que ficariam sem renda numa população com distribuição de renda "equivalente" (de mesma redundância) à da população considerada. Se acrescentamos à população com distribuição de renda equivalente as pessoas que declararam renda nula, a fração de pessoas sem renda nessa população passa a ser S + T (1 - S). No Quadro a seguir apresentamos o valor dêsse índice, juntamente com o valor da fração S, para o Brasil, por regiões e setores.

A seguir assinalamos alguns pontos com base nos resultados apresentados nos Quadros 17 e 18.

Quadro 18. Pessoas Ativas com Renda Nula como Fração do Número Total de Pessoas com Declaração de Renda (S) e Valor da Expressão S + T (1 - S) para o Brasil, por Regiões e Setores, em 1960

Setor		Brasil	Região		
			Nordeste	Leste	Sul
Total	S	0,069	0,084	0,060	0,066
	S+T (1-S)	0,409	0,592	0,447	0,301
Primário	S	0,261	0,254	0,242	0,288
	S+T (1-S)	0,484	0,492	0,484	0,441
Urbano	S	0,004	0,006	0,003	0,004
	S+T (1-S)	0,325	0,596	0,363	0,232

a) Os índices do Quadro 17 indicam que, tanto no Brasil como nas regiões analisadas, a concentração da renda no setor urbano é maior que no setor primário, confirmando-se, sob êsse aspecto, os resultados encontrados no trabalho da CEPAL (1970). Note-se, entretanto, que as diferenças nos coeficientes de concentração são menores no caso dos nossos resultados (comparar os índices dos Quadros 14 e 17), e os valores da expressão S + T (1 - S) mostram que, se levamos em consideração o número de pessoas ativas sem renda, o índice de concentração pode, com exceção do NE, passar a ser maior no setor primário que no urbano.

b) A concentração da renda é maior nas Regiões Nordeste e Leste que na Região Sul. Nesse aspecto nossos resultados contrariam, em parte, aquêles do estudo da CEPAL (1970), que apresentam índice de concentração maior para o Sul que para o Nordeste.

c) Quando consideramos apenas o setor primário, verificamos que os índices de concentração da renda obtidos tem valores muito próximos no Nordeste e no Leste e são menores no Sul. Quando levamos em consideração as pessoas ativas sem renda, o índice obtido indica que a concentração no Nordeste é algo maior que no Leste.

d) Quando comparamos os índices de concentração da posse da terra apresentados no capítulo anterior com os índices de concentração da distribuição da renda dos Quadros 17 e 18, verificamos que estes últimos são bastante menores. Êsse resultado era esperado pois pesquisas anteriores mostram que o grau de concentração da distribuição da riqueza é maicr que o grau de concentração da distribuição da renda (ver, por exemplo, PROJECTOR e WEISS, 1967, e o trabalho de Lydall e Lansing citado por SAMUELSON, 1963, vol. I, p. 193).

4.5. Decomposição, Conforme Setores e Regiões, da Redundância da Distribuição da Renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul.

No Quadro 19 podemos observar a contribuição das diferenças entre setores e entre regiões para a redundância total da distribuição da renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul do Brasil, em 1960.

Observa-se que:

a) as diferenças interregionais representam apenas 6% da redundância total nas três regiões;

b) a participação das diferenças interregionais na redundância total é maior no setor primário (14%) que no setor urbano (2%);

c) as diferenças de renda entre o setor urbano e o primário representam 15% da redundância total nas três regiões;

d) a participação das diferenças intersetoriais na redundância total é maior nas Regiões Nordeste e Leste (14% e 16%) que na Região Sul (10%).

É possível, ainda, decompor-se a redundância total para as três regiões em um "micro-componente" e um "macro-componente". O primeiro é dado pela média ponderada de seis redundâncias, uma para cada um dos dois setores de cada uma das três regiões. O macro-componente representa as diferenças entre setores e entre regiões. Obtivemos um micro-componente de 0,385 nits (81% da redundância total) e um macro-componente de 0,090 nits (19% da redundância total).

Devemos lembrar que as redundâncias intrassetoriais, intrarregionais e o micro-componente estão subestimados uma vez que, no cálculo da redundância, admite-se que a renda seja igualitàriamente distribuida dentro de cada estrato de renda.

Quadro 19. Decomposição, Conforme Setores e Regiões, da Redundância da Distribuição da Renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul do Brasil, em 1960

Caracterização da redundância		Redundância em nits	Participação percentual
Setor Primário das três regiões	Intrarregional	0,320	86
	Interregional	0,051	14
	Total	0,371	100
Setor Urbano das três regiões	Intrarregional	0,408	98
	Interregional	0,008	2
	Total	0,416	100
Três regiões (Nordeste, Leste e Sul)	Intrarregional	0,445	94
	Interregional	0,030	6
	Total	0,475	100
Região Nordeste	Intrassetorial	0,698	86
	Intersetorial	0,111	14
	Total	0,809	100
Região Leste	Intrassetorial	0,433	84
	Intersetorial	0,082	16
	Total	0,515	100
Região Sul	Intrassetorial	0,255	90
	Intersetorial	0,028	10
	Total	0,283	100
Três regiões	Intrassetorial	0,404	85
	Intersetorial	0,071	15
	Total	0,475	100

No estudo da CEPAL (1970) é feita uma análise mais completa do macro-componente, utilizando-se, além dos dados do Censo Demográfico de 1960, as novas estimativas das contas nacionais do Brasil publicadas pela Fundação Getúlio Vargas. Comparando resultados para 1940, 1950 e 1960, os autores dêsse estudo concluem que o macro-componente da redundância da distribuição da renda no Brasil tende a diminuir, ou seja, as participações dos setores e das regiões na renda nacional são cada vez mais semelhantes a suas participações na população do país.

Lembramos que existem duas razões pelas quais as redundâncias totais para os setores e as regiões apresentadas no Quadro 19 não coincidem com os valores correspondentes no Quadro 17: as incompatibilidades assinaladas no Quadro 16 e o fato de que as redundâncias do Quadro 19 incluem a influência das diferenças, entre regiões e entre setores, na renda média de cada estrato de renda.

4.6. Distribuição da Renda Familiar no Brasil Urbano

Em diversas pesquisas realizadas no Brasil foram levantados dados que possibilitam calcular-se índices de concentração da renda familiar em diversas cidades brasileiras. Consideramos os resultados dos seguintes trabalhos:

a) Pesquisas do ETENE/SUDENE (Departamento de Estudos Econômicos no Nordeste, do Banco do Nordeste do Brasil, e Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste) sôbre "Suprimento de Gêneros Alimentícios" (Pesquisa SGA) (ver BNB-ETENE, 1969).

b) Pesquisas do ETENE sôbre "Consumo de Produtos Industriais" (Pesquisa CPI) (ver BNB-ETENE, 1969).

c) Pesquisa da CODEPLAN intitulada "Diagnóstico do Abastecimento de Produtos Alimentícios do Distrito Federal" (ver CODEPLAN, 1970).

d) Pesquisa sôbre Orçamentos Familiares da Fundação Getúlio Vargas (FGV) (utilizamos apenas os dados publicados em CODEPLAN, 1970, p. 35).

e) "Pesquisa sôbre Consumo Alimentar e Orçamentos Familiares no Grande Rio" realizada pela COCEA (ver CODEPLAN, 1970, p. 35).

Os índices que obtivemos a partir dêsses dados estão no Quadro 20.

Referindo-se às pesquisas SGA e CPI a publicação do BNB-ETENE (1969, p. 8) considera que "não é demais insistir sôbre o cuidado que se deve tomar quando da consideração de dados sôbre rendimentos auferidos. As informações disponíveis, por terem sido obtidas em têrmos da renda percebida no mês anterior, devem apresentar certa subestimação em relação ao que se constitui um fluxo médio mensal de renda durante o ano. Não incluem por exemplo, frações correspondentes a 13º salário, gratificações e abonos juninos e natalinos, etc. Ademais considerem-se tôdas aquelas outras dificuldades e distorções que são, geralmente, admitidas com relação à obtenção de informes sôbre rendas".

Quadro 20. Índices de Concentração da Renda Familiar em Cidades Brasileiras

Cidade	Ano	Pesquisa	Índices			
			G	P	R	T
Natal	1961	SGA	0,405	0,424	0,281	0,245
Natal	1966	CPI	0,433	0,462	0,338	0,287
Recife	1960	SGA	0,370	0,413	0,254	0,224
Recife*	1967	CPI	0,501	0,523	0,452	0,364
João Pessoa	1964	SGA	0,416	0,437	0,305	0,263
João Pessoa	1967	CPI	0,492	0,515	0,419	0,342
Maceió	1964	SGA	0,434	0,453	0,356	0,300
Maceió	1968	CPI	0,480	0,506	0,417	0,341
Fortaleza	1962	SGA	0,354	0,375	0,265	0,232
Fortaleza	1965	CPI	0,418	0,445	0,313	0,268
São Luís	1963	SGA	0,338	0,356	0,192	0,175
São Luís	1967	CPI	0,449	0,475	0,364	0,305
Salvador	1962	SGA	0,421	0,440	0,310	0,267
Salvador	1966	CPI	0,447	0,478	0,354	0,298
Campina Grande	1962	SGA	0,379	0,429	0,296	0,256
Campina Grande	1967	CPI	0,541	0,562	0,539	0,416
Teresina	1967	CPI	0,474	0,500	0,396	0,327
Parnaiba	1968	CPI	0,522	0,546	0,535	0,414
Sobral	1968	CPI	0,525	0,547	0,505	0,396
Caruarú	1968	CPI	0,498	0,521	0,481	0,382
Feira de Santana	1967	CPI	0,455	0,483	0,381	0,317
Alagoinhas	1967	CPI	0,467	0,494	0,410	0,336
Montes Claros	1968	CPI	0,544	0,566	0,574	0,436
Brasilia	1968	CODEPLAN	0,424	0,442	0,338	0,287
B. Horizonte	1961/62	FGV	0,463	0,473	0,396	0,327
Grande Rio	1968	COCEA	0,422	0,428	0,310	0,266
Guanabara	1961/62	FGV	0,439	0,450	0,358	0,301
Curitiba	1961/62	FGV	0,447	0,457	0,375	0,313

* Incluindo Olinda, Paulista e Jaboatão

A mesma publicação lembra os perigos de comparações entre resultados de diferentes pesquisas, chamando a atenção para o caso do Recife, onde a pesquisa SGA abrangeu sòmente os limites políticos do município, enquanto que a pesquisa CPI incluiu, também, no seu âmbito de observação, as cidades de Olinda, Paulista e Jaboatão. Apesar disso, com base nas duas observações no tempo disponíveis para as oito maiores cidades da região, a publicação do BNB-ETENE constata que houve uma "tendência generalizada para uma maior concentração da renda" (p. 34). Note-se, no Quadro 20, que, para as oito cidades com duas observações no tempo, os índices de concentração sempre aumentaram.

Verifica-se, no Quadro 20, que o índice P está, em geral, no intervalo 0,40 - 0,55. Êsse resultado confirma a ordem de grandeza do índice P = 0,476 para o setor urbano do Brasil, que obtivemos com base nos dados do Censo Demográfico de 1960. Note-se que, no caso do Censo, os dados se referem à renda por pessoa e não à renda familiar, sendo de se esperar que a distribuição da renda por família seja menos concentrada que a distribuição de renda por indivíduo.

Os índices para o setor urbano obtidos a partir dos resultados do Censo Demográfico de 1960 indicam concentração maior no NE que no Leste, e menor no Sul (ver Quadro 17). Essas diferenças regionais não são claramente confirmadas pelos índices de concentração da renda familiar obtidos. Quando consideramos o índice P verifica-se que as cidades com concentração mais alta (P acima de 0,5) são Recife

(incluindo Olinda, Paulista e Jaboatão), João Pessoa, Maceió, Campina Grande, Parnaiba, Sobral, Caruarú e Montes Claros, no Nordeste e no Leste. Por outro lado, o valor do índioe P para Curitiba é superior ao correspondente a Fortaleza.

4.7. Distribuição dos Empregados Administrativos e Operários em Estratos Conforme o Salário

Em 1967 o IBGE publicou os resultados dos "Inquéritos Econômicos" para as indústrias de transformação do Brasil, de São Paulo e da Guanabara, incluindo a distribuição dos empregados no mês de abril de 1966, segundo nove estratos quanto ao salário: até 48,00 cruzeiros (novos) por mês; de 48,01 a 84,00; de 84,01 a 126,00; de 126,01 a 210,00; de 210,01 a 294,00; de 294,01 a 378,00; de 378,01 a 462,00; de 462,01 a 546,00 e 546,01 cruzeiros para mais. Para calcular índices de concentração da renda do trabalho a partir dessas informações é necessário estimar, preliminarmente, a renda total por estrato.

Uma análise gráfica dos dados mostrou que a curva de Pareto só se ajustava bem para salários maiores que Cr$ 84,00. As estimativas dos parâmetros da equação de Pareto, os respectivos desvios padrões e o coeficiente de determinação da regressão estão no Quadro 21. Verifica-se que a curva se ajustou muito bem aos pontos.

Quadro 21. Distribuição dos Empregados em Estratos Quanto ao Salário no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966. Estimativas dos parâmetros a (= $\log_e$ A), K e α da equação de Pareto, respectivos desvios padrões (colocados entre parênteses logo abaixo) e coeficiente de determinação (R^2) da regressão.

Categoria	Número de pontos (n), parâmetros, R^2	Brasil	São Paulo	Guanabara
Empregados (total)	n	7	7	7
	a	29,977 (0,496)	31,912 (1,427)	26,793 (0,671)
	K	101,3 (7,6)	156,0 (23,6)	88,4 (10,5
	α	3,061 (0,072)	3,357 (0,203)	2,892 (0,098)
	R^2	1,000	1,000	1,000
Empregados administrativos	n	7	7	7
	a	32,981 (0,658)	47,877 (4,113)	46.497 (6,162)
	K	317,8 (14,9)	779,4 (102,6)	681,7 (138,0
	α	3,427 (0,089)	5,316 (0,516)	5,426 (0,782)
	R^2	1,000	1,000	1,000
Operários	n	7	7	7
	a	38,792 (1,607)	50,174 (7,865)	36,756 (4,427)
	K	163,2 (20,0)	303,2 (96,2)	140,8 (50,9)
	α	4,543 (0,228)	6,190 (1,069)	4,638 (0,634)
	R^2	1,000	0,999	0,998

Para estimar a renda total do segundo estrato (com salário de 48,01 a 84,00 cruzeiros) multiplicamos o número de empregados dêsse estrato pelo ponto médio do intervalo de classe, ou seja, Cr$66,00. Para o primeiro estrato consideramos um salário médio de Cr$34,00 (valor aproximado, estabelecido gràficamente, de maneira que a renda total do estrato correspondesse, "a ôlho", à área entre o eixo das ordenadas e a provável posição da curva no intervalo delimitado pelas abscissas 0 e 48). No que se refere aos demais estratos, que estão na parte da distribuição em que foi ajustada a curva de Pareto, passamos a utilizar o número de empregados e a renda total por estrato obtidos através das expressões (22), (25) e (26) (secção 2.4). As rendas totais e os salários médios, obtidos dessa maneira, estão no quadro a seguir.

Quadro 22. Rendas Totais e Salários Médios dos Empregados no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966.

Categoria	Brasil		São Paulo		Guanabara	
	Renda total*	Salário médio**	Renda total*	Salário médio**	Renda total*	Salário médio**
Empregados (total)	253.872	130	151.028	155	28.678	146
Empregados administrativos	66.286	212	44.638	257	9.236	237
Operários	187.567	114	106.035	132	19.152	121

* Em milhares de cruzeiros (novos) de 1966 por mês

** Em cruzeiros (novos) de 1966 por mês e por empregado

Quando somamos a renda total dos empregados administrativos do Brasil (66.286 milhares de cruzeiros) com a renda total dos operários (187.567 milhares de cruzeiros) obtemos 253.853 milhares de cruzeiros, o que está bastante próximo do valor obtido no caso da distribuição referente ao conjunto de todos os empregados, 253.872 milhares de cruzeiros por mês. Embora no caso de São Paulo e da Guanabara a compatibilidade dos resultados não seja tão boa, é ainda bastante satisfatória.

Nota-se, no Quadro 22, que o salário médio é maior em São Paulo que na Guanabara. De acôrdo com o esperado, o salário médio para o Brasil é inferior ao dos centros industriais considerados. Nota-se também que o salário médio dos operários é sempre bastante inferior ao dos empregados administrativos. No caso do Brasil, o salário médio dos operários corresponde a 54% daquele dos empregados administrativos; tanto em São Paulo como na Guanabara essa relação é de 51%, indicando que nesses grandes centros urbanos é maior a desigualdade entre as duas categorias analisadas (possìvelmente porque aí se encontra grande parte dos empregados administrativos com salários excepcionalmente elevados, os executivos das grandes emprêsas).

O apêndice 3 fornece os valores que obtivemos para as porcentagens do número de empregados em cada classe de salário, a correspondente porcentagem da renda total do trabalho recebida e o salário médio em cada estrato. Com base nêsses resultados, determinamos os índices de concentração apresentados no Quadro 23. A importância relativa

das diferenças entre as categorias na composição da redundância total é vista no Quadro 24.

Quadro 23. Índice de Gini (G e P), Redundância (R) e Índice de Theil (T) da Concentração da Renda (recebida como salário) entre Empregados Administrativos e Operários, no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966.

Categoria		Brasil	São Paulo	Guanabara
Empregados (total)	G	0,356	0,365	0,351
	P	0,374	0,381	0,370
	R	0,253	0,255	0,248
	T	0,224	0,225	0,219
Empregados administrativos	G	0,423	0,413	0,389
	P	0,434	0,422	0,399
	R	0,325	0,293	0,263
	T	0,277	0,254	0,231
Operários	G	0,308	0,306	0,281
	P	0,329	0,327	0,308
	R	0,182	0,172	0,153
	T	0,166	0,158	0,142

Quadro 24. Decomposição da Redundância da Distribuição da Renda do Trabalho entre Empregados no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966

Caracterização da redundância	Brasil		São Paulo		Guanabara	
	Redundância em nits	%	Redundância em nits	%	Redundância em nits	%
Intra-categorias	0,219	87	0,208	83	0,189	81
Inter-categorias	0,033	13	0,042	17	0,045	19
Total	0,252	100	0,250	100	0,234	100

O exame do Quadro 23 mostra que a concentração da renda do trabalho entre empregados administrativos (P da ordem de 0,40-0,43) é maior que entre operários (P da ordem de 0,31 - 0,33).

Comparando os índices do Quadro 23 com aqueles dos Quadros 17 e 20 observa-se que a concentraçãc da renda do trabalho entre os empregados é bastante menor que a concentração da renda total entre os indivíduos ou as famílias. O índice P da concentração da renda no setor urbano do País é 0,476, ao passo que no caso da distribuição da renda do trabalho entre empregados nas indústrias de transformação o valor dêsse índice é 0,374. Há duas razões para que o primeiro índice citado seja maior: 1º) êle leva em consideração as diferenças dentro do setor terciário e entre êsse setor e a indústria; 2º) êle inclui as diferenças entre rendas de capital e entre tais rendas

e os salários.

Tendo em vista avaliar a importância das diferenças entre rendas de capital e rendas do trabalho calculamos os índices de concentração da renda no setor industrial do Brasil. Para isso ajustamos a curva de Pareto aos dados do Censo Demográfico de 1960, a partir da renda de 4.500 cruzeiros (velhos) por mês e por pessoa. As estimativas dos parâmetros a, K e α obtidas são, respectivamente, 34,556, 1586 e 2,305; os correspondentes desvios padrões são 0,316, 1424 e 0,304; o coeficiente de determinação da regressão é 0,999. Procedendo da maneira já indicada anteriormente calculamos a renda total para cada estrato (ver apêndice 2) e determinamos os índices de concentração: G=0,390, P = 0,410, R = 0,300 e T = 0,259.

Quando comparamos êsses resultados e os índices do Quadro 17 com aqueles do Quadro 23 é importante considerar que os últimos provàvelmente estão menos sujeitos a erros de subestimação. Note-se que, das fontes de erros enumerados na secção 4.4, aquela considerada no item (b) é muito menos importante no caso de salários; no item (c) apontamos uma causa de subestimação que absolutamente não se aplica no caso dos índices do Quadro 23. É possível, portanto, que seja maior a diferença entre os graus de concentração da renda no setor industrial e no setor urbano como um todo, por um lado, e da renda do trabalho de empregados na indústria de transformação, por outro lado. Outra possível razão para isso é que entre 1960 e 1966 tenha aumentado a concentração da renda no setor urbano do Brasil, como veremos na secção 4.8.

Mesmo levando em consideração as limitações acima, a comparação entre os índices de concentração da renda no setor industrial em 1960 (P = 0,410 e R = 0,300) e os índices de concentração da renda do trabalho entre empregados da indústria de transformação em 1966 (P = =0,374 e R = 0,253) parece indicar que as diferenças entre assalariados são relativamente muito importantes. Se consideramos, ainda, que provàvelmente há maior desigualdade entre rendas do capital que entre rendas do trabalho (ver dados referentes aos EUA em estudo de Selma F. Goldsmith citado por SWEEZY, 1965, pp. 225-226), concluimos que é relativamente pequeno o componente da desigualdade total no setor industrial correspondente às diferenças entre salários e rendas de capital[9].

Um outro aspecto que queremos assinalar é o fato de que a curva de Pareto se ajustou muito bem à distribuição da renda de salários entre empregados, mesmo quando se considera apenas os operários (ver Quadro 21). Lembremos que na distribuição de Pareto, à medida que passamos a estratos de renda mais alta, a tamização é inversamente proporcional ao nível de renda já alcançado, ou, vice-versa, a possibilidade de subir para estratos de renda mais alta é tanto maior quanto maior o nível de renda já alcançado. Não é difícil imaginar as etapas do processo, em linhas gerais, no caso das rendas de capital: renda

---

9/ Note-se que, à primeira vista, isso contraria a idéia clássica de que uma das razões fundamentais para a desigualdade na distribuição da renda total é a diferença entre rendas do capital e do trabalho. Voltaremos a discutir essa questão na secção 4.9.

maior permite maior poupança e consequente aumento da riqueza que possibilita auferir rendas maiores. Mas, qual a lógica do processo no caso de salários? Certamente a educação formal representa um papel importante. Mostramos anteriormente que a tamização no sistema escolar brasileiro obedece à lei de Pareto, indicando que o acesso aos diferentes níveis de educação está relacionado com a distribuição da renda (HOFFMANN, 1969)[10/].

Em linhas gerais o processo acumulativo (círculo vicioso) se desenvolve nas seguintes etapas: maior salário implica em possibilidades de melhor educação formal, que possibilita, por sua vez, obtenção de empregos com remuneração maior.

Na distribuição dos empregados segundo seu salário os estratos mais altos incluem executivos de empresas que são parte, juntamente com os detentores do capital, da classe dominante (a "elite do poder" de MILLS, 1968)[11/]. A essa cúpula de administradores a massa

10/ PATRICK e KEHRBERG (1969) realizaram um interessante estudo sôbre a educação em cinco áreas da Região Leste do Brasil. Concluiram que "todos os componentes de custo (da educação formal) aumentaram à medida que o aluno progride na escola. A porcentagem das despesas totais custeadas pelo indivíduo aumenta também à medida que êle passa de um grau para outro e, mesmo no nível primário, o indivíduo é responsável por 70% do custo total" (p.17). Mais adiante os autores afirmam que "a dificuldade de reduzir os custos da educação para o indivíduo talvez não tenha maior importância no caso das classes de renda média e superior no Brasil. Não obstante, grande parte da população aufere renda tão baixa que provàvelmente não poderia enviar os filhos à escola, mesmo que existissem estabelecimentos gratuitos". (p.33).

11/ Nos salários e vencimentos dos empregados "estão incluidos as retiradas (pro labore) de proprietários ou sócios, e os honorários de diretores de sociedades anônimas e outras sociedades de capital, bem como comissões e bonificações" (IBGE, 1967b).

de assalariados tem quase tão poucas possibilidades de acesso quanto à propriedade de grandes capitais.

4.8. Variações na Concentração da Distribuição da Renda no Brasil

A distribuição da renda em um país parece ser uma característica bastante estável, isto é, na ausência de revoluções sociais, os índices de concentração só se modificam pouco e lentamente. (Ver, por exemplo, em BUDD, 1967, e KOLKO, 1962, a polêmica a respeito das modificações no grau de concentração da distribuição da renda nos EUA).

Não dispomos de dados que nos permitam determinar as modificações nos índices de concentração da renda no Brasil. Há, entretanto, diversas indicações de que houve, entre fins da década de 1950 e fins da década de 1960, um aumento na concentração da distribuição da renda nacional.

a) Num importante trabalho do IPEA (1969) sôbre a industrialização brasileira são apresentados os índices reproduzidos no Quadro 25.

Observa-se que os salários reais cresceram bem menos que a produtividade. Uma vez que apenas uma pequena parte dos ganhos de produtividade foram transferidos para os assalariados (que, em geral, fazem parte dos estratos de renda baixa e média), infere-se que o desenvolvimento industrial brasileiro, sob êsse aspecto, favoreceu o aumento na concentração da renda.

Quadro 25. Índices do Salário Real e da Produtividade na Indústria Brasileira, no Período 1955-66 (Base: 1955 = 100).

Ano	Pessoal total			Operários		
	Índice do salário real	Índice de produtividade	Relação salário/produtividade	Índice do salário real	Índice de produtividade	Relação salário/produtividade
1956	106,9	107,0	0,999	108,2	107,3	1,008
1957	113,6	117,8	0,964	113,9	119,7	0,952
1958	114,3	130,0	0,879	113,2	132,0	0,858
1962	120,6	163,8	0,736	112,3	172,8	0,650
1963	134,6	168,7	0,798	131,4	170,4	0,771
1964	132,0	172,1	0,767	128,7	174,7	0,737
1965	124,9	166,5	0,750	122,7	172,9	0,710
1966	121,0	172,4	0,702	119,4	178,1	0,670

FONTE: IPEA (1969, p. 146).

b) As modificações sofridas pelo salário mínimo real reforçam as indicações anteriores no sentido de que houve, na década de 1960, uma tendência para diminuir a participação dos trabalhadores assalariados na distribuição da renda. BRESSER PEREIRA (1968, pp. 142-144) mostrou a queda nos salários reais no período 1961-66, discutindo, também, seus efeitos sôbre o desenvolvimento econômico brasileiro.

Para analisar a evolução do salário mínimo real deflacionamos, mês a mês, o salário mínimo vigente na cidade de São Paulo e,

em seguida, calculamos a média aritmética dos doze valores reais obtidos para cada ano. O deflator usado foi o índice "2" da "Conjuntura Econômica", com base no triênio 1965-67. No Quadro a seguir estão os valores médios anuais obtidos.

Quadro 26. Valor do Salário Mínimo Real Médio na Cidade de São Paulo de 1952 a 1970

Ano	Salário mínimo real médio	Ano	Salário mínimo real médio
1952	84	1962	97
1953	73	1963	89
1954	88	1964	84
1955	96	1965	86
1956	100	1966	81
1957	112	1967	79
1958	100	1968	78
1959	116	1969	77
1960	99	1970	77
1961	112		

Nota-se que, entre 1961 e 1967, o salário mínimo real apresentou uma nítida tendência descendente.

c) Já vimos, na secção 4.6, que dados sôbre distribuição da renda, em anos distintos, para oito cidades do Nordeste indicam que

houve aumento nos índices de concentração.

d) Sabe-se que no período 1962-67 o Produto Interno Bruto brasileiro cresceu a uma taxa de apenas 3,93% ao ano, sendo que, no mesmo período, o Produto Industrial cresceu apenas 2,38% ao ano, ou seja, menos que a população (HOFFMANN e GASQUES, 1970). Se, nesse mesmo período, houve concentração na distribuição da renda, podemos concluir que os estratos de renda mais baixa da população urbana passaram por um processo de empobrecimento.

O Quadro 27 mostra como evoluiu a taxa de mortalidade infantil no município de São Paulo, principal centro industrial do Brasil[12/].

Sabe-se que a mortalidade infantil é um índice da situação sócio-econômica da população (ver LEBRET, 1964). Coloca-se então a pergunta: o crescimento da taxa de mortalidade infantil em São Paulo confirma a existência de um processo de empobrecimento dos estratos de renda mais baixa durante a maior parte da década de 1960? Uma vez que o crescimento da taxa de mortalidade infantil pode ter sido causado por diversos outros fatôres, não podemos aqui responder a essa pergunta, que fica como sugestão para novas pesquisas.

12/ Dados ligeiramente diferentes, acompanhados de uma discussão das causas das mortes, podem ser encontrados na FOLHA DE SÃO PAULO de 26/4/1970, pp. 36 e 37 do caderno especial, e também na p. 8 do 1º caderno da edicação de 11/10/1970 do mesmo jornal.

Quadro 27. Evolução da Taxa de Mortalidade Infantil no Município de São Paulo de 1960 a 1967

Ano	Mortalidade infantil, por 1.000 nascidos vivos
1960	62,9
1963	69,9
1964	67,7
1965	69,4
1966	73,8
1967	74,4
1968	76,6
1969	83,8

FONTE: IBGE - Anuários Estatísticos de 1968, 1969 e 1970

e) Uma importante característica do crescimento industrial brasileiro que certamente contribuiu para aumentar a concentração da distribuição da renda no país é a tendência ao uso de tecnologia capital-intensiva.

O impulso da industrialização no após guerra concorreu muito dèbilmente para a absorção de mão-de-obra, devido principalmente ao tipo de tecnologia (capital-intensiva) empregado pelas emprêsas. A participação do emprêgo industrial na oferta de trabalho passou de 7,86% em 1949 para 7,96% em 1959 e 8,26% em 1964. Nos mesmos anos a participação do Produto Industrial no Produto Interno Bruto crescia de 19,1%

para 27,2% e 29,9%, respectivamente. O trabalho do IPEA (1969), do qual extraimos êsses dados, considera que a participação de 8,26% do emprêgo industrial na população econômicamente ativa "parece anormalmente baixa" (pp. 71-75).

"A hipertrofia do setor terciário brasileiro, ligada à baixa absorção de emprêgo pela indústria, parece estar próxima dos limites do econômicamente justificável. Efetivamente, a razão entre emprêgo terciário e emprêgo em indústria e construção, que nos países desenvolvidos oscila entre 1 e 1,2, é no Brasil de 3 ou mais, o que explica a baixa produtividade dos serviços" (IPEA, 1969, p. 137).

No período 1949-59 o emprêgo industrial aumentou 3%ao ano. Êsse crescimento a taxas muito inferiores às da população urbana (especialmente às de aglomerados de 10.000 ou mais habitantes, que cresceram entre 1950 e 1960 a 6,4% ao ano) redundou em um acentuado decréscimo da produtividade dos serviços e em uma maior concentração da renda (IPEA, 1969, pp. 137-138).

O processo de concentração de rendas e de redução relativa do mercado consumidor agravou-se na medida em que aumentavam os investimentos capital-intensivos e a economia tornava-se cada vez menos capaz de absorver a oferta de mão-de-obra (BRESSER PEREIRA, 1968,pp.148-149 e FURTADO, 1968, pp. 34-37).

O problema da pouca absorção de mão-de-obra pela indústria brasileira e o desemprêgo e subemprêgo consequentes, mostram-se especialmente graves na Região Nordeste.

Referindo-se aos problemas relacionados com o desenvolvimento do Nordeste, TAMER (1968) afirma que "o mercado de trabalho continua se expandindo em ritmo pouco satisfatório, ..., a concentração excessiva da renda que existia antes da SUDENE continua existindo depois da SUDENE, provocando, além dos problemas sociais, um sério entrave para a expansão dos mercados consumidores" (p. 83). Com base em estudo de Leonardo Guimarães (apresentado como apêndice ao livro) o mesmo autor discute o problema da mão-de-obra desocupada, do desemprêgo e do sub-emprêgo urbanos (sem falar no rural) que "atingem a mais de um milhão e duzentas mil pessoas" (p. 91)[13/].

4.9. Algumas Causas do Grau de Concentração da Distribuição da Renda

Nesta secção pretendemos, com base na literatura de nosso conhecimento e nos resultados que obtivemos neste trabalho, discutir alguns aspectos da estrutura econômica relacionados com a distribuição da renda. Em diversos pontos simplesmente assinalamos a necessidade de mais pesquisas e/ou novos desenvolvimentos teóricos.

Diversos economistas reconhecem a insuficiência da teoria econômica no que se refere à análise das causas e consequências da distribuição da renda.

13/ Dados mais recentes sôbre o problema do desemprêgo no NE podem ser encontrados em documentos da SUDENE. Aspectos importantes foram apresentados em reportagens do jornal O ESTADO DE SÃO PAULO (ver, por exemplo, edições de 13/11/1969, 25/11/1969, 11/4/1970 e 22/7/1970).

MEADE (1967, p. 113), por exemplo, considera bastante insatisfatório o atual desenvolvimento das teorias explicativas da distribuição da renda.

FELINER e HALEY (1946, p. VIII) assinalam que não há uma teoria satisfatória para explicar a oferta de trabalho numa economia capitalista.

Na análise econômica acadêmica, o nível de remuneração dos fatôres é explicado pelo jôgo das fôrças de oferta e demanda no mercado, afirmando-se que, se os empresários procuram maximizar seus lucros, as curvas de demanda para os fatôres de produção são curvas de produtividade-receita marginal. Para PINTO (1967, p. 6), "no nível de abstração em que está colocada, a explicação acadêmica é inatacável. Sua debilidade reside em que nada diz ou esclarece com respeito às causas que determinam a situação de relativa escassez ou abundância dos fatôres e suas diferentes contribuições ao Produto Nacional. No fundo, portanto, descreve uma situação dada, mas não os elementos que a condicionam, lhe dão origem e a mantêm". A seguir, o autor cita TAWNEY:"atrás das fôrças do mercado se levantam influências de outra natureza, que determinam que os membros de alguns grupos sociais estejam em posição de prestar serviços que são altamente remunerados porque são escassos, e de aumentar suas rendas com a aquisição de ativos, enquanto que outros grupos devem fornecer serviços que são baratos porque existe um excesso de oferta, mas que constituem seus únicos meios de subsistência".

MYRDAL (1965, pp. 173-174) afirma que os economistas, a partir de John Stuart Mill, mostraram uma tendência a limitar sua análise à produção e às trocas, enquanto assumiam uma atitude de reserva geral em relação à distribuição das rendas e da riqueza e à necessidade de reformas redistributivas.

BARBER (1971) também assinala êsse fenômeno na evolução do pensamento econômico. Nos sistemas teóricos dos clássicos e de Marx "as categorias analíticas centrais eram moldadas visando iluminar as causas e consequências da mudança econômica a longo prazo e as relações entre crescimento econômico e distribuição de renda" (BARBER, 1971, p. 155). Os teóricos neoclássicos inverteram a ordem anterior das prioridades analíticas. O problema mais importante passa a ser o funcionamento do sistema de mercado dentro de períodos de tempo cuidadosamente delimitados, relegando-se a segundo plano os grandes temas de desenvolvimento a longo prazo (pp. 157-158)."Para Marshall e seus contemporâneos neoclássicos, a análise da distribuição era essencialmente um problema de determinação dos preços dos serviços produtivos. Buscava-se sua solução ao longo de linhas análogas às seguindas na explicação dos preços dos produtos. Tanto no caso dos insumos como dos produtos, a interação da oferta e da procura estabelecia os preços de

equilíbrio" (BARBER, 1971, p. 171)[14/].

Não há dúvida de que a distribuição da renda é, em boa parte, condicionada pela distribuição da propriedade. É certo, também, que quanto maior a renda de uma pessoa, maior sua possibilidade de apropriar-se de meios de produção. Há aquí um círculo vicioso que, como vimos, se reflete na lei de Pareto.

CASTRO e LESSA (1967, p. 151) assinalam que, nos países subdesenvolvidos, "os rendimentos que correspondem à propriedade têm um maior pêso relativo e mais, os próprios direitos sôbre ativos se acham mais concentrados - mormente no que se refere às terras, sendo de notar que, justamente nestas nações, as atividades primárias são mais importantes".

No Brasil, a terra representa de 50 a 70% do valor total dos estabelecimentos rurais (HOFFMANN, 1967, p. 2). Espera-se, portanto, que os índices de concentração da distribuição da renda no setor

---

14/ A análise marginalista deu origem a um argumento a favor de uma redistribuição da renda. "Se se pudesse supor que a utilidade marginal da moeda tendia a ser maior para um homem pobre do que para um rico, seguia-se que as satisfações agregadas da sociedade aumentariam através de uma redistribuição de ricos para pobres". (BARBER, 1971, p. 189) Em geral, entretanto, os economistas consideram que não se pode estabelecer cientìficamente uma distribuição de renda ótima pois o problema envolve questões éticas (ver, por exemplo, os capítulos finais de FERGUSON, 1969). Opiniões diversas são apresentadas na primeira parte do livro organizado por BUDD (1967).

agropecuário estejam positivamente correlacionados com o grau de concentração da posse da terra[15/]. Os resultados que obtivemos não desmentem essa hipótese, mas, também, não permitem estabelecer uma relação clara, pois dispomos, para uma análise de correlação, de apenas três pontos, ou seja, os valores dos índices de concentração para as Regiões Nordeste, Leste e Sul. (comparem-se os resultados apresentados nos capítulos 3 e 4, especialmente os índices dos Quadros 4, 17 e 18)[16/].

A concentração da posse da terra influi, também, na distribuição da renda no setor urbano. De acôrdo com CASTRO e LESSA (1967, p. 139) "uma estrutura agrária onde predominam as unidades familiares, por exemplo, tende a restringir a oferta no mercado de mão-de-obra, operando, consequentemente, em favor das taxas de remuneração do trabalho. ... Contràriamente, um setor primário caracterizado pela grande propriedade tende a empregar pouca mão-de-obra - fazendo-se acompanhar

---

15/ Tendo em vista essa relação entre as distribuições de renda e de posse de terra, GOMES DA SILVA (1968, p. 293) enfatiza, na sua conceituação de reforma agrária, o problema da distribuição da renda. Para êsse autor "reforma agrária é um processo amplo e imediato de redistribuição de renda que se opera na agricultura, com a ativa participação dos próprios interessados, a partir da modificação do sistema de posse, uso e gôzo da terra, objetivando a elevação humana, social, econômica e política da população que a trabalha como minifundista, precarista ou assalariada".

16/ Uma vez que, para diversos Estados, foram publicados os dados sôbre distribuição de renda obtidos no Censo Demográfico de 1960, há possibilidade de, em nova pesquisa, se obterem pontos adicionais para a análise de correlação em questão.

do acúmulo de homens em unidades de diminuta extensão (minifúndio)e/ou êxodo rural. Ambos êstes fenômenos atuam no sentido de deprimir os padrões salariais no mercado de trabalho", contribuindo, assim, para manter elevada a concentração da renda.

As análises clássica e marxista da distribuição enfatizam a distinção de classes sociais. Adam Smith distinguiu três categorias de renda: salários, renda da terra e lucro (a remuneração do empresário-capitalista). De acôrdo com os clássicos, eram distintos inclusive os mecanismos que estabeleciam os níveis dessas três categorias de renda. Marx divide a sociedade capitalista em duas classes básicas: proletários e capitalistas; os primeiros recebem o que conseguem com a venda (aluguel) de sua fôrça de trabalho no mercado e os últimos ficam com a mais-valia. O enfoque marginalista, por outro lado, não enfatiza a distinção entre diferentes categorias de renda; ao menos no lado da demanda dos fatôres de produção, o princípio vigente é sempre o mesmo.

Constatamos que a lei de Pareto se ajusta bastante bem à distribuição dos empregados conforme seu salário. Verificamos,também, que as diferenças entre rendas do trabalho e rendas de propriedades,embora seja, certamente, um componente importante, correspondem a uma parte relativamente pequena da redundância total da distribuição da renda. Êsses resultados mostram que é muito simplista pretender explicar a distribuição pessoal da renda através do binômio proletário

versus proprietário dos meios de produção. Não acreditamos, entretanto, que isso mostre a inexistência de classes sociais. Os resultados obtidos reforçam apenas as idéias desenvolvidas por diversos autores (ver especialmente MILLS, 1968), no sentido de que certos tipos de assalariados fazem parte até mesmo dos estratos de renda mais alta da sociedade[17].

Obtemos uma indicação adicional comparando a distribuição dos empregados administrativos com a dos operários. Nas distribuições referentes ao Brasil, em 1966, se oonsideramos aqueles que recebem salários superiores a Cr$ 378,00, temos 12,21% dos empregados administrativos recebendo 38,23% da renda total estimada para esta categoria; o mesmo intervalo abrange apenas 1,64% dos operários recebendo 7,60% da renda. De acôrdo com nossas estimativas, no último estrato (salários superiores a Cr$ 546,00) estão 5,82% dos empregados administrativos auferindo 24,72% da renda destes empregados, ao passo que, no caso dos operários, os assalariados dêsse estrato representam apenas 0,48% do total recebendo 3,13% da renda (ver apêndice 3). Podemos afirmar, portanto, que na distribuição dos operários conforme o salário, os níveis

---

17/ A importância das desigualdades entre assalariados no Brasil foi anteriormente assinalada por Maria da Conceição Tavares em trabalho não publicado intitulado "Características da Distribuição de Renda no Brasil".

mais elevados são de relativamente pequena importância, o que não acontece no caso dos empregados administrativos.

MILLS (1968, p. 145), ao analisar a "elite do poder" dos EUA afirma que "os altos executivos e os muito ricos não são duas classes distintas e claramente separadas. Estão muitíssimo misturados no mundo das emprêsas e privilégios"... O autor informa, inclusive, os salários invulgares de alguns dos executivos norte-americanos mais conhecidos (p. 158)[18/].

18/ Ver também BARAN e SWEEZY (1966), GALBRAITH (1968) e FOSSAERT (1971) para uma análise das pessoas que estão na cúpula das grandes sociedades anônimas de hoje, e suas diferenças em relação aos magnatas do passado.

5. RESUMO E CONCLUSÕES

Êste trabalho visa, por um lado, contribuir para o aperfeiçoamento dos métodos de mensuração do grau de concentração da renda e da riqueza e, por outro lado, fornecer subsídios para a análise da distribuição da renda e da posse da terra no Brasil.

Em relação aos métodos de análise das distribuições de renda (ou de riqueza), os aspectos principais dêste trabalho são os seguintes:

a) Com base no método de Simpson de integração aproximada, procuramos estabelecer um método de cálculo do índice de Gini que não levasse a uma subestimação do grau de desigualdade, como acontece quando se aplica a fórmula usual de cálculo. Tendo em vista que o uso do trinômio do segundo grau apresentou certos inconvenientes, passamos a utilizar arcos da função potência ($Y = a \cdot X^b$, sendo X a fração acumulada do número de pessoas e Y a fração acumulada da renda) para, por integração, determinar a área de desigualdade delimitada pela curva de Lorenz e a reta de perfeita igualdade.

b) Utilizamos, como medidas do grau de concentração, a redundância e o índice de Theil. A grande vantagem da redundância é que ela pode, quando dispomos de dados por regiões (ou setores), ser dividida num componente interregional e num componente intrarregional (ou num componente intersetorial e num componente intrasetorial).

c) Recomendamos o uso da equação de Pareto com três parâmetros:

$$u = \frac{A}{(v+K)^{\alpha}}$$

onde

v = renda por pessoa

u = número de pessoas com renda maior que v

A, K, α = parâmetros

d) Estabelecemos que, quando a distribuição de renda se ajusta à função de Pareto com três parâmetros, a curva de Lorenz é dada pela seguinte equação:

$$Y = 1 - (K+1)\,(1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + K\,(1-X)$$

Para $K = 0$ esta equação reduz-se a

$$Y = 1 - (1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

que é a equação da curva de Lorenz correspondente a uma função de Pareto com dois parâmetros.

A partir da equação da curva de Lorenz obtivemos a relação entre os parâmetros α e K da Lei de Pareto e o índice de concentração de Lorenz

$$L = \frac{K + 1}{2\alpha - 1}$$

e) Estabelecemos um processo de ajustar a curva de Pareto com três parâmetros de acôrdo com o método dos quadrados mínimos. Apresentamos também as fórmulas para o cálculo das estimativas dos desvios padrões dos parâmetros estimados.

A análise da distribuição da posse da terra no Brasil foi feita com base nas informações dos Censos Agrícolas de 1920, 1940,1950 e 1960 e nos dados do Cadastro do IBRA (Instituto Brasileiro de Reforma Agrária) para 1967. Em relação a êsse tema, os aspectos mais importantes analisados neste trabalho são os seguintes:

a) O índice de Lorenz da concentração da posse da terra no Brasil, tem-se mantido, de 1920 a 1967, ao redor de 0,84. Não há, portanto, tendência para diminuir ou aumentar a concentração da posse da terra, no País. Êste resultado mostra que não podemos esperar que a estrutura agrária brasileira se torne mais igualitária sem uma reforma agrária.

b) A concentração da posse da terra é maior nas Regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste e menor nas Regiões Leste e Sul.

c) Quando analisamos a concentração da posse da terra por unidades da Federação, verificamos que os Estados de Espírito Santo e Santa Catarina se destacam por apresentar índices relativamente baixos. Procuramos mostrar que a explicação do fato deve ser procurada na formação histórica da estrutura agrária, sendo que nesses dois Estados a propriedade familiar alcançou uma extensão relativamente grande e se consolidou mais cedo, em boa parte devido à colonização por imigrantes europeus.

d) Utilizando as propriedades da redundância, verificamos que as diferenças entre estados representam de um quinto a um quarto da desigualdade total da distribuição da posse da terra no Brasil.

e) Quando consideramos as famílias sem terra, os índices de concentração da posse da terra crescem. Sabe-se que o índice de Theil representa a fração da população que ficaria sem terra numa distribuição de igual redudância em que a terra fôsse igualitàriamente distribuida pela fração restante da população. Quando consideramos aqueles que possuiam terra no Brasil, em 1950, obtivemos um índice de Theil de 0,900. Mostramos que, se consideramos as famílias sem terra, êsse índice sobe para 0,962. Verificamos que êsses novos índices são, em 1950, superiores ou pràticamente iguais a 0,90 em todos os Estados, com excessão do Espírito Santo, de Santa Catarina e do Rio Grande do Sul.

f) Analisando a distribuição da posse da terra em nove Regiões Agrícolas do Estado de São Paulo, em 1967, constatamos que os índices de concentração variam relativamente pouco. Verificamos que as diferenças entre as nove regiões representam apenas 4% da redundância total da posse da terra no Estado.

g) Para determinar os índices de concentração da posse da terra de acôrdo com o número de módulos de cada imóvel rural, ajustamos a equação de Pareto aos dados obtidos do Cadastro do IBRA em 1967. Considerando os imóveis com um ou mais módulos, verificamos que a equação se ajustou bastante bem aos dados. Por integração determinamos o número total de módulos para cada estrato e, em seguida, calculamos os índices de concentração. Como seria de esperar, êsses índices são, em geral, menores que os índices de concentração correspondentes calculados com base na distribuição dos imóveis segundo sua área. Mais uma vez, os Estados que apresentam menor grau de concentração são Espírito Santo e Santa Catarina.

A seguir, assinalamos os aspectos mais importantes dêsse trabalho com relação à distribuição da renda no Brasil:

a) Utilizamos, inicialmente, os resultados preliminares (os únicos publicados) do Censo Demográfico de 1960, referentes ao Brasil e às Regiões Nordeste, Leste e Sul. Analisamos separadamente o setor primário e o setor urbano e, também, o total. Ajustando a equação de Pareto com três parâmetros obtivemos resultados bastante satisfatórios.

Com base nas curvas ajustadas determinamos, por integração, a renda total para cada estrato e, a seguir, calculamos os índices de concentração da distribuição da renda. Reproduzimos abaixo os valores do índice de Gini modificado (índice P) obtidos:

Setor	Brasil	Região		
		Nordeste	Leste	Sul
Total	0,504	0,579	0,537	0,414
Primário	0,436	0,434	0,439	0,364
Urbano	0,476	0,633	0,507	0,399

b) Observamos que êsses e os outros índices calculados estão sujeitos a sérias limitações. Provàvelmente êles subestimam os verdadeiros graus de concentração da renda.

c) Os índices obtidos indicam que a distribuição da renda é mais desigual na Região Nordeste e menos concentrada no Sul.

d) À primeira vista poderíamos concluir que a concentração da renda é maior no setor urbano que no setor primário. Utilizando o índice de Theil mostramos, entretanto, que, quando se consideram as pessoas ativas sem renda, o índice de concentração para o setor primário, no Brasil e nas Regiões Leste e Sul, pode tornar-se maior que o referente ao setor urbano. É possível, portanto, que o grau de concentração da distribuição da renda nesses dois setores seja bastante similar.

e) Com base nas propriedades da redundância pudemos constatar, em relação à distribuição da renda nas Regiões Nordeste, Leste e Sul, que as diferenças interregionais representam apenas 6% da redundância total, ao passo que a participação das diferenças entre o setor urbano e o primário chega a 15% da redundância total nas três regiões. Verificamos, também, que a participação das diferenças interregionais na redundância total é maior no setor primário (14%) que no setor urbano (2%). Em conjunto, as diferenças entre regiões e entre setores correspondem a 19% da redundância total das três regiões.

f) Com base em dados de pesquisas diversas, calculamos os índices de concentração da renda familiar para algumas cidades brasileiras em diferentes anos (entre 1961 e 1968). Para as oito cidades com duas observações no tempo, os índices de concentração sempre aumentaram.

g) O IBGE publicou, em 1967, a distribuição dos empregados administrativos e dos operários, para o Brasil, São Paulo e Guanabara, conforme seus salários. Ajustando a êsses dados a equação de Pareto com três parâmetros, obtivemos resultados bastante bons. Com base nas curvas ajustadas determinamos, por integração, a renda total para cada estrato de salário e, a seguir, calculamos os índices de concentração das distribuições da renda auferida como salário. Reproduzimos a seguir os valores do índice de Gini modificado (índice P) obtidos:

Categoria	Brasil	São Paulo	Guanabara
Empregados (total)	0,374	0,381	0,370
Empregados administrativos	0,434	0,422	0,399
Operários	0,329	0,327	0,308

h) Êsses índices indicam que a concentração da renda (auferida como salário) entre empregados administrativos é maior que entre operários.

i) Verificamos que as diferenças entre as duas categorias de empregados correspondem a 13% da redundância total da distribuição referente aos assalariados do Brasil. No caso de São Paulo e da Guanabara essa porcentagem é, respectivamente, 17% e 19%.

j) Comparando os índices de concentração da renda em geral com os índices de concentração da renda do trabalho (salários), constatamos que êsses últimos são relativamente elevados. Verificamos, ainda, que na distribuição dos operários conforme o salário os níveis mais elevados são de relativamente pequena importância, ao passo que no caso dos empregados administrativos há uma concentração na cúpula da distribuição. Êsse resultado apóia as idéias desenvolvidas por diversos autores (ver, por exemplo, MILLS, 1968), no sentido de que certos "assalariados", os executivos das grandes emprêsas, fazem parte dos estratos de renda mais alta (pertencendo ao grupo que MILLS denominou "a elite do poder").

k) Com base na literatura de nosso conhecimento, mostramos que provàvelmente houve, entre fins da década de 1950 e fins da década de 1960, um aumento na concentração da distribuição da renda no Brasil.

l) Uma vez que no Brasil a terra é o principal componente do capital agrário, espera-se que os índices de concentração da renda no setor primário estejam correlacionados com os índices de concentração da posse da terra. Os resultados que obtivemos não desmentem essa hipótese mas a escassez de dados não permite, por outro lado, estabelecer com clareza a relação; neste, como em outros pontos, novas pesquisas são necessárias.

6. SUMMARY AND CONCLUSIONS

The objectives of this research are, on one hand, to contribute to the improvement of the methods of measurement of degree of concentration of income and of wealth and, on the other hand, to furnish subsidies for the analysis of income distribution and of land tenancy in Brazil.

In respect to the methods of analysis of income distribution (or of wealth), the principal aspects of this research are the following:

a) Using Simpson's method of approximate integration, we sought to establish a means of calculating Gini's index which would not underestimate the degree of inequality of the Lorenz curve which occurs when one applies the usual means of calculation. Keeping in mind that the use of trinomial of the second degree presented certain problems, we instead chose to utilize arcs of a power function ($Y = a \cdot X^b$, with X being the accumulated fraction of number of people and Y the accumulated fraction of income) and then, by integration, to determine the area of inequality delineated by the Lorenz curve and the line of perfect equality.

b) We used the redundancy and Theil's index as measurements of the degree of concentration. The great advantage of redundancy is

that it permits, when data is available by regions (or sectors), division into interregional and intraregional components (or intersectorial and intrasectorial components).

c) We utilized Pareto's equation with three parameters:

$$u = \frac{A}{(v + K)^{\alpha}}$$

where

v = inoome per person

u = number of persons with income greater than v

A, K, α = parameters

d) We established that, when income distribution is adjusted to Pareto's function with three parameters, the Lorenz curve is given by the following equation:

$$Y = 1 - (K+1)\,(1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + K\,(1-X)$$

For $K = 0$ this equation reduces to

$$Y = 1 - (1-X)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

which is the equation of the Lorenz curve corresponding to a Pareto function with two parameters.

Using the equation of the Lorenz curve we obtained the relationship between the parameters α and K of Pareto's law and Lorenz index of concentration

$$L = \frac{K+1}{2\alpha - 1}$$

e) We established a process of adjusting Pareto's curve with three parameters using the method of least squares regression. We also presented the formulas for calculation of the estimates of standard deviation of the estimated parameters.

An analysis of distribution of land tenancy in Brazil was made using data from the agricultural census of 1920, 1940, 1950, and 1960, and the property registry of IBRA (Brazilian Institute of Agrarian Reform) for 1967. In relation to this subject the most important aspects analyzed in this research are as follows:

a) The Lorenz index of concentration of land tenancy in Brazil has remained unchanged, from 1920 to 1967, at about 0.84. There is, therefore, no tendency to diminish or increase the concentration of land tenancy in the country. This result indicates that we cannot expect that the Brazilian agrarian structure will become more equalitarian without agrarian reform.

b) The concentration of land tenancy is greater in the North, Northeast, and Midwest regions, and smaller in the East and Southern regions.

c) When we analyzed land tenancy concentration by states, we learned that the states of Espírito Santo and Santa Catarina are noteworthy because of their relatively low indices. This fact is

explained in part by the historical formation of their agrarian structure, since in these two states the family-sized property was introduced and more widely accepted at an earlier stage, owing in large part to colonization by European imigrants.

d) Using the properties of redundancy, we found that the differences among states represent from a fifth to a fourth of total inequality in distribution of land tenancy in Brazil.

e) When we consider the families without land, the indices of land tenancy concentration increase. It is known that Theil's index represents the fraction of the population which would remain without land in a distribution of equal redundancy if the land were equally distributed by the remaining fraction of the population. When we considered those who owned land in Brazil in 1950 we obtained a Theil index of 0.900. We showed that if we consider the families without land, this index rises to 0.962. We found that these new indices are, in 1950, greater than or practically equal to 0.90 in every state, with the exception of Espírito Santo, Santa Catarina, and Rio Grande do Sul.

f) Analyzing land ownership distribution in nine agricultural regions in the State of São Paulo, in 1967, we found that the indices of concentration vary relatively little. We learned that the differences among the nine regions represent merely 4% of total redundancy in land ownership in the state.

g) In order to determine the indices of land ownership concentration in accordance with the number of modules of each rural

property, we adjusted Pareto's equation to the data obtained from the IBRA Registry of 1967. Considering the properties with one or more modules, we found that the equation fit the data very well. By integration we determined the total number of modules for each stratum and thereafter calculated the indices of concentration. As could be expected, these indices are, in general, smaller than the corresponding indices of concentration calculated from the distribution of properties according to their area. Once again, the states which presented the least degree of concentration are Espírito Santo and Santa Catarina.

Next, we will point out the most important aspects of this research in regard to income distribution in Brazil:

a) We utilized, first of all, the preliminary results (the only published ones) of the 1960 population census, referring to Brazil and the Northeast, East, and Southern regions. We analyzed separately the primary and the urban sectors as well as the total. Adjusting Pareto's equation with three parameters we achieved very satisfactory results. Based upon the adjusted curves, we determined, by integration, the total income for each stratum and then we calculated the concentration indices of income distribution. Shown below are the values obtained from Gini's modified index (index P):

Sector	Brazil	Region		
		Northeast	East	South
Total	0.504	0.579	0.537	0.414
Primary	0.436	0.434	0.439	0.364
Urban	0.476	0.633	0.507	0.399

b) We observed that these and other calculated indices are subject to serious limitations. Probably they underestimate the true degrees of income concentration.

c) The indices obtained indicate that income distribution is more unequal in the Northeast region and less concentrated in the South.

d) At first glance one may conclude that the concentration of income is greater in the urban sector than in the primary sector. Utilizing Theil's index, we showed, however, that when one considers persons actively employed withouth declared income, the index of concentration for the primary sector, in Brazil and the East and Southern regions, is greater than that for the urban sector. It is possible therefore that the degree of concentration in income distribution in these two sectors would be very similar.

e) Using the properties of redundancy, we found that, in relation to income distribution in the Northeast, East, and South, the interregional differences represent only 6% of total redundancy, while

the differences between the urban and primary sectos reaches 15% of total redundancy in the three regions. We found, as well, that the participation of interregional differences in the total redundancy is greater in the primary sector (14%) than in the urban seotor (2%). Together, the differences among regions and between seotors corresponded to 19% of total redundancy of the three regions.

f) Based upon data from several research studies, we calculated the family inoome ooncentration indices for some Brazilian oities in different years (between 1961 and 1968). For the eight oities with two observations over time, the concentration indices always increased.

g) The IBGE published in 1967 a distribution of labor inoome among administrative employees and workers for Brazil, São Paulo, and Guanabara. Adjusting this data to Pareto's equation with three parameters, we obtained very good results. Based upon the adjusted ourves, we determined, by integration, the total inoome for each stratum of labor inoome (salaries and wages) and next, we calculated the concentration indioes of labor income distribution. Shown below are the values of the modified Gini's index (index P) whioh were obtained:

Category	Brazil	São Paulo	Guanabara
Employees (total)	0.374	0.381	0.370
Administrative employees	0.434	0.422	0.399
Workers	0.329	0.327	0.308

h) These indices indicate that labor income concentration among administrative personnel is greater than among laborers.

i) We found that the differences between the two categories of employees corresponded to 13% of total redundancy of labor income distribution in Brazil. In the case of São Paulo and of Guanabara this percentage is 17% and 19%, respectively.

j) Comparing the indices of concentration of income in general with the indices of concentration of labor income (salaries and wages), we can state that the latter are relatively elevated. We found, further, that in the distribution of workers' labor income the highest wage levels are of relatively little importance; in the case of administrative employees, however, there is a high concentration of salaries at the upper end of the distribution. This result supports the ideas developed by various authors (see, for example, MILLS, 1968), in the sense that certain salaried persons, the executives of large firms, compose a part of the highest income strata (belonging to the group which MILLS called "the power elite").

k) Based upon literature with which we are acquainted, we showed that there probably was, between the end of the 1950's and the end of the 1960's, an increase in income distribution concentration in Brazil.

l) In Brazil, given that land is the principal component of farm capital, it can be expected that income concentration indices in the primary sector will be correlated with indices of land tenancy concentration. The results obtained do not negate this hypothesis, but the scarcity of data does not allow, on the other hand, to establish with clarity this relationship; in this, as in other points, additional research is necessary.

7. BIBLIOGRAFIA

ALENCAR, Maria Helena (1970). Aspectos da Concentração da Produção de Cacau e da Estrutura Fundiária na Região Cacaueira da Bahia. Comunioação técnica nº 37, Centro de Pesquisas do Cacau, CEPLAC, Bahia.

ALLEN, R.G.D. (1960). Análise Matemática para Economistas. Editôra Fundo de Cultura, Brasil.

ARAÚJO, Paulo Fernando Cidade de (1968). Desenvolvimento Econômico. Departamento de Ciências Sociais Aplicadas, ESALQ-USP, Piracicaba (mimeografado).

BARBER, William J. (1971). Uma História do Pensamento Econômico. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

BARAN, Paul A. e Paul M. SWEEZY (1966). Capitalismo Monopolista. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

BNB-ETENE (1969). Distribuição e Níveis da Renda Familiar no Nordeste Urbano. Departamento de Estudos Econômicos do Nordeste, Banco do Nordeste do Brasil, Fortaleza.

BRESSER PEREIRA, L.C. (1968). Desenvolvimento e Crise no Brasil. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

BUDD, Edward C. (1967). Inequality and Poverty. W. W. Norton and Company, New York.

CÂMARA, Lourival (1949). A Concentração da Propriedade Agrária no Brasil. Boletim Geográfico do IBGE, VII, 77, pp. 516-528.

CARDOSO, Fernando Henrique (1968). Hegemonia Burguesa e Independência Econômica: Raízes Estruturais da Crise Política Brasileira, em C. Furtado (org.), Brasil: Tempos Modernos. Editôra Paz e Terra, Rio de Janeiro.

_____ (1969). Mudanças Sociais na América Latina. Difusão Européia do Livro, São Paulo.

CASTRO, Antonio Barros de, e Carlos Francisco LESSA (1967). Introdução à Economia - Uma Abordagem Estruturalista. Editôra Forense, Rio de Janeiro.

CASTRO, Antonio Barros de (1969a). 7 Ensaios sôbre a Economia Brasileira. Editôra Forense, Rio de Janeiro.

_____ (1969b). Nordeste: Um Nôvo Diagnóstico. Mundo Econômico, II, 5, pp. 44-47.

CEPAL (1964). Auge y Declinación del Processo de Substitución de Importaciones en el Brasil. Boletin Económico de América Latina, IX, 1, pp. 1-62.

_____ (1965). El Processo de Industrialización en América Latina. Nações Unidas, New York.

CEPAL (1967). La Distribución del Ingreso en América Latina. Boletin Económico de América Latina, XII, 2, pp. 152-175.

_____ (1970). La Distribución del Ingreso en Brasil. Escritório CEPAL-ILPES no Brasil, Rio de Janeiro (mimeografado).

CHAMPERNOWNE, D.G. (1953). A Model of Income Distribution. Economic Journal, LXIII, pp. 318-351.

CIDA (1966). Posse e Uso da Terra e Desenvolvimento Sócio-Econômico do Setor Agrícola - Brasil. União Pan-Americana, Washington.

CLINE, William R. (1969). The Potencial Effect of Income Redistribution on Economic Growth in Six Latin American Countries. Princeton University (versão preliminar).

CODEPLAN (1970). Diagnóstico do Abastecimento de Produtos Alimentícios do Distrito Federal. Govêrno do Distrito Federal, Brasília.

DRAPER, Norman e Harry SMITH (1966). Applied Regression Analysis. John Wiley and Sons, New York.

FELLNER, William e Bernard F. HALEY (org.) (1946). Readings in the Theory of Income Distribution. The Blakiston Company, Philadelphia.

FERGUSON, C.E. (1969). Microeconomic Theory. Edição revista. Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois.

FOSSAERT, Robert (1971). Um Nôvo Capitalismo? Em L. PEREIRA (org.), Perspectivas do Capitalismo Moderno. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

FURTADO, Celso (1967). Formação Econômica do Brasil. 7ª edição. Companhia Editôra Nacional, São Paulo.

_____ (1968a). Brasil: da República Oligárquica ao Estado Militar, em C. Furtado (org.), Brasil: Tempos Modernos. Editôra Paz e Terra, Rio de Janeiro.

_____ (1968b). Um Projeto para o Brasil. 3ª edição. Editôra Saga, Rio de Janeiro.

_____ (1969). Formação Econômica da América Latina. Lia Editôra, Rio de Janeiro.

GALBRAITH, John Kenneth (1968). O Nôvo Estado Industrial. Editôra Civilização Brasileira, Rio de Janeiro.

GOMES DA SILVA, José (1968). Reforma Agrária. Revista de Economia Rural, I, 1, pp. 292-336. Anais da V Reunião da SOBER, Rio de Janeiro.

GOUVEIA, Aparecida Joly (1967). Inequalities in Brazilian Secondary Education. América Latina, Ano 10, nº 3, pp. 81-95.

GUIMARÃES, Alberto Passos (1963). Inflação e Monopólio no Brasil. Editôra Civilização Brasileira, Rio de Janeiro.

_____ (1964). A Concentração da Produção e das Rendas na Economia Brasileira. Estudos Sociais, V, 19, pp. 229-248.

_____ (1968). Quatro Séculos de Latifúndio. Editôra Paz e Terra, Rio de Janeiro.

GRANVILLE, W.A., P.F. SMITH e W.R. LONGLEY (1956). Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. 2ª edição. Editôra Científica, Rio de Janeiro.

HARRINGTON, Michael (1964). A Outra América: Pobreza nos Estados Unidos. Editôra Civilização Brasileira, Rio de Janeiro.

HOFFMANN, Rodolfo (1967). Contribuição à Análise da Distribuição da Posse da Terra no Brasil. Tese de mestrado apresentada à ESALQ-USP, Piracicaba.

_____ (1969). Distribuição da Renda e Educação Escolar no Brasil. O Solo, LXI, 1, pp. 93-98, Piracicaba.

_____ e José Garcia GASQUES (1970). Análise do Crescimento do Produto Interno Bruto Brasileiro no Período 1947-67. Departamento de Ciências Sociais Aplicadas, ESALQ-USP, Piracicaba.

HUBERMAN, Leo (1966). Nós, o Povo. Editôra Brasiliense, São Paulo.

IBGE (1950). Censos Econômicos: Agrícola, Industrial, Comercial e dos Serviços. V Recenseamento Geral do Brasil - 1940. Rio de Janeiro.

_____ (1956a). Brasil, Censo Agrícola. VI Recenseamento Geral do Brasil - 1950. Rio de Janeiro.

_____ (1956b). Brasil, Censo Demográfico. VI Recenseamento Geral do Brasil - 1950. Rio de Janeiro.

_____ (1965). Censo Demográfico - Resultados Preliminares. VII Recenseamento Geral do Brasil - 1960. Rio de Janeiro.

IBGE (1967a). Brasil - Censo Agrícola de 1960. VII Recenseamento Geral do Brasil. Rio de Janeiro.

_____ (1967b). Inquéritos Econômicos - 1966 - Industrias de Transformação. Grupo Especial de Trabalho para as Estatísticas Industriais. Rio de Janeiro.

_____ (1968). Anuário Estatístico do Brasil - 1968. Rio de Janeiro.

_____ (1969). Anuário Estatístico do Brasil - 1969. Rio de Janeiro.

_____ (1970). Anuário Estatístico do Brasil - 1970. Rio de Janeiro.

IBRA - Instituto Brasileiro de Reforma Agrária (1967a). A Estrutura Agrária Brasileira. Rio de Janeiro.

_____ (1967b). Módulo. Cadernos do IBRA, série II, nº 1. Rio de Janeiro.

IEA (1969). Imóveis Rurais do Estado de São Paulo. Divisão de Levantamento e Análises Estatísticas, Instituto de Economia Agrícola, Secretaria da Agricultura do Estado de São Paulo.

IPEA (1969). A Industrialização Brasileira: Diagnóstico e Perspectivas. Ministério do Planejamento e Coordenação Geral, Rio de Janeiro.

KEYNES, John Maynard (1964). Teoria Geral do Emprêgo, do Juro e do Dinheiro. Editôra Fundo de Cultura, Brasil.

KOLKO, Gabriel (1962). Wealth and Power in America. Praeger Publishers, New York.

LANGE, Oskar (1967). Introdução à Econometria. 2ª edição. Editôra Fundo de Cultura, Brasil.

LEBRET, L.J. (1964). Suicídio ou Sobrevivência do Ocidente? Livraria Duas Cidades, São Paulo.

MANDEL, Ernest (1968). A Formação do Pensamento Econômico de Karl Marx. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

MARX, Karl (1968). O Capital. Livro 1. Editôra Civilização Brasileira, Rio de Janeiro.

MATUS, Carlos (1968). Algunas Cuestiones Básicas para la Discusion de una Estrategia de Desarrollo Latino-americano. CEPAL-ILPES, Santiago, Chile.

MEADE, James E. (1967). Determinants of Inequality in a Property-owning Democracy. Em BUDD (org.), Inequality and Poverty. W. W. Norton and Company, New York

MIGLIOLI, Jorge (1969). Como Estimular a Demanda. Mundo Econômico, II, 5, pp. 47-49.

MILLS, C. Wright (1968). A Elite do Poder. 2ª edição. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

MYRDAL, Gunnar (1965). Teoria Econômica e Regiões Subdesenvolvidas. Editôra Saga, Rio de Janeiro.

NOGUEIRA, Isaias Rangel (1960). Pesquisa Sôbre o Planejamento Experimental de Ensaios de Adubação. Tese de Livre Docência apresentada à ESALQ-USP, Piracicaba.

PACITTI, Tércio (1969). Fortran-Monitor 2ª edição. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.

PARETO, Vilfredo (1949). Corso di Economia Politica. Giulio Einaudi editore, Itália.

PATRICK, George F. e Earl W. KEHRBERG (1970). Educação e Desenvolvimento Agrícola em Cinco Áreas da Região Leste do Brasil. Trabalho apresentado na VIII Reunião da Sociedade Brasileira de Economistas Rurais, Bahia.

PIMENTEL GOMES, F. e E. MALAVOLTA (1949). Aspectos Matemáticos e Estatísticos da Lei de Mitscherlich. Anais da E.S.A."Luiz de Queiroz", 6, pp. 193-229.

PINTO, Anibal (1963). Notas sôbre la Distribucion del Ingreso y la Estrategia de la Redistribucion. Centro de Desenvolvimento Econômico CEPAL-BNDE, Rio de Janeiro.

_____ (1964). Chile: una Economia Dificil. Fondo de Cultura Económica, Buenos Aires.

_____ (1967). La Distribucion del Ingreso en America Latina. Editorial Universitária de Buenos Aires.

PROJECTOR, Dorothy S. e Gertrude S. WEISS (1967). The Distribution of Wealth in 1962. Em BUDD (org.), Inequality and Poverty. W. W. Norton and Company, New York.

SAMUELSON, Paul A. (1963). Introdução à Análise Econômica. 5ª edição. Editôra Agir, Rio de Janeiro.

SILVA LEME, Ruy Aguiar da (1965). Curso de Estatística. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.

SINGER, Paul (1961). Agricultura e Desenvolvimento Econômico. Revista Brasileira de Estudos Políticos, nº 12. Universidade de Minas Gerais.

_____ (1968). Desenvolvimento e Crise. Difusão Européia do Livro, São Paulo.

_____ (1969). Divisão da Renda no Brasil. Mundo Econômico, II, 7, pp. 39-41.

_____ (1970). Dinâmica Populacional e Desenvolvimento. Edições CEBRAP, São Paulo.

SMITH, Adam (1952). An Inquiry Into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. Encyclopaedia Britannica, Chicago.

STEVENS, W.L. (1961). Asymptotic Regression. Biometrics, vol. 7, nº 3, pp. 247-267.

SWEEZY, Paul M. (1965). Ensaios sôbre o Capitalismo e o Socialismo. Zahar Editôres, Rio de Janeiro.

TAMER, Alberto (1968). O Mesmo Nordeste. Editôra Herder, São Paulo.

THEIL, Henri (1967). Economics and Information Theory. Rand McNally and Company, Chicago.

TORANZOS, Fausto I. (1969). Estatística. Editôra Mestre Jou, São Paulo.

VASCONI, Tomas A. (1967). Educaoión y Cambio Social. Centro de Estudios Sooioeconomicos, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Chile.

VINHAS DE QUEIROZ, Maurício (1965). Os Grupos Econômicos no Brasil. Revista do Instituto de Ciências Sociais, II, 1, pp. 43-192. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

_____ (1967). Notas Sôbre o Processo de Modernização no Brasil. Separata da Revista do Instituto de Ciências Sociais da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ZAMBELLO, Sheila (1968). Análise Comparativa da Distribuição da Renda e da Posse da Terra no Brasil. O Solo, LX, 2, pp. 93-100, Piracicaba.

APÊNDICE 1

Faremos aquí uma outra demonstração do segundo método de estimação dos parâmetros da equação de Pareto, apresentado na secção 2.10. Esta demonstração é semelhante à que NOGUEIRA (1960) apresentou para justificar o método de STEVENS (1951) para determinar os parâmetros da equação de Mitscherlich.

Consideremos a equação

$u_i = \dfrac{A}{(v_i + K)^{\alpha}} \cdot E_i$, $i = 1, \ldots, n$, sendo n o número de pares de valores v_i, u_i disponíveis. Lembremos que u_i representa o número de pessoas com renda maior que v_i, $\underline{A, K}$ e $\underline{\alpha}$ são parâmetros e E_i é um êrro aleatório. Aplicando logaritmos neperianos e fazendo $\log u_i = t_i$, $\log A = a$, $-\alpha = b$ e $\log E_i = e_i$ obtemos:

$$t_i = a + b \cdot \log (v_i + K) + e_i$$

Já vimos que a aplicação do método dos quadrados mínimos a esta equação conduz ao sistema de equações normais

$$\begin{cases} F(a,b,K) = -n \cdot a - b \cdot \Sigma \log (v_i + K) + \Sigma t_i = 0 \\ G(a,b,K) = -a \cdot \Sigma \log(v_i+K) - b \cdot \Sigma \log^2(v_i+K) + \Sigma t_i \cdot \log(v_i+K) = 0 \\ H(a,b,K) = -a \cdot b \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K} - b^2 \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i+K)}{v_i + K} + b \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K} = 0 \end{cases}$$

onde, a cada equação do sistema fizemos corresponder uma função de a, b e K. Se $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{K}$ são as estimativas procuradas, é claro que

$$F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) = 0$$

$$G(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) = 0$$

$$H(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) = 0$$

Entretanto, se temos apenas estimativas preliminares, a_o, b_o e K_o, as funções assumirão valores diferentes de zero, ou seja,

$$F(a_o, b_o, K_o) = F_o$$

$$G(a_o, b_o, K_o) = G_o$$

$$H(a_o, b_o, K_o) = H_o$$

Êsse sistema pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma t_i \\ \Sigma \log(v_i+K_o) & \Sigma \log^2(v_i+K_o) & \Sigma t_i \cdot \log(v_i+K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i+K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_o)}{v_i+K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i+K_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a_o \\ -b_o \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_o \\ G_o \\ H_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

Aplicando a fórmula de Taylor às funções F(a,b,K), G(a,b,K) e H(a,b,K), e desprezando os termos em que os acréscimos $(\hat{a}-a_o)$, $(\hat{b}-b_o)$ e $(\hat{K}-K_o)$ apresentam expoente superior a um, obtemos aproximadamente:

$$F(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) \cong F_o + F'_a\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{a} - a_o) + F'_b\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{b} - b_o) +$$

$$+ F'_K(a_o, b_o, K_o)\ (\hat{K} - K_o)$$

$$G(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) \cong G_o + G'_a\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{a} - a_o) + G'_b\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{b} - b_o) +$$

$$+ G'_K(a_o, b_o, K_o)\ (\hat{K} - K_o)$$

$$H(\hat{a}, \hat{b}, \hat{K}) \cong H_o + H'_a\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{a} - a_o) + H'_b\ (a_o, b_o, K_o)(\hat{b} - b_o) +$$

$$+ H'_K(a_o, b_o, K_o)\ (\hat{K} - K_o)$$

ou

$$\begin{bmatrix} -F'_a(a_o,b_o,K_o) & -F'_b(a_o,b_o,K_o) & -F'_K(a_o,b_o,K_o) \\ -G'_a(a_o,b_o,K_o) & -G'_b(a_o,b_o,K_o) & -G'_K(a_o,b_o,K_o) \\ -H'_a(a_o,b_o,K_o) & -H'_b(a_o,b_o,K_o) & -H'_K(a_o,b_o,K_o) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} - a_o \\ \hat{b} - b_o \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} F_o \\ G_o \\ H_o \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Temos que:

$$F'_a\ (a,b,K) = \frac{\partial F}{\partial a} = -\ n$$

$$F'_b\ (a,b,K) = \frac{\partial F}{\partial b} = -\ \Sigma \log\ (v_i + K)$$

$$F'_K\ (a,b,K) = \frac{\partial F}{\partial K} = -\ b\ .\ \Sigma\ \frac{1}{v_i + K}$$

$$G'_a\ (a,b,K) = \frac{\partial G}{\partial a} = -\ \Sigma\ \log\ (v_i + K)$$

$$G'_b\ (a,b,K) = \frac{\partial G}{\partial b} = -\ \Sigma\ \log^2 (v_i + K)$$

$$G'_K\ (a,b,K) = \frac{\partial G}{\partial K} = -\ a\ .\ \Sigma\ \frac{1}{v_i + K}\ -\ 2\ b\ .\ \Sigma\ \frac{\log(v_i + K)}{v_i + K}\ +\ \Sigma\ \frac{t_i}{v_i + K}$$

$$H'_a\ (a,b,K) = \frac{\partial H}{\partial a} = -\ b\ .\ \Sigma\ \frac{1}{v_i + K}$$

$$H'_b\ (a,b,K) = \frac{\partial H}{\partial b} = -\ a\ .\ \Sigma\ \frac{1}{v_i + K}\ -\ 2\ b\ .\ \Sigma\ \frac{\log(v_i + K)}{v_i + K}\ +\ \Sigma\ \frac{t_i}{v_i + K}$$

$$H'_K\ (a,b,K) = \frac{\partial H}{\partial K} = a\ .\ b\ .\ \Sigma\ \frac{1}{(v_i + K)^2}\ -\ b^2\ .\ \Sigma\ \frac{1 - \log(v_i + K)}{(v_i + K)^2}\ -\ b\ .\ \Sigma\ \frac{t_i}{(v_i + K)^2}$$

Substituindo $t_i \cong a + b\ .\ \log\ (v_i + K)$ nas expressões em que aparece t_i, e simplificando, obtemos:

$$G'_K\ (a,b,K) \cong -\ b\ .\ \Sigma\ \frac{\log\ (v_i + K)}{v_i + K}$$

$$H'_b\ (a,b,K) \cong -\ b\ .\ \Sigma\ \frac{\log\ (v_i + K)}{v_i + K}$$

$$H'_K\ (a,b,K) \cong -\ b^2\ .\ \Sigma\ \frac{1}{(v_i + K)^2}$$

Aplicando êsses resultados em (2) obtemos:

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) & b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_o} \\ \Sigma \log(v_i+K_o) & \Sigma \log^2(v_i+K_o) & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_o)}{v_i + K_o} \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i+K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_o)}{v_i + K_o} & b_o^2 \cdot \Sigma \dfrac{1}{(v_i+K_o)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}-a_o \\ \hat{b}-b_o \\ \hat{K}-K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} F_o \\ G_o \\ H_o \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou, denominando P a matriz quadrada 3 x 3,

$$P \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} - a_o \\ \hat{b} - b_o \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} F_o \\ G_o \\ H_o \end{bmatrix}$$

De (1) a (3) segue-se que

$$P \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} - a_o \\ \hat{b} - b_o \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma t_i \\ \Sigma \log(v_i+K_o) & \Sigma \log^2(v_i+K_o) & \Sigma t_i \cdot \log(v_i+K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i+K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i+K_o)}{v_i + K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i+K_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a_o \\ -b_o \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$P \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) \\ \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma \log^2(v_i + K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i + K_o)}{v_i + K_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a_o \\ -b_o \end{bmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) \\ \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma \log^2(v_i + K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_o} & b_o \cdot \Sigma \dfrac{\log(v_i + K_o)}{v_i + K_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a_o \\ -b_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma t_i \cdot \log(v_i + K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K_o} \end{bmatrix}$$

Simplificando obtemos:

$$P \cdot \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \Sigma t_i \\ \Sigma t_i \cdot \log(v_i + K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K_o} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma\, t_i \\ \Sigma\, t_i \cdot \log(v_i + K_o) \\ b_o \cdot \Sigma \dfrac{t_i}{v_i + K_o} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

onde aparece a matriz P^{-1} que, multiplicada pela variância de $t|v$, constitue a matriz das variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{K}$.

Definimos a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} n & \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_o} \\ \Sigma \log(v_i + K_o) & \Sigma \log^2(v_i + K_o) & \Sigma \dfrac{\log(v_i + K_o)}{v_i + K_o} \\ \Sigma \dfrac{1}{v_i + K_o} & \Sigma \dfrac{\log(v_i + K_o)}{v_i + K_o} & \Sigma \dfrac{1}{(v_i + K_o)^2} \end{bmatrix}$$

Note-se que a matriz $\underline{P}$ pode ser obtida a partir da matriz $\underline{Q}$ multiplicando-se a última linha e a última coluna por $\underline{b_o}$.

A matriz inversa Q^{-1} é indicada por

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \frac{q_{13}}{b_o} \\ q_{12} & q_{22} & \frac{q_{23}}{b_o} \\ \frac{q_{13}}{b_o} & \frac{q_{23}}{b_o} & \frac{q_{33}}{b_o^2} \end{bmatrix}$$

Substituindo em (4) obtemos:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{K} - K_o \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} q_{11} \cdot \Sigma t_i + q_{12} \cdot \Sigma t_i \cdot \log(v_i + K_o) + q_{13} \cdot \Sigma \frac{t_i}{v_i + K_o} \\ q_{12} \cdot \Sigma t_i + q_{22} \cdot \Sigma t_i \cdot \log(v_i + K_o) + q_{23} \cdot \Sigma \frac{t_i}{v_i + K_o} \\ \frac{q_{13} \cdot \Sigma t_i + q_{23} \cdot \Sigma t_i \cdot \log(v_i + K_o) + q_{33} \cdot \Sigma \frac{t_i}{v_i + K_o}}{b_o} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

A determinação de $\hat{a}$, $\hat{b}$, e $\hat{K}$ será feita seguindo-se as seguintes etapas:

1º) obter uma estimativa preliminar de K, K_o;

2º) calcular os elementos da matriz Q e obter a sua inversa;

3º) usando a relação (5) obtemos estimativas de a e b e uma nova estimativa de K. Essas estimativas ainda não são definitivas porque a relação 5 é aproximada; denominemo-las $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$ e $\hat{K}_1$;

4º) podemos repetir o processo, usando agora $\hat{K}_1$ como estimativa preliminar de K. O processo será repetido até que a correção a ser feita na estimativa de K seja considerada desprezível.

APÊNDICE 2

Quadro 28. Distribuição da Renda no Brasil em 1960. Porcentagem do número de pessoas em cada estrato, respectiva porcentagem da renda total recebida e renda média do Estrato.

Brasil - Total			
Estratos de renda*	Porcentagem da população**	Porcentagem da renda	Renda média*
(0 ; 2.100]	24,8	5,0	1.200
(2.100 ; 3.300]	17,1	7,7	2.700
(3.300 ; 4.500]	13,2	8,6	3.900
(4.500 ; 6.000]	15,2	13,2	5.176
(6.000 ; 10.000]	16,8	21,4	7.604
(10.000 ; 20.000]	9,3	21,1	13.499
(20.000 ; ∞)	3,6	23,0	38.423
	100,0	100,0	5.967

* Em cruzeiros (velhos) de 1960 por mês e por pessoa

** Referimo-nos aqui à população das pessoas, com 10 anos ou mais de idade, que recebem renda.

Quadro 28. Continuação

Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
Nordeste - Total			
(0 ; 2.100]	48,5	14,5	1.050
(2.100 ; 3.300]	28,6	20,8	2.564
(3.300 ; 4.500]	9,2	10,0	3.813
(4.500 ; 6.000]	5,0	7,4	5.153
(6.000 ; 10.000]	4,7	10,2	7.564
(10.000 ; 20.000]	2,6	9,9	13.583
(20.000 ; ∞)	1,4	27,2	66.399
	100,0	100,0	3.512
Leste - Total			
(0 ; 2.100]	27,3	5,2	1.150
(2.100 ; 3.300]	18,2	8,1	2.700
(3.300 ; 4.500]	12,3	7,9	3.900
(4.500 ; 6.000]	13,5	11,5	5.179
(6.000 ; 10.000]	15,4	19,3	7.622
(10.000 ; 20.000]	9,2	20,6	13.568
(20.000 ; ∞)	4,0	27,5	41.512
	100,0	100,0	6.088

Quadro 28. Continuação

Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
Sul - Total			
(0 ; 2.100]	10,4	2,2	1.500
(2.100 ; 3.300]	12,4	4,6	2.700
(3.300 ; 4.500]	13,1	7,0	3.900
(4.500 ; 6.000]	21,1	15,1	5.184
(6.000 ; 10.000]	24,8	26,1	7.622
(10.000 ; 20.000]	13,9	25,8	13.444
(20.000 ; ∞)	4,2	19,3	32.997
	100,0	100,0	7.256
Brasil - Primário			
(0 ; 2.100]	34,0	11,0	1.200
(2.100 ; 3.300]	25,8	18,9	2.700
(3.300 ; 4.500]	17,3	18,3	3.900
(4.500 ; 6.000]	11,4	15,9	5.120
(6.000 ; 10.000]	7,8	15,8	7.441
(10.000 ; 20.000]	2,8	10,2	13.258
(20.000 ; ∞)	0,9	9,9	40.932
	100,0	100,0	3.685

Quadro 28. Continuação

Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
Nordeste - Primário			
(0 ; 2.100]	55,3	26,4	1.050
(2.100 ; 3.300]	32,8	37,1	2.495
(3.300 ; 4.500]	6,1	10,5	3.785
(4.500 ; 6.000]	2,6	6,1	5.130
(6.000 ; 10.000]	2,0	6,8	7.485
(10.000 ; 20.000]	0,8	5,2	13.401
(20.000 ; ∞)	0,4	8,0	50.071
	100,0	100,0	2.203
Leste - Primário			
(0 ; 2.100]	37,8	13,2	1.150
(2.100 ; 3.300]	29,3	24,0	2.700
(3.300 ; 4.500]	16,0	18,8	3.900
(4.500 ; 6.000]	8,7	13,4	5.108
(6.000 ; 10.000]	5,5	12,4	7.428
(10.000 ; 20.000]	2,0	8,0	13.299
(20.000 ; ∞)	0,7	10,1	46.675
	100,0	100,0	3.301

Quadro 28. Continuação

Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
Sul - Primário			
(0 ; 2.100]	13,4	4,0	1.500
(2.100 ; 3.300]	21,5	11,6	2.700
(3.300 ; 4.500]	23,0	17,9	3.900
(4.500 ; 6.000]	20,2	20,7	5.135
(6.000 ; 10.000]	15,1	22,5	7.457
(10.000 ; 20.000]	5,4	14,2	13.171
(20.000 ; ∞)	1,3	9,1	34.530
	100,0	100,0	5.012
Brasil - Urbano			
(0 ; 2.100]	17,2	2,6	1.200
(2.100 ; 3.300]	9,8	3,4	2.700
(3.300 ; 4.500]	9,7	4,9	3.900
(4.500 ; 6.000]	19,0	12,7	5.188
(6.000 ; 10.000]	23,6	23,3	7.650
(10.000 ; 20.000]	14,8	26,0	13.568
(20.000 ; ∞)	5,8	27,0	36.373
	100,0	100,0	7.757

Quadro 28. Continuação

Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
Nordeste - Urbano			
(0 ; 2.100]	37,0	6,8	1.050
(2.100 ; 3.300]	21,5	10,4	2.741
(3.300 ; 4.500]	14,3	9,6	3.833
(4.500 ; 6.000]	9,1	8,2	5.165
(6.000 ; 10.000]	9,3	12,4	7.592
(10.000 ; 20.000]	5,4	13,0	13.631
(20.000 ; ∞)	3,2	39,6	69.342
	100,0	100,0	5.702
Leste - Urbano			
(0 ; 2.100]	19,3	2,8	1.150
(2.100 ; 3.300]	9,8	3,3	2.700
(3.300 ; 4.500]	9,6	4,7	3.900
(4.500 ; 6.000]	17,7	11,4	5.189
(6.000 ; 10.000]	22,4	21,3	7.659
(10.000 ; 20.000]	14,7	24,9	13.624
(20.000 ; ∞)	6,5	31,6	39.178
	100,0	100,0	8.039

Quadro 28. Continuação

Sul - Urbano			
Estratos de renda	Porcentagem da população	Porcentagem da renda	Renda média
(0 ; 2.100]	8,7	1,5	1.500
(2.100 ; 3.300]	7,2	2,3	2.700
(3.300 ; 4.500]	7,3	3,4	3.900
(4.500 ; 6.000]	22,4	13,8	5.195
(6.000 ; 10.000]	29,6	26,8	7.668
(10.000 ; 20.000]	18,8	30,1	13.524
(20.000 ; ∞)	5,9	22,0	31.700
	100,0	100,0	8.461
Brasil - Indústria			
(0 ; 2.100]	10,5	1,8	1.200
(2.100 ; 3.300]	9,8	3,7	2.700
(3.300 ; 4.500]	11,0	6,0	3.900
(4.500 ; 6.000]	27,4	19,8	5.159
(6.000 ; 10.000]	25,8	27,3	7.542
(10.000 ; 20.000]	11,9	22,3	13.353
(20.000 ; ∞)	3,7	19,1	36.545
	100,0	100,0	7.118

APÊNDICE 3

Quadro 29. Distribuição dos Empregados em Estratos Conforme o Salário, no Brasil, em São Paulo e na Guanabara, em Abril de 1966. Porcentagem dos empregados em cada estrato, respectiva porcentagem de renda total do trabalho recebida e salário médio do estrato.

Brasil - empregados administrativos e operários			
Estratos quanto ao salário*	Porcentagem dos empregados	Porcentagem da renda	Salário médio*
(0 ; 48]	5,84	1,53	34
(48 ; 84]	32,94	16,70	66
(84 ; 126]	28,47	22,33	102
(126 ; 210]	20,25	24,76	159
(210 ; 294]	6,49	12,22	245
(294 ; 378]	2,68	6,81	330
(378 ; 462]	1,30	4,15	415
(462 ; 546]	0,70	2,71	500
(546 ; ∞)	1,33	8,79	860
	100,00	100,00	130

* Em cruzeiros (novos) de 1966 por mês.

Quadro 29. Continuação

São Paulo - empregados administrativos e operários			
Estratos quanto ao salário	Porcentagem dos empregados	Porcentagem da renda	Salário médio
(0 ; 48]	6,40	1,41	34
(48 ; 84]	17,69	7,54	66
(84 ; 126]	31,74	21,01	102
(126 ; 210]	25,76	26,64	160
(210 ; 294]	9,21	14,61	246
(294 ; 378]	4,02	8,59	331
(378 ; 462]	2,01	5,38	416
(462 ; 546]	1,10	3,56	500
(546 ; ∞)	2,07	11,26	844
	100,00	100,00	155

Guanabara - empregados administrativos e operários			
(0 ; 48]	5,48	1,27	34
(48 ; 84]	19,29	8,70	66
(84 ; 126]	35,18	24,53	102
(126 ; 210]	24,65	26,81	159
(210 ; 294]	7,88	13,21	245
(294 ; 378]	3,28	7,42	331
(378 ; 462]	1,61	4,57	416
(462 ; 546]	0,88	3,02	500
(546 ; ∞)	1,74	10,47	881
	100,00	100,00	146

Quadro 29. Continuação

Brasil - empregados administrativos			
Estratos quanto ao salário	Porcentagem dos empregados	Porcentagem da renda	Salário médio
(0 ; 48]	2,48	0,40	34
(48 ; 84]	17,27	5,36	66
(84 ; 126]	23,17	11,28	103
(126 ; 210]	25,57	19,57	163
(210 ; 294]	12,52	14,57	247
(294 ; 378]	6,77	10,58	332
(378 ; 462]	3,95	7,75	416
(462 ; 546]	2,44	5,76	501
(546 ; ∞)	5,82	24,72	902
	100,00	100,00	212

São Paulo - empregados administrativos

(0 ; 48]	2,18	0,29	34
(48 ; 84]	9,96	2,56	66
(84 ; 126]	19,61	7,93	104
(126 ; 210]	25,67	16,40	164
(210 ; 294]	14,97	14,48	248
(294 ; 378]	9,11	11,80	333
(378 ; 462]	5,75	9,34	417
(462 ; 546]	3,75	7,31	501
(546 ; ∞)	9,00	29,89	853
	100,00	100,00	257

Quadro 29. Continuação

Guanabara - empregados administrativos			
Estratos quanto ao salário	Porcentagem dos empregados	Porcentagem da renda	Salário médio
(0 ; 48]	1,56	0,22	34
(48 ; 84]	8,61	2,40	66
(84 ; 126]	22,60	9,89	104
(126 ; 210]	27,93	19,27	164
(210 ; 294]	15,19	15,89	248
(294 ; 378]	8,71	12,21	332
(378 ; 462]	5,22	9,17	416
(462 ; 546]	3,25	6,87	501
(546 ; ∞)	6,93	24,08	823
	100,00	100,00	237

Brasil - operários			
(0 ; 48]	6,48	1,92	34
(48 ; 84]	35,91	20,71	66
(84 ; 126]	29,37	26,16	102
(126 ; 210]	19,37	26,79	158
(210 ; 294]	5,34	11,39	244
(294 ; 378]	1,89	5,43	330
(378 ; 462]	0,79	2,85	414
(462 ; 546]	0,37	1,62	499
(546 ; ∞)	0,48	3,13	746
	100,00	100,00	114

Quadro 29. Continuação

Estratos quanto ao salário	Porcentagem dos operários	Porcentagem da renda	Salário médio
	São Paulo - operários		
(0 ; 48]	7,29	1,88	34
(48 ; 84]	19,27	9,66	66
(84 ; 126]	34,62	26,93	102
(126 ; 210]	25,98	31,41	159
(210 ; 294]	7,82	14,51	244
(294 ; 378]	2,80	7,00	329
(378 ; 462]	1,14	3,59	414
(462 ; 546]	0,51	1,95	499
(546 ; ∞)	0,57	3,06	710
	100,00	100,00	132
	Guanabara - operários		
(0 ; 48]	6,42	1,80	34
(48 ; 84]	21,80	11,87	66
(84 ; 126]	39,35	33,00	102
(126 ; 210]	23,32	30,30	157
(210 ; 294]	5,74	11,55	244
(294 ; 378]	1,88	5,11	329
(378 ; 462]	0,74	2,54	414
(462 ; 546]	0,34	1,38	499
(546 ; ∞)	0,40	2,45	735
	100,00	100,00	121