**Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”**

**Ajuste do modelo linear de efeito misto na relação hipsométrica em
plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f.**

Lucas do Nascimento Ferreira

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Ciências, Programa: Recursos Florestais.
Opção em: Silvicultura e Manejo Florestal

**Piracicaba
2018**

Lucas do Nascimento Ferreira
Engenheiro Florestal

**Ajuste do modelo linear de efeito misto na relação hipsométrica em
plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f.**

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:

Prof. Dr. **HILTON THADEU ZARATE DO COUTO**

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Ciências, Programa: Recursos Florestais.
Opção em: Silvicultura e Manejo Florestal

Piracicaba
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA – DIBD/ESALQ/USP

Ferreira, Lucas do Nascimento

Ajuste do modelo linear de efeito misto na relação hipsométrica em plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f. / Lucas do Nascimento Ferreira. - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2018.

39 p.

Dissertação (Mestrado) - - USP / Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz".

1. Modelos de predição 2. Modelos de efeitos mistos 3. BLUP 4. Biometria florestal I. Título

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares.

Ao professor e orientador Dr. Hilton Thadeu Zarate do Couto.

Aos professores Dr. João Luis Ferreira Batista e Dr. Edgar de Souza Vismara.

Aos amigos de pós-graduação da ESALQ.

A CAPES pelo apoio concedido ao trabalho.

A todos que se envolveram direta ou indiretamente na execução deste trabalho.

SUMÁRIO

RESUMO.....	5
ABSTRACT.....	6
1. INTRODUÇÃO	7
2. REVISÃO DA LITERATURA	10
2.1. MODELAGEM NA ÁREA FLORESTAL	10
2.2. CONCEITUAÇÃO.....	11
2.3. ESTATÍSTICAS PARA A SELEÇÃO DE MODELOS.....	14
2.4. ESPÉCIE DE ESTUDO	16
3. MATERIAL	20
3.1. CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO.....	20
4. MÉTODOS	22
4.1. SELEÇÃO DO MODELO DE EFEITO FIXO	22
4.2. VALIDAÇÃO COM DADOS EMPÍRICOS	23
5. RESULTADOS.....	25
6. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO	31
REFERÊNCIAS.....	33

RESUMO

Aplicação do modelo linear de efeito misto na relação hipsométrica em plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f.

A modelagem de predição de altura comumente exige um amplo conjunto de dados para a etapa de construção e ajuste. Ainda que este tipo de conjunto de dados tenha uma estrutura hierárquica natural, organizada pelas diferentes fazendas, talhões, parcelas, e etc., os modelos de regressão clássicos não consideram a possível variação dos parâmetros, entre os diversos grupos hierárquicos. Os modelos de efeitos mistos, em compensação, podem suportar essa variação, assumindo alguns dos parâmetros dos modelos como sendo estocásticos, além de mostrarem potencial com a possibilidade de diminuição de amostras. Esta técnica permite que a variação interindividual seja explicada considerando parâmetros de efeitos fixos (comuns à população) e parâmetros de efeitos aleatórios (específicos para cada indivíduo). Logo, é natural esperar que em povoamentos florestais com alta variação entre indivíduos, o modelo de efeito misto tenha desempenho superior ao modelo de efeito fixo. Por esta razão, os plantios de *Tectona grandis* L.f. podem ser considerados como uma população interessante para a modelagem de efeitos aleatórios, uma vez que tal espécie apresenta heterogeneidade de crescimento, sensibilidade à fertilidade e acidez do solo, e a maioria dos seus plantios estabelecidos no Brasil são seminais. Desta maneira este trabalho verifica o ajuste de modelos de efeitos mistos aplicados aos dados de altura total em plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f, localizados no estado do Mato Grosso, com o objetivo na redução do número de amostras quando comparado ao modelo de efeitos fixos. Após a seleção do modelo linear de efeito fixo mais apropriado, testou-se quais dos coeficientes tem efeito aleatório nos diferentes agrupamentos dos dados. Em seguida, selecionou-se o grupo onde o desempenho do modelo de efeito misto em termos de ajuste e predição foi o melhor possível. Por fim, foi verificado a capacidade preditiva dos modelos ajustados por meio de processos de simulação e validação cruzada. Os resultados mostraram que o modelo misto calibrado fornece predições mais confiáveis do que a parte fixa. Este benefício ocorre mesmo ao longo das gradativas diminuições do número de árvores disponíveis para ajuste dentro conjunto de dados teste separados para a calibração do modelo misto. É possível concluir que o modelo calibrado ajustado por talhão, ao invés da parcela, propicia pouca perda de precisão.

Palavras-chave: Modelos de predição; Modelos de efeitos mistos; BLUP; Biometria florestal

ABSTRACT

Application of the mixed-effect linear model in height-diameter equation on commercial plantations of *Tectona grandis* L.f.

Height prediction modeling commonly requires a broad set of data for the construction and adjustment step. Although this type of data set has a natural hierarchical structure, organized by the different farms, plots, plots, etc., the classical regression models do not consider the possible variation of the parameters among the hierarchical groups. The mixed effects models, in compensation, can support this variation, assuming some of the parameters of the models as being stochastic, besides showing potential with the possibility of sample reduction. This technique allows the interindividual variation to be explained considering parameters of fixed effects (common to the population) and parameters of random effects (specific for each individual). Therefore, it is natural to expect that in forest stands with high variation among individuals, the mixed effect model performs better than the fixed effect model. For this reason, the plantations of *Tectona grandis* L.f. can be considered as an interesting population for the modeling of random effects, since this species presents possible heterogeneity of growth since it is sensitive to the fertility and acidity of the soil, and most of its plantations established in Brazil are seminal. This work verifies the adjustment of mixed effects models applied to total height data in commercial plantations of *Tectona grandis* L.f, located in the state of Mato Grosso, with the objective of reducing the number of samples when compared to the fixed effects model. After selecting the most appropriate linear model of fixed effect, we tested which of the coefficients have random effect in the different groupings of the data. Then, we selected the group where the performance of the mixed effect model in terms of fit and prediction was the best possible. Finally, the predictive capacity of the adjusted models was verified through simulation and cross-validation processes. The results showed that the calibrated mixed model provides more reliable predictions than the fixed part. This benefit occurs even along the gradual decreases in the number of trees available to fit into separate set of test data for the calibration of the mixed model. It is possible to conclude that the calibrated model adjusted by stand, instead of the plot, provides little loss of precision.

Keywords: Prediction models; Mixed-effect models; BLUP; Forest biometry

1. INTRODUÇÃO

No inventário florestal, diversos são os casos em que a diminuição de amostras se torna interessante, uma vez que frequentemente se recorre a amostragem destrutiva no ajuste de modelos de volumes e, quando não destrutivas, em medições dispendiosas. A quantificação das alturas das árvores é essencial, sobretudo para o cálculo do volume de madeira dos povoamentos florestais e para se fazer categorizações destes quanto às suas produtividades. Nas últimas décadas o método indireto de obtenção da variável altura das árvores é o mais utilizado nos inventários florestais (LAAR; AKÇA, 2007). Esta relação é usada para fornecer as alturas de indivíduos que tiveram apenas o DAP (diâmetro do tronco da árvore à 1,3m do solo) medido, e a partir de um ajuste de relação hipsométrica, é gerada uma equação matemática que prediz a altura das demais árvores dentro das parcelas, que não foram medidas suas alturas em campo (KERSHAW et al., 2016). Na prática, a medição das alturas dos indivíduos dentro do arvoredo é, predominantemente, o procedimento mais demorado (KERSHAW et al., 2016). A modelagem de predição de altura frequentemente exige um grande conjunto de dados para a etapa de construção e ajuste (CURTIS, 1967). Ainda que este tipo de conjunto de dados tenha uma estrutura hierárquica natural, constituída pelas diferentes fazendas, talhões, parcelas, e etc., os modelos de regressão clássicos não consideram a provável variação dos parâmetros, entre os diversos grupos hierárquicos. Os modelos de efeitos mistos, em contrapartida, podem suportar essa variação, assumindo alguns dos parâmetros dos modelos como sendo estocásticos (PINHEIRO, 1994; PINHEIRO; BATES, 2000), além de mostrarem potencial com a possibilidade de diminuição de amostras (ZENG, 2015).

No que se refere aos modelos de relação hipsométrica, estes geralmente visam predições no nível da parcela. Logo, os modelos devem representar a relação diâmetro-altura específica para cada parcela. Uma abordagem baseada exclusivamente em relações específicas de parcela é fornecida ao permitir parâmetros específicos das parcelas nos modelos. Uma maneira possível de fazer isso é adequar modelos separados por parcela. No entanto, esta abordagem é geralmente inadequada na prática, uma vez que requer um grande número de árvores por parcela e não permite a predição de parcelas fora dos dados de modelagem. A necessidade de dados pode ser reduzida usando o índice de parcela como um preditor categórico no modelo, mas o problema de predição para novas parcelas ainda permanece. Uma abordagem que também possibilite a predição de parcelas é fornecida pelos modelos de efeitos mistos, em que uma parte fixa fornece a curva estimada de diâmetro-altura para a média marginal dos dados de modelagem (estimação de efeito fixo). Uma estimação complementada com valores preditos dos efeitos aleatórios fornece uma predição calibrada, que descreve realisticamente a relação diâmetro-altura específica para cada parcela. Especialmente em situações onde as árvores de amostra estão disponíveis a partir da parcela em questão, os modelos de efeitos mistos mostraram-se altamente úteis, uma vez que permitem o desenvolvimento de curvas de diâmetro-altura específicas para parcelas com tamanho mínimo de amostra por parcela (MENG et al., 2009; SIRKIÄ et al., 2015).

Conforme demonstrado por Pinheiro e Bates (2000) e aplicado na área florestal por Fang e Bailey (2001), a modelagem de efeitos mistos permite que a variação interindividual seja explicada

considerando parâmetros de efeitos fixos (comuns à população) e parâmetros de efeitos aleatórios (específicos para cada indivíduo). Logo, é natural esperar que em povoamentos florestais com alta variação entre indivíduos, o modelo de efeito misto tenha desempenho superior ao modelo de efeito fixo. Por esta razão, os plantios de *Tectona grandis* L.f. (teca) podem ser considerados como uma população interessante para a modelagem de efeitos aleatórios, uma vez que tal espécie apresenta potencial heterogeneidade de crescimento por ser sensível à fertilidade e acidez do solo (ZHOU et al., 2012), a maioria dos seus plantios estabelecidos no Brasil são seminais – ou quando clonais, são relativamente recentes no melhoramento genético, e seu manejo silvicultural ainda não se encontra estabelecido nos locais de origem (Tailândia por exemplo), tampouco para as condições edafoclimáticas do Brasil.

Nas últimas décadas no setor florestal, com um dos primeiros trabalhos realizados por Lappi e Bailey (1988), utilizando modelos de efeitos mistos é admissível generalizar estruturas de correlações espaço-temporais, variâncias heterogêneas, até mesmo de permitir generalizações de famílias de distribuições de probabilidade. Em meio as mais distintas abordagens na ciência florestal, destaca-se o seu bom emprego em trabalhos de ajustes de relações hipsométricas (CRECENTE-CAMPO et al., 2010; COBLE; LEE, 2011; VANDERSCHAAF, 2014; ERCANLI, 2015; MEHTÄTALO; GREGOIRE; DE-MIGUEL, 2015; GÓMEZ-GARCÍA et al., 2016b; ZANG; LEI; ZENG, 2016), modelos de copa (HAO et al., 2015), modelos de altura dominante (YANG; HUANG, 2011a; SIRKIÄ et al., 2015), modelos de volume e funções de afilamento de tronco (CAO; WANG, 2011, 2015, ARIAS-RODIL et al., 2015a, 2015b; GUANGYI et al., 2015; SABATIA; BURKHART, 2015; GÓMEZ-GARCÍA et al., 2016a; VISMARA; MEHTÄTALO; BATISTA, 2016), modelos de distribuição de diâmetro (TIMILSINA; STAUDHAMMER, 2013; BOHORA; CAO, 2014; MEHTÄTALO et al., 2014), modelos de biomassa (DE-MIGUEL; MEHTÄTALO; DURKAYA, 2014), e modelagem do crescimento e da produção florestal (YANG; HUANG, 2011b; DE-MIGUEL; GUZMÁN; PUKKALA, 2013; FORTIN; MANSO; CALAMA, 2016).

No que se refere a um panorama de alta competitividade à nível nacional e internacional e se tratando de um produto florestal de alto valor agregado com alta variabilidade entre indivíduos, novas táticas de redução de custos de produção e de seu monitoramento se tornam primordiais. A medição de altura de plantios florestais, uma atividade dispendiosa, pode ter os seus custos reduzidos e sua precisão aumentada se apoiada nos modelos de predição. Desta forma, este estudo procura o potencial dos modelos de efeitos mistos como forma de colaborar para esse resultado. Para tal, este trabalho verifica o ajuste de modelos de efeitos mistos aplicados aos dados de altura total em plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f (teca) com vista em redução do número de amostras quando comparado ao modelo de efeitos fixos.

Este estudo considera a hipótese de que o modelo de efeito misto é mais adequado para descrever as relações de diâmetro e altura e realizar predições em plantios comerciais de teca, uma vez que estes plantios apresentam uma estrutura bastante heterogênea em termos de material genético plantado e da localização das unidades administrativas, tais como municípios, fazendas, talhões e parcelas.

O objetivo geral deste trabalho é ajustar um modelo linear de efeito misto que admita delinear com precisão, as relações hipsométrica nas diferentes unidades administrativas, e que seja de fácil uso às variáveis obtidas em inventários florestais. Por conseguinte, os objetivos específicos são: (i) selecionar o melhor modelo de efeito fixo para predição da altura; (ii) selecionar quais dos coeficientes do modelo de efeito fixo escolhido tem efeito aleatório nos diferentes grupos (unidades administrativas) testados; (iii) selecionar a unidade administrativa onde o desempenho do modelo de efeito misto em termos de ajuste e predição seja o melhor possível; (iv) testar a capacidade preditiva dos modelos ajustados por meio de procedimentos de simulação e validação cruzada.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. Modelagem na área florestal

O trabalho de silvicultura ocorre em grandes áreas e por longos períodos de tempo e os processos que ocupam apenas um ano na agricultura ocupam 10, 20, 30 e, às vezes, até 250 anos de única rotação em florestas temperadas ou em plantios de crescimento lento em que o diâmetro do fuste seja a principal variável econômica. É necessário então, no decorrer destes longos períodos, empreender levantamentos e experimentos repetidos e extensos. Claramente, toda a escala dos recursos envolvidos em tal trabalho impossibilita uma inclusão exaustiva de todos os indivíduos, de modo que as técnicas estatísticas apropriadas para fazer inferências são essenciais. O uso amplo dos métodos estatísticos e biometria geral na silvicultura é devido a: (a) ocorrência de grande volume de dados em todos os aspectos da silvicultura (ex. na pesquisa de mercado de madeira, na medição de recursos florestais e crescimento e na política florestal) e, (b) a necessidade de resumir essas extensas massas de dados em valores e relações características de fácil compreensão (PRODAN, 1968).

A razão para introduzir ideias estatísticas na prática da silvicultura reside no fato de que todas as florestas consistem em populações de indivíduos que devem ser compreendidas em números. Além disso, com o advento das corporações florestais, tornou-se necessário fazer inferências a partir da grande quantidade de dados empíricos experimentais e de pesquisa. Com o crescimento dos maciços florestais, pertencentes a tais corporações, têm-se um cenário com grande fonte de dados e, cada vez mais, exigência de priorização de informações, buscando assim, fazer mais análises com menos medições. Sob tal ótica, é natural entender que, gradualmente, são necessárias técnicas mais sofisticadas que suportam tal situação. Portanto, a gestão destes recursos requer uma quantidade substancial de informações, incluindo informações de inventário (MCDILL, 2014).

A modelagem do crescimento de povoamentos florestais plantados tem sido um desafio para os engenheiros florestais e demais silvicultores nos últimos anos devido às grandes variações genéticas e locais, regimes de manejo e múltiplos produtos gerados a partir desses plantios (CALEGARIO et al., 2005). Como o crescimento da altura da floresta está diretamente relacionado com as características do local e com a produtividade florestal, a melhoria na representação do crescimento em altura implica em uma melhor estimativa da produtividade. Em inventários florestais, estimativas de altura são obtidas, comumente, por meio da aplicação de modelos de predição estabelecidos com base em informações empíricas. Este modelo deve ser estudado não somente sob o ponto de vista da qualidade do seu ajuste, como também, sob o ponto de vista da sua performance de aplicação (PENG, 2000; LANDSBERG, 2003).

Quanto às tentativas de aprimorar a modelagem da relação diâmetro-altura, o uso de variáveis categóricas (*dummy*) tem se mostrado aceitável em alguns casos. Este método faz com que o modelo seja ajustado às tendências individuais (em cada categoria) observadas nos dados. Desta forma, todos os dados podem ser utilizados e não há necessidade de fazer qualquer escolha arbitrária em relação aos intervalos de medição. No estudo realizado por Wang et al. (2008) foram comparadas duas abordagens para a modelagem de altura, o método da variável *dummy* (efeitos individuais fixos) e o

método do modelo misto (efeitos individuais aleatórios), utilizando modelos de *Chapman-Richards* aplicados em pinheiros de segunda rotação (*Pinus taeda* L.). Tais pesquisadores concluíram que, para a descrição de crescimento em altura, o método da variável *dummy* é preferido. Contudo, em termos de predição de altura, o modelo misto apresentou melhor desempenho quando diminui o número de observações.

Na prática, a inclusão de variáveis *dummy* produz um modelo de estimação multiparamétrica que fornece predições grupo-específicas da mesma forma que o modelo de efeito misto. Entretanto, o modelo misto apresenta dois grandes benefícios: (i) ao considerar que o grupo i pode ser um nível hierárquico dos dados (ex. parcela), uma determinada parcela, ou talhão, é um elemento pertencente a este grupo escolhido. No modelo de efeito misto o efeito dos grupos eleitos é uma das possíveis amostras aleatórias e assim, um efeito para um elemento j do grupo i que não foi incluído na amostra de ajuste é possível prever por meio do *best linear unbiased predictor* (BLUP) (LAPPI, 1991). No modelo *dummy* temos apenas as predições para os elementos j do grupo i que foram incluídos na amostra de ajuste. (ii) na fase de estimação por máxima verossimilhança restrita calculamos apenas um ou dois parâmetros à mais - os efeitos aleatórios $\alpha_i = (\alpha_{\beta 0}, \alpha_{\beta 1}, \alpha_{\beta 2})$, desta forma, a estimação da parte fixa (modelo marginal) é beneficiada, dado que frequentemente é realizada com um grande número de observações (FU et al., 2012).

2.2. Conceituação

2.2.1. Modelo de efeito misto

Assume-se a altura da árvore j no grupo i (nível hierárquico) por h_{ij} e o diâmetro na altura do peito da árvore correspondente por d_{ij} . Dentre as aplicações deste trabalho, i pode ser o índice de um projeto, fazenda, talhão ou parcela. O modelo de efeitos mistos para o grupo i é definido como:

$$h_{ij} = f(d_{ij}; \beta_i) + e_{ij}, \quad (1)$$

onde $f(d_{ij}; \beta_i)$ é a parte fixa do modelo e e_{ij} é o erro residual aleatório. Se o modelo está correto e os parâmetros são conhecidos, $f(d_{ij}; \beta_i)$ fornece uma média condicional $E(h_{ij}|d_{ij})$ no agrupamento. A parte fixa pode ser linear ou não linear em relação a β_i . Neste trabalho, houveram caso com transformação feita para h_{ij} . O vetor β_i inclui parâmetros da função média para o grupo i , com $p = 2$ ou 3 parâmetros.

Quanto à parte fixa, é possível variar entre os níveis de grupo escolhido por meio da inclusão de efeitos aleatórios. Para o modelo de efeitos mistos, definimos,

$$\beta_i = B + b_i, \quad (2)$$

onde B representa os parâmetros para um grupo médio em toda a população de agrupamentos, e os efeitos do grupo b_i expressam a diferença nos parâmetros do grupo i do conjunto de dados de valor

médio. Presume-se que os efeitos dos agrupamentos tenham uma distribuição normal multivariada comum com média 0 e matriz de variância-covariância $\text{var}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{D}$ para todos os valores de i . Os erros residuais são assumidos como independentes, com média zero e variância constante $\text{var}(e_{ij}) = \sigma^2$.

O ajuste do modelo de efeitos mistos envolve a estimação dos parâmetros $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ e σ . Além disso, os efeitos de agrupamento $\mathbf{b}_i$ são obtidos como um produto da estimativa de um modelo linear. O método padrão de estimativa é baseado na máxima verossimilhança restrita, e os testes em modelos aninhados são baseados na razão de verossimilhança (parte aleatória) e testes F condicionais (parte fixa). Os modelos não aninhados foram comparados usando os critérios de informação de Akaike – AIC - (PINHEIRO; BATES, 2000).

2.2.2. Predição por grupo

Em modelos de efeitos mistos, a predição é possível em dois níveis de agrupamento. Uma predição denominada predição de efeito fixo é obtida pela avaliação dos efeitos aleatórios em seu valor esperado, ou seja, quando $\mathbf{b}_i = 0$. A função resultante fornece a curva diâmetro-altura específica ao grupo (ex. parcela) para um grupo médio do conjunto de dados de modelagem. Tais previsões podem ser úteis para uma parcela que não possui árvores com alturas medidas disponíveis para predição dos efeitos da parcela, mas deseja-se produzir uma curva da relação diâmetro-altura realística e própria para a parcela. A predição de efeito fixo também pode ser interpretada como uma predição marginal (média populacional).

A melhoria na predição própria de cada parcela é fornecida pela predição dos efeitos aleatórios, onde estas previsões do grupo indicado são utilizadas. A predição dos efeitos aleatórios pode ser realizada durante a fase de ajuste do modelo (PINHEIRO; BATES, 2000), como também pode ser feita posteriormente por meio da calibração do modelo misto linear (LAPPI; BAILEY, 1988) e não linear (CALAMA; MONTERO, 2004). Estas curvas resultantes são semelhantes às curvas que resultariam do ajuste separado de cada parcela, especialmente se o número de árvores por parcela for elevado. No entanto, agrupando as observações de todas as parcelas e estipulando os efeitos aleatórios da parcela, são necessárias menos observações por parcela para permitir a predição. Há casos em que mesmo uma árvore de amostra medida por parcela foi suficiente para a predição de $\mathbf{b}_i$ (LAPPI, 1997), embora o aumento do número de árvores medidas melhore a qualidade da predição.

2.2.3. Predição marginal

Ao invés da relação diâmetro-altura no nível do grupo eleito (parcela por exemplo), pode-se estar interessado na altura média das árvores na população, a relação diâmetro-altura marginal. Essa relação também é chamada de predição média da população. Neste trabalho consideramos a predição marginal como a altura média sobre toda a população de árvores.

Um método para estimar a relação marginal é ajustar uma regressão de mínimos quadrados ordinários, ignorando a hierarquia dos dados no ajuste do modelo. Para predição marginal, isso significa ajustar a parte fixa do modelo de efeito misto,

$$h_{ij} = f(d_{ij}; \boldsymbol{\beta}) + e_{ij}, \quad (3)$$

onde o parâmetro $\boldsymbol{\beta}$ é comum para todos os níveis dos grupos.

2.2.4. Predição do efeito aleatório

Para uma exposição geral da predição de efeito aleatório, é preciso reescrever o modelo, apresentando-o na forma matricial para um único grupo. De tal modo, o modelo para o grupo i pode ser concebido como:

$$\ln(h_i) = \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (4)$$

onde o vetor $\ln(h_i)$ contém as alturas das árvores observadas no grupo i , $\boldsymbol{\mu}_i$ recebe as predições com base na parte fixa do modelo de efeitos aleatórios, fornecendo o valor esperado do vetor $\ln(h_i)$, $\mathbf{Z}_i$ é a matriz que define a parte aleatória, $\boldsymbol{\alpha}_i = (\boldsymbol{\alpha}_{0i}, \boldsymbol{\alpha}_{1i})'$ inclui os efeitos aleatórios, grupo-específicos, que têm distribuição normal com média 0 (zero) e matriz de variância e covariância $\mathbf{D}_{2 \times 2}$, definida por

$$\mathbf{D} = \text{var}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \text{var} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{0i} \\ \boldsymbol{\alpha}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{var}(\boldsymbol{\alpha}_{0i}) & \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{0i}, \boldsymbol{\alpha}_{1i}) \\ \text{cov}(\boldsymbol{\alpha}_{1i}, \boldsymbol{\alpha}_{0i}) & \text{var}(\boldsymbol{\alpha}_{1i}) \end{bmatrix},$$

e $\boldsymbol{\epsilon}_i$ é o erro aleatório residual também normalmente distribuído com média 0 (zero) e variância $\text{var}(\boldsymbol{\epsilon}_i) = \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

A matriz $\mathbf{D}$, assim como a estrutura de $\mathbf{R}$ é idêntica à todos os grupos escolhidos, e são estimadas na etapa de ajuste. Todavia, os valores dos vetores de efeitos aleatórios são preditos posteriormente usando o melhor preditor linear não enviesado - BLUP (BEAL; SHEINER, 1982).

2.2.5. Calibração dos modelos de efeitos mistos para predições

Para a predição dos efeitos aleatórios, foi aplicado o melhor preditor linear não enviesado (BLUP). No caso geral, suponha que temos variáveis aleatórias $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, que possuem as seguintes propriedades conhecidas de primeira e segunda ordem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{12} & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \right)$$

Assumindo um vetor não observado $\mathbf{b}_1$ e um vetor observado $\mathbf{b}_2$, o BLUP para o vetor sem observações é:

$$\widehat{\mathbf{b}}_1 = \boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_2^{-1} (\mathbf{b}_2 - \boldsymbol{\mu}_2), \quad (5)$$

com variância

$$\text{var}(\widehat{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{b}_1) = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_{12} \mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{V}_{12}', \quad (6)$$

onde $\widehat{b}_1$ é a predição do vetor não observado, μ_1 e μ_2 são as médias de b_1 e b_2 , V_1 e V_2 são as variâncias de b_1 e b_2 , e V_{12} é a covariância entre V_1 e V_2 . Na prática, as variâncias, covariâncias e valores esperados nas equações 9 e 10 são substituídos por suas estimativas de probabilidade máxima restrita e mínimos quadrados generalizados; assim, o preditor aplicado é estimado pelo BLUP.

Na abordagem do presente trabalho, o BLUP foi aplicado ao modelo (eq. 4). Neste caso, o vetor observado b_1 inclui as alturas das árvores amostra e o vetor não observado b_2 inclui os efeitos aleatórios para o nível do grupo em questão. As alturas observadas das árvores amostra do grupo i são inseridas no vetor $\ln(h_i)$ e as predições correspondentes que utilizam apenas a parte fixa do modelo - os diâmetros medidos - no vetor $\widehat{\mu}_i$. Os efeitos aleatórios e as alturas das árvores do grupo são:

$$\begin{bmatrix} b_i \\ \ln(h_i) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & DZ_i' \\ Z_i D & Z_i D Z_i' + R_i \end{bmatrix} \right)$$

e o BLUP para os efeitos aleatórios é

$$\widehat{\alpha}_i = 0 + DZ_i'(Z_i D Z_i' + R_i)^{-1}(\ln(h_i) - \mu_i), \quad (7)$$

e a variância da predição $\widehat{\alpha}_i$ é

$$\text{var}(\widehat{\alpha}_i - b_i) = D - DZ_i'(Z_i D Z_i' + R_i)^{-1}Z_i D \quad (8)$$

onde D , Z_i e R_i são matrizes do modelo (eq. 4).

2.3. Estatísticas para a seleção de modelos

2.3.1. Coeficiente de determinação (R^2)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

em que y_i é o valor observado, $\widehat{y}_i$ é o valor estimado, e $\bar{y}$ é a média amostral. O coeficiente de determinação tem uma interpretação absoluta, pois este expressa a proporção da variação ao redor da média que é explicada pelo modelo candidato.

2.3.1. Fator de Inflação da Variância (FIV)

O FIV representa o incremento da variância devido à presença de multicolinearidade (MONTGOMERY; PECK; VINING, 2012) e pode ser calculado pela seguinte equação:

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

onde p é o número de variáveis preditoras; R_j^2 é o coeficiente de determinação, resultante da regressão de X_j nos outros $p - 1$ regressores.

2.3.2. Critério de Informação de Akaike (AIC)

$$AIC = -2 \ln(L(\theta|y)) + 2k$$

onde $\ln$ é o logaritmo na base neperiana, $L(\theta|y)$ é a log-verossimilhança máxima, e k é o número de parâmetros do modelo. Conforme Akaike (1974, 1981), o valor do AIC é o resultado de relação entre a distância de Kulbach-Leibler e a função de máxima verossimilhança de Fisher para seleção de modelos mais parcimoniosos. Este critério é utilizado para confrontar modelos não hierarquizados considerando-os somente como concorrentes.

2.3.3. Erro padrão do resíduo (RMSE) e erro médio (ME)

O erro padrão do resíduo (RMSE) e erro médio (ME) foram calculados usando todas as predições com o intuito de confrontar a resposta em desempenho da abordagem utilizada, com o aumento do número de árvores de amostra na calibração. O RMSE e ME também foram calculados na escala relativa (%), dividindo-os pelo valor da altura média observada e multiplicando por 100.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_{ij} - \widehat{h}_{ij})^2}{n}}$$

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n (h_{ij} - \widehat{h}_{ij})}{n}$$

em que h_{ij} é o valor observado, $\widehat{h}_{ij}$ é o valor predito, n é o número de observações.

2.3.4. Teste de razão da máxima verossimilhança (TRMV)

Em casos de modelos aninhados ou hierarquizados foi utilizado o teste da razão da máxima verossimilhança (PINHEIRO; BATES, 2000). Sua razão está em confrontar modelos aninhados dois a dois nos quais o seu valor é adquirido pela diferença dos valores da função de máxima verossimilhança dos modelos, sendo que a distribuição de probabilidade utilizada é a qui-quadrado em que o modelo com maior valor da máxima verossimilhança oferece maior precisão e é preferível, uma vez que significativo em um nível $\alpha\%$ de significância.

$$TRMV = 2(\ln L(\hat{\theta}|y_2) - \ln L(\hat{\theta}|y_1))$$

onde $L(\theta|y_2)$ é a log-verossimilhança máxima do modelo 2, ou completo e $L(\theta|y_1)$ é a log-verossimilhança máxima do modelo 1, ou reduzido. Os testes estatísticos propostos foram complementados com as análises gráficas dos resíduos padronizados assim como análise dos valores preditos contra observados.

2.4. Espécie de estudo

2.4.1. Características silviculturais

A teca é uma árvore de grande porte, com folha caduca, de até 45 m de altura e 2,5 m de diâmetro. Casca pálida marrom com sulcos longitudinais rasos em indivíduos jovens e rachado e escamosa em árvores maduras, com 1-1,5 cm de espessura. As ramificações são vigorosas, tetragonais com cicatrizes de folha deprimidas quadrangulares proeminentes (BOURDILLON, 1908).

A espécie cresce bem em solos arenitos porosos, mas permanece atrofiado em quartzito ou arenito duro e metamorfoseado. Também é encontrado em granitos, xistos e outras rochas metamórficas. Além disso, cresce bem no solo rico em calcário (RYAN, 1982). Apesar da espécie exigir solo fértil, a teca é frequentemente plantada em solos altamente lixiviados, ácidos e potencialmente tóxicos ao alumínio (ZHOU et al., 2017). O pH ótimo do solo para clones australianos avaliados por Wehr et al. (2010) foi 6, enquanto a variação entre os clones foi observada para a sensibilidade ao alumínio. Alexander et al. (1987), em um estudo sobre solos em plantações de teca em Kerala, concluíram que cascalho, areia, pH, acidez de troca e bases trocáveis são importantes parâmetros que influenciam a qualidade do local.

A teca é intolerante à sombra e que requer luz solar em todo o ciclo de vida. A sua copa requer livre desenvolvimento de todos os lados para o crescimento adequado (KADAMBI, 1972). A espécie também é muito sensível à competição mútua das raízes (YAMAMOTO; SIMATUPANG; HASHIM, 1998). Em locais mais secos, em particular, a competição por raízes parece limitar a taxa de crescimento antes da competição da copa (BUDIADI; WIDIYATNO; ISHII, 2017). As mudas plantadas são sensíveis à supressão por ervas daninhas e não crescem bem sem capinas repetidas (KOLLERT; KLEINE, 2017).

A *Tectona grandis* L.f. é uma das espécies florestais naturais e manejadas mais importantes da Índia (LONGWOOD, 1962) e também uma das madeiras mais valiosas. É nativa da Índia, Indonésia, Malásia, Myanmar, norte da Tailândia e noroeste do Laos (TANGMITCHAROEN, 1997). Encontra-se em uma variedade de habitats e condições climáticas de áreas áridas com apenas 500 mm de chuva por ano até florestas úmidas com 5.000 mm de chuva por ano (Figura 2).

Figura 1. Mapa de distribuição da *Tectona grandis* L.f. (BISWAS; CHAKRABORTY; BHOWMIK, 2017).

2.4.2. Uso Comercial

De acordo com Relatório Anual 2017 (ano base 2016) da Indústria Brasileira de Árvores (IBÁ, 2017), a área total de plantios florestais comerciais no Brasil totalizou 7,8 milhões de hectares em 2016, tendo um crescimento de 0,5% em relação ao ano de 2015. O mesmo autor afirma que, em 2016, o Produto Interno Bruto (PIB) do setor florestal nacional movimentou R\$71,1 bilhões, representando um aumento de 3,3% em relação ao ano anterior. Quanto ao PIB nacional, no ano de 2016, o setor de árvores plantadas representou 1,1% da riqueza do país e 6,2% do PIB Industrial (IBÁ, 2017). No mesmo ano, o setor gerou cerca de 510 mil empregos diretos e 3,7 milhões indiretos.

Dentre as culturas florestais com grande potencial de retorno financeiro, os plantios comerciais de teca (*Tectona grandis* L.f. - Lamiaceae) são considerados uma alternativa de alto valor agregado (JAYARAMAN; RUGMINI, 2008; KHASANAH et al., 2015). Segundo o relatório da União Internacional de Organizações de Pesquisa Florestal – IUFRO - (2017), entre 2005 e 2014, o comércio anual global de madeira roliça de teca foi, em média, acima de 1 milhão de m³; as importações foram avaliadas em US \$ 487 milhões por ano, o que representa cerca de 3% do valor do comércio mundial de madeira (US \$ 15,5 bilhões). Os três principais países importadores foram a Índia, importando 74% do volume total de comércio de mais de 100 países, seguida pela Tailândia (16% do total de cerca de 15 países) e China (10% do total de cerca de 65 países). As importações de teca para a Tailândia diminuíram consideravelmente nos últimos anos, do ápice de 6,7 milhões de m³ em 2004 para apenas 61.000 m³ em 2014. A China e a Índia, por outro lado, aumentaram seus volumes de importação.

O mesmo estudo da IUFRO (2017) também relata que entre 2005 a 2014, a média anual de comércio global de madeira serrada de teca ficou em torno de 120.000 m³, ou cerca de US \$ 75 milhões. Os cinco principais países importadores foram: China (46% do total), Índia (31%), Tailândia (14%), Taiwan (7%) e Coréia do Sul (2%). Embora o foco de Mianmar no comércio internacional de teca tivesse sido em madeira roliça, as exportações de madeira serrada deste país forneceram, em média, metade do comércio total de madeira serrada (74.000 m³, ou 49%). No entanto, os volumes variaram significativamente entre os países; A China e a Tailândia, por exemplo, importaram mais de 70% de sua madeira serrada de Mianmar, enquanto o país forneceu apenas 2% da madeira serrada da Índia.

O trabalho também informa que os países que competirão com Mianmar no comércio global de teca serrada serão predominantemente da África, onde as exportações aumentaram desde 2008, e da América Latina, onde aumentaram significativamente desde 2010. Os exportadores emergentes são a Tanzânia (2014: 18.000 m³) e Benim (2014: 9.000 m³) na África; Brasil (2014: 10.000 m³) e Costa Rica (2014: 1.000 m³) na América Latina. Recentemente, em 2017, o mercado global de madeira da teca apresentou preços FOB/m³ - *Free On Board* - variando de US \$ 1.690 (serrada) à US \$ 4.240 (tábua) (ITTO, 2017).

A qualidade superior da madeira da teca é essencialmente devido a uma combinação de elementos, tais como a relativa leveza (densidade média de 650 kg/m³), durabilidade muito alta para agentes biológicos e físicos (TONDJO et al., 2015; GUZMÁN; MOYA; MURILLO, 2017), estabilidade extraordinária, propriedades mecânicas e características estéticas atraentes. A propriedade inerente da madeira da teca que a distingue das outras madeiras é devida à presença de vários elementos extrativos ativos incrustados na parede celular. Alguns são venenosos aos ataques cupins e fungos; outros têm propriedades hidrofóbicas (propriedades repelentes de água) devido ao alto conteúdo de lipídios específicos (RUDMAN et al., 1958; YAMAMOTO; SIMATUPANG; HASHIM, 1998).

A madeira da teca é considerada praticamente insubstituível, devido à resistência ao sol, calor, frio e à água do mar e chuva (CAMINO, 2013). A sua madeira é frequentemente preferida para a construção das estruturas expostas, como as embarcações de alto desempenho e indústria naval (VARMOLA; CARLE, 2002). A madeira também tem sido utilizada para uma ampla gama de produtos como vigas, contraplacados e facetas decorativas, moldagem, pavimentos em tiras e blocos, componentes para móveis, portas maciças e portas embutidas, caixilhos de portas e janelas e persianas, tábuas e painéis laminados, peças nobres, ornamentos finos e móveis de luxo, artigos esculpidos, utensílios domésticos e utensílios de cozinha, etc.

A valorização da madeira de teca no mercado internacional indica os seus plantios como significativas fontes de renda e investimentos lucrativos aos seus produtores (AOUDJI et al., 2014; KENNY; PICKENS; ORR, 2014). Além da opção de venda de produtos desde os primeiros desbastes, direcionados especialmente para a energia (CAMINO, 2013), também existe a possibilidade para o mercado de sequestro de carbono (CHATURVEDI; RAGHUBANSHI, 2015; JHA, 2015; QUINTERO-MÉNDEZ; JEREZ-RICO, 2017).

Nos últimos anos, os plantios de teca têm obtido destaque no setor florestal nacional tanto no seu crescimento médio de 33,7% em área (ha) entre os anos de 2010 e 2016 (IBÁ, 2016), quanto na expectativa de retorno dos investimentos em curto e médio prazo (VERSTEEG; HANSEN; POULIOT, 2017). Porém, o manejo da espécie é, frequentemente, fundamentado em informações insuficientes e técnicas ainda inadequados (BUDIADI; WIDIYATNO; ISHII, 2017). Algumas características no manejo da teca também a tornam relativamente heterogênea quando comparadas aos plantios comerciais mais adotados no país, tais como eucalipto e pinus. Dentre estas particularidades, é possível citar: sensibilidade à acidez do solo e adubação (ZHOU et al., 2017), plantios majoritariamente seminais e clonais com pouco tempo de melhoramento genético (KOLLERT; KLEINE, 2017), maior base de conhecimento concentrada nas condições edafoclimáticas da região de origem - sul e sudeste da Ásia - (KAOSA-ARD, 1981), sendo as técnicas de manejo no Brasil relativamente recentes. Devido ao seu

trato silvicultural pouco estudado e somado ao fato de que grande parte dos plantios são seminais, técnicas ideais de manejo devem ser aplicadas. Independentemente do nível de decisão desejada, seja ela estratégica ou operacional, deverá ser embasada em modelos probabilísticos que permitam estimar produções presentes e futuras (PUKKALA; MIINA, 1997). Dessa forma, quanto mais preciso o modelo, mais assertivas serão as escolhas tomadas pelo gestor florestal, sejam elas de ordem econômica, ambiental ou social (MCDILL, 2014; MCROBERTS; WESTFALL, 2016).

3. MATERIAL

3.1. Caracterização da área de estudo

O trabalho foi realizado em povoamentos comerciais seminais de *Tectona grandis* L.f. com 55 meses de idade, localizados em 3 municípios doo estado do Mato Grosso (Figura 1). Os espaçamentos predominantes são 3,0 m x 3,0 m, e 3,0 m x 2,0 m; representando 79% (3.721,5 ha) e 21% (997,3 ha) em hectares, respectivamente. Os dados foram coletados em 166 talhões distribuídos em 11 fazendas (Tabela 1).

O município de Cáceres é situado na região sudoeste de Mato Grosso, entre as latitudes 15° 27' e 17° 37' sul e as longitudes 57° 00' e 58° 48' oeste, a uma altitude de 118 m (IBGE, 2016). O clima, segundo classificação de Köppen (1936), é tropical quente e úmido, com inverno seco (Awa) (NEVES; NUNES; NEVES, 2012). A precipitação total anual é 1.335 mm com o período de maior concentração pluvial média (62,7%) ocorrendo de dezembro a março. A frequência indica que o mês mais chuvoso é janeiro e que o momento de maior estiagem ocorre de junho a agosto, com somente 4,9% do total pluviométrico anual (NEVES; NUNES; NEVES, 2012).

Figura 2. Mapa de localização dos municípios.

O município de Jangada possui clima tropical. Existe mais pluviosidade no verão do que no inverno. Segundo a Köppen e Geiger (1936) a classificação do clima é Aw (ALVARES et al., 2013). A temperatura média é de 24,3°C e a média anual de pluviosidade é de 1.236 mm (NIMER, 1979). No que se refere ao município de Porto Esperidião, este apresenta clima quente-úmido, com 4 a 5 meses secos (NIMER, 1979). A temperatura média anual é aproximadamente de 25°C. Conforme Nimer (1979)

durante a época mais quente (primavera-verão) a temperatura média é de 24° a 26°C, sendo as médias máximas entre 32° a 36°C.

As fazendas deste estudo têm dimensões diferentes e o número de indivíduos amostrados em cada local foi conforme a sua própria área. Este processo produziu uma distribuição desbalanceada da amostra entre as fazendas, além disto, a magnitude de variação das variáveis que compõem o conjunto de dados, utilizados nos ajustes dos modelos, é apresentada na Tabela 1. No que se refere às parcelas, estas possuem forma retangular de 490 m², sendo que em cada foram medidos os diâmetros a 1,30 m de altura (*d*) de todas as árvores, a altura total (*h*) de 15 a 20 árvores iniciais e a altura total de cinco árvores dominantes em cada parcela. Neste trabalho foram utilizadas as alturas das árvores bifurcadas e quebradas.

Tabela 1. Distribuição das árvores nas diferentes fazendas e municípios, e informações sobre o conjunto de dados.

Município	Fazenda	Quantidade (un.)			DAP (cm)			Altura total (m)		
		Talhões	Parcelas	Árvores	Mín.	Méd.	Máx.	Mín.	Méd.	Máx.
Cáceres	1	33	268	3.985	2,5	13,4	23,1	3,2	12,2	17,4
	2	12	93	1.648	8,4	15,4	22,7	5,0	11,5	15,2
Jangada	3	3	23	574	2,7	10,5	17,5	2,7	8,9	13,0
	4	4	17	373	2,8	11,7	18,1	3,5	10,5	14,5
	5	16	53	1.241	2,1	11,0	18,6	3,0	10,2	15,0
	6	10	48	1.073	3,5	13,3	21,0	3,0	11,6	15,0
Porto Esperidião	7	18	106	968	7,3	16,2	23,8	5,7	12,3	16,2
	8	25	154	2.675	2,0	14,1	22,5	2,1	13,4	18,2
	9	14	94	1.226	3,4	14,6	24,5	3,5	12,7	18,5
	10	1	9	75	11,1	15,8	20,1	10,0	12,5	14,0
	11	30	141	2.551	3,0	14,4	24,2	3,5	13,8	18,2
Total		166	1.006	16.389	2,0	13,8	24,5	2,1	12,3	18,5

4. MÉTODOS

4.1. Seleção do modelo de efeito fixo

Para a construção do modelo mais adequado, comparou-se o desempenho de ajuste dos modelos lineares e não lineares listados na Tabela 2 para descrevem a altura total (h) de árvores individuais em função do diâmetro à altura do peito (d). Uma vez que a predição de efeitos aleatórios é mais conveniente usando os modelos lineares, os modelos foram linearizados por meio de transformação adequada.

Tabela 2. Funções de diâmetro-altura aplicadas.

Nº	Modelo	Forma de estimação	Forma preditiva	Referência
1	Polinômio de 1º grau	$h = \beta_0 + \beta_1 d + \varepsilon$	-	-
2	Polinômio de 2º grau	$h = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2 + \varepsilon$	-	-
3	Hiperbólico	$\frac{1}{h} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{d}\right) + \beta_2 \left(\frac{1}{d^2}\right) + \varepsilon$	$\hat{h} = \frac{d^2}{\beta_0 d^2 + \beta_1 d + \beta_2}$	-
4	Potência 1	$\ln\left(\frac{1}{h}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \beta_2 \ln^2(d) + \varepsilon$	$\hat{h} = \frac{d^{-(\beta_1 + \beta_2 \ln(d))}}{e^{\beta_0}}$	-
5	Potência 2	$\ln\left(\frac{1}{h}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(\frac{d}{1+d}\right) + \varepsilon$	$\hat{h} = \frac{1}{e^{\beta_0} \left(\frac{d}{1+d}\right)^{\beta_1}}$	-
6	Semilogarítmico	$h = \beta_0 + \beta_1 \ln(d^*) + \varepsilon$	$\hat{h} = \beta_0 + \beta_1 \ln(d^*)$	-
7	Schumacher	$\ln(h) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{d}\right) + \varepsilon$	$\hat{h} = e^{\beta_0} e^{\beta_1 d^{-1}}$	Schumacher (1939)
8	Näslund	$\frac{d}{\sqrt{h}} = \beta_0 + \beta_1 d + \varepsilon$	$\hat{h} = \frac{d^2}{(\beta_0 + \beta_1 d)^2}$	Näslund (1936)
9	Curtis	$\ln\left(\frac{h}{d}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(1+d) + \varepsilon$	$\hat{h} = d(e^{\beta_0}(1+d)^{\beta_1})$	Curtis (1967)
10	Power	$\ln(h) = \beta_0 + \beta_1 \ln(d) + \varepsilon$	$\hat{h} = e^{\beta_0} d^{\beta_1}$	Stoffels e van Soest (1953)
11	Wykoff	$\ln(h) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1+d}\right) + \varepsilon$	$\hat{h} = e^{\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1+d}\right)}$	Wykoff et al. (1982)

Nota: h – altura da árvore; $\hat{h}$ – altura predita; d – diâmetro à altura do peito; $d^* = e^{\frac{h-\beta_0}{\beta_1}}$; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ – parâmetros estimados; ε – componente estocástico do modelo; $\ln$ – logaritmo natural ou neperiano.

4.2. Validação com dados empíricos

Na calibração foi realizado um procedimento de validação cruzada aplicada ao conjunto de dados descrito anteriormente. Nesta etapa, dentre o conjunto de grupos disponíveis, um particular grupo i é separado por vez do conjunto de dados. A implementação consiste em três etapas: (i) ajuste dos modelos das equações 4 e o mais apropriado em meio as equações 5, 6 e 7 ao conjunto de dados, (ii) calibração do modelo com um número crescente de amostras – de 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80% e 90% - de árvores escolhidas aleatoriamente do grupo i , retirada do conjunto de dados e (iii) a predição da altura para as árvores do grupo i que não foram utilizados na fase de calibração e (iv) avaliação das predições contra as alturas reais. Com o intuito de cumprir o objetivo deste trabalho, a aplicação das duas primeiras fases foi feita por meio da abordagem de calibração apresentada anteriormente. Os tópicos a seguir apresentam essas etapas com um diagnóstico mais aprofundado.

4.2.1. Ajuste

Com as árvores de todos os níveis do grupo, exceto as do grupo i retirado, um modelo linear de efeito fixo (modelo marginal) é ajustado por meio de máxima verossimilhança restrita. Neste método, as estimativas de β_0 , β_1 , para a eq. 9 são obtidas. Com as mesmas árvores, o modelo linear de efeitos mistos foi ajustado utilizando máxima verossimilhança restrita. Este ajuste foi realizado por meio da função *lme* do pacote *nlme* criado por Jose Pinheiro, Douglas Bates, Saikat DebRoy, Deepayan Sarkar (PINHEIRO et al., 2018), disponível no software R. Isso resulta nas estimativas dos parâmetros fixos (β_0 e β_1), as variâncias e covariâncias dos efeitos aleatórios $\text{var} \begin{bmatrix} \alpha_{0i} \\ \alpha_{1i} \end{bmatrix}$, e na variância do resíduo $\text{var}(\epsilon_i)$ das eq. 10, 11 e 12.

4.2.2. Calibração

Quanto à calibração, os efeitos aleatórios dos modelos de efeitos mistos foram preditos usando um pequeno número de árvores-amostra do grupo i que não foi utilizada na estimação do modelo. As árvores do grupo em questão foram amostradas com as mesmas porcentagens por parcela, desta forma, os resultados são diretamente proporcionais à quantidade de alturas medidas em cada parcela. Este processo foi reproduzido cinco mil vezes, para minimizar a influência dos erros de amostragem nos resultados finais. Os modelos se tornam calibrados, adicionando os valores preditos dos efeitos aleatórios às estimativas de parâmetros fixos da eq. 9. As funções *group_by* e *sample_frac*, do pacote *dplyr* (WICKAM et al., 2017), foram utilizadas para o agrupamento e amostragem em porcentagem, respectivamente.

4.2.3. Predição

Nesta terceira etapa, foram utilizados os modelos marginais, a parte fixa dos modelos de efeitos mistos, e os modelos calibrados, para prever as alturas das árvores do grupo i , que não foram

utilizadas na fase de calibração. Com o intuito de equipara a comparação entre as alturas preditas e alturas observadas, as alturas preditas foram transformadas de volta para a escala original.

5. RESULTADOS

Dentre os onze modelos escolhidos na literatura, o modelo de Wykoff obteve melhor desempenho nos critérios de avaliação de modelos lineares (Tabela 3) e nos gráficos de dispersão dos resíduos (Figura 2). Uma vez que a Tabela 3 está ordenada pelo menor valor de erro padrão do resíduo (RMSE) e, em seguida, o maior valor do coeficiente de determinação (R^2), os dois primeiros modelos ranqueados não foram escolhidos por apresentarem altos valores de fator de inflação da variância (FIV). Isto ocorreu devido aos preditores serem correlacionados tanto no Polinômio de 2º grau quanto no modelo Potência 1; deste modo podendo prejudicar a predição. Quanto à classificação, os dois modelos seguintes apresentaram valores de R^2 e RMSE muito próximos. No entanto, o modelo Potência 2 também foi desprezado por apresentar transformação linear tanto nas variáveis preditoras quanto na variável resposta, enquanto o Wykoff apenas na variável resposta.

Tabela 3. Avaliação de desempenho dos modelos lineares na escala original.

Modelo	R^2	RMSE	FIV
Polinômio de 2º grau	59,7	1,57	32,8
Potência 1	59,2	1,58	85,9
Potência 2	59,2	1,58	-
Wykoff	59,2	1,58	-
Schumacher	59,1	1,58	-
Semilogarítmico	59,1	1,58	-
Näslund	58,5	1,60	-
Hiperbólico	56,3	1,64	7,8
Polinômio de 1º grau	55,5	1,65	-
Curtis	55,3	1,66	-
Power	54,9	1,66	-

Nota: R^2 – Coeficiente de determinação; RMSE - Erro padrão do resíduo; FIV - Fator de inflação da variância.

Figura 3. Gráficos de distribuição de resíduos versus valores ajustados dos modelos fixos testados.

Por apresentar melhor aderência ao ajuste dos dados na relação diâmetro-altura (Tabela 3 e Figura 3), o modelo linear de Wykoff et al. (1982) foi escolhido para predição. A sua forma para as j -ésima árvore

$$\ln(h_j) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_j} \right) + \epsilon_j, \quad (9)$$

onde h_j é a altura total da árvore (metros); d_j é o diâmetro à altura do peito (cm), β_0 e β_1 são os parâmetros do modelo e ϵ_j é o erro aleatório residual com $\epsilon_j \sim (0, \sigma^2)$. Esta equação é citada como base do presente trabalho toda vez que se tratar de modelo linear quanto às predições sobre a média marginal. Ainda assim, esta expressão não é tratada como uma versão acabada, uma vez que ignora os agrupamentos dos dados, ora chamados de unidades administrativas.

Para identificar qual grupo i (nível hierárquico) apresenta maior efeito aleatório para posterior uso com o modelo de efeito misto, os dados foram particionados de acordo com os níveis do fator de agrupamento i e foram obtidos ajustes lineares individuais para cada partição de dados, usando o modelo definido na eq. 9. Quando comparados com o ajuste único para todos os dados, o grupo Parcela obteve 51% de redução no valor do RMSE médio (Tabela 4), seguido pelo grupo Talhão (36%). No presente estudo, optou-se por utilizar esses dois grupos no ajuste do modelo de efeito misto. As estimativas de parâmetro para o modelo de efeito misto (eq. 10), ajustados ao conjunto de dados descrito na seção 4.2 são descritas na Tabela 5.

Tabela 4. Avaliação do RMSE médio por agrupamento.

Grupo i	RMSE médio (m)	Redução (%)
Ajuste único	1,5803	-
Município	1,4835	5,30
Fazenda	1,2826	16,06
Talhão	1,0356	31,95
Parcela	0,7562	48,61

Tabela 5. Estimativas dos parâmetros do modelo de efeito misto ajustado por grupo.

Parâmetros	Estimativas do modelo			
	Município	Fazenda	Talhão	Parcela
$\widehat{\beta}_0$	3,0781	3,0594	2,9904	2,9022
$\widehat{\beta}_1$	-9,8913	-9,9827	-8,7356	-7,5092
$\widehat{var}(\alpha_{0i})$	0,1241 ²	0,1899 ²	0,2713 ²	0,2833 ²
$\widehat{var}(\alpha_{1i})$	0,0054 ²	0,0097 ²	0,0154 ²	0,0140 ²
$\widehat{var}(\epsilon_{ji})$	0,1511 ²	0,1343 ²	0,1095 ²	0,0837 ²

A equação 4 agora é tratada como um modelo marginal que possui uma parte fixa com alguns parâmetros podendo mudar conforme o agrupamento escolhido. Esta condição é suficiente para o ajuste do modelo linear de efeitos mistos para a predição das alturas h_{ij} . Na construção do modelo, foram verificadas diversas disposições dos parâmetros para assumir a parte aleatória. A seleção do modelo de efeitos mistos final ocorreu por meio dos valores do critério de informação de Akaike – AIC

(AKAIKE, 1974) – (Tabela 6) e do teste de razão de verossimilhança – TRMV (PINHEIRO; BATES, 2000) – (Tabela 7). Portanto, o modelo linear de efeitos mistos para a árvore j dos grupos i são

$$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \epsilon_{ij}, \quad (10)$$

$$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{0i} + \epsilon_{ij}, \quad (11)$$

$$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{1i} \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \epsilon_{ij}, \quad (12)$$

onde a equação 5 é o modelo completo – intercepto e inclinação aleatórios -, equação 6 é o modelo com o intercepto aleatório e, equação 7, modelo com a inclinação sob efeito aleatório; por fim, α_{0i} e α_{1i} são os normalmente distribuídos efeitos aleatórios em nível do grupo escolhido.

Tabela 6. Valores do critério de informação de Akaike para assumir a parte aleatória.

Equação	Graus de liberdade	AIC
$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \epsilon_{ij}, (5)$	6	-30.098,37
$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{0i} + \epsilon_{ij}, (6)$	4	-28.773,40
$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{1i} \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \epsilon_{ij}, (7)$	4	-26.136,42

Tabela 7. Teste de razão de verossimilhança para assumir a parte aleatória.

Equação	G.I.	AIC	logLik	L.Ratio	p-value
$\ln(h_j) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_j} \right) + \epsilon_j, (4)$	3	-13.554,76	6.780,38		
$\ln(h_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \left(\frac{1}{1 + d_{ij}} \right) + \epsilon_{ij}, (5)$	6	-30.098,37	15.055,18	16.549,61	<0,0001

Nota: G.I. – Graus de liberdade; logLik – Log-verossimilhança; L.Ratio – Razão de verossimilhança.

A Figura 3 mostra os resultados da validação cruzada nas escalas percentuais e métricas. Nos ajustes por talhão (AT), e por parcela (AP), o procedimento de calibração foi eficaz. A predição calibrada tem um desempenho melhor do que a parte fixa do modelo mesmo com a diminuição do número de árvores para ajuste e consequente aumento do número de alturas para predizer. Enquanto que o RMSE relativo das predições feitas com a parte fixa do modelo misto não supera 15%, o modelo calibrado menos eficiente apresenta valores próximos de 10,2% (Figura 3a). Este desempenho superior do modelo calibrado também foi observado na etapa de validação de equações hipsométricas para diferentes espécies arbóreas (CASTEDO DORADO et al., 2006; SHARMA; PARTON, 2007; CRECENTE-CAMPO et al., 2010).

Devido a influência do efeito aleatório no modelo misto é possível perceber que diferença preditiva entre os modelos AP e AT é maior no modelo calibrado que na parte fixa do modelo misto (Figura 3a). No entanto, esta diferença praticamente se anula quando o tamanho da amostra de ajuste é 90% retirado, restando 10% das alturas para a predição. Além disso, em razão do maior efeito aleatório no grupo parcela (AP), maiores as diferenças dos valores de RMSE e ME entre o modelo calibrado e a parte fixa do modelo misto (Figura 3a e 3b). As maiores diferenças aconteceram com 20% e 10% das amostras de ajuste retiradas, sendo o modelo calibrado responsável pela redução de cerca de 47% no RMSE e 88% no ME, respectivamente.

Entre 10% à 50% da amostra retirada por parcela, o procedimento de calibração também manteve os valores do ME do modelo calibrado abaixo dos valores de ME da parte fixa do modelo misto (Figura 3b). No modelo calibrado, o comportamento do ME apresenta uma ligeira tendência de superestimativa mas sempre com valores relativos muito baixos. O erro médio não foi completamente retirado, entretanto, o ME restante de cerca de 0,5% é admissível. Isto significa dizer que o modelo calibrado praticamente extinguiu a diferença entre o valor observado e o valor predito, isto é, melhorou consideravelmente a precisão nas predições. Um comportamento semelhante também foi observado em outros estudos (ROBINSON; WYKOFF, 2004; TEMESGEN; MONLEON; HANN, 2008; CRECENTE-CAMPO et al., 2010).

Figura 4. Efeito do tamanho da amostra de calibração no RMSE e ME absoluto e relativo na predição de altura.

6. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

O estudo apresentou uma modelagem com modelos de efeitos mistos, visando melhorar a qualidade das predições de altura em plantios comerciais de *Tectona grandis* L.f. A primeira fase do trabalho foi identificar o modelo de efeito fixo mais apropriado para o ajuste dos dados. A qualidade desta seleção se ateve às informações práticas de aplicação, tais como o RMSE e o coeficiente de determinação. Segundo Lappi (1988) esta fase é essencial para a garantia de que um potencial ganho de precisão do efeito aleatório se sobressaia ao desempenho já oferecido por um eventual modelo de efeito fixo não testado. No presente estudo o modelo de Wykoff foi eleito com um desempenho muito próximo a outro modelo candidato frequentemente empregado na relação hipsométrica: Schumacher. Como o ajuste foi aplicado a todos os dados, este fato sugere que em determinadas unidades administrativas, como uma fazenda por exemplo, outro modelo pode assumir a parte fixa do modelo de efeito misto.

Uma vez eleito o modelo de efeito fixo mais apropriado, a segunda fase do trabalho avaliou quais as possíveis combinações entre os coeficientes (eq. 10, 11 e 12) que apresentam maior efeito aleatório. Na prática, de acordo com Fang e Bailey (2001), esta etapa é importante na identificação de quais coeficientes são capazes de transferir para si a aleatoriedade (valor do desvio padrão) do erro aleatório residual (ϵ_{ij}), desde que apresentasse aceitável correlação entre os coeficientes e respeitasse o princípio da parcimônia. Neste trabalho, o intercepto e inclinação foram selecionados como aleatórios. No modelo completo (β_0 e β_1 aleatórios), agrupado por parcela, a contribuição da inclinação do modelo foi pequena (desvio padrão = 0,01) enquanto que do intercepto foi de 0,28. Além disso, a correlação entre os coeficientes da parte aleatória foi alta (-0,904).

A etapa seguinte procurou avaliar como se apresentavam os efeitos aleatórios nos diferentes níveis hierárquicos dos dados, neste caso as unidades administrativas, conforme o seu desempenho no ajuste e predição do modelo de efeito misto. Com essa análise é possível direcionar o enfoque do profissional responsável pelo manejo florestal para uma determinada unidade administrativa com vistas em diminuir o número de medições em campo e manter, ou eventualmente melhorar, a precisão da modelagem. Este estudo pôde indicar que tanto o ajuste da parte fixa do modelo misto, quanto o modelo calibrado, realizados em nível de talhão tem aproximadamente o mesmo desempenho preditivo que o ajuste por parcela. Isto indica que é possível a utilização de menos árvores para se alcançar a mesma precisão na predição de altura, desde que se tenha uma boa base de dados para compor o ajuste por talhão. Em situações como esta, a estrutura dos dados também permite um próximo estudo verificando como seria o desempenho do modelo de efeito misto na predição de volume individual em diferentes níveis hierárquicos.

Por fim, a última fase testou a capacidade preditiva dos modelos ajustados com o auxílio de procedimentos de simulação e validação cruzada. Segundo Temesgen et al. (2008) e Robinson et al. (2004), isto permite uma aplicação prática do conceito teórico envolvendo modelos de efeitos mistos. Com a diminuição gradativa, em porcentagem, de árvores por parcela disponíveis para ajuste e verificando o desempenho preditivo por meio do RMSE e ME, é possível visualizar potenciais situações em que o menor número de observações pouco prejudica a predição. Nestes casos, a rotina de

medição em campo pode dimensionar quantas alturas à menos podem ser tomadas, resultando no aumento do rendimento de medição de parcelas. Quando verificados os valores de RMSE e ME proporcionados entre a parte fixa do modelo misto e o modelo calibrado, o presente estudo indica que os maiores ganhos de precisão estão nas menores retiradas (10% a 40%) do número de observações para ajuste por parcela (AP) com uma redução média de cerca de 47% e 86%, respectivamente. No AT, os valores foram de 34% (RMSE) e 75% (ME). Contudo, numa situação real de inventário florestal, o responsável pelo planejamento florestal pode optar por trabalhar com alturas medidas por parcela na proporção entre 80% e 90%, acrescido do ajuste por talhão. Isto se deve ao afunilamento das diferenças dos valores de RMSE (%) e ME (%) no AT e AP entre os modelos calibrados à medida que se diminui a amostra de ajuste. Desta forma, retirando a necessidade de ajuste por parcela. Por exemplo: em uma parcela de 490 m², com espaçamento 3 x 3 m, divide-se as 54 árvores em 5 (10%) com medição da altura em campo e 49 (90%) para predição.

Após as etapas descritas, é possível concluir que o modelo de efeito misto mostrou-se eficaz para melhorar a precisão da predição de altura. O processo de calibração sempre reduziu os valores de RMSE e ME, tornando o modelo calibrado melhor que o modelo correspondente sem calibração. Os gráficos de RMSE e ME (Figura 3) mostram que o procedimento para calibração foi efetivo em todas as simulações de retirada de árvores.

Um fato pouco comum pode ser percebido na Figura 3a e 3b. Embora o processo de amostragem, na calibração, tenha sido reproduzido cinco mil vezes, para minimizar a influência dos erros de amostragem nos resultados finais, a parte fixa do modelo misto apresentou gradualmente uma leve melhora de RSME e ME na medida em que se aproxima de 90% da amostra retirada para ajuste por parcela (AP) – 10% para ajustar o modelo e 90% para predizer as alturas. Uma explicação razoável para este caso pode ser encontrada na escala de valores (em metros) da altura. Por ser tratar de diferenças na segunda casa decimal, a aparente melhora pode ser considerada inexpressiva em termos práticos pois corresponde à centímetros de altura de uma medição indireta.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716–723, dez. 1974. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1100705/>>.
- AKAIKE, H. Likelihood of a model and information criteria. **Journal of Econometrics**, v. 16, n. 1, p. 3–14, maio 1981. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0304407681900713>>.
- ALEXANDER, T. G.; SANKAR, S.; BALAGOPALAN, M.; THOMAS, T. P. **Soil in teak plantations of different site quality** **KFRI Research Report**. Peechi: Kerala Forest Research Institute, 1987. .
- ALVARES, C. A.; STAPE, J. L.; SENTELHAS, P. C.; DE MORAES GONÇALVES, J. L.; SPAROVEK, G. Köppen's climate classification map for Brazil. **Meteorologische Zeitschrift**, v. 22, n. 6, p. 711–728, 1 dez. 2013. Disponível em: <http://www.schweizerbart.de/papers/metz/detail/22/82078/Koppen_s_climate_classification_map_for_Brazil?af=crossref>.
- AUDOU, A. K. N.; ADÉGBIDI, A.; GANGLO, J. C.; LEBAILLY, P. Planting teak, *Tectona grandis* L.f., in smallholder farming systems in Southern Benin. **Bois et Forêts des Tropiques**, n. 319, p. 7–17, 2014. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/2268/168291>>.
- ARIAS-RODIL, M.; CASTEDO-DORADO, F.; CÁMARA-OBREGÓN, A.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. Fitting and calibrating a multilevel mixed-effects stem taper model for maritime pine in NW Spain. **PLoS ONE**, v. 10, n. 12, p. 1–20, 2015a.
- ARIAS-RODIL, M.; DIÉGUEZ-ARANDA, U.; RODRÍGUEZ PUERTA, F.; LÓPEZ-SÁNCHEZ, C. A.; CANGA LÍBANO, E.; CÁMARA OBREGÓN, A.; CASTEDO-DORADO, F. Modelling and localizing a stem taper function for *Pinus radiata* in Spain. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 45, n. 6, p. 647–658, jun. 2015b. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/cjfr-2014-0276>>.
- BEAL, S. L.; SHEINER, L. B. Estimating Population Kinetics. **Critical reviews in biomedical engineering**, v. 8, n. 3, p. 195–222, 1982. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/6754254>>.
- BISWAS, S. M.; CHAKRABORTY, N.; BHOWMIK, P. C. Cuticular Wax of *Tectona grandis* L. Leaves – A Resistance Marker against Plant Pathogens. **Biochemistry & Analytical Biochemistry**, v. 06, n. 03, 2017. Disponível em: <<https://www.omicsonline.org/open-access/cuticular-wax-of-tectona-grandis-l-leaves--a-resistance-markeragainst-plant-pathogens-2161-1009-1000330.php?aid=92875>>.
- BOHORA, S. B.; CAO, Q. V. Prediction of tree diameter growth using quantile regression and mixed-effects models. **Forest Ecology and Management**, v. 319, p. 62–66, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.foreco.2014.02.006>>.
- BOURDILLON, T. F. **The forest trees of Travancore**. Trivandrum: Printed at the Travancore government Press, 1908.
- BUDIADI; WIDIYATNO; ISHII, H. Response of a clonal teak plantation to thinning and pruning in Java, Indonesia. **Journal of Tropical Forest Science**, v. 29, n. 1, p. 44–53, 2017. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/44028274>>.
- CALAMA, R.; MONTERO, G. Interregional nonlinear height-diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 34, n. 1, p. 150–163, jan. 2004. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/x03-199>>.
- CALEGARIO, N.; DANIELS, R. F.; MAESTRI, R.; NEIVA, R. Modeling dominant height growth based on nonlinear mixed-effects model: a clonal *Eucalyptus* plantation case study. **Forest Ecology and Management**, v. 204, n. 1, p. 11–21, 3 jan. 2005. Disponível em:

<<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S037811270400578X>>.

CAMINO, R. de. **Las plantaciones de teca en América Latina: mitos y realidades**. Turrialba, Costa Rica: CASTIE & FAO, 2013.

CAO, Q. V.; WANG, J. Calibrating fixed- and mixed-effects taper equations. **Forest Ecology and Management**, v. 262, n. 4, p. 671–673, 2011.

CAO, Q. V.; WANG, J. Evaluation of methods for calibrating a tree taper equation. **Forest Science**, v. 61, n. 2, p. 213–219, 2015.

CASTEDO DORADO, F.; DIÉGUEZ-ARANDA, U.; BARRIO ANTA, M.; SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, M.; VON GADOW, K. A generalized height–diameter model including random components for radiata pine plantations in northwestern Spain. **Forest Ecology and Management**, v. 229, n. 1–3, p. 202–213, jul. 2006. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378112706002465>>.

CHATURVEDI, R. K.; RAGHUBANSHI, A. S. Allometric Models for Accurate Estimation of Aboveground Biomass of Teak in Tropical Dry Forests of India. **Forest Science**, v. 61, n. 5, p. 938–949, 30 out. 2015. Disponível em: <<http://openurl.ingenta.com/content/xref?genre=article&issn=0015-749X&volume=61&issue=5&page=938>>.

COBLE, D.; LEE, Y. A Mixed-Effects Height-Diameter Model for Individual Loblolly and Slash Pine Trees in East Texas. **Southern Journal of Applied Forestry**, v. 35, n. 1, 2011. Disponível em: <<http://www.ingentaconnect.com/content/saf/sjaf/2011/00000035/00000001/art00003>>.

CRECENTE-CAMPO, F.; TOMÉ, M.; SOARES, P.; DIÉGUEZ-ARANDA, U. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for Eucalyptus globulus L. in northwestern Spain. **Forest Ecology and Management**, v. 259, n. 5, p. 943–952, 2010.

CURTIS, R. O. **Height-Diameter and Height-Diameter-Age Equations For Second-Growth Douglas-Fir Forest**. **Science**, 1967. Disponível em: <<http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/1967/00000013/00000004/art00007>>.

DE-MIGUEL, S.; GUZMÁN, G.; PUKKALA, T. A comparison of fixed- and mixed-effects modeling in tree growth and yield prediction of an indigenous neotropical species (*Centrolobium tomentosum*) in a plantation system. **Forest Ecology and Management**, v. 291, p. 249–258, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.foreco.2012.11.026>>.

DE-MIGUEL, S.; MEHTÄTALO, L.; DURKAYA, A. Developing generalized, calibratable, mixed-effects meta-models for large-scale biomass prediction. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 44, n. 6, p. 648–656, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1139/cjfr-2013-0385>>.

ERCANLI, I. Nonlinear mixed effect models for predicting relationships between total height and diameter of oriental beech trees in Kestel, Turkey. **Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente**, v. 21, n. 2, p. 185–202, 2015. Disponível em: <http://www.chapingo.mx/revistas/forestales/contenido.php?id_articulo=1991&id_revistas=3>.

FANG, Z.; BAILEY, R. L. **Nonlinear Mixed Effects Modeling for Slash Pine Dominant Height Growth Following Intensive Silvicultural Treatments**. **Forest Science**, 2001. Disponível em: <<http://www.ingentaconnect.com/content/saf/fs/2001/00000047/00000003/art00002>>.

FORTIN, M.; MANSO, R.; CALAMA, R. Hybrid estimation based on mixed-effects models in forest inventories. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 46, n. 11, p. 1310–1319, 2016. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/cjfr-2016-0298>>.

FU, L. Y.; ZENG, W. S.; TANG, S. Z.; SHARMA, R. P.; LI, H. K. Using linear mixed model and dummy variable model approaches to construct compatible single-tree biomass equations at different scales - A case study for Masson pine in Southern China. **Journal of Forest Science**, v. 58, n. 3, p. 101–115, 2012.

GÓMEZ-GARCÍA, E.; DIÉGUEZ-ARANDA, U.; ÖZÇELİK, R.; SAL-CANDO, M.; CASTEDO-DORADO, F.; CRECENTE-CAMPO, F.; CORRAL-RIVAS, J. J.; ARIAS-RODIL, M. Desarrollo de una función de perfil mediante modelos mixtos para *Pinus sylvestris* en Turquía: selección de parámetros fijos a expandir. **Bosque**, v. 37, n. 1, p. 159–167, 2016a.

GÓMEZ-GARCÍA, E.; FONSECA, T. F.; CRECENTE-CAMPO, F.; ALMEIDA, L. R.; DIÉGUEZ-ARANDA, U.; HUANG, S.; MARQUES, C. P. Height-diameter models for maritime pine in Portugal: A comparison of basic, generalized and mixed-effects models. **IForest**, v. 9, n. Feb 2016, p. 72–78, 2016b.

GUANGYI, M.; YUJUN, S.; HAO, X.; DE-MIGUEL, S. A mixed-effects model with different strategies for modeling volume in *Cunninghamia lanceolata* plantations. **PLoS ONE**, v. 10, n. 10, p. 1–14, 2015.

GUZMÁN, N.; MOYA, R.; MURILLO, O. Evaluation of Bent Trees in Juvenile Teak (*Tectona grandis* L.f.) Plantations in Costa Rica: Effects on Tree Morphology and Wood Properties. **Forests**, v. 8, n. 3, p. 79, 14 mar. 2017. Disponível em: <<http://www.mdpi.com/1999-4907/8/3/79>>.

HAO, X.; YUJUN, S.; XINJIE, W.; JIN, W.; YAO, F. Linear mixed-effects models to describe individual tree crown width for China-fir in Fujian province, southeast China. **PLoS ONE**, v. 10, n. 4, p. 1–14, 2015.

IBÁ. **Relatório Anual 2016**. 1ª ed. Brasília: Indústria Brasileira de Árvores, 2016.

IBÁ. **Relatório 2017 Indústria Brasileira de Árvores**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <http://iba.org/images/shared/Biblioteca/IBA_RelatorioAnual2017.pdf>.

IBGE. **IBGE | Cidades | Infográficos | Mato Grosso | Cáceres | Dados Gerais**. Disponível em: <<http://cidades.ibge.gov.br/painel/painel.php?codmun=510250>>. Acesso em: 14 maio. 2017.

ITTO. ITTO Tropical Timber Market (TTM) Report. **ITTO Market Information Service**, v. 21, n. 9, p. 23, 2017. Disponível em: <https://www.itto.int/files/user/mis/MIS_1-15_May2017.pdf>.

JAYARAMAN, K.; RUGMINI, P. Optimizing management of even-aged teak stands using growth simulation model: a case study in Kerala. **Journal of Tropical Forest Science**, v. 20, n. 1, p. 19–28, 2008. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/23616484>>.

JHA, K. K. Carbon storage and sequestration rate assessment and allometric model development in young teak plantations of tropical moist deciduous forest, India. **Journal of Forestry Research**, v. 26, n. 3, p. 589–604, 28 set. 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11676-015-0053-9>>.

KADAMBI, K. **Silviculture and Management of Teak**. [s.l.] Stephen F. Austin State University, School of Forestry, 1972.

KAOSA-ARD, A. Teak (*Tectona grandis* Linn. f): its natural distribution and related factors. **Nat. His. Bulletin Siam Soc.**, v. 29, p. 55–74, 1981.

KENNY, A. L.; PICKENS, J. B.; ORR, B. Land Allocation with the Introduction of Teak: A Case Study of Smallholder Farms in Southern Togo. **Journal of Sustainable Forestry**, v. 33, n. 8, p. 776–795, 17 nov. 2014. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10549811.2014.925810>>.

KERSHAW, J. A.; DUCEY, M. J.; BEERS, T. W.; HUSCH, B. **Forest Mensuration**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2016. v. 24

KHASANAH, N.; PERDANA, A.; RAHMANULLAH, A.; MANURUNG, G.; ROSHETKO, J. M.; VAN NOORDWIJK, M. Intercropping teak (*Tectona grandis*) and maize (*Zea mays*): bioeconomic trade-off analysis of agroforestry management practices in Gunungkidul, West Java. **Agroforestry Systems**, v. 89, n. 6, p. 1019–1033, 31 dez. 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10457-015-9832-8>>.

KOLLERT, W.; KLEINE, M. **The Global Teak Study: Analysis, Evaluation and Future Potential of Teak Resources**. Vienna, Austria: International Union of Forest Research Organizations (IUFRO), 2017. Disponível em:

<http://www.itto.int/direct/topics/topics_pdf_download/topics_id=5165&no=1&disp=inline>.

KÖPPEN, W. Das geographische system der klimate. In: KÖPPEN, W.; GEIGER, R. (Ed.). **Handbuch der klimatologie**. 1. ed. Berlin: Gebruder Borntraeger, 1936. p. 44.

LAAR, A. van; AKÇA, A. **Forest Mensuration**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. v. 13

LANDSBERG, J. Modelling forest ecosystems: state of the art, challenges, and future directions. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 33, n. 3, p. 385–397, mar. 2003. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/abs/10.1139/x02-129>>.

LAPPI, J. Calibration of Height and Volume Equations with Random Parameters. **Forest Science**, v. 37, n. 3, p. 781–801, 1991.

LAPPI, J. A longitudinal analysis of height/diameter curves. **Forest Science**, v. 43, n. 4, p. 555–570, 1997. Disponível em: <<https://academic.oup.com/forestscience/article-abstract/43/4/555/4627445>>.

LAPPI, J.; BAILEY, R. L. A height prediction model with random stand and tree parameters: an alternative to traditional site index methods. **Forest Science**, v. 34, n. 4, p. 907–927, 1988.

LONGWOOD, F. R. Present and potential commercial timbers of the caribbean with special reference to the West Indies, The Guianas, and British Honduras. **U.S. Department of Agriculture - Forest Service**, n. USDA Agricultural Handbook N° 207, p. 167, 1962. Disponível em: <<https://naldc.nal.usda.gov/naldc/download.xhtml?id=CAT87208418&content=PDF>>.

MCDILL, M. E. An Overview of Forest Management Planning and Information Management. In: **The Management of Industrial Forest Plantations: Theoretical Foundations and Applications, Managing Forest Ecosystems**. [s.l.] Springer Science & Business, 2014. p. 27–59.

MCROBERTS, R. E.; WESTFALL, J. A. Propagating uncertainty through individual tree volume model predictions to large-area volume estimates. **Annals of Forest Science**, v. 73, n. 3, p. 625–633, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s13595-015-0473-x>>.

MEHTÄTALO, L.; GREGOIRE, T. G.; DE-MIGUEL, S. Modeling height-diameter curves for prediction. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 837, n. April, p. 150409143753006, 2015. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/eprint/qxpbPXJ6Hzyakb5E25VY/full#.VXbvXry350w>>.

MEHTÄTALO, L.; PELTOLA, H.; KILPELAINEN, A.; IKONEN, V. P. The response of basal area growth of scots pine to thinning: A longitudinal analysis of tree- specific series using a nonlinear mixed-effects model. **Forest Science**, v. 60, n. 4, p. 636–644, 2014.

MENG, S. X.; HUANG, S.; YANG, Y.; TRINCADO, G.; VANDERSCHAAF, C. L. Evaluation of population-averaged and subject-specific approaches for modeling the dominant or codominant height of lodgepole pine trees. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 39, n. 6, p. 1148–1158, jun. 2009. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/abs/10.1139/X09-039>>.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to Linear Regression Analysis**. [s.l.] Wiley, 2012.

NÄSLUND, M. **Skogsförsöksanstaltens gallringsförsök i tallskog**. [s.l.: s.n.].

NEVES, S. M. A. da S.; NUNES, M. C. M.; NEVES, R. J. Caracterização das condições climáticas de Cáceres/MT Brasil, no período de 1971 a 2009: subsídio às atividades agropecuárias e turísticas municipais. **Boletim Goiano de Geografia**, v. 31, n. 2, 12 jan. 2012. Disponível em: <<http://www.revistas.ufg.br/index.php/bgg/article/view/16845>>.

NIMER, E. **Climatologia do Brasil**. [s.l.] Superintendência de Recursos Naturais e Meio Ambiente SUPREN, 1979.

PENG, C. Growth and yield models for uneven-aged stands: past, present and future. **Forest Ecology**

and **Management**, v. 132, n. 2–3, p. 259–279, jul. 2000. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378112799002297>>.

PINHEIRO, J.; BATES, D.; DEBROY, S.; SARKAR, D.; R CORE TEAM. **nlme: Linear and Nonlinear Mixed Effects Models**, 2018. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/package=nlme>>.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-Effects Models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000.

PRODAN, M. **Forest Biometrics**. [s.l.] Pergamon, 1968.

PUKKALA, T.; MIINA, J. A method for stochastic multiobjective optimization of stand management. **Forest Ecology and Management**, v. 98, n. 2, p. 189–203, nov. 1997. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378112797000819>>.

QUINTERO-MÉNDEZ, M.; JEREZ-RICO, M. Heuristic forest planning model for optimizing timber production and carbon sequestration in teak plantations. **iForest - Biogeosciences and Forestry**, v. 10, n. 2, p. 430–439, 30 abr. 2017. Disponível em: <<http://www.sisef.it/iforest/?doi=ifor1733-009>>.

ROBINSON, A. P.; WYKOFF, W. R. Imputing missing height measures using a mixed-effects modeling strategy. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 34, n. 12, p. 2492–2500, dez. 2004. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/x04-137>>.

RUDMAN, P.; DA COSTA, E. W. B.; GAY, F. J.; WETHERLY, A. H. Relationship of Tectoquinone to Durability in *Tectona grandis*. **Nature**, v. 181, n. 4610, p. 721–722, 8 mar. 1958. Disponível em: <<http://www.nature.com/doi/10.1038/181721b0>>.

RYAN, P. A. The Management of Burmese teak forests. **The Commonwealth Forestry Review**, v. 61, n. 2 (187), p. 115–120, 1982. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/42608629>>.

SABATIA, C. O.; BURKHART, H. E. On the Use of Upper Stem Diameters to Localize a Segmented Taper Equation to New Trees. **Forest Science**, v. 61, n. 3, p. 411–423, 29 jun. 2015. Disponível em: <<http://openurl.ingenta.com/content/xref?genre=article&issn=0015-749X&volume=61&issue=3&spage=411>>.

SCHUMACHER, F. X. A new growth curve and its application to timber yield studies. **J. For**, v. 37, n. 819–820, p. 33, 1939.

SHARMA, M.; PARTON, J. Height–diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach. **Forest Ecology and Management**, v. 249, n. 3, p. 187–198, set. 2007. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378112707004069>>.

SIRKIÄ, S.; HEINONEN, J.; MIINA, J.; EERIKÄINEN, K. Subject-Specific Prediction Using a Nonlinear Mixed Model: Consequences of Different Approaches. **Forest Science**, v. 61, n. 2, p. 205–212, 12 abr. 2015. Disponível em: <<http://openurl.ingenta.com/content/xref?genre=article&issn=0015-749X&volume=61&issue=2&spage=205>>.

STOFFELS, A.; VAN SOEST, J. The main problems in sample plots. **Ned Boschb Tijdschr**, v. 25, p. 190–199, 1953.

TANGMITCHAROEN, S. Floral Biology, Pollination, Pistil Receptivity, and Pollen Tube Growth of Teak (*Tectona grandis* Linn f.). **Annals of Botany**, v. 79, n. 3, p. 227–241, mar. 1997. Disponível em: <<https://academic.oup.com/aob/article-lookup/doi/10.1006/anbo.1996.0317>>.

TEMESGEN, H.; MONLEON, V. J.; HANN, D. W. Analysis and comparison of nonlinear tree height prediction strategies for Douglas-fir forests. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 38, n. 3, p. 553–565, mar. 2008. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/X07-104>>.

TIMILSINA, N.; STAUDHAMMER, C. L. Individual tree-based diameter growth model of slash pine in Florida using nonlinear mixed modeling. **Forest Science**, v. 59, n. 1, p. 27–37, 2013.

TONDJO, K.; BRANCHERIAU, L.; SABATIER, S.-A.; KOKUTSE, A. D.; AKOSSOU, A.; KOKOU, K.; FOURCAUD, T. Is the variability of key wood properties linked with the variability of key architectural traits? Case of planted Teak in Togo regarding thinning and provenance. **Annals of Forest Science**, v. 72, n. 6, p. 717–729, 24 set. 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s13595-014-0425-x>>.

VANDERSCHAAF, C. L. Mixed-effects height–diameter models for ten conifers in the inland Northwest, USA. **Southern Forests: a Journal of Forest Science**, v. 76, n. 1, p. 1–9, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2989/20702620.2013.870396>>.

VARMOLA, M. I.; CARLE, J. B. The importance of hardwood plantations in the tropics and sub-tropics. **International Forestry Review**, v. 4, n. 2, p. 110–121, jun. 2002. Disponível em: <<http://www.ingentaconnect.com/content/cfa/ifr/2002/00000004/00000002/art00002>>.

VERSTEEG, S.; HANSEN, C. P.; POULIOT, M. Factors influencing smallholder commercial tree planting in Isabel Province, the Solomon Islands. **Agroforestry Systems**, v. 91, n. 2, p. 375–392, 15 abr. 2017. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10457-016-9940-0>>.

VISMARA, E. de S.; MEHTÄTALO, L.; BATISTA, J. L. F. Linear mixed-effects models and calibration applied to volume models in two rotations of Eucalyptus grandis plantations. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 46, n. 1, p. 132–141, jan. 2016. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/10.1139/cjfr-2014-0435>>.

WANG, M.; BORDERS, B. E.; ZHAO, D. An empirical comparison of two subject-specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method and the mixed model method. **Forest Ecology and Management**, v. 255, n. 7, p. 2659–2669, abr. 2008. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378112708000790>>.

WEHR, J. B.; SMITH, T.; BLAMEY, P.; MENZIES, N. **Aluminum sensitivity and optimum Ca and pH requirement of teak (Tectona grandis Linn. f.) clones used for forestry plantations in Australia.** [s.l.: s.n.]

WICKAM, H.; FRANCOIS, R.; HENRY, L.; MÜLLER, K. **dplyr: A Grammar of Data Manipulation**, 2017. . Disponível em: <<https://cran.r-project.org/package=dplyr>>.

WYKOFF, W.; CROOKSTON, N. L.; STAGE, A. R. **User's guide to the stand prognosis model.** [s.l.] US Department of Agriculture, Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station Ogden, UT, 1982. .

YAMAMOTO, K.; SIMATUPANG, M. H.; HASHIM, R. Caoutchouc in teak wood (Tectona grandis L. f.): formation, location, influence on sunlight irradiation, hydrophobicity and decay resistance. **Holz als Roh- und Werkstoff**, v. 56, n. 3, p. 201–209, maio 1998. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s001070050299>>.

YANG, Y.; HUANG, S. Estimating a multilevel dominant height-age model from nested data with generalized errors. **Forest Science**, v. 57, n. 2, p. 102–116, 2011a.

YANG, Y.; HUANG, S. Comparison of different methods for fitting nonlinear mixed forest models and for making predictions. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 41, n. 8, p. 1671–1686, 2011b. Disponível em: <<http://www.nrcresearchpress.com/doi/abs/10.1139/x11-071>>.

ZANG, H.; LEI, X.; ZENG, W. Height-diameter equations for larch plantations in northern and northeastern China: A comparison of the mixed-effects, quantile regression and generalized additive models. **Forestry**, v. 89, n. 4, p. 434–445, 2016.

ZENG, W.-S. Using nonlinear mixed model and dummy variable model approaches to develop origin-based individual tree biomass equations. **Trees**, v. 29, n. 1, p. 275–283, 7 fev. 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s00468-014-1112-0>>.

ZHOU, Z.; LIANG, K.; XU, D.; ZHANG, Y.; HUANG, G.; MA, H. Effects of calcium, boron and nitrogen

fertilization on the growth of teak (*Tectona grandis*) seedlings and chemical property of acidic soil substrate. **New Forests**, v. 43, n. 2, p. 231–243, 28 mar. 2012. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11056-011-9276-6>>.

ZHOU, Z.; LIU, S.; LIANG, K.; MA, H.; HUANG, G. Growth and mineral nutrient analysis of teak (*Tectona grandis*) grown on acidic soils in south China. **Journal of Forestry Research**, v. 28, n. 3, p. 503–511, 12 maio 2017. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11676-016-0324-0>>.