MODELAGEM DIGITAL DO TERRENO (MDT)
ESTUDO DA METODOLOGIA E APLICAÇÕES EM PROJETOS
DE ENGENHARIA RURAL

ANTONIO CARLOS MARRA JUNIOR
Engenheiro Agrimensor

Orientador: Prof. Dr. VALDEMAR ANTONIO DEMÉTRIO

Dissertação apresentada à Escola Superior
de Agricultura "Luiz de Queiroz",
Universidade de São Paulo, para obtenção
do título de Mestre em Agronomia, Área de
Concentração: Irrigação e Drenagem.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Agosto - 2003

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - ESALQ/USP

Marra Júnior, Antonio Carlos

Modelagem digital do terreno (MDT) estudo da metodologia e aplicações em
projetos de engenharia rural / Antonio Carlos Barra Júnior. - - Piracicaba, 2003.
107 p. : il.

Dissertação (mestrado) - - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz,
2003.

Bibliografia.

1. Engenharia agrícola 2. Mapeamento digital 3. Relevô 4. Topografia I. Título

CDD 631.2

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte - O autor"

Data de depósito junto à CPG/ESALQ

22 / 08 / 2003

DEDICATÓRIA

A minha esposa Ana Lucia sempre leal, companheira e amiga nas horas mais difíceis.

Aos meus pais Antonio Carlos e Cinira, os quais sempre acreditaram e investiram com carinho e amor em mim.

Aos meus irmãos André e Andreza .

Aos meus avós João e Aparecida, que tanto me apoiaram e me ajudaram para meus estudos.

A todos os amigos que compartilharam e auxiliaram neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu amigo e orientador Prof. Titular. Valdemar Antonio Demétrio o incentivo, apoio e confiança durante o desenvolvimento deste trabalho.

À empresa 3D Engenharia e Construção Ltda. o fornecimento dos equipamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Sr. Luis Francisco Hebling que sempre me apoiou nas minhas conquistas como Engenheiro.

Aos meus amigos e Engenheiros Rene Guerrini, José Henrique, Daniela e Raquel que conviveram diariamente comigo, dando-me forças e alegrias, para que eu pudesse superar todas as dificuldades.

A todos aqueles que, mesmo de forma indireta colaboraram na execução deste trabalho.

Principalmente a Deus por ter me dado saúde, sabedoria e o dom para trabalhar na área de Agrimensura.

SUMÁRIO

Página

LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	ix
RESUMO	xi
SUMMARY	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DE LITERATURA	6
2.1 Coleta de Informações	7
2.1.1 Equipamentos	7
2.1.2 Métodos de coleta	19
2.2 Métodos de triangulação.....	23
2.3 Funções de Interpolação.....	31
3 MATERIAL E MÉTODOS	37
3.1 Material	38
3.1.1 Descrição da Área do Ensaio	38
3.1.2 Equipamentos	42
3.1.2.1 Coleta de dados de campo.....	42
3.1.2.2 Coleta de dados de escritório	42
3.1.2.3 Processamento dos dados	42
3.2 Métodos	43
3.2.1 Dados de campo.....	43
3.2.1.1 Levantamento Planialtimétrico	44
3.2.1.2 Levantamento por GPS de navegação	46

3.2.2	Dados de Escritório	47
3.2.2.1	Planta Digital	48
3.2.2.2	Carta Geográfica	49
3.2.3	Análise Estatística	50
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	52
4.1	Dados da rede de referência cadastral.....	52
4.2	Dados de campo.....	55
4.2.1	Levantamento Planialtimétrico	56
4.2.2	Levantamento por GPS de navegação	69
4.3	Dados de Escritório	76
4.3.1	Planta Digital	76
4.3.2	Carta Geográfica	83
4.4	Análise estatística.....	89
4.4.1	Comparação dos dados obtidos com os pontos de controle	89
4.4.2	Comparação entre os dados calculados e malha de controle	95
4.4.3	Comparação entre as áreas de superfície calculadas nos MDTs	100
5	CONCLUSÕES	101
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104

LISTA DE FIGURAS

	Página
1 Diagrama estruturado para a solução da entrada de dados	9
2 Construção do polígono de Thiessen (Kennie & Petrie, 1991).....	24
3 Triangulação de Delaunay : método de procura de vizinho por expansão de Círculos (McCullagh, 1.981).	26
4 Imagem aerofotogramétrica da área de estudo	39
5 Localização da área de estudo.....	41
6 Estação Total.....	44
7 GPS navegação.....	44
8 Vértice VB 16.....	53
9 Vértice VB 17.....	54
10 Pontos do levantamento planialtimétrico.....	56
11 105 pontos seleccionados do levantamento planialtimétrico	57
12 15 pontos seleccionados para controle.....	59
13 90 pontos utilizados para geração do MDT do levantamento planialtimétrico.....	60
14 Triangulação dos 90 pontos de campo	62
15 Representação gráfica do MDT do levantamento planialtimétrico.....	63
16 Representação em planta do MDT do levantamento planialtimétrico...	63
17 Triangulação dos 105 dados de campo (MDT controle)	65
18 Representação gráfica do MDT de controle.....	66
19 Representação em planta do MDT de controle	66
20 Disposição dos pontos da malha - método híbrido	67

21	Pontos do levantamento por GPS de navegação	70
22	64 pontos selecionados do levantamento por GPS.....	71
23	Triangulação dos 64 pontos do levantamento por GPS de navegação ...	73
24	Representação gráfica do MDT do GPS	74
25	Representação em planta do MDT do GPS	74
26	Pontos coletados na Planta Digital do Município	77
27	28 pontos da Planta Digital dentro da área de estudos.....	78
28	Triangulação dos 28 pontos da planta digital do município	79
29	Representação gráfica do MDT da Planta Digital.....	82
30	Representação em planta do MDT da Planta Digital.....	82
31	Pontos coletados na Carta Geográfica.....	83
32	94 pontos selecionados na Carta Geográfica.....	84
33	Triangulação dos 94 pontos da Carta Geográfica.....	86
34	Representação gráfica do MDT da Carta Geográfica.....	87
35	Representação em planta do MDT da Carta Geográfica	87
36	Gráfico da regressão linear para o levantamento Planialtimétrico.....	93
37	Gráfico da regressão linear para a Planta Digital.....	93
38	Gráfico da regressão linear para a Carta Geográfica.....	94
39	Gráfico da regressão linear para o levantamento por GPS de navegação	94
40	Gráfico da regressão linear da malha para o levantamento planialtimétrico.....	98
41	Gráfico da regressão linear da malha para a Planta Digital.....	98
42	Gráfico da regressão linear da malha para a Carta Geográfica.....	99
43	Gráfico da regressão linear da malha para o levantamento por GPS de navegação	99

LISTA DE TABELAS

Página

1	Coordenadas dos vértices do limite da área de amostragem	55
2	Coordenadas dos pontos de controle	58
3	Coordenadas dos pontos do levantamento planialtimétrico	61
4	Coordenadas Z calculadas nos pontos de controle para o levantamento planialtimétrico	64
5	Coordenadas da malha de controle gerada através do método híbrido.....	68
6	Coordenadas da malha do levantamento planialtimétrico gerada através do método híbrido.....	69
7	Coordenadas dos 64 pontos do levantamento por GPS de navegação... ..	72
8	Coordenadas Z calculadas nos pontos de controle para o levantamento por GPS de navegação.....	75
9	Coordenadas calculadas do levantamento por GPS através do método híbrido.....	76
10	Coordenadas obtidas através da planta digital	78
11	Coordenadas Z calculadas da Planta Digital nos pontos de controle ...	80
12	Coordenadas calculadas da planta digital através do método híbrido .	81
13	Coordenadas obtidas através da Carta Geográfica	85
14	Coordenadas Z calculadas da Carta Geográfica nos pontos de controle.....	88
15	Coordenadas calculadas da Carta Geográfica através do método híbrido.....	89

16	Coordenadas Z nos pontos de controle para comparação	90
17	Resultados estatísticos para os pontos de controle	92
18	Coordenadas Z do método híbrido para comparação	96
19	Resultados estatísticos para o método híbrido.....	97
20	Dados das áreas de superfície para os métodos analisados.....	100

MODELAGEM DIGITAL DO TERRENO (MDT)
ESTUDO DA METODOLOGIA E APLICAÇÕES EM PROJETOS
DE ENGENHARIA RURAL

Autor: ANTONIO CARLOS MARRA JUNIOR

Orientador: Prof. Dr. VALDEMAR ANTONIO DEMÉTRIO

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi estudar em especial a representação de relevos e suas superfícies, através da Modelagem Digital, de maneira a aplicá-la na área de Engenharia Rural, onde as superfícies reais dos terrenos são de extrema importância na elaboração dos mais diversificados projetos. Foram avaliados os Modelos Digitais de Terreno elaborados a partir de quatro sistemas: (a) um levantamento planialtimétrico realizado com Estação Total, (b) de um levantamento com GPS de navegação, (c) de dados coletados através de digitalização de uma Carta Geográfica na escala 1:10.000 e (d) de dados coletados de uma Planta

Digital obtida por levantamento aerofotogramétrico. Comparou-se e examinou-se a exatidão de cada modelo para a representação real das superfícies, e os limites para a sua aplicabilidade. Após análise dos resultados chegou-se a conclusão de que o levantamento planialtimétrico é o método mais preciso dentre os quatro analisados, seguido da Planta Digital obtida por restituição aerofotogramétrica, da Carta Geográfica em escala 1:10.000 e do GPS de navegação. Observou-se que o modelo gerado pelos dados do GPS de navegação não apresenta de forma precisa o relevo, pois até então, as altitudes por ele registradas, não são acuradas. Fez-se ainda uma análise com relação à área da superfície real do terreno chegando-se ao acréscimo de 5,16% sobre a área plana projetada. Analisou-se ainda as áreas das superfícies para os quatro métodos estudados, onde confirmou-se que o GPS de navegação não é recomendado para utilização em Modelagem Digital de Terrenos, que servirão de base para projetos de Engenharia.

DIGITAL TERRAIN MODEL (DTM) STUDY OF THE METHODOLOGY AND APPLICATIONS IN PROJECTS OF AGRICULTURAL ENGINEERING

Author: ANTONIO CARLOS MARRA JUNIOR

Adviser: Prof. Dr. VALDEMAR ANTONIO DEMÉTRIO

SUMMARY

The objective of this work was to study the relief representation and its surfaces by digital modeling and the application on Rural Engineering, where the real surfaces of lands are extremely important for the elaboration of many projects. Four methods were used and compared: (a) surveying by electronic distance measuring (EDM), (b) navigation GPS, (c) geographic map (1:10.000) and (d) digital map. The accuracy for the real representation of surfaces was analyzed to verify the limits of its applicability. After analyzing the results, the conclusion was that the surveying by electronic distance measuring (EDM) has higher accuracy between the four analyzed methods, followed by the digital map,

geographic map and navigation GPS. It was found that the surveying by electronic distance measuring is the method with higher accuracy, followed by digital map, geographic map and navigation GPS. The model given by navigation GPS does not have a precise relief representation due to low accuracy of altitudes. When the real surface area was analyzed, it was found an increase of 5,16% in the projected area. Surface area given by the four methods was also analyzed and results confirmed that GPS is not recommended for the execution of DTM.

1 INTRODUÇÃO

A técnica de representação gráfica do relevo de um terreno, o MDT (Modelo Digital do Terreno) é citado por alguns autores como DTM "*Digital Terrain Model*", e também MNT (Modelo Numérico do Terreno), ou ainda DEM "*Digital Elevation Models*". Consiste na descrição matemática do terreno através de uma função de interpolação .

O MDT é o conjunto ordenado de números que representam a distribuição espacial das características do terreno. Essa distribuição é representada por coordenadas X, Y e Z, onde X e Y representam a posição e Z representa a elevação.

O MDT é a representação matemática da distribuição espacial da característica de um fenômeno vinculada a uma superfície real. A superfície é em geral contínua e o fenômeno que representa pode ser variado. Dentre alguns usos do MDT pode-se citar (Burrough, 1989):

- Armazenamento de dados de altimetria para mapas topográficos;
- Análises de corte-aterro para projeto de estradas e barragens;

- Elaboração de cartas geográficas e exposição para apoio a análise de geomorfologia e erodibilidade;
- Análise de variáveis geofísicas e geoquímicas;
- Apresentação tridimensional (em combinação com outras variáveis).

Em princípio, a idéia de superfície digital pode ser aplicada para qualquer situação cujas informações numéricas sejam suficientes para a modelagem. Nesse contexto, podem-se citar muitas outras superfícies, como por exemplo, camadas geológicas, camadas de sedimentação de material assoreado e até mesmo para a representação de regiões do corpo humano. Qualquer que seja a classe de superfície, o processo de estudo é similar: a partir de observações físicas, elabora-se um "modelo" que seja tratável analiticamente e que reproduza da melhor forma possível o comportamento da superfície. Dependendo do rigor com que for conduzida a operação de modelagem, há modelos com diferentes graus de exatidão.

A Engenharia Rural está ligada diretamente a esses fatores no que diz respeito à utilização dos recursos oferecidos pelo MDT. Os recursos podem ser aplicados para problemas de automatização de mapas, otimização de projetos de estradas, irrigação, desenvolvimento regional, escavações etc, sendo que para cada aplicação deverão ser adotados critérios diferentes de coleta e tratamento de dados. A generalização seria difícil e em algumas instâncias, não representaria o real.

O conceito de MDT foi aplicado pela primeira vez para projetos de estradas no Massachusetts Institute of Technology (MIT), na década de 1950. O seu aperfeiçoamento foi impulsionado pelo desenvolvimento da informática, a qual não só reduziu as dificuldades das rotinas de cálculo, como também ampliou suas áreas de aplicação. É nesta fase que a utilização de computadores torna-se premente: o volume e a complexidade dos cálculos por vezes torna impraticável construir, sem recursos de automação, modelos com as qualidades necessárias.

Há uma grande necessidade de se representarem superfícies de interesse em praticamente todas as áreas de atuação da Engenharia. Analiticamente, por meio de equações, ou numericamente, por um conjunto de valores amostrados. Essa representação durante muito tempo, foi feita pelo traçado manual de curvas de nível a partir de um levantamento topográfico planialtimétrico ou por meios fotogramétricos, com a determinação dos valores intermediários por simples interpolação linear. Dentre todas as superfícies conhecidas, sem dúvida alguma, a terrestre é a que tem recebido maiores considerações: suas características topográficas localizadas têm sido objeto de numerosos estudos para se determinarem métodos práticos de armazenamento e modelagem digital em computadores. (Pettinati, 1981)

Para a representação de uma superfície real no computador é indispensável a criação de um modelo digital, podendo ser por equações

analíticas ou por uma rede de pontos na forma de uma grade de pontos regulares e ou irregulares. A partir dos modelos podem-se calcular volumes, áreas, desenhar perfis e seções transversais, gerar imagens sombreadas ou em níveis de cinza, gerar mapas clinográficos, mapas de sombreamento e insolação, mapas de feições hidrográficas, gerar fatiamentos em intervalos desejados e perspectivas tridimensionais. A criação de um modelo numérico de terreno corresponde a uma nova maneira de enfocar o problema da elaboração e implantação de projetos.

No Brasil, embora os computadores sejam uma realidade já há muito tempo, não é corrente ainda sua utilização nos processos de modelagem e representação gráfica de superfícies. Deve-se esta situação à escassez de equipamentos precisos para coleta de dados e à indisponibilidade de programas e sistemas adequados às necessidades das empresas usuárias.

Outro problema encontrado é que os poucos programas nacionais que oferecem a opção de MDT, não informam a metodologia utilizada para os cálculos de interpolação, área real da superfície e volume, suscitando dúvidas sobre a veracidade da superfície gerada e apresentada. Isso é realmente grave, visto que curvas de nível, seções transversais naturais, medições de volumes de movimento de terra são calculados com base nesse modelo digital do terreno, e ainda, esses programas não oferecem o cálculo da área da superfície topológica do terreno e sim a área

da superfície projetada num plano, o que, só ela, não é suficiente quando se deseja a área total da superfície do relevo em estudo. Como exemplo, pode-se citar a aplicação de água na irrigação por aspersão ou por superfície, a aplicação de insumos em áreas com certa inclinação, visto que as recomendações técnicas são fornecidas em litros/ha. ou toneladas/ha, então como determinar a área da superfície onde serão aplicados a água e os insumos? Neste caso o interesse não recai sobre a área projetada, pois ela não é verdadeira e sim sobre a área da superfície topológica.

Assim sendo, como poder-se-ão utilizar os mapas e plantas existentes para as análises ou até mesmo a implantação de projetos agrônômicos se os mesmos não fornecem uma representação verdadeira da superfície de interesse?

A Computação Gráfica é uma área cuja importância vem crescendo dia a dia e que pode ajudar na resolução desses problemas, graças às imagens e representações gráficas que podem ser produzidas. Esses produtos estão se tornando cada vez mais importantes dentro dos contextos de análise de problemas, busca de soluções e transmissão de informações e merecem especial destaque.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Os primeiros conceitos de MDT surgiram na década de 50, quando Miller & Laflame realizaram em 1958 os primeiros trabalhos nesta área. Segundo a definição inicial de MDT, o mesmo é uma representação estatística da superfície da Terra através de um certo número de pontos selecionados com coordenadas X, Y, e Z conhecidas em um sistema arbitrário (Carter, 1988).

É prática e adequada a definição do MDT como uma matriz em que cada elemento $Z(i; j)$ associa o valor de Z (considerado como atributo) à posição X, Y definida implicitamente através de i, j. No entanto só se aplica a malhas regulares. Dessa forma, um conceito mais abrangente torna-se necessário, tal que qualquer representação espacial do terreno, estruturada e manipulável em computador, pode ser entendida como um MDT (Pettinati, 1983).

A introdução da informática no meio de vida do ser humano facilitou o tratamento de dados de mensuração, onde a partir daí surgiu um novo procedimento que permite a automatização do sistema de informações. Esse novo procedimento consiste na descrição matemática do terreno

através de funções de interpolação e recebeu o nome de Modelo Digital de Terreno (Silva, 1993).

Para a Engenharia, um MDT é a representação matemática de superfícies, em termos das coordenadas (X, Y, Z), representativas do terreno. O estudo do comportamento de superfícies é efetuado através de modelos matemáticos que são representações matemáticas idealizadas (Campos, 1994).

Segundo Pettinati (1983) o processo de modelagem digital de terreno utilizando computadores é composto por três etapas:

- Coleta de informações que caracterizem o comportamento da superfície;
- Elaboração de um modelo matemático composto de estruturas de dados e funções de interpolação que simulem o comportamento da superfície;
- Utilização do modelo em substituição à superfície original.

2.1 Coleta de Informações

2.1.1 Equipamentos

A necessidade de se obterem dados topográficos com maior precisão e rapidez estimulou, no decorrer do anos, o desenvolvimento de técnicas e equipamentos cada vez mais sofisticados, como as Estações

Totais com Cadernetas Eletrônicas de coleta de dados e os GPS topográficos, ambos coletam um ponto topográfico em alguns segundos.

Como nem todos os usuários podem adquirir os equipamentos sofisticados, que em geral ainda têm custos bastante elevados, o mercado continua a oferecer uma enorme gama de equipamentos para atender as necessidades de cada usuário. Em função dessa realidade, diversas técnicas de aquisição de dados, antigas e modernas, são hoje utilizadas.

Na coleta de dados é feita uma amostragem de pontos notáveis do terreno, como corpos d'água, vegetação, estradas, elevações, depressões onde os mesmos devem possuir informações que representem o comportamento da superfície.

As técnicas desenvolvidas para a obtenção de coordenadas X, Y e Z de uma superfície topográfica utilizam, como fonte de dados as Cadernetas de Campo, quando da utilização de Teodolitos; Cadernetas Eletrônicas quando da utilização de Estações Totais; digitalização e escanerização quando da utilização de Cartas Topográficas e dados obtidos a partir de levantamentos por GPS e por Aerofotogrametria.

Na Figura 1 pode-se observar a metodologia de coleta até a obtenção das coordenadas:

Figura 1 - Diagrama estruturado para a solução da entrada de dados

Os dados coletados para uso em sistemas de modelagem digital vêm de uma ordem de pontos cujas posições horizontais são determinadas pelas coordenadas X e Y, e as elevações são determinadas como coordenadas Z. Tais ordens tridimensionais provem de uma representação digital da variação contínua do relevo sobre uma área, que é conhecido como Modelo de Elevação Digital (MED), atualmente o termo Modelo Digital de Terreno (MDT) é o mais utilizado.

No desenvolvimento de uma interface, para minimizar as dificuldades na entrada de dados em sistemas de modelagem, é necessário que se delimitem técnicas de aquisição de dados topográficos, bem como o formato dos dados disponibilizados pelos equipamentos correspondentes.

Dentre os equipamentos mais utilizados na aquisição dos dados topográficos, estão os Teodolitos e Estações Totais das marcas Topcon, Nikon, Sokkia, Zeiss, Wild, Leica e Estações GPS das marcas Ashtech, Magellan, Sokkia, Racal, Trimble e Garmin, dentre outras marcas. Algumas das fontes supracitadas geram arquivos de dados com padrões predefinidos que, para serem utilizados em sistemas que contemplam MDTs, necessitam de um pré-processamento para a obtenção das coordenadas (X, Y, Z) dos pontos amostrais da região, necessários para geração do modelo.

O processo tradicional de aquisição de dados a partir de levantamento topográfico com Teodolitos e Níveis é baseado em métodos trigonométricos clássicos para a determinação das coordenadas X e Y, em conjunto com métodos de nivelamento geométrico para a determinação da coordenada Z. A precisão dos dados obtidos depende do método de coleta, do operador do instrumento e do tipo de instrumento utilizado para a execução do trabalho. Além de ser um processo bastante demorado é suscetível a erros de anotação nas cadernetas de campo e digitação dos dados. (Campos, 1994)

Um processo mais recente de aquisição de dados de levantamentos topográficos é realizado com Estações Totais e cadernetas eletrônicas (internas ou externas às Estações) que vêm a substituir o processo anterior na forma de aquisição de dados (Silva, 1993).

Os instrumentos topográficos modernos possuem alta precisão nominal, são programáveis e podem ser conectados a um computador para transferência automática dos dados (Campos, 1994).

O processo de aquisição dos dados, consiste em posicionar o equipamento em um ponto de coordenadas (X_0 , Y_0 , Z_0) conhecidas e um bastão com um prisma na extremidade no ponto que se deseja obter as leituras de ângulos e distâncias. O prisma refletirá um feixe de ondas infravermelho que é emitido através da objetiva da Estação Total. Esta disponibilizará leituras dos ângulos verticais e horizontais e das distâncias, do ponto da estação até o ponto visado. A determinação das coordenadas X , Y e Z é feita por trigonometria na própria estação ou por coletoras ou por programas computacionais que acompanham os equipamentos. A precisão dos dados obtidos depende apenas do método de coleta e o processo é mais ágil quando comparado ao anterior devido às leituras serem feitas pelo instrumento e não pelo operador e de não haver necessidade de digitação dos dados (Silva, 1993).

Segundo Silva (1993), nas últimas décadas, com o avanço da eletrônica e da informática, a área de levantamento topográfico recebeu um

novo enfoque em termos de instrumentação. Os Teodolitos mecânicos estão sendo substituídos pelos Teodolitos Eletrônicos, a trena foi substituída pelos medidores eletrônicos de distância que foram acoplados aos Teodolitos Eletrônicos, formando a Estação Total. A planilha de campo foi substituída pela caderneta eletrônica e os Níveis Topográficos mecânicos pelos Níveis eletrônicos de código de barras e a laser.

Outra novidade dos tempos modernos é o GPS resultado da fusão em 1973 de dois projetos do Departamento de Defesa dos Estados Unidos, o TIMATION da Marinha e o 621 B da Força Aérea. O GPS foi projetado para obter a posição instantânea de um ponto da superfície da Terra, bem como a velocidade desse ponto em movimento, num referencial tridimensional (Blitzkow & Leick, 1992).

Esse método de coleta de dados de campo é muito interessante e de fácil aplicabilidade e com rendimentos provavelmente superiores quando comparado a levantamentos topográficos convencionais, mas há fatores limitantes em sua utilização como o custo do equipamento e a imprecisão nas leituras de altitude que poderão ser melhoradas futuramente com o aperfeiçoamento do sistema (Blitzkow & Leick, 1992).

Uma maneira mais rápida de se obter um MDT é a obtenção de dados a partir de restituições aerofotogramétricas as quais oferecem uma maior flexibilidade na coleta de dados para modelagem da superfície do que os métodos topográficos clássicos. A restituição pode ser utilizada para

grandes áreas e principalmente para áreas de difícil acesso, que para a Engenharia Rural é de grande interesse do ponto de vista hidrológico. A aerofotogrametria permite ainda a utilização de fotos obtidas em diferentes escalas e alturas de vôo e diferentes instrumentos fotogramétricos podendo variar sua capacidade de precisão e grau de automatização (Campos, 1994).

Segundo Petrie & Kennie (1991) as precisões obtidas em levantamentos aerofotogramétricos dependem de alguns fatores:

- Escala e resolução da fotografia;
- Altura de vôo;
- Relação base/altura do recobrimento da foto e
- Precisão do equipamento restituidor.

Campos (1994) cita que os restituidores aerofotogramétricos são projetados para obterem o posicionamento dos pontos em função das posições em imagens de pares de fotografias recobertas. Quando esses instrumentos estão calibrados corretamente e suas várias distorções são corrigidas, os resultados são muito confiáveis. Os restituidores aerofotogramétricos geram curvas de nível da superfície fotografada que podem ser desenhadas em papel ou podem gerar arquivos digitais para serem usados diretamente em programas computacionais gráficos. Podem gerar ainda, quando se tratando de restituidores analíticos ou numéricos, arquivos digitais de pontos notáveis ou ainda de pontos sobre uma malha

criada pelo próprio operador do sistema restituidor sobre a superfície fotografada, coletando-se assim pontos idênticos a pontos de um levantamento topográfico. Outra maneira também econômica, porém menos precisa que a restituição, é a coleta de dados através de digitalização de mapas existentes ou vetorização de imagens rasterizadas desses mapas.

Segundo Petrie & Kennie (1.991) a digitalização de mapas pode ser dividida em duas formas distintas de acordo com o tipo de dado a ser digitalizado:

- dados de pontos, como por exemplo um objeto individual descrito por um símbolo cartográfico, cotas etc.
- dados de linhas, como por exemplo, linhas contínuas como uma rodovia, estradas de ferro, rios e canais, limites de vegetação e florestas, muros, cercas e construções e curvas de nível.

A aquisição das curvas de nível dos mapas existentes, também denominadas de isolinhas pode ser efetuada tanto pelo meio de digitalização manual com uso de uma mesa digitalizadora, quanto através de um processo automático por meio de escâner. A digitalização manual consiste na operação de identificação de uma isolinha com um valor de cota e em aquisição pelo operador por um processo onde segue-se a linha ao longo do mapa. Na digitalização com o uso de escâner, é obtida uma matriz de pontos onde podem ser identificadas as isolinhas e os valores de cota. Processos de vetorização que sigam uma isolinha, transformam-na em uma

seqüência de pontos com coordenadas X e Y com um mesmo valor para Z, para cada isolinha. Um mapa de isolinhas é a representação de uma superfície por meio de curvas de isovalor. Nos mapas topográficos as isolinhas são impressas com o uso de equipamentos, como "stereoplotters" e "plotters", sobre uma base composta de fotografias em estéreoscópios obtidas por aerolevantamento ou ainda por pontos amostrados regular ou irregularmente que foram obtidos por trabalhos de campo (Campos, 1994).

É importante salientar, que na conversão de mapas para a forma digital é preciso preservar ao máximo a precisão original do documento. Qualquer erro cometido na digitalização é propagado durante todo o processo somado a possíveis erros introduzidos no processamento dos dados e plotagem do mapa. Na utilização das mesas digitalizadoras recomenda-se executar, periodicamente, a aferição segundo alguns procedimentos típicos fornecidos pelo fabricante para se minimizar a ocorrência desses erros (Peixoto, 1992).

Segundo Petrie & Kennie (1991) a precisão do MDT obtido por esse método é baixa se o MDT for obtido a partir de isolinhas de mapas de média e pequena escala, mas por outro lado o trabalho pode abranger grandes extensões com plantas de escalas pequenas, proporcionando áreas ainda maiores do que das restituições aerofotogramétricas. Os MDTs obtidos poderão ser utilizados para simulação de vôos e representação do relevo para fins de estudos e planejamentos de ocupação e uso do solo.

Uma maneira importante de obtenção de dados para áreas extensas e que deve ainda ser estudado e aprimorado é a aquisição pelas imagens de radar através da extração das redes de drenagem do terreno. A rede de drenagem de uma região geográfica define os caminhos de escoamento de líquidos, normalmente água de chuva, de acordo com o relevo da região. A informação por ela gerada é usada em atividades diversas, tais como: estudo de relevo, determinação de áreas com risco de erosão do solo, transporte de poluentes, delimitação de áreas inundadas e estudo de bacias hidrográficas. Nas últimas duas décadas vários métodos foram criados com o objetivo de extrair a rede de drenagem automaticamente, usando modelos de dados conhecidos como Modelos Numéricos de Terrenos - MNT, em particular o modelo de grade regular retangular. Este modelo é regular pois apresenta espaçamento igual na horizontal e na vertical podendo ser diferente nos dois eixos (Felgueiras, 1987).

Cada ponto da grade possui uma posição geográfica e um valor de elevação. Esta elevação é calculada, na maioria das vezes, por um processo de interpolação das amostras adquiridas, que representam o relevo da região alvo, segundo algum critério de vizinhança. A grade, pela facilidade em utilizá-la, tornou-se o modelo sobre o qual desenvolveu-se a maioria dos métodos de extração de rede de drenagem. Uma forma de gerar a grade regular consiste em utilizar a técnica de interferometria. A essa

grade deu-se o nome de modelo de elevação de radar ou modelo de elevação interferométrico. (Felgueiras, 1987)

Este modelo é gerado a partir de duas imagens complexas SAR (Synthetic Aperture Radar), de intensidade ou de fase. Elas podem ser adquiridas em uma mesma plataforma, com duas antenas separadas de uma distância chamada de linha de base, ou utilizando uma antena com duas passagens sobre a mesma área. A fase de cada pixel da imagem original está relacionada com a elevação do terreno. A diferença de fase entre pixels correspondentes nas duas imagens originais possibilita a criação modelo de elevação do terreno, ou seja, de uma grade regular retangular. O método utilizado, conhecido como Algoritmo de Esqueletização em Vários Níveis, extrai a rede de drenagem por um processo de busca contínua em caminhos de mesma elevação, produzindo uma série de esqueletos que formarão os fluxos da rede. Um dos aspectos de destaque deste método é o fato de não necessitar de parâmetros fornecidos pelo usuário, como na maioria dos métodos de extração de redes de drenagem usando grade regular. Os resultados podem ser convertidos de imagem para representação vetorial. Dessa forma, pode-se editar a rede e corrigir falhas ou inserir segmentos que não são extraídos automaticamente. A edição sempre será necessária para complementar o processo automático (Felgueiras, 1987).

Várias tecnologias e procedimentos avançados vem sendo adotados no campo da Cartografia tendo como meio a informática. Mello &

Cintra (1993) destacam dois tipos de métodos para a aquisição de dados georreferenciados para utilização em SIG (Sistema de Informação Geográfica):

- os que utilizam fontes primárias, ou seja, dados coletados de fontes diretas, por meio de levantamentos topográficos e geodésicos, restituição de fotografias aéreas e terrestres e imagens de satélite fornecidas em meio magnético digital e,

- fontes secundárias, em que os dados são obtidos a partir de documentos existentes, tais como mapas, cartas, imagens de satélite em papel, gráficos, tabelas e que são digitalizados através de escâner ou mesas digitalizadoras.

Mello & Cintra (1993) citam que os dois tipos apresentam erros nos seus processos de aquisição, sendo que para o primeiro tipo temos:

- grosseiros: resultantes da imperícia do observador, de falha instrumental, de calibração ou proveniente de variações ambientais bruscas ou outras. Para evitar ou controlar a incidência de tais erros pode-se, em muitos casos, repetir as operações e comparar resultados, criar operações de controle e tomar cuidados especiais no registro dos dados observados. No caso da topografia podemos ter casos como os de trenas, distanciômetros, Teodolitos ou Níveis não aferidos, leitura ou anotação equivocada de dígitos (nos instrumentos analógicos). Na aerofotogrametria pode-se ter um erro de orientação do par estereoscópico etc;

- **sistemáticos:** resultantes de causas conhecidas e teoricamente detectáveis, sendo introduzidos pelo operador (talvez inadvertidamente), pelos instrumentos, por condições ambientais ou por métodos utilizados. Esses erros ocorrem na maior parte dos casos no mesmo sentido (para mais ou para menos), sendo assim podem ser modelados matematicamente e eliminados. Seria o caso em que se detecta uma variação da trena em função da temperatura, do fator de escala de um distanciômetro, da distância focada da câmara fotogramétrica etc;

- **acidentais:** após a detecção e eliminação dos erros grosseiros e sistemáticos podem restar erros resultantes de variações nas observações, normalmente de pequena grandeza, com causas desconhecidas ou incontroláveis. Por meio de análise estatística é possível determinar o valor mais provável da grandeza e sua margem de erro, utilizando-se, por exemplo, o método dos mínimos quadrados.

2.1.2 Métodos de coleta

A coleta de informações consiste na amostragem de certo número de pontos sobre a superfície em estudo. Esses pontos, chamados de pontos de controle, devem possuir um conteúdo informativo que represente o comportamento da superfície original. Como o modelamento é efetuado apenas por estes pontos de controle, está claro que o processo de amostragem não pode ser conduzido de modo informal ou casual; é preciso

que a amostragem realizada contenha informações sobre a estrutura da superfície (Pettinati, 1983).

Segundo Campos (1994) duas configurações geométricas básicas são usadas em trabalhos de campo para coletar dados de MDT: o método regular chamado de "grid" e o método irregular, através do levantamento planialtimétrico de pontos notáveis, já mencionado.

- No método de "grid", as elevações são determinadas em pontos que conformam a um quadrado regular. Esse método de quadros eqüidistantes é mais utilizado para locais com características planas, mas pode ser usado para outros locais. A área de interesse é dividida em quadrados 5m, 10m, 20m ou 40m de lado, onde o tamanho dos quadrados depende do terreno e da precisão requerida. Um Teodolito pode ser usado para alinhar e esquadrear as linhas, os lados dos quadrados podem ser marcados com trena e os cantos são identificados por números e letras nos cruzamentos das linhas. As elevações dos cantos podem ser obtidas por nivelamento geométrico ou trigonométrico. São interpoladas as curvas de nível entre as elevações dos cantos (ao longo dos lados e diagonais dos quadrados) através de estimativa ou através de distâncias proporcionais calculadas. As curvas de nível obtidas por interpolação ao longo das linhas dos quatro lados, geralmente não concordam com a interpolação das linhas diagonais desses quadros porque a superfície do terreno geralmente não é um plano. Uma vantagem desse método é que ele pode ser executado de

maneira mais simples usando-se apenas alinhamentos e nivelamento geométrico, não sendo obrigatório o levantamento das coordenadas X e Y dos pontos já que os mesmos são eqüidistantes. Uma desvantagem desse método é que não importa a densidade da malha pois os pontos críticos como talvegues, morros e pontos mais altos ou mais baixos do terreno, são contemplados nos nós desses quadros, degradando a precisão do MDT e conseqüentemente a precisão do mapa de curvas de nível resultante das interpolações.

- O método irregular é simplesmente o método de coletar pontos sobre o relevo do terreno, especialmente os pontos notáveis que definirão a superfície e mais algumas informações adicionais que devem ser incluídas. Esses pontos coletados devem ter identificação própria de posicionamento e também devem ter uma descrição para a interpretação dos desenhos. Esse método de coleta de pontos notáveis é executado determinando-se as posições e elevações de todos os pontos altos e baixos de importância do terreno, e dos pontos onde há mudança de declives. Isto produz um MDT mesmo com a irregularidade de espaçamento dos pontos coletados.

De acordo com Petrie & Kennie (1991) os pontos escolhidos no campo devem representar o mais fielmente possível o terreno, isto é, registrar pontos do terreno que indiquem as variações na sua superfície como morros, depressões, início e fim de encostas, início e fim de rampas

etc. Desta forma os pontos tomados darão maior confiabilidade ao modelo digital calculado pelo software.

De acordo com Cintra (1993) a maioria dos softwares de topografia aceita três formas de aquisição de dados do campo:

- A partir da digitação direta dos dados com distância, valores dos ângulos vertical e horizontal, altura do instrumento etc;
- A utilização de cadernetas eletrônicas de campo onde os dados são armazenados e depois exportam-se esses dados para o software utilizando um programa intermediário compatível;
- Ou importando esses dados de um outro software cujos arquivos tenham extensão compatível. Por exemplo, arquivos com extensão DXF (Drawing Exchange Format).

Os "softwares" utilizam-se dessa malha irregular, formada dos pontos levantados e criam uma rede irregular de triângulos ou uma rede regular quadrada chamada de "GRID". É muito importante entender o conceito desse método de coleta para assegurar que uma ordem apropriada de pontos coletados no campo produza um modelo real. Um modelo de triangulação é construído ligando-se pontos de maneira a criar uma rede de triângulos adjacentes. A triangulação é um modelo digital que aproxima superfícies através de um poliedro de faces triangulares onde os vértices desses triângulos são os pontos de controle previamente amostrados (Cintra, 1993).

2.2 Métodos de triangulação

Segundo McKenna¹ citado por Campos (1994) vários métodos podem ser utilizados para se gerar uma triangulação a partir de uma série finita de pontos. Em geral existem duas categorias onde uma é caracterizada pela construção por otimização onde parte-se de uma triangulação qualquer e posteriormente otimizam-se as formas dos triângulos alterando-se a conectividade entre os pontos amostrados e assim gerando uma triangulação final. A outra categoria, caracteriza-se por procurar uma triangulação supostamente ótima em um único passo sem refinamentos posteriores, explorando princípios geométricos básicos de organização de uma triangulação irregular e produzindo a chamada Triangulação de Delaunay

Para a definição da Triangulação de Delaunay é necessário definir-se o polígono de Thiesen ou Diagrama de Voronoi que é a subdivisão mais simples de um plano determinado por uma série finitas de pontos em superfícies poligonais em que cada ponto é circundado por um polígono particular como mostra a Figura 2. Portanto para cada ponto amostrado é possível determinar a sua volta uma região que seja o lugar geométrico dos pontos do plano mais próximos a ele do que qualquer outro ponto da

¹ MCKENNA, D. G. The inward spiral method: an improved TIN generation technique and data structure for land planning applications, 1985.

amostra. O conjunto dessas regiões forma um agrupamento de polígonos convexos cobrindo todo o plano (Pettinati, 1983).

Figura 2 - Construção do polígono de Thiessen (Kennie & Petrie, 1991).

O Polígono de Thiesen não tem aplicação direta na modelagem digital, ele é aplicado na área de hidrologia para calcular precipitações pluviométricas em grandes áreas e polígono de secas. Entre os diversos algoritmos criados para gerar uma rede triangular de pontos, a maioria deles possui um algoritmo recursivo para a construção do polígono de Thiessen, a partir daí é obtida a triangulação de Delaunay (Campos, 1994).

Cintra (1985), descreveu o polígono de Thiesen, supondo a sua partição como sendo um conjunto de cristais em um processo de crescimento a partir do núcleo.

Vários algoritmos foram desenvolvidos a para calcular o polígono de Thiessen, e por conseguinte a triangulação de Delaunay, entre eles Bowyer (1981), Green & Sibison (1977), Brassel & Reif (1979).

McCullagh (1981) propôs um algoritmo para calcular a triangulação de Delaunay usando um método de procura de vizinhos proposto por Thiessen, com um processo iterativo de expansão de círculos reduzindo o volume de cálculos e problemas de locação de memória em computadores. O algoritmo proposto sempre inicia por um ponto de rotação qualquer e um vizinho conhecido que formam a linha base de cálculo. A área de interesse para a procura do vértice de Thiessen, é a área definida pelo círculo cujo diâmetro é a linha base. Se existir mais de um ponto na área definida pelo círculo, o ponto considerado será o primeiro no sentido horário, partindo da linha base, se não se encontrar nenhum ponto no limite do primeiro círculo, constrói-se um segundo círculo com um fator de acréscimo em torno de 2 em seu diâmetro. Esse procedimento será executado até que toda a área a ser modelada esteja coberta pela malha de triângulos.

A Figura 3 mostra o desenvolvimento dos círculos para a triangulação de Delaunay segundo MacCullagh.

Figura 3 - Triangulação de Delaunay : método de procura de vizinho por expansão de Círculos (McCullagh, 1.981).

Segundo Pettinati (1983) o modelo digital associado à Triangulação de Delaunay é um poliedro de faces triangulares planas. Na ausência de descontinuidades implícitas nos pontos de controle, ou de informações adicionais nestes mesmos pontos, o máximo que se pode dizer acerca deste modelo, é que ele é de Classe C^0 (contínuo, mas não continuamente derivável). Sabe-se que, em termos práticos, o comportamento de uma superfície no interior de uma face triangular de seu modelo não é normalmente plano. Se a amostragem dos pontos de controle for realizada de modo criterioso, é possível efetuar aproximações que

transformem as faces triangulares planas em superfícies curvas e continuamente deriváveis. Esta transformação permite que o modelo obtido se torne de Classe C^1 (contínuo e com derivadas de 1ª ordem contínuas); visualmente, isto significa que a transição entre triângulos adjacentes seja feita de modo contínuo e harmonioso. O processo que permite transformar um modelo digital de Classe C^0 em outro de Classe C^1 é denominado Refinamento do Modelo. Esta operação de refinamento deve ser efetuada através de métodos de interpolação adequados, o ponto crucial é determinar qual dos métodos de interpolação, global ou local, é o mais adequado.

Após a análise da bibliografia disponível sobre o assunto, chegou-se à conclusão que o método mais adequado é o local (Franke² e Klucewicz³ citados em Pettinati 1983).

Dentre os diversos métodos locais normalmente utilizados, a seleção recaiu sobre um que é normalmente utilizado no, Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método consiste em aproximar a superfície no interior de um domínio triangular, por um polinômio bivariado de 50 graus Pettinati (1983).

Podem ser citados diversos estudos sobre métodos e superfícies de interpolação, a mais simples sobre elementos triangulares é

² FRANKE, R. Scattered data interpolation: tests of some methods mathematics of computation, 38 (157), p 181-200, 1982.

³ KLUCEWICZ, I. M. A piecewise C^1 interpolant to arbitrarily spaced data computer graphics and image processing 8, p 92 - 112, 1978.

a interpolação linear. Esse tipo de função tem forma simples e os resultados, para uma série de pontos bem distribuídos sobre o domínio das variáveis, são bastante aceitáveis. Para utilizar as funções de interpolação polinomial é possível usar polinômios de grau variado. A precisão da solução do problema é função da densidade da malha e do grau do polinômio escolhido para a modelagem (Campos, 1994).

Os métodos mais simplificados adotam superfícies planas em cada domínio, o que transforma o modelo num poliedro de faces triangulares com continuidade C^0 , onde somente a função é contínua, formando arestas vivas nas interfaces. Outras adotam superfícies de classe C^1 , garantindo a continuidade também da primeira derivada. Para o cálculo dos valores das derivadas parciais, pode-se utilizar o procedimento proposto por Klucewicz, onde para um ponto de coordenada X e Y inicial encontram-se diversos triângulos que possuem esses pontos como vértices. Para cada ponto encontrado considera-se a coordenada Z dos 3 vértices de cada triângulo e constrói-se um plano passando por suas coordenadas tridimensionais (Pettinati, 1983).

O problema de interpolação ou de aproximação, para aplicações gerais em Engenharia, é ainda muito aberto. Não existe ainda um método que possa ser aplicado com sucesso, em qualquer caso, sem levar em consideração o tipo de dado levantado, as propriedades do fenômeno

estudado e a dimensão espacial. Os problemas a três dimensões são ainda mais complexos que os problemas a duas dimensões segundo Silva (1993).

Para estudar os métodos de interpolação e de aproximação, pode-se classificá-los em três grupos distintos, segundo um modo de regionalização do domínio das variáveis. Adotando-se a classificação proposta por Leberl (1973) , tem-se:

- Método de interpolação ou de aproximação global;
- Método de interpolação ou de aproximação local;
- Método de interpolação ou de aproximação pontual.

As funções de interpolação global, envolvem o ajuste de uma superfície simples passando por todos os pontos medidos e por uma superfície que pode ser gerada por uma função $P(x)$, dos tipos trigonométricas, exponenciais ou polinomial. A função de interpolação polinomial será uma função cujo grau do polinômio de interpolação é suficientemente elevado para que a curva passe por todos os pontos medidos. Para o método de interpolação local o espaço de referência é subdividido em subespaço e para cada subespaço é definido uma função de interpolação. As funções mais utilizadas são as funções segmentadas que descrevem o comportamento do problema por parte cujos polinômios de interpolação possuem um grau menor, ajustados aos pontos de referência pré-determinados. O método pontual interpola os novos valores usando somente os pontos de referência vizinhos. Desse modo, a adição,

substituição ou movimentação de um ponto no domínio da função afetará apenas os pontos próximos ao local da mudança, isto é, o mesmo que considerar que apenas os pontos vizinhos ao novo ponto, dentro de um critério de proximidade, influenciam o valor estimado para o novo ponto interpolado (Campos, 1994).

Segundo Leberl (1973), o método de interpolação pontual utiliza menos memória de cálculo que os outros métodos, mas por outro lado, exige um tempo de cálculo maior.

Nos interessa de momento, quanto ao modelo matemático utilizado para a geração do MDT. Podemos considerar teoricamente três abordagens:

- superfícies contínuas;
- malhas discretas (regulares e irregulares);
- malhas triangulares com superfícies locais (Cintra, 1988).

Na prática essa divisão pode não ser muito clara, pois há uma combinação dos métodos na geração de um modelo, como por exemplo no caso da malha triangular com superfícies locais com a geração a posteriori de uma malha regular (Cintra, 1988).

É comum a geração de uma malha regular, normalmente quadrada, a partir do modelo triangular, tendo em conta as facilidades de armazenamento e representação. Esse processo resume-se em superpor uma malha de abertura pré-definida ao modelo triangular, determinando-se as

cotas dos nós a partir da equação do triângulo em que se situa (Ribeiro & Cintra, 1997).

Petrie & Kennie (1991), assim como Cintra (1985), denominam esta solução de método híbrido pois utiliza a malha irregular em uma primeira etapa e a malha regular como produto final.

2.3 Funções de Interpolação

Considerando que para a superfície terrestre seria muito difícil prever que forma teria a porção estudada, neste caso as melhores funções para se descrever o fenômeno são as funções polinomiais, para os casos onde se conhece o comportamento do fenômeno estudado pode-se escolher uma classe de função que melhor descreva o problema que se deseja resolver (Campos, 1994).

Uma função de interpolação é definida como uma função contínua que descreve aproximadamente o comportamento matemático de um fenômeno, para o qual se conhece apenas os seus valores discretos. Para estabelecer uma função de interpolação, três fases distintas devem ser realizadas. A primeira é, naturalmente, o levantamento dos valores que caracterizaram o fenômeno ou, mais especificamente, a caracterização da dependência funcional entre as variáveis. A segunda, é a escolha de uma classe de função que será utilizada para a interpolação. A terceira é o estabelecimento e a resolução das equações para todos os coeficientes da função de interpolação. A preferência pelos polinômios, além da facilidade

de adaptação a vários fenômenos, deve-se também pela facilidade para formulação de suas equações e por ser uma classe de função mais fácil de diferenciar e integrar do que, por exemplo, as funções trigonométricas (Lancaster & Salkauskas, 1986).

Existem na literatura uma série de procedimentos que permitem estabelecer um polinômio de interpolação. Entre os mais comuns, podem ser citados, particularmente, a fórmula de interpolação de Newton e a fórmula de interpolação de Lagrange, facilmente encontradas em livros de métodos numéricos. No entanto, em muitos casos, a melhor solução é desconsiderar os métodos de interpolação global (devido ao elevado grau dos seus polinômios) e adotar um método de interpolação local que utilizam funções segmentadas. Campos (1994).

As funções de interpolação "splines" são funções polinomiais locais definidas através de pequenos subintervalos de um conjunto de pontos. O termo "spline", originalmente, se refere a uma régua flexível usada pelos desenhistas e construtores de navios para facilitar o traçado de uma curva regular passando por uma série de pontos dados. Sua propriedade elástica garante a continuidade da inclinação e da curvatura nos pontos amostrados. Uma outra função, a "B-spline", tem sido muito utilizada pelos algoritmos desenvolvido para a computação gráfica. Ela difere das funções spline natural pela condição fundamental de possuir controle local, ou seja, a alteração de um ponto de controle não interfere

sobre toda a curva, mas somente sobre uma parte da curva. Esta condição permite a modificação de partes da curva sem alterar as partes que já estão ajustadas. Isso certamente, minimiza o segundo trabalho de cálculo da curva quando os pontos de controle são modificados. O esquema de representação por "B-spline" é baseado na definição de uma malha de pontos de controle no espaço de referência definidos por suas coordenadas, e um conjunto de funções-base, chamadas funções de "blending" (funções que identificam um determinado método de representação) paramétricas. Uma "B-spline" é definida, analiticamente, como um conjunto de equações polinomiais sobre um vetor de números reais, chamado vetor de nós, em ordem não decrescente. Isso, especialmente para curvas, representa uma flexibilidade a mais na manipulação das formas (Minghim, 1980).

As funções de base geralmente possuem controle local, pois sua formulação é dedicada a limitar a região de influência de um dado nó ou vértice de controle. Os dados necessários para sua manipulação são os pontos da malha de controle e a sua ordem. O método combina a facilidade da manipulação polinomial com a suavidade da construção de formas. As funções base "B-spline" são formadas como sendo um caso especial das equações base de Bernstein. Essas equações representam a distribuição binomial de probabilidade, e formam uma base no espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m . As equações de base Bernstein estão descritas em detalhe em Rogers & Adams (1990).

Considerando os aspectos matemáticos, o método B-spline apresenta-se na forma paramétrica. A formulação paramétrica de curvas possui vantagens sob vários aspectos, principalmente pela independência dos eixos de coordenadas e pela facilidade de avaliação de pontos da curva. Por esse motivo, para a maioria dos problemas de engenharia, os métodos matemáticos de representação se dá pela forma paramétrica. Dentre eles, os que utilizam malhas de controle são os mais recomendados, e também mais usados em computação gráfica, devido a grande flexibilidade para o projeto da forma do objeto. As propriedades das curvas "B-spline" são extensíveis à formulação para superfícies, suas características fornecem flexibilidade a forma da curva ou superfície, o controle local e a definição do vetor de nós. Alguns algoritmos propostos sugerem que seja construído um limite no entorno da área a ser modelada, esse limite pode ser construído a partir dos pontos coletados em campo ou não, sendo que a maioria dos algoritmos desenvolvidos usam o próprio limite da área para definir a área a ser modelada. Esse polígono em volta da amostra pode ter uma forma bem variada e quando não há possibilidade de criação desse limite deve-se ter a opção de adicionar ou apagar as linhas dos lados dos triângulos formados para que seja feita uma correção na triangulação e impedindo assim distorções no trabalho final (Campos, 1994).

A qualidade do modelo digital resultante vai depender tanto da qualidade dos pontos coletados quanto da qualidade das funções

matemáticas utilizadas nos cálculos, portanto uma amostragem deficiente não resultará em interpolações verdadeiras, assim como uma boa amostragem com interpolação feita por métodos deficientes também não representarão a realidade (Cintra, 1985).

Há uma grande diversidade quanto ao tipo de modelo e quanto aos processos de interpolação, mas de uma maneira geral os pontos são interligados e formam polígonos e depois formam poliedros cujos vértices são os pontos amostrados, resultando assim diferentes classes de poliedros. Se caso a amostragem for feita de maneira aleatória os pontos são unidos formando triângulos (mais freqüentes), e se for feita de maneira regular a união formará retângulos ou quadrados (Pettinati, 1983).

Segundo Cintra (1988) os sistemas automatizados fazem geralmente duas suposições relativas a modelos de triangulação:

- Todos os lados de triângulo têm uma declividade constante, e
- A área de superfície de qualquer triângulo é um plano.

Baseado nestas suposições, são interpoladas as elevações nos cruzamentos ao longo das extremidades dos triângulos, e são construídas as curvas de nível, tal que elas só mudam de direção nos limites dos triângulos. Baseado ainda nestas suposições conclui-se que o somatório da área de todos os triângulos que compõem a superfície resultaria na área total real do relevo levantado, diferente assim da área calculada apenas considerando-se o perímetro projetado num plano. Futuramente poder-se-á

observar a construção das superfícies digitais com triângulos esféricos o que provavelmente fornecerá uma precisão ainda maior dos modelos no que diz respeito ao cálculo de volumes e de áreas de superfície.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Visando ao estudo da metodologia e as aplicações do MDT na Engenharia Rural, principalmente na implantação e estudos de projetos de irrigação e drenagem, escolheu-se uma área com relevo diversificado e compararam-se os resultados obtidos através de quatro métodos de coleta de dados e por diferentes equipamentos.

Compararam-se os resultados obtidos através de diferentes métodos. Compararam-se também, as áreas planas, atualmente utilizadas no desenvolvimento de projetos, com as respectivas áreas reais das superfícies.

A finalidade dessas comparações foi, para se estabelecer e avaliar o método adequado para a coleta de dados e a sua utilização para o desenvolvimento de um MDT que servirá de base aos projetos de Engenharia.

3.1 Material

3.1.1 Descrição da Área do Ensaio

A área selecionada para a coleta de dados está localizada próxima à Prefeitura do Município de Piracicaba, na lateral da Avenida Dr. Paulo de Moraes e Estrada do Bongue, e denominada de Área Verde do Castelinho, como mostra a imagem aerofotogramétrica de 2002 da Figura 4.

Figura 4 - Imagem aerofotogramétrica da área de estudo

Apresenta formato de um polígono irregular, com seu eixo maior perfazendo aproximadamente 450 metros e o eixo menor 180 metros,

com seu relevo bastante diferenciado e declividades variadas, tendo uma área de 57.538,86 m².

Quanto à área empregada para a coleta das amostras com o intuito de se verificar a representatividade da modelagem digital do terreno, utilizou-se uma área de 16.200,00 m², como mostra a Figura 5, localizada dentro da área citada e compreendida entre quatro alinhamentos retos caracterizados como limite do MDT da área de amostragem.

Essa área foi selecionada devido a grande variação de inclinação que ocorre por toda sua extensão, a inexistência de interferências dentro da área, a facilidade de obtenção de plantas e mapas existentes e a existência de marcos georreferenciados próximos a mesma o que possibilita a utilização do mesmo referencial para a obtenção das coordenadas X, Y e Z para comparações entre os resultados obtidos.

A Figura 5 mostra a localização da área de estudo.

Figura 5 - Localização da área de estudo

3.1.2 Equipamentos

3.1.2.1 Coleta de dados de campo

- 01 estação total precisão média $\leq 5''$;
- 01 coletor de dados externo;
- 01 prisma óptico;
- 01 GPS de navegação;
- Demais acessórios convencionais de campo.

3.1.2.2 Coleta de dados de escritório

- 01 Carta Geográfica do IGC (Instituto Geográfico e Cartográfico) do Estado de São Paulo na escala 1:10.000 editada em 1.979 obtida através de aerofotogrametria, adquirida por empréstimo do DAEE - Piracicaba;

- 01 planta digital com dados de coordenadas X, Y e Z da cidade de Piracicaba obtida por aerofotogrametria, baseada em fotos na escala 1:25.000, realizada em 1.993 para o Serviço Municipal de Água e Esgoto (SEMAE).

3.1.2.3 Processamento dos dados

- 01 microprocessador;
- 01 scanner de mesa;
- 01 plotter;

- 01 impressora a jato de tinta;
- software SDR Mapping & Design Versão 6.5 (Sokkia);
- Software AutoCAD 2000 (para acabamento e impressão de desenhos);
- Software GPS-Colet Versão 3.0.1.10;

3.2 Métodos

Utilizaram-se no decorrer do trabalho quatro métodos distintos para a coleta de dados, dos quais dois deles em campo e dois em escritório.

3.2.1 Dados de campo

Para a coleta dos dados de campo utilizaram-se do método de coleta com levantamento topográfico planialtimétrico com Estação Total (Figura 6) e o método de levantamento com GPS de navegação (Figura 7), ambos com armazenamento dos dados coletados no próprio equipamento.

Figura 6 - Estação Total

Figura 7 - GPS navegação

3.2.1.1 Levantamento Planialtimétrico

O levantamento planialtimétrico da área escolhida teve como base o Plano Topográfico Local de Piracicaba. primeiramente, partindo-se do vértice VB16 (sobre o prédio da Prefeitura do Município de Piracicaba) e do vértice VB17 (na Ponte do Mirante), implantados pela empresa Base Aerofotogrametria S/A, transferiram-se as coordenadas e cotas do plano topográfico do município para a área objeto de estudo. A partir daí executou-se o levantamento planialtimétrico desta área coletando-se ângulos, distâncias e alturas de prisma e instrumento de 540 pontos distribuídos de maneira irregular sobre o relevo do terreno, utilizando-se de uma estação total com coletor eletrônico de dados para tanto.

Optou-se por utilizar um coletor de dados eletrônico com o intuito de se evitarem falhas humanas de leitura e digitação, além de visar

à economia de tempo nos serviços de campo e de escritório proporcionada por levantamentos que utilizem esse tipo de instrumento.

Aproveitando-se dos dados do levantamento anteriormente citado e transferindo-os do coletor de dados para o micro computador por um cabo de comunicação, através do módulo de Base de Dados do software SDR Mapping & Design v6.5, os dados coletados em campo como ângulos, distâncias, alturas de instrumento e prisma foram convertidos através de cálculos analíticos para dados de coordenadas X, Y e Z.

Após esta fase os dados coletados já se apresentam na tela do micro computador como pontos de posição ou pontos coordenados, numerados e com identificação própria. Esses pontos representados no plano topográfico local foram convertidos para a projeção UTM com base no datum Córrego Alegre.

Dos 540 pontos levantados em campo, utilizaram-se 105 pontos que localizavam-se dentro da área de estudos, pré-determinada, e desses 105 pontos, 15 pontos foram pré-determinados como pontos de controle.

Estes pontos serviram para se verificar a exatidão dos métodos a serem observados já que considera-se neste trabalho o levantamento planialtimétrico com Estação Total como sendo o mais preciso dentre os métodos analisados. Esses 15 pontos de controle foram extraídos do arquivo do levantamento e separados para uso futuro.

Utilizaram-se então 90 pontos para a modelagem da superfície real, onde criou-se uma fronteira para delimitar a área de interesse e utilizando-se do módulo de Curvas de Nível do software SDR Mapping & Design v6.5, gerou-se uma triangulação dando origem posteriormente a um modelo digital.

Deste modelo digital foram obtidas através do próprio software SDR Mapping as coordenadas Z calculadas na posição de cada pontos de controle.

Ainda de posse dos dados do levantamento planialtimétrico da área foi gerado um MDT com todos os dados de campo, incluindo os pontos de controle, denominado MDT de controle e sobre ele gerada uma malha regular de 20 por 20 metros denominada malha de controle (método híbrido). O valor para a abertura dessa malha foi definida levando-se em consideração o valor da área estudada em metros quadrados e o número de pontos levantados em campo que realmente representasse o relevo.

Gerou-se ainda outra malha denominada malha do levantamento planialtimétrico através do mesmo procedimento, e uma outra tabela de dados baseada no MDT dos 90 pontos do levantamento para comparação com a malha de controle.

3.2.1.2 Levantamento por GPS de navegação

Coletaram-se dados através de um GPS de navegação para comparação dos resultados obtidos na tentativa da utilização deste

equipamento para estudos em áreas rurais visto ser um equipamento de baixo custo e fácil manuseio. Utilizando-se do GPS foram tomados 298 pontos com coordenadas X, Y e Z, que foram gravados no próprio equipamento. Esses pontos foram referenciados ao datum SAD 69 (referencial adotado pelo Sistema Geodésico Brasileiro) na projeção UTM que foram transferidos ao software GPS-Colet no micro computador através de cabo próprio onde foram feitas as transformações para o datum Córrego Alegre. Gerou-se a partir daí uma listagem de pontos em arquivo na extensão DXF.

Desses 298 pontos foram selecionados 64 que localizavam-se na área de interesse. Com esses 64 pontos gerou-se uma triangulação dando origem posteriormente a um modelo digital.

Deste modelo digital foram obtidas através do próprio software SDR Mapping as coordenadas Z na posição dos pontos de controle.

Ainda da superfície triangular criada pelos pontos do levantamento por GPS criou-se uma malha regular de 20 metros por 20 metros nas mesmas referências da malha de controle.

3.2.2 Dados de Escritório

Para a coleta dos dados de escritório utilizou-se a aquisição de dados por computador de uma Planta Digital e através da vetorização de uma imagem rasterizada de uma Carta Geográfica existente da região de estudo.

3.2.2.1 Planta Digital

De posse da planta digital da cidade de Piracicaba fornecida pelo SEMAE, resultado de levantamento aerofotogramétrico realizado pela empresa Base Aerofotogrametria S/A em 1993, já referenciada para o datum Córrego Alegre, e do software Auto CAD criaram-se 94 pontos coordenados sobre os elementos existentes na planta, elementos esses com suas altitudes definidas, sobre a área e em seu entorno, obtendo-se assim pontos com coordenadas X, Y e Z.

Destes 94 pontos foram selecionados 28 pontos que localizavam-se dentro da área de estudos os quais foram utilizados para elaboração do MDT.

Após essa fase criou-se um arquivo de pontos tipo DXF o qual foi importado no software SDR Mapping & Design v 6.5.

Foi criado então o mesmo limite para a área de interesse dos processos anteriores e após esse passo, no módulo de Curvas de Nível, gerou-se uma triangulação dando origem a um modelo digital.

Foram obtidas pelo próprio software as coordenadas Z na posição dos pontos de controle obtendo-se então as diferenças das coordenadas Z em comparação aos pontos de controle.

Da triangulação gerada pelos pontos da planta digital do município gerou-se uma malha regular de 20 metros por 20 metros pelo método híbrido considerando-se a mesma referência para a geração da

malha de controle e obtiveram-se as coordenadas X, Y e Z para os pontos da malha.

3.2.2.2 Carta Geográfica

Quanto a utilização da carta geográfica, já referenciada para o datum Córrego Alegre (referencial adotado na época do Aerolevante para projeção dos dados levantados), executou-se a rasterização ou escanerização de uma parte da carta geográfica onde localiza-se a área de estudos, criando-se assim uma imagem. Esta imagem foi aberta no Auto CAD e então efetuou-se a criação de 274 pontos sobre as linhas de curvas de nível, também chamadas de isolinhas, sobre a área de interesse e seu entorno. Criou-se então pontos com coordenadas X e Y sobre essas linhas. Atribuíram-se valores de Z para cada ponto criado, valores estes que representam os valores das isolinhas onde foram criados os pontos.

Criou-se a partir daí um arquivo DXF com as coordenadas X, Y e Z o qual foi importado no software SDR Mapping & Design v6.5, criou-se então uma fronteira para a área de estudos, selecionando-se 94 pontos e no módulo Curvas de Nível efetuou-se a triangulação dos pontos e conseqüentemente o modelo digital.

Desse modelo digital extraíram-se as coordenadas Z na posição dos pontos de controle.

Também criou-se, como nos métodos anteriores, a malha de 20 metros por 20 metros pelo método híbrido de onde foram obtidas

coordenadas Z de cada ponto da malha gerada, referenciada a malha de controle para posterior comparação.

3.2.3 Análise Estatística

A análise dos resultados do estudo será realizada em duas partes, sendo a primeira parte a comparação dos dados obtidos com os pontos de controle pré-determinados em campo e a segunda análise será relacionada à comparação entre os dados calculados e dados de controle para as malhas geradas pelo método híbrido.

Essa análise será baseada em uma análise de regressão linear simples. Para essa análise será utilizado o método dos mínimos quadrados ajustando-se uma linha a um conjunto de observações. Analisando-se assim como uma variável dependente é afetada por outra variável independente, onde as variáveis dependentes correspondem aos pontos de controle e a malha de controle, sendo analisadas separadamente em relação aos quatro métodos de coleta de dados sugeridos.

Na análise de regressão, será comparado cada método com o de controle, observando a reta que corta a 45° o 1º quadrante do plano cartesiano.

Serão comparados os dados de coordenadas Z obtidos nos MDTs estudados, calculados para as posições X e Y dos pontos de controle, com os dados de coordenada Z de cada ponto de controle levantado em campo.

Será adotado um nível de significância de 0,01 (1%), considerando que, se o Fator de significância for menor que 0,01, então o método analisado será considerado válido e poderá ser aceito.

Será analisado o coeficiente para a variável X verificando-se o quanto as retas da linha de tendência se aproximam de 45°.

Será observado o Coeficiente de Determinação (R^2) que determinará a variação dos dados analisados em relação aos dados de controle.

Serão analisados também os gráficos de regressão linear para cada método, onde será criada uma linha de tendência e observada a inclinação dessa linha.

Uma terceira análise será entre a comparação das áreas superficiais de cada modelo digital com a área superficial real obtida através da interpolação de todos os pontos do levantamento planialtimétrico, inclusive com os pontos de controle.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Dados da rede de referência cadastral

Utilizaram-se de dois vértices da rede de referência cadastral do município para os levantamentos de campo.

O vértice VB 16, localizado no topo da Prefeitura do Município e o vértice VB 17 localizado na Ponte do Mirante conforme apresentado abaixo respectivamente na Figura 8 e Figura 9.

Com a Estação Total, instalada no vértice VB 16, através de visadas de ângulos e distâncias, observaram-se o vértice VB 17 e outros dois vértices na área de estudo.

Através de cálculos analíticos, calcularam-se as coordenadas para os dois vértices implantados na área de estudos.

BASE AEROFOTOGRAMETRIA E PROJETOS S.A.			
MONOGRAFIA DE MARCOS - SEMAE - SERVIÇO MUNICIPAL DE ÁGUA E ESGOTO			
Vértice: VB-016	Ponto Visado: VB-017, VB-018, VB-022 e VB-013	Código BASE VBMP-1016	Obra/Ano: 530/93
Estado: São Paulo	Município: Piracicaba	Local: Prefeitura Municipal	
Sistema de coordenadas: Topográfico Local, referenciado ao elipsóide Hayford Córrego Alegre	Origem do plano topográfico: $\varphi_o = 22^\circ 43' 42.31651'' S$ $\lambda_o = 47^\circ 39' 50.50392'' W$	VB-16 $X_o = 150.000,000$ $y_o = 250.000,000$	Amarração do vértice origem: SF-23-1018 - (IBGE) COD. 10981
Coordenada X 150.000,000	Coordenada Y 250.000,000	Altitude: 531,72 (GPS)	
Erros médios: $\sigma_{lat} = 0,00000$ $\sigma_{long} = 0,000000$ m $\sigma_{alt} = 0,000000$ m			
Descrição: Pino de aço com chapa de alumínio no topo, com as seguintes inscrições: BASE FOTOGRAMETRIA, VB-016.			
Croquis		Itinerário
<p>O VB-016 está localizado na laje do Prédio da Prefeitura.</p>	

Figura 8 - Vértice VB 16

BASE

AEROFOTOGRAMETRIA E PROJETOS S.A.

MONOGRAFIA DE MARCOS - SEMAE - SERVIÇO MUNICIPAL DE ÁGUA E ESGOTO

Vértice: VB-017	Ponto Visado: VB-016	Código BASE VBPMP-2017	Obra/Ano: 530/93
Estado: São Paulo	Município: Piracicaba	Local: Ponte do Mirante	
Sistema de coordenadas: Topográfico Local, referenciado ao elipsóide Hayford Córrego Alegre	Origem do plano topográfico: VB-16 $\varphi_o = 22^{\circ}43'42.31651''S$ $\lambda_o = 47^{\circ}39'50.50392''W$ $H_o = 550,000$ m $X_o = 150.000,000$ $y_o = 250.000,000$		Amarração do vértice origem: SF-23-1018 - (IBGE) COD. 10981
Coordenada X 151.447,461	Coordenada Y 251.534,568		Altitude: 486,02 (GPS)
Erros médios: $\sigma_{lat}=0,002243$ m $\sigma_{long}=0,002332$ m $\sigma_{alt}=0,002124$ m			
Descrição: Pino de aço com chapa de alumínio no topo, com as seguintes inscrições: BASE FOTOGRAMETRIA. VB-017.			

Croquis	Itinerário
	<p>O VB-017 está localizado do lado direito da Ponte do Mirante.</p>

Figura 9 - Vértice VB 17

4.2 Dados de campo

Coletaram-se dados na área de estudo através de levantamento planialtimétrico com Estação Total e levantamento com GPS de navegação.

Dessa área levantada selecionaram-se pontos em uma área empregada para a coleta das amostras com o intuito de se verificar a representatividade da modelagem digital do terreno, projetou-se um limite na área com 16.200,00 m², pré-determinado, como mostra a Figura 5, localizada dentro da área total, compreendida entre quatro alinhamentos retos cujos vértices são caracterizados a seguir pelas coordenadas N (Y) e E (X) na projeção UTM (Universal Transversal Mercator), fuso 23K (45° W), projetadas no datum Córrego Alegre.

Abaixo, na Tabela 1, a descrição dos vértices que delimitam a área de amostragem:

Tabela 1. Coordenadas dos vértices do limite da área de amostragem

VÉRTICES	COORDENADA N	COORDENADA E
1	7.484.217,0864	226.055,5824
2	7.484.127,0371	226.170,7368
3	7.484.041,0038	226.119,8581
4	7.484.103,3465	225.995,2822

4.2.1 Levantamento Planialtimétrico

Das estações de levantamento implantadas em campo, georreferenciadas a partir dos vértice VB 16 e VB 17 da rede de referência cadastral do município, realizou-se um caminhamento com a Estação Total e conseqüentemente uma poligonal e a partir dos vértices dessa poligonal levantaram-se em campo 540 pontos por irradiação, coletando-se ângulos, distâncias e alturas que após processamento transformaram-se em pontos coordenados distribuídos por toda a superfície da área de interesse. A Figura 10 demonstra a disposição dos pontos levantados em campo.

Figura 10 - Pontos do levantamento planialtimétrico

Foram utilizados desses 540 pontos, apenas 105 pontos que localizavam-se dentro da área de estudos como mostra a Figura 11.

Figura 11 - 105 pontos selecionados do levantamento planialtimétrico

Desses 105 pontos, 15 pontos foram determinados como pontos de controle. Esses 15 pontos de controle foram extraídos do arquivo do levantamento e separados para a verificação das distorções nos modelos matemáticos a serem analisados.

A Tabela 2 demonstra os dados dos pontos de controle pré-determinados no levantamento de campo:

Tabela 2. Coordenadas dos pontos de controle

Pontos	Y	X	Z
A	7484128,779	226157,657	471,775
B	7484145,400	226136,816	473,061
C	7484165,088	226104,324	473,187
D	7484153,295	226095,924	478,356
E	7484084,127	226060,969	503,858
F	7484121,456	226026,334	497,437
G	7484126,258	226063,894	493,689
H	7484098,061	226073,007	500,035
I	7484108,390	226103,399	491,529
J	7484076,013	226086,643	504,638
K	7484085,405	226110,537	496,112
L	7484108,335	226135,135	483,355
M	7484131,088	226100,391	484,751
N	7484163,122	226069,647	483,756
O	7484181,412	226083,136	473,486

A Figura 12 mostra a disposição dos pontos de controle:

Figura 12 - 15 pontos selecionados para controle

Após serem isolados esses 15 pontos de controle, restaram 90 pontos que fizeram parte da superfície do levantamento planialtimétrico a ser estudada.

A Figura 13 demonstra a disposição dos 90 pontos que integraram a superfície do MDT estudado.

Figura 13 - 90 pontos utilizados para geração do MDT do levantamento planialtimétrico

A Tabela 3 apresenta os dados dos 90 pontos restantes na coleta de campo e que foram utilizados para a geração do MDT do levantamento planialtimétrico:

Tabela 3. Coordenadas dos pontos do levantamento planialtimétrico

Pontos	X	Y	Z		Pontos	X	Y	Z
1	7484122,959	226165,777	471,829		46	7484131,368	226028,960	496,510
2	7484120,163	226162,455	472,474		47	7484145,362	226042,195	493,923
3	7484131,688	226161,687	470,872		48	7484154,472	226051,677	490,199
4	7484133,951	226149,690	473,027		49	7484142,868	226065,692	490,012
5	7484138,214	226153,664	471,350		50	7484129,762	226078,408	490,598
6	7484142,199	226157,226	470,219		51	7484122,272	226079,390	492,165
7	7484144,123	226146,976	471,580		52	7484110,207	226075,586	496,556
8	7484140,070	226143,690	473,123		53	7484089,635	226086,186	500,042
9	7484135,722	226139,589	474,636		54	7484100,414	226096,495	495,053
10	7484141,088	226132,862	474,778		55	7484102,573	226116,285	489,736
11	7484150,624	226141,505	471,010		56	7484094,605	226109,718	493,331
12	7484154,797	226133,875	471,211		57	7484088,273	226102,906	496,962
13	7484149,515	226130,724	473,075		58	7484086,457	226085,374	501,142
14	7484147,006	226128,723	473,968		59	7484071,713	226086,244	504,817
15	7484147,734	226125,509	474,168		60	7484058,499	226097,648	505,022
16	7484151,835	226118,789	474,189		61	7484068,176	226095,714	504,553
17	7484156,204	226121,941	472,948		62	7484074,424	226101,121	501,299
18	7484161,144	226125,218	471,207		63	7484078,191	226103,569	499,242
19	7484166,543	226115,680	471,283		64	7484092,662	226117,564	492,680
20	7484160,153	226112,107	473,304		65	7484099,984	226124,554	488,854
21	7484170,592	226108,100	471,245		66	7484120,601	226119,829	484,615
22	7484176,973	226112,422	469,679		67	7484127,446	226108,743	485,152
23	7484158,271	226100,406	475,697		68	7484116,036	226114,560	485,299
24	7484149,413	226092,531	480,117		69	7484102,925	226132,164	484,005
25	7484091,860	225991,964	495,918		70	7484094,344	226152,960	482,894
26	7484103,347	225995,282	495,864		71	7484084,376	226141,260	488,500
27	7484116,345	225996,228	494,918		72	7484069,301	226133,047	494,854
28	7484124,688	226013,722	496,699		73	7484051,492	226126,090	499,572
29	7484112,600	226011,396	497,193		74	7484041,004	226119,858	504,416
30	7484099,577	226009,610	497,686		75	7484183,806	226103,280	469,482
31	7484085,763	226006,995	497,614		76	7484178,640	226099,213	470,696
32	7484075,245	226032,314	501,662		77	7484171,517	226092,827	473,723
33	7484073,805	226057,411	504,019		78	7484159,353	226084,021	479,754
34	7484067,982	226066,747	504,717		79	7484154,524	226079,067	483,059
35	7484078,484	226078,139	504,603		80	7484168,238	226072,766	480,787
36	7484087,541	226043,605	502,163		81	7484175,691	226077,208	477,101
37	7484087,425	226032,340	501,318		82	7484187,053	226088,046	470,801
38	7484096,805	226053,321	501,816		83	7484191,608	226092,286	469,296
39	7484110,634	226041,762	498,392		84	7484217,086	226055,582	470,219
40	7484115,215	226022,054	497,618		85	7484209,248	226050,653	473,977
41	7484110,039	226032,528	498,796		86	7484202,216	226045,474	477,265
42	7484138,816	226014,022	495,393		87	7484194,593	226043,905	480,806
43	7484153,813	226023,881	494,497		88	7484131,464	226015,629	496,428
44	7484163,578	226027,722	493,129		89	7484090,167	226070,959	503,281
45	7484174,948	226034,739	489,764		90	7484081,732	226121,646	494,854

De posse desses 90 pontos restantes foi criada uma fronteira que delimita a área de interesse e utilizando-se do módulo de Curvas de Nível do software SDR Mapping & Design v6.5, gerou-se uma triangulação dando origem posteriormente a um modelo digital.

A Figura 14 mostra o esquema de triangulação dos 90 pontos do levantamento planialtimétrico:

Figura 14 - Triangulação dos 90 pontos de campo

Após a triangulação dos pontos de campo gerou-se um modelo matemático da superfície. As Figuras 15 e 16 representam graficamente esse modelo, sendo, a Figura 15 uma vista a partir das coordenadas N 7484500 m, E 226000 m e H 600 m em perspectiva e a Figura 16 uma visão

em planta da área de estudo com isolinhas de nível representadas a cada metro de desnível.

Figura 15 - Representação gráfica do MDT do levantamento planialtimétrico

Figura 16 - Representação em planta do MDT do levantamento planialtimétrico

As coordenadas Z dos 15 pontos de controle foram determinadas a partir do modelo digital dos 90 pontos do levantamento planialtimétrico através do próprio software SDR Mapping.

Como resultado temos as coordenadas Z calculadas no MDT em relação as coordenadas X e Y obtidas em campo no levantamento dos pontos de controle como demonstra a Tabela 4.

Tabela 4. Coordenadas Z calculadas nos pontos de controle para o levantamento planialtimétrico

Pontos	Y	X	Z calculado
A	7484128,779	226157,657	472,157
B	7484145,400	226136,816	473,066
C	7484165,088	226104,324	473,293
D	7484153,295	226095,924	478,195
E	7484084,127	226060,969	503,288
F	7484121,456	226026,334	497,294
G	7484126,258	226063,894	493,167
H	7484098,061	226073,007	499,520
I	7484108,390	226103,399	490,924
J	7484076,013	226086,643	503,621
K	7484085,405	226110,537	495,973
L	7484108,335	226135,135	482,108
M	7484131,088	226100,391	485,500
N	7484163,122	226069,647	483,079
O	7484181,412	226083,136	473,792

De posse dos dados do levantamento planialtimétrico da área gerou-se uma triangulação com os 105 dados de campo, incluindo os pontos de controle como mostra a Figura 17.

Figura 17 - Triangulação dos 105 dados de campo (MDT controle)

Após a triangulação dos 105 dados gerou-se um MDT, denominado de MDT de controle para comparação de dados obtidos através do método híbrido.

A Figura 18 representa graficamente esse modelo, sendo, uma vista a partir das coordenadas N 7484500 m, E 226000 m e H 600 m em perspectiva e Figura 19 representa uma visão em planta da área de estudo com isolinhas de nível representadas a cada metro de desnível.

Figura 18 - Representação gráfica do MDT de controle

Figura 19 - Representação em planta do MDT de controle
Sobre o MDT de controle gerou-se uma malha regular de 20 metros por 20 metros denominada malha de controle

A Figura 20 ilustra o posicionamento dos pontos gerados para a malha de 20 metros por 20 metros dentro da área de estudos.

Figura 20 - Disposição dos pontos da malha - método híbrido

A Tabela 5 demonstra os dados obtidos através deste método.

Tabela 5. Coordenadas da malha de controle gerada através do método híbrido

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484062,070	226088,881	504,964		22	7484122,070	226108,881	486,281
2	7484062,070	226108,881	501,715		23	7484122,070	226128,881	481,516
3	7484062,070	226128,881	497,042		24	7484122,070	226148,881	475,999
4	7484082,070	226048,881	502,869		25	7484142,070	226028,881	495,360
5	7484082,070	226068,881	504,143		26	7484142,070	226048,881	493,329
6	7484082,070	226088,881	501,803		27	7484142,070	226068,881	489,418
7	7484082,070	226108,881	497,254		28	7484142,070	226088,881	483,636
8	7484082,070	226128,881	492,679		29	7484142,070	226108,881	479,414
9	7484102,070	226008,881	497,446		30	7484142,070	226128,881	475,361
10	7484102,070	226028,881	499,252		31	7484142,070	226148,881	471,591
11	7484102,070	226048,881	500,508		32	7484162,070	226028,881	493,198
12	7484102,070	226068,881	499,251		33	7484162,070	226048,881	489,168
13	7484102,070	226088,881	496,071		34	7484162,070	226068,881	484,210
14	7484102,070	226108,881	491,709		35	7484162,070	226088,881	477,633
15	7484102,070	226128,881	486,218		36	7484162,070	226108,881	473,291
16	7484102,070	226148,881	480,915		37	7484182,070	226048,881	483,363
17	7484122,070	226008,881	496,230		38	7484182,070	226068,881	477,647
18	7484122,070	226028,881	497,372		39	7484182,070	226088,881	471,909
19	7484122,070	226048,881	495,888		40	7484202,070	226048,881	477,052
20	7484122,070	226068,881	494,094		41	7484202,070	226068,881	472,511
21	7484122,070	226088,881	490,184					

Gerou-se ainda outra malha denominada malha do levantamento planialtimétrico através do mesmo procedimento, e uma outra tabela de dados baseada no MDT dos 90 pontos do levantamento para comparação com a malha de controle.

A Tabela 6 representa os dados obtidos:

Tabela 6. Coordenadas da malha do levantamento planialtimétrico gerada através do método híbrido

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484062,070	226088,881	504,964		22	7484122,070	226108,881	486,177
2	7484062,070	226108,881	501,716		23	7484122,070	226128,881	481,175
3	7484062,070	226128,881	497,079		24	7484122,070	226148,881	475,671
4	7484082,070	226048,881	502,823		25	7484142,070	226028,881	495,360
5	7484082,070	226068,881	503,847		26	7484142,070	226048,881	493,137
6	7484082,070	226088,881	501,622		27	7484142,070	226068,881	489,418
7	7484082,070	226108,881	497,138		28	7484142,070	226088,881	483,694
8	7484082,070	226128,881	492,497		29	7484142,070	226108,881	479,706
9	7484102,070	226008,881	497,446		30	7484142,070	226128,881	475,361
10	7484102,070	226028,881	499,252		31	7484142,070	226148,881	471,591
11	7484102,070	226048,881	500,508		32	7484162,070	226028,881	493,198
12	7484102,070	226068,881	499,051		33	7484162,070	226048,881	489,058
13	7484102,070	226088,881	496,120		34	7484162,070	226068,881	483,582
14	7484102,070	226108,881	491,616		35	7484162,070	226088,881	477,633
15	7484102,070	226128,881	485,963		36	7484162,070	226108,881	473,331
16	7484102,070	226148,881	480,047		37	7484182,070	226048,881	483,364
17	7484122,070	226008,881	496,230		38	7484182,070	226068,881	477,647
18	7484122,070	226028,881	497,400		39	7484182,070	226088,881	471,941
19	7484122,070	226048,881	495,666		40	7484202,070	226048,881	477,053
20	7484122,070	226068,881	493,362		41	7484202,070	226068,881	472,511
21	7484122,070	226088,881	490,423					

4.2.2 Levantamento por GPS de navegação

Utilizando-se do GPS foram tomados 298 pontos com coordenadas X, Y e Z, que foram gravados no próprio equipamento. A Figura 21 demonstra a disposição dos pontos coletados com GPS dentro da área de interesse.

Figura 21 - Pontos do levantamento por GPS de navegação

Desses pontos foram selecionados 64 que localizavam-se na área de interesse. Esses pontos foram referenciados ao datum SAD 69 (referencial adotado pelo Sistema Geodésico Brasileiro) na projeção UTM que foram transferidos ao software GPS-Colet no micro computador através de cabo próprio onde foram feitas as transformações para o datum Córrego Alegre. Gerou-se a partir daí uma listagem de pontos em arquivo na extensão DXF.

A Figura 22 demonstra a posição dos pontos dentro da área de estudos que integraram o MDT.

Figura 22 - 64 pontos selecionados do levantamento por GPS

A Tabela 7 demonstra os pontos coletados em campo.

Tabela 7. Coordenadas dos 64 pontos do levantamento por GPS de navegação.

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484071,541	226031,915	509,619		33	7484117,736	226131,282	475,012
2	7484057,201	226064,754	508,658		34	7484129,459	226114,304	475,733
3	7484045,988	226078,728	507,456		35	7484145,944	226095,054	475,973
4	7484031,119	226101,576	506,014		36	7484160,915	226077,735	476,213
5	7484052,402	226081,425	505,533		37	7484172,313	226058,921	475,733
6	7484066,770	226068,813	506,014		38	7484186,003	226042,360	475,252
7	7484086,791	226057,248	506,254		39	7484194,710	226032,826	475,492
8	7484098,022	226043,926	506,495		40	7484191,508	226061,781	474,771
9	7484108,427	226032,006	505,293		41	7484173,947	226085,001	474,771
10	7484122,628	226027,008	504,332		42	7484153,137	226105,145	475,012
11	7484116,335	226039,261	502,650		43	7484143,233	226116,537	475,733
12	7484103,220	226058,003	501,448		44	7484109,355	226152,667	476,694
13	7484094,764	226067,547	501,208		45	7484095,822	226166,902	475,973
14	7484079,495	226083,842	499,765		46	7484147,494	226148,054	470,446
15	7484065,916	226093,608	499,285		47	7484185,178	226094,066	470,446
16	7484054,101	226102,813	499,765		48	7484197,002	226078,987	469,484
17	7484049,840	226118,155	497,362		49	7484209,885	226059,881	469,965
18	7484059,187	226127,632	492,075		50	7484205,959	226084,375	467,321
19	7484059,168	226128,432	491,594		51	7484182,393	226116,358	468,042
20	7484076,358	226111,047	491,835		52	7484162,159	226142,807	467,562
21	7484092,759	226093,864	491,354		53	7484147,716	226162,967	468,042
22	7484104,306	226082,703	490,393		54	7484136,653	226177,631	468,042
23	7484119,955	226071,241	488,470		55	7484216,355	226066,898	466,120
24	7484134,592	226060,185	486,067		56	7484209,366	226050,050	469,244
25	7484147,401	226053,935	483,904		57	7484177,056	226022,330	473,089
26	7484150,844	226037,277	486,307		58	7484159,198	226018,898	479,818
27	7484128,095	226114,428	482,222		59	7484144,319	226012,807	482,222
28	7484110,014	226132,964	479,097		60	7484126,841	226011,592	489,191
29	7484085,714	226142,734	477,896		61	7484112,872	226002,386	492,556
30	7484076,590	226146,495	478,376		62	7484103,461	226013,509	493,757
31	7484097,084	226154,499	475,733		63	7484089,631	226004,257	494,959
32	7484104,640	226144,038	475,012		64	7484114,385	225990,644	493,998

Com esses 64 pontos gerou-se uma triangulação dando origem posteriormente a um modelo digital como demonstrado da Figura 23.

Figura 23 - Triangulação dos 64 pontos do levantamento por GPS de navegação

As Figuras 24 e 25 representam graficamente esse modelo, sendo a Figura 24 uma vista a partir das coordenadas N 7484500 m, E 226000 m e H 600 m em perspectiva e a Figura 25 uma visão em planta da área de estudo com isolinhas de nível representadas a cada metro de desnível.

Figura 24 - Representação gráfica do MDT do GPS

Figura 25 - Representação em planta do MDT do GPS

Foram obtidas através do próprio software SDR Mapping as coordenadas Z na posição dos pontos de controle para o MDT do GPS de navegação.

Como resultado temos as coordenadas Z calculadas no MDT em relação às coordenadas X e Y obtidas em campo no levantamento dos pontos de controle como demonstra a Tabela 8.

Tabela 8. Coordenadas Z calculadas nos pontos de controle para o levantamento por GPS de navegação.

Pontos	Y	X	Z calculado
A	7484128,779	226157,657	472,324
B	7484145,400	226136,816	472,367
C	7484165,088	226104,324	472,972
D	7484153,295	226095,924	475,543
E	7484084,127	226060,969	505,598
F	7484121,456	226026,334	503,774
G	7484126,258	226063,894	488,447
H	7484098,061	226073,007	497,368
I	7484108,390	226103,399	487,197
J	7484076,013	226086,643	499,549
K	7484085,405	226110,537	489,727
L	7484108,335	226135,135	478,373
M	7484131,088	226100,391	481,878
N	7484163,122	226069,647	476,807
O	7484181,412	226083,136	473,048

Ainda da superfície triangular criada pelos pontos do levantamento por GPS de navegação criou-se uma malha regular de 20

metros por 20 metros nas mesmas referências da malha de controle obtendo-se os resultados da Tabela 9.

Tabela 9. Coordenadas calculadas do levantamento por GPS através do método híbrido

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484062,070	226088,881	501,450		22	7484122,070	226108,881	484,010
2	7484062,070	226108,881	496,203		23	7484122,070	226128,881	475,118
3	7484062,070	226128,881	490,462		24	7484122,070	226148,881	474,577
4	7484082,070	226048,881	507,341		25	7484142,070	226028,881	489,283
5	7484082,070	226068,881	503,650		26	7484142,070	226048,881	486,453
6	7484082,070	226088,881	497,095		27	7484142,070	226068,881	482,474
7	7484082,070	226108,881	490,883		28	7484142,070	226088,881	478,333
8	7484082,070	226128,881	483,939		29	7484142,070	226108,881	475,815
9	7484102,070	226008,881	493,797		30	7484142,070	226128,881	473,843
10	7484102,070	226028,881	503,340		31	7484142,070	226148,881	471,307
11	7484102,070	226048,881	504,107		32	7484162,070	226028,881	482,568
12	7484102,070	226068,881	497,399		33	7484162,070	226048,881	481,822
13	7484102,070	226088,881	490,125		34	7484162,070	226068,881	477,238
14	7484102,070	226108,881	486,372		35	7484162,070	226088,881	475,404
15	7484102,070	226128,881	481,661		36	7484162,070	226108,881	473,101
16	7484102,070	226148,881	475,438		37	7484182,070	226048,881	475,974
17	7484122,070	226008,881	490,458		38	7484182,070	226068,881	474,955
18	7484122,070	226028,881	503,874		39	7484182,070	226088,881	472,107
19	7484122,070	226048,881	496,248		40	7484202,070	226048,881	474,416
20	7484122,070	226068,881	488,421		41	7484202,070	226068,881	470,189
21	7484122,070	226088,881	486,161					

4.3 Dados de Escritório

4.3.1 Planta Digital

De posse da planta digital da cidade de Piracicaba fornecida pelo SEMAE, resultado de levantamento aerofotogramétrico realizado pela empresa Base Aerofotogrametria S/A em 1993, já referenciada para o datum Córrego Alegre, e do software Auto CAD criaram-se 94 pontos

coordenados sobre os elementos existentes na planta. Esses elementos já continham as coordenadas Z, tanto para as isolinha de nível quanto para outras linhas de representações diversas e pontos isolados como demonstrado na Figura 26.

Figura 26 - Pontos coletados na Planta Digital do Município

Desses 94 pontos, selecionaram-se 28 pontos localizados sobre a área de interesse, obtendo-se assim pontos com coordenadas X, Y e Z.

A Figura 27 demonstra a disposição dos pontos coletados na Planta Digital e utilizados para a geração do MDT.

Figura 27 - 28 pontos da Planta Digital dentro da área de estudos

A Tabela 10 mostra os dados obtidos da Planta Digital:

Tabela 10. Coordenadas obtidas através da planta digital

Pontos	Y	X	Z	Pontos	Y	X	Z
1	7484175,580	226137,700	468,500	15	7484177,930	226096,340	470,000
2	7484164,700	226040,980	490,000	16	7484204,170	226066,030	470,000
3	7484199,620	226036,720	480,000	17	7484222,590	226042,950	470,000
4	7484100,570	225955,970	490,000	18	7484134,820	226072,690	490,000
5	7484141,230	225975,390	490,000	19	7484107,500	226105,780	490,000
6	7484175,370	226004,330	490,000	20	7484077,400	226137,870	490,000
7	7484069,880	226165,050	480,000	21	7484071,000	226013,390	501,560
8	7484099,620	226144,410	480,000	22	7484037,490	226133,680	500,000
9	7484118,960	226122,660	480,000	23	7484057,720	226116,780	500,000
10	7484138,920	226102,390	480,000	24	7484077,840	226097,260	500,000
11	7484168,250	226068,820	480,000	25	7484093,160	226076,090	500,000
12	7484108,230	226190,560	470,000	26	7484083,400	226043,340	500,000
13	7484130,720	226159,270	470,000	27	7484034,510	226113,760	506,960
14	7484155,910	226128,680	470,000	28	7484059,490	226074,730	506,960

Após essa fase criou-se um arquivo de pontos tipo DXF o qual foi importado no software SDR Mapping & Design v6.5. Foi criado então o mesmo limite para a área de interesse dos processos anteriores e após esse passo, no módulo de Curvas de Nível, gerou-se uma triangulação dando origem a um modelo digital. A Figura 28 representa essa triangulação.

Figura 28 - Triangulação dos 28 pontos da planta digital do município

As coordenadas Z dos 15 pontos de controle foram determinadas a partir do modelo digital dos 28 pontos da planta digital através do próprio software SDR Mapping. A Tabela 11 mostra essas coordenadas.

Tabela 11. Coordenadas Z calculadas da Planta Digital nos pontos de controle

Pontos	Y	X	Z calculado
A	7484128,779	226157,657	470,762
B	7484145,400	226136,816	471,224
C	7484165,088	226104,324	472,984
D	7484153,295	226095,924	477,413
E	7484084,127	226060,969	500,947
F	7484121,456	226026,334	494,694
G	7484126,258	226063,894	491,961
H	7484098,061	226073,007	498,636
I	7484108,390	226103,399	490,277
J	7484076,013	226086,643	501,909
K	7484085,405	226110,537	494,683
L	7484108,335	226135,135	479,894
M	7484131,088	226100,391	483,313
N	7484163,122	226069,647	481,466
O	7484181,412	226083,136	472,804

Da triangulação gerada pelos 28 pontos da planta digital do município gerou-se uma malha regular de 20 metros por 20 metros pelo método híbrido considerando-se a mesma referência para a geração da malha de controle e obtiveram-se os dados da Tabela 12.

Tabela 12. Coordenadas calculadas da planta digital através do método híbrido

Pontos	X	Y	Z		Pontos	X	Y	Z
1	7484062,070	226088,881	504,086		22	7484122,070	226108,881	483,724
2	7484062,070	226108,881	500,635		23	7484122,070	226128,881	478,142
3	7484062,070	226128,881	495,807		24	7484122,070	226148,881	474,037
4	7484082,070	226048,881	500,624		25	7484142,070	226028,881	492,227
5	7484082,070	226068,881	501,871		26	7484142,070	226048,881	490,710
6	7484082,070	226088,881	500,368		27	7484142,070	226068,881	488,771
7	7484082,070	226108,881	495,981		28	7484142,070	226088,881	482,880
8	7484082,070	226128,881	490,999		29	7484142,070	226108,881	477,775
9	7484102,070	226008,881	496,493		30	7484142,070	226128,881	473,342
10	7484102,070	226028,881	497,185		31	7484142,070	226148,881	470,053
11	7484102,070	226048,881	496,757		32	7484162,070	226028,881	489,534
12	7484102,070	226068,881	497,409		33	7484162,070	226048,881	488,383
13	7484102,070	226088,881	494,989		34	7484162,070	226068,881	482,056
14	7484102,070	226108,881	490,670		35	7484162,070	226088,881	476,635
15	7484102,070	226128,881	484,273		36	7484162,070	226108,881	472,855
16	7484102,070	226148,881	478,644		37	7484182,070	226048,881	481,880
17	7484122,070	226008,881	494,014		38	7484182,070	226068,881	475,998
18	7484122,070	226028,881	494,707		39	7484182,070	226088,881	471,051
19	7484122,070	226048,881	493,733		40	7484202,070	226048,881	475,722
20	7484122,070	226068,881	492,722		41	7484202,070	226068,881	470,219
21	7484122,070	226088,881	489,784					

Após a triangulação dos pontos de campo gerou-se um modelo matemático da superfície. As Figuras 29 e 30 representam graficamente esse modelo, sendo a Figura 29 uma vista perspectiva a partir das coordenadas N 7484500 m, E 226000 m e H 600 m e a Figura 30 uma visão em planta da área de estudo com isolinhas de nível representadas a cada metro de desnível.

Figura 29 - Representação gráfica do MDT da Planta Digital

Figura 30 - Representação em planta do MDT da Planta Digital

4.3.2 Carta Geográfica

Quanto a utilização da carta geográfica, já referenciada para o datum Córrego Alegre (referencial adotado na época do Aerolevantamento para projeção dos dados levantados), executou-se a rasterização ou escanerização de uma parte da carta geográfica onde localiza-se a área de estudos, criando-se assim uma imagem. Esta imagem foi aberta no Auto CAD e então efetuou-se a criação de 274 pontos sobre as linhas de curvas de nível, também chamadas de isolinhas, sobre a área de interesse e seu entorno. Criou-se então pontos com coordenadas X e Y sobre essas linhas. Atribuíram-se valores de Z para cada ponto criado, valores estes que representam os valores das isolinhas. A Figura 31 mostra a parte da Carta Geográfica em que foram criados os pontos sobre as linhas de curvas de nível.

Figura 31 - Pontos coletados na Carta Geográfica

Desses 274 pontos selecionaram-se 94 pontos que localizavam-se dentro da área de estudos.

A Figura 32 demonstra a disposição dos pontos coletados na Carta Geográfica, para a área de estudos, que integraram o MDT.

Figura 32 - 94 pontos selecionados na Carta Geográfica

A Tabela 13 demonstra os dados dos pontos obtidos da carta geográfica:

Tabela 13. Coordenadas obtidas através da Carta Geográfica

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484203,894	226044,079	475,000		48	7484158,279	226033,951	490,000
2	7484196,715	226052,860	475,000		49	7484149,571	226044,117	490,000
3	7484189,137	226063,238	475,000		50	7484139,653	226055,734	490,000
4	7484181,959	226075,613	475,000		51	7484131,187	226065,657	490,000
5	7484174,381	226086,789	475,000		52	7484122,221	226075,554	490,000
6	7484166,804	226094,772	475,000		53	7484116,420	226082,940	490,000
7	7484159,226	226101,957	475,000		54	7484108,511	226089,536	490,000
8	7484152,845	226109,941	475,000		55	7484100,073	226101,143	490,000
9	7484146,863	226122,714	475,000		56	7484090,054	226113,279	490,000
10	7484143,672	226134,689	475,000		57	7484081,353	226123,567	490,000
11	7484136,892	226146,265	475,000		58	7484071,334	226132,537	490,000
12	7484130,224	226154,125	475,000		59	7484058,414	226142,562	490,000
13	7484123,444	226160,911	475,000		60	7484097,239	225991,762	495,000
14	7484111,879	226169,293	475,000		61	7484107,249	225996,024	495,000
15	7484206,882	226091,805	470,000		62	7484117,471	226003,269	495,000
16	7484195,325	226100,385	470,000		63	7484126,416	226014,350	495,000
17	7484183,767	226108,965	470,000		64	7484131,314	226025,857	495,000
18	7484175,937	226119,037	470,000		65	7484131,314	226037,363	495,000
19	7484168,481	226130,974	470,000		66	7484126,842	226049,297	495,000
20	7484161,397	226144,030	470,000		67	7484119,175	226059,738	495,000
21	7484152,449	226156,341	470,000		68	7484109,378	226072,950	495,000
22	7484145,365	226167,905	470,000		69	7484099,369	226087,014	495,000
23	7484136,417	226181,707	470,000		70	7484093,831	226095,750	495,000
24	7484193,357	226039,981	480,000		71	7484086,803	226107,257	495,000
25	7484183,860	226051,141	480,000		72	7484076,581	226117,699	495,000
26	7484173,921	226063,958	480,000		73	7484066,571	226127,075	495,000
27	7484163,761	226078,543	480,000		74	7484054,218	226136,877	495,000
28	7484149,847	226096,221	480,000		75	7484079,479	226016,713	500,000
29	7484137,479	226113,237	480,000		76	7484089,271	226026,887	500,000
30	7484127,319	226127,269	480,000		77	7484098,309	226038,568	500,000
31	7484117,160	226138,319	480,000		78	7484103,581	226050,625	500,000
32	7484107,221	226148,926	480,000		79	7484103,204	226063,437	500,000
33	7484097,282	226158,207	480,000		80	7484096,426	226074,740	500,000
34	7484191,497	226033,413	485,000		81	7484085,881	226087,552	500,000
35	7484183,605	226041,653	485,000		82	7484075,337	226099,232	500,000
36	7484171,939	226050,579	485,000		83	7484066,299	226109,406	500,000
37	7484159,243	226061,565	485,000		84	7484055,378	226120,333	500,000
38	7484148,607	226071,864	485,000		85	7484045,210	226130,507	500,000
39	7484137,970	226084,910	485,000		86	7484030,899	226055,901	505,000
40	7484128,019	226095,896	485,000		87	7484027,886	226066,451	505,000
41	7484117,383	226106,882	485,000		88	7484029,393	226079,639	505,000
42	7484105,716	226118,040	485,000		89	7484029,393	226092,450	505,000
43	7484094,736	226126,966	485,000		90	7484022,238	226104,131	505,000
44	7484085,129	226136,236	485,000		91	7484014,329	226111,667	505,000
45	7484074,835	226147,222	485,000		92	7484238,235	226060,613	470,000
46	7484173,518	226014,831	490,000		93	7484228,940	226070,495	470,000
47	7484165,778	226024,996	490,000		94	7484218,774	226081,248	470,000

Criou-se a partir daí um arquivo DXF com as coordenadas X, Y e Z o qual foi importado no do software SDR Mapping & Design v6.5, criou-se então a fronteira e no módulo *Curvas de Nível* efetuou-se a triangulação dos 94 pontos .

A Figura 33 mostra a triangulação gerada para os dados da carta geográfica.

Figura 33 - Triangulação dos 94 pontos da *Carta Geográfica*

Dessa triangulação gerou-se um modelo digital para obtenção dos dados.

A Figura 34 representa graficamente esse modelo em uma vista perspectiva a partir das coordenadas N 7484500 m, E 226000 m e H 600 m

e a Figura 35 representa uma visão em planta da área de estudo com isolinhas de nível representadas a cada metro de desnível.

Figura 34 - Representação gráfica do MDT da Carta Geográfica

Figura 35 - Representação em planta do MDT da Carta Geográfica

As coordenadas Z dos 15 pontos de controle foram determinadas a partir do modelo digital dos 94 pontos da Carta Geográfica através do próprio software SDR Mapping.

A Tabela 14 representa estes dados.

Tabela 14. Coordenadas Z calculadas da Carta Geográfica nos pontos de controle

Pontos	Y	X	Z calculado
A	7484128,779	226157,657	474,640
B	7484145,400	226136,816	474,347
C	7484165,088	226104,324	473,737
D	7484153,295	226095,924	478,984
E	7484084,127	226060,969	500,643
F	7484121,456	226026,334	496,309
G	7484126,258	226063,894	491,878
H	7484098,061	226073,007	499,750
I	7484108,390	226103,399	487,683
J	7484076,013	226086,643	500,839
K	7484085,405	226110,537	494,009
L	7484108,335	226135,135	481,786
M	7484131,088	226100,391	483,564
N	7484163,122	226069,647	482,091
O	7484181,412	226083,136	474,245

Também criou-se, como dos métodos anteriores, a malha de 20 metros por 20 metros pelo método híbrido de onde foram obtidas

coordenadas Z de cada ponto da malha gerada, referenciada a malha de controle para posterior comparação. A Tabela 15 mostra os dados da malha gerada para o MDT da Carta Geográfica:

Tabela 15. Coordenadas calculadas da Carta Geográfica através do método híbrido

Pontos	Y	X	Z		Pontos	Y	X	Z
1	7484062,070	226088,881	501,778		22	7484122,070	226108,881	483,758
2	7484062,070	226108,881	500,441		23	7484122,070	226128,881	480,626
3	7484062,070	226128,881	495,565		24	7484122,070	226148,881	477,321
4	7484082,070	226048,881	500,671		25	7484142,070	226028,881	493,031
5	7484082,070	226068,881	500,835		26	7484142,070	226048,881	490,715
6	7484082,070	226088,881	500,205		27	7484142,070	226068,881	486,999
7	7484082,070	226108,881	495,813		28	7484142,070	226088,881	483,260
8	7484082,070	226128,881	488,145		29	7484142,070	226108,881	479,451
9	7484102,070	226008,881	496,895		30	7484142,070	226128,881	475,859
10	7484102,070	226028,881	498,799		31	7484142,070	226148,881	473,437
11	7484102,070	226048,881	500,000		32	7484162,070	226028,881	490,067
12	7484102,070	226068,881	499,103		33	7484162,070	226048,881	486,983
13	7484102,070	226088,881	493,151		34	7484162,070	226068,881	482,576
14	7484102,070	226108,881	487,860		35	7484162,070	226088,881	477,962
15	7484102,070	226128,881	483,669		36	7484162,070	226108,881	473,620
16	7484102,070	226148,881	480,727		37	7484182,070	226048,881	481,874
17	7484122,070	226008,881	494,995		38	7484182,070	226068,881	476,282
18	7484122,070	226028,881	496,371		39	7484182,070	226088,881	473,490
19	7484122,070	226048,881	495,963		40	7484202,070	226048,881	474,555
20	7484122,070	226068,881	491,783		41	7484202,070	226068,881	473,007
21	7484122,070	226088,881	487,631					

4.4 Análise estatística

4.4.1 Comparação dos dados obtidos com os pontos de controle

Foram comparados os dados de coordenadas Z obtidos nos MDTs estudados, calculados para as posições X e Y dos pontos de controle, com os dados de coordenada Z de cada ponto de controle levantado em campo.

A Tabela 16 demonstra os valores das coordenadas Z de controle e os valores das coordenadas Z calculadas em cada MDT estudado.

Tabela 16. Coordenadas Z nos pontos de controle para comparação

Pontos	Pontos Controle	Método 1 LPC	Método 2 P DIGITAL	Método 3 CARTA	Método 4 GPS
A	471,775	472,157	470,762	474,640	472,324
B	473,061	473,066	471,224	474,347	472,367
C	473,187	473,293	472,984	473,737	472,972
D	478,356	478,195	477,413	478,984	475,543
E	503,858	503,288	500,947	500,643	505,598
F	497,437	497,294	494,694	496,309	503,774
G	493,689	493,167	491,961	491,878	488,447
H	500,035	499,520	498,636	499,750	497,368
I	491,529	490,924	490,277	487,683	487,197
J	504,638	503,621	501,909	500,839	499,549
K	496,112	495,973	494,683	494,009	489,727
L	483,355	482,108	479,894	481,786	478,373
M	484,751	485,500	483,313	483,564	481,878
N	483,756	483,079	481,466	482,091	476,807
O	473,486	473,792	472,804	474,245	473,048

Adotou-se um nível de significância de 0,01 (1%) e analisou-se as Tabelas de resumo dos resultados de regressão linear, observou-se que o Fator de significância se comportou-se sempre menor que 0,01 para todos

os métodos analisados, onde conclui-se que a regressão para esses métodos de coleta é aceita e é válida.

Da mesma forma o coeficiente para a variável X nesses métodos foram analisados concluindo-se que quanto mais próximo do valor 1, mais a reta se aproxima de 45° , indicando a validade desses métodos.

Este comportamento foi reafirmado após análise gráfica, onde criou-se uma linha de tendência nos gráficos de dispersão de cada método analisado. Isso explica-se pois para cada valor de Y, o X deveria variar uma vez para que a reta estivesse a 45° .

Observou-se também o Coeficiente de Determinação (R^2) que permaneceu sempre próximo ao valor 1 (100%), significando que as variações dos dados analisados acompanham as variações dos dados de controle.

Na Tabela 17 pode-se observar os resultados estatísticos obtidos para os quatro métodos analisados em comparação aos pontos de controle.

Tabela 17. Resultados estatísticos para os pontos de controle

	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
	(LPC)	(PI Digital)	(Carta)	(GPS)
Fator de significância	1,36085E-19	1,51969E-16	1,22993E-13	2,99541E-08
Coeficiente para a Variável X	1,023520751	1,040119622	1,136024685	0,937399609
Coeficiente de Determinação (R^2)	0,998416854	0,995340425	0,986953158	0,912511231

Em relação a precisão de cada método pode-se afirmar que o método 1 (Levantamento planialtimétrico) é o mais preciso, quando comparado aos outros, com menor dispersão dos dados analisados em relação à linha de tendência, seguido do método 2 (Planta Digital), do método 3 (Carta Geográfica) e por fim do método 4 (GPS de navegação) cuja dispersão é bem maior que os outros métodos. Pode-se observar esse comportamento nos gráficos de regressão linear e dispersão das Figuras 36, 37, 38 e 39.

Figura 36 - Gráfico da regressão linear para o levantamento Planialtimétrico

Figura 37 - Gráfico da regressão linear para a Planta Digital

Figura 38 - Gráfico da regressão linear para a Carta Geográfica

Figura 39 - Gráfico da regressão linear para o levantamento por GPS de navegação

4.4.2 Comparação entre os dados calculados e malha de controle

Compararam-se os dados de coordenadas Z obtidos nos MDTs estudados, calculados em cada ponto da malha 20 metros x 20 metros calculados através do método híbrido, com os dados de coordenada Z da malha de controle também de 20 metros x 20 metros, calculada a partir de todos os pontos do levantamento planialtimétrico. A Tabela 18 mostra os dados calculados para o método híbrido em todos os métodos de coleta e que foram analisados estatisticamente.

Tabela 18. Coordenadas Z do método híbrido para comparação

Pontos	Pontos	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
	Controle	LPC	P DIGITAL	CARTA	GPS
1	504,964	504,964	504,086	501,778	501,450
2	501,715	501,716	500,635	500,441	496,203
3	497,042	497,079	495,807	495,565	490,462
4	502,869	502,823	500,624	500,671	507,341
5	504,143	503,847	501,871	500,835	503,650
6	501,803	501,622	500,368	500,205	497,095
7	497,254	497,138	495,981	495,813	490,883
8	492,679	492,497	490,999	488,145	483,939
9	497,446	497,446	496,493	496,895	493,797
10	499,252	499,252	497,185	498,799	503,340
11	500,508	500,508	496,757	500,000	504,107
12	499,251	499,051	497,409	499,103	497,399
13	496,071	496,120	494,989	493,151	490,125
14	491,709	491,616	490,670	487,860	486,372
15	486,218	485,963	484,273	483,669	481,661
16	480,915	480,047	478,644	480,727	475,438
17	496,230	496,230	494,014	494,995	490,458
18	497,372	497,400	494,707	496,371	503,874
19	495,888	495,666	493,733	495,963	496,248
20	494,094	493,362	492,722	491,783	488,421
21	490,184	490,423	489,784	487,631	486,161
22	486,281	486,177	483,724	483,758	484,010
23	481,516	481,175	478,142	480,626	475,118
24	475,999	475,671	474,037	477,321	474,577
25	495,360	495,360	492,227	493,031	489,283
26	493,329	493,137	490,710	490,715	486,453
27	489,418	489,418	488,771	486,999	482,474
28	483,636	483,694	482,880	483,260	478,333
29	479,414	479,706	477,775	479,451	475,815
30	475,361	475,361	473,342	475,859	473,843
31	471,591	471,591	470,053	473,437	471,307
32	493,198	493,198	489,534	490,067	482,568
33	489,168	489,058	488,383	486,983	481,822
34	484,210	483,582	482,056	482,576	477,238
35	477,633	477,633	476,635	477,962	475,404
36	473,291	473,331	472,855	473,620	473,101
37	483,363	483,364	481,880	481,874	475,974
38	477,647	477,647	475,998	476,282	474,955
39	471,909	471,941	471,051	473,490	472,107
40	477,052	477,053	475,722	474,555	474,416
41	472,511	472,511	470,219	473,007	470,189

A comparação dos dados utilizando-se a malha de controle vem reafirmar os resultados obtidos na análise pelos pontos de controle visto que o método híbrido é proveniente do modelo matemático utilizado para os cálculos das coordenadas. Na Tabela 19 podemos observar os resultados estatísticos obtidos para o método híbrido que poderão ser comparados com os dados estatísticos da Tabela 17 (método de controle) mostrando que seus resultados são muito próximos.

Tabela 19. Resultados estatísticos para o método híbrido

	Método 1	Método 2	Método 3	Método 4
	(LPC)	(PI Digital)	(Carta)	(GPS)
Fator de significância	5,55104E-66	9,37104E-44	1,17252E-35	1,24431E-19
Coeficiente para a Variável X	0,999920513	1,005399785	1,068482178	0,875384349
Coeficiente de Determinação (R^2)	0,999499366	0,993092521	0,982034101	0,881111361

As Figuras 40, 41, 42 e 43 mostram os gráficos de regressão linear e as dispersões obtidos com os resultados dos MDTs do método híbrido.

Figura 40 - Gráfico da regressão linear da malha para o levantamento planialtimétrico

Figura 41 - Gráfico da regressão linear da malha para a Planta Digital

Figura 42 - Gráfico da regressão linear da malha para a Carta Geográfica

Figura 43 - Gráfico da regressão linear da malha para o levantamento por GPS de navegação

4.4.3 Comparação entre as áreas de superfície calculadas nos MDTs

As áreas de superfície foram calculadas a partir dos MDTs de cada superfície, sendo comparadas com o MDT de controle.

Tabela 20. Dados das áreas de superfície para os métodos analisados

Controle	17036,90	m ²	diferenças		%
LPC	17027,03	m ²	-9,87	m ²	-0,06
GPS	17657,11	m ²	620,21	m ²	3,64
Carta	16917,15	m ²	-119,75	m ²	-0,70
Planta Digital	17030,01	m ²	-6,89	m ²	-0,04

Nota-se na Tabela 20 que a variação de área é bem pequena ficando abaixo de 1% para os dados de Levantamento planialtimétrico, Carta e Planta Digital e maior para a área calculada pelo MDT do GPS onde a variação foi de 3,64%, podendo-se afirmar que os métodos de digitalização de cartas existentes e restituições aerofotogramétricas (planta digital) poderão ser utilizados nas estimativas de áreas de superfície de terrenos com boa precisão.

Quanto à utilização do GPS pode-se dizer que esse equipamento deve ser utilizado para cálculo de áreas superficiais apenas em ocasiões onde não é necessário precisão.

5 CONCLUSÕES

Os modelos digitais de terrenos são utilizados na Engenharia para realização de inúmeros cálculos, extraíndo-se deles vários tipos de resultados e representações.

É de fundamental importância saber que essa metodologia deve ser aplicada com critério visando-se sempre a um resultado que atenda às exigências de normas.

A precisão dos dados obtidos está diretamente ligada à precisão do modelo digital. Sendo assim os resultados de interesse, como por exemplo volumes, isolinhas de nível, perfis, seções e demais serão o reflexo do modelo digital criado.

Neste trabalho observou-se que os modelos digitais gerados a partir de carta geográfica 1:10.000 e da planta digital da restituição aerofotogramétrica baseada em fotos na escala 1:25.000, poderão ser utilizados para a realização de anteprojetos, estudos, estimativas, visualizações e representações temáticas etc, desde que sigam critérios na fase de coleta de dados e processamento, pois após análise estatística observou-se que tanto o método de pontos de controle quanto o método

híbrido se adequaram aos parâmetros implantados na metodologia estatística, permanecendo com Fator de significância menor que 0,01, Coeficiente para a variável X muito próximo a 1 e o Coeficiente de Determinação também muito próximo a 1, resultados observados nas Tabelas 17 e 19. Esse comportamento é visível nos gráficos das Figuras 37 e 38 e Figuras 42 e 43 onde observa-se baixa dispersão entre os dados analisados bem como o posicionamento da reta que corta o plano cartesiano próxima a 45° .

Para a realização de projetos onde envolvem-se cálculos de volumes, movimentação de terra, locações precisas e para projetos de pequeno porte, será conveniente a utilização da topografia clássica, com elaboração de levantamentos planialtimétricos dos detalhes da área a ser estudada, já que essa é a que melhor se comportou estatisticamente (Figuras 17 e 19) e apresentou menor dispersão de resultados nos gráficos (Figuras 36 e 41).

Quanto à utilização de equipamentos de GPS de navegação, nota-se que o mesmo obteve bons resultados quanto ao fator de significância, permanecendo abaixo de 0,01 (Tabelas 17 e 19) estipulado na metodologia estatística, mas quanto aos Coeficiente para a variável X e Coeficiente de Determinação, o mesmo apresentou resultados mais distantes dos estipulados na metodologia estatísticas. Observou-se também muita dispersão dos dados nos gráficos de regressão linear e dispersão

(Figuras 39 e 44), mostrando que a precisão do posicionamento de cada ponto torna-se duvidosa. As diferenças de altitudes para esse método, neste trabalho, variaram de 7,50 metros para baixo até 7,50 metros para cima em relação ao MDT de controle. Portanto, as restrições para o uso desse equipamento são bem maiores, não sendo recomendada sua utilização para levantamento de altitudes e elaboração de Modelos Digitais.

Analisou-se também a área de cada superfície gerada por cada MDT, observando-se que houve um acréscimo de $836,90 \text{ m}^2$, representando 5,16%, sobre a área plana projetada que era de 16.200 m^2 . Para as áreas de superfície dos modelos gerados com o Levantamento Planialtimétrico, Planta Digital e Carta Geográfica houve diferença (Tabela 20) em relação à superfície de controle, ficando abaixo de 1%. Para a superfície calculada com pontos de GPS de navegação a área ficou 3,64% maior que a da superfície de controle, confirmando assim que não é aconselhável a utilização desse equipamento para cálculo de Modelos Digitais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BASE AEROFOTOGRAMETRIA E PROJETOS S.A. **Mapeamento planialtimétrico cadastral - Piracicaba.** Piracicaba, 1993. 87 p.
(Relatório técnico e monografias)
- BLITZKOW, D; LEICK, A. **Posicionamento Geodésico NAVSTAR/GPS.**
São Paulo: USP, Escola Politécnica, 1992. 76 p.
- BOWYER, A. Computing dirichlet tessellations. *The Computer Journal*,
v. 24, n. 2, p. 162 - 166, 1981
- BRASSEL, K.E; REIF, D. A procedure to generate thiesen polygons.
Geographical Analysis, v. 11, n.3, p. 289-303, 1979.
- BURROUGH, P. A. **Principles of Geographical Information Systems for
resouces assessment.** Oxford: Claredon, 1989. 94 p.
- CAMPOS, I. O. **Análise de técnicas para o estabelecimento de Modelos
Digitais de Terreno - DTM.** São Carlos, 1994. 243 p. Dissertação
(Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de
São Paulo.

- CARTER, R. J. Digital representations of topographic surfaces. **Photogrammetry Engenireeng and Remote Sensing**, v. 54, n. 11, p. 1577 - 1580, 1988.
- CINTRA, J. P. Automação da topografia : do campo ao Projeto. São Paulo, 1993. 120 p. Tese (Livre Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- CINTRA, J. P. Contribuições ao estudo de representação de superfícies com o auxílio do computador. São Paulo, 1985. 270 p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- CINTRA, J. P. Modelagem digital de terrenos e elementos finitos. **Engenharia Civil**, v.1, n.4, p. 193-203, 1988.
- FELGUEIRAS, C. A. Desenvolvimento de um sistema de modelagem digital de terrenos para microcomputadores. São José dos Campos, 1987. 23 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.
- GREEN, P. J; SIBISON, R. Computing dirichlet tessellations in the plane. **The Computer Journal**, v. 21, n. 2, p. 168 - 173, 1977.
- INSTITUTO GEOGRÁFICO E CARTOGRÁFICO. Estado de São Paulo. São Paulo, 1979. Plano Cartográfico do Estado de São Paulo. Folha 073/089 (SF-23-Y-A-IV-2-SO-F), Escala 1 : 10.000.
- LANCASTER, P; SALKAUSKAS, K. **Curve and surface fitting: an introduction**. London: Academic Press, 1986. 280 p.

- LERBEL, F.. Interpolation in square grid DTM. *The ITC Journal*, n. 5, p. 756 - 807, 1973.
- MCCULLAGH, M. J. Creation of smooth contours over irregularly distributed data using local surface patches. *Geographical Analysis*, v. 13, n.1, p. 51 - 63 , 1981.
- MCCULLAGH, M. J; ROSS, C. G. Delanay triangulation of a random dataSet for isarithmic mapping. *The Cartographic Journal*, v. 17, n. 2, p. 93 - 99, 1981.
- MELLO, H. M; CINTRA, J. P. Erros associados a digitalização de mapas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOPROCESSAMENTO, 2., São Paulo, 1993, *Anais*. São Paulo: USP, Escola Politécnica, 1993. p. 29 - 46.
- MENEZES, P. M. L. Tratamento e armazenamento de dados de cartas topográficas digitalizadas. Rio de Janeiro, 1987. 145 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto Militar de Engenharia.
- MINGHIN, R. Modelagem de objetos por splines. Campinas, 1980. 127 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas.
- PEIXOTO, R. S. S. L. *Operação de mesas digitalizadoras*. São Carlos: EESC, Departamento de Transportes, Laboratório de Mensuração, 1992. 10 p.

- PETRIE, G; KENNIE, T. J. M; **Terrain modelling in surveying and civil engineering.** New York: McGraw-Hill, 1991. 351 p.
- PETTINATI, F. **Modelamento digital de superfícies.** In: SIMPÓSIO SOBRE APLICAÇÃO GRÁFICAS POR COMPUTADOR, 2., São Paulo, Anais. São Paulo: USP, Escola Politécnica, 1981. p. 47 - 63.
- PETTINATI, F. **Modelamento digital e representação gráfica de superfícies.** São Paulo, 1983. 197 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- RIBEIRO, S.C.L; CINTRA, J. P. **Densidade em MDTs de malha regular.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, 18., Rio de Janeiro, 1997. Anais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Cartografia, 1977. p. 126 - 131.
- ROGERS, D. F; ADAMS, J. A. **Mathematical elements for computer graphics.** New York: McGraw - Hill, 1990. 283 p.
- SILVA, I. **Instrumentos topográficos modernos : topografia moderna.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, 16., Rio de Janeiro, 1993. Anais, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Cartografia, 1993. p. 252 - 260.