EMPREGO DA EQUAÇÃO DE WEIBULL NA OBTENÇÃO DA DIFUSIVIDADE DA ÁGUA NO SOLO NA INFILTRAÇÃO HORIZONTAL

IVAN AMARAL GUERRINI

Orientador: KLAUS REICHARDT

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Solos e Nutrição de Plantas.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Junho - 1982

OFEREÇO aos meus pais,
Rubens e Anésia,
e aos meus irmãos,
Iraê, Ilmar, Ivail e Isis,
a quem só Deus sabe o quanto devo.

DEDICO a minha querida esposa, *Sara.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço

- a *Deus Pai*, pela disposição, coragem, sabedoria, perseverança e saúde que Ele me deu durante todo o tempo do Curso que frequentei;
- ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq*, pelo precioso auxílio financeiro concedido através de bolsa de estudos;
- ao meu orientador, *Prof. Dr. Klaus Reichardt*, pelo constante apoio e pela confiança depositada em meu trabalho;
- ao *Instituto Básico de Biologia Médica e Agrícola de Botucatu/UNESP*, pelos afastamentos concedidos;
- ao *Centro de Energia Nuclear na Agricultura/USP*, pela autorização para utilizar os laboratórios da Seção de Física de Solos, onde foi desenvolvida a parte experimental do trabalho;
- aos amigos *Sérgio Oliveira Moraes* e *Paulo Leonel Libardi*, pelos auxílios e sugestões importantes;
- ao meu tio *Antonio Kerches de Campos*, da F.O.P./UNICAMP, pela pronta disposição em ajudar na parte técnica, o que mais uma vez foi de grande valor;
- ao desenhista e amigo *Antonio Aparecido Martins*, do IBBMA/UNESP, exemplo de funcionário, pela valiosa contribuição;
- a todo o pessoal do Setor de Física de Solos do CENA/USP, em especial aos amigos *João Eduardo Pilotto* e *José Ademir Rodrigues*, pela colaboração no trabalho;
- aos amigos *Carlos Ducatti* e *Paulo Cesar O. Trivelin*, que muito me apoiaram e com quem a convivência tem me dado oportunidade de crescer muito;

- aos professores conscientes que conheci durante o Curso e que me fizeram abrir os olhos para tudo aquilo que pode ser feito de bom no campo da Física aplicada à pesquisa agronômica;
- ao *Pe. Vitório*, amigo e conselheiro, pelas importantíssimas orientações, que muito me ajudaram a concluir este trabalho;
- ao *Colégio Salesiano Dom Bosco de Piracicaba*, em cujos bancos recebi orientação e aprendizado fecundos, e cujos frutos reconheço estar hoje colhendo.

*O Senhor é meu pastor, nada me faltará
Em verdes prados ele me faz repousar.
Conduz-me junto às águas refrescantes
Restaura as forças de minha alma
Pelos caminhos retos ele me leva por amor do seu nome
Ainda que eu atravessasse o valo escuro
Nada temerei pois estais comigo
Vosso bordão e vosso hâculo são o meu amparo
Preparais para mim a mesa à vista de meus inimigos
Derramais o perfume sobre minha cabeça
Transborda a minha taça
A vossa bondade e misericórdia hão de seguir-me
Por todos os dias de minha vida
E habitarei na casa do Senhor por longos dias.*

(Salmo 23)

I N D I C E

	<u>Página</u>
1. INTRODUÇÃO E REVISÃO DE LITERATURA	1
2. TEORIA	8
3. MATERIAL E MÉTODOS	12
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	19
4.1. Umidade inicial (θ_{SAR}) e umidade de saturação (θ_{SAT})	19
4.2. Densidade global (ρ_g) e coeficiente de atenuação de massa da água (μ_w)	21
4.3. Frente de molhamento	22
4.4. Perfis de umidade	32
4.5. Difusividade da água no solo	47
5. CONCLUSÕES	88
6. LITERATURA CITADA	90

EMPREGO DA EQUAÇÃO DE WEIBULL NA OBTENÇÃO DA DIFUSIVIDADE DA ÁGUA NO SOLO NA INFILTRAÇÃO HORIZONTAL

Ivan Amaral Guerrini

Klaus Reichardt
Orientador

RESUMO

O movimento da água no solo foi estudado em laboratório através de experimentos de infiltração horizontal em colunas de solo homogêneo e seco ao ar, com a finalidade de obter uma equação simples e adequada para a difusividade da água no solo. Foram obtidos vários perfis de umidade para cada uma das dez colunas de solo utilizadas, através do método da atenuação da radiação gama usando-se uma fonte de ^{137}Cs . Durante a obtenção de um perfil qualquer, a posição da coluna foi mantida constante, com o objetivo de medir variações da umidade no tempo e também de diminuir os erros nos valores calculados da umidade.

Foi utilizado o modelo da equação de Weibull no ajuste dos perfis de umidade, tendo sido excelente a concordância do modelo com os dados experimentais.

O uso de uma função analítica para λ , a variável de Boltzmann, conforme o modelo de Weibull, permitiu a obtenção de uma equação simples para a difusividade da água no solo.

Foram feitas comparações entre a solução aqui obtida para a difusividade e as soluções encontradas na literatura, tendo sido mostrada a inadequação de uma variação exponencial simples da difusividade com a umidade quando levado em conta todo o intervalo de variação desta última.

Os resultados também confirmaram a necessidade de se admitir a dependência do tempo para a difusividade, havendo a possibilidade de se fixar um valor conhecido para essa dependência em estudos genéricos de infiltração da água no solo.

Finalmente, com a equação obtida para a difusividade, mostrou-se que essa importante função hídrica do solo pode ser conhecida simplesmente através da análise do avanço da frente de molhamento em função do tempo.

UTILIZATION OF WEIBULL EQUATION TO OBTAIN SOIL-WATER DIFFUSIVITY
IN HORIZONTAL INFILTRATION

Ivan Amaral Guerrini

Klaus Reichardt
Adviser

SUMMARY

Water movement was studied in horizontal infiltration experiments using laboratory columns of air-dry and homogeneous soil to obtain a simple and suitable equation for soil-water diffusivity. Many water content profiles for each one of the ten soil columns utilized were obtained through gamma-ray attenuation technique using a ^{137}Cs source. During the measurement of a particular water content profile, the soil column was held in the same position in order to measure changes in time and so to reduce the errors in water content determination.

The Weibull equation utilized was excellent in fitting water content profiles experimental data.

The use of an analytical function for λ , the Boltzmann variable, according to Weibull model, allowed to obtain a simple equation

for soil water diffusivity.

Comparisons among the equation here obtained for diffusivity and others solutions found in literature were made, and the unsuitability of a simple exponential variation of diffusivity with water content for the full range of the latter was shown.

The necessity of admitting the time dependency for diffusivity was confirmed and also the possibility of fixing that dependency on a well known value extended to generalized soil water infiltration studies was found.

Finally, it was shown that the soil water diffusivity function given by the equation here proposed can be obtained just by the analysis of the wetting front advance as a function of time.

1. INTRODUÇÃO E REVISÃO DE LITERATURA

Em Agricultura, o conhecimento da dinâmica da água no solo é fundamental no estudo da disponibilidade de água para as plantas. Esta é a razão de muitos esforços estarem sendo feitos no sentido de uma compreensão cada vez maior do papel da umidade do solo no ciclo hidrológico (SCHULTZ e HEWLETT, 1978). Nesse contexto, a difusividade da água no solo, D , é uma das funções mais importantes a ser determinada, sendo necessária na previsão da absorção de água pelas plantas (FEDDES *et alii*, 1976) e estando relacionada diretamente com a evaporação da água do solo (HANKS e GARDNER, 1965).

Na literatura, muitas são as tentativas apresentadas de se determinar a função D , tendo sido um dos trabalhos pioneiros o de BRUCE e KLUTE (1956), onde é apresentada uma solução não analítica para D :

$$D = \frac{1}{2t_k} \left(- \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{t=t_k} \cdot \int_{\theta_{SAR}}^{\theta} x \, d\theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

onde x é a coordenada de posição e t a de tempo; t_k é um intervalo de tem

po determinado, para o qual se quer medir a difusividade; θ é a umidade volumétrica do solo e θ_{SAR} é a umidade do solo seco ao ar.

Vários autores publicaram, posteriormente, dados obtidos com a técnica do referido trabalho pioneiro, encontrando, entretanto, dificuldades quanto a repetibilidade dos dados, até mesmo quando se trabalhou com um único solo. Uma das razões disso é o fato da solução proposta para D não ser analítica, acumulando assim erros experimentais grosseiros em cada determinação. Essa incerteza nos resultados obtidos para D é atestada pelos próprios autores BRUCE e KLUTE (1956 e 1963), os quais mostraram variações relativas em D de até 500% e lamentam a inexistência de um padrão para se comparar os valores de D obtidos. Por outro lado, WHISLER *et alii* (1968) mostraram que as imprecisões advindas da obtenção tanto da derivada como da integral do segundo membro da equação (1) podem produzir, cada qual, uma diferença nos valores de D de até duas ordens de grandeza. Segundo esses autores, apesar dessas diferenças tenderem a se cancelar por causa do sinal, elas fazem com que a determinação de D através de (1) tenha precisão bastante limitada e asseguram ainda que essas dificuldades advêm, em última análise, dos erros da estatística de contagens e das incertezas no traçado das curvas $\theta(\lambda)$, onde λ é a variável de Boltzmann. Ainda assim, eles concluem que o conhecimento de D permanece importante na previsão do movimento da água no solo. Também HANKS e BOWERS (1963) evidenciaram a imprecisão dos valores de D e sua influência na previsão da infiltração, principalmente no caso de umidades elevadas. Já NOFZIGER (1978) analisa com detalhes os erros na umidade e na densidade global do solo, ambos necessários para a obtenção de D quando é utilizado o método da atenuação da radiação gama. Devido, então, à existência de todos esses erros na obtenção da difusividade através da equação (1), e tendo em vista também a di

ficuldade de se trabalhar com uma equação não analítica como é (1), começaram a surgir na literatura várias tentativas de ajustes de curvas, referentes a dados obtidos com os mais diversos tipos de solo, sempre com o objetivo de se chegar a uma solução mais adequada para a função D.

Vários trabalhos mostraram, assim, a influência de algumas variáveis importantes no cálculo de D, dentre as quais podem ser ressaltadas: porosidade do solo (JACKSON, 1963 a), temperatura do solo (JACKSON, 1963 b), umidade inicial do solo (JOSHI *et alii*, 1977) e densidade global do solo (JOSHI *et alii*, 1977; SHARDA, 1977 e LIBARDI *et alii*, 1982).

Enquanto isso, algumas outras soluções para a função D começaram a ser propostas, como por exemplo, a de AHUJA e SWARTZENDRUBER (1972), que apresentaram uma solução analítica e empírica chamada de Função Potência do Tipo Infinito, assim definida:

$$D = \frac{a \theta^n}{(\theta_{SAT} - \theta)^m} \dots\dots\dots (2)$$

onde a, n e m são parâmetros característicos do solo utilizado, enquanto que θ_{SAT} é a umidade do solo saturado. Posteriormente, AHUJA (1975) apresentou uma solução semelhante, também empírica:

$$D = A (\theta - \theta_{SAR})^N \dots\dots\dots (3)$$

onde A e N são constantes e θ_{SAR} é o mesmo definido em (1).

Por outro lado, SCOTT e HANKS (1963) já haviam sugerido uma

dependência linear de D com θ , assim:

$$D = \alpha \theta + \beta \quad \dots\dots\dots (4)$$

onde α e β são parâmetros característicos do solo.

Entretanto, a solução mais sugerida e utilizada na literatura para a função difusividade é a exponencial simples, assim definida inicialmente por GARDNER e MAYHUGH (1958):

$$D = \alpha \exp (\beta \theta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

onde α e β são constantes características do solo.

Trabalhando com oito solos diferentes e usando o conceito de meio similar, REICHARDT *et alii* (1972), admitindo a validade da solução (5), apresentaram um método de estimar a difusividade a partir, tão somente, do conhecimento do avanço da frente de molhamento em função do tempo, em experimentos de laboratório. Esse estudo foi ampliado por REICHARDT e LIBARDI (1974), os quais trabalharam com treze solos, sempre considerando válida a solução exponencial (5). Esse método para estimativa de D a partir da validade de (5) foi analisado posteriormente por MILLER e BRESLER (1977) e utilizado por DELLA LIBERA *et alii* (1978) na obtenção de uma equação generalizada para D em três grandes grupos de solos do Estado de São Paulo.

Todos esses últimos trabalhos citados que se utilizaram da equação (5), mostraram que a constante β , da referida equação, apresentou, para todos os solos utilizados, um valor experimental próximo a 8, fazendo

com que BRUTSAERT (1979) sugerisse a possibilidade desse valor ser uma constante universal. Já os valores da constante α da equação (5), nos trabalhos mencionados apresentaram diferenças de até três ordens de grandeza entre si, o que permanece ainda sem explicação convincente, fato que levou MILLER e BRESLER (1977) a sugerir que a função D não varie somente com a umidade.

Alguns outros autores que admitiram a solução (5) para a difusividade em estudos teóricos são: PARLANGE (1973 e 1975) e TOLIKAS *et alii* (1980). Enquanto isso, essa mesma solução para medidas de D no campo foi utilizada, dentre outros, por WHISLER (1976) e CLOTHIER e WHITE (1981).

Por outro lado, AHUJA e SWARTZENDRUBER (1972), num estudo comparativo e utilizando-se de vários tipos de solo, concluíram que a solução (2) se adapta bem melhor aos valores de difusividade do que a solução exponencial (5). À mesma conclusão chegaram MURALI *et alii* (1979) trabalhando com vinte solos da Índia, num trabalho onde as duas soluções foram comparadas estatisticamente.

Já LAROUSSI *et alii* (1975), apresentando uma investigação experimental da função D, mostraram que essa função varia diferentemente em quatro intervalos distintos de umidade, ou seja: inicialmente D parece decrescer com θ ; em seguida D aumenta linearmente com θ durante um grande intervalo de θ ; então, e somente aqui, há uma variação exponencial de D com θ até quase a saturação, quando a variação passa a ser novamente linear.

Enquanto isso, JOSHI *et alii* (1977), trabalhando com solos arenosos da Índia, apresentaram gráficos de D semelhantes aos de AHUJA e

SWARTZENDRUBER (1972), o mesmo acontecendo com os dados de VERPLANCKE *et alii* (1976) e de SMILES *et alii* (1981), o que faz crer na equação (2) como melhor solução. Resultado semelhante já havia sido obtido também por NIELSEN *et alii* (1972) em situações de campo, fortalecendo ainda mais a solução (2).

Finalmente, deve-se citar também a solução generalizada apresentada por GUERRINI *et alii* (1982), para quem a difusividade é função da umidade e do tempo, assim:

$$D(\theta, t) = \left[2\alpha t^{(2\alpha-1)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2t_k^{2\alpha}} \left(- \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{t=t_k} \cdot \int_{\theta_{SAR}}^{\theta} x \, d\theta \right] \dots\dots\dots (6)$$

onde α é um parâmetro hídrico do solo, adimensional, que, quando igual a 0,50, faz com que a equação (6) se reduza à (1) e a difusividade fique, então, função apenas da umidade. Entretanto, a segunda parte do membro direito da equação (6) mostra ainda uma solução não analítica para a parte de D dependente de θ , o que faz aparecer problemas semelhantes aos da utilização da equação (1).

Em resumo, como se percebe, há duas dificuldades principais para os estudiosos da função difusividade da água no solo: a primeira se refere ao fato da equação (1), que serve de referência para todo pesquisador, ser uma equação não analítica, semelhantemente à (6) na parte dependente de θ . O uso de (1) ou (6) pois, além de acarretar uma série de erros já citados por outros autores, impede o uso de uma análise estatística

adequada, mesmo porque a derivada e a integral que aparecem nessas equações ou são calculadas manualmente ou então necessitam de uma técnica numérica especial (ERH, 1972). Isso tudo exige do pesquisador a busca de uma solução analítica para D, como já tem acontecido. Aqui surge, então, a segunda dificuldade principal: dentre as soluções analíticas existentes na literatura, qual a mais adequada ? Seria necessário buscar uma melhor solução ? E diante disso: não seria possível se chegar a uma solução analítica para D, cujos parâmetros que nela porventura apareçam não variem de solo para solo de uma maneira aleatória, mas sim sejam constantes ou de variações conhecidas e apresentem significado físico ?

Dentro desse contexto, o presente trabalho tem por objetivo iniciar a busca de respostas adequadas para as dificuldades acima mencionadas, através da utilização da equação de Weibull, a qual foi escolhida por se ajustar muito bem a dados de perfis de umidade do solo.

2. TEORIA

Em experimentos de infiltração horizontal conduzidos em laboratório, em colunas de solo homogêneo, uma vez obtidos os valores de umidade, pode-se construir os perfis de umidade da amostra de solo durante a infiltração e, então, se obter a função difusividade da água no solo. Isso foi sugerido inicialmente por BRUCE e KLUTE (1956), em trabalho já citado, onde são utilizados os perfis $\Theta(x)$ para se obter a difusividade através da equação (1), aqui reescrita:

$$D(\Theta) = \frac{1}{2t_k} \left(- \frac{\partial x}{\partial \Theta} \right)_{t=t_k} \cdot \int_{\Theta_{SAR}}^{\Theta} x \, d\Theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

onde a difusividade $\tilde{D}$ é considerada como sendo função apenas da umidade, como já salientado.

Será levado em conta neste trabalho, entretanto, para efei-

to de ponto de partida no cálculo de D, a solução generalizada de GUERRINI *et alii* (1982) que é dada na equação (6), aqui reescrita:

$$D(\Theta, t) = \left[2\alpha t^{(2\alpha-1)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2t_k^{2\alpha}} \left(- \frac{\partial x}{\partial \Theta} \right)_{t=t_k} \cdot \int_{\Theta_{SAR}}^{\Theta} x \, d\Theta \right] \dots\dots\dots (6)$$

Essa dependência do tempo para a difusividade mostrada em (6) tem origem na maneira pela qual a coordenada de posição (x) varia com a unidade (Θ) e com o tempo (t), o que, segundo GUERRINI *et alii* (1982), é dada pela seguinte relação:

$$x = \lambda(\Theta) \cdot t^\alpha \dots\dots\dots (7)$$

Essa equação (7), onde λ , a variável de Boltzmann, é somente função de Θ , permite que a segunda parte do membro direito da equação (6), definida como $D_1(\Theta)$, possa ser assim escrita:

$$D_1(\Theta) = \frac{1}{2} \left(- \frac{d\lambda}{d\Theta} \right) \cdot \int_{\Theta_{SAR}}^{\Theta} \lambda \, d\Theta \dots\dots\dots (8)$$

que pode também ser obtida diretamente da equação tradicional (1), o que mostra que o formalismo de GUERRINI *et alii* (1982) somente introduziu a parte de D dependente do tempo, sem alterar em nada a parte dependente da unidade.

Dessa maneira, a equação geral (6) fica:

$$D(\theta, t) = \left[2\alpha t^{(2\alpha-1)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(- \frac{d\lambda}{d\theta} \right) \cdot \int_{\theta_{SAR}}^{\theta} \lambda d\theta \right] \dots\dots\dots (9)$$

onde está evidente que a primeira parte do membro direito dessa equação, chamada no trabalho original de $D_2(t)$, só depende do tempo, enquanto que a segunda parte, $D_1(\theta)$, só depende da umidade. Fica claro, também, que se o ponto de partida considerado no cálculo de D fosse a equação (1) ao invés de (6) ou (9), o trabalho a ser aqui desenvolvido seria o mesmo, pois essa equação é a própria $D_1(\theta)$ da equação (8), sendo que $D_2(t)$ que aparece no membro direito de (9) já é uma equação analítica.

Para utilizar, então, a equação (9), nota-se que é exigido o conhecimento do parâmetro α e da função $\lambda(\theta)$. Esta última pode ser obtida a partir da equação (7), para cada perfil:

$$\lambda(\theta) = x/t^\alpha \dots\dots\dots (10)$$

Enquanto isso, aplicando-se logaritmo à mesma equação (7), quando esta se refere à posição da frente de molhamento (x_f), pode-se obter o valor de α , experimentalmente:

$$\log x_f = \log \lambda_f + \alpha \log t_f \dots\dots\dots (11)$$

onde α é o coeficiente angular dessa reta, λ_f é valor de $\lambda(\theta)$ na frente de molhamento e t_f é o intervalo de tempo decorrido desde o início do experimento até o instante considerado.

Ressalte-se ainda que, neste trabalho foi utilizada a unidade normalizada (ω), assim definida:

$$\omega \equiv \frac{\theta - \theta_{SAR}}{\theta_{SAT} - \theta_{SAR}} \dots\dots\dots (12)$$

onde θ_{SAR} e θ_{SAT} são os mesmos das equações (1) e (2), e o intervalo de variação de ω vai, portanto, de zero a um. Nota-se, a partir de (12), que:

$$d\omega = \frac{d\theta}{\theta_{SAT} - \theta_{SAR}} \dots\dots\dots (13)$$

o que permite que a equação inicial (9) fique assim escrita:

$$D(\omega, t) = \left[2\alpha t^{(2\alpha-1)} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \left(- \frac{d\lambda}{d\omega} \right) \cdot \int_0^\omega \lambda d\omega \right] \dots\dots\dots (14)$$

Em resumo, para se determinar a difusividade da água no solo através de (14) em experimentos de infiltração horizontal, como será feito neste trabalho, é necessário se conhecer o valor de α e a função $\lambda(\omega)$. Se esta última apresentar uma forma analítica conveniente, permitirá obter, como pode ser visto em (14), uma solução analítica para a difusividade.

3. MATERIAL E MÉTODOS

A equação de atenuação da radiação gama que atravessa uma coluna de solo, durante a infiltração de água, é a seguinte:

$$I = I_o \exp \left[-d (\mu_s \cdot \rho_g + \mu_w \cdot \theta) \right] \dots\dots\dots (15)$$

onde: I = taxa de contagem num tempo qualquer da infiltração, em cpm;

I_o = taxa de contagem utilizando a coluna vazia, em cpm;

d = diâmetro interno da coluna atravessado pela radiação, em cm;

μ_s = coeficiente de atenuação de massa do solo seco ao ar, em $\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$;

ρ_g = densidade global do solo compactado na coluna, em $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$;

μ_w = coeficiente de atenuação de massa da água, em $\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$;

θ = umidade volumétrica da amostra de solo na coluna, em $\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$.

Lembre-se que na equação (15) o termo da exponencial referente à água ainda inclui sua massa específica, que não aparece, entretanto, devido ao fato de ser considerada igual a $1,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

De outra maneira, a equação (15) pode ser assim escrita:

$$I = I_{\text{seco}} \exp - (d \cdot \mu_w \cdot \Theta) \quad \dots\dots\dots (16)$$

onde

$$I_{\text{seco}} \equiv I_o \exp - (d \cdot \mu_s \cdot \rho_g) \quad \dots\dots\dots (17)$$

Ressalte-se que I_{seco} é a contagem obtida antes de se iniciar a infiltração, quando o solo compactado na coluna ainda está com a umidade referente a secagem ao ar (Θ_{SAR}), a que foi submetido anteriormente. A umidade, Θ , obtida na equação (16), precisa, portanto, ser acrescido o valor de Θ_{SAR} para se ter o valor absoluto da umidade.

Neste trabalho, a umidade Θ e, conseqüentemente ω , definido na equação (12), foram obtidos por atenuação da radiação gama do ^{137}Cs , que apresenta pico de energia em 662 keV. Os valores de Θ_{SAR} e Θ_{SAT} foram obtidos tanto pelo método gravimétrico quanto pelo método da atenuação da radiação gama, tendo prevalecido os resultados obtidos por este último, como será visto na parte de Resultados e Discussão.

O solo utilizado foi Terra Roxa Estruturada, localizado próximo ao Posto Meteorológico do Departamento de Física e Meteorologia da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Piracicaba, SP. Segundo LIBARDI (1978), esse solo, na profundidade de 15 cm, que foi aproximadamente a utilizada, apresenta as seguintes características:

a) Análise Textural

argila: 45,7%

silte: 12,9%

areia: 41,4%

b) Classe Textural: argila

c) Densidade Global (ρ_g) no campo: $1,58 \text{ g.cm}^{-3}$.

As amostras desse solo, depois do mesmo ser exposto à secagem ao ar e passado em peneira de 2 mm de malha, foram acondicionadas em colunas de acrílico de 30 cm de comprimento por 5,6 cm de diâmetro interno. Enquanto isso, o arranjo experimental utilizado para as determinações dos valores de umidade por atenuação da radiação gama foi o mesmo descrito com detalhes por ZUCCHI (1981).

Foram feitas 10 repetições das colunas de solo, e consequentes infiltrações, para se ter uma idéia melhor do comportamento da função difusividade da água no solo. Para tanto, as condições de laboratório foram mantidas constantes durante todo o tempo da obtenção dos dados experimentais. Também a densidade global (ρ_g) das amostras de solo compactadas foi mantida aproximadamente constante em todas as colunas, conforme discriminado na parte de Resultados e Discussão.

Um detalhe importante do método utilizado foi a manutenção da coluna de solo parada em um ponto determinado enquanto se faziam leituras, a fim de que a atenuação da radiação gama pudesse fornecer a variação da umidade do solo em função do tempo, mantendo-se a posição constante. Essa técnica foi usada inicialmente por FERGUSON e GARDNER (1962 e 1963) e apresentada com detalhes por WHISLER *et alii* (1968) na determinação da difusividade da água no solo. A condição estabelecida no presente trabalho foi que, ao se colocar a coluna para ser atravessada pela radiação gama num determinado ponto, a frente de molhamento ai ainda não tivesse chegado e de sõ se deslocar a coluna para outro ponto quando este primeiro já estivesse

consideravelmente úmido, o que é possível se saber através do decréscimo nas contagens. Dessa maneira, foram construídos vários perfis $w(t)$, muito embora o número de perfis a ser obtido para cada coluna foi limitado justamente pela velocidade da infiltração da água, conforme o critério mencionado de se esperar o molhamento considerável de cada ponto. Com exceção das primeiras duas colunas, não se usou voltar a coluna aos pontos anteriores depois de se fazer medidas nos demais pontos, isso em razão da dificuldade de se fazer a radiação gama atravessar sempre o mesmo ponto na coluna, fato que acarretaria uma medida de umidade de menor confiança, já que a estrutura do solo não é exatamente a mesma de um ponto para outro. Para se evitar problema semelhante, o valor de I_{seco} utilizado nas equações (16) e (17) não foi aquele tomado antes de se iniciar a infiltração, como se faz comumente na leitura corrida a cada centímetro para se verificar a homogeneidade da compactação do solo na coluna. Embora aqui também tenha se checado essa homogeneidade, neste caso I_{seco} foi obtido durante a infiltração quando o feixe de radiação incidia sobre o ponto escolhido que ainda estava seco. A média das contagens referentes ao ponto escolhido, antes da frente de molhamento o haver alcançado, foi tomado como I_{seco} . Procurou-se, assim, tomar o maior número possível de medidas para cálculo de I_{seco} para se ter melhor precisão na umidade, até o instante em que a contagem começava a ser significativamente menor que as anteriores, o que era sinal evidente da chegada da frente de molhamento, mostrando que também a água passava a atenuar a radiação. Verificou-se que esse instante da chegada da frente de molhamento a determinado ponto, indicado pela atenuação da radiação, foi sempre anterior à chegada visual da mesma frente, o que será discutido posteriormente.

Foram construídos, então, com dados experimentais, os gráfi-

cos $\omega(t)$, os quais se mostraram semelhantes aos encontrados nos trabalhos já citados de FERGUSON e GARDNER (1962 e 1963) e WHISLER *et alii* (1968).

Também foram construídos, experimentalmente, os gráficos de ω em função de x/t^α , que nada mais são do que $\omega(\lambda)$ segundo a equação (10).

A par disso, como se sabe, a dificuldade que sempre se teve em estudos de infiltração foi a de se obter uma equação analítica para $\omega(\lambda)$, o que resultaria numa solução analítica para a função difusividade, como já salientado.

Com esse objetivo, então, procurou-se analisar a forma das funções experimentais $\omega(t)$ e $\omega(\lambda)$, e verificou-se que elas apresentam formas surpreendentemente semelhantes à equação de Weibull, muito conhecida pelos estatísticos. Ressalte-se que essa equação foi usada e explicada recentemente com sucesso por PINDER III *et alii* (1978) como solução para dados de sobrevivência de animais em estudos de Ecologia. Para uma variável qualquer (y) dependente de outra qualquer (z), essa função pode ser assim escrita:

$$y = 1 - \left\{ \exp - \left[(z/b)^c \right] \right\} \dots\dots\dots (18)$$

com $b, c > 0$ e $z \geq 0$

onde b e c são, respectivamente, os parâmetros de escala e forma da função distribuição de Weibull. PINDER III *et alii* (1978) salientam que na equação (18) z pode ser trocado por $(z-z_0)$ se z_0 for uma constante para todos os casos e desde que $z \geq z_0$. Mais detalhes sobre essa função, bem como especificamente sobre os parâmetros b e c, são dados por MENON (1963), THOMAN *et alii* (1969), THOMAN e BAIN (1969) e ENGELHARDT (1975), sempre em traba-

lhos puramente estatísticos.

Este trabalho teve como aspecto fundamental a tentativa de se aplicar a equação de Weibull para se resolver $\omega(t)$ e $\omega(\lambda)$, devido à semelhança, já salientada, entre os gráficos dessas funções, obtidos experimentalmente da maneira já explicada, com os gráficos teóricos da equação de Weibull apresentados por PINDER III *et alii* (1978). Dessa maneira, a função $\omega(t)$ ficaria assim descrita:

$$\omega(t) = 1 - \left[\exp - \left\{ \left[(t - t_0) / b_1 \right]^{c_1} \right\} \right] \dots\dots (19)$$

onde t_0 é o intervalo de tempo, em minutos, decorrido desde o início da infiltração até 1 minuto antes da chegada da frente de molhamento ao ponto considerado, medido pela radiação gama, isto é:

$$t_0 = t_f - 1$$

Por outro lado, $t - t_0 \geq 0$, enquanto b_1 e c_1 são os parâmetros, maiores que zero.

Para se obter os parâmetros b_1 e c_1 é preciso linearizar a equação (19), o que exige a aplicação de logaritmo por duas vezes consecutivas, além de alguma manipulação algébrica:

$$\ln (1 - \omega) = - \left\{ \left[(t - t_0) / b_1 \right]^{c_1} \right\}$$

e

$$\ln \left[-\ln (1 - \omega) \right] = c_1 \ln (t - t_0) - c_1 \ln b_1 \dots\dots (20)$$

Se, então, for plotado $\ln -\ln (1 - \omega)$ em função de $\ln (t - t_0)$,

ter-se-á uma equação de reta onde o coeficiente angular é c_1 e o coeficiente linear é $(-c_1 \ln b_1)$.

Enquanto isso, a função $\omega(\lambda)$ ficaria assim

$$\omega(\lambda) = 1 - \left[\exp - \left\{ \left[(\lambda_0 - \lambda) / b_2 \right]^{c_2} \right\} \right] \dots\dots\dots (21)$$

onde λ_0 é o valor de λ correspondente ao instante t_0 , enquanto que b_2 e c_2 são os parâmetros, devendo ser observado que $(\lambda_0 - \lambda) \geq 0$, b_2 e $c_2 > 0$, semelhantemente ao caso de $\omega(t)$.

Nota-se que na equação (21) a posição da constante λ_0 é diferente da posição da constante t_0 na equação (19), justamente porque as curvas são invertidas com relação ao eixo das ordenadas, como poderá ser visto nos resultados obtidos. Tanto λ_0 como t_0 , entretanto, são valores limites, sendo λ_0 um máximo e t_0 um mínimo. Por outro lado, a linearização da equação (21), de modo semelhante à da equação (19), leva à:

$$\ln \left[-\ln (1 - \omega) \right] = c_2 \ln (\lambda_0 - \lambda) - c_2 \ln b_2 \dots\dots\dots (22)$$

onde b_2 e c_2 podem ser, então, obtidos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Umidade inicial (θ_{SAR}) e umidade de saturação (θ_{SAT})

Na determinação de θ_{SAR} através do método gravimétrico, foram utilizadas 05 amostras de solo seco ao ar, as quais foram colocadas para secar em estufa a 105°C por 48 horas. O resultado encontrado foi:

$$\theta_{\text{SAR}} = 0,053 \pm 0,002 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$$

Foi utilizado também o método da atenuação da radiação gama na obtenção de θ_{SAR} , tendo sido feitas medidas a cada centímetro da coluna, considerando-se um valor constante para a densidade global, ρ_g , em cada ponto. O valor médio assim obtido foi o mesmo do método gravimétrico acima exposto, sendo que o erro médio da média apresentou-se 3 vezes maior que o anterior, devendo-se isso a uma menor precisão do método de atenuação da radiação gama para valores baixos de umidade.

Já para a obtenção de θ_{SAT} , foi deixado continuar a infiltração por 24 horas a mais após a frente de molhamento ter chegado no final da coluna e, em seguida, por alguns minutos, foi dada uma pressão posi

tiva à água de infiltração de cerca de 10 cm, permitindo se considerar que a água, entrando também por pressão durante esse tempo, pudesse ocupar todos os poros possíveis do solo confinado na coluna. Foi, então, medido, pela radiação gama do ^{137}Cs , a umidade de saturação para os primeiros 5 centímetros da coluna, utilizando-se a equação de atenuação (16). O valor médio assim encontrado foi:

$$\theta_{\text{SAT}} = 0,441 \pm 0,002 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$$

Ao terminar essa determinação, desfez-se a coluna e tomou-se 3 amostras de solo confinado na mesma do lado da entrada de água, correspondendo aproximadamente aos pontos utilizados acima para se medir θ_{SAT} pela atenuação da radiação gama. Neste caso, entretanto, levou-se as 3 amostras à estufa a 105°C , por 48 horas, e determinou-se θ_{SAT} pelo método gravimétrico, cujo resultado médio foi o seguinte:

$$\theta_{\text{SAT}} = 0,446 \pm 0,008 \text{ cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$$

Essa diferença encontrada para θ_{SAT} pelos dois métodos especificados pode ser considerada pequena devido a erros experimentais. Entretanto, os valores de θ_{SAT} obtidos por atenuação da radiação gama mostraram uma dispersão menor em torno da média, o que pode ser notado pelo erro médio da média apresentado em comparação com o do outro método, justamente o contrário do que aconteceu com θ_{SAR} . Como os valores de umidade durante a infiltração foram tomados pelo método da atenuação da radiação gama, o valor de θ_{SAT} utilizado em todos os cálculos também foi o obtido por esse método, por uma questão de coerência.

4.2. Densidade global (ρ_g) e coeficiente de atenuação de massa da água (μ_w)

Procurou-se compactar as 10 colunas utilizadas de tal maneira a manter a densidade global (ρ_g) uniforme em todas elas, com um valor de menor variação possível de coluna para coluna e mais próximo possível do valor encontrado no campo, ou seja, $1,58 \text{ g.cm}^{-3}$, como já especificado anteriormente.

Assim, considerando-se as colunas de acrílico uniformes em toda sua extensão, os valores encontrados para ρ_g foram os seguintes:

Coluna	ρ_{g-3} (g.cm ⁻³)	Coluna	ρ_{g-3} (g.cm ⁻³)
01	1,50	06	1,48
02	1,48	07	1,48
03	1,50	08	1,50
04	1,49	09	1,52
05	1,51	10	1,53

O valor médio calculado é $1,50 \pm 0,01 \text{ g.cm}^{-3}$.

Com relação à obtenção do coeficiente de atenuação de massa relativo à água (μ_w), foi utilizada a equação:

$$I = I_0 \exp (-d \cdot \mu_w) \dots\dots\dots (23)$$

que é uma equação de atenuação semelhante à (15) mas que neste caso se refere apenas à água como meio absorvedor. De (23) pode-se explicitar μ_w assim:

$$\mu_w = \frac{1}{d} \ln \left(\frac{I_o}{I} \right) \dots\dots\dots (24)$$

Usando-se a equação (24) e fazendo-se 10 repetições nas medidas de I e I_o, onde, para cada uma, os tempos de contagem foram de 10 minutos, obteve-se o seguinte resultado:

$$\mu_w = 0,0852 \pm 0,0003 \quad \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$$

4.3. Frente de molhamento

Utilizando-se a equação (19) como solução de $\omega(t)$, torna-se necessário, em primeiro lugar, conhecer t_o . Para tanto, ao se fazer leituras ininterruptas da contagem da radiação que atravessa a coluna num ponto ainda seco até este ser alcançado pela frente de molhamento, pode-se determinar t_o com erro máximo de 0,5 minutos, já que as contagens são feitas por minuto.

Assim, tomando como exemplo a coluna 09 e o perfil de umidade no ponto $x = 18$ cm, obtém-se a Tabela 1, onde deve-se notar o seguinte:

a) no intervalo $138 \text{ min} \leq t \leq 141 \text{ min}$, a contagem flutua em torno de um valor médio, para decrescer significativamente a partir de $t = 142 \text{ min}$. Toma-se, então, $t_o = 141 \text{ min}$ e $t_f = 142 \text{ min}$, conforme o exposto em Material e Métodos;

b) no mesmo intervalo citado no item anterior, toma-se a média das contagens como sendo I_{SECO} , considerando-se nesse intervalo $\theta = \theta_{\text{SAR}}$ e $\omega = 0$, como mostra a tabela. A partir desse valor de I_{SECO} , utiliza-se a

TABELA 1 - Perfil de umidade obtido para a coluna 09 no ponto $x = 18$ cm.

t (min)	I (cpm)	$\theta(t)$ ($\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$)	$\omega(t)$ (adimensional)
138	92627	θ_{SAR}	0,000
139	92181		
140	92193		
141 ($=t_o$)	92316		
142 ($=t_f$)	91570	0,070	0,044
143	90522	0,094	0,106
144	90554	0,094	0,106
145	89652	0,115	0,160
147	88488	0,142	0,229
148	87771	0,159	0,273
149	86826	0,182	0,332
150	86324	0,194	0,363
151	85552	0,213	0,412
152	85617	0,211	0,407
153	85246	0,220	0,430
155	84125	0,248	0,503
156	83913	0,253	0,515
157	83907	0,254	0,518
158	84271	0,244	0,492
160	83218	0,271	0,562

equação (16) para se obter os demais valores de θ e a definição (12) na obtenção de ω ;

c) dificuldades de ordem prática impedem de se fazer medidas ininterruptas durante um grande intervalo de tempo. Essa é a razão de não haver contagem para $t=146$ e 159 minutos;

d) na verdade foram tomadas medidas até $t=176$ minutos, o que deixaria a tabela muito extensa para ser apresentada na íntegra, sendo que a parte mostrada já é suficiente para se fazer as análises necessárias. O ideal, entretanto, seria tomar medidas no mesmo ponto durante um intervalo de tempo suficiente para se ter o perfil completo de umidade, o que, contudo, se torna impossível na prática pelo fato de se querer obter perfis de umidade em outros pontos da coluna.

A Tabela 2 apresenta dados de um outro exemplo semelhante, ou seja, o perfil de umidade no ponto $x = 24$ cm para a mesma coluna 09. Nota-se aí que o intervalo de tempo onde a contagem flutua em torno de um valor médio é bem maior que no caso anterior. Isso, por um lado, possibilita um valor médio bastante significativo para I_{SECO} , pois será obtido por uma média de 19 medidas contra apenas 04 do caso anterior. Por outro lado, fica mais difícil se perceber quando a contagem começa a decrescer significativamente pois, como a frente de molhamento caminha tanto mais lentamente quanto mais o ponto a ser medido se afasta do início da coluna, a diferença entre os valores de I_{SECO} e o primeiro valor da contagem que já inclui a atenuação pela água fica bem pequena. Essa dificuldade advém também do fato de que toda contagem de radiação já possui sua variação aleatória, característica própria, o que pode ser notado nos valores de I_{SECO} dos perfis apresentados. No entanto, para se determinar corretamente o ins

TABELA 2 - Perfil de umidade obtido para a coluna 09 no ponto $x = 24$ cm.

t (min)	I (cpm)	$\theta(t)$ ($\text{cm}^3 \cdot \text{cm}^{-3}$)	$\omega(t)$ (adimensional)
294	92689	I_{SECO}	θ_{SAR}
295	92576		
296	92135		
297	92684		
298	92439		
299	92169		
303	92449		
304	92390		
305	92441		
306	92319		
308	92113		
309	92306		
310	92094		
311	92763		
312	92495		
313	92282		
315	93128		
316	92346		
317 ($=t_o$)	92830		
318 ($=t_f$)	92044	0,062	0,023
319	92021	0,063	0,026
320	91835	0,067	0,036
321	92125	0,060	0,018
322	91268	0,080	0,070
324	91195	0,082	0,075
325	90118	0,107	0,139

tante em que a frente de molhamento alcança o ponto escolhido, deve-se ficar atento aos primeiros decréscimos da contagem, pois o decréscimo tende a se acentuar de um minuto para outro, principalmente com relação à média dos valores anteriores. Assim sendo, a perda da contagem por um minuto que seja, devido a um descuido qualquer, nessa faixa crítica do perfil, pode dificultar a determinação correta de t_o e t_f . No caso da Tabela 2, de acordo com os dados obtidos, foram atribuídos os seguintes valores: $t_o=317$ minutos e $t_f=318$ minutos. Também aí foram feitas medidas até $t=380$ minutos, mas não foram apresentados todos os dados pois a tabela ficaria muito extensa.

Outros perfis de umidade para a coluna 09 foram tomados nos pontos $x=06, 09, 12, 15$ e 27 cm, valendo as mesmas observações feitas para os dois perfis já apresentados.

Dessa maneira, para cada valor de x , tem-se um valor de t_f , podendo-se construir uma tabela desse par de valores para cada coluna. Nesse caso, o valor correspondente de x será chamado de x_f , pois diz respeito à posição da frente de molhamento no tempo t_f , conforme descrito na parte de Teoria. Paralelamente, pode-se ter uma outra tabela entre x_f e t_f para cada coluna cujos valores são obtidos através da observação visual do avanço da frente de molhamento em função do tempo. Condensando essas duas tabelas em uma só e tomando a coluna 09 como exemplo, constrói-se a Tabela 3, onde $x_{f(v)}$ é a posição da frente de molhamento obtida visualmente e $x_{f(\gamma)}$ é a posição da mesma frente obtida pelo método de atenuação da radiação gama, já explicado. Nessa tabela, a escolha dos pontos $x_{f(\gamma)}$ não é livre e fica dependente da metodologia proposta para se obter os perfis de umidade como está descrito em Material e Métodos. Por outro lado, os

TABELA 3 - Posições da frente de molhamento em função do tempo para a coluna 09, obtidas tanto visualmente, $x_{f(v)}$, como através da atenuação da radiação gama, $x_{f(\gamma)}$.

t_f (min)	$x_{f(v)}$ (cm)	$x_{f(\gamma)}$ (cm)
1	1,9	-
2	2,3	-
4	3,1	-
8	4,5	-
10	-	6,0
16	6,5	-
26	-	9,0
32	8,8	-
55	-	12,0
64	12,3	-
91	-	15,0
128	16,8	-
142	-	18,0
256	21,7	-
318	-	24,0
424	-	27,0

pontos $x_{f(v)}$ correspondem a intervalos de tempo que estão em progressão geométrica crescente, sendo que essa escolha foi feita de acordo com sugestão de GUERRINI e REICHARDT (1981a). Portanto, nos pontos da tabela onde há traço significa que não foi feita a medida pelos motivos já expostos.

Utilizando-se as equações (7) e (11) e os dados da Tabela 3, chega-se a:

$$x_{f(v)} = \lambda_{f(v)} \cdot t_f^{\alpha(v)}$$

$$\lambda_{f(v)} = 1,76$$

$$\alpha_{(v)} = 0,46$$

$$r_{(v)} = 0,999$$

e também a:

$$x_{f(\gamma)} = \lambda_{f(\gamma)} \cdot t_f^{\alpha(\gamma)}$$

$$\lambda_{f(\gamma)} = 2,42$$

$$\alpha_{(\gamma)} = 0,40$$

$$r_{(\gamma)} = 1,000$$

onde r é o coeficiente de correlação linear da reta (11), enquanto que os índices (v) e (γ) se referem ao método visual e ao da atenuação da radiação gama, respectivamente.

Comparando-se esses resultados, notam-se as diferenças en-

tre os valores de λ_f e α obtidos pelos dois métodos. Na Tabela 4 estão esses mesmos valores obtidos para todas as dez colunas utilizadas. Antes de se analisar essa tabela, deve-se ter em conta que as colunas 1 e 2 apresentaram pequenas diferenças no que diz respeito a detalhes técnicos relativos ao início do experimento de infiltração em comparação com as demais colunas. Naquelas primeiras, além do já exposto em Material e Métodos, o preenchimento da câmara d'água, que fica no início da coluna, foi feito através de uma carga de água de aproximadamente 50 cm de altura, enquanto que nas outras essa carga de água foi de cerca de 5 cm tão somente. O primeiro procedimento, apesar de preencher a câmara d'água um pouco mais depressa, permite, certamente, alguma alteração na infiltração da água no solo, nos primeiros 2 ou 3 cm da coluna, podendo acarretar influência nos parâmetros hídricos a serem calculados devendo-se isso à grande carga de água atuante, razão pela qual procurou-se eliminá-la nas demais colunas.

Isto posto, verifica-se na Tabela 4 que, exceção feita às colunas 1 e 2, o parâmetro α obtido através da atenuação da radiação gama foi sempre inferior ao mesmo parâmetro obtido através de observações visuais. A razão da exceção ocorrida para as colunas 1 e 2 pode estar, evidentemente, na diferença de procedimento experimental no detalhe já especificado.

Uma vez que parece claro que a determinação do avanço da frente de molhamento é muito mais digna de crédito quando feita através da radiação gama, e assim sendo, $\lambda_{f(\gamma)}$ e $\alpha_{(\gamma)}$ mais dignos de crédito do que $\lambda_{f(v)}$ e $\alpha_{(v)}$, os primeiros serão os valores levados em conta neste trabalho para determinações posteriores dos perfis de umidade da água no solo.

Ainda na Tabela 4, o fato de $\alpha_{(\gamma)}$ ser quase sempre inferior a $\alpha_{(v)}$, como já comentado, vem comprovar ainda mais a necessidade de se uti

TABELA 4 - Valores de λ_f e α para as dez colunas utilizadas, obtidos visualmente (v) e através da atenuação da radiação gama (γ). r é o coeficiente de correlação linear da reta (11), utilizada na obtenção de λ_f e α .

Coluna	$\lambda_f(v)$ (cm.min ^{-α})	$\alpha(v)$ (adimensional)	$r(v)$	$\lambda_f(\gamma)$ (cm.min ^{-α})	$\alpha(\gamma)$ (adimensional)	$r(\gamma)$
01	2,59	0,37	0,992	2,61	0,39	0,999
02	2,93	0,35	0,999	2,95	0,36	1,000
03	2,37	0,39	0,995	2,70	0,38	0,999
04	2,19	0,39	0,997	2,29	0,38	0,997
05	1,87	0,43	0,998	2,06	0,42	1,000
06	1,94	0,44	1,000	2,40	0,41	1,000
07	1,54	0,47	1,000	1,98	0,43	1,000
08	1,60	0,45	1,000	1,77	0,44	0,999
09	1,76	0,46	0,999	2,42	0,40	1,000
10	1,82	0,44	0,999	2,20	0,40	1,000

lizar o formalismo generalizado de GUERRINI *et alii* (1982), pois o mesmo é solicitado sempre que o valor do parâmetro α difere do valor tradicional 0,50. Como o solo utilizado neste trabalho não é um solo comprovadamente expansivo como os utilizados pelos autores do trabalho último citado, os valores de $\alpha_{(Y)}$ aqui obtidos, apresentando um valor médio de $0,40 \pm 0,01$, podem estar indicando a necessidade de uma revisão ainda mais ampla na teoria tradicional de infiltração horizontal da água no solo do que aquela apresentada no referido trabalho. Com efeito, outros experimentos de infiltração com outros solos considerados não expansivos, poderiam levar a um valor de α , determinado através da atenuação da radiação gama, constante e diferente de 0,50, como por exemplo sugerem as dez colunas utilizadas neste caso, as quais mostram α igual a 0,40. Além disso, se for aceito $\alpha_{(Y)}$ como o valor mais correto de α e se, como foi aqui observado, há uma tendência de $\alpha_{(Y)}$ ser menor que $\alpha_{(v)}$, pelos dados apresentados na literatura (FERGUSON e GARDNER, 1963; GUERRINI e REICHARDT, 1981a; GUERRINI *et alii*, 1982) é de se esperar que outros experimentos venham confirmar o valor de α , se não igual a 0,40, igual a 0,4, se se questionar a utilização de dois algarismos significativos em face das variações que possam ocorrer para outros solos e consequente menor precisão que possa advir para o resultado final. Entretanto, em termos matemáticos, não faz diferença o expoente do tempo na equação (7) ser 0,40 ou 0,4, como não faz diferença considerá-lo 0,50 ou 0,5, pois os cálculos apresentarão o mesmo resultado. A diferença, contudo, em considerá-lo 0,5 ou 0,4 é bastante marcante, de consequências imediatas no cálculo da difusividade da água no solo, como pode ser constatado pela equação (14). Além disso, de acordo com GUERRINI (1976), provavelmente outras funções hídricas do solo seriam nesse caso, afetadas, necessitando-se para isso, fazer um aprofundamento teórico no assunto paralelamente às determinações experimentais.

Nessa mesma linha de raciocínio, restaria saber o que aconte-

ce com α para um solo expansivo, tendo em vista que GUERRINI *et alii* (1982) mostraram que, visualmente, α já é menor para solos expansivos que para solos considerados rígidos, sendo que GUERRINI e REICHARDT (1981b) mostraram uma boa correlação linear negativa entre valores de α e coeficientes de expansão do solo.

Nota-se ainda na Tabela 4 que os valores de α e λ_f são interdependentes e inversamente proporcionais entre si, qualquer que seja o método de determinação, como, aliás, pode-se inferir a partir da equação linear (11). Isso faz com que a determinação correta de α leve à determinação correta de λ_f , o que pode ser obtido, como já discutido, com o método da atenuação da radiação gama. Finalmente, os valores do coeficiente de correlação linear da reta (11) mostrados na Tabela 4 não apresentam diferenças significativas de um método para outro. Indicam, sim, que para qualquer dos dois métodos utilizados, os dados experimentais levam a excelentes concordâncias lineares para a equação (11), conforme atestam seus valores muitíssimos próximos à unidade.

4.4. Perfis de umidade

De acordo com o modelo de Weibull para $\omega(t)$, aqui proposto na equação (19), foi tomado o perfil de umidade de cada coluna com valores correspondentes de ω e t , bem como os de t_0 , e foram utilizados na equação (20) para se obter os parâmetros b_1 e c_1 . O mesmo se diz com relação ao modelo de Weibull para $\omega(\lambda)$ proposto na equação (21), quando foram usados os valores correspondentes de ω e x/t^α , bem como os de λ_0 , para cada perfil de umidade, na obtenção dos parâmetros b_2 e c_2 .

Na Tabela 5 pode ser visto o mesmo perfil de umidade mostra-

do na Tabela 1, tendo sido suprimido os valores de Θ e acrescido os de λ , obtidos experimentalmente, estando também computados os valores de $\omega(t)$ obtidos a partir de b_1 e c_1 utilizando-se o modelo de Weibull da equação (19) num processo inverso do que levou às determinações dos parâmetros b_1 e c_1 .

Na referida Tabela 5, nota-se, em primeiro lugar, que $\lambda_o = \lambda_f$, verificando-se uma variação bem lenta de λ em função de ω . Essa variação lenta é tanto mais acentuada quanto mais se afasta do início da coluna o ponto escolhido para se obter o perfil de umidade, no caso, $x=18$ cm. Assim, por exemplo, no ponto $x=27$ cm, essa variação é mais lenta ainda, enquanto que no ponto $x=6$ cm é bem mais rápida, apresentando, inclusive, valores bem distintos para λ_o e λ_f . Esses valores experimentais de $\lambda(\omega)$ serão comparados mais tarde com os valores previstos pela equação (21) de Weibull. Ainda na Tabela 5, verifica-se a boa aproximação entre os valores de $\omega(t)$ obtidos experimentalmente e os obtidos pelo modelo de Weibull a partir da equação (19). Apesar de ser necessário se conhecer primeiro os valores experimentais de $\omega(t)$ para poder se aplicar a equação linearizada (20) e assim se obter os parâmetros b_1 e c_1 , para depois, por um processo inverso já mencionado, se calcular $\omega(t)$ através da equação (19), a tentativa que se faz aqui é de se obter uma equação genérica para $\omega(t)$ através do modelo de Weibull, ainda que essa determinação seja, pelo menos em princípio, empírica. A boa concordância entre essas duas colunas de valores $\omega(t)$ mostradas na Tabela 5 é uma evidência clara da validade do modelo de Weibull aplicado a essa função, isto é, esta última mostra ser muito bem representada pela equação de Weibull. As Figuras de 1 a 7 mostram mais claramente essa boa concordância entre os valores de $\omega(t)$ para cada um dos perfis de umidade da coluna 10, agora tomada como exemplo, o que é comprovado pelo alto valor do coeficiente de correlação da reta (20) anotado para cada perfil nas referidas figuras.

TABELA 5 - Perfil de unidade obtido para a coluna 09 no ponto $x = 18$ cm, evidenciando os valores experimentais de $\omega(t)$ em comparação com os obtidos pelo modelo de Weibull. São mostrados também os valores experimentais de λ .

t (min)	I (cpm)	$\omega(t)$ (adimensional)	$\omega(t)$ (adimensional)	$\lambda = x/t^\alpha$ (cm.min $^{-\alpha}$)
		(experimental)	(Weibull)	(experimental)
138	92627			
139	92181			
140	92193			
141 ($=t_o$)	92316			2,61 ($=\lambda_o$)
142 ($=t_f$)	91570	0,044	0,051	2,61 ($=\lambda_f$)
143	90522	0,106	0,094	2,60
144	90554	0,106	0,134	2,59
145	89652	0,160	0,171	2,58
147	88488	0,229	0,238	2,57
148	87771	0,273	0,269	2,56
149	86826	0,332	0,299	2,56
150	86324	0,363	0,327	2,55
151	85552	0,412	0,353	2,54
152	85617	0,407	0,379	2,54
153	85246	0,430	0,403	2,53
155	84125	0,503	0,448	2,52
156	83913	0,515	0,469	2,51
157	83907	0,518	0,489	2,51
158	84271	0,492	0,508	2,50
160	83218	0,562	0,545	2,49

FIGURA 1 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 6,0$ cm, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 2 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 9,0 \text{ cm}$, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 3 - Perfil de umidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 12 \text{ cm}$, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 4 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 15 \text{ cm}$, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 5 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x=17 \text{ cm}$, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 6 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 22$ cm, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

FIGURA 7 - Perfil de unidade obtido para a coluna 10 no ponto $x = 24 \text{ cm}$, onde a concordância entre os pontos experimentais e os obtidos pelo modelo de Weibull proposto é medida pelo coeficiente de correlação (r) da reta (20).

Nas Tabelas 6 e 7 são vistos os valores de b_1 , c_1 e r_1 e de b_2 , c_2 e r_2 para as colunas 09 e 10, escolhidas como exemplo, referentes a cada ponto onde foram tomados os perfis, sendo que r_1 e r_2 são os coeficientes de correlação das retas (20) e (22), respectivamente. As unidades dos parâmetros b_1 , c_1 , b_2 e c_2 que aparecem nessas tabelas podem ser confirmadas nas equações (19) e (21). Algumas tendências podem ser observadas nesses dados, apesar dos erros experimentais neles contidos:

a) o parâmetro b_1 cresce de maneira marcante com o aumento de x , o que pode ser visto nas duas tabelas. Pode-se até inferir um valor de b_1 próximo a zero para x tendendo a zero, o que, se levado à equação (19), mostra que para um tempo finito qualquer maior que t_0 , quando o ponto em que é medido o perfil se aproxima do início da coluna, a umidade se aproxima da saturação, de acordo, portanto, com as condições iniciais deste experimento de infiltração;

b) o parâmetro c_1 , por sua vez, parece variar aleatoriamente em torno de um valor médio próximo à unidade para as colunas apresentadas. Isso é coerente com a equação genérica (18) de Weibull, onde c é o parâmetro de forma dessa função, pois tendo $\omega(t)$ uma forma constante, c_1 deve ter um valor constante. Para uma confirmação plena dessa hipótese aqui levantada, seriam necessários vários outros experimentos com diferentes solos e diferentes condições experimentais. O caso do parâmetro b_1 é diferente, pois sendo o mesmo definido como parâmetro de escala na equação original, compreende-se perfeitamente a variação apresentada, estando de acordo com PINDER III *et alii* (1978);

c) o parâmetro b_2 mostra uma tendência de aumentar seu va-

TABELA 6 - Valores das estimativas dos parâmetros b_1 , c_1 , b_2 e c_2 para os vários perfis da coluna 09, obtidos a partir das retas (20) e (22) com os respectivos coeficientes de correlação linear, r_1 e r_2 .

Perfil	b_1 (min)	c_1 (adimensional)	r_1	$b_2 \cdot \min^{-\alpha}$ (cm.min ^{-α})	c_2 (adimensional)	r_2
x = 6,0 cm	3,22	0,92	0,91	0,29	1,34	0,94
x = 9,0 cm	8,75	0,97	0,96	0,27	1,17	0,97
x = 12 cm	7,95	1,03	0,98	0,13	1,11	0,99
x = 15 cm	15,0	0,81	0,98	0,14	0,85	0,98
x = 18 cm	24,7	0,92	0,99	0,16	0,89	0,98
x = 24 cm	50,3	1,12	0,98	0,14	1,27	0,98
x = 27 cm	58,7	0,80	0,99	0,13	0,77	0,97

TABELA 7 - Valores das estimativas dos parâmetros b_1 , c_1 , b_2 e c_2 , para os vários perfis da coluna 10, obtidos a partir das retas (20) e (22) com os respectivos coeficientes de correlação linear, r_1 e r_2 .

Perfil	b_1 (min)	c_1 (adimensional)	r_1	b_2 $^{-\alpha}$ (cm.min)	c_2 (adimensional)	r_2
x = 6,0 cm	5,20	1,29	0,97	0,32	1,60	0,98
x = 9,0 cm	7,26	1,00	0,95	0,17	1,14	0,95
x = 12 cm	10,9	1,30	0,99	0,14	1,23	0,99
x = 15 cm	22,0	0,91	0,99	0,15	1,04	0,99
x = 17 cm	22,9	0,89	0,97	0,11	1,14	0,98
x = 22 cm	24,7	0,90	0,97	0,07	0,96	0,94
x = 24 cm	25,5	1,02	0,99	0,06	1,04	0,98

lor $\tilde{a}$ medida que x tende a zero. Apesar de não ser essa uma tendência acentuada, principalmente tendo-se em conta os erros experimentais, ela torna a situação difícil de ser analisada quando se toma a equação (21). Percebe-se, além disso, que o parâmetro de forma c_2 apresenta-se com comportamento diferente daquele mostrado por c_1 , pois já não é possível, somente pelos dados apresentados, sugerir uma tendência bem definida para c_2 . Entretanto, como no caso de c_1 , c_2 também é parâmetro de forma da equação de Weibull, dada pela equação (21) e, assim sendo, deveria ter um valor constante, o que não deixa de ser uma real possibilidade pelos resultados aqui expostos e que será retomado em discussões posteriores neste trabalho.

Essas dificuldades de análise experimental da função $\omega(\lambda)$, bem como de seus respectivos parâmetros, diminuiriam caso se tomassem perfis de umidade em pontos cada vez mais próximos da origem, o que, entretanto, esbarra em problemas experimentais devido à metodologia utilizada, uma vez que nesses pontos a frente de molhamento caminha muito rapidamente.

Em resumo, pode-se dizer que a função $\omega(t)$ é bem representada pela equação (19) de Weibull, sendo os valores dos parâmetros b_1 e c_1 , obtidos experimentalmente, coerentes com as condições de contorno do experimento e passíveis de terem, cada um, um significado físico relativo ao parâmetro, bastando para isso um estudo mais aprofundado da referida função. Já a função $\omega(\lambda)$, ainda que bem representada pela equação (21) de Weibull, juntamente com seus parâmetros b_2 e c_2 , são mais difíceis de serem interpretados. Um dos motivos que, à primeira vista, desponta aqui como

plausível para essa dificuldade é que, ao contrário do que acontece na função $\omega(t)$, em $\omega(\lambda)$ apenas a variável dependente (ω) é medida diretamente, enquanto que a variável independente (λ) o é indiretamente através da equação (10). E acrescente-se ainda o fato da equação (7), que dá origem à (10) ser fruto de uma hipótese científica utilizada de maneira generalizada dentro do campo da Física de Solos, segundo a qual a dependência da variável de posição (x) em relação à umidade (θ) e ao tempo (t) pode ser escrita, para facilidade de cálculos, através da técnica de separação de variáveis. Portanto, as equações (7) e (10) são consequências dessa hipótese, influenciando diretamente na determinação de $\omega(\lambda)$. Contudo, também neste caso, um estudo mais aprofundado da função $\omega(\lambda)$ de Weibull, bem como outros experimentos em condições diferentes, podem levar a uma conclusão sobre o significado físico dos parâmetros b_2 e c_2 , como é de se intuir que realmente eles o tenham.

Finalmente, deve-se salientar que uma análise matemática da função $\omega(t)$ dada na equação (19), mostra que quando $t=t_0$, isto é, um minuto antes da frente de molhamento atingir o ponto escolhido para a medida, a umidade (ω) do referido ponto é zero, enquanto que, quando t tende a infinito, significando isso um intervalo de tempo muito grande após a passagem da frente de molhamento pelo ponto escolhido, a umidade (ω) tende ao valor máximo de saturação, igual a 1,00. O intervalo de t onde está definida essa função é, portanto, (t_0, ∞) . Essas tendências podem ser acompanhadas nas já citadas Figuras de 1 a 7 referentes aos perfis de umidade da coluna 10. Uma análise semelhante da função $\omega(\lambda)$ será feita no próximo item.

4.5. Difusividade da água no solo

Tomando-se, inicialmente, o inverso da função $\omega(\lambda)$, a partir da equação (21) chega-se a:

$$\lambda(\omega) = \lambda_0 - b_2 \left[\ln \left(\frac{1}{1-\omega} \right) \right]^{1/c_2} \dots\dots\dots (25)$$

onde se nota que $\lambda(\text{zero}) = \lambda_0$, conforme o esperado, o que já não acontece no limite quando ω tende a unidade e λ tende ao infinito negativo, que é um resultado não esperado. Entretanto, devido aos valores encontrados para λ_0 , b_2 e c_2 , e também ao termo logarítmico da equação (25), essa discrepância do valor esperado teoricamente em relação àquele obtido por essa equação só acontece para valores de ω maiores que 0,99, o que não resulta em problema prático nenhum. Assim sendo, como poderá ser visto nas próximas figuras, essa falha de modelo é graficamente imperceptível e o erro cometido irrelevante.

Nas Figuras 8 e 9 são vistos os gráficos da função $\lambda(\omega)$ para as colunas 09 e 10, onde estão especificados os pontos experimentais obtidos para cada perfil e o modelo de Weibull tomado a partir dos valores médios dos parâmetros λ_0 , b_2 e c_2 dos vários perfis. Verifica-se que a curva do modelo proposto representa muito bem os pontos experimentais, salientando-se que, nesse caso, ao contrário da metodologia convencional, tem-se uma equação para $\lambda(\omega)$, o que facilita sobremaneira a obtenção da difusividade da água no solo, como se verá a seguir. Nota-se ainda nessas figuras que o modelo proposto, apresenta praticamente $\lambda(1,00) = 0,00$, conforme o que já foi discutido, enquanto que é visível a dificuldade de obtenção de pontos experimentais para valores muito baixos de λ . Isso se deve ao

FIGURA 8 - Função $\lambda(w)$ para a coluna 09, onde são vistos os pontos experimentais comparados com o modelo de Weibull proposto dado pela equação (25).

FIGURA 9 - Função $\lambda(u)$ para a coluna 10, onde são vistos os pontos experimentais comparados com o modelo de Weibull proposto dado pela equação (25).

fato de λ ser obtido a partir da equação (10) e ser difícil se tomar perfis de umidade em pontos próximos ao início da coluna, conforme já salientado.

Para se determinar, então, a difusividade da água no solo a través da equação (14), estaria faltando a determinação de $D_1(\omega)$ que é a parte dependente da umidade, pois a parte dependente do tempo, $D_2(t)$, é fácil de ser obtida a partir de α , cujos valores já foram apresentados e discutidos.

A função $D_1(\omega)$ é a mesma dada na segunda parte do membro direito da equação (14):

$$D_1(\omega) = \frac{1}{2} \left(-\frac{d\lambda}{d\omega} \right) \cdot \int_0^{\omega} \lambda d\omega \quad \dots\dots\dots (26)$$

A partir da equação (25) determina-se, então, a derivada que aparece em (26), assim:

$$\left(-\frac{d\lambda}{d\omega} \right) = \frac{b_2}{c_2} \left(\frac{1}{1-\omega} \right) \left[\ln \left(\frac{1}{1-\omega} \right) \right]^{(1/c_2-1)} \quad \dots (27)$$

Nota-se que $(-d\lambda/d\omega)$ é função analítica e somente depende de ω , o que facilita sua determinação, sendo essa uma grande vantagem em relação ao que se faz na metodologia convencional, quando se usa traçar manualmente retas tangentes à curva $\lambda(\omega)$ para se obter os valores de $(-d\lambda/d\omega)$.

Com relação à integral que aparece na segunda parte da equação (26), também devendo ser obtida a partir de (25), não apresenta so

lução analítica devido ao fato de aparecer um expoente fracionário para o logarítmo. Com efeito, se o parâmetro c_2 puder ser considerado constante para cada coluna, hipótese já discutida e plausível quando se analisa as Tabelas 6 e 7, seus valores médios para as colunas 07, 08, 09 e 10 serão:

Coluna	$\overline{c_2}$ (adimensional)
07	$1,1 \pm 0,1$
08	$0,95 \pm 0,1$
09	$1,1 \pm 0,1$
10	$1,2 \pm 0,1$

Em primeiro lugar, nota-se que as variações dos valores de c_2 para cada coluna são pequenas, o que pode ser comprovado pelos valores baixos do erro médio da média. Depois, parece claro haver uma pequena flutuação dos valores de c_2 em torno de um valor médio comum, sugerindo um único valor de c_2 para todas as colunas. No caso dessas quatro colunas, tomadas como exemplo, o valor constante de c_2 seria $1,1 \pm 0,1$. Tendo, pois, c_2 um valor fracionário, a integração de $\lambda(\omega)$ só pode ser feita por um método numérico. Para esse objetivo, aqui foi usada a Regra de Simpson de integração numérica utilizando-se uma calculadora HP-25.

Na Tabela 8, pode-se ver os resultados obtidos para $D_1(\omega)$ referentes à coluna 09, utilizando-se a equação (26), onde a derivada é calculada através de (27) e a integral através da Regra de Simpson. Nos pontos $\omega=0,00$ e $\omega=1,00$ a função $(-d\lambda/d\omega)$ não é definida porque $\lambda(\omega)$ tem limites apenas unilaterais nesses pontos. Percebe-se também que os valores

TABELA 8 - Valores de $D_1(\omega)$ para a coluna 09, obtidos pela equação (26), onde $(-d\lambda/d\omega)$ é calculada pela equação (27) e $\int_0^\omega \lambda d\omega$ através da Regra de Simpson.

ω (adimensional)	$(-d\lambda/d\omega)$ (cm.min ^{-α})	$\int_0^\omega \lambda d\omega$ (cm.min ^{-α})	$D_1(\omega)$ (cm ² .min ^{-2α})
0,00	-	0,00	-
0,10	0,21	0,26	0,027
0,20	0,23	0,51	0,059
0,30	0,26	0,76	0,099
0,40	0,29	1,01	0,15
0,50	0,35	1,25	0,22
0,60	0,43	1,49	0,32
0,70	0,56	1,73	0,48
0,80	0,83	1,96	0,81
0,90	1,62	2,18	1,8
1,00	-	2,36	-

de $D_1(\omega)$ foram tomados com apenas dois algarismos significativos, tendo em vista que os fatores utilizados em seu cálculo apresentam sempre dois ou três algarismos significativos.

Uma outra possibilidade para o cálculo de D_1 seria a de se considerar o valor de c_2 igual a 1,0, o que faria com que a integral $\lambda(\omega)$ tivesse solução analítica. Nesse caso, ter-se-ia da equação (27):

$$\left(-\frac{d\lambda}{d\omega}\right) = \frac{b_2}{(1-\omega)} \dots\dots\dots (28)$$

e a partir da equação (25):

$$\int_0^\omega \lambda d\omega = \int_0^\omega \lambda_o d\omega - \int_0^\omega b_2 \ln\left(\frac{1}{1-\omega}\right) d\omega \dots\dots\dots (29)$$

a qual, se resolvida por partes, dá:

$$\int_0^\omega \lambda_o d\omega = \lambda_o \omega \dots\dots\dots (30)$$

e

$$\int_0^\omega b_2 \ln\left(\frac{1}{1-\omega}\right) d\omega = b_2 \left[\omega + (1-\omega) \ln(1-\omega) \right] \dots\dots\dots (31)$$

Levando-se (30) e (31) à (29):

$$\int_0^\omega \lambda d\omega = \lambda_o \omega - b_2 \left[\omega + (1-\omega) \ln(1-\omega) \right] \dots\dots\dots (32)$$

Em resumo, considerando-se $c_2 = 1,0$ e utilizando-se (28) e (32), a equação (26) fica:

$$D_1(\omega) = \frac{1}{2} \frac{b_2}{(1-\omega)} \left\{ \lambda_o \omega - b_2 \left[\omega + (1-\omega) \ln(1-\omega) \right] \right\} \dots (33)$$

Os dados de $D_1(\omega)$ para a coluna 09, obtidos pela equação (33) estão mostrados na Tabela 9.

Comparando-se as Tabelas 8 e 9, nota-se, então, que os valores da integral $\int_0^\omega \lambda d\omega$ são exatamente os mesmos quando calculados pela Regra de Simpson e pela equação (32), mostrando ser perfeitamente válida a aproximação feita. Já no caso de $(-d\lambda/d\omega)$, a comparação dessas tabelas mostra que os valores calculados pela equação simplificada (28), começam a se diferenciar levemente dos calculados pela equação completa (27), diferença essa que vai se tornando maior à medida que ω se aproxima do valor 1,00. Isso faz com que os valores de $D_1(\omega)$ da Tabela 9 comecem a ser ligeiramente superiores aos mostrados na Tabela 8 à medida que ω vai crescendo. Apesar disso, a concordância dos valores de $D_1(\omega)$ nas duas tabelas é muito boa e a aproximação dada pela equação (33) mostra ser válida, o que pode ser bem visualizado na Figura 10.

De outro ângulo, uma outra simplificação possível na obtenção de $D_1(\omega)$, que é útil em termos de comparação, é dar uma aproximação exponencial simples para a função $\lambda(\omega)$, ao invés da aplicação do modelo de Weibull dado pela equação (25). Assim, pelas Figuras 8 e 9, nota-se que uma aproximação possível seria a de considerar:

$$\lambda(\omega) = \lambda_o - A \exp(B\omega) \dots\dots\dots (34)$$

TABELA 9 - Valores de $D_1(\omega)$ para a coluna 09, obtidos pela equação (33), onde $(-d\lambda/d\omega)$ é calculada pela equação (28) e $\int_0^\omega \lambda d\omega$ através da equação (32).

ω (adimensional)	$(-d\lambda/d\omega)$ (cm.min $^{-\alpha}$)	$\int_0^\omega \lambda d\omega$ (cm . min $^{-\alpha}$)	$D_1(\omega)$ (cm 2 .min $^{-2\alpha}$)
0,00	0,18	0,00	0,000
0,10	0,20	0,26	0,026
0,20	0,23	0,51	0,059
0,30	0,26	0,76	0,099
0,40	0,30	1,01	0,15
0,50	0,36	1,25	0,23
0,60	0,45	1,49	0,34
0,70	0,60	1,73	0,52
0,80	0,90	1,96	0,88
0,90	1,80	2,18	2,0
1,00	-	-	-

FIGURA 10 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ referentes às Tabelas 8 e 9.

onde A e B são parâmetros determinados experimentalmente através da aplicação de logaritmo nessa equação:

$$\ln(\lambda_0 - \lambda) = \ln A + B\omega \quad \dots\dots\dots (35)$$

Aqui, então, $\ln A$ é o coeficiente linear e B é o coeficiente angular da reta experimental (35).

Utilizando-se os valores experimentais de $\lambda(\omega)$ para cada perfil da coluna 09, aqui também tomada como exemplo, e aplicando-se em (35), obtêm-se os seguintes valores médios para a referida coluna:

$$A = 0,027 \quad B = 3,5 \quad r = 0,97$$

onde r é o coeficiente de correlação linear da reta (35).

Para uma melhor visualização do significado dessa aproximação exponencial da função $\lambda(\omega)$, os valores de A e B obtidos acima foram levados de volta à equação (34) para se obter os pontos de $\lambda(\omega)$ segundo essa aproximação, referentes à coluna 09. Esses pontos permitem traçar a função $\lambda(\omega)$ obtida por essa aproximação exponencial e compará-la com a obtida através do modelo de Weibull e também com os pontos experimentais. Essa comparação é feita na Figura 11 que nada mais é que a Figura 8 acrescida da aproximação exponencial. Nota-se aí que para valores baixos de ω , essa aproximação representa bem os pontos experimentais e concorda com o modelo de Weibull proposto, sendo que, à medida que ω cresce, começam a aparecer as discrepâncias. Percebe-se, ainda na Figura 11 que essa aproximação é mais adequada aos perfis referentes a $x = 6,0$ cm e $x = 9,0$ cm, pontos mais próximos da origem da coluna, fator esse de razão desconhecida é passível

FIGURA 11 - Comparação dos valores de $\lambda(\omega)$ para a coluna 09 obtidos experimentalmente, marcados pelos pontos, com o modelo proposto de Weibull dado pela equação (25) e a aproximação exponencial dada por (34).

de ser mais intensamente estudado. De uma maneira geral, a validade dessa aproximação dependerá da precisão que se desejar obter no resultado final, o que poderá ser constatado melhor a seguir.

Se, então, for utilizada essa aproximação exponencial para $\lambda(\omega)$, dada pela equação (34), a obtenção de $D_1(\omega)$ pela equação (26) fica, por partes:

$$\left(-\frac{d\lambda}{d\omega}\right) = (A \cdot B) \exp(B\omega) \dots\dots\dots (36)$$

e

$$\int_0^\omega \lambda d\omega = \lambda_0 \omega - \left(\frac{A}{B}\right) \exp(B\omega) \dots\dots\dots (37)$$

o que leva à:

$$D_1(\omega) = \frac{1}{2} (A \cdot B) \exp(B\omega) \left[\lambda_0 \omega - \left(\frac{A}{B}\right) \exp(B\omega) \right]$$

ou

$$D_1(\omega) = \frac{1}{2} (A \cdot B) \lambda_0 \omega \exp(B\omega) - \frac{1}{2} A^2 \exp(2B\omega) \dots (38)$$

Na Tabela 10 estão os dados de $D_1(\omega)$ referentes à coluna 09, obtidos a partir da equação (38), utilizando-se os valores de A e B já divulgados e o valor médio de λ_0 referente à essa coluna. Nessa tabela, para maior facilidade de análise, mostra-se o membro direito da equação (38)

dividido em duas partes, chamadas de $I(\omega)$ e $II(\omega)$, assim:

$$I(\omega) \equiv \frac{1}{2} (A B) \lambda_o \omega \exp (B \omega) \dots\dots\dots (39)$$

e

$$II(\omega) \equiv \frac{1}{2} (A^2) \exp (2B\omega) \dots\dots\dots (40)$$

de tal maneira que a equação (38) fica:

$$D_1(\omega) = I(\omega) - II(\omega) \dots\dots\dots (41)$$

Na referida Tabela 10 nota-se, antes de mais nada, que os valores de $D_1(\omega)$ diferem significativamente dos apresentados na Tabela 8, mostrando a inadequação da aproximação utilizada, o que pode também servir to na Figura 12. Por outro lado, nota-se também que a função $II(\omega)$ praticamente não interfere no cálculo final de $D_1(\omega)$, a não ser para valores bem altos de ω . Isso poderia ser previsto a partir da equação (40), onde aparece o termo A^2 , uma vez que o valor de A em questão é 0,027 e, assim, $A^2 \ll 1,0$, fazendo com que $II(\omega)$ seja praticamente desprezível face a $I(\omega)$ na equação (41). Fazendo essa aproximação, ter-se-ia, a partir da equação (38):

$$D_1(\omega) \approx \frac{1}{2} (AB) \lambda_o \omega \exp (B \omega) \dots\dots\dots (42)$$

Definindo-se, então:

$$K \equiv \frac{1}{2} (A B) \lambda_o \dots\dots\dots (43)$$

TABELA 10 - Valores de $I(\omega)$, $II(\omega)$ e $D_1(\omega)$ para a coluna 09, obtidos através das equações (39), (40) e (38).

ω (adimensional)	$I(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)	$II(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)
0,00	0,000	0,00036	0,000
0,10	0,017	0,00074	0,016
0,20	0,049	0,0015	0,047
0,30	0,10	0,0030	0,097
0,40	0,20	0,0060	0,19
0,50	0,35	0,012	0,34
0,60	0,60	0,025	0,58
0,70	0,99	0,050	0,94
0,80	1,6	0,10	1,5
0,90	2,6	0,20	2,4
1,00	4,1	0,41	3,7

FIGURA 12 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ referentes às Tabelas 8 e 10.

tem-se:

$$D_1(\omega) \approx K \omega \exp(B \omega) \dots\dots\dots (44)$$

Está claro, portanto, que somente uma aproximação bem grosseira poderia dar à função $D_1(\omega)$ a forma de uma exponencial simples definida como se segue:

$$D_1(\omega) \approx D_0 \exp(B \omega) \dots\dots\dots (45)$$

onde $D_0 \equiv K \cdot \omega$ passaria a ser considerada constante. Sabe-se, como já citado na parte de Introdução e Revisão de Literatura deste trabalho, que a aproximação de $D_1(\omega)$ dada em (45) é muito utilizada na literatura em geral, mas aqui está se vendo que a validade da referida aproximação é bastante limitada. Ao lado disso é interessante se notar que uma comparação entre a equação (44) e a equação (5) frequentemente sugerida na literatura, explica alguns pontos importantes e até agora obscuros já mencionados na parte de Introdução e Revisão de Literatura:

a) no parâmetro α da equação (5) fica implícito o valor de λ_0 que é obtido, a grosso modo, através de (10), o que dá suporte teórico ao método de estimativa da difusividade apresentado por REICHARDT *et alii* (1972) e REICHARDT e LIBARDI (1974), desde que se considere válida a aproximação exponencial dada por (5);

b) fica explicado o motivo de se encontrar na literatura valores aproximadamente iguais para o parâmetro β da equação (5) e valores bem distintos para o parâmetro α dessa equação, o que é discutido por MILLER e BRESLER (1977) sem se chegar numa conclusão. Nota-se que somente

β poderia vir a ser uma constante universal e não α e β como sugere BRUTSAERT (1979);

c) fica explicado também o motivo de se obter variações na difusividade com a densidade global do solo quando se utiliza o modelo exponencial dado por (5) (LIBARDI *et alii*, 1982), pois o parâmetro α dessa equação contendo λ_0 , deve variar com a densidade.

Além disso, o que comumente se faz na literatura é se supor esse modelo exponencial simples para $D_1(\omega)$ e, a partir dos resultados experimentais obtidos através de BRUCE e KLUTE (1956), se determinar os parâmetros D_0 e B empiricamente. Na verdade, supõe-se geralmente esse modelo para a função completa $D(\omega)$ sem levar em conta a dependência de D com o tempo. No exemplo da coluna 09, considerando-se apenas a função $D_1(\omega)$, tomando-se os valores da Tabela 8 como experimentais e a linearização da equação (45) dada por:

$$\ln D_1(\omega) = \ln D'_0 + B'\omega \quad \dots\dots\dots (46)$$

chega-se a:

$$D'_0 = 0,020 \quad B' = 4,8 \quad r = 0,99$$

r , sendo o coeficiente de correlação linear correspondente, enquanto que D'_0 e B' foram assim chamados para significar a maneira diferente pela qual foram determinados em relação a D_0 e B . Tomando-se esses valores de D'_0 e B' e levando-os à equação (45) no lugar de D_0 e B , respectivamente, constrói-se a Tabela 11 e também a Figura 13, onde se comparam os valores de

$D_1(\omega)$ obtidos segundo esse modelo com os da Tabela 8, considerados como padrão. Apesar da razoável concordância observada na comparação citada, deve-se lembrar que a ordenada do gráfico dessa Figura 13 está em escala logarítmica, o que mascara as divergências nos valores de $D_1(\omega)$. Percebe-se, além disso, a tendência de se acentuar essas divergências para valores de ω menores que 0,10 e maiores que 0,90.

Por outro lado, como se pode notar, o valor de B' aqui obtido é maior que o de B obtido a partir da equação (35), sendo o coeficiente r aqui mais próximo da unidade. A razão dessas diferenças deve estar, em primeiro lugar, nas aproximações feitas durante a passagem do modelo exponencial de $\lambda(\omega)$, dado na equação (34), para o modelo exponencial de $D_1(\omega)$ dado em (45). Porém, a razão principal deve estar no fato de que, ao contrário do que acontece para D_0 e B , na obtenção dos valores de D'_0 e B' não são considerados os valores de ω menores que 0,10 e nem aqueles maiores que 0,90, os quais são os já mencionados intervalos críticos de ω . Se fossem considerados os pontos experimentais de $D_1(\omega)$ nesses intervalos, seria de se esperar que o coeficiente de correlação linear (r) da reta (46) teria um valor menor que aquele mostrado acima, por aquilo que se percebe na Figura 13, apresentando, conseqüentemente, valores também diferentes para D'_0 e B' . Isso tudo faz sentido, porque na literatura, em geral, considera-se o modelo exponencial simples para a difusividade da água no solo, sabendo-se que isso vale apenas numa faixa intermediária da unidade, não podendo ser levado em conta os valores extremos. Vê-se aqui, pois, que para o intervalo completo de ω , uma aproximação melhor para $D_1(\omega)$ é dada pela equação (44), enquanto que melhor ainda seria utilizar (33).

TABELA 11 - Valores de $D_1(\omega)$, obtidos a partir da equação (45), utilizando-se D'_0 e B' no lugar de D_0 e B , respectivamente.

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)
0,00	0,020
0,10	0,032
0,20	0,052
0,30	0,084
0,40	0,14
0,50	0,22
0,60	0,36
0,70	0,58
0,80	0,93
0,90	1,5
1,00	2,4

FIGURA 13 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ referentes às Tabelas 8 e 11.

Uma outra aproximação possível para $D_1(\omega)$ pode ser intuída quando se faz o gráfico linear dos dados da Tabela 8, o que está mostrado na Figura 14. Essa outra aproximação consiste em se considerar a função inversa $\omega(D_1)$ variando também segundo o modelo de Weibull para essa função, pois pode-se notar na Figura 14 que a mesma tem forma semelhante a dos perfis $\omega(t)$ já apresentados, bem como a dos gráficos já citados de PINDER III *et alii* (1978). Dessa maneira, a equação seria:

$$\omega = 1 - \left\{ \exp - \left[(D_1/b_3)^{c_3} \right] \right\} \dots\dots\dots (47)$$

cujo inverso leva à:

$$D_1 = b_3 \left[\ln \left(\frac{1}{1-\omega} \right) \right]^{1/c_3} \dots\dots\dots (48)$$

onde b_3 e c_3 são os parâmetros de escala e forma, respectivamente.

Linearizando a equação (47), tem-se:

$$\ln \left[- \ln (1-\omega) \right] = c_3 \ln D_1 - c_3 \ln b_3 \dots\dots\dots (49)$$

Aplicando-se, então, os valores da Tabela 8 na equação (49), obtêm-se o seguinte, por regressão linear:

$$b_3 = 0,42 \qquad c_3 = 0,74 \qquad r = 0,99$$

r sendo o coeficiente de correlação linear. Levando-se esses valores de b_3 e c_3 de volta à equação (48), constrói-se a Tabela 12, que mostra os valores de D_1 obtidos segundo a referida equação. Comparando-se essa tabela com a Tabela 8, nota-se uma aproximação razoavelmente boa entre os

FIGURA 14 - Gráfico linear da função $\omega(D_1)$ para a coluna 09, construído com os dados da Tabela 8.

TABELA 12 - Valores de $D_1(\omega)$ para a coluna 09, obtidos a partir do modelo de Weibull da equação (48).

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)
0,00	0,000
0,10	0,020
0,20	0,055
0,30	0,10
0,40	0,17
0,50	0,26
0,60	0,37
0,70	0,54
0,80	0,80
0,90	1,3
1,00	∞

valores de $D_1(\omega)$, com exceção do ponto $D_1(0,90)$, cujo valor pela Tabela 12 é de cerca de 33% mais baixo do que pela Tabela 8, sendo essa a maior diferença encontrada. Observa-se também que a condição inicial teórica $D_1(0,00) = 0,00$ é confirmada muito bem pelo modelo de Weibull da equação (48). Uma melhor visualização da comparação dos valores de $D_1(\omega)$ obtidos por essa aproximação com os da Tabela 8, pode ser vista na Figura 15, onde se nota que as maiores diferenças ocorrem, novamente, para valores extremos de ω .

Paralelamente às várias aproximações aqui apresentadas para cálculo de $D_1(\omega)$, e visando uma análise mais detalhada do modelo de Weibull, mostra-se na Tabela 13 e na Figura 16 uma comparação dos valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08, 09 e 10, as quais foram escolhidas como exemplo. Esses valores foram obtidos pela equação (26), onde a derivada foi calculada pela equação (27) e a integral pela Regra de Simpson a partir da equação (25), ambos de acordo com o modelo de Weibull.

Antes de mais nada, fica claro mais uma vez, pela Figura 16, que, num gráfico mono-log, a função $D_1(\omega)$ apresenta-se linear apenas na região intermediária de ω , sendo que para o intervalo completo, mais se assemelha, à primeira vista, com uma função do tipo tangente.

Por outro lado, apesar de todo o cuidado tomado em se manter as mesmas condições experimentais de coluna para coluna, a Tabela 13 mostra uma variação muito grande nos valores de $D_1(\omega)$ para as três colunas apresentadas. Esse resultado mostra que mesmo usando equações analíticas para $\lambda(\omega)$, dado em (25), e para $(-d\lambda/d\omega)$, dado em (27), e ainda um cálculo numérico preciso para $\int_0^\omega \lambda d\omega$, os valores de D_1 calculados por (26) apre-

FIGURA 15 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ referentes às Tabelas 8 e 12.

TABELA 13 - Valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08, 09 e 10 obtidos através da equação (26), onde $(-d\lambda/d\omega)$ é calculada pela equação (27) e $\int_0^\omega \lambda d\omega$ através da Regra de Simpson, a partir da equação (25).

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)		
	Coluna 08	Coluna 09	Coluna 10
0,00	-	-	-
0,10	0,013	0,027	0,023
0,20	0,030	0,059	0,047
0,30	0,052	0,099	0,073
0,40	0,081	0,15	0,11
0,50	0,12	0,22	0,16
0,60	0,19	0,32	0,23
0,70	0,29	0,48	0,33
0,80	0,50	0,81	0,55
0,90	1,1	1,8	1,2
1,00	-	-	-

FIGURA 16 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ referentes às colunas 08, 09 e 10 e mostrados na Tabela 13.

sentam-se com diferenças de até 100% entre uma coluna e outra para uma mesma umidade. Entretanto, a falta de uma equação analítica para $\lambda(\omega)$ e a conseqüente necessidade de se traçar manualmente essa função a partir dos dados experimentais, juntando-se ainda o cálculo também manual de $(-d\lambda/d\omega)$ e de $\int_0^\omega \lambda d\omega$, procedimento esse não raro na literatura, pode conduzir a diferenças de 500% ou até mesmo 1000% nos valores da difusividade para uma mesma umidade, e o que é mais grave, para uma mesma coluna de solo, variando-se apenas o ponto da coluna onde é tomado o perfil de umidade. Diferenças dessa ordem foram encontradas por GUERRINI (1976), as quais podem ser constatadas nos gráficos dos perfis de umidade apresentados por esse autor. Evidentemente que variações dessa grandeza exigiriam um número infinito de repetições das colunas de solo para se ter uma precisão razoável nos valores da difusividade. Já neste trabalho, o modelo de Weibull para $\lambda(\omega)$, somente numa análise preliminar sem outras considerações, fez cair consideravelmente a porcentagem da variação nos valores da difusividade.

No sentido, então, de melhorar ainda mais o quadro de resultados apresentado neste trabalho, cabem agora algumas considerações importantes e necessárias referentes à aplicação do modelo de Weibull para $\lambda(\omega)$.

Note-se, em primeiro lugar, que as variações que persistem para D_1 mostradas na Tabela 13 devem ser consequência das variações nos valores dos parâmetros b_2 e c_2 obtidos empiricamente e utilizados na construção da referida tabela. Se for utilizado, entretanto, o valor de c_2 constante e igual a 1,0 para todas as colunas, como já sugerido anteriormente, e for atribuído também um valor constante ao parâmetro b_2 , apesar do mesmo não ter apresentado uma tendência bem definida nos dados mostrados, a função $D_1(\omega)$ assume valores mais concordantes entre si para as colunas 08, 09 e

10. Assim, considerando-se $c_2 = 1,0$ e $b_2 = 0,15$, que é um valor médio para as três colunas citadas, a determinação de $D_1(\omega)$, fica, a partir da equação (33):

$$D_1(\omega) = \frac{1}{2} \frac{0,15}{(1-\omega)} \left\{ \lambda_0 \omega - 0,15 \left[\omega + (1-\omega) \ln(1-\omega) \right] \right\} \dots\dots\dots (50)$$

Na Tabela 14 estão os valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08, 09 e 10 obtidos através da equação (50). Nota-se que os valores para cada unidade estão muito mais próximos entre si em comparação com a Tabela 13.

Da equação (50) vê-se que, após as considerações feitas sobre b_2 e c_2 , o único parâmetro que resta é λ_0 , cuja variação de coluna para coluna é que está determinando as variações em $D_1(\omega)$ mostradas na Tabela 14. Ainda que seja esperada uma certa variação em λ_0 de uma coluna para outra, pois, como pode ser visto na equação (10), é um parâmetro diretamente ligado à velocidade de infiltração da água, essa variação pode ser minimizada se for assumido, por exemplo, o valor de α da mesma equação (10) como constante. E isso é bastante razoável pelos valores de α de cada coluna já apresentados e discutidos, cuja média para todas as colunas, medido pela técnica da radiação gama, é:

$$\bar{\alpha} = 0,40 \pm 0,01$$

Utilizando-se desse valor médio de α para as colunas 08, 09 e 10, que servem como exemplo, pode-se calcular os valores correspondentes de λ_0 segundo a equação (7), fazendo-se uma regressão linear entre x e $t_0^{0,40}$ com dados referentes aos vários perfis de umidade tomados para cada

TABELA 14 - Valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08, 09 e 10, obtidas através da equação (50).

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)		
	Coluna 08	Coluna 09	Coluna 10
0,00	0,000	0,000	0,000
0,10	0,015	0,021	0,020
0,20	0,035	0,048	0,044
0,30	0,059	0,081	0,075
0,40	0,091	0,13	0,12
0,50	0,14	0,19	0,17
0,60	0,20	0,28	0,26
0,70	0,31	0,44	0,40
0,80	0,53	0,74	0,68
0,90	1,2	1,7	1,5
1,00	-	-	-

uma das referidas colunas. Assim, os resultados são os seguintes:

<u>COLUNA</u>	<u>λ_o (cm.min^{-α})</u>
08	2,4
09	2,4
10	2,2

onde foi mantido apenas dois algarismos significativos para λ_o . Levando esses valores para a equação (50), vê-se que os valores de $D_1(\omega)$ serão iguais para as colunas 08 e 09, os quais são mostrados na Tabela 15 juntamente com os referentes à coluna 10. Fica claro, pois, que esse procedimento leva a uma grande aproximação entre os valores de $D_1(\omega)$, o que é atestado pelas médias e respectivos erros apresentados na Tabela 15.

Apesar da equação (50) ser de fácil utilização, um exame cuidadoso permite simplificá-la através de uma aproximação:

$$D_1(\omega) \approx \frac{0,15 \lambda_o}{2} \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right) \dots\dots\dots (51)$$

uma vez que

$$\lambda_o \omega \gg 0,15 \left[\omega + (1-\omega) \ln (1-\omega) \right] \dots\dots\dots (52)$$

Tomando-se a equação (51) pode-se, então, construir a Tabela 16, onde se comparam os valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08 e 09, obtidos através dessa equação, com aqueles obtidos pela equação (50), mostrados

TABELA 15 - Valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08, 09 e 10, obtidos através da equação (50), com os valores de λ_0 recalculados considerando-se α constante, igual a 0,40. São mostrados também os valores médios de $D_1(\omega)$ referentes às três colunas.

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)		$\overline{D_1(\omega)}$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)
	Colunas 08 e 09	Coluna 10	
0,00	0,000	0,000	$0,000 \pm 0,000$
0,10	0,020	0,018	$0,019 \pm 0,001$
0,20	0,045	0,041	$0,044 \pm 0,001$
0,30	0,076	0,070	$0,074 \pm 0,002$
0,40	0,12	0,11	$0,12 \pm 0,003$
0,50	0,18	0,16	$0,17 \pm 0,01$
0,60	0,26	0,24	$0,25 \pm 0,01$
0,70	0,41	0,37	$0,40 \pm 0,01$
0,80	0,69	0,63	$0,67 \pm 0,02$
0,90	1,5	1,4	$1,5 \pm 0,03$
1,00	-	-	-

TABELA 16 - Comparação dos valores de $D_1(\omega)$ obtidos pelas equações (50) e (51), referentes às colunas 08 e 09.

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)	
	equação (50)	equação (51)
0,00	0,000	0,000
0,10	0,020	0,020
0,20	0,045	0,045
0,30	0,076	0,077
0,40	0,12	0,12
0,50	0,18	0,18
0,60	0,26	0,27
0,70	0,41	0,42
0,80	0,69	0,72
0,90	1,5	1,6
1,00	-	-

na Tabela 15. Observa-se uma excelente concordância entre os valores obtidos pelas duas equações, o que faz concluir sobre a validade da aproximação dada por (51) e (52).

De uma maneira genérica pode-se escrever a equação (51) assim:

$$D_1(\omega) = \frac{\lambda_o b_2}{2} \left(\frac{\omega}{1 - \omega} \right) \dots\dots\dots (53)$$

uma vez que o valor de b_2 igual a 0,15, assumido anteriormente, se refere somente às colunas 08, 09 e 10. Parece essencial, portanto, buscar-se um valor mais representativo para b_2 , que pode ser inclusive, o mesmo valor aqui assumido, mas que, por enquanto, ainda necessita ser confirmado, uma vez que os valores de b_2 apresentados anteriormente não mostraram tendência definida como já foi discutido. Há a possibilidade, até mesmo, de se chegar a uma dependência de b_2 com x , a coordenada de posição, possibilidade essa que não pode ser descartada tendo em vista os dados mostrados nas Tabelas 6 e 7.

É interessante se notar que a equação (53) se assemelha muito à Função Potência sugerida como solução para a difusividade da água no solo por AHUJA e SWARTZENDRUBER (1972), definida na equação (2) e aqui reescrita:

$$D(\theta) = \frac{a\theta^n}{(\theta_{SAT} - \theta)^m} \dots\dots\dots (2)$$

onde, como já foi salientado, n e m são parâmetros característicos do solo determinados empiricamente. Essa mesma solução é sugerida também por outros

autores já citados na parte de Introdução e Revisão de Literatura, como se adaptando bem melhor aos dados experimentais que a aproximação dada pela exponencial simples, aqui apresentada na equação (45) e já discutida. Os resultados apresentados por esses autores concordam com aqueles mostrados principalmente nas Figuras 10, 15 e 16 deste trabalho, onde nota-se claramente que a solução para $D_1(\omega)$ dada pela exponencial simples da equação (45) é válida apenas quando se excluem os valores limites de ω . Deve-se ter em conta, entretanto, que (2) é uma solução para $D(\theta)$, enquanto que (53) o é para $D_1(\omega)$, sendo que θ é um valor absoluto para a unidade e ω é um valor normalizado e adimensional definido em (12).

Um outro aspecto é que a equação (2) apresenta as potências n e m que não aparecem em (53). Contudo, MURALI *et alii* (1979) mostram que, para uma grande quantidade de amostras de solo, os parâmetros n e m determinados empiricamente se aproximam razoavelmente do valor 1,0, fazendo com que a equação (2) se aproxime ainda mais de (53). Portanto, a equação (2) sugere empiricamente na literatura como uma das melhores soluções para a difusividade da água no solo, pode ser agora melhor fundamentada pela análise apresentada neste trabalho.

Ainda sobre a validade da equação (53) como solução para $D_1(\omega)$, pode-se testá-la melhor ao reescrevê-la assim:

$$D_1(\omega) = \frac{\lambda_o b_2}{2} \phi \dots\dots\dots (54)$$

onde

$$\phi = \phi(\omega) \equiv \frac{\omega}{1 - \omega} \dots\dots\dots (55)$$

Nota-se assim, pela equação (54), que quanto melhor for a solução dada por (53), mais o gráfico entre $D_1(\omega)$ e ϕ se aproximará de uma reta, a qual deverá passar pela origem pois o coeficiente linear é nulo, e cujo coeficiente angular deverá ser dado por $\lambda_0 b_2/2$.

Aplicando-se, pois, a equação (54) aos dados da Tabela 13, referentes às colunas 08, 09 e 10, obtêm-se os seguintes resultados por regressão linear:

COLUNA	$\frac{(\lambda_0 b_2/2)}{(\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha})}$	r
08	0,12	1,000
09	0,20	1,000
10	0,13	1,000

onde nota-se que r, o coeficiente de correlação linear, apresenta valores unitários com três casas decimais, o que atesta a favor da validade da equação (54) como reta. Com relação a $\lambda_0 b_2/2$, se forem tomados os valores de λ_0 apresentados anteriormente referentes às três colunas em questão, os dados aqui obtidos permitem recalcular b_2 , cujos valores ficariam sendo: 0,10, 0,17 e 0,12, respectivamente para as colunas 08, 09 e 10. Nota-se que esses valores recalculados de b_2 são próximos ao valor médio 0,15, assumido anteriormente.

Em resumo, a equação (53) pode ser assumida como uma ótima solução analítica para $D_1(\omega)$, bastando para isso alguns outros resultados para confirmar o valor do parâmetro c_2 igual a 1,0 e determinar corretamente o parâmetro b_2 . Este último poderá acentuar suas tendências tanto no sen

tido de se mostrar variável com a posição como no sentido de se mostrar constante. Já o valor de λ_0 , para um dado experimento de infiltração, poderá ser determinado através dos perfis de umidade, como é mostrado na Tabela 5. Uma tentativa de se determinar λ_0 sem o uso da radiação gama, seria a de se correlacionar os valores de $\alpha_{(v)}$ e $\alpha_{(\gamma)}$ como os mostrados, neste caso, na Tabela 4, e assim, a partir das determinações visuais de λ_f e α , se estimar aqueles que seriam obtidos pela radiação gama, mais exatos, como já foi discutido. Em seguida, poder-se-ia utilizar, com segurança, a aproximação $\lambda_0 \approx \lambda_f$, como pode ser visto na Tabela 5, ainda mais quando se considera apenas dois algarismos significativos. Se o parâmetro b_2 for comprovadamente constante, será o valor de λ_0 que comandará a variação de D_1 com ω para diferentes experimentos. Isto é, desde que λ_0 está relacionado com a velocidade de infiltração, como pode ser visto na equação (10), a equação (53) mostra porque $D_1(\omega)$ pode variar de experimento para experimento, mesmo sendo o mesmo solo utilizado. Apesar de, num experimento qualquer, se manter, por exemplo, o valor de ρ_g aproximadamente constante para todas as colunas, uma variação local de ρ_g nos primeiros centímetros de qualquer coluna deve ser suficiente para causar uma variação na velocidade de infiltração da água e, por conseguinte, em λ_0 , o qual, por sua vez, comanda a variação de $D_1(\omega)$, o que certamente ocorreu também neste trabalho. Se, por outro lado, houver variação de ρ_g de uma coluna para outra, com mais razão ainda variará λ_0 e, conseqüentemente, $D_1(\omega)$. Isso complementa a discussão sobre a variação da difusividade com a densidade global do solo iniciada com a análise das equações (44) e (45).

Finalmente, deve-se voltar à equação (14) para se calcular a difusividade total, incluindo a dependência com o tempo, de acordo com

GUERRINI *et alii* (1982). Admitindo que $D_1(\omega)$ possa ser dado por (53), a equação (14) fica:

$$D(\omega, t) = \left[2\alpha t^{(2\alpha-1)} \right] \cdot \left[\frac{\lambda_o b_2}{2} \left(\frac{\omega}{1-\omega} \right) \right] \dots\dots\dots (56)$$

que fica sendo pelos resultados mostrados neste trabalho, a equação mais geral e adequada para cálculo da função difusividade da água no solo.

Tomando como exemplo os valores de $D_1(\omega)$ para as colunas 08 e 09, obtidos pela equação (51) e mostrados na Tabela 16, onde se considera $b_2 = 0,15$, pode-se construir a Tabela 17 que mostra os dados da função completa $D(\omega, t)$ calculados através da equação (56), tendo sido tomado o valor médio de $\alpha = 0,40$.

Na referida Tabela 17, nota-se, em primeiro lugar, que foram tomados intervalos de tempo variando desde 0,33 minutos até 480 minutos. O primeiro diz respeito ao tempo para o qual $D_2(t) = 1,0$, sendo que nesse caso $D(\omega, t) = D_1(\omega)$, como pode ser visto na tabela citada. Quanto ao último intervalo de tempo, corresponde, aproximadamente, à duração dos experimentos de infiltração realizados neste trabalho.

Posteriormente, observa-se, na mesma Tabela 17, que o valor da função difusividade calculada tradicionalmente, quando se considera $\alpha = 0,50$, corresponde aqui ao valor da mesma função obtido cerca de 20 segundos após o início do experimento, isto é, quando $D_2(t) = 1,0$. Quando se considera o curto tempo de 1 minuto, $D(\omega, t)$ já cai para 80% de seu valor a 20 segundos, caindo para 23% desse valor no tempo de 8 horas. Pa

TABELA 17 - Valores de $D_1(\omega)$, $D_2(t)$ e $D(\omega, t)$, obtidos da equação (56) e referentes às colunas 08 e 09.

ω (adimensional)	$D_1(\omega)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-2\alpha}$)	$D(\omega, t)$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$)				
		$t=0,33 \text{ min}$	$t=1,0 \text{ min}$	$t=60 \text{ min}$	$t=120 \text{ min}$	$t=240 \text{ min}$ $t=480 \text{ min}$
0,00	0,000	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	0,020	0,020	0,016	0,0070	0,0062	0,0054 0,0046
0,20	0,045	0,045	0,036	0,016	0,014	0,012 0,010
0,30	0,077	0,077	0,062	0,027	0,024	0,021 0,018
0,40	0,12	0,12	0,096	0,042	0,037	0,032 0,028
0,50	0,18	0,18	0,14	0,063	0,056	0,049 0,041
0,60	0,27	0,27	0,22	0,095	0,084	0,073 0,062
0,70	0,42	0,42	0,34	0,15	0,13	0,11 0,097
0,80	0,72	0,72	0,58	0,25	0,22	0,19 0,17
0,90	1,6	1,6	1,3	0,56	0,50	0,43 0,37
1,00	-	-	-	-	-	-
$D_2(t) (\text{min}^{2\alpha-1})$		1,0	0,80	0,35	0,31	0,27 0,23

ra $\omega = 0,90$, por exemplo, a difusividade que valia $1,6 \text{ cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$ no tempo de 20 segundos cai para $0,37 \text{ cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$ depois de 8 horas do início da in filtração. Considerações detalhadas sobre variações semelhantes podem ser vistas no trabalho original de GUERRINI *et alii* (1982).

5. CONCLUSÕES

1. A técnica aqui utilizada de se manter a posição da coluna constante durante a obtenção dos perfis de umidade, permitiu se conhecer melhor o avanço da frente de molhamento em função do tempo e mostrou que α , expoente do tempo na equação (7), tem na verdade um valor menor que aquele obtido visualmente, o que reforça a necessidade de se admitir uma dependência da difusividade com o tempo, como sugere GUERRINI *et alii* (1982). Além disso, surge a possibilidade de se definir em 0,4 o valor genérico de α , ao invés do tradicional 0,5.

2. O modelo da equação de Weibull mostrou-se igualmente eficiente quando aplicado às funções $\omega(t)$ e $\omega(\lambda)$. Assim, a função inversa desta última, $\lambda(\omega)$, dada pela equação (25) numa forma analítica, é o ponto fundamental deste trabalho, trazendo grandes vantagens na determinação da difusividade em relação à metodologia tradicional.

3. Somente uma aproximação bem grosseira pode dar à função difusividade a forma de uma exponencial simples definida na equação (45) e usada frequentemente na literatura.

4. A equação (53) mostrou-se a solução mais eficiente e adequada dentre todas as apresentadas para representar a parte da difusividade dependente da umidade. Essa solução é muito próxima à sugerida na literatura por AHUJA e SWARTZENDRUBER (1972) definida na equação (2), sendo, porém, mais simples que esta última, por não conter expoentes para a umidade e ser, assim, facilmente linearizada.

5. Uma vez conhecido com segurança o parâmetro b_2 , a solução geral (56) mostra que é possível se obter a completa função difusividade da água no solo somente através da análise do avanço da frente de molhamento em função do tempo.

6. Este trabalho apresenta a equação (56) como uma solução simples e analítica para a função difusividade, facilitando sobremaneira o estudo do movimento da água no solo.

6. LITERATURA CITADA

AHUJA, L.R., 1975. A one-step wetting procedure for determining both water characteristic and hydraulic conductivity of a soil core. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 39: 418-423.

AHUJA, L.R. e D. SWARTZENDRUBER, 1972. An improved form of soil-water diffusivity function. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 36: 9-14.

BRUCE, R.R. e A. KLUTE, 1956. Measurement of soil moisture diffusivity. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 20: 458-462.

BRUCE, R.R. e A. KLUTE, 1963. Measurements of soil moisture diffusivity from tension plate outflow data. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 27(1): 18-21.

BRUTSAERT, W., 1979. Universal constants for scaling the exponential soil water diffusivity. *Water Resour. Res.*, Washington, 15(2): 481-483.

CLOTHIER, B.E. e I. WHITE, 1981. Measurement of sorptivity and soil water diffusivity in the field. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Madison, 45: 241-245.

- DELLA LIBERA, C.L.F.; P.C. CORSINI e D. PERECIN, 1978. Generalização da equação da difusividade da água no solo em três grandes grupos de solos. *Científica*, Jaboticabal, 6(1): 39-46.
- ENGELHARDT, M., 1975. On simple estimation of the parameters of the Weibull or extreme-value distribution. *Technometrics*, Richmond, 17(3): 369-374.
- ERH, K.T., 1972. Application of the spline function to Soil Science. *Soil Sci.*, Baltimore, 114(5): 333-338.
- FEDDES, R.A.; P. KOWALICK; K.K. MALINKA e H. ZARADNY, 1976. Simulation of field water uptake using a soil water dependent root extraction function. *J. Hydrol.*, Amsterdam, 31: 13-26.
- FERGUSON, H. e W.H. GARDNER, 1962. Water content measurements in soil columns by gamma ray absorption. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 26(1): 11-14.
- FERGUSON, H. e W.H. GARDNER, 1963. Diffusion theory applied to water flow data obtained using gamma ray absorption. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 27(3): 243-246.
- GARDNER, W.R. e M.S. MAYHUGH, 1958. Solutions and tests of the diffusion equation for movement of water in soil. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 22: 197-201.
- GUERRINI, I.A., 1976. Difusividade da água no solo em função da umidade e do tempo. Piracicaba, ESALQ/USP, 50 p. (Dissertação de Mestrado).
- GUERRINI, I.A. e K. REICHARDT, 1981a. Difusividade da água no solo e sua determinação através da infiltração horizontal. In: Seminário Regional sobre o Uso de Técnicas Nucleares em Estudos das Relações Solo-

Planta-Atmosfera, Piracicaba, 06 a 10 de abril de 1981. *Sumários*. Piracicaba, CENA, p. 16.

GUERRINI, I.A. e K. REICHARDT, 1981b. Determinação da expansão do solo através da infiltração horizontal. *Ci. e Cult.*, São Paulo, 33(7, supl.): 11.

GUERRINI, I.A.; K. REICHARDT e P.L. LIBARDI, 1982. Extending the theory of infiltration to swelling soils. In: 12th International Congress of Soil Science, New Delhi, 8 a 16 de fevereiro de 1982. *Abstracts*. New Delhi, ISSS, p. 3.

HANKS, R.J. e S.A. BOWERS, 1963. Influence of variations in the diffusivity-water content relation on infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 27: 263-265.

HANKS, R.J. e H.R. GARDNER, 1965. Influence of different diffusivity-water content relations on evaporation of water from soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 29(5): 495-498.

JACKSON, R.D., 1963a. Porosity and soil-water diffusivity relations. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 27(2): 123-126.

JACKSON, R.D., 1963b. Temperature and soil-water diffusivity relations. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 27(4): 363-366.

JOSHI, R.C.; D.K. DAS e R.P. GUPTA, 1977. Effect of initial soil-water content and bulk density on the flow parameters in sandy loam soil. *J. Indian Soc. Soil Sci.*, New Delhi, 25(2): 193-196.

LAROUSI, C.; G. VANDERVOORDE e L. DE BACKER, 1975. Experimental investigation of the diffusivity coefficient. *Soil Sci.*, Baltimore, 120(4): 249-255.

LIBARDI, P.L., 1978. Condutividade hidráulica do solo em condições de campo. Piracicaba, ESALQ/USP, 113 p. (Tese de Doutorado).

LIBARDI, P.L.; K. REICHARDT; C. JOSÉ; M. BAZZA e D.R. NIELSEN, 1982. An approximate method of estimating soil water diffusivity for different soil bulk densities. *Water Resour. Res.*, Washington, 18(1): 177-181.

MENON, M.V., 1963. Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution. *Technometrics*, Richmond, 5(2): 175-182.

MILLER, R.D. e E. BRESLER, 1977. A quick method for estimating soil water diffusivity functions. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 41: 1020-1022.

MURALI, V.; G.S.R. KRISHNA MURTI e A.K. SINHA, 1979. Note on the three-parameter functions for soil water diffusivity-water content relationships. *Aust. J. Soil Res.*, Melbourne, 17(2): 361-366.

NIELSEN, D.R.; J.W. BIGGAR e J.C. COREY, 1972. Application of flow theory to field situations. *Soil Sci.*, Baltimore, 113(4): 254-263.

NOFZIGER, D.L., 1978. Errors in gamma-ray measurements of water content and bulk density in nonuniform soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Madison, 42(6): 845-850.

PARLANGE, J.Y., 1973. Horizontal infiltration of water in soils: a theoretical interpretation of recent experiments. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison,

37: 329-330.

PARLANGE, J.Y., 1975. On solving the flow equation in unsaturated soils by optimization: horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 39: 415-417.

PINDER III, J.E.; J.G. WIENER e M.H. SMITH, 1978. The Weibull distribution: a new method of summarizing survivorship data. *Ecology*, Brooklyn, 59(1): 175-179.

REICHARDT, K.; D.R. NIELSEN e J.W. BIGGAR, 1972. Scaling of horizontal infiltration into homogeneous soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 36: 241-245.

REICHARDT, K. e P.L. LIBARDI, 1974. A new equation to estimate soil-water diffusivity. In: IAEA, *Isotope and Radiation Techniques in Soil Physics and Irrigation Studies*, 1973. Vienna, p. 45-51.

SCHULTZ, R.C. e J.D. HEWLETT, 1978. Soil moisture as a part of the hydrologic cycle. In: BALMER, W.E., Ed. *Soil Moisture Site Productivity Symposium*, Myrte Beach 1977. Atlanta, USDA/Forest Service, p. 7-21.

SCOTT, E.J. e R.J. HANKS, 1963. Solution of the one-dimensional diffusion equation for exponential and linear diffusivity functions by power series applied to moisture flow in soils. *Soil Sci.*, Baltimore, 96: 314-322.

SHARDA, A.K., 1977. Influence of soil bulk density on horizontal water infiltration. *Aust. J. Soil Res.*, Melbourne, 15: 83-86.

- SMILES, D.E.; K.M. PERROUX; S.J. ZEGELIN e P.A.C. RAATS, 1981. Hydrodynamics dispersion during constant rate absorption of water by soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Madison, 45(3): 453-458.
- THOMAN, D.R.; L.J. BAIN e C.E. ANTLE, 1969. Inferences on the parameters of the Weibull distribution. *Technometrics*, Richmond, 11(3): 445-460.
- THOMAN, D.R. e L.J. BAIN, 1969. Two sample tests in the Weibull distribution. *Technometrics*, Richmond, 11(4): 805-815.
- TOLIKAS, P.K.; C.D. TZIMOPOULOS e D.M. TOLIKAS, 1980. A simple analytical solution for horizontal absorption of water by soils for exponential soil water diffusivity. *Water Resour. Res.*, Washington, 16(4): 821-825.
- VERPLANCKE, H.; R. HARTMANN e M. DE BOODT, 1976. The effect of soil conditioners on the water transmission properties of different textured soils. *Med. Fac. Landbouww. Rijksuniv.*, Genth, 41(1): 211-218.
- WHISLER, F.D., 1976. Calculating soil conductivity and diffusivity from moisture characteristic curves. In: Cotton Production Research Conferences, Beltwide 1976. *Proceedings*. p. 114-116.
- WHISLER, F.D.; A. KLUTE e D.B. PETERS, 1968. Soil water diffusivity from horizontal infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Madison, 32: 6-11.
- ZUCCHI, O.L.A.D., 1981. Equipamentos nucleares na determinação dos coeficientes de atenuação de massa de solos e da água. Piracicaba, ESALQ/USP, 82 p. (Dissertação de Mestrado).