**Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”**

**Caracterização e extensões da distribuição Burr XII:
propriedades e aplicações**

Patrícia Ferreira Paranaíba

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor
em Ciências. Área de concentração: Estatística e
Experimentação Agronômica

**Piracicaba
2012**

Patrícia Ferreira Paranaíba
Licenciada em Matemática

Caracterização e extensões da distribuição Burr XII: propriedades e aplicações

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientador:
Prof. Dr. **EDWIN MOISES MARCOS ORTEGA**

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em
Ciências. Área de concentração: Estatística e
Experimentação Agronômica

Piracicaba
2012

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
DIVISÃO DE BIBLIOTECA - ESALQ/USP**

Paranaíba, Patrícia Ferreira

Caracterização e extensões da distribuição Burr XII: propriedades e aplicações /
Patrícia Ferreira Paranaíba. - - versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018
de 2011. - - Piracicaba, 2011.
142 p. : il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2011.

1. Análise de regressão e correlação 2. Análise de sobrevivência 3. Dados censurados
4. Inferência Bayesiana 5. Verossimilhança I. Título

CDD 519.54
P223c

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

Jurandir Junqueira Paranaíba (in memoriam) e Regina Lúcia Barros Ferreira Paranaíba, *por todo o amor, o carinho e o apoio incondicional dedicados a mim.*

Ao meu marido,

João Gustavo Ribeiro Alves, *por toda a compreensão, paciência, companherismo e imensurável amor, com você meus dias se tornam mais felizes.*

À minha filha,

Joana Paranaíba Alves, *pelos sorrisos de todos os dias, por alegrar ainda mais a minha vida.*

Aos meus irmãos,

Reinaldo Ferreira Paranaíba e Larissa Ferreira Paranaíba, *pela amizade, apoio e por fazerem parte da minha vida.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças, tranquilidade e iluminar o meu caminho.

Aos meus pais, Jurandir Junqueira Paranaíba (in memoriam) e Regina Lúcia Barros Ferreira Paranaíba, pelo incentivo aos estudos, por todo apoio e confiança em mim depositados.

Ao meu marido, João Gustavo Ribeiro Alves, pela amizade, pela compreensão, pela paciência, pelas palavras de incentivo nas horas mais difíceis, pelos lanches prontos quando não tinha tempo para fazê-los e por todo o amor.

À minha filha, Joana Paranaíba Alves, pelos sorrisos nas horas mais difíceis e por ser a minha princesa.

Aos meus cunhados, Ana Cristina Ribeiro Alves e André Luiz Fonseca, pela amizade, pela paciência, pelo carinho, pela hospedagem nos fins de semana, pela ótima convivência durante esses anos.

Aos meus sogros, João Gabriel e Terezinha, pela amizade, pela solidariedade, pela companhia, pelos ótimos almoços de fins de semana e por todo o carinho e amor.

À Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz” - ESALQ/USP, pela excelência acadêmica.

Ao Prof. Dr. Edwin Moises Marcos Ortega, pela orientação, pela paciência, pela confiança em mim depositada, pelos ensinamentos compartilhados que foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro, por toda a colaboração e principalmente pela oportunidade de poder trabalhar ao seu lado.

Aos professores participantes da banca da qualificação, Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, Dra. Taciana Villela Savian e Dr. Heleno Bolfarine, pelas sugestões.

Aos amigos “irmãos” Marcelino Alves Rosa de Pascoa, Renato Nunes Pereira, Tiago Almeida de Oliveira e Anderson Castro Soares de Oliveira, pelos ótimos momentos e apoio mútuo. Meninos, muito obrigada pela amizade incondicional, vocês são muito especiais.

Ao amigo Rodrigo Rossetto Pescim pela ajuda e ensinamento no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos dos cursos de mestrado e doutorado do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, em especial a Ana Patrícia Bastos Peixoto, Braga Júnior, Eduardo Monteiro, Epaminondas de Vasconcellos Couto, Fernanda Rizzato, Juliana Betini Fachini, Keliny Martins de Melo, pelo auxílio em momentos de dúvidas, e pela convivência.

Às minhas amigas, Keely, Paty, Lu, Xuxu, Jana, pela amizade e pelas boas conversas.

Aos meus amigos de Jundiaí, em especial Tia Tereza e família, Marco e Sônia, Gu e Marina, Mazi e Elizandra, Ricardo e Paty, pela amizade e companhia.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, em especial a Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio, Dr. Décio Barbin, Dra. Roseli Aparecida Leandro, Dra. Taciana Villela Savian por todos os ensinamentos.

Às secretárias Luciane Brajão e Solange Paes de Assis Sabadin, pelo apoio, amizade, ajuda e confiança depositada em mim, que me ajudou muito durante esses quatro anos de doutorado.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, Eduardo Bonilha, Jorge Alexandre Wiendl e Rosni Honofre Aparecido Pinto pela amizade, ajuda e apoio técnico.

À Coordenadoria para o Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de bolsa de estudos.

A todos os educadores que passaram por minha vida e também àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para conclusão deste trabalho, deixo aqui a minha imensa gratidão e carinho.

“Nós somos o que fazemos repetidas vezes.

Portanto, a excelência não é um ato, mas um hábito.”

Aristóteles

*“Se a educação sozinha não pode transformar a sociedade,
tampouco sem ela a sociedade muda.”*

Paulo Freire

SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	17
1 INTRODUÇÃO	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência	21
2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência	22
2.1.2 O Estimador de Kaplan-Meier	23
2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência	24
2.2 Distribuição Burr XII	24
2.3 Classe de distribuições generalizadas	27
2.3.1 Classe de distribuições beta	28
2.3.2 Classe de distribuições Kumaraswamy	29
2.4 Modelos de Regressão	30
2.4.1 Modelo de regressão locação-escala	31
2.4.2 Modelo de regressão log-Burr XII	32
2.5 Estimação e inferência	32
2.5.1 Método da Máxima Verossimilhança	33
2.5.2 Análise bayesiana	34
2.6 Estatísticas AIC, BIC e CAIC	39
3 DISTRIBUIÇÃO BETA BURR XII	41
3.1 Distribuição beta Burr XII	41
3.2 Propriedades Gerais	43
3.2.1 Momentos	45
3.2.2 Função geradora de momentos	46
3.2.3 Desvios médios	49
3.2.4 Curvas de Bonferroni e Lorenz	51
3.2.5 Confiabilidade	52
3.2.6 Estatística de ordem e momentos	53
3.3 Estudo de simulação	58

3.4 Estimação de máxima verossimilhança	58
3.5 Análise Bayesiana	61
3.6 Aplicação	62
4 DISTRIBUIÇÃO LOG-BETA BURR XII	67
4.1 Distribuição log-beta Burr XII	67
4.2 Propriedades gerais	68
4.2.1 Momentos	70
4.2.2 Função geradora de momentos	71
4.3 Modelo de regressão log-beta Burr XII	72
4.4 Estimação de máxima verossimilhança	73
4.5 Análise bayesiana	75
4.6 Aplicação	77
5 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY BURR XII	83
5.1 Distribuição Kumaraswamy Burr XII	83
5.2 Propriedades gerais	85
5.2.1 Momentos	88
5.2.2 Função geradora de momentos	89
5.2.3 Desvios médios	90
5.2.4 Confiabilidade	92
5.2.5 Estatística de ordem e momentos	92
5.3 Estudo de simulação	95
5.4 Estimação de máxima verossimilhança	96
5.5 Análise bayesiana	99
5.6 Aplicações	100
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	109
6.1 Conclusões	109
6.2 Pesquisas futuras	109
REFERÊNCIAS	111
APÊNDICES	117

RESUMO

Caracterização e extensões da distribuição Burr XII: propriedades e aplicações

A distribuição Burr XII (BXII) possui, como casos particulares, as distribuições normal, log-normal, gama, logística, valor extremo tipo I, entre outras. Por essa razão, ela é considerada uma distribuição flexível no ajuste dos dados. As ideias de Eugene; Lee e Famoye (2002) e Cordeiro e Castro (2011) foram utilizadas para o desenvolvimento de duas novas distribuições de probabilidade a partir da distribuição BXII. Uma delas é denominada beta Burr XII (BBXII) e possui cinco parâmetros. Desenvolveu-se o modelo de regressão log-beta Burr XII (LBBXII). A outra distribuição é denominada de Kumaraswamy Burr XII (KwBXII) e possui cinco parâmetros. A vantagem desses novos modelos reside na capacidade de acomodar várias formas da função risco, além disso, eles também se mostraram úteis na discriminação de modelos. Para cada um dos modelos foram calculados os momentos, função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e a função densidade de probabilidade da estatística de ordem. Foi realizado um estudo de simulação para avaliar o desempenho desses modelos. Para a estimação dos parâmetros, foram utilizados os métodos de máxima verossimilhança e bayesiano e, finalmente, para ilustrar a aplicação das novas distribuições foram analisados alguns conjuntos de dados reais.

Palavras-chave: Dados censurados; Burr XII; Máxima verossimilhança; Modelo de regressão; Função de sobrevivência

ABSTRACT

Characterization and extensions of the Burr XII distribution: Properties and Applications

The Burr XII (BXII) distribution has as particular cases the normal, log-normal, gamma, logistic and extreme-value type I distributions, among others. For this reason, it is considered a flexible distribution for fitting data. In this paper, the ideas of Eugene; Lee e Famoye (2002) and Cordeiro and Castro (2011) is used to develop two new probability distributions based on the BBXII distribution. The first is called beta Burr XII (BBXII) and has five parameters. Based in these, we develop the extended generalized log-beta Burr XII regression model. The other distribution is called Kumaraswamy Burr XII (KwBXII) and has five parameters. The advantage of these new models rests in their capacity to accommodate various risk function forms. They are also useful in model discrimination. We calculate the moments, moments generating function, mean deviations, reliability and probability density function of the order statistics. A simulation study was conducted to evaluate the performance of these models. To estimate the parameters we use the maximum likelihood and Bayesian methods. Finally, to illustrate the application of the new distributions, we analyze some real data sets.

Keywords: Censored data; Burr XII; Maximum likelihood; Regression model; Survival function

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráficos ilustrativos de algumas curvas TTT	23
Figura 2 - Gráficos das funções para alguns valores dos parâmetros da distribuição Burr XII. (a) Função densidade. (b) Função risco	26
Figura 3 - Diagrama das distribuições obtidas como casos particulares da distribuição BBXII	42
Figura 4 - Gráficos da função densidade (20) para alguns valores dos parâmetros .	43
Figura 5 - Gráficos da função risco (21) para alguns valores dos parâmetros. (a) Crescente (b) Unimodal (c) Decrescente (d) forma de U	44
Figura 6 - Assimetria de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a	47
Figura 7 - Curtose de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a .	47
Figura 8 - (a) Curva TTT para os dados de melanoma. (b) Gráfico da função risco estimada para os dados de melanoma	64
Figura 9 - Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições BXII, BBXII, LL, W, BW e WE com sobrevivência empírica para dados de melanoma	65
Figura 10 - Estimativa por histograma das densidades marginais <i>a posteriori</i> para os parâmetros do modelo BBXII para os dados de melanoma	66
Figura 11 - Gráficos da fdp da LBBXII: (a) Para alguns valores de a e k com $\sigma = \mu = 0$ e $b = 1$. (b) Para alguns valores de b e k com $\sigma = \mu = 0$ e $a = 1$.	68
Figura 12 - Assimetria de Y em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a	71
Figura 13 - Curtose de Y em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a .	71
Figura 14 - Densidades marginais <i>a posteriori</i> para os parâmetros do modelo LBBXII para os dados de tempo de permanência no Japão	80

Figura 15 - Gráficos da função densidade da KwBXII para alguns valores dos parâmetros: (a) $s = 1,6$; $k = 4,0$ e $c = 5,1$; (b) $b = 0,1$; $s = 1,6$ e $k = 0,3$; (c) $b = 0,1$; $k = 3,0$ e $c = 1$	84
Figura 16 - Gráficos da função densidade da KwBXII para alguns valores dos parâmetros: (a) $a = 1,5$; $s = 1,6$ e $c = 5,1$; (b) $a = 1,5$; $k = 4,0$ e $c = 5,1$; (c) $a = 2,5$ e $k = 4,0$	85
Figura 17 - Gráficos da função risco (71) para alguns valores dos parâmetros. (a) Crescente (b) Unimodal (c) Decrescente (d) forma de U	86
Figura 18 - Assimetria de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a	88
Figura 19 - Curtose de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a	89
Figura 20 - (a) Densidades estimadas para os modelos KwBXII, BXII e LL para os dados de fibras. (b) Funções de distribuição acumulada estimadas e função de distribuição acumulada empírica para os dados de fibras	105
Figura 21 - (a) Densidades estimadas para os modelos KwBXII, BXII e LL para os dados de estresse. (b) Funções de distribuição acumulada estimadas e função de distribuição acumulada empírica para os dados de estresse	105
Figura 22 - Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições KwBXII, BXII e LL com sobrevivência empírica para os dados de Aids	106
Figura 23 - Estimativa por histograma das densidades marginais <i>a posteriori</i> para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de fibras	107
Figura 24 - Estimativa por histograma das densidades marginais <i>a posteriori</i> para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de estresse	108
Figura 25 - Estimativa por histograma das densidades marginais <i>a posteriori</i> para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de Aids	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo BBXII	59
Tabela 2 - EMVs dos parâmetros dos modelos BBXII, BXII, LL, BW, WE e W para dados de melanoma, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores dos AIC, CAIC e BIC	63
Tabela 3 - TRV para os dados de melanoma	64
Tabela 4 - Sumário <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo BBXII para os dados de melanoma	66
Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros, erros-padrão, valor p e intervalos de confiança de 95% para o modelo LBBXII, ajustado aos dados de tempo de permanência no Japão	78
Tabela 6 - Estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LBBXII, LBXIIE, LBXII e logístico	79
Tabela 7 - TRV para os dados de tempo de permanência no Japão	79
Tabela 8 - Sumário <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo LBBXII para os dados de tempo de permanência no Japão	80
Tabela 9 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo KwBXII	96
Tabela 10 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo BXII e KwBXII, respectivamente	97
Tabela 11 - Estatísticas descritivas para os conjuntos de dados de fibras, estresse e Aids	101
Tabela 12 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de fibras	102
Tabela 13 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de estresse	103
Tabela 14 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de Aids	104

Tabela 15 -TRV para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente	104
Tabela 16 -Sumário <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de fibras	106
Tabela 17 -Sumário <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de estresse	107
Tabela 18 -Sumário <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de Aids	107

1 INTRODUÇÃO

Considere um conjunto de dados cuja variável resposta é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Esse tempo é denotado por tempo de sobrevivência ou tempo de falha e o conjunto de observações por dados de sobrevivência. A área da estatística que engloba metodologias para esse tipo de dados é denominada análise de sobrevivência, em geral, um termo usado na área médica, ou confiabilidade, na pesquisa industrial.

Os dados de sobrevivência apresentam características especiais. A primeira é que a variável resposta geralmente apresenta distribuição assimétrica positiva, não sendo, portanto, adequado assumir que tenha distribuição normal. A segunda característica é a presença de dados censurados, isto é, para alguns elementos em estudo não se conhece o tempo de interesse exato, tem-se apenas uma informação parcial.

Usualmente, dados censurados acontecem porque nem sempre é possível que o evento de interesse ocorra para todas as observações em teste. Existem diversos tipos de censuras e neste trabalho considerou-se censura à direita, não informativa e com o mecanismo aleatório. Além disso, é comum que a variável resposta (tempo até a ocorrência do evento de interesse) esteja relacionada com covariáveis que explicam a sua variabilidade. Para estudar o efeito dessas covariáveis sobre a variável resposta deve-se utilizar um modelo de regressão apropriado para dados censurados (SILVA, 2009). Os modelos de regressão paramétricos assumem que os dados seguem uma distribuição de probabilidade. Na análise de sobrevivência, as distribuições clássicas associadas à variável resposta são as distribuições exponencial, Weibull, log-normal, log-logística e gama generalizada, dentre outras (LAWLESS, 2003).

Por outro lado, nos últimos anos tem crescido muito a generalização e/ou a modificação de algumas distribuições utilizadas em análise de sobrevivência. Existem diferentes formas de se modificar uma distribuição de probabilidade. Algumas dessas classes de generalizações são as famílias de distribuições exponenciadas apresentadas inicialmente por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997), as distribuições beta que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002), e as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008).

Recentemente, Cordeiro e Castro (2011) apresentaram uma classe de gene-

realização baseada na distribuição Kumaraswamy. A classe modela as seguintes formas de risco: crescente, decrescente, unimodal e forma de U ou de banheira. Cordeiro e Castro (2011) apresentaram ainda duas formas de expandir a função densidade de probabilidade (fdp) de uma distribuição Kumaraswamy generalizada em termos da série de potência ponderada. Rodrigues et al. (2011) desenvolveram a distribuição Weibull-binomial negativa, seguindo a ideia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho foi introduzir duas novas distribuições, a distribuição beta Burr XII e a distribuição Kumaraswamy Burr XII e ainda apresentar o modelo de regressão log-beta Burr XII. Assim, o trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão sobre análise de sobrevivência e algumas propostas de generalizar distribuições encontradas na literatura. Os métodos inferenciais são descritos. No Capítulo 3 é apresentada a distribuição beta Burr XII. Alguns de seus sub-modelos são apresentados, as propriedades matemáticas da nova distribuição são estudadas e foi realizado um estudo de simulação para avaliar o desempenho do modelo. A nova distribuição é aplicada a um conjunto de dados reais pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. No Capítulo 4 é proposto o modelo de regressão log-beta Burr XII. Ajustou-se o modelo de regressão a um conjunto de dados reais pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. No Capítulo 5 apresenta-se a distribuição Kumaraswamy Burr XII, bem como suas propriedades matemáticas e o estudo de simulação. A análise de três conjuntos de dados reais é feita pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. Por fim, o Capítulo 6 relata as principais conclusões e descreve o direcionamento da continuidade deste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é feita uma revisão sucinta sobre análise de sobrevivência e sobre classes de generalizações de distribuições, sobre os modelos de regressão, assim como dos métodos inferenciais para análise de dados de sobrevivência, formando o embasamento teórico necessário para o entendimento do trabalho relacionado aos objetivos da pesquisa.

2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência

A análise de sobrevivência é caracterizada pelo fato de que a variável resposta é composta de dois fatores: o tempo até a ocorrência de um evento de interesse e as censuras (COLOSIMO; GIOLO, 2006). O evento em estudo é denominado falha e o tempo até a ocorrência da falha é chamado de tempo de falha, enquanto que a censura é o registro parcial do tempo de falha, devido à perda ou retirada de um elemento do estudo. Por exemplo, no experimento conduzido por Elliott et al. (2000), 50 gatos domésticos foram observados. Os tempos de falha foram considerados como o tempo (em dias) a partir do diagnóstico de insuficiência renal até a sua morte. Por outro lado, se os animais não morreram até o final do estudo ou se morreram por outras causas, os tempos são considerados tempos censurados.

A censura é dita ser do tipo I quando ocorre devido ao término do estudo após um período de tempo pré-determinado, do tipo II quando ocorre devido ao término do estudo após um número de falhas fixado previamente, ou pode ser aleatória, sendo a mais comum em situações práticas.

As censuras previamente citadas são conhecidas como censura à direita, pois a falha ocorre sempre à direita do tempo registrado. Existem ainda outros mecanismos de censura, como, por exemplo, as censuras à esquerda, em que o tempo registrado é maior que o tempo de falha e censura intervalar, na qual não se sabe o tempo exato de falha, sendo que a única informação disponível é que o tempo de falha ocorreu em um certo intervalo de tempo. Neste trabalho, entretanto, será adotado apenas o mecanismo de censura aleatória que será denominado simplesmente por censura.

Dessa forma, para uma definição de censura aleatória, considere T uma variável aleatória não negativa que representa o tempo de falha de um elemento e C uma variável aleatória, independente de T , que representa o tempo de censura associado a esse elemento. Assim, os dados observados são representados por $t = \min(T, C)$ e δ o

indicador de censura, dado por:

$$\delta = \begin{cases} 1 & , \quad T \leq C \\ 0 & , \quad T > C \end{cases},$$

em que $\delta = 0$ indica censura e $\delta = 1$ indica falha.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória T pode ser especificada por meio da função densidade de probabilidade, função de sobrevivência ou função risco, sendo as três formas equivalentes.

2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência

Seja T uma variável aleatória, não negativa, que representa o tempo de vida de um indivíduo proveniente de uma dada população homogênea. A distribuição de T pode ser caracterizada por meio da função de densidade, função de sobrevivência ou função risco.

A função densidade de probabilidade, $f(t)$, é definida por:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial F(t)}{\partial t},$$

em que $F(t) = P[T \leq t]$ é a função distribuição acumulada de T . No contexto da análise de sobrevivência, a função densidade de probabilidade é estimada pela proporção de indivíduos que morreram em um intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$ e possui duas propriedades:

$$f(t) \geq 0 \text{ e } \int_0^{\infty} f(t)dt = 1.$$

A função de sobrevivência, $S(t)$, é definida com sendo a probabilidade de um indivíduo não falhar até um certo tempo t . Ela é expressa da seguinte forma:

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x)dx,$$

em que $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.

A função risco é definida como o limite da probabilidade de um indivíduo falhar no intervalo de tempo $(t, t + \Delta t)$, assumindo que esse mesmo indivíduo sobreviveu até o tempo t , dividida pelo comprimento do intervalo e é representada por (LAWLESS, 2003):

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

Uma forma empírica de determinar o comportamento da função risco é por meio da construção do gráfico do tempo total em teste (curva TTT), proposto por Aarset (1987). A curva TTT é obtida construindo um gráfico de

$$G\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^r T_{i:n} + (n-r)T_{r:n}}{\sum_{i=1}^n T_{i:n}} \quad \text{por } \frac{r}{n}$$

em que $r = 1, \dots, n$ e $T_{i:n}, i = 1, \dots, n$ são estatísticas de ordem da amostra (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; KOLLIA, 1996).

Esse gráfico apresenta uma reta diagonal se o risco for constante (reta A), uma curva convexa se a função risco é decrescente (curva B) e côncava se o risco é crescente (curva C), e uma curvatura primeiramente convexa e depois côncava (curva D) se o risco é em forma de “U”, e no caso reverso (curva E) é unimodal. A Figura 1 ilustra as diversas formas que a curva TTT pode apresentar.

Figura 1 - Gráficos ilustrativos de algumas curvas TTT

2.1.2 O Estimador de Kaplan-Meier

Kaplan e Meier (1958), propuseram um estimador não-paramétrico para a função de sobrevivência, designado por estimador de Kaplan-Meier (K-M) ou estimador produto-limite.

O estimador considera na sua construção um número de intervalos de tempo igual ao número de falhas distintas, sendo os limites dos intervalos os tempos de falha da amostra.

Dessa forma, o estimador de Kaplan-Meier, pode ser definido como:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_{(j)} \leq t} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:t_{(j)} \leq t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right),$$

em que $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(k)}$ representam os k tempos de falha distintos e ordenados, d_j é o número de falhas em $t_{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, e n_j é o número de indivíduos sob risco em $t_{(j)}$, ou seja, os indivíduos que não falharam e não foram censurados até o instante imediatamente anterior a $t_{(j)}$.

2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência

Utilizando o método de máxima verossimilhança é possível incorporar as censuras, presentes em muitos dados de tempo de sobrevivência.

Considere uma amostra de variáveis aleatórias independentes $T_1, T_2, \dots, T_n$ de tempos de sobrevivência. Supondo que os dados consistem de n pares observados $(t_1, \delta_1), (t_2, \delta_2), \dots, (t_n, \delta_n)$ em que t_i é o tempo de sobrevivência ou censura, δ_i é o indicador de censura. Nesse caso, a função de verossimilhança considerando censura não informativa é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n [f(t_i, \boldsymbol{\theta})]^{\delta_i} [S(t_i, \boldsymbol{\theta})]^{1-\delta_i},$$

em que $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos, $f(t_i)$ e $S(t_i)$ são as funções densidade de probabilidade e de sobrevivência para cada variável aleatória T_i , respectivamente. Observa-se que a contribuição de cada observação não censurada é a sua função de densidade e que cada observação censurada contribui com a função de sobrevivência.

2.2 Distribuição Burr XII

O sistema Burr de distribuição foi definido por Burr (1942). Rodriguez (1977) mostrou que a área de cobertura Burr em um plano específico é ocupado por várias distribuições conhecidas e utilizadas, incluindo as distribuições normal, log-normal, gama, logística e de valor extremo tipo I.

A distribuição Burr XII (BXII), considerada em Zimmer; Keats e Wang (1998), é uma distribuição comumente encontrada para modelar dados de sobrevivência e para modelar fenômenos com funções de risco monótonas e unimodais.

A função densidade de probabilidade (fdp) da distribuição BXII é definida como:

$$g(x; s, k, c) = c k s^{-c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} x^{c-1}, \quad (1)$$

em que $k > 0$ e $c > 0$ são os parâmetros de forma e $s > 0$ é o parâmetro de escala. A função de distribuição acumulada (fda) é denotada por:

$$G(x; s, k, c) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

A função de sobrevivência correspondente para a variável aleatória X com densidade Burr XII, é dada por:

$$S(x; s, k, c) = \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \quad (3)$$

e a função risco tem a seguinte expressão:

$$h(x; s, k, c) = \frac{c k \left(\frac{x}{s} \right)^{c-1}}{s \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]}. \quad (4)$$

A Figura 2 (a) e (b) ilustram algumas das possíveis formas da função densidade e da função risco, respectivamente. Observa-se que a função risco é decrescente quando $c \leq 1$ e unimodal quando $c > 1$. Além disso, para valores de c entre 1 e 2, a função risco pode ser, praticamente, constante sob quase toda amplitude da função dependendo do valor de s .

Em muitos casos, tem-se o interesse em estudar a moda, isto é, o valor ou valores mais frequentes em uma função. Utilizando a teoria de máximo de uma função (LEITHOLD, 1994), a moda da distribuição Burr XII pode ser obtida por meio da maximização da função densidade (1):

$$g'(x) = c k s^{-c} x^{c-2} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} \left\{ (c-1) - \frac{x^c c}{s^c} (k+1) \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-1} \right\} = 0. \quad (5)$$

Portanto, para $c > 1$, a função densidade da BXII é unimodal com a moda

Figura 2 - Gráficos das funções para alguns valores dos parâmetros da distribuição Burr XII.
(a) Função densidade. (b) Função risco

expressa como:

$$\begin{aligned} (c-1) &= \frac{x^c c(k+1)}{s^c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-1}, \\ \frac{ck+c}{(c-1)s^c} &= x^{-c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right], \\ x &= \left[\frac{(c-1)s^c}{ck+1} \right]^{\frac{1}{c}}, \end{aligned}$$

e em forma de L se $c = 1$. Algumas das principais características de uma distribuição, como por exemplo: variância, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. O q -ésimo momento ordinário da distribuição Burr XII pode ser obtido pela expressão $\mu'_q = E[X^q] = \int_0^\infty x^q g(x) dx$ em que $g(x)$ é a função densidade da distribuição Burr XII, representada pela equação (1). Então,

$$\begin{aligned} \mu'_q &= \int_0^\infty x^q c k s^{-c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} x^{c-1} dx, \\ &= \int_0^\infty c k \left(\frac{x}{s} \right)^c \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} x^{q-1} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Utilizando-se a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{s} \right)^c$ na expressão (6), μ'_q reduz-se para:

$$\mu'_q = s^q k \int_0^\infty u^{q/c} (1+u)^{-k-1} du. \quad (7)$$

Utilizando uma nova mudança de variável $v = (1 + u)^{-1}$ na expressão (7), tem-se:

$$\begin{aligned}\mu'_q &= s^q k \int_0^1 (v)^{k-q/c-1} (1-v)^{q/c} dv, \\ &= s^q k B(k - qc^{-1}, qc^{-1} + 1), \text{ se } ck > q.\end{aligned}\quad (8)$$

Shao (2004) discutiu o método de máxima verossimilhança para os parâmetros da distribuição BXII com três parâmetros. Shao; Wong e Xia (2004) estudaram uma extensão da distribuição BXII com três parâmetros com aplicação na análise de frequência de inundações. Recentemente, Silva et al. (2008) propuseram um modelo de regressão para análise de dados de sobrevivência da forma de locação e escala, denominado de modelo de regressão log-Burr XII, como uma alternativa viável ao modelo de regressão log-logística e Silva; Ortega e Paula (2011) propuseram um resíduo para o modelo de regressão log-Burr XII cuja distribuição empírica se aproxima da normalidade.

2.3 Classe de distribuições generalizadas

Diversos autores como, por exemplo, Eugene; Lee e Famoye (2002), Cordeiro e Castro (2011) e Alexander et al. (2011) têm, nos últimos anos, concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, conseqüentemente, ganho na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas.

Neste trabalho será adotado o termo distribuição base, indicando a família de distribuições a ser generalizada, e será denotado por $G(x)$ a função de distribuição acumulada da distribuição base, e por $g(x)$ a função densidade de probabilidade da distribuição base.

Algumas das classes de generalizações mais estudadas nos últimos anos são as famílias de distribuições exponenciadas apresentadas inicialmente por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995); as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997); as distribuições beta que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002); as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008); e, recentemente, as distribuições Kumaraswamy desenvolvidas por Cordeiro e Castro (2011). Nas seguintes sub-seções algumas dessas classes de distribuições serão discutidas e os principais trabalhos apresentados.

2.3.1 Classe de distribuições beta

A classe de distribuições beta generalizadas, de acordo com Eugene; Lee e Famoye (2002), é uma generalização baseada na distribuição beta. De acordo com esses autores, considera-se a distribuição base $G(x)$ de uma variável aleatória contínua e obtém-se a classe de distribuições generalizadas com fda expressa por:

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw, \quad (9)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são dois parâmetros de forma, $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ é a função beta e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. Um dos maiores benefícios da classe de distribuições beta generalizadas (beta G) é seu uso para a análise de dados assimétricos que não possam ser propriamente analisados pelas distribuições existentes.

Pode-se reescrever a equação (9) como:

$$F(x) = I_y(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)},$$

em que $I_y(a, b)$ denota a razão da função beta incompleta e $B_y(a, b) = \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw$ é a função beta incompleta.

A função densidade de probabilidade da classe de distribuições beta generalizadas correspondente à equação (9) pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{g(x)}{B(a, b)} G(x)^{a-1} \{1 - G(x)\}^{b-1}, \quad (10)$$

em que $g(x) = dG(x)/dx$ é a função densidade da distribuição base. A fdp $f(x)$ será melhor empregada quando a fda $G(x)$ e a fdp $g(x)$ apresentarem uma expressão analítica simples, como, por exemplo, a distribuição Burr XII e a Weibull.

Essa classe de generalizações de distribuições têm recebido considerável atenção nos últimos anos, em particular depois do trabalho de Jones (2004). Eugene; Lee e Famoye (2002) introduziram a distribuição beta normal (BN) por considerar $G(x)$ na equação (9) como sendo a fda da normal e calcularam alguns dos seus primeiros momentos. Expressões mais gerais para esses momentos foram obtidas por Gupta e Nadarajah (2004). Nadarajah e Kotz (2004) introduziram a distribuição beta Gumbel (BG) por considerar $G(x)$ como sendo a fda da distribuição Gumbel e forneceram expressões de forma fechada para os momentos, a distribuição assintótica das estatísticas ordinais extremas e discutiram o procedimento de estimação de máxima verossimilhança. Nadarajah e Gupta

(2004) introduziram a distribuição beta Fréchet (BF) por considerar $G(x)$ como sendo a distribuição de Fréchet, obtiveram a forma analítica da função densidade de probabilidade e da função risco, além de calcularem a distribuição assintótica das estatísticas ordinais extremas. Também Nadarajah e Kotz (2005) apresentaram a distribuição beta exponencial (BE) e obtiveram a função geradora de momentos, os quatro primeiros cumulantes, a distribuição assintótica das estatísticas ordinais extremas e discutiram o procedimento de estimação de máxima verossimilhança. Mais recentemente, Barreto-Souza; Santos e Cordeiro (2010) introduziram a distribuição beta generalizada exponencial (BGE) e deduziram a função geradora de momentos e o r -ésimo momento, expressões para a densidade, função geradora de momentos e o r -ésimo momento da estatística de ordem e discutiram o procedimento de estimação de máxima verossimilhança. Pescim et al. (2010) introduziram a distribuição beta generalizada semi-normal (BGSN), obtiveram uma expressão formal para os momentos, função geradora de momentos, função densidade da distribuição da estatística de ordem, desvios médios, entropia, confiabilidade e as curvas de Bonferroni e Lorenz. Examinaram os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e deduziram a matriz de informação esperada.

2.3.2 Classe de distribuições Kumaraswamy

A classe de distribuições Kumaraswamy, recentemente proposta por Cordeiro e Castro (2011), baseia-se na generalização da distribuição Kumaraswamy proposta por Kumaraswamy (1980) para variáveis limitadas inferiormente e superiormente.

Seja “Kw” uma abreviação para o nome da distribuição, a função de distribuição acumulada da distribuição Kumaraswamy é dada por:

$$G_{Kw}(x; a, b) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad a, b > 0. \quad (11)$$

Substituindo a variável aleatória x por $G(x)$, e $G_{Kw}(x; a, b)$ por $F(x)$ na equação (11), obtém-se a classe de distribuições Kumaraswamy, cuja função de distribuição acumulada é dada por:

$$F(x) = 1 - \{1 - G^a(x)\}^b, \quad 0 < G(x) < 1 \quad \text{e} \quad a, b > 0, \quad (12)$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são os novos parâmetros de forma.

A função densidade de probabilidade, função de sobrevivência e função risco

são dadas por:

$$f(x) = a b g(x) G^{a-1}(x) \{1 - G^a(x)\}^{b-1}, \quad (13)$$

$$S(x) = [1 - G^a(x)]^b \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{a b g(x) G^{a-1}(x)}{1 - G^a(x)},$$

respectivamente.

Os momentos podem ser obtidos pelo cálculo da integral

$$\mu'_k = \int_0^\infty a b [1 - G^a(x)]^{b-1} G^{a-1}(x) g(x) x^k dx = b \int_0^1 \{G^{-1}(u^{1/a})\}^k (1-u)^{b-1} du$$

sendo que a transformação usada na integral descrita acima foi $u = G^a(x)$, o que implica em $G^{-1}[(u)^{1/a}] = x$.

A grande vantagem da classe de distribuições Kumaraswamy é que esta possui forma fechada, ou seja, pode ser escrita de forma analítica, diferentemente da classe de distribuições beta. Essa classe modela formas de risco constante, crescente, decrescente, unimodal e em forma de U. Outra propriedade da classe de distribuição Kumaraswamy é que essa possui como caso particular a classe de distribuições exponenciadas quando $b = 1$, a classe de distribuições estendidas quando $a = 1$ e as distribuições bases $G(x)$ quando $a = 1$ e $b = 1$.

Pode-se citar alguns importantes trabalhos nesta área, como, por exemplo, o trabalho de Santana (2010), que apresentou as distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística, o trabalho de Cordeiro e Castro (2011), que propuseram as distribuições Kumaraswamy gama, Kumaraswamy gumbel, Kumaraswamy gaussiana inversa, Kumaraswamy normal e Kumaraswamy Weibull; e o trabalho de Pascoa; Ortega e Cordeiro (2011), que apresentaram a distribuição Kumaraswamy gama generalizada estendida.

2.4 Modelos de Regressão

Na prática, é comum a ocorrência de situações em que uma ou mais covariáveis estão relacionadas aos tempos de sobrevivência, isto é, os tempos de falha são influenciados por covariáveis. Na área das ciências biomédicas, por exemplo, podem ser a idade, a altura, um tipo de tumor cancerígeno, a quantidade de hemoglobina no sangue, etc.

Considere T uma variável aleatória e seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ um vetor formado por p variáveis explanatórias. Um modo de estabelecer uma relação entre T e $\mathbf{x}$ é por meio da utilização de modelos de regressão. No contexto dos dados de sobrevivência, uma maneira de incluir as covariáveis na análise é realizada utilizando-se a classe de modelos de locação e escala, também conhecidos como modelo de tempo de vida acelerado ou modelo paramétrico. Existe uma vasta literatura sobre modelos de regressão locação-escala, por exemplo, Cox e Oakes (1984), Kalbfleisch e Prentice (2002) e Lawless (2003).

2.4.1 Modelo de regressão locação-escala

Assumindo censura à direita, o modelo de locação-escala é dado da seguinte forma:

$$Y = \mu + \sigma Z, \quad (14)$$

supondo que Y pertence à família de distribuições que se caracteriza pelo fato de ter um parâmetro de locação μ ($-\infty < \mu < \infty$) e um parâmetro de escala σ ($0 < \sigma < \infty$).

As distribuições que pertencem a essa família têm função densidade de probabilidade da forma:

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < y < \infty$$

e função de sobrevivência $G\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$.

Considerando a transformação $Y = \log(T)$, tem-se que o parâmetro de locação μ depende do vetor de covariáveis $\mathbf{x}$, denotado por $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. O modelo de regressão que relaciona Y e o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}$ é o modelo de locação-escala, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$Y = \mu(\mathbf{x}) + \sigma Z,$$

em que Z é um erro aleatório.

Observa-se que esse modelo é log-linear para T , logo, é um modelo de regressão linear para Y . Outra característica desse modelo é que o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}$ tem efeito multiplicativo em T . Além disso, a função de sobrevivência para Y dado $\mathbf{x}$, tem a forma $G\left(\frac{y - \mu(\mathbf{x})}{\sigma}\right)$, em que $G(z)$ é a função de sobrevivência de Z . Lawless

(2003) apresenta mais detalhes dessa classe de modelos, além de vários modelos usando distribuições de probabilidade para T , comumente usadas em análise de sobrevivência.

Na presença de censura intervalar, os dados observados consistem de um intervalo $(\log(u_i), \log(v_i))$ para cada indivíduo, no qual esses intervalos são conhecidos e inclui y_i com probabilidade um, ou seja, $P(\log(u_i) \leq y_i \leq \log(v_i)) = 1$, e se $\log(v_i) = \infty$, então o logaritmo do tempo é censurado à direita para y_i .

2.4.2 Modelo de regressão log-Burr XII

Silva et al. (2008) introduziram o modelo de regressão log-Burr XII. Considerando T uma variável aleatória com distribuição Burr XII, a função densidade de probabilidade de $Y = \log(T)$ é dada por:

$$f(y; k, \sigma, \mu) = \frac{k}{\sigma} \left[1 + \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right]^{-(k+1)} \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right), \quad (15)$$

em que $\sigma, k > 0, -\infty < y < \infty, -\infty < \mu < \infty$. A variável Y com fdp dada pela equação (15) é denominada log-Burr XII (LBXII).

A função de sobrevivência e a função geradora de momentos são expressas, respectivamente, por:

$$S^*(y; k, \sigma, \mu) = \left[1 + \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right]^{-k} \quad (16)$$

e

$$M_Y(t) = ks^t B \left[k - \frac{t}{c}, \frac{t}{c} + 1 \right], \quad (17)$$

em que $B(a, b)$ é a função beta.

2.5 Estimação e inferência

Assumindo um modelo paramétrico para a análise dos dados, deseja-se fazer inferências com base nesse modelo. Em geral, essa análise torna-se mais complicada quando se precisa incorporar dados censurados. O objetivo desta seção é apresentar o método de máxima verossimilhança e uma abordagem bayesiana para estimação e testes nos modelos propostos.

2.5.1 Método da Máxima Verossimilhança

Sejam $(y_1, \delta_1), (y_2, \delta_2), \dots, (y_n, \delta_n)$, n observações independentes em que $y_i = \log(t_i)$, representa o logaritmo do tempo de falha ou censura, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Assim sendo, o logaritmo da função de verossimilhança, considerando uma amostra completa, é dado por:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in F} \log [f(y_i)] + \sum_{i \in C} \log [S(y_i)], \quad (18)$$

em que $f(y)$ e $S(y)$ são as funções densidade de probabilidade e sobrevivência da variável aleatória Y , $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros e F e C denotam o conjunto de observações não censuradas e censuradas, respectivamente. Para obter os estimadores de máxima verossimilhança é preciso derivar $l(\boldsymbol{\theta})$ em relação ao vetor de parâmetros desconhecido $\boldsymbol{\theta}$. Portanto, esses estimadores são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Porém, para obter o estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros, é necessária a utilização de métodos iterativos, pois geralmente esse sistema é não-linear. Por exemplo, um algoritmo de otimização Newton-Raphson ou quase-Newton.

As propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são necessárias para construir intervalos de confiança e testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo, utilizando-se do fato que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tem distribuição normal assintótica multivariada sob certas condições de regularidade com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de variâncias e covariâncias dada pelo inverso da matriz de informação de Fisher ($I(\boldsymbol{\theta})^{-1}$), em que $I(\boldsymbol{\theta}) = E[\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})]$, tal que, $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\left\{ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right\}$.

Como não é trivial calcular a matriz de informação $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ devido às observações censuradas, pode-se usar a matriz Hessiana, $-\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$, avaliada em $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, que é um estimador consistente para $I(\boldsymbol{\theta})$. Portanto, a distribuição assintótica para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é especificada por $\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \sim N_{(d)}\{\boldsymbol{\theta}^T; \ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\}$, em que $\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada e d é o número de parâmetros do modelo.

Quanto à interpretação dos coeficientes estimados do modelo de regressão, uma possível proposta é baseada na razão dos tempos medianos (HOSMER Jr; LEMESHOW, 1999). Dessa forma, quando a covariável é binária (1 ou 0) e considerando a razão dos tempos medianos com $x = 1$ no numerador, se $\hat{\beta}$ é negativo (positivo) implica que indivíduos com $x = 1$ apresentam tempo mediano de sobrevivência reduzido

(aumentado) em $e^{\hat{\beta}} \times 100$ relativamente aos indivíduos no grupo com $x = 0$, fixando as demais covariáveis. Essa interpretação pode ser estendida para covariáveis contínuas ou categóricas.

Diversos autores utilizaram o método de máxima verossimilhança no contexto da análise de sobrevivência para estimar os parâmetros de distribuições. Entre eles, Nadarajah e Kotz (2005) que trabalharam com as distribuições beta exponencial e Weibull exponenciada. Mais recentemente, Silva; Ortega e Cordeiro (2010), Pescim et al. (2010) utilizaram esse método para estimar os parâmetros das distribuições beta Weibull modificada e beta generalizada semi-normal, respectivamente.

2.5.2 Análise bayesiana

Considere que $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$ seja um vetor de n observações e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)^T$ o vetor de parâmetros. Um dos grandes objetivos da estatística é procurar conhecer os parâmetros populacionais com base nas n observações obtidas de amostragem ou experimentação. Uma metodologia muito utilizada para esse fim é a inferência bayesiana (SILVA, 2009).

Na inferência bayesiana, as n observações são associadas a funções densidade de probabilidade $f(\mathbf{t}|\boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ indexa a família de distribuições das observações.

O verdadeiro valor de $\boldsymbol{\theta}$ é desconhecido e para a inferência bayesiana também é considerada uma variável aleatória. Nesse contexto, $\boldsymbol{\theta}$ possui uma distribuição associada. Na análise bayesiana a informação disponível a priori em relação a $\boldsymbol{\theta}$ é muito importante. Essa informação é traduzida em forma de uma distribuição de probabilidade, denotada por $\pi(\boldsymbol{\theta})$.

A distribuição *a priori* deve representar, probabilisticamente, o conhecimento que se tem sobre o parâmetro $\boldsymbol{\theta}$. Essa distribuição pode ser informativa ou não informativa. As *prioris* informativas são utilizadas quando se tem algum conhecimento prévio sobre o parâmetro, e as não informativas são usadas quando se tem pouca ou nenhuma informação sobre o parâmetro (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

A informação *a priori* combinada com a função dos dados, conhecida como função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$, resulta na distribuição *a posteriori* $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$, que é repre-

sentada por meio do teorema de Bayes e dada por:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}},$$

em que Θ denota o espaço paramétrico de $\boldsymbol{\theta}$. O denominador funciona como uma constante normalizadora que não depende de $\boldsymbol{\theta}$.

Assim, o teorema pode ser reescrito como:

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})\pi(\boldsymbol{\theta}).$$

Por meio do teorema de Bayes é possível atualizar a informação a respeito do parâmetro, e utilizá-lo para quantificar esse aumento de informação, sendo este um elemento essencial na análise bayesiana, pois toda a inferência é feita a partir da distribuição *a posteriori*.

Considerando o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, é necessário obter a distribuição marginal *a posteriori* para cada parâmetro θ_i , $i = 1, 2, \dots, d$ obtidas por meio de integração da função de densidade conjunta *a posteriori*:

$$\pi(\theta_i|\mathbf{t}) = \int \dots \int \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})d\theta_i.$$

No entanto, a resolução analítica dessa integral, é, em geral impraticável. Uma das alternativas é a utilização de métodos numéricos, dentre os quais se destacam os algoritmos dos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), que têm como objetivo simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$, o qual converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição marginal *a posteriori* de $\boldsymbol{\theta}$ (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Os métodos MCMC utilizam a simulação estocástica considerando as distribuições condicionais completas *a posteriori* de cada parâmetro para gerar amostras que convergem para a densidade marginal, com o aumento dessa amostra.

A distribuição condicional completa *a posteriori* do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é denotada por $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}_{-i}, \mathbf{t})$, e é obtida considerando que, na densidade *a posteriori* conjunta, os demais parâmetros $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ são conhecidos e, assim, a expressão se torna menos complexa, já que as constantes podem ser desconsideradas.

Quando a expressão da condicional completa tem uma forma conhecida, é utilizado o método de simulação amostrador de Gibbs, e quando a condicional completa

tem uma forma desconhecida, é utilizado o algoritmo Metropolis-Hasting (HASTINGS, 1970).

O amostrador de Gibbs é um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov, cujo núcleo de transição é formado pelas condicionais completas. O algoritmo do amostrador de Gibbs é um processo iterativo da seguinte forma:

1 Atribua um valor inicial para $\boldsymbol{\theta}^0 = (\boldsymbol{\theta}_1^0, \boldsymbol{\theta}_2^0, \dots, \boldsymbol{\theta}_d^0)$,

2 Obtém-se um valor para $\boldsymbol{\theta}_{(1)}$ da seguinte forma:

(i) amostre $\boldsymbol{\theta}_1^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_1^1 | \boldsymbol{\theta}_2^0, \dots, \boldsymbol{\theta}_d^0, \mathbf{t})$,

(ii) amostre $\boldsymbol{\theta}_2^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_2^1 | \boldsymbol{\theta}_1^1, \boldsymbol{\theta}_3^0, \dots, \boldsymbol{\theta}_d^0, \mathbf{t})$,

$\vdots$

(iii) amostre $\boldsymbol{\theta}_d^1$ de $\pi(\boldsymbol{\theta}_d^1 | \boldsymbol{\theta}_1^1, \boldsymbol{\theta}_2^1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{d-1}^1, \mathbf{t})$,

Completa-se assim uma iteração do esquema de transição de $\boldsymbol{\theta}^0$ para $\boldsymbol{\theta}^1$,

3 Repete-se o passo 2 m vezes, até a convergência ser alcançada.

O algoritmo de Metropolis-Hasting utiliza a ideia de gerar um valor de uma distribuição auxiliar, o qual é aceito com uma dada probabilidade. Esse mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio.

Para iniciar o algoritmo de Metropolis-Hasting um valor inicial para $\boldsymbol{\theta}$ é dado, $\boldsymbol{\theta}^0$. Agora, suponha-se que o algoritmo encontra-se na iteração m e que se deseja obter uma nova observação θ_i^m de $f(x) = \pi(x | \boldsymbol{\theta}_{-i}^m, \mathbf{t})$ em que x representa um valor de θ_j . Procede-se da seguinte maneira:

(i) amostre um ponto y de $q(z_m, y)$ em que z_m denota o valor atual de θ_j e $q(z_m, y)$ é uma distribuição proposta (função de transição apropriada),

(ii) amostre um ponto u da $U[0, 1]$ caso $u \leq \alpha(z_m, y)$ faça $z_{m+1} = y$, caso contrário, faça $z_{m+1} = z_m$ em que $\alpha(z_m, y) = \min \left\{ 1, \frac{f(y)q(z_m|y)}{f(z_m)q(y|z_m)} \right\}$.

Repetem-se esses passos até que a convergência da cadeia seja atingida. A distribuição proposta $q(z, y)$ deve ser de fácil simulação e garantir uma convergência rápida para a distribuição alvo $\pi(\boldsymbol{\theta}_{-i}^m | \boldsymbol{\theta}_{-i}^m, \mathbf{t})$ (CHIB; GREENBERG, 1995).

A ideia principal dos algoritmos MCMC é que, à medida que o número de iterações aumenta, a cadeia gerada se aproxima da distribuição de equilíbrio, ou seja, da densidade marginal desejada de cada parâmetro. Assim, é necessário monitorar a convergência das sequências geradas pela cadeia de Markov. Existem vários critérios propostos com esse intuito e uma possibilidade é utilizar o método proposto por Gelman e Rubin (1992).

Esses autores propuseram um método de simulação baseado em várias cadeias de Markov simuladas a partir de vários pontos iniciais. Assim, o método de Gelman e Rubin está baseado na construção de l cadeias independentes, cada uma partindo de valores iniciais distintos. Além disso, para cada parâmetro, devem-se descartar as primeiras iterações para eliminar o efeito do valor inicial, e, para evitar os problemas de correlação, deve-se considerar um espaçamento entre as iterações sucessivas. Desse modo, obtém-se uma amostra final $\boldsymbol{\theta}^{(v,s)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(v,s)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(v,s)}, \dots, \boldsymbol{\theta}_d^{(v,s)})'$, em que v denota a v -ésima cadeia e s denota a s -ésima réplica na v -ésima cadeia, $s = (1, \dots, m)$ e $v = (1, \dots, l)$.

Para verificar a convergência a partir do método de Gelman e Rubin, considere que U represente qualquer um dos componentes do vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$. Para cada parâmetro de interesse, calculam-se:

$$\bar{u}_v = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m u_{vs} \text{ e } s_v^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{s=1}^m (u_{vs} - \bar{u}_v)^2,$$

a média e a variância, respectivamente, de U para cada cadeia $v = 1, \dots, l$.

Agora, calcula-se a variância entre as cadeias e a variância dentro das cadeias, respectivamente, dadas por:

$$B = \frac{m}{l-1} \sum_{v=1}^l (\bar{u}_v - \bar{u}_{..})^2 \text{ e } W = \sum_{v=1}^l \frac{s_v^2}{l},$$

em que $\bar{u}_{..} = \frac{1}{l} \sum_{v=1}^l \bar{u}_v$.

A variância de U é estimada como a média ponderada de W e B

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{m-1}{m} W + \frac{1}{m} B.$$

Têm-se que U segue uma distribuição t de Student com parâmetro de locação $\hat{\mu} = \bar{u}_{..}$, parâmetro de escala $\sqrt{\hat{V}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + B/lm}$ e número de graus de liberdade

$gl = 2\widehat{V}^2/\widehat{var}(\widehat{V})$, em que:

$$\begin{aligned}\widehat{var}(\widehat{V}) = & \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{1}{l} \widehat{var}(s_v^2) + \left(\frac{l+1}{vs}\right)^2 \frac{2}{l-1} B^2 \\ & + 2 \frac{(l-1)(m-1)}{l^2 m} [\widehat{cov}(s_v^2, \bar{u}_v^2) - 2\bar{u}_v \cdot \widehat{cov}(s_v^2, \bar{u}_v^2)]\end{aligned}$$

e as variâncias e as covariâncias são estimadas a partir dos l valores amostrais de s_v^2 , $\bar{u}_v$ e $\bar{u}_v^2$.

A convergência é monitorada calculando o fator de redução de escala que é definido como:

$$\sqrt{\widehat{R}} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{V}}{\widehat{W}}\right) \frac{gl}{gl-2}},$$

em que $\widehat{R}$ mede o fator de redução que sofreria o parâmetro de escala da distribuição t de Student para U se a simulação continuasse.

À medida que n cresce, $\widehat{R}$ converge para 1. Na prática, assume-se convergência quando $\widehat{R}$ está próximo de 1 e as iterações selecionadas para compor a amostra final são independentes e identicamente distribuídas (GELMAN; RUBIN, 1992). Portanto, quando o fator de redução potencial de escala apresenta um valor elevado, haveria razão para acreditar que um maior número de simulações proporcionaria uma melhora na inferência sobre a distribuição desejada.

A distribuição marginal *a posteriori* de um parâmetro θ_i contém toda a informação probabilística a respeito desse parâmetro. No entanto, algumas vezes é necessário resumir a informação contida nessa distribuição por meio de alguns valores numéricos. Um caso simples é a estimação pontual de θ_i , em que se resume a distribuição marginal *a posteriori* por meio de um único número, $\widehat{\theta}_i$. É importante, também, associar alguma informação sobre o quão precisa é a especificação desse número. As medidas de incerteza mais usuais são: a variância e o coeficiente de variação para a média *a posteriori*, a medida de informação observada de Fisher para a moda *a posteriori* e a distância entre quartis para a mediana *a posteriori* (EHLERS, 2007).

A própria ideia de estimação de parâmetros por ponto, conduz, no cenário bayesiano, a tomar como estimativas os pontos críticos da distribuição *a posteriori*. Um resumo de $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t})$ mais informativo do que qualquer estimativa pontual é obtido de uma região do espaço paramétrico, $\boldsymbol{\Theta}$, que contenha uma parte substancial da massa probabilística *a posteriori* (PAULINO; TURKMAN; MURTEIRA, 2003).

Ehlers (2007) define C como um intervalo de credibilidade de $100(1 - \alpha)\%$ para θ se $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$. Assim, quanto menor for o tamanho do intervalo, mais concentrada é a distribuição do parâmetro, ou seja, o tamanho do intervalo informa sobre a dispersão de θ .

É possível construir uma infinidade de intervalos utilizando a definição acima, mas é de principal interesse aquele com menor comprimento possível. Os intervalos de comprimento mínimo são obtidos tomando-se os valores de θ com maior densidade *a posteriori*, denominados intervalos de credibilidade de máxima densidade *a posteriori*, ou intervalos HPD.

Segundo Ehlers (2007), um intervalo de credibilidade C de $100(1 - \alpha)\%$ para θ é de máxima densidade *a posteriori* se $C = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta|\mathbf{t}) \geq k(\alpha)\}$, em que $k(\alpha)$ é a maior constante tal que $P(\theta \in C) \geq 1 - \alpha$.

Usando essa definição, todos os pontos dentro do intervalo de máxima densidade *a posteriori* (intervalo HPD) terão densidade maior do que qualquer ponto fora do intervalo.

Em análise de sobrevivência, existem vários trabalhos utilizando a abordagem bayesiana. Por exemplo Cancho; Bolfarine e Achcar (1999) apresentaram a análise bayesiana para a distribuição Weibull exponenciada. Além disso, Silva et al. (2008) aplicaram a metodologia bayesiana para o modelo de regressão log-Burr XII.

2.6 Estatísticas AIC, BIC e CAIC

Alguns critérios comuns na literatura podem ser utilizados para a seleção de modelos. Esses critérios levam em consideração a complexidade do modelo no critério de seleção. São critérios que, essencialmente, penalizam a verossimilhança, utilizando o número de variáveis do modelo e, eventualmente, o tamanho da amostra. Essa penalização é feita subtraindo-se do valor da verossimilhança uma determinada quantidade do quão complexo é o modelo.

Akaike (1974) propôs utilizar a informação de Kullback-Leibler para a seleção de modelos. Ele estabeleceu uma relação entre a máxima verossimilhança e a informação de Kullback-Leibler desenvolvendo, então, um critério para estimar a informação de Kullback-Leibler, posteriormente, chamado critério de informação de Akaike (AIC). Liang e Zou (2007) propuseram um AIC corrigido (CAIC).

O critério de informação bayesiano (BIC), também chamado de critério de Schwarz (1978), é um critério de avaliação de modelos definido em termos da probabilidade *a posteriori*, sendo assim chamado porque Schwarz forneceu um argumento bayesiano para prová-lo. Segundo esses critérios, o melhor modelo será aquele que apresentar menor valor para AIC, BIC e CAIC.

Considerando uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ de tamanho n e o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, as estatísticas AIC, BIC e CAIC podem ser calculadas por:

$$AIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + 2d,$$

$$BIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + d \log(n),$$

$$CAIC = AIC + \frac{2(d+2)(d+3)}{n-d-3},$$

em que $l(\boldsymbol{\theta})$ é o logaritmo da função de verossimilhança e d representa o número de parâmetros estimados do modelo.

Silva; Ortega e Cordeiro (2010) e Cordeiro e Castro (2011) utilizaram a estatística AIC para comparar uma nova família de distribuições generalizadas e o modelo beta Weibull modificado com outros sub-modelos, respectivamente. Pescim et. al (2010) utilizaram as estatísticas AIC, BIC e CAIC para o mesmo propósito mas comparando com o modelo beta generalizada semi-normal.

3 DISTRIBUIÇÃO BETA BURR XII

A distribuição Burr XII, considerada em Zimmer; Keats e Wang (1998) é um modelo utilizado para a modelagem de dados de sobrevivência, engenharia de confiabilidade, análise de falhas, hidrologia, entre outras áreas. A distribuição BXII acomoda diferentes tipos de risco, ou seja, forma crescente, decrescente e unimodal.

Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, conseqüentemente, ganhado na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas. Nesse contexto, seguindo a ideia de Eugene; Lee e Famoye (2002), o objetivo deste capítulo foi propor uma nova distribuição, denominada distribuição beta Burr XII, que é uma junção da distribuição beta com a distribuição Burr XII.

Essa nova distribuição, devido à sua flexibilidade para acomodar muitas formas para a função risco, é uma importante distribuição de probabilidade, pois pode ser utilizada em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. Além disso, a nova distribuição é também adequada para testar a qualidade do ajuste de seus sub-modelos especiais. O restante do capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1, a distribuição beta Burr XII foi descrita e alguns importantes sub-modelos apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 3.2. Estudo de simulação na seção 3.3. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 3.4 e 3.5, respectivamente. Por fim, a análise de um conjunto de dados reais é dada na seção 3.6.

3.1 Distribuição beta Burr XII

A nova distribuição, denominada distribuição beta Burr XII (BBXII), é uma composição baseada na distribuição Burr XII e na distribuição beta. Substituindo $G(x)$ na equação (9) pela fda da Burr XII, dada na equação (2), obtém-se a função de distribuição acumulada da BBXII:

$$F(x) = I_{1-[1+(x/s)^c]^{-k}}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{1-[1+(x/s)^c]^{-k}} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega, \quad x > 0. \quad (19)$$

A função densidade de probabilidade dessa distribuição é obtida substituindo as equações (1) e (2) na equação (10), e pode ser expressa por:

$$f(x) = \frac{c k x^{c-1}}{s^c B(a, b)} [1 + (x/s)^c]^{-(kb+1)} \left\{ 1 - [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1}, \quad x > 0. \quad (20)$$

A notação utilizada será $X \sim BBXII(a, b, s, k, c)$.

A distribuição BBXII possui várias distribuições conhecidas como casos particulares. Claramente, a distribuição Burr XII quando $a = b = 1$. Para $b = 1$, obtém-se a distribuição Burr XII exponenciada (BXIIE). Para $s = m^{-1}$ e $k = 1$, a distribuição BBXII reduz-se à distribuição beta log-logística (BLL). Para $a = b = 1$, $s = m^{-1}$ e $k = 1$ a distribuição BBXII é reduzida à distribuição log-logística (LL) com função de sobrevivência dada por $S(t; m, c) = [1 + (tm)^c]^{-1}$. Para $a = c = 1$ e $a = b = c = 1$ a distribuição BBXII torna-se as distribuições beta Pareto tipo II (BP II) e Pareto tipo II (PII), respectivamente. A distribuição beta Weibull (BW) é um caso especial quando $k \rightarrow \infty$. Se $a = b = 1$ além de $k \rightarrow \infty$, a distribuição Weibull (W) é obtida. Um diagrama contendo os casos particulares da BBXII são ilustrados na Figura 3.

Figura 3 - Diagrama das distribuições obtidas como casos particulares da distribuição BBXII

A Figura 4 ilustra algumas das possíveis formas da função densidade (20), para determinados valores dos parâmetros, incluindo alguns modelos particulares.

A função risco da distribuição BBXII é dada por:

$$h(x) = \frac{c k x^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{-(kb+1)} \left\{ 1 - [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1}}{s^c B(a, b) \left[1 - I_{\left\{ 1 - [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}}(a, b) \right]}, \quad x > 0. \quad (21)$$

Figura 4 - Gráficos da função densidade (20) para alguns valores dos parâmetros

Algumas formas diferentes da função risco são ilustrados na Figura 5, para alguns valores selecionados dos parâmetros. Pode-se observar que além das formas obtidas pela distribuição Burr XII, a distribuição BBXII, possui a forma de U para a função risco.

3.2 Propriedades Gerais

Para encontrar algumas propriedades da distribuição BBXII, a função densidade de probabilidade (20) pode ser reescrita como uma combinação linear da distribuição BXII. Dessa forma, seja $b > 0$ um número real não-inteiro e $|z| < 1$. Considere a expansão para a expressão $(1 - z)^{b-1}$ (NADARAJAH; KOTZ, 2004), dada por:

$$(1 - z)^{b-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} z^j. \quad (22)$$

Usando a expansão (22) na equação (19), a função de distribuição acumulada da distribuição BBXII pode ser escrita como:

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} \int_0^{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}} \omega^{a+j-1} d\omega.$$

Calculando a integral, obtém-se:

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b) \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{a+j}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)}. \quad (23)$$

Figura 5 - Gráficos da função risco (21) para alguns valores dos parâmetros. (a) Crescente (b) Unimodal (c) Decrescente (d) forma de U

Derivando (23) em relação a x , tem-se:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ckx^{c-1}(-1)^j\Gamma(b)[1+(x/s)^c]^{-k-1}}{B(a,b)s^c\Gamma(b-j)j!} \{1 - [1+(x/s)^c]^{-k}\}^{a+j-1}. \quad (24)$$

Utilizando a expansão em série (22) na expressão $\{1 - [1+(x/s)^c]^{-k}\}^{a+j-1}$,

pode-se reescrever a equação (24) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{ckx^{c-1}(-1)^j\Gamma(b)[1+(x/s)^c]^{-k-1}}{B(a,b)s^c\Gamma(b-j)j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\Gamma(a+j)}{\Gamma(a+j-r)r!} [1+(x/s)^c]^{-kr}, \\
&= \sum_{j,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r}\Gamma(b)\Gamma(a+j)ckx^{c-1}}{B(a,b)\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-r)j!r!s^c} \left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k(r+1)-1}, \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a,b) \frac{ckx^{c-1}}{s^c} \left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k(r+1)-1}, \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r g(x; s, k(r+1), c),
\end{aligned} \tag{25}$$

em que $g(x; s, k(r+1), c)$ é a função densidade da distribuição BXII com o parâmetro de escala s e os parâmetros de forma c e $k(r+1)$, e o coeficiente w_r é dado por:

$$w_r = w_r(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r}\Gamma(b)\Gamma(a+j)}{B(a,b)\Gamma(b-j)\Gamma(a+j-r)j!(r+1)!}. \tag{26}$$

De acordo com a equação (25), pode-se observar que a função densidade da distribuição BBXII pode ser escrita como uma combinação linear da função densidade da distribuição BXII. Para $b > 0$ inteiro, a soma em j é interrompida em $(b-1)$. Para $a > 0$ inteiro, a soma em r é interrompida em $(a+j-1)$.

Por integração da equação (25), para a e b positivos reais não-inteiros, obtém-se a fda da distribuição BBXII também como uma combinação linear da distribuição BXII.

$$F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r G(x; s, k(r+1), c), \tag{27}$$

em que w_r foi definido em (26).

3.2.1 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, como por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. Assim, o n -ésimo momento da distribuição BBXII, dado pela expressão $\mu'_n = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx$, de acordo com a equação (25), pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mu'_n &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b) \int_0^{\infty} \frac{x^n ckx^{c-1}}{s^c} [1+(x/s)^c]^{-k(r+1)-1} dx, \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b) ck \int_0^{\infty} x^{n-1} \left(\frac{x}{s}\right)^c \left[1+\left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k(r+1)-1} dx.
\end{aligned} \tag{28}$$

Utilizando a mudança de variável $u = \left(\frac{x}{s}\right)^c$ na expressão (28), μ'_n , reduz para:

$$\begin{aligned}\mu'_n &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b) ck \int_0^{\infty} u(1+u)^{-k(r+1)-1} (u^{\frac{1}{c}} s)^{n-1} \frac{u^{\frac{1}{c}} s}{cu} du, \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b) ks^n \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{c}} \frac{(1+u)^{-k(r+1)}}{1+u} du.\end{aligned}\quad (29)$$

Utilizando uma nova mudança de variável $v = (1+u)^{-1}$ na equação (29), tem-se:

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b) ks^n \int_0^1 v^{k(r+1)-\frac{n}{c}-1} (1-v)^{\frac{n}{c}} dv,$$

em que

$$\int_0^1 v^{k(r+1)-\frac{n}{c}-1} (1-v)^{\frac{n}{c}} dv = B[k(r+1) - nc^{-1}, 1 + nc^{-1}].$$

Portanto, o n -ésimo momento da distribuição BBXII é denotado por:

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^{\infty} w_r s^n k(r+1) B[k(r+1) - nc^{-1}, 1 + nc^{-1}], \quad k(r+1) - nc^{-1} > 0. \quad (30)$$

As medidas de assimetria e curtose podem ser calculadas utilizando as equações seguintes:

$$\text{Assimetria}(X) = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E^3(X)}{\text{Var}^{3/2}(X)}. \quad (31)$$

$$\text{Curtose}(X) = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)}{\text{Var}^2(X)}. \quad (32)$$

As representações gráficas dessas medidas quando $s = 1,5$, $k = 1,2$ e $c = 2,3$, em função do parâmetro a para alguns valores selecionados do parâmetro b e em uma função do parâmetro b para alguns valores selecionados do parâmetro a , são apresentadas nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

3.2.2 Função geradora de momentos

A função geradora de momentos (fgm) dada pela expresssão $M(t) = E[\exp(tX)]$, determina os momentos de todas as ordens. Utilizando-se a expansão em série de Maclaurin da função exponencial (ABRAMOWITZ; SEGUN, 1972), isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Figura 6 - Assimetria de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

Figura 7 - Curtose de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

a fgm pode ser escrita como:

$$M(t) = E \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\frac{(tX)^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n). \quad (33)$$

De acordo com a equação (25), pode-se reescrever o n -ésimo momento da

distribuição BBXII da seguinte forma:

$$E(X^n) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r E(X_{s,k(r+1),c}^n), \quad (34)$$

em que $X_{s,k(r+1),c} \sim BXII(s, k(r+1), c)$ e w_r foi definido em (26).

Substituindo a expressão obtida na equação (34) na expressão (33), obtém-se a fgm da distribuição BBXII, ou seja,

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{r=0}^{\infty} w_r E(X_{s,k(r+1),c}^n), \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X_{s,k(r+1),c}^n), \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r M_{r+1}(t), \end{aligned} \quad (35)$$

em que $M_{r+1}(t)$ é a fgm da distribuição $BXII(s, k(r+1), c)$ e w_r foi definido em (26). De acordo com a equação (35), a fgm da distribuição BBXII pode ser escrita em termos da fgm da BXII reparametrizada. Primeiramente, pode-se representar a fgm da BXII da seguinte maneira:

$$M_{\text{BXII}}(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \exp(tx) c k s^{-c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} x^{c-1} dx, \quad t < 0,$$

e fazendo $x = ys$, tem-se:

$$M_{\text{BXII}}(t) = ck \int_0^{\infty} \exp(yst) y^{c-1} (1 + y^c)^{-(k+1)} dy. \quad (36)$$

Considerando-se a integral definida no livro de Prudnikov; Brychkov e Marichev (1992), para m e k inteiros positivo (Apêndice A) e fazendo uma analogia dessa fórmula para a equação (36), ou seja, tomando $c = m/k$, $p = -st$ e $v = -k - 1$, tem-se:

$$M_{\text{BXII}}(t) = m I'(-st, mk^{-1} - 1, mk^{-1}, -k - 1), \quad t < 0. \quad (37)$$

Assim, pela equação (35), a fgm da distribuição BBXII(a, b, s, k, c) é dada por:

$$M(t) = m \sum_{r=0}^{\infty} w_r I' \left(-st, \frac{m}{k(r+1)} - 1, \frac{m}{k(r+1)}, -k(r+1) - 1 \right), \quad t < 0. \quad (38)$$

Para os casos particulares, em que $c = 1$ e $c = 2$, é possível obter expressões mais simples para a fgm da distribuição BXII e, conseqüentemente, para a fgm da distribuição BBXII. Observa-se que a integral da equação (36), para $c = 1$, pode ser calculada

por meio da expressão dada em Prudnikov; Brychkov e Marichev (1992), isto é,

$$M_{\text{BXII}}(t) = k(-st)^k \exp(-st) \Gamma(-k, -st), \quad t < 0,$$

em que $\Gamma(v, x) = \int_x^\infty t^{v-1} \exp(-t) dt$ é a função gama incompleta. E para $c = 2$, a fgm da BXII pode ser obtida por meio da expressão dada em Prudnikov; Brychkov e Marichev (1992), isto é,

$$M_{\text{BXII}}(t) = {}_1F_2\left(1; \frac{1}{2}; 1-k; \frac{s^2 t^2}{4}\right) + \frac{st}{2} B\left(2, k-\frac{1}{2}\right) {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}; k+\frac{7}{2}; \frac{-s^2 t^2}{4}\right) + \frac{\Gamma(-2k)}{(-st)^{-2k}}, \quad t < 0,$$

em que

$${}_1F_2(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k (c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

é a função hipergeométrica e $(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$ denota o fatorial ascendente.

3.2.3 Desvios médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média (no caso de uma distribuição simétrica) ou em relação à mediana (no caso de uma distribuição assimétrica). Se X é uma variável aleatória com distribuição BBXII com média $\mu'_1 = \mu = E(X)$ e mediana M , então, o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por

$$\delta_1(X) = \int_0^\infty |x - \mu| f(x) dx \quad \text{e} \quad \delta_2(X) = \int_0^\infty |x - M| f(x) dx,$$

Obtém-se μ'_1 da equação (30) e M é calculado como a solução da equação não-linear

$$I_{1-[1+(x/s)^c]-k}(a, b) = 1/2.$$

Para auxiliar o cálculo dos desvios é definida a integral $T(q) = \int_q^\infty x f(x) dx$, que será calculada, posteriormente. O desvio médio em relação à média pode ser simpli-

ficado como:

$$\begin{aligned}
\delta_1(X) &= \int_0^\infty |x - \mu| f(x) dx, \\
&= \int_0^\mu (\mu - x) f(x) dx + \int_\mu^\infty (x - \mu) f(x) dx, \\
&= \int_0^\mu \mu f(x) dx - \int_0^\mu x f(x) dx + \int_\mu^\infty x f(x) dx - \int_\mu^\infty \mu f(x) dx, \\
&= \mu F(\mu) + T(\mu) - \left[\int_0^\mu x f(x) dx + \int_\mu^\infty \mu f(x) dx \right], \\
&= \mu F(\mu) + T(\mu) - \left[E(X) - \int_\mu^\infty x f(x) dx + \mu \int_\mu^\infty f(x) dx \right], \\
&= \mu F(\mu) + T(\mu) - \mu + T(\mu) - \mu \int_\mu^\infty f(x) dx, \\
&= 2T(\mu) + \mu F(\mu) - \mu - \mu[1 - F(\mu)], \\
&= 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2T(\mu). \tag{39}
\end{aligned}$$

Similarmente, o desvio médio em relação à mediana pode ser simplificado como:

$$\begin{aligned}
\delta_2(X) &= \int_0^\infty |x - M| f(x) dx, \\
&= \int_0^M (M - x) f(x) dx + \int_M^\infty (x - M) f(x) dx, \\
&= \int_0^M M f(x) dx - \int_0^M x f(x) dx + \int_M^\infty x f(x) dx - \int_M^\infty M f(x) dx, \\
&= MF(M) - \int_0^M x f(x) dx + \int_M^\infty x f(x) dx - M[1 - F(M)], \\
&= MF(M) - \left[E(X) - \int_M^\infty x f(x) dx \right] + \int_M^\infty x f(x) dx - M[1 - F(M)], \\
&= 2T(M) - \mu + 2MF(M) - M = 2T(M) - \mu. \tag{40}
\end{aligned}$$

A partir da equação (27), encontram-se facilmente $F(M)$ e $F(\mu)$. Calculando a integral $T(q)$, podem-se obter o desvio médio em relação à média e em relação à mediana para a distribuição BBXII, em que a função densidade é dada pela equação (25). Então,

$$\begin{aligned}
T(q) &= \int_q^\infty x f(x) dx, \\
&= ck \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b)(r+1) \int_q^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^c \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k(r+1)-1} dx.
\end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variável $x = ys$, encontra-se:

$$T(q) = cks \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b)(r+1) \int_{q/s}^{\infty} y^c (1+y^c)^{-k(r+1)-1} dy.$$

Utilizando uma nova mudança de variável $u = y^c$, encontra-se:

$$T(q) = ks \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a, b)(r+1) \int_{(q/s)^c}^{\infty} u^{1/c} (1+u)^{-k(r+1)-1} du.$$

Definindo uma nova integral J (para $q > 0$ e $k > 0$) e utilizando o Maple para resolvê-la, tem-se:

$$\begin{aligned} J(q, r, k) &= \int_q^{\infty} u^r (1+u)^{-k} du \\ &= - \left[\frac{{}_2F_1[(k, r+1); (2+r); -q] q^{r+1}}{(r+1)} + \frac{\Gamma(k-r-1) \pi \csc(\pi r)}{\Gamma(k) \Gamma(-r)} \right], \end{aligned}$$

em que ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica definida por:

$${}_2F_1(a, b; d; x) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(d+j)} \frac{x^j}{j!}.$$

Logo,

$$T(q) = ks \sum_{r=0}^{\infty} w_r(r+1) J \left(\left(\frac{q}{s} \right)^c, \frac{1}{c}, k(r+1) + 1 \right). \quad (41)$$

Portanto, a partir da equação (41), os valores de $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ são facilmente calculados.

3.2.4 Curvas de Bonferroni e Lorenz

As curvas de Bonferroni e Lorenz são amplamente aplicadas não só em economia para o estudo da renda e da pobreza, mas também em outros campos como em confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para uma variável aleatória X com função inversa da função acumulada dada por $F^{-1}(\cdot)$, as curvas de Bonferroni e Lorenz são definidas por (PUNDIR; ARORA; JAIN, 2005):

$$B(p) = \frac{1}{p\mu} \int_0^q x f(x) dx \quad \text{e} \quad L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^q x f(x) dx,$$

respectivamente, em que $q = F^{-1}(p)$ para uma probabilidade p .

Podem-se reescrever as curvas utilizando a seguinte integral $\int_0^q xf(x) = \mu - T(q)$, então:

$$B(p) = \frac{1}{p\mu} \left[\mu - T(q) \right] = \frac{1}{p} - \frac{T(q)}{p\mu} \quad \text{e} \quad L(p) = 1 - \frac{T(q)}{\mu}.$$

Logo, utilizando a definição de $T(q)$ dada pela expressão (41), encontram-se os valores para as respectivas curvas. Algumas expansões para o inverso da função beta incompleta $q = I_w^{-1}(a, b)$ em termos da quantidade $w = 1 - [1 + (p/s)^c]^{-k}$, podem ser encontradas em Wolfram (1998).

3.2.5 Confiabilidade

No contexto de confiabilidade, os modelos de resistência-tensão descrevem a vida de um componente que tem uma força aleatória X_1 e é submetido a um esforço aleatório X_2 . O componente falha no instante que a tensão aplicada a ele supera a sua força, ou seja, o componente irá funcionar, satisfatoriamente, quando $X_1 > X_2$. Por isso, $R = Pr(X_2 < X_1)$ é uma medida de confiabilidade dos componentes. Essa medida tem muitas aplicações, especialmente em conceitos de engenharia, tais como estruturas, deterioração de motores de foguete, fadiga estática dos componentes de cerâmica e falha por fadiga de estruturas de aeronaves. Muitos trabalhos que envolvem modelos de resistência-tensão possuem o interesse na estimação da confiabilidade quando X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes que pertencem à mesma família univariada de distribuições. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuições $BBXII(a_1, b_1, s, k_1, c)$ e $BBXII(a_2, b_2, s, k_2, c)$, respectivamente.

A confiabilidade R é dada por:

$$R = \int_0^\infty f_1(x)F_2(x)dx.$$

Obtêm-se a fdp de X_1 e a fda de X_2 das equações (25) e (27), respectivamente,

$$f_1(x) = \sum_{q=0}^{\infty} w_q(a_1, b_1)g(x; s, k_1(q+1), c)$$

e

$$F_2(x) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r(a_2, b_2)G(x; s, k_2(r+1), c).$$

Logo,

$$R = \sum_{r,q=0}^{\infty} ck_1(q+1)w_q(a_1, b_1)w_r(a_2, b_2)s^{-c}I''(c, s, k_1, k_2, r, q),$$

em que

$$I''(c, s, k_1, k_2, r, q) = \int_0^\infty x^{c-1} s^{-c} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k_1(q+1)-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k_2(r+1)} \right\} dx.$$

Utilizando a mudança de variável $u = 1 + (x/s)^c$, encontra-se:

$$I''(c, s, k_1, k_2, r, q) = \frac{c k_2(r+1) - 1}{c k_1(q+1) + c k_2(r+1)},$$

e então pode-se obter R , como desejado.

3.2.6 Estatística de ordem e momentos

Momentos de estatística de ordem desempenham um papel importante no controle de qualidade e confiabilidade, em que o pesquisador precisa prever a falha futura baseada no tempo inicial das falhas. Estes indicadores são, geralmente, baseados em momentos das estatísticas de ordem.

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição BBXII. A expressão da i -ésima estatística de ordem $X_{i:n}$ pode ser escrita como

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i}, \quad (42)$$

para $i = 1, \dots, n$. Usando-se a expansão binomial na equação (42), obtém-se (BARRETO-SOUZA; SANTOS; CORDEIRO, 2010):

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} F(x)^{i-1} \sum_{l=0}^{n-i} (-1)^l \binom{n-i}{l} [F(x)]^l, \\ &= \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} f(x)}{B(i, n-i+1)} [F(x)]^{i+l-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Substituindo (20) e (23) em (43) para $b > 0$ real não-inteiro, tem-se:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} c k(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{a-1} \{[1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{b-1}}{s^c B(a, b) B(i, n-i+1)} \\ &\times \left[\frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b) \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{a+j}}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \right]^{i+l-1}. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} \Gamma(b)^{i+l-1} c k(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{a(i+l)-1}}{s^c B(a, b)^{i+l} B(i, n-i+1) \{[1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{-(b-1)}} \\ &\times \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^j}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \right]^{i+l-1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Utilizando-se a identidade $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)^k = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_k=0}^{\infty} a_{m_1} \dots a_{m_k}$ para k inteiro positivo na equação (44), pode-se encontrar:

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(x) &= \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} \Gamma(b)^{i+l-1} ck(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{a(i+l)-1}}{s^c B(a, b)^{i+l} B(i, n-i+1) \left\{ [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{-(b-1)}} \\
 &\times \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+l-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{m_1}}{\Gamma(b-m_1)m_1!(a+m_1)} \dots \frac{(-1)^{m_{i+l-1}} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{m_{i+l-1}}}{\Gamma(b-m_{i+l-1})m_{i+l-1}!(a+m_{i+l-1})}, \\
 &= \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} \Gamma(b)^{i+l-1} ck(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{a(i+l)-1}}{s^c B(a, b)^{i+l} B(i, n-i+1) \left\{ [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{-(b-1)}} \\
 &\times \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+l-1}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{i+l-1} m_j} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{\sum_{j=1}^{i+l-1} m_j}}{\prod_{j=1}^{i+l-1} \Gamma(b-m_j)m_j!(a+m_j)}.
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 f_{i:n}(x) &= \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+l-1}=0}^{\infty} \frac{ck(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{[a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j] - 1}}{s^c B(a, b)^{i+l} B(i, n-i+1) \left\{ [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{-(b-1)}} \\
 &\times \frac{(-1)^{l + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j} \binom{n-i}{l} \Gamma(b)^{i+l-1}}{\prod_{j=1}^{i+l-1} \Gamma(b-m_j)m_j!(a+m_j)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{i:n}(x) = \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+l-1}=0}^{\infty} \delta_{i,l} f_{i,l}(x), \quad (45)$$

em que

$$f_{i,l}(x) = \frac{ck(x)^{c-1} [1 + (x/s)^c]^{(-k-1)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{(-k)}\}^{[a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j] - 1}}{s^c \left\{ [1 + (x/s)^c]^{-k} \right\}^{-(b-1)} B \left[a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j, b \right]}$$

representa a função densidade da distribuição BBXII $\left(a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j, b, s, k, c\right)$ e o coeficiente $\delta_{i,l}$ é dado por:

$$\delta_{i,l} = \frac{(-1)^{l + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j} \binom{n-i}{l} \Gamma(b)^{i+l-1} B \left[a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j, b \right]}{B(a, b)^{i+l} B(i, n-i+1) \prod_{j=1}^{i+l-1} \Gamma(b-m_j)m_j!(a+m_j)}.$$

A equação (45) é um resultado importante para as aplicações, uma vez que a função densidade da i -ésima estatística de ordem da distribuição BBXII pode ser escrita como uma combinação linear de densidades da distribuição BBXII. Várias propriedades matemáticas para a estatística de ordem da distribuição BBXII (fgm, momentos centrais e ordinários) podem ser derivadas desta combinação.

Assim, a partir da equação (45), o t -ésimo momento da estatística de ordem da distribuição BBXII para $b > 0$ real não-inteiro é dado por:

$$E(X_{i:n}^t) = \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{i+l-1}=0}^{\infty} \delta_{i,l} E(X_{i,l}^t), \quad (46)$$

em que $X_{i,l} \sim \text{BBXII}(a(i+l) + \sum_{j=1}^{i+l-1} m_j, b, s, k, c)$. Se $b > 0$ é um inteiro, os índices $m_1, \dots, m_{i+l-1}$ variam de zero até $b-1$. Claramente, $E(X_{i,l}^t)$ pode ser calculado, diretamente, a partir da equação (30) com os parâmetros desta distribuição BBXII.

Uma expressão alternativa para a equação (46) pode ser obtida usando-se um resultado de Barakat e Abdelkader (2004). Logo,

$$E(X_{i:n}^t) = t \sum_{p=n-i+1}^n (-1)^{p-n+i-1} \binom{p-1}{n-i} \binom{n}{p} \int_0^{\infty} x^{t-1} S(x)^p dx, \quad (47)$$

em que $S(x) = 1 - F(x)$ é a função sobrevivência da distribuição BBXII.

Utilizando a expansão binomial para $[1 - F(x)]^p$ na equação (47), obtém-se:

$$[1 - F(x)]^p = \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} F(x)^l.$$

Então, pode-se reescrever a integral da equação (47) como:

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} S(x)^p dx = \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} \int_0^{\infty} x^{t-1} F(x)^l dx. \quad (48)$$

Substituindo (23) para $F(x)$ na equação (48), tem-se:

$$\begin{aligned} F(x)^l &= \frac{\Gamma(b)^l}{B(a,b)^l} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{a+j} \right]^l, \\ &= \frac{\Gamma(b)^l}{B(a,b)^l} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{al} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^j \right]^l. \end{aligned}$$

Diante disso, a integral da equação (47) pode ser reescrita como:

$$\sum_{l=0}^p \frac{(-1)^l \binom{p}{l} [\Gamma(b)]^l}{[B(a,b)]^l} \int_0^{\infty} x^{t-1} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{al} \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^j \right]^l dx \quad (49)$$

em que

$$a_j = \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!(a+j)}.$$

Utilizando-se a identidade $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,n} x^k$ para n inteiro positivo (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2000) na equação (49), pode-se encontrar:

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^j\right]^l = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,l} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^j,$$

$$c_{0,l} = a_0^l \quad \text{e} \quad c_{j,l} = (ja_0)^{-1} \sum_{q=1}^j (lq - j + q) a_q c_{j-q,l}.$$

Então, obtém-se para a equação (49):

$$\sum_{l=0}^p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \binom{p}{l} \Gamma(b)^l c_{j,l}}{B(a,b)^l} \int_0^{\infty} x^{t-1} \{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{al+j} dx,$$

Utilizando a expansão em série para a expressão $\{1 - [1 + (x/s)^c]^{-k}\}^{al+j}$ na equação anterior, tem-se:

$$\sum_{l=0}^p \sum_{j,v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+v} \binom{p}{l} \Gamma(b)^l \Gamma(al+j+1) c_{j,l}}{B(a,b)^l \Gamma(al+j+1-v) v!} \int_0^{\infty} x^{t-1} [1 + (x/s)^c]^{-kv} dx$$

e considerando a mudança de variável $u = (x/s)^c$, obtém-se:

$$\sum_{l=0}^p \sum_{j,v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+v} \binom{p}{l} \Gamma(b)^l \Gamma(al+j+1) c_{j,l} s^t}{B(a,b)^l \Gamma(al+j+1-v) v! c} \left[\frac{\Gamma(kv - \frac{1}{c}) \Gamma(\frac{1}{c})}{\Gamma(kv)} \right].$$

Finalmente, a equação (47) reduz para:

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^t) &= t \sum_{p=n-i+1}^n (-1)^{p-n+i-1} \binom{p-1}{n-i} \binom{n}{p} \sum_{l=0}^p \sum_{j,v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+v} \binom{p}{l} [\Gamma(b)]^l \Gamma(al+j+1) c_{j,l} s^t}{[B(a,b)]^l \Gamma(al+j+1-v) v! c} \\ &\quad \times \left[\frac{\Gamma(kv - \frac{t}{c}) \Gamma(\frac{t}{c})}{\Gamma(kv)} \right]. \end{aligned}$$

Os L -momentos (HOSKING, 1990) são funções lineares do valor esperado das estatísticas de ordem, e representam a base de uma teoria geral que abrange o resumo e a descrição da teoria das probabilidades. Os L -momentos possuem a vantagem de existirem sempre que a média da distribuição existe, e são, relativamente, robustos para os efeitos de “outliers”. Eles são definidos por:

$$\lambda_{r+1} = (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} E(X_{r+1-k:r+1}), \quad r = 0, 1, \dots \quad (50)$$

Os quatro primeiros L -momentos são: $\lambda_1 = E(X_{1:1})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2})$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})$ e $\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4})$. Para as expansões dos momentos de estatística de ordem dadas anteriormente, podem-se obter expansões para os L -momentos da distribuição BBXII como uma combinação linear ponderada das esperanças da distribuição BBXII.

A equação (50) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{r+1} &= E\left[(r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} X_{r+1-k:r+1}\right], \\
 &= \int (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} x f_{r+1-k:r+1}(x) dx, \\
 &= \int (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} x \frac{(r+1)!}{(r-k)!k!} [F(x)]^{r-k} [1-F(x)]^k dF(x), \\
 &= \int x \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k}^2 [F(x)]^{r-k} [1-F(x)]^k dF(x). \tag{51}
 \end{aligned}$$

Observa-se que o polinômio de Legendre é definido como:

$$P_r[F(x)] = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k}^2 [F(x)]^{r-k} [1-F(x)]^k.$$

Segundo Hosking (1990), fazendo $P_r^*[F(x)] = P_r(2F(x) - 1)$, têm-se os denominados polinômios de Legendre modificados, que são expressos por:

$$P_r^*[F(x)] = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} [F(x)]^k. \tag{52}$$

Substituindo (52) na equação (51), obtém-se:

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} \tau_k,$$

em que $\tau_k = \int x [F(x)]^k dF(x)$ são os momentos com pesos probabilísticos (ou PWM - *Probabilistic Weighted Moments*).

Portanto, os quatro primeiros L -momentos podem ser expressos pelos três primeiros PWMs, ou seja,

$$\lambda_1 = \tau_0, \quad \lambda_2 = 2\tau_1 - \tau_0, \quad \lambda_3 = 6\tau_2 - 6\tau_1 + \tau_0 \quad \text{e} \quad \lambda_4 = 20\tau_3 - 30\tau_2 + 12\tau_1 - \tau_0.$$

Consequentemente, podem-se expressar os PWMs em termos dos L -momentos:

$$\tau_0 = \lambda_1, \quad \tau_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \tau_2 = \frac{1}{6}\lambda_3 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_1 \quad \text{e} \quad \tau_3 = \frac{1}{20}\lambda_4 + \frac{1}{4}\lambda_3 + \frac{9}{20}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_1.$$

3.3 Estudo de simulação

Para avaliar o desempenho do modelo BBXII, foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo em amostras finitas (n) dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros a , b , s , k e c . Foram geradas amostras com tamanhos $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ e $n = 300$ e os valores dos parâmetros foram fixados em $a = 2, 0$, $b = 1, 5$, $s = 0, 1$, $k = 0, 08$ e $c = 100$.

Para cada combinação de n , a , b , s , k e c , foram simuladas 2000 amostras. Para a geração de variáveis aleatórias da distribuição BBXII, considera-se V uma variável aleatória com distribuição beta com parâmetros a e b , ou seja, $V \sim B(a, b)$. Fazendo a aplicação $X = G^{-1}(V)$, observa-se que a solução da equação não-linear $\left(\frac{X}{s}\right)^c = [(1 - V)^{\frac{-1}{k}} - 1]$ tem distribuição BBXII, ou seja, $X \sim BBXII(a, b, s, k, c)$. Para isso, foi desenvolvido um programa no software estatístico R (*R Development Core Team*, 2011), apresentado no Apêndice B.

Na Tabela 1, apresentam-se a média e o erro quadrático médio (EQM) dos estimadores de máxima verossimilhança para cada amostra. Considerando-se os dados da Tabela 1, pode-se observar que o erro quadrático médio diminui à medida que aumenta o tamanho da amostra, na maioria dos casos, conforme o esperado. Note que as médias das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros se aproximam dos valores fixados à medida que n aumenta.

3.4 Estimação de máxima verossimilhança

Os parâmetros da distribuição BBXII são estimados por meio do método de máxima verossimilhança a partir de uma amostra. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n com distribuição $BBXII(a, b, s, k, c)$. O logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\theta = (a, b, s, k, c)^T$, com função densidade de probabilidade (20) é dado por:

$$\begin{aligned} l(\theta) = & r [\log(c) + \log(k) - c \log(s)] - r \log [B(a, b)] + (a - 1) \sum_{i \in F} \log(u_i) \\ & + (c - 1) \sum_{i \in F} \log(x_i) + \left(\frac{kb + 1}{k}\right) \sum_{i \in F} \log(1 - u_i) + \sum_{i \in C} \log(q_i), \end{aligned} \quad (53)$$

em que $u_i = 1 - \left[1 + \left(\frac{x_i}{s}\right)^c\right]^{-k}$, $q_i = 1 - I_{u_i}(a, b)$, r é o número total de falhas e F e C representam o número de observações que falharam ou foram censuradas, respectivamente.

Tabela 1 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo BBXII

n	Parâmetro	Média	EQM
50	a	2,3422	2,0941
	b	1,6808	0,4420
	s	0,1002	$4,0936 \times 10^{-6}$
	k	0,0823	0,0008
	c	100,1031	0,5757
100	a	2,1842	0,7313
	b	1,4445	0,1066
	s	0,1002	$1,7315 \times 10^{-6}$
	k	0,0885	0,0006
	c	100,0857	0,2065
200	a	2,0654	0,3053
	b	1,5	0,0644
	s	0,1002	$7,8577 \times 10^{-7}$
	k	0,0835	0,0003
	c	100,2549	2,1312
300	a	2,0044	0,1083
	b	1,4698	0,0296
	s	0,1003	$4,6531 \times 10^{-7}$
	k	0,0832	$8,412 \times 10^{-5}$
	c	100,0946	0,7937

Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$, definidos na sub-seção 2.5.1, são dados por:

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = -r[\psi(a) - \psi(a+b)] + \sum_{i \in F} \log(u_i) + \sum_{i \in C} \frac{\left\{ \psi(a) - \psi(a+b)B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right\}}{B(a,b)q_i},$$

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = -r[\psi(b) - \psi(a+b)] + \sum_{i \in F} \log(1-u_i) + \sum_{i \in C} \frac{\left\{ \psi(b) - \psi(a+b)B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right\}}{B(a,b)q_i},$$

$$\begin{aligned}
U_s(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-rc}{s} + (a-1) \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i^c}{s^{c+1}} \right) \left[\frac{-kc(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{u_i} + \frac{c(kb+1)}{(1-u_i)^{-1/k}} \right] \\
&\quad + \sum_{i \in C} \frac{c(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{kb+1}{k}} x_i^c}{q_i B(a,b) s^{c+1}}, \\
U_k(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r}{k} - \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1-u_i) \left[\frac{(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} - b \right] + \frac{1}{k} \sum_{i \in C} \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)^b \log(1-u_i)}{B(a,b) q_i},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
U_c(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r}{c} - r \log(s) + \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left[\frac{(a-1)k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{u_i} - \frac{(kb+1)}{(1-u_i)^{-1/k}} \right] \\
&\quad - k \sum_{i \in C} \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{kb+1}{k}}}{B(a,b) q_i} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right),
\end{aligned}$$

em que

$$[\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a = \sum_{j=0}^{\infty} w_j J(u_i, a+j-1, 1), \quad [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_j^* \frac{u_i^{a+j+n}}{a+j+n},$$

$$w_j = \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} \quad \text{e} \quad w_j^* = \frac{(-1)^{j+1} \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j! n}.$$

Além disso, $\psi(\cdot)$ é a função digama, as quantidades u_i e q_i foram definidas anteriormente e $J(a, p, k)$ é uma integral definida e determinada no Apêndice C.

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido numericamente a partir das equações não lineares, sujeito às restrições,

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_b(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_s(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_k(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \text{e} \quad U_c(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Devido à presença de censura, a realização de testes de hipóteses e construção de intervalos de confiança são baseados na teoria assintótica dos EMV. Assim, sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por $N_5(\hat{\boldsymbol{\theta}}, J(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $J(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada obtida de:

$$\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{ab} & \mathbf{L}_{as} & \mathbf{L}_{ac} & \mathbf{L}_{ak} \\ \cdot & \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{bs} & \mathbf{L}_{bc} & \mathbf{L}_{bk} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sc} & \mathbf{L}_{sk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{L}_{cc} & \mathbf{L}_{ck} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{L}_{kk} \end{pmatrix},$$

em que os elementos correspondentes são dados no Apêndice *D*.

O teste da razão de verossimilhança (*TRV*) é útil para comparar a distribuição BBXII com alguns de seus sub-modelos. Por exemplo, o teste $H_0 : a = b = 1$ *versus* $H_1 : H_0$ não é verdade, é equivalente a comparar a distribuição BXII com a distribuição BBXII para o qual a estatística w é dada por

$$w = 2\{l(\hat{a}, \hat{b}, \hat{s}, \hat{k}, \hat{c}) - l(1, 1, \tilde{s}, \tilde{k}, \tilde{c})\},$$

em que $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{s}$, $\hat{k}$ e $\hat{c}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e $\tilde{s}$, $\tilde{k}$ e $\tilde{c}$ são os estimadores sob H_0 .

3.5 Análise Bayesiana

Considere a função densidade de probabilidade (20) da distribuição BBXII e o logaritmo da função de verossimilhança (53) para os parâmetros a , b , s , k e c . Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori* dada por:

$$\pi(a, b, s, k, c) \propto \pi(a) \times \pi(b) \times \pi(s) \times \pi(k) \times \pi(c),$$

em que $a \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $b \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $s \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $k \sim \Gamma(a_4, b_4)$ e $c \sim \Gamma(a_5, b_5)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(v; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} v^{a_i-1} \exp(-vb_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $v > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros a , b , s , k e c , a distribuição conjunta *a posteriori* para a , b , s , k e c é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(a, b, s, k, c|x) \propto & \left[\frac{ck}{s^c B(a, b)} \right]^r \prod_{i \in F} x_i^{c-1} \left\{ 1 - [1 + (x_i/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1} [1 + (x_i/s)^c]^{-(kb+1)} \times \\ & \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(a, b, s, k, c). \end{aligned} \quad (54)$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros a , b , s , k e c não são facilmente obtidas; isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (54) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros a , b , s , k e c :

$$\begin{aligned}\pi(a|x, b, s, k, c) &\propto \frac{1}{[B(a, b)]^r} \prod_{i \in F} \left\{ 1 - [1 + (x_i/s)^c]^{-k} \right\}^a \times \\ &\quad \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x_i/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(a), \\ \pi(b|x, a, s, k, c) &\propto \frac{1}{[B(a, b)]^r} \prod_{i \in F} [1 + (x_i/s)^c]^{-kb} \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x_i/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(b), \\ \pi(s|x, a, b, k, c) &\propto \frac{1}{s^{cr}} \prod_{i \in F} \left\{ 1 - [1 + (x_i/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1} [1 + (x_i/s)^c]^{-(kb+1)} \times \\ &\quad \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x_i/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(s), \\ \pi(k|x, a, b, s, c) &\propto k^r \prod_{i \in F} \left\{ 1 - [1 + (x_i/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1} [1 + (x_i/s)^c]^{-kb} \times \\ &\quad \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x_i/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(k), \\ \text{e} \\ \pi(c|x, a, b, s, k) &\propto \frac{c^r}{s^{cr}} \prod_{i \in F} x_i^c \left\{ 1 - [1 + (x_i/s)^c]^{-k} \right\}^{a-1} [1 + (x_i/s)^c]^{-(kb+1)} \times \\ &\quad \prod_{i \in C} \left\{ 1 - I_{1-[1+(x_i/s)^c]^{-k}}(a, b) \right\} \times \pi(c).\end{aligned}$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo BBXII foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

3.6 Aplicação

Nesta seção é apresentada uma aplicação a um conjunto de dados reais nos quais se aplicam o modelo proposto comparando-o com alguns sub-modelos. Todos os resultados foram obtidos nos *software* R (*R Development Core Team*, 2011) e SAS versão 9.1 (SAS, 2004).

O conjunto de dados obtido por Ibrahim; Chen e Sinha (2001) a ser utilizado neste trabalho faz parte de um estudo sobre melanoma cutâneo, para avaliação

do desempenho de tratamento pós-cirúrgico, com alta dose de uma determinada droga (interferon alfa-2b) a fim de prevenir a reincidência. O período da coleta dos dados dos pacientes foi de 1991 até 1995 e o acompanhamento foi realizado até 1998 e a variável resposta foi o tempo até a morte do paciente. O tamanho original da amostra foi de $n = 427$ pacientes, dos quais 10 não apresentavam uma mudança no tamanho do tumor e foram retirados da análise, restando 417 pacientes, dos quais 56% são censurados.

Na Tabela 2, podem ser vistos as estimativas de máxima verossimilhança-EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos: BBXII, BXII, LL, BW, Weibull exponenciada (WE) e Weibull (W). Esses resultados indicam que o modelo BBXII tem o menor valor de AIC, CAIC e BIC entre os modelos ajustados, na maioria dos casos e, portanto, poderia ser escolhido como o melhor modelo. O programa feito no SAS é apresentado no Apêndice E.

Tabela 2 - EMVs dos parâmetros dos modelos BBXII, BXII, LL, BW, WE e W para dados de melanoma, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores dos AIC, CAIC e BIC

Modelo	c	k	s	a	b	AIC	CAIC	BIC
BBXII	14,3884 (0,5014)	0,4159 (0,1124)	1,7729 (0,1122)	0,1177 (0,0112)	0,0489 (0,0094)	1054,9	1055,0	1075,0
BXII	2,5664 (0,3509)	0,1466 (0,0325)	0,8734 (0,1237)	1 (-)	1 (-)	1058,3	1058,4	1070,4
LL	c 1,2669 (0,0807)	m 0,2109 (0,0172)				1086,3	1086,5	1094,4
BW	α 143624 (0,0001)	γ 0,05463 (0,0004)	a 195,73 (0,4306)	b 254,6 (0,4291)		1079,2	1079,3	1095,3
WE	0,00003 (0,00007)	0,1429 (0,0284)	163,24 (0,0001)	1 (-)		1069,0	1069,1	1081,1
Weibull	6,9437 (0,5611)	1,0509 (0,0691)	1 (-)	1 (-)		1102,1	1102,1	1110,2

Para ilustrar a utilização da distribuição BBXII para discriminação de modelos, comparou-se a distribuição BBXII com alguns de seus sub-modelos por meio do TRV , como é apresentado na Tabela 3. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo BBXII produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com as outras cinco distribuições.

Tabela 3- TRV para os dados de melanoma

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
BBXII vs BXII	$H_0 : a = b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	7,4	0,0247
BBXII vs LL	$H_0 : a = b = k = 1, s = m^{-1}$ vs $H_1 : H_0$ é falso	37,4	< 0,0001
BBXII vs BW	$H_0 : k \rightarrow \infty$ vs $H_1 : H_0$ é falso	26,3	< 0,0001
BBXII vs WE	$H_0 : b = 1, k \rightarrow \infty$ vs $H_1 : H_0$ é falso	18,1	0,0001
BBXII vs Weibull	$H_0 : a = b = 1, k \rightarrow \infty$ vs $H_1 : H_0$ é falso	68,9	< 0,0001

A curva TTT, definida na sub-seção 2.1.1, para o conjunto de dados de melanoma, encontra-se na Figura 8 (a) e indica uma função risco na forma unimodal. Para ilustrar a forma unimodal na Figura 8 (b), foi plotado o gráfico da função risco com as EMVs para os parâmetros.

Figura 8- (a) Curva TTT para os dados de melanoma. (b) Gráfico da função risco estimada para os dados de melanoma

O gráfico da Figura 9 ilustra a função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimadas das distribuições BXII, BBXII, LL, W, BW e WE. Nota-se que a distribuição BBXII proporciona um ajuste satisfatório.

Figura 9 - Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições BXII, BBXII, LL, W, BW e WE com sobrevivência empírica para dados de melanoma

Considerando agora uma análise Bayesiana (Apêndice F), foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $a \sim \Gamma(0,01;0,01)$, $b \sim \Gamma(0,01;0,01)$, $s \sim \Gamma(0,01;0,01)$, $k \sim \Gamma(0,01;0,01)$ e $c \sim \Gamma(0,01;0,01)$.

Desta forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 35.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 5.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 3.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução de escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 4 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo BBXII, além de mostrar os valores do fator de redução de escala.

Nota-se que, em todos os casos, os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indi-

Tabela 4 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo BBXII para os dados de melanoma

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
a	0,11776	0,01002	(0,0983; 0,1375)	1,004
b	0,04862	0,01015	(0,0288; 0,0684)	1,009
s	1,77281	0,00997	(1,7535; 1,7922)	1,001
k	0,41591	0,01011	(0,3966; 0,4358)	1,005
c	14,38859	0,00998	(14,3683; 14,4073)	1,002

cando a convergência das cadeias. Pode-se observar que o valores para a média *a posteriori* (Tabela 4) são similares aos valores obtidos para o modelo BBXII apresentados na Tabela 2. Além disso, a Figura 10 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 3.000 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 10 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

Figura 10 - Estimativa por histograma das densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo BBXII para os dados de melanoma

4 DISTRIBUIÇÃO LOG-BETA BURR XII

Em algumas situações práticas, a variável resposta é associada a covariáveis. Por exemplo, na indústria, o tempo até a falha de um determinado equipamento pode ser influenciado pelo nível de voltagem ao qual o equipamento é submetido, e na área médica o tempo de sobrevivência de um paciente pode estar relacionado com o tipo de tumor ou quantidade de hemoglobina no sangue. Por essa razão, um modelo de locação e escala obtido a partir da distribuição BBXII foi proposto para estudar o efeito das covariáveis sobre a variável resposta.

O restante do capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 4.1 a distribuição log-beta Burr XII é introduzida e alguns sub-modelos são apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 4.2. Na seção 4.3, o modelo de regressão log-beta Burr XII é descrito. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 4.4 e 4.5, respectivamente. Por fim, a análise de um conjunto de dados reais é dada na seção 4.6.

4.1 Distribuição log-beta Burr XII

Seja T uma variável aleatória com distribuição BBXII, com função densidade representada pela equação (20). Considere a transformação $Y = \log(T)$ e as reparametrizações $c = 1/\sigma$ e $s = \exp(\mu)$. Nesse caso, por meio do método do jacobiano, a função densidade de probabilidade de Y pode ser escrita como:

$$f(y) = \frac{k}{\sigma B(a, b)} \left[\exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right] \left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right]^{-k} \right\}^{a-1} \left\{ 1 + \exp\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \right\}^{-(kb+1)}, \quad (55)$$

em que $a, b, \sigma, k > 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$.

Para $a = b = 1$, a função em 55 é simplificada para a fdp (15) da distribuição LBXII. A distribuição beta logística (BL) é uma caso particular para $k = 1$. Para $b = 1$, tem-se a distribuição log-Burr XII exponenciada (LBXIIIE). Além disso, se $a = b = 1$ e $k = 1$, reduz-se à distribuição logística. A variável transformada com função densidade de probabilidade (55) é denominada log-beta Burr XII (LBBXII) e segue a notação, $Y \sim \text{LBBXII}(a, b, k, \sigma, \mu)$, em que μ é o parâmetro de locação, σ é o parâmetro de escala

e a, b e k são parâmetros de forma. Assim,

$$\text{se } T \sim BBXII(a, b, s, k, c) \text{ então } Y = \log(T) \sim LBBXII(a, b, k, \sigma, \mu).$$

A Figura 11 apresenta algumas formas da função densidade da LBBXII para $\sigma = \mu = 0$, variando os parâmetros a e k para $b = 1$ e variando os parâmetros b e k para $a = 1$.

Figura 11 - Gráficos da fdp da LBBXII: (a) Para alguns valores de a e k com $\sigma = \mu = 0$ e $b = 1$. (b) Para alguns valores de b e k com $\sigma = \mu = 0$ e $a = 1$

A função de distribuição acumulada da LBBXII é representada por:

$$F(y) = I_{\left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}}(a, b) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{\left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1} d\omega, \quad x > 0, \quad (56)$$

em que $G(y) = \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}$ é a função distribuição da log-Burr XII.

4.2 Propriedades gerais

A seguir, são enunciadas formas alternativas para a fda, fdp e a função de sobrevivência da distribuição LBBXII. Utilizando a expansão dada pela equação (22) para $b > 0$ um número real não-inteiro e $|z| < 1$, pode-se reescrever a equação (56) da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} \int_0^{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k}} \omega^{a+j-1} d\omega, \\
 &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k} \right\}^{a+j}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Derivando a expressão representada pela equação (57), encontra-se uma forma alternativa para a expressão da função densidade de probabilidade da LBBXII, logo:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j!} \left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k} \right\}^{a+j-1} \times \\
 &\quad \frac{k}{\sigma} \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k-1} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right). \quad (58)
 \end{aligned}$$

Usando a representação (22) para a equação (58), pode-se reescrever $f(y)$ como:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \sum_{j,r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+r} \Gamma(b) \Gamma(a+j)}{B(a, b) \Gamma(b-j) \Gamma(a+j-r) j! (r+1)!} \frac{k(r+1)}{\sigma} \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k(r+1)-1} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r g(y; k(r+1), \sigma, \mu), \quad (59)
 \end{aligned}$$

em que $g(y; k(r+1), \sigma, \mu)$ representa a função densidade da distribuição log-BXII com os parâmetros $k(r+1)$, σ e μ , e o coeficiente w_r foi definido em (26).

De acordo com a equação (59), pode-se observar que a função densidade da distribuição LBBXII pode ser escrita como uma combinação linear da função densidade da distribuição log-Burr XII.

Utilizando a função de sobrevivência da log-Burr XII dada pela equação (16) e a partir da equação (57), tem-se:

$$\begin{aligned}
 F(y) &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j) j! (a+j)} \left\{ 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-k} \right\}^{a+j}, \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{B(a, b) \Gamma(b-j) j! (a+j)} [1 - S^*(y)]^{a+j}. \quad (60)
 \end{aligned}$$

Usando a expressão (22) na equação (60) para $a > 0$ real não-inteiro, pode-se reescrever a equação (60) como:

$$F(y) = \sum_{j,q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+q} \Gamma(b) \Gamma(a+j+1)}{B(a, b) \Gamma(b-j) (a+j) \Gamma(a+j+1-q) j! q!} [S^*(y)]^q.$$

Finalmente, pode-se escrever a função de sobrevivência da log-beta Burr XII em termos da função de sobrevivência da log-Burr XII, desta forma tem-se:

$$S(y) = 1 - \sum_{q=0}^{\infty} w_q(a, b) [S^*(y)]^q.$$

em que

$$w_q(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+q} \Gamma(b) \Gamma(a+j+1)}{B(a, b) \Gamma(b-j)(a+j) \Gamma(a+j+1-q) j! q!}. \quad (61)$$

4.2.1 Momentos

Seja $Y \sim LBBXII(a, b, k, \sigma, \mu)$, então o n -ésimo momento da distribuição LBBXII é $\mu'_n = \int_{-\infty}^{\infty} y^n f(y) dy$. Substituindo a equação (59) para $f(y)$, obtém-se:

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \int_{-\infty}^{\infty} y^n \frac{k}{\sigma} \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \right]^{-k-1} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) dy, \quad (62)$$

em que w_r foi definido na equação (26).

Em seguida, fazendo-se a mudança de variável $u = \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$ na expressão (62), encontra-se:

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \int_0^{\infty} k [\sigma \log(u) + \mu]^n (1+u)^{-k(r+1)-1} du. \quad (63)$$

Usando a expansão binomial para $[\sigma \log(u) + \mu]^n$ na equação (63), tem-se:

$$\mu'_n = k \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n w_r \binom{n}{l} \mu^{n-l} \sigma^n \int_0^{\infty} [\log(u)]^l (1+u)^{-k(r+1)-1} du, \quad (64)$$

De acordo com Prudnikov; Brychkov e Marichev (1986), pode-se reescrever a integral da equação (64) como:

$$\int_0^{\infty} [\log(u)]^l (1+u)^{-k(r+1)-1} du = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^l \left[B[\alpha, k(r+1) + 1 - \alpha] \right] \Big|_{\alpha=1}.$$

Finalmente, a equação (62) reduz-se para:

$$\mu'_n = k \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n w_r \binom{n}{l} \mu^{n-l} \sigma^n \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^l \left[B[\alpha, k(r+1) + 1 - \alpha] \right] \Big|_{\alpha=1}.$$

Os coeficientes de assimetria e curtose podem ser calculados utilizando-se as expressões (31) e (32). As representações gráficas dessas medidas, quando $k = 0.5$, $\sigma = 10$ e $\mu = 3$, como função do parâmetro a para alguns valores escolhidos do parâmetro b e como função do parâmetro b para alguns valores escolhidos do parâmetro a , são dadas nas Figuras 12 e 13, respectivamente.

Figura 12 - Assimetria de Y em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

Figura 13 - Curtose de Y em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

4.2.2 Função geradora de momentos

Usando-se a função densidade $f(x)$ expressa pela equação (59), obtém-se a função geradora de momentos (fgm) da distribuição LBBXII, ou seja,

$$\begin{aligned}
M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ty) f(y) dy, \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ty) \frac{k}{\sigma} \left[1 + \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \right]^{-k-1} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) dy,
\end{aligned}$$

e substituindo $u = \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r k \int_0^{\infty} [u^{\sigma} \exp(\mu)]^t (1+u)^{-k(r+1)-1} du, \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r k [\exp(\mu)]^t B[k(r+1-t\sigma), t\sigma+1], \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} w_r M_{r+1}(t),
\end{aligned} \tag{65}$$

em que w_r foi definido em (26) e $M_{r+1}(t)$ é a fgm da distribuição log-BurrXII $(k(r+1), \sigma, \mu)$, representada pela equação (17).

4.3 Modelo de regressão log-beta Burr XII

Em muitas situações práticas, o tempo de sobrevivência é afetado por variáveis explanatórias, como nível de colesterol, pressão arterial, peso, entre outras. Os modelos de regressão são amplamente utilizados para estimar a função de sobrevivência para dados censurados. O modelo de regressão que fornece um bom ajuste para os dados de tempo de sobrevivência tende a produzir estimativas mais precisas para as quantidades de interesse. O modelo de locação e escala considerando Y dado x , tem distribuição LBBXII com função densidade de probabilidade dada pela expressão (55), e pode ser representado por:

$$Y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma Z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ é um vetor de parâmetros desconhecidos associado a cada covariável, $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ é o vetor de covariáveis e Z_i é o erro aleatório.

A distribuição da variável aleatória Z pode ser obtida utilizando a transformação de variáveis, que nesse caso é dada por:

$$f(z) = \frac{\exp(z)k}{B(a, b)} \{1 - [1 + \exp(z)]^{-k}\}^{a-1} [1 + \exp(z)]^{-(kb+1)}, \quad -\infty < z < \infty, \tag{66}$$

em que $z = \frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma}$.

O modelo LBBXII contém como casos particulares alguns modelos bem conhecidos de regressão, descritos a seguir:

- **Modelo de regressão log-Burr XII exponenciada-LBXIIE (novo)**

Para $b = 1$, a função de sobrevivência é:

$$S(y|\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{a} \left\{ 1 - \left[1 + \exp \left(\frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right] \right\}^a.$$

- **Modelo de regressão beta logística-BL (novo)**

Para $k = 1$, a função de sobrevivência é dada por:

$$S(y|\mathbf{x}) = 1 - I_{1 - \left[1 + \exp \left(\frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1}}(a, b).$$

- **Distribuição log-Burr XII-LBXII**

Para $a = b = 1$, a função de sobrevivência é dada por:

$$S(y|\mathbf{x}) = \left[1 + \exp \left(\frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-k},$$

com o modelo de regressão LBXII, (SILVA et al., 2008).

- **Distribuição logística**

Para $a = b = k = 1$, a função de sobrevivência é dada por:

$$S(y|\mathbf{x}) = \left[1 + \exp \left(\frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1},$$

com o modelo de regressão logístico, (LAWLESS, 2003).

4.4 Estimação de máxima verossimilhança

Sejam $(y_1, \delta_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \delta_1, \mathbf{x}_n)$, n observações independentes em que $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$, δ_i é o indicador de censura e $\mathbf{x}_i$ é o vetor de covariáveis associado ao i -ésimo indivíduo. O logaritmo da função de verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (a, b, k, \sigma, \boldsymbol{\beta}^T)^T$, considerando censura não informativa, é dado por:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\theta}) = & r \log \left[\frac{k}{\sigma B(a, b)} \right] + \sum_{i \in F} z_i + (a - 1) \sum_{i \in F} \log(v_i) + \left(\frac{kb + 1}{k} \right) \sum_{i \in F} \log(1 - v_i) \\ & + \sum_{i \in C} \log(p_i), \end{aligned} \tag{67}$$

em que $G(y_i|\mathbf{x}_i) = v_i = 1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right]^{-k}$, $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})/\sigma$, $p_i = 1 - I_{v_i}(a, b)$ e r é o número de observações não censuradas (falhas). Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$, definidos na sub-seção 2.5.1, são dados por:

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = -r[\psi(a) - \psi(a+b)] + \sum_{i \in F} \log(v_i) + \sum_{i \in C} \frac{\left\{ \psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right\}}{B(a, b)p_i},$$

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = -r[\psi(b) - \psi(a+b)] + \sum_{i \in F} \log(1-v_i) + \sum_{i \in C} \frac{\left\{ \psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right\}}{B(a, b)p_i},$$

$$U_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{k} - \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1-v_i) \left[\frac{(a-1)(1-v_i)}{(v_i)} - b \right] + \frac{1}{k} \sum_{i \in C} \frac{(v_i)^{a-1}(1-v_i)^b \log(1-v_i)}{B(a, b)p_i},$$

$$\begin{aligned} U_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in F} z_i + \sum_{i \in F} \frac{z_i \exp(z_i)}{\sigma} \left[\frac{(kb+1)}{(1-v_i)^{\frac{-1}{k}}} - \frac{k(a-1)(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}}}{v_i} \right] \\ &\quad + \frac{k}{\sigma B(a, b)} \sum_{i \in C} \frac{1}{p_i} \left[(v_i)^{a-1}(1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} z_i \exp(z_i) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \frac{-x_{ij}}{\sigma} - \frac{k(a+1)}{\sigma} \sum_{i \in F} \left[\frac{(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i) x_{ij}}{v_i} \right] + \left(\frac{kb+1}{\sigma} \right) \sum_{i \in F} \left[\frac{\exp(z_i) x_{ij}}{(1-v_i)^{\frac{-1}{k}}} \right] \\ &\quad + \frac{k}{\sigma B(a, b)} \sum_{i \in C} \frac{1}{p_i} \left[(v_i)^{a-1}(1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) x_{ij} \right], \end{aligned}$$

em que

$$[\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a = \sum_{j=0}^{\infty} w_j J(v_i, a+j-1, 1), \quad [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_j^* \frac{v_i^{a+j+n}}{a+j+n}.$$

Além disso, $\psi(\cdot)$ é a função digama, as quantidades v_i e p_i foram definidas anteriormente, as expressões para w_j e w_j^* foram definidas na seção 3.4 e $J(a, p, k)$ é uma integral definida e determinada no Apêndice C.

Os estimadores de máxima verossimilhança são as soluções das equações não-lineares $\frac{\partial l}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial k} = 0$, $\frac{\partial l}{\partial \sigma} = 0$ e $\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = 0$. Observa-se que para obter os EMVs é necessário a utilização de métodos iterativos.

As propriedades assintóticas dos estimadores de verossimilhança apresentadas na sub-seção 2.5.1 são necessárias para construir intervalos de confiança e testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo. Logo, a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$

é normal multivariada $N_{p+4}(0, I(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $I(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação. A matriz de covariância assintótica $I(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser aproximada pela inversa da matriz de informação observada $-L^*(\boldsymbol{\theta})$ com dimensão $(p+4) \times (p+4)$. Os elementos da matriz de informação observada, ou seja, $-\mathbf{L}_{aa}$, $-\mathbf{L}_{ab}$, $-\mathbf{L}_{ak}$, $-\mathbf{L}_{a\sigma}$, $-\mathbf{L}_{a\beta_j}$, $-\mathbf{L}_{bb}$, $-\mathbf{L}_{bk}$, $-\mathbf{L}_{b\sigma}$, $-\mathbf{L}_{b\beta_j}$, $-\mathbf{L}_{kk}$, $-\mathbf{L}_{k\sigma}$, $-\mathbf{L}_{k\beta_j}$, $-\mathbf{L}_{\sigma\sigma}$, $-\mathbf{L}_{\sigma\beta_j}$ e $-\mathbf{L}_{\beta_j\beta_k}$ para $j, k = 1, \dots, p$, são dados no Apêndice G.

O teste da razão de verossimilhança (*TRV*) é útil para comparar a distribuição LBBXII com alguns de seus sub-modelos. Considera-se a partição $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T)^T$, em que $\boldsymbol{\theta}_1$ é um subconjunto de parâmetros de interesse e $\boldsymbol{\theta}_2$ é um subconjunto de parâmetros restantes. A estatística w para testar a hipótese nula $H_0 : \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ versus a hipótese alternativa $H_1 : \boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ é dada por $w = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\}$, em que $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ são as estimativas sob as hipóteses nula e alternativa, respectivamente. A estatística w é assintoticamente distribuída (para $n \rightarrow \infty$) como χ_k^2 , em que k é a dimensão do subconjunto de parâmetros $\boldsymbol{\theta}_1$ de interesse.

4.5 Análise bayesiana

Considere a distribuição LBBXII (66) e o logaritmo da função de verossimilhança (67) para os parâmetros a , b , k , σ e $\boldsymbol{\beta}$. Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori*, dada por:

$$\pi(a, b, k, \sigma, \boldsymbol{\beta}) \propto \pi(a) \times \pi(b) \times \pi(k) \times \pi(\sigma) \times \pi(\boldsymbol{\beta}),$$

em que $a \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $b \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $k \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $\sigma \sim \Gamma(a_4, b_4)$ e $\boldsymbol{\beta}_s \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(v; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} v^{a_i-1} \exp(-vb_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $v > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$, $N(\mu_s, \sigma_s^2)$ denota a distribuição normal com média μ_s , variância σ_s^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x; \mu_s, \sigma_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \exp \left[-\frac{(x - \mu_s)^2}{2\sigma_s^2} \right],$$

em que $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros a , b , k , σ e $\boldsymbol{\beta}$, a distribuição conjunta *a posteriori*

para a, b, k, σ e β é dada por:

$$\begin{aligned}\pi(a, b, k, \sigma, \beta|y) &\propto \left(\frac{k}{\sigma B(a, b)}\right)^r \exp \sum_{i \in F} \left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right) \\ &\times \prod_{i \in F} \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}^{a-1} \left\{1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right\}^{-(kb+1)} \\ &\times \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \times \pi(a, b, k, \sigma, \beta).\end{aligned}\quad (68)$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros a, b, k, σ e β não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (68) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros a, b, k, σ e β :

$$\begin{aligned}\pi(a|y, b, k, \sigma, \beta) &\propto \left(\frac{1}{B(a, b)}\right)^r \prod_{i \in F} \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}^a \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \\ &\times \pi(a), \\ \pi(b|y, a, k, \sigma, \beta) &\propto \left(\frac{1}{B(a, b)}\right)^r \prod_{i \in F} \left\{1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right\}^{-kb} \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \times \pi(b), \\ \pi(k|y, a, b, \sigma, \beta) &\propto k^r \prod_{i \in F} \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}^{a-1} \left\{1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right\}^{-kb} \\ &\times \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \times \pi(k), \\ \pi(\sigma|y, a, b, k, \beta) &\propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^r \exp \sum_{i \in F} \left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right) \\ &\times \prod_{i \in F} \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}^{a-1} \left\{1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right\}^{-(kb+1)} \\ &\times \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \times \pi(\sigma),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi(\beta|y, a, b, k, \sigma) &\propto \exp \sum_{i \in F} \left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right) \prod_{i \in F} \left\{1 - \left[1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right]^{-k}\right\}^{a-1} \\ &\times \prod_{i \in F} \left\{1 + \exp\left(\frac{y_i - x_i^T \beta}{\sigma}\right)\right\}^{-(kb+1)} \prod_{i \in C} 1 - I_{v_i}(a, b) \times \pi(\beta).\end{aligned}$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo LBBXII foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

4.6 Aplicação

Impulsionado pelo desenvolvimento tecnológico, o crescimento econômico do Japão tornou-se atraente para os imigrantes. A emigração nipo-brasileira, iniciada em 1985, intensificou-se após junho de 1990 e atualmente a comunidade brasileira no Japão é a terceira maior comunidade de estrangeiros, com 312.979 pessoas, antecedida apenas pelos coreanos, e pelos chineses (KAWAMURA, 1999).

Nos últimos anos a crise econômica mundial afetou severamente o Japão e repercutiu na inserção dos imigrantes no mercado de trabalho, levando a uma necessidade de reorientação profissional como condição para permanência no Japão, diferindo do trabalho inicial que dispensava maiores qualificações. De modo particular, o ingresso nos postos de trabalho em escolas brasileiras ou japonesas implica a qualificação ou requalificação profissional de muitos desses imigrantes.

A partir de uma solicitação do governo japonês ao governo brasileiro em 2008, a Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT), por meio do programa Universidade Aberta do Brasil (UAB) em convênio com a Universidade Tokai, sediada na cidade de Hiratsu, no Japão, oferece um curso de Licenciatura em Pedagogia - Modalidade a Distância. O curso que tem a duração de 4 anos, iniciou-se em 2009, e previa qualificar 300 professores brasileiros que atuam no Japão, em escolas brasileiras e japonesas.

Assim, este estudo busca identificar os fatores que influenciam no tempo de permanência no Japão dos alunos do curso de pedagogia oferecido pela UFMT/Tokai, pois sabe-se que o tempo de permanência pode ser afetado por variáveis regressoras ou covariáveis, sendo essas de suma importância para o modelo utilizado nesta análise.

Os dados foram obtidos por meio de uma pesquisa eletrônica (e-survey) Babbie (1999), que buscou obter de características, ações ou opiniões do grupo de alunos utilizando a internet como ferramenta. A pesquisa foi realizada no primeiro semestre de 2010, por meio de um *site* reservado, apenas para acesso dos acadêmicos, em que foram obtidos 246 questionários. Desses apenas 150 foram utilizados para análise, pois haviam alunos de outras nacionalidades. Foi considerado como variável de estudo o tempo (em anos) de permanência no Japão, sendo esse contado a partir da chegada pela primeira vez

até o presente momento, foram censurados alunos que tenham retornado para o Brasil ao menos uma vez. As variáveis envolvidas no estudo são:

- i) t_i : tempo de permanência no Japão;
- ii) $cens_i$: o indicador de censura (0 = censura, 1 = falha);
- iii) x_{i1} : sexo (0 = feminino, 1 = masculino);
- iv) x_{i2} : idade (idade do indivíduo com o primeiro emprego no Japão).

Ajustou-se o modelo de regressão LBBXII dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \sigma z_i,$$

em que os erros $z_1, \dots, z_{150}$ são variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade (66).

Na Tabela 5, podem ser vistas as EMVs para os parâmetros do modelo de regressão LBBXII, ajustado aos dados de tempo de permanência no Japão usando o *software* R. Esse modelo envolve um parâmetro extra (b) que lhe dá mais flexibilidade para se ajustar a esses dados. As variáveis explicativas x_1 e x_2 são marginalmente significativas para o modelo de regressão LBBXII ao nível de significância de 5%.

Tabela 5 - Estimativas dos parâmetros, erros-padrão, valor p e intervalos de confiança de 95% para o modelo LBBXII, ajustado aos dados de tempo de permanência no Japão

Parâmetro	Estimativa	Erro-padrão	Valor p	IC 95%
a	14,1401	1,8198	-	(11,1281; 17,1520)
b	0,0846	0,0007	-	(0,0833; 0,0858)
k	0,1674	0,0206	-	(0,1332; 0,2015)
σ	0,1115	0,0058	-	(0,1018; 0,1212)
β_0	3,0599	0,0008	<0,001	(3,0583; 3,0613)
β_1	-0,0945	0,0236	<0,001	(-0,1337; -0,0553)
β_2	-0,0016	0,0005	<0,001	(-0,0024; -0,0006)

De acordo com o modelo final, a interpretação é que o tempo de permanência no Japão dos alunos do curso de pedagogia oferecido pela UFMT/Tokai do sexo masculino fica reduzido em 90,9% ($[\exp\{-0,0945\}] \times 100\%$), se comparado com alunos do sexo feminino. Em relação a idade, a cada uma unidade que se aumenta, o tempo de permanência se reduz em 99,8% ($[\exp\{-0,0016\}] \times 100\%$).

Um resumo das estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LBBXII, LBXIIE, LBXII e logístico é dado na Tabela 6. Esses resultados indicam que o modelo de regressão LBBXII tem o menor AIC, CAIC e BIC, dentre os modelos ajustados, e, portanto, poderia ser escolhido como o melhor modelo.

Tabela 6 - Estatísticas AIC, CAIC e BIC para comparar os modelos de regressão LBBXII, LBXIIE, LBXII e logístico

Modelo	AIC	CAIC	BIC
LBBXII	219,0	220,3	240,1
LBXIIE	235,4	236,4	253,5
LBXII	271,3	272,1	286,3
logístico	313,9	314,5	325,9

A comparação entre o modelo proposto com alguns dos seus sub-modelos por meio do *TRV* é feita na Tabela 7. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo LBBXII produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com os outros modelos.

Tabela 7 - *TRV* para os dados de tempo de permanência no Japão

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
LBBXII vs LBXIIE	$H_0 : b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	18,4	< 0,0001
LBBXII vs LBXII	$H_0 : a = b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	56,2	< 0,0001
LBBXII vs logístico	$H_0 : a = b = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falso	100,8	< 0,0001

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas: $a \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $b \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $k \sim \Gamma(0,01; 0,01)$, $\sigma \sim \Gamma(0,01; 0,01)$ e $\beta_s \sim N(0; 100)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 100.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 10.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 9.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução de escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A

Tabela 8 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo LBBXII, além de mostrar os valores do fator de redução de escala.

Tabela 8 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo LBBXII para os dados de tempo de permanência no Japão

Parametro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
a	14,1239	0,0117	(14,1059; 14,1509)	1,0010
b	0,0842	0,0009	(0,0822; 0,0861)	1,0040
k	0,1689	0,0011	(0,1663; 0,1707)	1,0002
σ	0,1127	0,0213	(0,0728; 0,1367)	0,9999
β_0	3,0597	0,1001	(2,8664; 3,2573)	1,0001
β_1	-0,0945	0,0099	(-0,1140; -0,0750)	0,9999
β_2	-0,0018	0,0003	(-0,0024; -0,0012)	1,0002

Figura 14 - Densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo LBBXII para os dados de tempo de permanência no Japão

Nota-se que os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que os valores para a média *a posteriori* (Tabela 8) são similares aos valores obtidos para o modelo LBBXII apresentados na Tabela 5. Além disso, a Figura 14 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 9.000 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 14 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

5 DISTRIBUIÇÃO KUMARASWAMY BURR XII

A distribuição Burr XII, considerada em Zimmer; Keats e Wang (1998) é um modelo utilizado para a modelagem de dados de sobrevivência, engenharia de confiabilidade, análise de falhas, hidrologia, entre outras áreas. A distribuição BXII acomoda diferentes tipos de risco, ou seja, forma crescente, decrescente e unimodal.

Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, conseqüentemente, ganhado na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de sub-modelos nas distribuições generalizadas. Nesse contexto, seguindo a ideia de Cordeiro e Castro (2011), que recentemente apresentaram a classe de distribuições Kumaraswamy, o objetivo deste capítulo foi propor uma nova distribuição, denominada distribuição Kumaraswamy Burr XII, que é uma junção da distribuição Kumaraswamy com a distribuição Burr XII.

Essa nova distribuição, devido à sua flexibilidade para acomodar muitas formas para a função risco, é uma importante distribuição de probabilidade, pois pode ser utilizada em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. Além disso, a nova distribuição é também adequada para testar a qualidade do ajuste de seus sub-modelos especiais. O restante do capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 5.1, a distribuição Kumaraswamy Burr XII foi descrita e alguns importantes sub-modelos apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 5.2. Estudo de simulação na seção 5.3. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 5.4 e 5.5, respectivamente. Por fim, a análise de três conjuntos de dados reais é dada na seção 5.6.

5.1 Distribuição Kumaraswamy Burr XII

A nova distribuição, denominada distribuição Kumaraswamy Burr XII (KwBXII), é uma composição baseada na classe de distribuições Kumaraswamy proposta por Cordeiro e Castro (2011), apresentada na sub-seção 2.3.2 e na distribuição Burr XII. Substituindo $G(x)$ na equação (12) pela fda da Burr XII, dada na equação (2), obtém-se, então, a distribuição KwBXII com cinco parâmetros a , b , s , k e c , cujas funções de densidade de probabilidade e distribuição acumulada são definidas pelas equações (69) e (70),

respectivamente.

$$f(x) = a b c k s^{-c} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^{a-1} \times \left[1 - \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^a \right]^{b-1}, \quad x > 0, \quad (69)$$

e

$$F(x) = 1 - \left[1 - \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^a \right]^b. \quad (70)$$

As Figuras 15 e 16, ilustram o gráfico da função densidade de probabilidade da distribuição KwBXII para diferentes valores dos parâmetros.

Figura 15 - Gráficos da função densidade da KwBXII para alguns valores dos parâmetros: (a) $s = 1, 6$; $k = 4, 0$ e $c = 5, 1$; (b) $b = 0, 1$; $s = 1, 6$ e $k = 0, 3$; (c) $b = 0, 1$; $k = 3, 0$ e $c = 1$

A função risco da distribuição KwBXII é dada por:

$$h(x) = a b c k s^{-c} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^{a-1} \times \left[1 - \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^a \right]^{-1}. \quad (71)$$

A característica da distribuição KwBXII é que sua função risco acomoda as formas crescente, unimodal, decrescente e forma de U, como pode-se observar na Figura 17, para alguns valores selecionados dos parâmetros.

Figura 16 - Gráficos da função densidade da KwBXII para alguns valores dos parâmetros: (a) $a = 1, 5$; $s = 1, 6$ e $c = 5, 1$; (b) $a = 1, 5$; $k = 4, 0$ e $c = 5, 1$; (c) $a = 2, 5$ e $k = 4, 0$

A distribuição KwBXII possui várias distribuições conhecidas como casos particulares. Claramente, a distribuição Burr XII quando $a = b = 1$. Para $b = 1$, obtém-se a distribuição Burr XII exponenciada (BXIIE). Para $s = m^{-1}$ e $k = 1$, a distribuição KwBXII reduz-se à distribuição Kumaraswamy log-logística (KwLL) (SANTANA, 2010). Para $a = b = 1$, $s = m^{-1}$ e $k = 1$ a distribuição KwBXII é reduzida à distribuição log-logística (LL) com função de sobrevivência dada por $S(t; m, c) = [1 + (tm)^c]^{-1}$. Para $a = c = 1$ e $a = b = c = 1$ a distribuição KwBXII torna-se as distribuições Kumaraswamy Pareto tipo II (KwPII) e Pareto tipo II (PII), respectivamente. A distribuição Kumaraswamy Weibull (KwW) é um caso especial quando $k \rightarrow \infty$. Se $a = b = 1$ além de $k \rightarrow \infty$, a distribuição Weibull (W) é obtida.

5.2 Propriedades gerais

Da mesma forma que no Capítulo 3, algumas propriedades da distribuição KwBXII podem ser encontradas se a função densidade de probabilidade (69) for escrita como uma combinação linear da distribuição BXII. Logo, utilizando a expansão dada em

Figura 17- Gráficos da função risco (71) para alguns valores dos parâmetros. (a) Crescente (b) Unimodal (c) Decrescente (d) forma de U

(22), para $b > 0$ real não-inteiro, tem-se:

$$G(x)^{a-1} \{1 - G(x)^a\}^{b-1} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i G(x)^{a(i+1)-1},$$

em que o coeficiente $w_i = (-1)^i \binom{b-1}{i}$. Para b inteiro, a soma em i é interrompida em $b - 1$.

Para $\alpha > 0$ real não-inteiro, a expansão para a expressão $G(x)^\alpha$ utilizando

a equação (22) é dada por:

$$G(x)^\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} s_r(\alpha) G(x)^r, \quad (72)$$

em que

$$s_r(\alpha) = \sum_{m=r}^{\infty} (-1)^{r+m} \binom{\alpha}{m} \binom{m}{r}.$$

Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão:

$$G(x)^{a-1} \{1 - G(x)^a\}^{b-1} = \sum_{r=0}^{\infty} t_r G(x)^r, \quad (73)$$

em que $t_r = t_r(a, b) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{b-1}{i} s_r(a(i+1) - 1)$.

Utilizando as equações (1), (2), (13) e (73), a função densidade de X é reescrita como:

$$f(x) = a b c k s^{-c} x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k-1} \sum_{r=0}^{\infty} t_r \left[1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-k}\right]^r. \quad (74)$$

Por meio da expansão binomial, obtém-se:

$$f(x) = a b \sum_{r=0}^{\infty} t_r \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} g(x; s, k(j+1), c)$$

Substituindo $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^r$ por $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=j}^{\infty}$, $f(x)$ é reescrita como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j g(x; s, k(j+1), c), \quad (75)$$

cujo coeficiente v_j é dado por:

$$v_j = v_j(a, b) = a b \sum_{r=j}^{\infty} \binom{r}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)} t_r. \quad (76)$$

Portanto, $g(x; s, k(j+1), c)$ representa a função densidade da distribuição BXII com o parâmetro de escala s e os parâmetros de forma c e $k(j+1)$. De acordo com a equação (75), pode-se concluir que a função densidade da distribuição KwBXII pode ser escrita como uma combinação linear da função densidade da distribuição BXII. Claramente, $\sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1$. Para $b > 0$ inteiro, a soma em j é interrompida em $(b-1)$. E para $a > 0$ inteiro, a soma em r é interrompida em $(a+j-1)$.

Por integração da equação (75), obtém-se:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j G(x; s, k(j+1), c). \quad (77)$$

De acordo com equação (77), pode-se concluir que a fda da KwBXII também é uma combinação linear da distribuição BXII.

5.2.1 Momentos

Para $n < ck$, o n -ésimo momento de X , utilizando a equação (75) e o resultado obtido em Zimmer; Keats e Wang (1998), é dado por:

$$\mu'_n = s^n k \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j B(k(j+1) - nc^{-1}, 1 + nc^{-1}). \quad (78)$$

Os momentos centrais (μ_s) e cumulantes (κ_s) de X são determinados a partir de (78), logo:

$$\mu_s = \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} (-1)^k \mu'_1{}^s \mu'_{s-k} \quad \text{e} \quad \kappa_s = \mu'_s - \sum_{k=1}^{s-1} \binom{s-1}{k-1} \kappa_k \mu'_{s-k},$$

respectivamente, em que $\kappa_1 = \mu'_1$. Assim, $\kappa_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2$, $\kappa_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu'_1 + 2\mu_1'^3$, $\kappa_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 - 3\mu_2'^2 + 12\mu'_2\mu_1'^2 - 6\mu_1'^4$, etc. Os coeficientes de assimetria $\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$ e o de curtose $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$ podem ser calculados a partir do terceiro e do quarto cumulantes. As representações gráficas dessas medidas quando $s = 5, 0$, $k = 0, 5$ e $c = 3, 0$, como função do parâmetro a para alguns valores escolhidos do parâmetro b e como uma função do parâmetro b para alguns valores escolhidos do parâmetro a , são apresentadas nas Figuras 18 e 19, respectivamente.

Figura 18 - Assimetria de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

Para modelos na área de sobrevivência, usualmente é interessante o cálculo do n -ésimo momento incompleto de X definido por $T_h(y) = \int_0^y x^h f(x) dx$. Utilizando

Figura 19 - Curtose de X em função do parâmetro a para alguns valores selecionados de b e em função do parâmetro b para alguns valores selecionados de a

(75), $T_h(y)$ é dado por:

$$T_h(y) = c k \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j \int_0^y x^{h-1} \left(\frac{x}{s}\right)^c \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^{-k(j+1)-1}\right] dx. \quad (79)$$

Fazendo $t = \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-1}$ na equação 79, obtém-se:

$$T_h(y) = k s^h \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j \int_0^{\left(\frac{s^c}{s^c+y^c}\right)} t^{k(j+1)-\frac{h}{c}-1} (1-t)^{\frac{h}{c}} dt.$$

Portanto, o n -ésimo momento incompleto de X reduz-se para:

$$T_h(y) = k s^h \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j B_{\frac{s^c}{s^c+y^c}}(k(j+1) - n c^{-1}, 1 + n c^{-1}), \quad (80)$$

em que $B_z(a, b) = \int_0^z t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ é a função beta incompleta.

5.2.2 Função geradora de momentos

Seja $M_k(t)$ a função geradora de momentos da distribuição BXII(s, k, c). A fgm $M(t)$ de X é obtida a partir da equação (75), logo:

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j M_{k(j+1)}(t), \quad (81)$$

em que $M_{k(j+1)}(t)$ é a função geradora de momentos da distribuição $BXII(s, k(j+1), c)$.

Para $t < 0$, pode-se obter uma representação simples para $M_k(t)$. Da seguinte forma:

$$M_k(t) = c k \int_0^\infty \exp(y s t) y^{c-1} (1 + y^c)^{-(k+1)} dy.$$

Para calcular $M_k(t)$, é necessário utilizar a função G-Meijer definida no Apêndice A. Logo, considerando $c = m/k$, em que m e k são inteiros positivos, e o resultado obtido pela integral (94) no Apêndice A, tem-se:

$$M_k(t) = m I^* \left(-s t, \frac{m}{k} - 1, \frac{m}{k}, -k - 1 \right). \quad (82)$$

Então, para $t < 0$, a fgm de X a partir da equação (81) resulta em:

$$M(t) = m \sum_{j=0}^{\infty} v_j I^* \left(-s t, \frac{m}{k(j+1)} - 1, \frac{m}{k(j+1)}, -k(j+1) - 1 \right). \quad (83)$$

Para os casos particulares em que $c = 1$ e $c = 2$, pode-se obter expressões simplificadas para $M_k(t)$, e consequentemente para $M(t)$, utilizando a equação (1) (página 16) e (2) (página 20) no livro de Prudnikov; Brychkov e Marichev (1992). Para $c = 1$ e $t < 0$, obtém-se:

$$M_k(t) = k (-s t)^k \exp(-s t) \Gamma(-k, -s t),$$

em que $\Gamma(v, x) = \int_x^\infty t^{v-1} \exp(-t) dt$ é a função gama incompleta. Para $c = 2$ e $t < 0$, tem-se:

$$M_k(t) = {}_1F_2 \left(1; \frac{1}{2}; 1 - k; \frac{s^2 t^2}{4} \right) + \frac{s t}{2} B \left(2, k - \frac{1}{2} \right) {}_1F_2 \left(1; \frac{3}{2}; k + \frac{7}{2}; \frac{-s^2 t^2}{4} \right) + \frac{\Gamma(-2k)}{(-s t)^{-2k}},$$

em que

$${}_1F_2(a; b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k (c)_k} \frac{x^k}{k!}$$

é a função hipergeométrica e $(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1)$ denota o fatorial ascendente.

5.2.3 Desvios médios

Se X é uma variável aleatória com distribuição KwBXII, então o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por

$$\delta_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2\mu + 2T_1(\mu) \quad \text{e} \quad \delta_2(X) = 2T_1(M) - \mu,$$

em que $\mu = E(X)$, a mediana M de X é determinada explicitamente pela função quantil definida por $M = Q(1/2)$, ou seja,

$$x = Q(u) = F^{-1}(u) = s \left\{ \left(1 - \left[1 - (1 - u)^{1/b} \right]^{1/a} \right)^{-1/k} - 1 \right\}^{1/c}.$$

$F(\mu)$ é obtida facilmente pela equação (70) e $T_1(q) = \int_0^q x f(x) dx$ é a média incompleta de X obtida por meio da equação (80) para $h = 1$. Alternativamente, utilizando a expressão (75), obtém-se:

$$T_1(q) = c k s \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j \int_{q/s}^{\infty} x^c \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k(j+1)-1} dx.$$

Fazendo $u = y^c$, obtém-se

$$T_1(q) = k s \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j \int_{(q/s)^c}^{\infty} u^{1/c} (1+u)^{-k(j+1)-1} du.$$

Definindo uma nova integral J (para $q > 0$ e $k > 0$) e utilizando o Maple para resolvê-la, tem-se:

$$\begin{aligned} J(q, r, k) &= \int_q^{\infty} u^r (1+u)^{-k} du \\ &= - \left[\frac{{}_2F_1[(k, r+1); (2+r); -q] q^{r+1}}{(r+1)} + \frac{\Gamma(k-r-1) \pi \csc(\pi r)}{\Gamma(k) \Gamma(-r)} \right], \end{aligned}$$

em que ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica definida por:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Então,

$$T_1(q) = k s \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) v_j J \left(\left(\frac{q}{s} \right)^c, \frac{1}{c}, k(j+1) + 1 \right). \quad (84)$$

Portanto, a partir da equação (84), os valores de $\delta_1(X)$ e $\delta_2(X)$ são facilmente calculados.

Uma das aplicações dos desvios médios, é no cálculo das curvas de Bonferoni e Lorenz. Para dada uma probabilidade π , essas são definidas como $L(\pi) = T_1(q)/\mu$ e $B(\pi) = T_1(q)/(\pi \mu)$, respectivamente, em que $q = F^{-1}(\pi) = Q(\pi)$ é obtida diretamente da função quantil de X . Em economia, se π é a proporção de unidades cujo rendimento é inferior ou igual a q , $L(\pi)$ dá a proporção do volume de renda total acumulados pelo conjunto de unidades com uma renda inferior ou igual a q . A curva de Lorenz é crescente

e convexa e tendo em conta a renda média, a função densidade de X pode ser obtida por meio da curvatura da $L(\pi)$. De forma similar, a curva de Bonferroni $B(\pi)$ dá a relação entre a renda média desse grupo e a renda média da população. Em resumo, $L(\pi)$ produz frações do rendimento total, enquanto os valores de $B(\pi)$ refere-se a níveis de rendimentos relativos.

5.2.4 Confiabilidade

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuições $\text{KwBXII}(a_1, b_1, s, k_1, c)$ e $\text{KwBXII}(a_2, b_2, s, k_2, c)$, respectivamente. A confiabilidade R é definida por: $R = \int_0^\infty f_1(x) F_2(x) dx$.

Obtêm-se a fdp de X_1 e a fda de X_2 das equações (75) e (77) como

$$f_1(x) = \sum_{q=0}^{\infty} v_q(a_1, b_1) g(x; s, k_1(q+1), c)$$

e

$$F_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j(a_2, b_2) G(x; s, k_2(j+1), c),$$

respectivamente, cujas quantidades $v_q(a_1, b_1)$ e $v_j(a_2, b_2)$ são definidas por meio da equação (76). Então,

$$R = c k_1 \sum_{j,q=0}^{\infty} (q+1) v_q(a_1, b_1) v_j(a_2, b_2) I(c, s, k_1, k_2, j, q),$$

em que

$$I(c, s, k_1, k_2, j, q) = \int_0^\infty \frac{x^{c-1}}{s^c} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k_2(j+1)} \right\} \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k_1(q+1)-1} dx.$$

Substituindo $u = 1 + (x/s)^c$, obtém-se

$$I(c, s, k_1, k_2, j, q) = \frac{c k_2(j+1) - 1}{c k_1(q+1) + c k_2(j+1)},$$

e então pode-se obter R , como desejado.

5.2.5 Estatística de ordem e momentos

Considere uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição KwBXII . A expressão da i -ésima estatística de ordem $X_{i:n}$ pode ser escrita como

$$f_{i:n}(x) = \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l}}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i+l-1}. \quad (85)$$

Primeiramente, obtém-se uma expansão para $F(x)^m$. Seja $v = G(x; s, k, c) = 1 - [1 + (\frac{x}{s})^c]^{-k}$. Tém-se $F(x) = 1 - (1 - v^a)^b$, $F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b}{j} v^{aj}$, logo

$$F(x)^m = \sum_{t=0}^m \binom{m}{t} \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^{\infty} (-1)^{t+\sigma_m} B(b, j_1, \dots, j_m) v^{a\sigma_m}, \quad (86)$$

em que $B(b, j_1, \dots, j_m) = \binom{b}{j_1} \dots \binom{b}{j_m}$ e $\sigma_m = j_1 + \dots + j_m$.

A função densidade $f_{i:n}(x)$ pode ser reescrita de (85) e (86) como

$$f_{i:n}(x) = a b c k s^{-c} \sum_{l=0}^{n-i} \frac{\binom{n-i}{l}}{B(i, n-i+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} t_r \sum_{t=0}^{i+l-1} \binom{i+l-1}{t} \times \\ \sum_{j_1, \dots, j_{i+l-1}=0}^{\infty} (-1)^{l+p+t+\sigma_{i+l-1}} B(b, j_1, \dots, j_{i+l-1}) x^{c-1} \left[1 + \left(\frac{x}{s}\right)^c\right]^{-(p+1)k-1} v^{a\sigma_{i+l-1}}.$$

Usando (72), $f_{i:n}(x)$ pode ser ainda mais reduzida para

$$f_{i:n}(x) = a b \sum_{l=0}^{n-i} \frac{\binom{n-i}{l}}{B(i, n-i+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r}{p} t_r \sum_{p=0}^r \sum_{t=0}^{i+l-1} \binom{i+l-1}{t} (-1)^{l+p+t} \times \\ \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{u=0}^q \frac{(-1)^u \delta_{q,i+l-1}(a, b)}{p+u+1} \binom{q}{u} g(x; s, k(p+u+1), c).$$

Logo, substituindo $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^r$ por $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=p}^{\infty}$ e $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{u=0}^q$ por $\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{q=u}^{\infty}$ tem-se:

$$f_{i:n}(x) = \sum_{p,u=0}^{\infty} m_{p,u} g(x; s, k(p+u+1), c), \quad (87)$$

em que

$$m_{p,u} = a b \sum_{l=0}^{n-i} \frac{\binom{n-i}{l}}{B(i, n-i+1)} \sum_{r=p}^{\infty} \sum_{t=0}^{i+l-1} \binom{r}{p} t_r \sum_{p=0}^r \binom{i+l-1}{t} (-1)^{l+p+t} \times \\ \sum_{q=u}^{\infty} \frac{(-1)^u \delta_{q,i+l-1}(a, b)}{p+u+1} \binom{q}{u}$$

e

$$\delta_{q,i+l-1}(a, b) = \sum_{j_1, \dots, j_{i+l-1}=0}^{\infty} (-1)^{\sigma_{i+l-1}} B(b, j_1, \dots, j_{i+l-1}) s_q(a\sigma_{i+l-1}).$$

A equação (87) expressa a função densidade de $X_{i:n}$ como uma combinação de densidades da distribuição BXII. Assim, da equação (87), o n -ésimo momento ordinário e a função geradora de momentos $X_{i:n}$ são

$$E(X_{i:n}^n) = \sum_{p,u=0}^{\infty} m_{p,u} E(X_{p,u}^n), \quad (88)$$

$$E[\exp(t X_{i:n})] = \sum_{p,u=0}^{\infty} m_{p,u} E[\exp(t X_{p,u})], \quad (89)$$

respectivamente, em que $E(X_{p,u}^n)$ e $E[\exp(t X_{p,u})]$ são n -ésimo momento e a fgm da distribuição $BXII(s, k(p+u+1), c)$, respectivamente. Essas quantidades são imediatamente obtidas de (78) e (83) usando parâmetros adequados, respectivamente.

Uma expressão alternativa para os momentos pode ser obtida usando um resultado de Barakat e Abdelkader (2004). Logo,

$$E(X_{i:n}^t) = t \sum_{p=n-i+1}^n (-1)^{p-n+i-1} \binom{p-1}{n-i} \binom{n}{p} \int_0^{\infty} x^{t-1} S(x)^p dx, \quad (90)$$

em que $S(x) = 1 - F(x)$ é a função de sobrevivência da distribuição KwBXII. Usando a expansão binomial para $[1 - F(x)]^p$ em (90), a integral da equação (90) pode ser expressa como

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} S(x)^p dx = \sum_{m=0}^p (-1)^m \binom{p}{m} \int_0^{\infty} x^{t-1} F(x)^m dx. \quad (91)$$

Substituindo (86) na equação (91) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{t-1} S(x)^p dx &= \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^m \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^{\infty} (-1)^{m+r+\sigma_m} \binom{m}{r} \binom{p}{m} B(b, j_1, \dots, j_m) \times \\ &\quad \int_0^{\infty} x^{t-1} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{s} \right)^c \right]^{-k} \right\}^{a\sigma_m} dx. \end{aligned}$$

Finalmente, a equação (90) reduz para:

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^t) &= \frac{t s^t \Gamma(\frac{t}{c})}{c} \sum_{p=n-i-1}^n \sum_{m=0}^p \sum_{r=0}^m \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{u=0}^q (-1)^{p-n+i-1+m+r+u} \times \\ &\quad \binom{p-1}{n-i} \binom{n}{p} \binom{p}{m} \binom{m}{r} \binom{q}{u} \delta_{q,m} \left[\frac{\Gamma(k u - \frac{t}{c})}{\Gamma(k u)} \right], \end{aligned}$$

em que

$$\delta_{q,m}(a, b) = \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^{\infty} (-1)^{\sigma_m} B(b, j_1, \dots, j_m) s_q(a\sigma_m).$$

Os L -momentos (HOSKING, 1990) são definidos por:

$$\lambda_{r+1} = (r+1)^{-1} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} E(X_{r+1-k:r+1}), \quad r = 0, 1, \dots$$

Os quatro primeiros L -momentos são: $\lambda_1 = E(X_{1:1})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2})$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})$ e $\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4})$. Para as expansões dos momentos de estatística de ordem dadas anteriormente, podem-se obter expansões para os L -momentos da distribuição KwBXII como uma combinação linear ponderada das esperanças da distribuição KwBXII.

5.3 Estudo de simulação

Para avaliar o desempenho do modelo KwBXII, foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo em amostras finitas (n) dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros a , b , s , k e c . Foram geradas amostras com tamanhos $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ e $n = 300$ e os valores dos parâmetros foram fixados em $a = 6, 0$, $b = 11, 0$, $s = 0, 1$, $k = 0, 6$ e $c = 50, 0$.

Para cada combinação de n , a , b , s , k e c , foram simuladas 2000 amostras. Considerando-se os dados da Tabela 9, podem-se observar que o erro quadrático médio diminui à medida que aumenta o tamanho da amostra, na maioria dos casos, conforme o esperado. Note que as médias das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros se aproximam dos valores fixados à medida que n aumenta.

Para comparar as distribuições Burr XII e KwBXII, foi realizado um estudo de simulação para diferentes tamanhos da amostra ($n = 200, 300$). Para cada combinação de n , a , b , s , k e c , foram simuladas 2000 amostras com os valores mencionados anteriormente, com exceção do parâmetro $c = 1, 2$ (Apêndice H).

Na Tabela 10 apresentam-se a média e o erro quadrático médio (EQM) dos estimadores de máxima verossimilhança para cada amostra. Considerando-se os dados da Tabela 10, podem-se observar que o erro quadrático médio diminui à medida que aumenta o tamanho da amostra, na maioria dos casos, conforme o esperado para ambos os modelos. O EQM do modelo KwBXII é menor comparando-o com o modelo BXII para os respectivos parâmetros, exceto para o parâmetro s , quando $n = 200$. Note que as médias das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros se aproximam dos valores fixados à medida que n aumenta.

Tabela 9 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo KwBXII

n	Parâmetro	Média	EQM
50	a	6,0007	3,6127
	b	10,8610	2,2146
	s	0,1004	$2,2933 \times 10^{-6}$
	k	0,6777	0,0380
	c	50,2101	1,1468
100	a	5,6724	1,6672
	b	10,9042	0,9115
	s	0,1004	$1,3264 \times 10^{-6}$
	k	0,6437	0,0128
	c	50,0635	0,4145
200	a	5,6723	0,5913
	b	10,9274	0,4685
	s	0,1003	$5,4350 \times 10^{-7}$
	k	0,6278	0,0049
	c	50,0165	0,2712
300	a	5,5824	0,6451
	b	10,9699	0,1308
	s	0,1004	$6,4989 \times 10^{-7}$
	k	0,6274	0,0040
	c	49,9717	0,2202

5.4 Estimação de máxima verossimilhança

Os parâmetros da distribuição KwBXII são estimados por meio do método de máxima verossimilhança a partir de uma amostra. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n com distribuição KwBXII(a, b, s, k, c). O logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\theta = (a, b, s, k, c)^T$, com função densidade de

Tabela 10 - Resultados da simulação de Monte Carlo : média e erro quadrático médio para os parâmetros do modelo BXII e KBXII, respectivamente

n	Parâmetro	BXII		KBXII	
		Média	EQM	Média	EQM
200	a	(-)	(-)	6,4650	14,8374
	b	(-)	(-)	11,6956	17,9843
	s	0,3667	0,0753	0,1820	0,0758
	k	1,2586	0,6248	0,6650	0,3933
	c	3,0847	3,6686	1,7610	1,6368
300	a	(-)	(-)	6,2947	12,2593
	b	(-)	(-)	11,4752	18,2817
	s	0,3622	0,0713	0,1542	0,0292
	k	1,2240	0,5004	0,6385	0,2275
	c	3,0716	3,5782	1,5897	0,7976

probabilidade (69) é dado por:

$$\begin{aligned}
 l(\boldsymbol{\theta}) = & r \left[\log(a) + \log(b) + \log(c) + \log(k) - c \log(s) \right] + (c-1) \sum_{i \in F} \log(x_i) \\
 & + (a-1) \sum_{i \in F} \log(u_i) + \left(\frac{k+1}{k} \right) \sum_{i \in F} \log(1-u_i) + (b-1) \sum_{i \in F} \log(1-u_i^a) \\
 & + b \sum_{i \in C} \log(1-u_i^a), \tag{92}
 \end{aligned}$$

em que $u_i = 1 - \left[1 + \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \right]^{-\frac{1}{k}}$, r é o número total de falhas e F e C representam o número de observações que falharam ou foram censuradas, respectivamente. Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$, definidos na sub-seção 2.5.1, são dados por:

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{a} + \sum_{i \in F} \log(u_i) - (b-1) \sum_{i \in F} \frac{(u_i)^a \log(u_i)}{(1-u_i^a)} - b \sum_{i \in C} (u_i)^a \log(u_i),$$

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{b} + \sum_{i \in F} \log(1-u_i^a) + \sum_{i \in C} (1-u_i^a),$$

$$\begin{aligned}
 U_s(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{(c-1) - rc}{s} + \frac{ck}{s} \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left[1 + (a-1) \frac{(1-u_i)}{(u_i)} - a(b-1) \times \right. \\
 & \left. \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right] - \frac{a b k c}{s} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c,
 \end{aligned}$$

$$U_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1 - u_i) \left[1 - (a-1) \frac{(1-u_i)}{(u_i)} + a(b-1) \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right] \\ + \frac{a}{k} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i) \log(1-u_i),$$

e

$$U_c(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{c} - r \log(s) + \sum_{i \in F} \log(x_i) + \sum_{i \in F} (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \\ \times \left[-(k+1) + k(a-1) \frac{(1-u_i)}{(u_i)} - a k(b-1) \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right] \\ - a b k \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right).$$

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido numericamente a partir das equações não lineares,

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_b(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_s(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad U_k(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \text{e} \quad U_c(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Assim, sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ é $N_5(0, \ddot{L}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida de:

$$\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{ab} & \mathbf{L}_{as} & \mathbf{L}_{ac} & \mathbf{L}_{ak} \\ . & \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{bs} & \mathbf{L}_{bc} & \mathbf{L}_{bk} \\ . & . & \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sc} & \mathbf{L}_{sk} \\ . & . & . & \mathbf{L}_{cc} & \mathbf{L}_{ck} \\ . & . & . & . & \mathbf{L}_{kk} \end{pmatrix},$$

em que os elementos correspondentes são dados no Apêndice I.

O teste da razão de verossimilhança (TRV) é útil para comparar a distribuição KwBXII com alguns de seus sub-modelos. Por exemplo, o teste $H_0 : a = b = 1$ versus $H_1 : H_0$ não é verdade, é equivalente a comparar a distribuição BXII e KwBXII para o qual a estatística w é dada por:

$$w = 2\{l(\hat{a}, \hat{b}, \hat{s}, \hat{k}, \hat{c}) - l(1, 1, \tilde{s}, \tilde{k}, \tilde{c})\},$$

em que $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{s}$, $\hat{k}$ e $\hat{c}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e $\tilde{s}$, $\tilde{k}$ e $\tilde{c}$ são as estimativas sob H_0 .

5.5 Análise bayesiana

Considere a função densidade da KwBXII (69) e o logaritmo da função de verossimilhança (92) para os parâmetros a , b , s , k e c . Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori*, dada por:

$$\pi(a, b, s, k, c) \propto \pi(a) \times \pi(b) \times \pi(s) \times \pi(k) \times \pi(c),$$

em que $a \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $b \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $s \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $k \sim \Gamma(a_4, b_4)$ e $c \sim \Gamma(a_5, b_5)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(v; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} v^{a_i-1} \exp(-vb_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que $v > 0$, $a_i > 0$ e $b_i > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros a , b , s , k e c , a distribuição conjunta *a posteriori* para a , b , s , k e c é dada por:

$$\begin{aligned} \pi(a, b, s, k, c|x) &\propto (a b c k s^{-c})^r \prod_{i \in F} x_i^{c-1} u_i^{a-1} (1 + u_i)^{\frac{k+1}{k}} (1 - u_i^a)^{b-1} \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \\ &\times \pi(a, b, s, k, c). \end{aligned} \quad (93)$$

As densidades marginais *a posteriori* dos parâmetros a , b , s , k e c não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade *a posteriori* conjunta (93) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hasting, descrito na sub-seção 2.5.2.

O algoritmo Metropolis-Hasting permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais *a posteriori* completas para os parâmetros a , b , s , k e c :

$$\pi(a|y, b, s, k, c) \propto a^r \prod_{i \in F} u_i^a (1 - u_i^a)^{b-1} \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \times \pi(a),$$

$$\pi(b|y, a, s, k, c) \propto b^r \prod_{i \in F} (1 - u_i^a)^b \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \times \pi(b),$$

$$\pi(s|y, a, b, k, c) \propto s^{-(cr)} \prod_{i \in F} u_i^{a-1} (1 + u_i)^{\frac{k+1}{k}} (1 - u_i^a)^{b-1} \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \times \pi(s),$$

$$\pi(k|y, a, b, s, c) \propto k^r \prod_{i \in F} u_i^{a-1} (1 + u_i) (1 - u_i^a)^{b-1} \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \times \pi(k),$$

e

$$\pi(c|y, a, b, s, k) \propto s^{-(cr)} \prod_{i \in F} x_i^c u_i^{a-1} (1 + u_i)^{\frac{k+1}{k}} (1 - u_i^a)^{b-1} \prod_{i \in C} (1 - u_i^a)^b \times \pi(c).$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo KwBXII foi utilizado o *software* estatístico R, pacote BOA (*Bayesian Output Analysis*).

5.6 Aplicações

Nesta seção do trabalho, são apresentados três conjuntos de dados que estão relacionados com as ciências dos materiais (os dois primeiros) e as ciências biomédicas, respectivamente, para ilustrar o uso da nova distribuição de probabilidade KwBXII. Todos os resultados foram obtidos nos *software* R (*R Development Core Team*, 2011) e SAS versão 9.1 (SAS, 2004).

(i) Dados de fibras

O conjunto de dados reais refere-se aos pontos fortes de fibras de vidro de 1,5 cm, medidos no Laboratório National Physical, Inglaterra. O conjunto de dados ($n = 51$) foi utilizado anteriormente por Smith e Naylor (1987) e Cordeiro e Lemonte (2011).

(ii) Dados de estresse

Esse conjunto de dados foi utilizado anteriormente por Andrews e Herzberg (1985) e mais recentemente por Cooray e Ananda (2008). Esses dados ($n = 101$) representam a resistência à ruptura de vertentes kevlar 49/epoxy que foram submetidos a pressão constante no nível de 90% de estresse até que todos falhassem, para a obtenção de dados completos com tempos exatos da falha.

(iii) Dados de Aids

A Aids é uma patologia que mobiliza os portadores pelas implicações sócio-afetivas de relacionamento e reprodução. Avanços terapêuticos têm possibilitado à mulher soropositiva direito à reprodução. Nesse sentido, o ambulatório da Imuno Pediatria do Hospital das Clínicas e o Serviço Social de Ribeirão Preto atuam na linha do cuidado dos recém nascidos de mães soropositivas no controle e adesão à terapia antiretroviral de forma a potencializar acesso às informações e orientações, garantindo direitos em busca da emancipação. Nesse trabalho, considera-se o conjunto de dados referente ao tempo até a soro-reversão de 148 crianças expostas ao HIV por via vertical, dos quais 56% são censurados, nascidas no

Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto entre 1986 e 2001, e cujas mães não foram tratadas (SILVA, 2004; PERDONÁ, 2006). A transmissão por via vertical do vírus HIV pode ocorrer durante a gestação em torno de 35% dos casos; durante o trabalho de parto e o parto propriamente dito, em que mais ocorre, 65% dos casos; ou na amamentação, variando de 7% a 22%.

A soro-reversão ou reversão sorológica pode ocorrer em crianças nascidas de mães contaminadas com o vírus HIV. Ela é o processo de desaparecimento dos anticorpos anti-HIV do sangue em indivíduo que apresentava infecção pelo HIV. Com o passar dos meses, os anticorpos maternos vão sendo eliminados e a sorologia anti HIV deixa de ser positiva. Os recém-nascidos expostos foram monitorados até a definição da condição sorológica, fazendo uso da droga Zidovudina (AZT) nas primeiras 24h de vida, a qual foi administrada durante 6 semanas.

As medidas de posição e de dispersão foram calculadas para cada conjunto de dados (Tabela 11). Os dados de fibras possuem a assimetria negativa e têm a mais baixa variabilidade nos dados. Os dados de estresse têm a curtose e a assimetria positiva e têm o maior valor para a curtose. E ainda, os dados (sem censura) de Aids possuem a maior variabilidade.

Tabela 11 - Estatísticas descritivas para os conjuntos de dados de fibras, estresse e Aids

Dados	Média	Mediana	Moda	DP	Variância	Assimetria	Curtose	Min.	Max.
Fibras	1,44	1,52	1,61	0,33	0,11	-0,66	1,02	0,55	2,24
Estresse	1,03	0,80	0,02 ^a	1,12	1,25	3,05	14,51	0,01	7,89
Aids	460,33	461	334	188,9	35677,4	0,17	0,64	5	1021

^a Existem várias modas

Nas Tabelas 12, 13 e 14 podem ser vistas as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos, Kumaraswamy Burr XII (KwBXII), Burr XII (BXII), log-logística (LL), beta Weibull (BW) e Kumaraswamy Weibull (KwW), para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente. Os resultados das Tabelas 12, 13 e 14 indicam que o modelo KwBXII tem os menores valores de AIC, CAIC e BIC entre os modelos ajustados, considerando os três conjuntos de dados, exceto para o valor de BIC comparando com o modelo BXII (menor) para os dados de estresse e Aids, respectivamente. Pode, portanto,

ser escolhido como o modelo mais adequado.

Tabela 12 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de fibras

Modelo	a	b	s	k	c	AIC	CAIC	BIC
KwBXII	0,1322 (0,0333)	0,8944 (0,4094)	1,6440 (0,0474)	0,3358 (0,2073)	32,3362 (1,4639)	25,2	26,5	34,9
BXII	1 (-)	1 (-)	2,3424 (0,9581)	10,4426 (1,6855)	5,6369 (0,9406)	33,2	33,7	39,0
LL	m 0,6865 (0,0215)	c 7,5388 (0,9255)				40,8	41,1	44,7
BW	a 0,8470 (0,4142)	b 5,9117 (5,5632)	α 2,2035 (1,6975)	γ 5,7680 (1,7535)		35,4	36,2	43,1
KwW	a 0,0265 (0,0113)	b 0,1089 (0,0169)	λ 0,8514 (0,0321)	c 5,4060 (0,3164)		70,3	71,2	78,0

Para ilustrar a utilização da distribuição KwBXII para discriminação de modelos, comparou-se a distribuição KwBXII com alguns de seus sub-modelos por meio do TRV . As hipóteses testadas, bem como a estatística do teste são apresentados na Tabela 15. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo KwBXII produz um ajuste mais adequado quando comparado com as distribuições BXII e LL, para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente.

Além disso, as funções de densidade de probabilidade e de distribuição acumulada estimadas para os modelos KwBXII, BXII e LL são representadas graficamente na Figura 20 para os dados de fibras e na Figura 21 para os dados de estresse. Dessas figuras, observam-se que, para ambos os casos, a distribuição KwBXII apresenta um ajuste mais adequado se comparado aos outros modelos probabilísticos.

Na Figura 22, observa-se a função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimadas

Tabela 13 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de estresse

Modelo	a	b	s	k	c	AIC	CAIC	BIC
KwBXII	0,0986 (0,0178)	0,8854 (0,2856)	1,6847 (0,2641)	0,3943 (0,1436)	6,8188 (0,2888)	207,5	208,1	220,6
BXII	1 (-)	1 (-)	2217,90 (296,98)	1313,27 (542,25)	0,9311 (0,0727)	212,3	212,5	220,1
LL	m 1,5926 (0,2148)	c 1,2810 (0,1079)				229,4	229,5	234,7
BW	a 0,7766 (0,3342)	b 2,4128 (1,3841)	α 2,9155 (1,3152)	γ 1,0864 (0,3050)		213,9	214,3	224,4
KwW	a 0,7303 (0,2399)	b 0,2354 (0,0448)	λ 3,6684 (1,6456)	c 1,0300 (0,1360)		213,6	214,0	224,1

das distribuições KwBXII, BXII e LL, para os dados de Aids. Nesse caso, as distribuições KwBXII e BXII obtiveram o melhor ajuste.

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições *a priori* pouco informativas, para os três conjuntos de dados: $a \sim \Gamma(0, 01; 0, 01)$, $b \sim \Gamma(0, 01; 0, 01)$, $s \sim \Gamma(0, 01; 0, 01)$, $k \sim \Gamma(0, 01; 0, 01)$ e $c \sim \Gamma(0, 01; 0, 01)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 50.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 5.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 4.500. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução de escala $\hat{R}$, desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). As Tabelas 16, 17 e 18 apresentam os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo KwBXII, além de mostrar os valores do fator de redução de escala, para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente.

Tabela 14 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwBXII, BXII, LL, BW e KwW, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, CAIC e BIC, para os dados de Aids

Modelo	a	b	s	k	c	AIC	CAIC	BIC
KwBXII	0,4834 (0,1100)	0,1549 (0,0161)	1220,12 (42,9089)	64,9806 (4,1754)	2,9577 (0,1443)	1628,6	1629,0	1643,4
BXII	1 (-)	1 (-)	14480 (444,84)	2408,38 (1143,61)	2,3642 (0,1704)	1632,5	1632,7	1641,4
LL	m 0,002198 (0,000099)	c 3,2885 (0,2586)				1650,4	1650,5	1656,3
BW	a 0,7159 (0,2276)	b 0,7455 (1,1088)	α 537,00 (88,81)	γ 2,8720 (0,7676)		1633,1	1633,4	1645,0
KwW	a 0,7367 (0,1074)	b 15,0306 (0,0048)	λ 0,00057 (0,000068)	c 3,1385 (2,8669)		1634,4	1634,7	1646,2

Tabela 15 - TRV para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente

Fibras	Hipóteses	Estatística w	valor- p
KwBXII vs BXII	$H_0 : a = b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	12,0	0,00248
KwBXII vs LL	$H_0 : a = b = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	21,6	<0,0001
Estresse	Hipóteses	Estatística w	valor- p
KwBXII vs BXII	$H_0 : a = b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	8,8	0,01227
KwBXII vs LL	$H_0 : a = b = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	27,9	<0,0001
Aids	Hipóteses	Estatística w	valor- p
KwBXII vs BXII	$H_0 : a = b = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	7,9	0,01925
KwBXII vs LL	$H_0 : a = b = k = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	27,8	<0,0001

Nota-se, que os valores de $\hat{R}$ estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias, para os três conjuntos de dados. Pode-se observar que os valores para a média *a posteriori* (Tabelas 16, 17 e 18) são similares aos valores obtidos para o modelo

Figura 20 - (a) Densidades estimadas para os modelos KwBXII, BXII e LL para os dados de fibras. (b) Funções de distribuição acumulada estimadas e função de distribuição acumulada empírica para os dados de fibras

Figura 21 - (a) Densidades estimadas para os modelos KwBXII, BXII e LL para os dados de estresse. (b) Funções de distribuição acumulada estimadas e função de distribuição acumulada empírica para os dados de estresse

Figura 22 - Funções de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições KwBXII, BXII e LL com sobrevivência empírica para os dados de Aids

Tabela 16 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de fibras

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
a	0,1324	0,0410	(0,0542; 0,2130)	1,0011
b	0,8938	0,0302	(0,8359; 0,9533)	1,0021
s	1,6439	0,0102	(1,6237; 1,6623)	1,0019
k	0,3359	0,0221	(0,2938; 0,3793)	1,0017
c	32,3364	0,0908	(32,1581; 32,5112)	1,0023

KwBXII apresentados nas Tabelas 12, 13 e 14, respectivamente. Além disso, as Figuras 23, 24 e 25 apresentam as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 4.500 observações amostrais geradas, para os dados de fibras, estresse e Aids, respectivamente. As densidades marginais apresentadas nessas figuras sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

Tabela 17 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de estresse

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
a	0,0990	0,0255	(0,0510; 0,1495)	1,0014
b	0,8850	0,0171	(0,8523; 0,9188)	1,0020
s	1,6845	0,0301	(1,6238; 1,7398)	1,0019
k	0,3945	0,0403	(0,3180; 0,4735)	1,0017
c	6,8195	0,0504	(6,7196; 6,9141)	1,0025

Tabela 18 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo KwBXII para os dados de Aids

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	HPD (95%)	$\hat{R}$
a	0,4852	0,0914	(0,3137; 0,6665)	0,9996
b	0,1535	0,0513	(0,0516; 0,2520)	1,0001
s	1220,28	0,6969	(1218,91; 1221,62)	1,0011
k	64,9848	0,5050	(64,0134; 65,9707)	1,0009
c	2,9591	0,1004	(2,7654; 3,1586)	0,9999

Figura 23 - Estimativa por histograma das densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de fibras

Figura 24 - Estimativa por histograma das densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de estresse

Figura 25 - Estimativa por histograma das densidades marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo KwBXII para os dados de Aids

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 Conclusões

As duas distribuições propostas, beta Burr XII (BBXII) e a Kumaraswamy Burr XII (KwBXII), são versáteis para modelar a função risco nas formas crescente, decrescente, unimodal e forma de U. As funções densidade de probabilidade das distribuições BBXII e KwBXII foram expressas como uma combinação linear da função densidade de probabilidade da distribuição BXII. Por meio do estudo de simulação de dados, constatou-se um desempenho satisfatório para ambos os modelos propostos. As estimativas dos parâmetros para os dois modelos, obtidas pelo método da máxima verossimilhança e o bayesiano, são similares. A utilidade das novas distribuições são ilustradas na análise de conjuntos de dados reais, usando as estatísticas AIC, BIC, CAIC e o teste da razão de verossimilhança, mostrando assim que essas distribuições proporcionam um ajuste mais adequado do que outros sub-modelos.

Além disso, a função densidade de probabilidade da distribuição log-beta Burr XII (LBBXII) pode ser expressa como uma combinação linear da função densidade de probabilidade da distribuição log-Burr XII (LBXII), e ainda, a função de sobrevivência da LBBXII pode ser escrita em termos da função de sobrevivência da LBXII. As estimativas dos parâmetros, pelo método da máxima verossimilhança e o bayesiano, são similares. A utilidade do modelo de regressão foi ilustrada na análise de um conjunto de dados reais, usando as estatísticas AIC, BIC, CAIC e o teste da razão de verossimilhança, mostrando assim que o modelo de regressão LBBXII proporciona um ajuste mais adequado quando comparado com seus sub-modelos.

6.2 Pesquisas futuras

Dando continuidade a esta pesquisa, pretende-se desenvolver uma análise de diagnóstico (influência local e análise de resíduo) para o modelo de regressão log-beta Burr XII.

REFERÊNCIAS

- AARSET, M.V. How to identify bathtub hazard rate. **Transactions on Reliability**, New York, v.36, p.106-108, 1987.
- ABRAMOWITZ, M.; SEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover Publications, 1972. 1046p.
- ADAMIDIS, K.; LOUKAS, S. A life time distribution with decreasing failure rate. **Statistics and Probabilidade Letters**, Amsterdam, v.39, p.35-42, 1998.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p.716-723, 1974.
- ALEXANDER, C.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; SARAIBA, J.M. Generalized beta-generated distributions. **ICMA Centre Discussion Papers in Finance**, 2011.
- ANDREWS, D.F; HERZBERG, A.M. **Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker**, New York: Springer Series in Statistics, 1985. 442p.
- BABBIE, E. **Métodos de pesquisas de Survey/Earl Babbie**; tradução de Guilherme Cezarino. - Belo Horizonte: Ed. UFMG, 1999. 519p. - (Coleção Aprender) Tradução de: Survey research methods.
- BARAKAT, H.M.; ABDELKADER, Y.H. Computing the moments of order statistics from nonidentical random variables. **Statistical Methods and Applications**, italia, v.13, p.15-26, 2004.
- BARRETO-SOUZA, W.; SANTOS, A.H.S.; CORDEIRO, G.M. The beta generalized exponential distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.80, p.159-172, 2010.
- BARROS, A.A.A. **Distribuições exponencializadas e estendidas**. 2008. 75p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco, 2008.
- BURR, I. W. Cumulative frequency functions. **Annals of Mathematical Statistics**, Chicago, v.13, p.215-232, 1942.
- CANCHO, V.G.; BOLFARINE, H.; ACHCAR, J.A. A Bayesian analysis for the exponentiated Weibull distribution. **Journal of Applied Statistical Science**, New York, v.8, p.227-242, 1999.
- CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hasting algorithm. **The American Statistician**, Washington, v.49, p.326-335, 1995.
- COLOSIMO, E.A.; GIOLO, S.R. **Análise de sobrevivência aplicada**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 370p.

COORAY, K.; ANANDA, M.M.A. A generalization of the half-normal distribution with applications to lifetime data. **Communication in Statistical - Theory and Methods**, New York, v.37, p.1323-1337, 2008.

CORDEIRO, G.M.; CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.883-898, 2011.

CORDEIRO, G.M.; LEMONTE, A.J. The β -Birnbaum Saunders distribution: An improved distribution for fatigue life modeling. **Computational Statistics and Data Analysis**, London, v.55, p.55, 2011.

COX, D.R.; OAKES, D. **Analysis of survival data**. New York: Chapman and Hall, 1984. 201p.

EHLERS, R.S. **Introdução à inferência bayesiana**, 2007. 68p. Disponível em: <<http://leg.ufpr.br/~ehlers/bayes>>. Acesso em: 10 dez. 2010.

ELLIOTT, J.; RAWLINGS, J.M.; MARKWELL, P.J.; BARBER, P.J. Survival of cats with naturally occurring chronic renal failure: effect of dietary management. **Journal of Small Animal Practice**, New York, v.41, p.235-242, 2000.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-Normal distribution and its applications. **Communications in Statistics - Theory and Methods**, New York, v.31, p.497-512, 2002.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical Science**, Hayward, v.7, p.457-472, 1992.

GUPTA, A.K.; NADARAJAH, S. On the moments of the beta normal distribution. **Communication in Statistics Theory and Methods**, New York, v.31, p.1-13, 2004.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**, San Diego: Academic Press, 2000. 1163p.

HASTINGS, W.K. Monte carlo sampling methods using Markov Chains and their applications. **Biometrika**, London, v.57, p.97-109, 1970.

HOSKING, J.R.M. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. **Journal of the Royal Statistical Society**, Oxford, v.52-B, p.105-124, 1990.

HOSMER Jr., D.W.; LEMESHOW, S. **Applied survival analysis: regression modeling of time to event data**. New York: John Wiley, 1999. 386p.

IBRAHIM, J. G.; CHEN, M. H.; SINHA, D. **Bayesian Survival Analysis**. New York: Springer, 2001. 479p.

JONES, M. C. Family of distributions arising from distribution of order statistics. **Test**, Madrid, v.13, p.1-43, 2004.

KALBFLEISH, J.D.; PRENTICE, R.L. **The statistical analysis of failure time data**. New York: John Wiley, 2002. 439p.

KAWAMURA, L.K. **Para onde vão os brasileiros? Imigrantes brasileiros no Japão**. Editora da Unicamp, Campinas, 1999. 236p.

KAPLAN, E.L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. **Journal of the American Statistical Association**, Washington, v.53, p.557-481, 1958.

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. **Journal of Hydrology**, New York, v.46, p.79-88, 1980.

LAWLESS, J.F. **Statistical models and methods for lifetime data**. 2nd ed. New York: John Wiley, 2003. 630p.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3ed, São Paulo: Harbra, 1994. 685p.

LIANG, H.; ZOU, G. Improved AIC selection strategy for survival analysis. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.2538-2548, 2007.

MARSHALL, A.W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v.3, p.641-652, 1997.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; FREIMER, M. The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. **Technometrics**, Washington, v.37, p.436-445, 1995.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; KOLLIA, G.D. A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. **Journal of American Statistical Association**, New York, v.91, p.1575-1583, 1996.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. The beta Fréchet distribution. **Far East Journal of Theoretical Statistics**, Allahabad, v.14, p.15-24, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v.10, p.323-332, 2004.

----- The beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety**, Barking, v.91, p.689-697, 2005.

PASCOA, M.A.R.; ORTEGA, E. M. M. ; CORDEIRO, G. M. The Kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. **Statistical Methodology**, New York, v. 8, p. 411-433, 2011.

PAULINO, C.D.; TURKMAN, A.A.; MURTEIRA, B. **Estatística bayesiana**, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003. 446p.

PERDONÁ, G.S.C. **Modelos de riscos aplicados à análise de sobrevivência**, 2006. 148p. Tese (Doutorado em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional) - Instituto de Ciências Matemática e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

PESCIM, R.R.; DEMÉTRIO, C.G.B.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; URBANO, M. R. The beta generalized half-normal distribuiton. **Computacional Statistics and Data Analysis**, New York, v.54, p.945-957, 2010.

PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Y.A.; MARICHEV, O.I. **Integrals and series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. p.527.

----- **Integrals and series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. p.619.

PUNDIR, S.; ARORA, S.; JAIN, K. Bonferroni Curve and the related statistical inference. **Statistics & Probability Letters**, India, v.75, p.140-150, 2005.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R**: a language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 20 jan. 2011.

RODRIGUEZ, R. N. A guide to the Burr Type XII distributions . **Biometrika**, London, v.64, p.129-134, 1977.

RODRIGUES, C.; CORDEIRO, G.M.; DEMÉTRIO, C.G.B; ORTEGA, E.M.M. The Weibull negative binomial distribution. **Advances and Applications in Statistics**, Allahabad, v.22, p.25-55, 2011.

SANTANA, T.V.F. **As distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística**. 2010. 103p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2010.

SAS Institute inc. **SAS 9.1**. Cary, 2004.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Philadelphia, v.6, p.461-464, 1978.

SHAO, Q. Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter Burr XII distribution . **Computational Statistics and Data Analysis**, London, v.45, p.675-687, 2004.

SHAO, Q.; WONG, H.; XIA, J. Models for extremes using the extended three parameter Burr XII system with application to flood frequency analysis. **Hydrological Sciences Journal des Sciences Hydrologiques**, London, v.49, p.685-702, 2004.

SILVA, A.N.F. **Estudo evolutivo das crianças expostas ao HIV e notificadas pelo núcleo de vigilância epidemiológica do HCFMRP-USP**. 2004. 65p. Dissertação (Mestrado em Saúde na Comunidade) - Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2004.

SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; CANCHO, V.G.; BARRETO, M.L. Log-Burr XII regression models with censored Data. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.3820-3842, 2008.

SILVA, G.O. **Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico beta Weibull modificada**. 2009. 207p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2009.

SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. The beta modified Weibull distribution. **Lifetime Data Analysis**, New York, v.16, p.409-430, 2010.

SILVA, G. O.; ORTEGA, E. M. M.; PAULA, G. A. Residuals for Log-Burr XII Regression Models in Survival Analysis. **Journal of Applied Statistics**, New York, v.38, p.1435-1445, 2011.

SMITH, R.L; NAYLOR, J.C. A comparison of maximum likelihood and Bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution. **Applied Statistics**, New Jersey, v.36, p.358-369, 1987.

WOLFRAM, F.S. **Inverse Beta Regularized**, 1988. Disponível em: <<http://functions.wolfram/06.23.06.0004.01>>. Acesso em: dez. 2010.

ZIMMER, W. J.; KEATS, J. B.; WANG, F. K. The Burr XII distribution in reliability analysis. **Journal of Quality Technology**, Milwaukee, v.30, p.389-394, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Para m e k inteiros positivo, $\mu > -1$ e $p > 0$ (PRUDNIKOV; BRYCHKOV e MARICHEV, 1992), têm-se a seguinte integral

$$\begin{aligned}
 I' \left(p, \mu, \frac{m}{k}, \nu \right) &= \int_0^\infty \exp(-px) x^\mu (1 + x^{\frac{m}{k}})^\nu dx \\
 &= \frac{k^{-\nu} m^{\mu + \frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}} \Gamma(-\nu) p^{\mu+1}} \times \\
 &\quad G_{k+m, k}^{k, k+m} \left(\frac{m^m}{p^m} \left| \begin{array}{c} \Delta(m, -\mu), \Delta(k, \nu + 1) \\ \Delta(k, 0) \end{array} \right. \right), \tag{94}
 \end{aligned}$$

em que $\Delta(k, a) = \frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}, \dots, \frac{a+k}{k}$.

APÊNDICE B

Programa no R para simular dados da distribuição beta Burr XII

Gerando valores da BBXII

```

n=300
ptm <- proc.time()
set.seed(54321)
a <- -2
b <- -1.5
s <- -0.1
k <- -0.08
c <- -100
u <- -c()
t <- -c()
n <- -c()
for (m in 1:2000)
for (i in 1:300)
u[i] <- -rbeta(10000, a, b)
t <- -s * ((1 - u)c - 1/k) - 1)(1/c)
T <- -cbind(T, t)
n <- -cbind(n, t)
parametro <- -matrix(c(rep(0, 10000)), ncol = 5, nrow = 2000)
for(i in 1:2000)t <- -n[, i]
verosi <- -function(param)
a <- -param[1]
b <- -param[2]
s <- -param[3]
k <- -param[4]
c <- -param[5]
if(any(a < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax/5)
if(any(b < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax/5)
if(any(s < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax/5)
if(any(k < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax/5)
if(any(c < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax/5)
f <- -(c * k) * ((t)c - 1)/(s)(c)) * (gamma(a + b)/(gamma(a) * gamma(b))) * (1 - (1 +
((t)/(s))(c))(-k))(a - 1) * (1 + ((t)/(s))(c))(-k * b - 1))
lv <- -log(f)
sum(-lv)
browser()
valorin <- -c(2, 1.5, 0.1, 0.08, 100)
browser:verosi(valorin)
estima <- -optim(valorin, verosi, method = "BFGS", hessian = F);parametro[i,] =
as.matrix(estimapar)
a1 <- -parametro[, 1]
b1 <- -parametro[, 2]
s1 <- -parametro[, 3]
k1 <- -parametro[, 4]
c1 <- -parametro[, 5]
mean(a1)
mean(b1)

```

```

mean(s1)
mean(k1)
mean(c1)
proc.time()-ptm
resultado300=cbind(a1,b1,s1,k1,c1) write.table(resultado300, file = "resultado300.dat",
row.names = FALSE,col.names = FALSE)
sd(a1)
sd(b1)
sd(s1)
sd(k1)
sd(c1)
dados <- read.table('resultado300.dat', head = F)
mean(dados[,1])
mean(dados[,2])
mean(dados[,3])
mean(dados[,4])
mean(dados[,5])
sd(dados[,1])
sd(dados[,2])
sd(dados[,3])
sd(dados[,4])
sd(dados[,5])
EQM
var(dados[, 1]) + (mean(dados[, 1]) - 2)2
var(dados[, 2]) + (mean(dados[, 2]) - 1.5)2
var(dados[, 3]) + (mean(dados[, 3]) - 0.1)2
var(dados[, 4]) + (mean(dados[, 4]) - 0.08)2
var(dados[, 5]) + (mean(dados[, 5]) - 100)2
mean(dados[,1])-1.96*(sd(dados[,1])/sqrt(300))
mean(dados[,1])+1.96*(sd(dados[,1])/sqrt(300))
mean(dados[,2])-1.96*(sd(dados[,2])/sqrt(300))
mean(dados[,2])+1.96*(sd(dados[,2])/sqrt(300))
mean(dados[,3])-1.96*(sd(dados[,3])/sqrt(300))
mean(dados[,3])+1.96*(sd(dados[,3])/sqrt(300))
mean(dados[,4])-1.96*(sd(dados[,4])/sqrt(300))
mean(dados[,4])+1.96*(sd(dados[,4])/sqrt(300))
mean(dados[,5])-1.96*(sd(dados[,5])/sqrt(300))
mean(dados[,5])+1.96*(sd(dados[,5])/sqrt(300))
rm(list=ls(all=TRUE))

```

APÊNDICE C

As integrais a seguir podem ser facilmente calculados a partir da integral dada por Prudnikov et al. (1986, vol 1, Seção 2.6.3, integral 1),

$$J(a, p, 1) = \int_0^a x^p \log(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^2} [(p+1) \log(a) - 1].$$

e

$$J(a, p, 2) = \int_0^a x^p \log^2(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^3} \{2 - (p+1) \log(a) [2 - (p+1) \log(a)]\}.$$

Outra integral

$$H(a, p) = \int_0^a x^p \log(x) \log(1-x) dx$$

é facilmente expressa em termos de uma soma envolvendo $J(a, p, 1)$ e a expansão de

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{x^n}{n},$$

que converge para $x \in (0, 1)$. Logo

$$H(a, p) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{p+n+1}}{n(p+n+1)^2} [(p+n+1) \log(a) - 1].$$

APÊNDICE D

Os elementos da matriz de informação observada $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros (a, b, s, k, c) são

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{aa}(\boldsymbol{\theta}) &= -r[\psi'(a) - \psi'(a+b)] \\
&\quad + \frac{-1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\psi(a) - \psi(a+b) \left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\psi'(a) - \psi'(a+b) B_{u_i}(a,b) - \psi(a+b) [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a - [\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{bb} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{[B(a,b)]} \left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left([\psi(a) - \psi(a+b)] B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i}, \\
\\
\mathbf{L}_{ab}(\boldsymbol{\theta}) &= -r\psi'(a+b) + \frac{-1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\psi(b) - \psi(a+b) \left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\psi'(a+b) B_{u_i}(a,b) - \psi(a+b) [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b - [\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{bb} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{[B(a,b)]} \left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left([\psi(b) - \psi(a+b)] B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{as}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \frac{-kc(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} x_i^c}{s^{c+1}(u_i)} + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\left(\frac{kc}{s} \right) (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (u_i)^{a-1} (\psi(a+b) + \log(u_i)) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{kc}{s} \right) (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{ak}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} -\frac{(1-u_i) \log(1-u_i)}{k(u_i)} + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[(1-u_i)^b \log(1-u_i)^{\frac{1}{k}} (u_i)^{a-1} (\psi(a+b) + \log(u_i)) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\frac{1}{B(a,b)} (1-u_i)^b \log(1-u_i)^{\frac{1}{k}} (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{ac}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \frac{k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[-k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) (u_i)^{a-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (\psi(a+b) + \log(u_i)) \right] - \left[\left(\psi(a) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(\frac{-k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{B(a,b)} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{bb}(\boldsymbol{\theta}) &= -r[\psi'(b) - \psi'(a+b)] + \frac{-1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\psi(b) - \psi(a+b) \left(\psi(b) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\psi'(b) - \psi'(a+b) B_{u_i}(a,b) - \psi(a+b) [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b - [\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{bb} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{[B(a,b)]} \left(\psi(b) - \psi(a+b) B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left([\psi(b) - \psi(a+b)] [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b - [\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{bb} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bs}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \frac{kc}{s(1-u_i)^{\frac{-1}{k}}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\left(\frac{kc}{s}\right) (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c (u_i)^{a-1} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\psi(a+b) + \log(1-u_i) \right) \right] - \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_a \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{kc}{s}\right) (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bk}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1-u_i) + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[(1-u_i)^b \log(1-u_i)^{\frac{1}{k}} (u_i)^{a-1} \left(\psi(a+b) + \log(1-u_i) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right) \times \left(\frac{1}{kB(a,b)} (1-u_i)^b \log(1-u_i) (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{q_i^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bc}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i \in F} \frac{-k}{(1-u_i)^{\frac{-1}{k}}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[-k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) (u_i)^{a-1} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left(\psi(a+b) + \log(1-u_i) \right) \right] - \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{u_i}(a,b) - [\dot{B}_{u_i}(a,b)]_b \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(\frac{-k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{B(a,b)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) (u_i)^{a-1} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ss}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{rc}{s^2} - ck(a-1) + \sum_{i \in F} \left\{ \left[\frac{-t^c(u_i)}{s^{c+2}} \left((c+1)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} + c \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \right) \right] + \left[\frac{kc}{s^2} (1-u_i)^{\frac{2(k+1)}{k}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{x_i}{s}\right)^{2c} \right] \right\} \times \frac{1}{u_i^2} + c(kb+1) \sum_{i \in F} \left\{ \left[\frac{-t^c}{s^{c+2}} \left((c+1)(1-u_i)^{\frac{-1}{k}} - c \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \right) \right] \right\} \times \frac{1}{(1-u_i)^{\frac{-2}{k}}} \\ &\quad + \frac{c}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[\frac{-kc}{s^2} (1-u_i)^{b+1+\frac{2}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^{2c} \right] \right. \\ &\quad + \left[(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left((u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{1}{k}} (-kb-1) \left(\frac{x_i}{s}\right)^{2c} \left(\frac{-c}{s^2}\right) - \frac{t^c(c+1)}{s^{c+2}} \right) \right] \\ &\quad \left. - \left[(1-u_i)^{\frac{2(k+1)}{k}} (u_i)^{2(a-1)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^{2c} \frac{kc}{s^2 B(a,b)} \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{sk}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-ct^c(a-1)}{s^{c+1}} \sum_{i \in F} \left\{ (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left[(u_i) + (u_i) \log(1-u_i) + (u_i) \log(1-u_i) \right] \right\} \times \frac{1}{u_i^2} \\ &\quad + b \sum_{i \in F} \frac{ct^c}{s^{c+1} (1-u_i)^{\frac{-1}{k}}} + \frac{ct^c}{s^{c+1} B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ q_i \left[(u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \log(1-u_i)^{\frac{-1}{k}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left((u_i)^{-1} (a-1) (1-u_i)^{-k} - b \right) \right] + \left[\frac{1}{B(a,b)} (u_i)^{2(a-1)} (1-u_i)^{\frac{2bk+1}{k}} \log(1-u_i)^{\frac{-1}{k}} \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{sc}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{s} + k(a-1) \sum_{i \in F} \frac{x_i^c}{s^{c+1}} \left\{ u_i \left[(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(c(1-u_i)^{\frac{1}{k}} (-k-1) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) + 1 + c \log(x_i) + c \log(s) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(1-u_i)^{\frac{2(k+1)}{k}} ck \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{u_i^2} \\
&\quad + (kb+1) \sum_{i \in F} \frac{x_i^c}{s^{c+1}} \left\{ \left[(1-u_i)^{\frac{-1}{k}} (1 + c \log(x_i) + c \log(s)) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[c \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{(1-u_i)^{\frac{-2}{k}}} \\
&\quad + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \frac{x_i^c}{s^{c+1}} \left\{ \left[\left((u_i)^{a-2} (a-1) (1-u_i)^{b+1+\frac{2}{k}} ck \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left((u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{kb+1}{k}} \left(c(1-u_i)^{\frac{1}{k}} (-kb-1) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) + 1 + c \log(x_i) + c \log(s) \right) \right) \right] \right\} \times q_i \\
&\quad + \left[(u_i)^{2(a-1)} (1-u_i)^{\frac{2(bk+1)}{k}} \frac{ck}{B(a,b)} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \times \frac{1}{q_i^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{kk}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{k^2} + \frac{2(a-1)}{k} \sum_{i \in F} [(1-u_i) \log(1-u_i)] \times \frac{1}{u_i^2} + \frac{1}{kB(a,b)} \sum_{i \in C} \log(1-u_i) \\
&\quad \left\{ q_i \left[(u_i)^{a-1} (1-u_i)^b \log(1-u_i)^{\frac{-1}{k}} \left((u_i)^{-1} (a-1) (1-u_i) - b \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2(u_i)^{2(a-1)}}{kB(a,b)} (1-u_i)^{2b} \log(1-u_i) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{kc}(\boldsymbol{\theta}) &= (a-1) \sum_{i \in F} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ \left[u_i (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (\log(1-u_i) + 1) \right] + \left[(1-u_i)^{\frac{2k+1}{k}} \log(1-u_i) \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{u_i^2} - b \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{s} \right) \log \left(\frac{x_i}{s} \right) (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \\
&\quad + \frac{1}{kB(a,b)} \sum_{i \in C} \log(1-u_i) \left\{ \left[(u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{kb+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right) \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left((a-1) (u_i)^{-1} (1-u_i) \log(1-u_i)^{-1} + 1 + b \log(1-u_i) \right) \right] \times q_i \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{k}{B(a,b)} (u_i)^{2(a-1)} (1-u_i)^{\frac{2bk+1}{k}} \log(1-u_i) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{cc}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{c^2} + k(a-1) \sum_{i \in F} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ u_i \left[(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left(\frac{x_i}{s} \right) \left((1-u_i)^{\frac{1}{k}} (-k-1) \left(\frac{x_i}{s} \right) + 1 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(1-u_i)^{\frac{2(1-k)}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^{2c} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{u_i^2} \\
&\quad - (kb+1) \sum_{i \in F} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ \left[\left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) (1-u_i)^{\frac{-1}{k}} - \left(\frac{x_i}{s} \right)^{2c} \right] \right\} \times \frac{1}{(1-u_i)^{\frac{-2}{k}}} \\
&\quad - \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ q_i \left[(u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{kb+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left(k(a-1) (u_i)^{-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (1-u_i)^{\frac{1}{k}} (-kb-1) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c + 1 \right) \right] \times \left[\frac{k}{B(a,b)} (u_i)^{2(a-1)} (1-u_i)^{\frac{2(bk+1)}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^{2c} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{q_i^2},
\end{aligned}$$

em que

$$[\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{aa} = \sum_{j=0}^{\infty} w_j J(1-u_i^{-k}, a+j-1, 2),$$

$$[\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a,b)]_{ab} = \sum_{j=0}^{\infty} w_j H(1-u_i^{-k}, a+j-1, 1),$$

$$[\ddot{B}_{1-u_i^{-k}}(a, b)]_{bb} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_j^* \frac{(1 - u_i^{-k})^{a+j+n} - 1}{a + j + n},$$

$\psi'(\cdot)$ é a derivada da função digama, u_i , q_i , w_j e w_j^* foram definidos na Seção 3.4.

APÊNDICE E

Programa no SAS para obter as EMVs dos parâmetros dos modelos BBXII, BXII, LL, BW e W para dados de melanoma

```

data lista1;
input t censur ;
cards;
0.7228 1
6.2998 0
6.6229 0
...
2.7762 0
2.9788 1
;
ods html;
proc print data=lista1;
run;
ods html close;
proc univariate data=lista1;
run;
proc lifetest graphics plots=(s,ls,lls);
time t*censur(0);
run;
proc lifereg data=lista1;
model t*censur(0)= / dist=llogistic;
run;
proc means data=lista1;
run;
BETA BURR XII
proc nlmixed cov data=lista1;
parms a=1 b=1 s=0.87 k= 0.14 c=2.5;
bounds a > 0;
bounds b > 0;
bounds s > 0;
bounds k > 0;
bounds c > 0;
logp=censur*(log( (c*k*(t)**(c-1))/(s**(c)*BETA(a,b)) *( 1-((1+(t/s)**(c))**(-k)))**(a-1)
*(1+(t/s)**(c))**(-k*b-1) ))+ (1-censur)*log(1-probbeta((1-(1+(t/s)**c)**(-k)),a,b)) ;
model t ~ general(logp);
run;
BURR XII
proc nlmixed cov data=lista1;
parms c=1.26 k=1 s=4.76;
bounds c > 0;
bounds k > 0;
bounds s > 0;
logp= censur*((log(c*k))+((-k-1)*log(1+(t/s)**c))+((c-1)*log(t))-(c*log(s)))+(1-
censur)*log(1-probbeta((1-(1+(t/s)**c)**(-k)),1,1));
model t ~ general(logp);
run;

```


LOG LOGISTICA

```
proc nlmixed cov data=lista1;
parms c= 0.9173470324 m=0.06056730819;
bounds c > 0;
bounds m > 0;
logp=censur*(log(c)+(c*log(m))+((c-1)*log(t)) - (2*log(1+(t*m)**c)))+(1-censur)*log(1-
probbeta((1-(1+(t*m)**c)**(-1)),1,1));
model t general(logp);
run;
```

WEIBULL

```
proc nlmixed cov data=lista1;
parms alfa= 3.4 gama=1.8;
bounds alfa > 0;
bounds gama > 0;
logp=censur*(log(gama)-(gama)*log(alfa)+(gama-1)*log(t)-((t/alfa)**gama))+(1-
censur)*log(1-probbeta(1-exp(-(t/alfa)**gama)),1,1));
model t general(logp);
run;
```

BETA WEIBULL

```
proc nlmixed cov data=lista1;
parms alfa=6.9437 gama=1.0509 a=0.01 b=1;
bounds alfa > 0;
bounds gama > 0;
bounds a > 0;
bounds b > 0;
logp=censur*(log(gama)-((gama*log(alfa))+log(BETA(a,b)))+(gama-1)*log(t)-
(b*((t/alfa)**gama))+(a-1)*log(1-exp(-(t/alfa)**gama)))+(1-censur)*log(1-probbeta(1-
exp(-(t/alfa)**gama)),a,b));
model t general(logp);
run;
```

APÊNDICE F

Programa no R para obter as estimativas dos parâmetros do modelo BBXII para dados de melanoma utilizando a metodologia bayesiana

```

setwd("J:/patricia")
df=read.table("melanoma1.txt",head=T)
df
valores iniciais
x=df[,1] c=14.3884
k=0.4159
s=1.7729
a=0.1177
b=0.0489
r=185
n=length(x)
distribuição condicional de c
condc=function(x,c,k,s,a,b,r,n)
A=r*log(c)-(c*r)*log(s)
B=log(x)
C=c*sum(B[1:r])

$$D = \log(1 - ((1 + ((x/s)^c))^(-k)))$$

E=(a-1)*sum(D[1:r])

$$F = \log(1 + ((x/s)^c))$$

G=-((k*b)+1)*sum(F[1:r])

$$z = (1 + ((x/s)^c))^(-k)$$

zz=1-z
H=(1-pbeta(zz,a,b))
I=sum(H[186:n])
J=log(dgamma(0.01,0.01))
K=A+C+E+G+I+J
w1=condc(x,c,k,s,a,b,r,n)
w1
distribuição condicional de k
condk=function(x,c,k,s,a,b,r,n)
A=r*log(k)

$$B = \log(1 - ((1 + ((x/s)^c))^(-k)))$$

C=(a-1)*sum(B[1:r])

$$D = \log(1 + ((x/s)^c))$$

E=-(k*b)*sum(D[1:r])

$$= (1 + ((x/s)^c))^(-k)$$

zz=1-z
F=(1-pbeta(zz,a,b))
G=sum(F[186:n])
H=log(dgamma(0.01,0.01))
I=A+C+E+G+H
w2=condk(x,c,k,s,a,b,r,n)
w2
distribuição condicional para s
conds=function(x,c,k,s,a,b,r,n)
A=-(c*r)*log(s)

```

```

B = log(1 - ((1 + ((x/s)^c))^l - k))
C=(a-1)*sum(B[1:r])
D = log(1 + ((x/s)^c))
E=-((k*b)+1)*sum(D[1:r])
z = (1 + ((x/s)^c))^l - k
zz=1-z
F=(1-pbeta(zz,a,b))
G=sum(F[186:n])
H=log(dgamma(0.01,0.01))
I=A+C+E+G+H
w3=conds(x,c,k,s,a,b,r,n)
w3
distribuição condicional para a
conda=function(x,c,k,s,a,b,r,n)
A=-r*log(beta(a,b))
B = log(1 - ((1 + ((x/s)^c))^l - k))
C=a*sum(B[1:r])
z = (1 + ((x/s)^c))^l - k
zz=1-z
D=(1-pbeta(zz,a,b))
E=sum(D[186:n])
F=log(dgamma(0.01,0.01))
G=A+C+E+F
w4=conda(x,c,k,s,a,b,r,n)
w4
distribuição condicional para b
condb=function(x,c,k,s,a,b,r,n)
A=-r*log(beta(a,b))
B = log(1 + ((x/s)^c))
C=-(k*b)*sum(B[1:r])
z = (1 + ((x/s)^c))^l - k
zz=1-z
D=(1-pbeta(zz,a,b))
E=sum(D[186:n])
F=log(dgamma(0.01,0.01))
G=A+C+E+F
w5=condb(x,c,k,s,a,b,r,n)
w5
ALGORITMO METRÓPOLIS
set.seed(54321)
int=35000
aceitac=0
aceitak=0
aceitas=0
aceitaa=0
aceitab=0
CC=rep(0,int)
KK=rep(0,int)
SS=rep(0,int)
AA=rep(0,int)
BB=rep(0,int)

```

```

c=14.3884
k=0.4159
s=1.7729
a=0.1177
b=0.0489
CC[1]=c
KK[1]=k
SS[1]=s
AA[1]=a
BB[1]=b
a1=14 parâmetro da distribuição normal candidata para c
b1=0.5 parâmetro da distribuição normal candidata para c
a2=0.4 parâmetro da distribuição normal candidata para k
b2=0.5 parâmetro da distribuição normal candidata para k
a3=1.7 parâmetro da distribuição normal candidata para s
b3=0.5 parâmetro da distribuição normal candidata para s
a4=0.1 parâmetro da distribuição normal candidata para a
b4=0.5 parâmetro da distribuição normal candidata para a
a5=0.04 parâmetro da distribuição normal candidata para b
b5=0.5 parâmetro da distribuição normal candidata para b
require(MASS)
for(i in 2:int)
candc=abs(rnorm(1,a1,b1))
c=CC[i-1]
k=KK[i-1]
s=SS[i-1]
a=AA[i-1]
b=BB[i-1]
cond1=condc(x,c,k,s,a,b,r,n)
cond2=condc(x,candc,k,s,a,b,r,n)
vv =cond2-cond1
alpha=min(1,vv)
u=runif(1,0,1)
if(u <= alpha)
CC[i]=candc
aceitac=aceitac+1
if(u > alpha)
CC[i]=CC[i-1]
candk=rnorm(1,a2,b2)
candk=abs(candk)
c=CC[i-1]
k=KK[i-1]
s=SS[i-1]
a=AA[i-1]
b=BB[i-1]
cond3=condk(x,c,k,s,a,b,r,n)
cond4=condk(x,c,candk,s,a,b,r,n)
if(cond4==0) cond4=1
vv =cond4-cond3
alpha=min(1,vv)
u1=runif(1,0,1)

```

```

if(u1 <= alpha)
KK[i]=candk
aceitak=aceitak+1
if(u1 > alpha)
KK[i]=KK[i-1]
cands=rnorm(1,a3,b3)
cands=abs(cands)
c=CC[i-1]
k=KK[i-1]
s=SS[i-1]
a=AA[i-1]
b=BB[i-1]
cond5=conds(x,c,k,s,a,b,r,n)
cond6=conds(x,c,k,cands,a,b,r,n)
vv =cond6-cond5
alpha=min(1,vv)
u2=runif(1,0,1)
if(u2 <= alpha)
SS[i]=cands
aceitas=aceitas+1
if(u2 > alpha)
SS[i]=SS[i-1]
canda=rnorm(1,a4,b4)
canda=abs(canda)
c=CC[i-1]
k=KK[i-1]
s=SS[i-1]
a=AA[i-1]
b=BB[i-1]
cond7=conda(x,c,k,s,a,b,r,n)
cond8=conda(x,c,k,s,canda,b,r,n)
vv =cond8-cond7
alpha=min(1,vv)
u3=runif(1,0,1)
if(u3 <= alpha)
AA[i]=canda
aceitaa=aceitaa+1
if(u3 > alpha)
AA[i]=AA[i-1]
candb=rnorm(1,a5,b5)
candb=abs(candb)
c=CC[i-1]
k=KK[i-1]
s=SS[i-1]
a=AA[i-1]
b=BB[i-1]
cond9=condb(x,c,k,s,a,b,r,n)
cond10=condb(x,c,k,s,a,candb,r,n)
vv =cond10-cond9
alpha=min(1,vv)
u4=runif(1,0,1)

```

```

if(u4 <= alpha)
BB[i]=candb
aceitab=aceitab+1
if(u4 > alpha)
BB[i]=BB[i-1]
aceitac/int
aceitak/int
aceitas/int
aceitaa/int
aceitab/int
require(boa)
thin=(int-5000)/10
c1=rep(0,thin)
k1=rep(0,thin)
s1=rep(0,thin)
a1=rep(0,thin)
b1=rep(0,thin)
h=5000
for (i in 1 : thin)
c1[i]=CC[h]
k1[i]=KK[h]
s1[i]=SS[h]
a1[i]=AA[h]
b1[i]=BB[h]
h=h+10
boa.hpd(c1,0.05)
boa.hpd(k1,0.05)
boa.hpd(s1,0.05)
boa.hpd(a1,0.05)
boa.hpd(b1,0.05)
require(lme4)
require(graphics)
par(mfrow=c(3,2))
plot(density(c1),xlab=expression(paste(c))
,ylab=expression(paste(Density)),main=)
plot(density(k1),xlab=expression(paste(k))
,ylab=expression(paste(Density)),main=)
plot(density(s1),xlab=expression(paste(s))
,ylab=expression(paste(Density)),main=)
plot(density(a1),xlab=expression(paste(a))
,ylab=expression(paste(Density)),main=)
plot(density(b1),xlab=expression(paste(b))
,ylab=expression(paste(Density)),main=)
mean(c1)mean(k1)mean(s1)mean(a1)mean(b1)
sd(c1)sd(k1)sd(s1)sd(a1)sd(b1)

```

APÊNDICE G

Os elementos da matriz de informação observada $\ddot{L}^*(\theta)$ para os parâmetros (a, b, k, σ, β) são

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{aa}(\theta) &= -r[\psi'(a) - \psi'(a+b)] \\
&+ \sum_{i \in C} \left\{ \left[\psi'(a) - \psi'(a+b)B_{v_i}(a, b) - \psi(a+b)[\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a - [\ddot{B}_{1-v_i^{-k}}(a, b)]_{aa} \right] \times B(a, b)p_i \right. \\
&- \left[\psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right] \\
&\times \left[p_i B(a, b) (\psi(a) - \psi(a+b)) + \psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right] \Big\} \times \frac{1}{[B(a, b)p_i]^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{ab}(\theta) &= r\psi'(a+b) + \sum_{i \in C} \left\{ \left[-\psi'(a+b)B_{v_i}(a, b) - \psi(a+b)[\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b - [\ddot{B}_{v_i}(a, b)]_{ab} \right] \right. \\
&\times B(a, b)p_i - \left[\psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right] \\
&\times \left[\left((\psi(b) - \psi(a+b))p_i + 1 \right) \times \left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right) \right] \Big\} \times \frac{1}{[B(a, b)p_i]^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{ak}(\theta) &= \frac{-1}{k} \sum_{i \in F} \frac{(1-v_i) \log(1-v_i)}{v_i} + \frac{1}{B(a, b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\frac{-\log(1-v_i)(v_i)^{a-1}(1-v_i)^b}{kp_i} (\psi(a+b) - \log(v_i)) \right] \right. \\
&- \left[\frac{\log(1-v_i)(v_i)^{a-1}(1-v_i)^b}{kB(a, b)p_i^2} \left(\psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right) \right] \Big\}, \\
\\
\mathbf{L}_{a\sigma}(\theta) &= \frac{-k}{\sigma} \sum_{i \in F} \left[(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i)z_i \right] + \frac{1}{B(a, b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)z_i p_i (\psi(a+b) + \log(v_i)) \right] \right. \\
&- \left[\left(\psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right) \times \left(\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)z_i \right) \frac{1}{B(a, b)} \right] \Big\} \times \frac{1}{p_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{a\beta_j}(\theta) &= \frac{-k}{\sigma} \sum_{i \in F} \left[\frac{(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i)x_{ij}}{v_i} \right] + \frac{1}{B(a, b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)x_{ij} p_i (\psi(a+b) + \log(v_i)) \right] \right. \\
&- \left[\left(\psi(a) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_a \right) \times \left(\frac{k}{\sigma B(a, b)} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)x_{ij} \right) \right] \Big\} \times \frac{1}{p_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{bb}(\theta) &= -r[\psi'(b) - \psi'(a+b)] \\
&+ \sum_{i \in C} \left\{ \left[\psi'(b) - \psi'(a+b)B_{v_i}(a, b) - \psi(a+b)[\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b - [\ddot{B}_{1-v_i^{-k}}(a, b)]_{bb} \right] \times B(a, b)p_i \right. \\
&- \left[\psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right] \\
&\times \left[p_i B(a, b) (\psi(b) - \psi(a+b)) + \psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right] \Big\} \times \frac{1}{[B(a, b)p_i]^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{bk}(\theta) &= \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1-v_i) + \frac{1}{B(a, b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\frac{-1}{k} (1-v_i)^b \log(1-v_i)(v_i)^{a-1} p_i (\psi(a+b) + K + 1) \right] \right. \\
&- \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right) \times \left(\frac{(1-v_i)^b \log(1-v_i)(v_i)^{a-1}}{kB(a, b)} \right) \right] \Big\} \times \frac{1}{p_i^2}, \\
\\
\mathbf{L}_{b\sigma}(\theta) &= \frac{-k}{\sigma} \sum_{i \in F} \left[\frac{(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i)z_i}{v_i} \right] + \frac{k}{B(a, b)\sigma} \sum_{i \in C} \left\{ \left[(1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)z_i p_i (\psi(a+b) + \log(1-v_i)) \right] \right. \\
&- \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b)B_{v_i}(a, b) - [\dot{B}_{v_i}(a, b)]_b \right) \times \left(\frac{1}{B(a, b)} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i)z_i \right) \right] \Big\} \times \frac{1}{p_i^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{b\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{k}{\sigma} \sum_{i \in F} \left[(1-v_i)^{\frac{1}{k}} \exp(z_i) x_{ij} \right] + \frac{k}{B(a,b)\sigma} \sum_{i \in C} \left\{ \left[(1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i) x_{ij} p_i \left(\psi(a+b) + \log(1-v_i) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\psi(b) - \psi(a+b) B_{v_i}(a,b) - [\dot{B}_{v_i}(a,b)]_b \right) \times \left(\frac{(1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(z_i) x_{ij}}{B(a,b)} \right) \right] \right\} \times \frac{1}{p_i^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{kk}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{k^2} - \sum_{i \in F} \left\{ \left[2 \log(1-v_i) \left(\frac{(a-1)(1-v_i)}{v_i} - b \right) \right] + \left[\frac{2 \log(1-v_i)(a-1)(1-v_i)}{k^2 v_i^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[p_i \log(1-v_i) (v_i)^{a-1} \left((1-v_i)^b - (a-1)(v_i)^{-1} (1-v_i) \log(1-v_i) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\left((v_i)^{a-1} (1-v_i)^b \log(1-v_i) \right) \times \left(p_i - (1-v_i)^b \log(1-v_i) \log(v_i) \right) \right] \right\} \times \frac{1}{(kp_i)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{k\sigma}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in F} z_i \exp(z_i) \left\{ b(1-v_i)^{\frac{1}{k}} - \left[p_i(a-1)(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} (1 + \log(1-v_i)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left((a-1)(1-v_i)^{\frac{k(b+1)+1}{k}} (v_i)^{a-1} \log(1-v_i) \right) \right] \right\} \times \frac{1}{(p_i)^2} \\ &\quad + \frac{1}{B(a,b)\sigma} \sum_{i \in C} z_i \exp(z_i) \left\{ \left[p_i (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \left(1 - (v_i)^{-1} (a-1)(1-v_i) \log(1-v_i) + b \log(1-v_i) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[(v_i)^{2a-2} (1-v_i)^{\frac{2kb+1}{k}} \log(1-v_i) \right] \right\} \times \frac{1}{(p_i)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{k\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-1}{k} \sum_{i \in F} \left\{ \left[\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{1}{k}} \exp(z_i) x_{ij} \left(\frac{(a-1)(1-v_i)}{v_i} - b \right) \right] + \left[\frac{\log(1-v_i)(a-1)k(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i) x_{ij}}{\sigma(v_i)^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{kB(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\frac{-k}{\sigma} (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) x_{ij} \log(1-v_i) \left((a-1)(v_i)^{-1} (1-v_i) - b \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) x_{ij} \right] \times p_i \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{k}{\sigma B(a,b)} (v_i)^{2a-2} (1-v_i)^{\frac{2kb+1}{k}} \log(1-v_i) \exp(z_i) x_{ij} \right] \right\} \times \frac{1}{(p_i)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{r}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i \in F} z_i + \sum_{i \in F} \left\{ \left[\left(\frac{-\exp(z_i) z_i}{\sigma^2} (z_i + 2) \right) \times \left(\frac{(kb+1)}{(1-v_i)^{\frac{1}{k}}} - \frac{k(a-1)(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}}}{v_i} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\exp(z_i) z_i}{\sigma} \right) \times \left(\frac{(kb+1)}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{2}{k}} \exp(z_i) z_i \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{k(a-1)}{\sigma v_i^2} (1-v_i)^{2(\frac{k+1}{k})} \exp(z_i) z_i \left((k+1)(1-v_i)^{\frac{1}{k}} v_i + k(1-v_i)^{2(\frac{k+1}{k})} \right) \right] \right] \right] \right\} \\ &\quad + \frac{k}{B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\left(\frac{k}{\sigma} (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{k(b+1)+2}{k}} \exp(2z_i) z_i^2 \left(- (a-1)(v_i)^{-1} + \frac{(kb+1)}{k} (1-v_i)^{-1} \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\sigma^{-1} (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) z_i (z_i + 1) \right) \right] \times \sigma p_i - \left[\left((v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) z_i \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(p_i + \frac{k}{B(a,b)} (v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) z_i \right) \right] \right\} \times \frac{1}{(\sigma p_i)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\sigma\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i \in F} x_{ij} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in F} \left\{ \left[\left(\frac{-\exp(z_i)x_{ij}}{\sigma} (z_i + 1) \right) \times \left(\frac{(kb+1)}{(1-v_i)^{\frac{-1}{k}}} - \frac{k(a-1)(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}}}{v_i} \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[\left(\exp(z_i)z_i \right) \times \left(\left(\frac{(kb+1)}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{2(k+1)}{k}} \exp(z_i)x_{ij} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{k^2(a-1)}{\sigma(v_i)^2} (1-v_i)^{2(\frac{k+1}{k})} \exp(z_i)x_{ij} \left(\frac{k+1}{k} (1-v_i)^{-1}v_i + 1 \right) \right) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{k}{\sigma^2 B(a,b)} \sum_{i \in C} \left\{ \left[\left((v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+2}{k}} \exp(2z_i)z_i \left(-k(a-1)(v_i)^{-1}(1-v_i) + (kb+1) \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left((v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i)x_{ij} (z_i + 1) \right) \right] \times p_i \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{k}{B(a,b)} (v_i)^{2a-2} (1-v_i)^{2(\frac{kb+1}{k})} \exp(2z_i)x_{ij} \right] \right\} \times \frac{1}{(p_i)^2},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\beta_j\beta_k}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-k(a+1)}{\sigma} \sum_{i \in F} x_{ij} \left\{ \left[-(1-v_i)^{\frac{k+1}{k}} \exp(z_i)x_{ij}v_i \left(\frac{(k+1)}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{1}{k}} \exp(z_i) + 1 \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{2(\frac{k+1}{k})} \exp(2z_i)x_{ij} \right] \times \frac{1}{(v_i)^2} \\
&\quad + \frac{(kb+1)}{\sigma^2} \sum_{i \in F} x_{ij} \left[\exp(z_i)x_{ij} (1-v_i)^{\frac{1}{k}} \left(\exp(z_i)(1-v_i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right) \right] \\
&\quad + \frac{k}{\sigma B(a,b)} \sum_{i \in C} x_{ij} \left\{ \left[\frac{k}{\sigma} (1-v_i)^{\frac{k(b+1)+2}{k}} (v_i)^{a-1} \exp(2z_i)x_{ij} \left(\frac{(kb+1)}{k} (1-v_i)^{-1} - (a-1)(v_i)^{-1} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[(v_i)^{a-1} (1-v_i)^{\frac{kb+1}{k}} \exp(z_i) \frac{x_{ij}}{\sigma} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

em que

$$[\dot{B}_{v_i}(a,b)]_a = \sum_{j=0}^{\infty} w_j J(v_i, a+j-1, 1), \quad [\dot{B}_{v_i}(a,b)]_b = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_j^* \frac{v_i^{a+j+n}}{a+j+n},$$

$$[\ddot{B}_{v_i}(a,b)]_{aa} = \sum_{j=0}^{\infty} w_j J(v_i, a+j-1, 2), \quad [\ddot{B}_{v_i}(a,b)]_{ab} = \sum_{j=0}^{\infty} w_j H(v_i, a+j-1, 1),$$

$$[\ddot{B}_{v_i}(a,b)]_{bb} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_j^* \frac{(v_i)^{a+j+n} - 1}{a+j+n}.$$

As expressões para w_j e w_j^* foram definidas na seção 3.4.

APÊNDICE H

Programa no R para simular dados da distribuição Kumaraswamy Burr XII e Burr XII

Gerando valores da KBXII

```
require(xlsx)
names=c("Sheet1","Sheet2","Sheet3","Sheet4","Sheet5")
ptm <- proc.time()
set.seed(54321)
Na=2000 Numero de amostras
N=100 Tamanho da amostra
a <- -6 Se a=1 e b=1 tem-se a BXII
b <- -11
s <- -0.1
k <- -0.6
CC=c(1.2,5,10,20,50)
for(j in 1:5)
c <- -CC[j]1.2
u <- -c()
t <- -c()
n <- -c()
for (m in 1:Na)
u <- -runif(N)
t <- -s * ((1 - (1 - (1 - u)^(1/b))^(1/a))^( - 1/k) - 1)^(1/c)
T <- -cbind(T,t)
n <- -cbind(n,t)
Estimando a KBXII
parametroKBXII <- -matrix(0,ncol = 5,nrow = Na)
for(i in 1:Na)
t <- -n[,i]
verosi <- -function(param)
a <- -param[1]
b <- -param[2]
s <- -param[3]
k <- -param[4]
c <- -param[5]
if(any(a < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
if(any(b < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
if(any(s < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
if(any(k < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
if(any(c < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
f <- -((1 - (1 + ((t)/(s))^(c))^( - k))^(a - 1)) * ((1 - (1 - (1 + ((t)/(s))^(c))^( - k))^(a))^(b - 1)) * ((a *
b * c * k) * ((t)^(c - 1)/(s)^(c))) * ((1 + ((t)/(s))^(c))^( - k - 1))
lv <- -log(f)
sum(-lv)
browser()
valorin <- -c(a,b,s,k,c)
browser:verosi(valorin)
estima <- -optim(valorin,verosi,method = "BFGS",hessian = F);
parametroKBXII[i,]=as.matrix(estima$par)
```

```

parametro
inicial=c(a,b,s,k,c)
parametroKBXII=rbind(inicial,parametroKBXII) Primeira linha guarda os valores iniciais da
simulação
colnames(parametroKBXII)=c("a","b","s","k","c")
Estimando a BXII
parametroBXII <- matrix(0, ncol = 3, nrow = Na)
for(i in 1:Na)
  t <- -n[, i]
  verosi <- -function(param)
  s <- -param[1]
  k <- -param[2]
  c <- -param[3]
  if(any(s < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
  if(any(k < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
  if(any(c < 1e - 20))return(.Machine$double.xmax*5)
  f <- -c * k * (sc - c) * ((tc - 1)) * (1 + (t/s)c)c - k - 1))
  lv <- -log(f)
  sum(-lv)
  browser()
  valorin <- -c(s, k, c)
  browser:verosi(valorin)
  estima <- -optim(valorin, verosi, method = "BFGS", hessian = F);
  parametroBXII[i,]=as.matrix(estima$par)
parametro
inicial=c(s,k,c)
parametroBXII=rbind(inicial,parametroBXII) Primeira linha guarda os valores iniciais da
simulação
colnames(parametroBXII)=c("s","k","c")
if(j==1)
write.xlsx(parametroKBXII,"parametroKBXII.xlsx",sheetName=names[j],row.names=FALSE)
write.xlsx(parametroBXII,"parametroBXII.xlsx",sheetName=names[j],row.names=FALSE)
if(j!=1)
write.xlsx(parametroKBXII,"parametroKBXII.xlsx",sheetName=names[j],append=TRUE,row.names=FALSE)
write.xlsx(parametroBXII,"parametroBXII.xlsx",sheetName=names[j],append=TRUE,row.names=FALSE)
KBXII
dados <- -parametroKBXII
n1=nrow(dados)
inicial=dados[1,]
parametroKBXII=dados[2:n1,]
resulKBXII=matrix(0,6,5)
colnames(resulKBXII)=colnames(dados)
rownames(resulKBXII)=c("inicial","média","sd","EQM","LI","LS")
resulKBXII[1,]=inicial
for(i in 1:5)
resulKBXII[2,i]=mean(parametroKBXII[,i])
resulKBXII[3,i]=sd(parametroKBXII[,i])
resulKBXII[4,i] = var(parametroKBXII[, i]) + (mean(parametroKBXII[, i]) - inicial[i])2
resulKBXII[5,i]=mean(parametroKBXII[,i])-1.96*(sd(parametroKBXII[,i])/sqrt(n1))
resulKBXII[6,i]=mean(parametroKBXII[,i])+1.96*(sd(parametroKBXII[,i])/sqrt(n1))
BXII

```

```

dados1 <- parametroBXII
n1=nrow(dados1)
inicial1=dados1[1,]
parametroBXII=dados1[2:n1,]
resulBXII=matrix(0,6,3)
colnames(resulBXII)=colnames(dados1)
rownames(resulBXII)=c("inicial", "média", "sd", "EQM", "LI", "LS")
resulBXII[1,]=inicial1
for(i in 1:3)
resulBXII[2,i]=mean(parametroBXII[,i])
resulBXII[3,i]=sd(parametroBXII[,i])
resulBXII[4,i] = var(parametroBXII[,i]) + (mean(parametroBXII[,i]) - inicial1[i])^2
resulBXII[5,i]=mean(parametroBXII[,i])-1.96*(sd(parametroBXII[,i])/sqrt(n1))
resulBXII[6,i]=mean(parametroBXII[,i])+1.96*(sd(parametroBXII[,i])/sqrt(n1))
if(j==1)
write.xlsx(resulKBXII,"resulKBXII.xlsx",sheetName=names[j])
write.xlsx(resulBXII,"resulBXII.xlsx",sheetName=names[j])
if(j > 1)
write.xlsx(resulKBXII,"resulKBXII.xlsx",sheetName=names[j],append=TRUE)
write.xlsx(resulBXII,"resulBXII.xlsx",sheetName=names[j],append=TRUE)
proc.time()-ptm

```

APÊNDICE I

Os elementos da matriz de informação observada $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros (a, b, s, k, c) são

$$L_{aa}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-r}{a^2} - (b-1) \sum_{i \in F} \frac{2(u_i)^a \log(u_i)}{(1-u_i^a)^2} - b \sum_{i \in C} 2(u_i)^a \log(u_i),$$

$$L_{ab}(\boldsymbol{\theta}) = - \sum_{i \in F} \frac{(u_i)^a \log(u_i)}{(1-u_i^a)} - \sum_{i \in C} (u_i)^a \log(u_i),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{as}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{ck}{s} \sum_{i \in F} \frac{(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c - \frac{ck(b-1)}{s} \sum_{i \in F} (1-u_i^a)^{-2} \\ &\times \left\{ (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} (1-u_i^a) \left(\frac{x_i}{s}\right)^c [a \log(u_i) + 1] + a(u_i)^{2a-1} \log(u_i) (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \right\} \\ &- \frac{bkc}{s} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c [a \log(u_i) + 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ak}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-1}{k} \sum_{i \in F} \frac{(1-u_i) \log(1-u_i)}{(u_i)} \\ &+ \frac{(b-1)}{k} \sum_{i \in F} (1-u_i^a)^{-2} \left\{ (u_i)^{a-1} (1-u_i) (1-u_i^a) \log(1-u_i) [a \log(u_i) + 1] \right. \\ &\left. + a(u_i)^{2a-1} (1-u_i) \log(u_i) \log(1-u_i) \right\} \\ &+ \frac{b}{k} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i) \log(1-u_i) [a \log(u_i) + 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ac}(\boldsymbol{\theta}) &= k \sum_{i \in F} \frac{(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) - k(b-1) \sum_{i \in F} (1-u_i^a)^{-2} \\ &\times \left\{ (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} (1-u_i^a) \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) [a \log(u_i) + 1] \right. \\ &\left. + a(u_i)^{2a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \log(u_i) \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) \right\} \\ &- kb \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) [a \log(u_i) + 1], \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{bb}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-r}{b^2},$$

$$\mathbf{L}_{bs}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{ack}{s} \sum_{i \in F} \frac{(u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(1-u_i^a)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c - \frac{ack}{s} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c,$$

$$\mathbf{L}_{bk}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{a}{k} \sum_{i \in F} \frac{(u_i)^{a-1} (1-u_i)}{(1-u_i^a)} \log(1-u_i) + \frac{a}{k} \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i) \log(1-u_i),$$

$$\mathbf{L}_{bc}(\boldsymbol{\theta}) = -ak \sum_{i \in F} \frac{(u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(1-u_i^a)} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right) - ak \sum_{i \in C} (u_i)^{a-1} (1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s}\right)^c \log\left(\frac{x_i}{s}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{ss}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{rc - (c-1)}{s^2} + ck \sum_{i \in F} \left\{ \left[\frac{-(1-u_i)^{\frac{1}{k}}}{s^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left(c + \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (1-u_i)^{\frac{1}{k}} + 1 \right) \right. \right. \\
& \times \left(1 + \frac{(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} - \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right) \Bigg] \\
& + \left[\frac{(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{s} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left(\frac{-ck(a-1)(1-u_i)^{\frac{1}{k}}}{s(u_i)^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c - a(b-1) \right. \right. \\
& \times \left(\frac{kc(a-1)(u_i)^{a-2}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}(1-u_i)}{s(1-u_i^a)} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{kc(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{s(1-u_i^a)^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c [(1-u_i^a) + a(1-u_i)(u_i)^{a-1}] \right) \right] \right] \Bigg\} \\
& - abkc \sum_{i \in C} \frac{(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{s^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left[kc \left(\frac{x_i}{s} \right)^c - c - 1 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{sk}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{c}{s} \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left\{ \left[\left((1-u_i)^{\frac{1}{k}} + \frac{(1-u_i)^{\frac{1}{k}}}{k(u_i)} \log(1-u_i) \right) \right. \right. \\
& \times \left(1 + \frac{(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} - \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right) \Bigg] \\
& + \left[\left(k(1-u_i)^{\frac{1}{k}} \right) \times \left(\frac{(a-1)(1-u_i) \log(1-u_i)}{k(u_i)^2} + \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i) \log(1-u_i)}{k(1-u_i^a)^2} \right. \right. \\
& \times \left. \left. [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1 + a(u_i)^{a-1}(1-u_i)] \right] \right\} \\
& - \frac{abc}{s} \sum_{i \in C} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left\{ (u_i)^{a-1}(1-u_i) \left[(1-u_i)^{\frac{1}{k}} - (a-1)(u_i)^{-1} \log(1-u_i) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{k+1}{k} \right) (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \log(1-u_i) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{sc}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{1-r}{s} + \frac{k}{s} \sum_{i \in F} \left\{ \left(1 + \frac{(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} - \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right) \right. \\
& \times \left((1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left[1 + c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) - c(1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right) \Bigg\} \\
& + \left\{ \left(c \left(\frac{x_i}{s} \right)^c (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \right) \times \left(- \frac{k(a-1)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)^2} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c - \frac{a(b-1)}{(1-u_i^a)^2} \right. \right. \\
& \times \left\{ \left(k(u_i)^{a-1}(1-u_i^a)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1] \right) \right. \\
& \left. \left. + \left(a k(u_i)^{2(a-1)}(1-u_i)^{\frac{2k+1}{k}} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \right) \right\} \times (1-u_i^a)^{-2} \right\} \\
& - \frac{abk}{s} \sum_{i \in C} \left\{ (u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left[\left(\frac{x_i}{s} \right)^c + c \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \\
& + \left\{ \frac{c^2 k}{s} \left(\frac{x_i}{s} \right)^{2c} (u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left[(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} - \frac{c}{s} (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{kk}(\boldsymbol{\theta}) = & \frac{-r}{k^2} + \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \log(1-u_i) \left\{ - \frac{(a-1)(1-u_i) \log(1-u_i)}{k(u_i)^2} - \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i) \log(1-u_i)}{k(1-u_i^a)^2} \right. \\
& \times \left. [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1 + a(u_i)^{a-1}(1-u_i)] \right\} \\
& + \frac{ab}{k^2} \sum_{i \in C} \left\{ 2 \log(1-u_i)(u_i)^{a-1}(1-u_i) [1 - (1-u_i)(a-1)(u_i)^{-1}] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{kc}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{k} \sum_{i \in F} \left\{ \left[-k(1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left(1 - \frac{(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} + \frac{a(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right) \Big] \\
&\quad + \left[\log(1-u_i) \left(\frac{k(a-1)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) + a(b-1) \right. \right. \\
&\quad \times \left\{ \left(k(u_i)^{a-1}(1-u_i^a)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1] \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(a k(u_i)^{2(a-1)}(1-u_i)^{\frac{2k+1}{k}} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \right) \right\} \times (1-u_i^a)^{-2} \right] \Big\} \\
&\quad + \frac{a b}{k} \sum_{i \in C} \left\{ k \log(1-u_i)(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1] \right\} \\
&\quad - \left\{ k(u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{cc}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{-r}{c^2} + \sum_{i \in F} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ \left[\left(-(k+1) + \frac{k(a-1)(1-u_i)}{(u_i)} - \frac{a k(b-1)(u_i)^{a-1}(1-u_i)}{(1-u_i^a)} \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left((1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \left[1 + \log \left(\frac{x_i}{s} \right) - (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right] \\
&\quad + \left[(1-u_i)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \times \left(-\frac{k(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}}}{(u_i)^2} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) - a k(b-1) \right. \right. \\
&\quad \times \left\{ \left(k(u_i)^{a-1}(1-u_i^a)(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) [(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i) - 1] \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(a k(u_i)^{2(a-1)}(1-u_i)^{\frac{2k+1}{k}} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \right) \right\} \times (1-u_i^a)^{-2} \right] \Big\} \\
&\quad - a b k \sum_{i \in C} \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \left\{ (u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left[\left(\frac{x_i}{s} \right)^c + \left(\frac{x_i}{s} \right)^c \log \left(\frac{x_i}{s} \right) \right] \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{c k}{s} \left(\frac{x_i}{s} \right)^{2c} (u_i)^{a-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} \left[(a-1)(u_i)^{-1}(1-u_i)^{\frac{k+1}{k}} - \frac{c}{s} (1-u_i)^{\frac{1}{k}} \right] \right\},
\end{aligned}$$

em que u_i foi definido na seção 3.4.