

**A DECOMPOSIÇÃO DO RESÍDUO EM CASOS DE
HETEROCEDASTICIDADE NAS ANÁLISES DE VARIÂNCIA DE
ENSAIOS EM BLOCOS CASUALIZADOS**

LUIZ ELOI PINTO FERREIRA

Orientador: Dr. Humberto de Campos

Dissertação apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade
de São Paulo, para obtenção do Título de
Mestre em Experimentação e Estatística.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1978

Ao meu pai (memória)

À minha esposa

Aos meus filhos

D E D I C O

AGRADECIMENTOS

Expressamos nossos sinceros agradecimentos:

- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Adjunto do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela sugestão do tema e, principalmente, pela valiosa orientação prestada na realização deste trabalho.
- À Universidade Federal de Santa Maria, pela oportunidade oferecida para a realização do curso.
- À CAPES e CNPq que, através do Plano Institucional de Capacitação de Docentes, da Universidade Federal de Santa Maria (PICD-UFSM), administrado pelo Prof. Adjunto Dr. Zósimo Lopes, concedeu bolsa de estudos.
- Ao Professor Adjunto Harro Ramon Scharlau, Chefe do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, pelos incentivos e pelo apoio dispensado.
- Ao Prof. Dr. F. Pimentel Gomes, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pelos ensinamentos e sugestões.
- Ao Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelas ajudas, incentivos e ensinamentos.
- Ao Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela elaboração do Summary.
- Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos conhecimentos transmitidos, os quais concorreram, eficazmente, para a elaboração deste trabalho.

A Maria Izalina Ferreira Alves, Secretária do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela amizade e espírito de solidariedade.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pelo companheirismo.

A todos que concorreram para a realização do curso e deste trabalho.

1. RESUMO

A correta aplicação da análise de variância, requer que sejam atendidas algumas condições básicas. Dentre elas, está a de homocedasticidade, que estipula que os erros experimentais devem ter variâncias homogêneas.

Neste trabalho, tratamos do caso em que, na análise de variância, não podemos considerar válida a hipótese de homocedasticidade.

Para contornar o problema da falta de homogeneidade do erro experimental, estruturamos a decomposição do resíduo em componentes aplicáveis e apropriados às comparações (contrastes) de interesse. Empregamos o método das transformações lineares para mostrar a decomposição do resíduo.

Examinamos dois casos, o de um experimento em blocos casualizados e o de uma análise conjunta de experimentos em

blocos casualizados. Em ambos os casos considerados mostramos que cada componente do resíduo, conseguido através de transformações lineares, corresponde ao resíduo apropriado para testar um contraste do conjunto ortogonal, segundo o qual foi decomposta a soma de quadrados de tratamentos.

Para experimentos em blocos casualizados, cujo modelo matemático é:

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij} ,$$

obtivemos os quadrados médios residuais, específicos a cada contraste, conforme se segue:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{J-1} \left[\begin{array}{cc} J & \\ \sum_{j=1}^J \hat{\gamma}_{hj}^2 & \hat{\gamma}_h^2 \\ I & I \\ \sum_{i=1}^I c_{hi}^2 & J \sum_{i=1}^I c_{hi}^2 \end{array} \right] ,$$

onde $\hat{\gamma}_{hj}$ representa a estimativa do contraste Y_h dentro do bloco j .

No caso da análise conjunta de experimentos em blocos casualizados, consideramos o modelo matemático:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_{jk} + l_k + (tl)_{ik} + e_{ijk} .$$

Neste caso, o resíduo considerado para testar tratamentos é a interação tratamentos x locais (TxL), conforme justificamos através dos componentes de variância. Cada componente desta interação, correspondendo ao resíduo específico para testar um contraste Y_h , é dado por:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{K-1} \left[\frac{\sum_{k=1}^K \hat{\gamma}_{hk}^2}{J \sum_{i=1}^I c_{hi}^2} - \frac{\hat{\gamma}_h^2}{JK \sum_{i=1}^I c_{hi}^2} \right],$$

onde $\hat{\gamma}_{hk}$ é a estimativa do contraste Y_h no local k .

Ficou evidenciado neste trabalho que, constatada a presença de heterocedasticidade, o teste F para contrastes, estruturado através do resíduo específico, tende a apresentar resultados diferentes dos obtidos pelo uso do resíduo médio.

Outra conclusão que emana dos resultados numéricos é que, quando se faz a subdivisão do resíduo em componentes simples, ela se faz acompanhar de uma subdivisão do seu número de graus de liberdade, o que nos leva a recomendar cautela no uso deste método, devido à redução drástica do número de graus de liberdade para cada resíduo específico.

2. INTRODUÇÃO

Uma das hipóteses básicas na análise de variância é a de que os erros tenham a mesma variância σ^2 . Esta propriedade é conhecida como homocedasticidade, ou seja, homogeneidade do erro. A correta aplicação dos testes de significância requer que, dentre outras, esta condição seja atendida.

A homogeneidade do erro pode ser verificada por testes apropriados, alguns dos quais são examinados neste trabalho.

Quando a condição acima não é verificada, isto é, quando os erros não apresentam variâncias homogêneas, temos o que se chama de heterocedasticidade.

A heterogeneidade do erro, ou heterocedasticidade, pode ser classificada como *regular* e *irregular*.

O tipo *regular* de heterocedasticidade, geralmente surge de algum tipo de não-normalidade nos dados e de alguma forma de

relacionamento entre a média e a variância dos vários tratamentos. Neste caso, os dados podem ser transformados ou medidos em uma nova escala, de maneira que passem a ter distribuição aproximadamente normal. Com tais transformações, tentamos também fazer com que médias e variâncias se tornem independentes, resultando variâncias homogêneas. As transformações mais comuns são: a *raiz quadrada*, a *logarítmica* e a *angular* ou transformação *arco seno*.

O tipo *irregular* é caracterizado por certos tratamentos possuírem consideravelmente maior variabilidade que outros, sem que necessariamente haja relação entre a média e a variância. Por exemplo, na comparação de inseticidas, um grupo não tratado ou unidades de controle, são muitas vezes incluídas. O número de insetos nas parcelas testemunhas é de se esperar que seja muito maior e mais variado do que nas parcelas onde um inseticida oferece considerável controle. Então as parcelas testemunhas contribuem em maior grau que as tratadas na composição do quadrado médio do resíduo. Consequentemente, o resíduo calculado em conjunto será muito grande para comparações entre inseticidas e pode falhar em detectar diferenças reais. Em outros casos, alguns tratamentos podem ter muito mais variação que outros, sem razão aparente.

Quando a heterogeneidade é do tipo *irregular*, um procedimento algumas vezes empregado, é o de omitir certos tratamentos ou subdividi-los em grupos, de tal forma que, com os tratamentos restantes, ou dentro de cada subdivisão, tenhamos a esperada homocedasticidade. Procedimento semelhante é usado na análise de grupos de

experimentos, não em relação aos tratamentos mas, sim, subdividindo os locais (experimentos) em subgrupos com a mesma finalidade anteriormente citada.

Um outro procedimento para contornar o problema da heterocedasticidade do tipo irregular, é o que desenvolvemos neste trabalho. Trata-se da decomposição do quadrado médio do resíduo em componentes aplicáveis às várias comparações de interesse.

O objetivo principal deste trabalho é dar um enfoque mais detalhado ao estudo da heterocedasticidade do tipo irregular, através da dedução de resíduos específicos a cada contraste de tratamentos, e obtenção de um método geral de determinação desses resíduos.

São abordados dois casos:

- a) Análise de experimentos em blocos casualizados;
- b) Análise conjunta de experimentos em blocos casualizados.

3. REVISÃO DE LITERATURA

A presença de erros grosseiros, a assimetria extrema, as anomalias de certos tratamentos, as mudanças na variância residual e a falta de aditividade dos efeitos reais são, segundo COCHRAN (1947), os principais fatores que podem afetar a validade da análise de variância. Dependendo de cada caso, os métodos apontados por este autor para contornar essas dificuldades seriam: omissão de certos tratamentos, desdobramento da variância residual em componentes e transformação dos dados antes da análise.

Ao examinarem as razões para a subdivisão do resíduo, COCHRAN e COX (1957) afirmaram que, muitas vezes, há motivos para acreditar que a soma de quadrados do resíduo não é homogênea, isto é, os erros não têm todos a mesma variância σ^2 como é postulado no modelo matemático. Neste caso, a decomposição do resíduo é útil para melhor compreensão da natureza do quadrado médio residual e para

a obtenção de testes válidos. Os autores afirmaram ainda, com base nas equações normais que, num experimento em blocos casualizados com k observações por parcela, a função linear

$$z = \sum l_{ijk} y_{ijk}$$

é um componente do resíduo se os coeficientes l_{ijk} somarem zero em todas as observações que recebem qualquer tratamento específico e também em todas que estão em qualquer bloco específico. Para qualquer z que satisfaça essas condições, a contribuição para a soma de quadrados do resíduo é z^2/D , onde

$$D = \sum l_{ijk}^2 .$$

A partir destas definições, os autores mostraram numericamente decomposições do resíduo, conforme descrevemos a seguir.

Num experimento em blocos casualizados para controle de nematóides através da aplicação de fumigantes, onde cada bloco constava de 4 parcelas testemunhas e 8 parcelas tratadas, a análise preliminar foi:

Fontes de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Tratamentos	8	157.448	19.681
Blocos	3	289.427	96.476
Resíduo	36	544.690	15.130
T o t a l	47	991.565	

Foi feita inicialmente uma decomposição do resíduo em dois componentes. O primeiro correspondendo a parte do resíduo referente à variação entre parcelas testemunhas; o segundo componente, representado pela interação tratamentos x blocos. Os resultados numéricos foram os que se seguem:

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Resíduo	36	544.690	15.130
Entre testemunhas	12	307.312	25.609
Tratamentos x Blocos	24	237.378	9.891

A seguir os autores mostraram como pode ser feito o cálculo de um resíduo específico para cada contraste entre tratamentos, exemplificando numericamente com o contraste entre parcelas tratadas e não tratadas.

Uma maneira prática para a decomposição do resíduo foi apresentada por STEEL e TORRIE (1960). Num experimento em blocos casualizados, foi estabelecido um conjunto de contrastes ortogonais. A seguir foi calculado o valor de cada contraste dentro de cada um dos blocos. Afirmam estes autores que, se o modelo de blocos casualizados é válido, qualquer comparação dentro de um bloco não é influenciada pelo nível geral do bloco. Como consequência, concluem que a variância de qualquer comparação, calculada entre blocos, seria uma variância apropriada para testar os contrastes entre

totais de tratamentos. O processo é aplicado numericamente, mas os autores não apresentam a dedução do método.

Em um experimento em blocos casualizados, com apenas dois tratamentos, a análise de variância é equivalente ao teste t para dados pareados. Neste caso, STEEL e TORRIE (1960) afirmaram que é indiferente o fato dos tratamentos terem ou não variâncias homogêneas.

KOCH (1970) afirmou que muitas vezes o uso de transformações dos dados conduz a resultados questionáveis e apresentou alternativas para analisar dados que não satisfaçam às exigências da análise de variância. Estas alternativas seriam dadas pela análise ponderada ou pelo uso de testes não paramétricos.

HOFFMANN (1975) apresentou um método, baseado em transformações lineares ortogonais, para mostrar a decomposição da soma de quadrados de tratamentos. O autor mostra a invariância da soma de quadrados numa transformação linear ortogonal e dá uma interpretação geométrica à transformação.

Uma aplicação do método da decomposição do resíduo, foi apresentada por PIMENTEL GOMES (1978), em uma análise de um grupo de experimentos de adubação de algodão. O autor, ao fazer a análise conjunta dos diversos locais, considera individualmente os graus de liberdade relativos a contrastes de tratamentos e mostra como cada contraste pode ser testado diretamente pelo correspondente componente do resíduo, no caso representado pela interação locais x tra

tamentos. Contudo, alerta o referido autor que este método tem a desvantagem de reduzir excessivamente o número de graus de liberdade para os testes, recomendando seu uso somente quando for grande o número de locais.

4. MATERIAL E MÉTODOS

4.1 - Material

Os dados utilizados neste trabalho são apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Na Tabela 1 apresentamos os dados de um experimento e os códigos dos tratamentos, compilados de STEEL e TORRIE (1960). O experimento foi realizado visando a comparar 7 fungicidas para sementes e uma testemunha, para emergência em sementeiras de milho infectadas com *Diplodia spp.* O experimento foi conduzido em uma casa de vegetação, com 6 repetições em um delineamento em blocos casualizados. Cada unidade experimental consistiu de 25 sementes e os dados se referem ao número de sementes germinadas.

Tabela 1 - Número de sementes germinadas e código dos tratamentos, obtidos a partir de um experimento em blocos casualizados, para emergência em sementeiras de milho infectadas com *Diplodia spp.*

BLOCOS	TRATAMENTOS							
	(1)	B	C	D	E	F	G	H
1	8	16	14	10	8	8	7	12
2	8	19	16	11	7	8	6	19
3	9	24	14	12	1	3	6	9
4	7	22	13	8	1	3	6	11
5	7	19	14	7	3	3	4	9
6	5	19	13	3	2	7	4	5

SÍMBOLOS	TRATAMENTOS
(1)	testemunha
B e C	fungicidas mercúricos
D e H	fungicidas não-mercúricos, Companhia I
E, F e G	fungicidas não-mercúricos, Companhia II, onde F e G são novas formulações de E

FONTE: STEEL, R.G.D. e T.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. Nova York, McGraw-Hill Book Company Inc. 481 p.

Na Tabela 2 são apresentados dados experimentais obtidos de PIMENTEL GOMES (1978). Esses dados representam produção em toneladas por hectare e se referem a um grupo de ensaios de competição de variedades de batatinha. Cada ensaio tem 4 repetições e 8 va

riedades em blocos casualizados.

As variedades da Tabela 2 podem ser divididas em dois grupos. Um grupo de alta produtividade, aqui denominado grupo A, formado pelas variedades: S. Rafaela, Huinkul, B 72-53 A, B 116-51, B 1-52. O outro grupo, de menor produtividade, denominado de grupo B, constituído pelas variedades: Kennebec, B 25-50 E e Buena Vista.

Tabela 2 - Produção, em t/ha, referente a um grupo de ensaios de competição de variedades de batatinha.

VARIEDADES	EXPERIMENTOS						
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Kennebec	47,0	31,8	42,8	58,4	36,4	48,2	49,2
B 25-50 E	48,3	65,0	66,0	78,0	35,6	35,8	58,3
B 1-52	64,6	120,1	89,1	92,8	38,6	43,9	94,0
Huinkul	82,2	120,5	100,2	97,0	55,8	62,4	92,9
B 116-51	61,1	122,3	90,0	95,4	54,6	52,3	92,8
B 72-53 A	69,4	111,2	91,2	86,5	45,0	51,9	79,7
S. Rafaela	68,5	117,6	101,8	70,3	55,8	48,8	92,9
Buena Vista	47,7	42,6	49,7	68,2	35,6	49,6	53,2
Q.M. Residual	3,15	2,63	8,55	2,09	3,25	1,99	5,35

FONTE: PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8ª Edição. Piracicaba, SP, Livraria Nobel, 430 p.

4.2 - Métodos

4.2.1 - Testes para homogeneidade de variâncias

Para justificar a necessidade da decomposição do resíduo como método para contornar o problema de heterocedasticidade, devemos, em primeiro lugar, verificar se os erros têm variâncias co mum, ou seja, testar a hipótese de homocedasticidade.

Na análise de variância de experimentos em blocos ca sualizados, se tivermos I tratamentos, podemos considerá-los como I amostras e testar a homogeneidade das variâncias amostrais, partindo das hipóteses:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_I^2 \quad ,$$

H_a : pelo menos duas variâncias diferem entre si.

SNEDECOR e COCHRAN (1967) apresentam o teste de BARLETT (1937), descrito a seguir.

Se existem I estimativas s_i^2 , cada uma com o mesmo número de graus de liberdade (J-1), o método para testar H_0 é o que se segue:

Definimos inicialmente,

$$M = 2,3026 (J-1) (I \log \bar{s}^2 - \sum_i \log s_i^2) \quad ,$$

onde,

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^I s_i^2}{I} \quad .$$

Sob a hipótese de nulidade, de que cada s_i é uma estimativa da mesma variância σ^2 , o quociente M/C é distribuído aproximadamente como um χ^2 com (I-1) graus de liberdade, onde:

$$C = 1 + \frac{I+1}{3I(J-1)} .$$

No teste de Bartlett a estatística M/C segue uma distribuição aproximada de χ^2 , somente quando os dados tem distribuição normal, sendo este teste muito sensível à falta de normalidade. Por esse motivo, PIMENTEL GOMES (1978) desaconselha o seu uso.

BOX (1953) estudou a estatística do teste de Bartlett, chegando à conclusão de que sua distribuição é dada por

$$\left(1 + \frac{1}{2} \gamma_2\right) \chi^2_{(I-1)} ,$$

e não $\chi^2_{(I-1)}$, onde γ_2 é uma medida de curtose que deve ser zero se os dados são normalmente distribuídos.

DIXON e MASSEY (1969) apresentam o *teste de Cochran*, sendo este teste mais indicado quando pelo menos uma das variâncias estimadas é muito discrepante em relação às demais.

Neste caso, definimos a estatística

$$c = \frac{\max \{s_1^2, s_2^2, \dots, s_I^2\}}{\sum_1 s_i^2} .$$

Os valores críticos da distribuição de c , para os níveis usuais, podem ser verificados na tabela A-17 de DIXON e MASSEY (1969).

4.2.2 - Transformações ortogonais

A metodologia empregada neste trabalho, para a decomposição da soma de quadrados do resíduo, é a mesma que foi apresentada por HOFFMANN (1975) na decomposição da soma de quadrados de tratamentos, e se baseia na teoria das transformações lineares, mais precisamente, nas transformações ortogonais.

4.2.2.1 - Matrizes ortogonais

Uma matriz ortogonal $\{D\}$ é uma matriz quadrada cuja inversa é igual a sua transposta, ou seja:

$$D^{-1} = D' .$$

Então:

$$D'D = DD' = I \quad (4.2.a)$$

Da relação $DD' = I$, concluímos que as linhas de uma matriz ortogonal são ortogonais entre si e são vetores unitários, isto é,

$$\sum_i d_{hi} d_{ji} = 0 \quad , \quad \text{para } h \neq j$$

e

$$\sum_i d_{hi}^2 = 1 .$$

Da relação $D'D = I$, conclui-se ainda que as mesmas condições são válidas também para as colunas.

4.2.2.2 - Invariância da soma de quadrados numa transformação ortogonal

Uma importante propriedade das matrizes ortogonais é que, quando são utilizadas para definir uma transformação linear de uma variável, a soma dos quadrados dos valores da nova variável $(\sum_i z_i^2)$ é igual à soma dos quadrados dos valores da variável original $(\sum_i y_i^2)$, como mostraremos a seguir.

Seja Y o vetor dos valores de uma variável, e consideremos uma nova variável Z , definida por

$$Z = DY \quad , \quad (4.2.b)$$

onde D é uma matriz ortogonal.

Em virtude de (4.2.a), temos:

$$\sum_i z_i^2 = Z'Z = Y'D'DY = Y'Y = \sum_i y_i^2 \quad , \quad \text{c.q.d.}$$

Para ilustrar, consideremos o seguinte exemplo:

Seja o vetor

$$Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

e a matriz ortogonal

$$D = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 \\ -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Definindo a transformação ortogonal

$$Z = DY ,$$

obtemos

$$Z = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Notemos que $Z'Z = Y'Y = 125$.

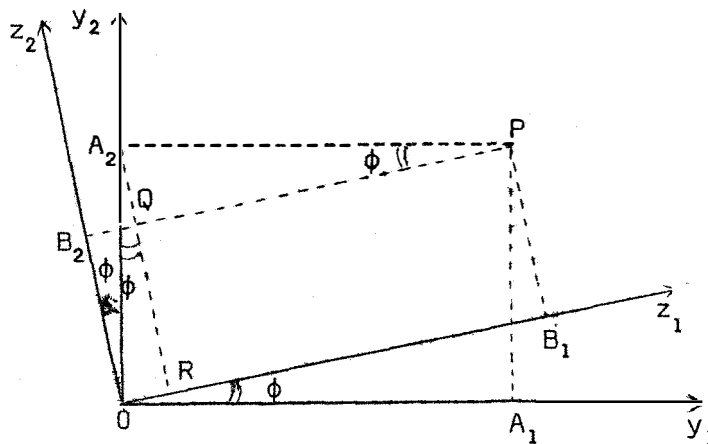
4.2.2.3 - Interpretação geométrica

Por simplicidade, consideremos apenas o caso em que a variável assume somente dois valores.

O vetor

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

define um ponto P num sistema de eixos cartesianos, como mostra a figura adiante. Consideremos que seja feita uma rotação dos eixos, de um ângulo ϕ e sejam z_1 e z_2 as novas coordenadas.



As coordenadas originais são:

$$\begin{aligned}y_1 &= \overline{OA_1} = \overline{A_2P} \quad , \\y_2 &= \overline{OA_2} \quad .\end{aligned}$$

As novas coordenadas são:

$$\begin{aligned}z_1 &= \overline{OB_1} \quad , \\z_2 &= \overline{OB_2} \quad .\end{aligned}$$

Traçando a reta A_2R perpendicular a OB_1 , temos:

$$\begin{aligned}z_1 &= \overline{OB_1} = \overline{OR} + \overline{RB_1} = \overline{OR} + \overline{QP} \quad , \\z_2 &= \overline{OB_2} = \overline{RQ} = \overline{RA_2} - \overline{QA_2} \quad .\end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned}\overline{OR} &= \overline{OA_2} \operatorname{sen} \phi = y_2 \operatorname{sen} \phi \quad , \\ \overline{QP} &= \overline{A_2P} \operatorname{cos} \phi = y_1 \operatorname{cos} \phi \quad , \\ \overline{RA_2} &= \overline{OA_2} \operatorname{cos} \phi = y_2 \operatorname{cos} \phi \quad , \\ \overline{QA_2} &= \overline{A_2P} \operatorname{sen} \phi = y_1 \operatorname{sen} \phi \quad ,\end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}z_1 &= y_2 \operatorname{sen} \phi + y_1 \operatorname{cos} \phi \quad , \\z_2 &= y_2 \operatorname{cos} \phi - y_1 \operatorname{sen} \phi \quad ,\end{aligned}$$

ou, matricialmente,

$$Z = DY \quad ,$$

onde:

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad ,$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix} .$$

Notemos que, qualquer que seja o valor de ϕ , temos

$$D'D = DD' = I ,$$

isto é, D é uma matriz ortogonal.

Notemos, também, que

$$y_1^2 + y_2^2 = \overline{OP}^2 = z_1^2 + z_2^2 ,$$

isto é, a soma dos quadrados das coordenadas do ponto P é igual ao quadrado da distância de P à origem, que não é afetada pela rotação dos eixos.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Devido à natureza deste trabalho, os resultados não são numéricos. Os dados utilizados servem apenas para ilustrar e discutir os resultados teóricos, assim como para induzir a algumas conclusões.

5.1 - Decomposição do Resíduo de Um Experimento em Blocos Casualizados

5.1.1 - Caso geral

Consideremos o modelo linear da análise de variância de um experimento em blocos casualizados com I tratamentos distribuídos em J blocos.

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij} ,$$

onde: y_{ij} = valor observado da parcela do tratamento \underline{i} , no bloco \underline{j} ;

m = média geral;

t_i = efeito do tratamento \underline{i} ;

b_j = efeito do bloco \underline{j} ;

e_{ij} = erro experimental, considerado aleatório, normalmente distribuído, com média zero e variância σ^2 .

Sabemos que a soma de quadrados do resíduo (SQR), po de ser obtida subtraindo-se da soma de quadrados total (SQ Total) as somas de quadrados referentes a blocos (SQB) e a tratamentos (SQT), ou seja:

$$SQR = SQ \text{ Total} - SQB - SQT ,$$

ou,

$$SQR = \left(\sum_{i,j} y_{ij}^2 - C \right) - \left(\frac{1}{I} \sum_j B_j^2 - C \right) - \left(\frac{1}{J} \sum_i T_i^2 - C \right) ,$$

ou ainda,

$$SQR = \left(\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{1}{I} \sum_j B_j^2 \right) - \left(\frac{1}{J} \sum_i T_i^2 - C \right), (5.1.a)$$

onde:

$$B_j = \sum_{i=1}^I y_{ij} \quad ;$$

$$T_i = \sum_{j=1}^J y_{ij} \quad ; \quad e$$

$$C = \frac{(\sum_{ij} y_{ij})^2}{IJ} = \frac{G^2}{IJ} \quad , \quad \text{sendo } G = \sum_{i,j} y_{ij} .$$

Como vimos em (5.1.a), a soma de quadrados do resíduo pode ser expressa pela diferença de duas somas de quadrados e pode ainda ser posta na seguinte forma:

$$SQR = \sum_{j=1}^I \left(\sum_{i=1}^I y_{ij}^2 - \frac{1}{I} B_j^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{i=1}^I T_i^2 - \frac{G^2}{I} \right), \quad (5.1.b)$$

Podemos então aplicar a metodologia das transformações ortogonais para realizar a decomposição da soma de quadrados do resíduo.

Sejam as transformações

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_I \end{bmatrix} = D \Theta_1 \quad e \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_I \end{bmatrix} = D \Theta_2, \quad (5.1.c)$$

onde D é uma matriz ortogonal de dimensões $I \times I$, em que os elementos da última linha são todos iguais a $\frac{1}{\sqrt{I}}$ (notemos que essa linha é um vetor unitário) e as demais linhas devem satisfazer a certas condições, conforme veremos adiante. Os vetores Θ_1 e Θ_2 são definidos da seguinte forma:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{Ij} \end{bmatrix} \quad e \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_I \end{bmatrix},$$

ou seja, θ_1 é a matriz das observações dos I tratamentos no bloco j e θ_2 é a matriz dos I totais de tratamentos.

De acordo com o que vimos em 4.2.2 e considerando as transformações definidas em (5.1.c), temos:

$$\sum_{i=1}^I u_i^2 = U'U = \theta_1' D' D \theta_1 = \theta_1' \theta_1 = \sum_{i=1}^I y_{ij}^2, \quad (5.1.d)$$

e

$$\sum_{i=1}^I v_i^2 = V'V = \theta_2' D' D \theta_2 = \theta_2' \theta_2 = \sum_{i=1}^I T_i^2. \quad (5.1.e)$$

Ainda pela definição das transformações, os elementos u_I e v_I ficam:

$$u_I = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_{i=1}^I y_{ij} = \frac{1}{\sqrt{I}} B_j \quad \therefore \quad u_I^2 = \frac{1}{I} B_j^2, \quad (5.1.f)$$

e

$$v_I = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_{i=1}^I T_i = \frac{1}{\sqrt{I}} G \quad \therefore \quad v_I^2 = \frac{1}{I} G^2. \quad (5.1.g)$$

De (5.1.b), (5.1.d), (5.1.e), (5.1.f) e (5.1.g), vem:

$$SQR = \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^I u_i^2 - u_I^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{i=1}^I v_i^2 - v_I^2 \right)$$

$$SQR = \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^{I-1} u_i^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{i=1}^{I-1} v_i^2 \right)$$

ou

$$SQR = \sum_{j=1}^J \left(\sum_{h=1}^{I-1} u_h^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{h=1}^{I-1} v_h^2 \right) \quad (5.1.h)$$

onde o índice h se refere à variação do índice original i nas $(I-1)$ primeiras colunas.

Da matriz D , sabemos que sua última linha é um vetor unitário, cujos componentes são todos iguais a $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Devemos agora verificar quais as condições que devem satisfazer os elementos, que inicialmente chamaremos de d_{hi} ($h=1,2,\dots,I-1; i=1,2,\dots,I$), das $I-1$ primeiras linhas de D .

Para que essas linhas sejam ortogonais com a última, devemos ter

$$\sum_{i=1}^I d_{hi} = 0 \quad , \quad (h=1,2,\dots,I-1) \quad . \quad (5.1.i)$$

Para que elas sejam ortogonais entre si é necessário que:

$$\sum_{i=1}^I d_{hi} d_{ji} = 0 \quad , \quad (5.1.j)$$

com $h \neq j$ ($h=1,2,\dots,I-1; j=1,2,\dots,I-1$).

Além dessas condições, para que D seja uma matriz ortogonal devemos ter:

$$\sum_{i=1}^I d_{hi}^2 = 1 \quad . \quad (5.1.k)$$

Fazendo:

$$d_{hi} = \frac{c_{hi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2}} \quad (5.1.l)$$

a condição (5.1.k) fica automaticamente satisfeita.

As condições (5.1.i) e (5.1.j) exigem que:

$$\sum_{i=1}^I c_{hi} = 0 \quad (5.1.m)$$

e

$$\sum_{i=1}^I c_{hi} c_{ji} = 0, \quad (5.1.n)$$

para $h \neq j$ ($h=1,2,\dots,I-1; i=1,2,\dots,I-1$).

De acordo com (5.1.c), temos:

$$u_h = \sum_{i=1}^I d_{hi} y_{ij}$$

e

$$v_h = \sum_{i=1}^I d_{hi} T_i$$

Considerando (5.1.l), obtemos:

$$u_h = \frac{\sum_{i=1}^I c_{hi} y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2}}$$

e

$$v_h = \frac{\sum_{i=1}^I c_{hi} T_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2}}$$

consequentemente,

$$u_h^2 = \frac{\sum_{i=1}^I (c_{hi} y_{ij})^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2} \quad (5.1.o)$$

e

$$v_h^2 = \frac{(\sum_{i=1}^I c_{hi} T_i)^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2} \quad (5.1.p)$$

De (5.1.h), (5.1.o) e (5.1.p), obtemos:

$$SQR = \sum_{j=1}^J \left[\sum_{h=1}^{I-1} \frac{(\sum_{i=1}^I c_{hi} y_{ij})^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2} \right] - \frac{1}{J} \sum_{h=1}^{I-1} \frac{(\sum_{i=1}^I c_{hi} T_i)^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2},$$

ou

$$SQR = \sum_{h=1}^{I-1} \left[\sum_{j=1}^J \frac{(\sum_{i=1}^I c_{hi} y_{ij})^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2} - \frac{(\sum_{i=1}^I c_{hi} T_i)^2}{\sum_{i=1}^I c_{hi}^2} \right] \quad (5.1.q)$$

Em virtude das condições impostas aos coeficientes c_{hi} , temos que:

$$\sum_{i=1}^I c_{hi} T_i$$

representa a estimativa de um contraste Y_h , entre totais de tratamentos e

$$\sum_{i=1}^I c_{hi} y_{ij}$$

que anotamos por \hat{Y}_{hj} , representa a sua estimativa dentro de um determinado bloco j .

Então (5.1.q) pode ser posta na forma:

$$SQR = \sum_{h=1}^{I-1} \left[\sum_j \frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_i c_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{J \sum_i c_{hi}^2} \right] \quad (5.1.r)$$

Mas,

$$\frac{(\hat{Y}_h)^2}{J \sum_i c_{hi}^2} = SQ(Y_h) \quad ,$$

$$\frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_i c_{hi}^2} = SQ(Y_h \text{ d. bloco } j) \quad ,$$

e

$$\sum_j \frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_i c_{hi}^2} = SQ(Y_h \text{ d. Blocos}) \quad .$$

Assim, de (5.1.r), vem:

$$SQR = \sum_{h=1}^{I-1} \left[SQ(Y_h \text{ d. Blocos}) - SQ(Y_h) \right] . \quad (5.1.s)$$

Por outro lado, numa análise de variância em blocos casualizados, com uma repetição por bloco, o resíduo se identifica com a interação entre tratamentos e blocos (TxB).

Desdobrando-se a SQT em seus (I-1) componentes, relativos aos (I-1) contrastes ortogonais possíveis, temos:

$$SQT = SQY_1 + SQY_2 + \dots + SQY_{I-1} .$$

Logo, a SQ(TxB) pode também ser decomposta conforme se segue:

$$SQ(TxB) = SQ(Y_1xB) + SQ(Y_2xB) + \dots + SQ(Y_{I-1}xB) ,$$

onde $SQ(Y_hxB)$ gera um resíduo apropriado para o contraste Y_h .

Logo:

$$SQR = \sum_{h=1}^{I-1} SQ(Y_hxB) = \sum_{h=1}^{I-1} SQR(Y_h) . \quad (5.1.t)$$

Finalmente, num desdobramento usual de uma interação entre dois fatores A e B, podemos estudar o comportamento de um dos fatores em cada nível do outro, como por exemplo:

$$\begin{array}{c} A \text{ d. } B_1 \\ A \text{ d. } B_2 \\ \vdots \\ A \text{ d. } B_J \end{array}$$

e, conforme sabemos:

$$SQ(A \text{ d. níveis de } B) = SQ(AxB) + SQA \quad ,$$

ou seja:

$$SQ(AxB) = SQ(A \text{ d. níveis de } B) - SQA \quad (5.1.u)$$

De (5.1.s), (5.1.t) e (5.1.u), vem:

$$SQ(Y_h \text{ d. Blocos}) - SQ(Y_h) = SQ(Y_h \times B) = SQR(Y_h) \quad ,$$

isto é, a SQR se decompõe em (I-1) componentes cada um deles associado a um dos (I-1) contrastes ortogonais em que se decompõe a SQT.

Podemos então concluir que:

$$SQR(Y_h) = \sum_j \frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_i c_{hi}^2} - \frac{\{Y_h\}^2}{\sum_i c_{hi}^2} \quad .$$

Cumpramos observar que em cada decomposição da SQR, os contrastes devem ser ortogonais entre si. Entretanto, desde que tenhamos definido um contraste, podemos obter, isoladamente, qualquer componente dessa decomposição.

No caso em estudo, experimentos em blocos casualizados, a SQR tem (I-1)(J-1) graus de liberdade, então cada um dos seus (I-1) componentes tem (J-1) graus de liberdade, e dá origem a qua-

dados médios do tipo:

$$QMR(Y_h) = \frac{SQR(Y_h)}{J-1},$$

que são os resíduos apropriados para testar contrastes entre totais de tratamentos.

Para comprovação e discussão desse resultado, utilizamos os dados apresentados na Tabela 1, cuja análise de variância preliminar é dada na Tabela 3.

Tabela 3 - Análise de variância preliminar dos dados da Tabela 1.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	5	102,50	20,50	
Tratamentos	7	1.210,58	172,94	29,92**
Resíduo	35	202,17	5,78	
T o t a l	47	1.515,25		

É desejável fazer a decomposição da SQT segundo um conjunto de contrastes ortogonais.

As comparações de interesse são dadas pelos contrastes:

Y_1 : testemunha versus os sete fungicidas;

Y_2 : fungicidas mercúricos versus não mercúricos;

Y_3 : entre os dois fungicidas mercúricos;

Y_4 : fungicidas da Companhia I versus fungicidas da Companhia II;

Y_5 : entre fungicidas da Companhia I;

Y_6 : fórmula original versus as novas fórmulas da Companhia II;

Y_7 : entre as novas fórmulas da Companhia II.

A Tabela 4 mostra os contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados. Cada soma de quadrados dessa Tabela tem um único grau de liberdade, e seu conjunto constitui uma decomposição da soma de quadrados de tratamentos.

Tabela 4 - Contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados, referentes aos dados da Tabela 1.

Tratamentos	(1)	B	C	D	E	F	G	H			
Totais de Tratamentos	44	119	84	51	22	32	33	65	\bar{Y}_h	$J \sum_i c_{hi}^2$	$SQ(Y_h)$
\bar{Y}_1	-7	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	98	6(56)	28,58
\bar{Y}_2	0	+5	+5	-2	-2	-2	-2	-2	609	6(70)	883,06
\bar{Y}_3	0	+1	-1	0	0	0	0	0	35	6(2)	102,08
\bar{Y}_4	0	0	0	+3	-2	-2	-2	+3	174	6(30)	168,20
\bar{Y}_5	0	0	0	+1	0	0	0	-1	-14	6(2)	16,33
\bar{Y}_6	0	0	0	0	+2	-1	-1	0	-21	6(6)	12,25
\bar{Y}_7	0	0	0	0	0	+1	-1	0	-1	6(2)	0,08
Total										1.210,58	

Cada uma das comparações da Tabela 4, pode ser testada usando o resíduo já obtido na Tabela 3, resultando a análise apresentada na Tabela 5.

Tabela 5 - Análise de variância dos dados da Tabela 1, com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos, usando o resíduo médio.

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Y_1	1	28,58	28,58	4,95*
Y_2	1	883,06	883,06	152,78**
Y_3	1	102,08	102,08	17,66**
Y_4	1	168,20	168,20	29,10**
Y_5	1	16,33	16,33	2,83
Y_6	1	12,25	12,25	2,12
Y_7	1	0,08	0,08	0,014
Tratamentos	(7)	(1.210,58)		
Resíduo	35	202,17	5,78	

Se a hipótese de homocedasticidade (H_0) for verdadeira, a análise apresentada na Tabela 5 é perfeitamente válida. Para verificarmos a validade desta hipótese, submetemos os dados a testes para homogeneidade de variâncias.

Aplicando o teste de Bartlett aos dados em estudo (Tabela 1), temos:

$$M = (2,3026)(5) [8(0,88110) - 5,57851] = 16,9274$$

$$C = 1 + \frac{8+1}{3(8)(5)} = 1,075$$

$$\chi^2_c = \frac{M}{C} = 15,746, \text{ com 7 graus de liberdade.}$$

Como

$$\chi_c^2 = 15,746 > 14,07 = \chi_{.05(7)}^2 \quad ,$$

concluimos que existe diferença significativa entre as variâncias e rejeitamos H_0 , ou seja, baseados nas evidências dos dados, não podemos aceitar a hipótese de homocedasticidade.

Pelo teste de Cochran temos:

$$c = \frac{21,768}{60,836} = 0,3578 \quad .$$

A tabela apropriada nos dá, para $k=8$ variâncias, com 5 graus de liberdade cada uma, o valor crítico 0,3595, ao nível de significância de 5%.

Como podemos ver, nesse caso, estamos praticamente no limite de rejeição de H_0 .

Constatada a heterocedasticidade, procedemos à decomposição da soma de quadrados do resíduo, visando a buscar um resíduo específico para testar cada um dos contrastes.

De acordo com o que já foi visto, o procedimento consiste em obter o valor de cada contraste, anteriormente estruturados na Tabela 4, dentro de cada bloco, conforme é mostrado na Tabela 6.

Tabela 6 - Estimativas dos contrastes definidos na Tabela 4, dentro de cada um dos blocos.

Blocos	Contrastes						
	\hat{Y}_1	\hat{Y}_2	\hat{Y}_3	\hat{Y}_4	\hat{Y}_5	\hat{Y}_6	\hat{Y}_7
1	19	60	2	20	-2	1	1
2	30	73	3	48	-8	0	2
3	6	128	10	43	3	-7	-3
4	15	117	9	37	-3	-7	-3
5	10	113	5	28	-2	-1	-1
6	18	118	6	-2	-2	-7	3
Total	98	609	35	174	-14	-21	-1

Para qualquer contraste Y_h , o resíduo apropriado é obtido através dos seus componentes Y_{hj} , estimados nos 6 blocos, conforme se segue:

$$SQR(Y_h) = \frac{\sum_{j=1}^6 (\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^8 c_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{6 \sum_{i=1}^8 c_{hi}^2} .$$

Assim, para Y_1 , por exemplo, temos:

$$SQR(Y_1) = \frac{19^2 + 30^2 + \dots + 18^2}{56} - \frac{98^2}{6(56)} = 6,17 .$$

De forma análoga, podemos calcular os componentes do resíduo para os demais contrastes. Os resultados numéricos são apre

sentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Resultados da decomposição da soma de quadrados do resíduo.

Contrastes	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{\sum_{j=1}^6 (\bar{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^8 c_{hi}^2}$	34,75	938,50	127,50	223,67	47,00	24,83	16,50
$\frac{(\bar{Y}_h)^2}{\sum_{i=1}^8 c_{hi}^2}$	28,58	883,06	102,08	168,20	16,33	12,25	0,08
Componentes da S.Q.R.	6,17	55,44	25,42	55,47	30,67	12,58	16,42

Devemos notar ainda que na decomposição da soma de quadrados do resíduo, os 35 graus de liberdade são também decompostos, e cada um dos 7 componentes tem 5 graus de liberdade.

A seguir testamos os contrastes, cada um com o seu resíduo específico, conforme mostra a Tabela 8.

Tabela 8 - Análise de variância dos dados da Tabela 1, com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos e usando os resíduos específicos.

Causas de variação	G.L.	Q.M.(Y_h)	QMR(Y_h)	F
Y_1	1	28,58	1,234	23,16**
Y_2	1	883,06	11,090	79,71**
Y_3	1	102,08	5,084	20,08**
Y_4	1	168,20	11,094	15,16*
Y_5	1	16,33	6,134	2,68
Y_6	1	12,25	2,516	4,87
Y_7	1	0,08	3,284	0,024

Podemos observar que o quadrado médio do resíduo da análise de variância da Tabela 5 é a média aritmética dos componentes residuais apresentados na Tabela 8.

Os resultados do teste F das duas análises (Tabelas 5 e 8), diferem quanto ao nível de significância, mostrando a influência da falta de homogeneidade das variâncias.

Lembramos aqui que COCHRAN e COX (1957), ao discutirem as razões para a decomposição do resíduo, afirmaram que a separação do quadrado médio do resíduo em componentes simples, raramente é requerida, exceto em estudos especiais, ou como exercício. Afir-
maram ainda estes autores, que um argumento contrário ao emprego do método, é o da diminuição dos graus de liberdade, o que, às vezes, torna o teste inadequado às circunstâncias presentes. Concluíram

afirmando que este método não deveria ser usado sem boas razões, ou seja, em casos onde o resíduo médio propriamente dito torna-se impraticável em virtude de uma grande evidência de heterocedasticidade.

5.1.2 - Casos particulares

Um caso especial, que julgamos de interesse, é aquele onde as parcelas testemunhas têm uma variância muito discrepante em relação às parcelas tratadas.

Num experimento onde são incluídas parcelas testemunhas, pode ocorrer que essas parcelas contribuam em maior grau, relativamente às que recebem os tratamentos, para a composição do resíduo. Se os demais tratamentos não apresentam variâncias muito heterogêneas entre si, podemos fazer uma decomposição parcial do resíduo, isolando a testemunha.

Ao estabelecermos o conjunto de contrastes ortogonais de interesse, estipulamos um contraste para comparar a testemunha $\{T_1\}$ com os demais tratamentos, da seguinte forma:

$$Y_1 = (I-1) T_1 - (T_2 + T_3 + \dots + T_I) ,$$

onde T_1 representa o total da testemunha e T_2, T_3, \dots, T_I , os totais dos demais tratamentos.

A seguir calculamos a soma de quadrados do resíduo referente a esse contraste, que chamamos de SQR_1 , da maneira já exposta.

Se os $(I-2)$ contrastes ortogonais restantes incluírem só parcelas tratadas, podemos estabelecer uma soma de quadrados de resíduo para esses contrastes, anotada por SQR_2 , como se segue:

$$SQR_2 = SQR - SQR_1 .$$

Os graus de liberdade são assim distribuídos:

SQR com $(I-1)(J-1)$ graus de liberdade,

SQR_1 com $(J-1)$ graus de liberdade, e

SQR_2 com $(I-2)(J-1)$ graus de liberdade.

Outro caso particular interessante é aquele em que num experimento em blocos casualizados, temos apenas dois tratamentos.

Neste caso, a análise de variância corresponde exatamente ao *teste t* para dados pareados.

Como temos só dois tratamentos, existe um único contraste possível, que pode ser representado por:

$$Y_1 = T_1 - T_2 .$$

A soma de quadrados do resíduo para este contraste é dada por:

$$SQR(Y_1) = \frac{\sum_{j=1}^J (y_{1j} - y_{2j})^2}{2} - \frac{(T_1 - T_2)^2}{2J} ,$$

com $(J-1)$ graus de liberdade.

A soma de quadrados do resíduo da análise de variância é:

$$SQR = SQ \text{ Total} - SQB - SQT$$

ou

$$SQR = \left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{\sum_j B_j^2}{2} \right] - \left[\frac{\sum_i T_i^2}{J} - \frac{(\sum_{i,j} y_{ij})^2}{2J} \right]$$

Desenvolvendo esta última expressão da SQR, temos:

$$SQR = \left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{B_1^2 + B_2^2 + \dots + B_J^2}{2} \right] - \left[\frac{T_1^2 + T_2^2}{J} - \frac{(\sum_{i,j} y_{ij})^2}{2J} \right],$$

ou ainda:

$$SQR = \left[\sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{(y_{11} + y_{21})^2 + (y_{12} + y_{22})^2 + \dots + (y_{1J} + y_{2J})^2}{2} \right] - \left[\frac{T_1^2 + T_2^2}{J} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{2J} \right]$$

Reduzindo os termos semelhantes e agrupando, vem:

$$SQR = \frac{\sum_j (y_{1j} - y_{2j})^2}{2} - \frac{(T_1 - T_2)^2}{2J}$$

Como vemos, neste caso, $SQR(Y_1)$ equivale a SQR da análise de variância, o que nos leva a concluir, concordando com STEEL e TORRIE (1960), que no caso de um experimento em blocos casualizados, com apenas dois tratamentos, o problema da heterocedasticidade é irrelevante.

5.2 - Decomposição do Resíduo na Análise Conjunta de Experimentos

5.2.1 - Caso geral

Consideremos um grupo de experimentos em blocos casualizados, com o mesmo número de repetições, contendo I tratamentos, J blocos por experimento, distribuídos em K locais diferentes. Indicamos por y_{ijk} a observação do k -ésimo local, no j -ésimo bloco, do i -ésimo tratamento. Temos o seguinte modelo matemático:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_{jk} + \ell_k + (t\ell)_{ik} + e_{ijk} ,$$

onde, m = média geral;

t_i = efeito do i -ésimo tratamento;

b_{jk} = efeito do j -ésimo bloco no k -ésimo local;

ℓ_k = efeito do k -ésimo local;

$(t\ell)_{ik}$ = efeito da interação do i -ésimo tratamento com o k -ésimo local;

e_{ijk} = erro experimental.

Admitamos que os erros das observações individuais e_{ijk} se distribuam normalmente, com média zero e variância σ^2 , e sejam independentes. Do mesmo modo, consideremos que os termos da interação $(t\ell)_{ik}$ se distribuam normalmente, com média zero e variância σ_{ik}^2 , e sejam independentes.

Para discutir o teste F é necessário estudar a natureza dos quadrados médios na análise de variância. O desenvolvimen-

to do modelo nos fornece os resultados apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 - Esquema de análise e componentes de variância de um grupo de experimentos em blocos casualizados.

Causas de variação	G.L.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos d. Locais (B/L)	$K(J-1)$	$QM(B/L)$	$\sigma^2 + \frac{I \sum_j b_j^2}{K(J-1)}$
Locais (L)	$K-1$	QML	$\sigma^2 + \frac{IJ \sum_k \ell_k^2}{K-1}$
Tratamentos (T)	$I-1$	QMT	$\sigma^2 + J \sigma_{tl}^2 + \frac{JK \sum_i t_i^2}{I-1}$
Interação (TxL)	$(I-1)(K-1)$	$QM(TxL)$	$\sigma^2 + J \sigma_{tl}^2$
Resíduo	$K(I-1)(J-1)$	QMR	σ^2
T o t a l	$IJK-1$		

A Tabela 9 mostra que o denominador apropriado para o teste F de tratamentos é o quadrado médio da interação TxL.

Em geral os efeitos dos tratamentos se comportam de modo diferente de local para local. É de se esperar que, alguns componentes da $SQ(TxL)$ sejam muito maiores que outros, ou seja, a varia

ção da interação não é constante. Nesse caso, é importante fazer um teste de homogeneidade para os componentes da interação. Se o quadrado médio da interação (TxL) é heterogêneo, nesse sentido, o teste F para tratamentos não é válido.

Uma maneira de se contornar essa dificuldade, consiste em decompor a soma de quadrados de tratamentos, segundo um conjunto de contrastes ortogonais, que proporcionem as comparações de interesse. Do mesmo modo, pode-se decompor a soma de quadrados da interação (TxL), de forma a se obter um resíduo específico para testar cada um dos contrastes.

Sabemos, pelo método dos quadrados mínimos, que a soma de quadrados referente à interação (TxL) é dada por:

$$SQ(TxL) = \frac{1}{J} \sum_{i,k} (\sum_j y_{ijk})^2 - C - SQL - SQT ,$$

onde:

$$C = \frac{G^2}{IJK} = \frac{(\sum_{i,j,k} y_{ijk})^2}{IJK} ;$$

$$SQL = \frac{1}{IJ} \sum_k L_k^2 - C = \frac{1}{IJ} \sum_k (\sum_{i,j} y_{ijk})^2 - C ;$$

$$SQT = \frac{1}{JK} \sum_i T_i^2 - C = \frac{1}{JK} \sum_i (\sum_{j,k} y_{ijk})^2 - C .$$

Cancelando os termos semelhantes e agrupando convenientemente, podemos expressar a SQ(TxL) por uma diferença de somas de quadrados, como se segue:

$$SQ(T \times L) = \left[\frac{1}{J} \sum_{i,k} (\sum_j y_{ijk})^2 - \frac{1}{IJ} \sum_k L_k^2 \right] - \left[\frac{1}{JK} \sum_i T_i^2 - \frac{G^2}{IJK} \right],$$

o que nos permite aplicar a metodologia vista anteriormente para mostrar a sua decomposição.

Sejam as transformações ortogonais:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_I \end{bmatrix} = N \Lambda_1, \quad e \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_I \end{bmatrix} = N \Lambda_2,$$

onde N é uma matriz ortogonal, em que os elementos da última linha são todos iguais a $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Os vetores Λ_1 e Λ_2 são definidos por

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \sum_j y_{1jk} \\ \sum_j y_{2jk} \\ \vdots \\ \sum_j y_{Ijk} \end{bmatrix} \quad e \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_I \end{bmatrix}.$$

Considerando essas transformações, temos:

$$\sum_{i=1}^I r_i^2 = R'R = \Lambda_1' N'N \Lambda_1 = \Lambda_1' \Lambda_1 = \sum_i \left(\sum_j y_{ijk} \right)^2$$

e

$$\sum_{i=1}^I s_i^2 = S'S = \Lambda_2' N'N \Lambda_2 = \Lambda_2' \Lambda_2 = \sum_i T_i^2$$

e ainda, o I-ésimo elemento de cada uma dessas matrizes é:

$$r_I = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_i \left(\sum_j y_{ijk} \right) = \frac{1}{\sqrt{I}} L_k \quad \therefore \quad r_I^2 = \frac{1}{I} L_k^2$$

e

$$s_I = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_i T_i = \frac{1}{\sqrt{I}} G \quad \therefore \quad s_I^2 = \frac{1}{I} G^2$$

Levando em conta que a $SQ(T \times L)$ pode também ser expressa por:

$$SQ(T \times L) = \frac{1}{J} \left\{ \sum_k \left[\sum_i \left(\sum_j y_{ijk} \right)^2 - \frac{1}{I} L_k^2 \right] - \frac{1}{K} \left[\sum_i T_i^2 - \frac{G^2}{I} \right] \right\}$$

e aplicando as transformações anteriormente descritas, temos:

$$SQ(T \times L) = \frac{1}{J} \left[\sum_k \left(\sum_{h=1}^{I-1} r_h^2 \right) - \frac{1}{K} \left(\sum_{h=1}^{I-1} s_h^2 \right) \right]$$

Considerações análogas às feitas para o caso de blocos casualizados, nos levam a obter:

$$r_h^2 = \frac{\left[\sum_i c_{hi} \left(\sum_j y_{ijk} \right) \right]^2}{\sum_i c_{hi}^2} \quad \text{e} \quad s_h^2 = \frac{(\sum_i c_{hi} T_i)^2}{\sum_i c_{hi}^2},$$

o que nos conduz a

$$SQ(T \times L) = \frac{1}{J} \left[\sum_k \sum_{h=1}^{I-1} \frac{(\sum_{i,j} c_{hi} y_{ijk})^2}{\sum_i c_{hi}^2} - \frac{1}{K} \sum_{h=1}^{I-1} \frac{(\sum_i c_{hi} T_i)^2}{\sum_i c_{hi}^2} \right]$$

ou ainda:

$$SQ(T \times L) = \sum_{h=1}^{I-1} \left[\sum_k \frac{(\sum_{i,j} c_{hi} y_{ijk})^2}{J \sum_i c_{hi}^2} - \frac{(\sum_i c_{hi} T_i)^2}{JK \sum_i c_{hi}^2} \right]$$

Vemos então que a $SQ(T \times L)$ pode ser decomposta em $(I-1)$ componentes do tipo

$$SQ(T \times L)_h = \sum_k \frac{(\sum_{i,j} c_{hi} y_{ijk})^2}{J \sum_i c_{hi}^2} - \frac{(\sum_i c_{hi} T_i)^2}{JK \sum_i c_{hi}^2}.$$

Podemos mostrar, com os mesmos argumentos usados em 5.1.1, que cada um desses componentes, correspondente à soma de quadrados do resíduo de um contraste Y_h , o que nos permite escrever:

$$SQ(TxL)_h = SQR(Y_h) = \sum_k \frac{\hat{\gamma}_{hk}^2}{J \sum_i c_{hi}^2} - \frac{\hat{\gamma}_h^2}{JK \sum_i c_{hi}^2},$$

onde $\hat{\gamma}_{hk}$ é a estimativa do contraste Y_h no local K .

Como $SQ(TxL)$ tem $(I-1)(K-1)$ graus de liberdade, cada um dos $(I-1)$ componentes tem $(K-1)$ graus de liberdade, e dá origem a quadrados médios do tipo:

$$QMR(Y_h) = \frac{SQR(Y_h)}{K-1},$$

que são os resíduos específicos para testar contrastes entre totais de tratamentos.

Para discussão desse resultado, usamos os dados apresentados na Tabela 2, cuja análise conjunta está na Tabela 10.

Tabela 10 - Análise de variância preliminar dos dados da Tabela 2.

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Locais (L)	6	3.691,59	615,27	14,43**
Tratamentos (T)	7	3.276,19	468,03	10,89**
Interação (TxL)	42	1.804,55	42,97	11,13**
Resíduo	147	...	3,86	

Pela análise de variância podemos concluir que, embora haja interação significativa, isto é, embora o comportamento relativo das variedades difira significativamente de um local para ou

tro, há efeitos gerais de variedades que se sobrepõem a essas variações, indicando algumas variedades como de maior produção em toda a região estudada.

Conforme já foi visto anteriormente, os tratamentos, que são representados por oito variedades de batatinha, podem ser divididos em dois grupos.

O primeiro grupo, aqui denominado por grupo A, é formado pelas variedades: S. Rafaela, Huinkul, B 72-53 A, B 116-51 e B 1-52, que por comodidade de notação designaremos por A_1 , A_2 , A_3 , A_4 e A_5 .

O segundo grupo, aqui denominado por grupo B, é constituído pelas variedades: Kennebec, B 25-50 E e Buena Vista, designados por B_1 , B_2 e B_3 .

Baseados nos grupos de tratamentos acima descritos, elegemos um conjunto de contrastes ortogonais, que julgamos de interesse, e que dão origem às comparações abaixo discriminadas.

1. Grupo A versus Grupo B;
2. A_1 versus $(A_2+A_3+A_4+A_5)$;
3. (A_2+A_3) versus (A_4+A_5) ;
4. A_2 versus A_3 ;
5. A_4 versus A_5 ;
6. B_1 versus (B_2+B_3) ;
7. B_2 versus B_3 .

A Tabela 11 mostra os contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados. Cada soma de quadrados dessa Tabela tem um grau de liberdade e seu conjunto constitui uma decomposição da soma de quadrados de tratamentos.

Tabela 11 - Contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados referentes aos dados da Tabela 2.

Tratamentos	Totais de Tratamentos	\hat{Y}_1	\hat{Y}_2	\hat{Y}_3	\hat{Y}_4	\hat{Y}_5	\hat{Y}_6	\hat{Y}_7
A ₁	555,7	3	4	0	0	0	0	0
A ₂	611,0	3	-1	1	1	0	0	0
A ₃	534,9	3	-1	1	-1	0	0	0
A ₄	568,5	3	-1	-1	0	1	0	0
A ₅	543,1	3	-1	-1	0	-1	0	0
B ₁	313,8	-5	0	0	0	0	2	0
B ₂	387,0	-5	0	0	0	0	-1	1
B ₃	346,6	-5	0	0	0	0	-1	-1
	\hat{Y}_h	3202,6	-34,7	34,3	76,1	25,4	-106,0	40,4
	$JK \sum_i c_{hi}^2$	28(120)	28(20)	28(4)	28(2)	28(2)	28(6)	28(2)
	$SQ(\hat{Y}_h)$	3052,58	2,15	10,50	103,41	11,52	66,88	29,15

Os contrastes da Tabela 11 podem ser testados usando a interação (TxL) da análise conjunta, resultando a análise apresentada na Tabela 12.

Tabela 12 - Análise de variância dos dados da Tabela 2, com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos, usando o resíduo médio.

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Y ₁	1	3.052,58	3.052,58	71,04**
Y ₂	1	2,15	2,15	0,050
Y ₃	1	10,50	10,50	0,244
Y ₄	1	103,41	103,41	2,41
Y ₅	1	11,52	11,52	0,268
Y ₆	1	66,88	66,88	1,56
Y ₇	1	29,15	29,15	0,678
(Tratamentos)	(7)	(3.276,19)		
Interação (TxL)	42	1.804,55	42,97	

Podemos fazer aqui a mesma consideração feita para o caso de blocos casualizados, ou seja, a análise apresentada na Tabela 12 pode ser considerada válida se for verdadeira a hipótese de homogeneidade da interação (TxL). Para verificarmos esta hipótese, vamos aplicar aos dados em questão, testes para homogeneidade de variância.

A aplicação do teste de Bartlett, nos leva ao resultado que se segue:

$$M = (2,3026)(27) [8(1,4056) - 10,2702] = 60,5911$$

$$C = 1 + \frac{8+1}{3(8)(27)} = 1,0139$$

$$\chi_c^2 = \frac{M}{C} = 59,7604, \text{ com 7 graus de liberdade.}$$

Como:

$$\chi_c^2 = 59,7604 > 18,48 = \chi_{.01(7)}^2 ,$$

concluimos que existe uma variação significativa da interação, ao nível de 1%.

Pelo teste de Cochran, temos:

$$c = \frac{48,7425}{203,5606} = 0,2394 .$$

A tabela apropriada nos dá o valor crítico 0,2220 ao nível de significância de 5%. Como vemos, também este teste acusa a falta de homogeneidade.

Constatada a heterogeneidade da interação (TxL), procedemos à decomposição da SQ(TxL), visando a buscar um resíduo apropriado para testar cada um dos contrastes estipulados.

A estimativa de cada contraste dentro de cada um dos locais é apresentada na Tabela 13.

Tabela 13 - Estimativas dos contrastes definidos na Tabela 11, dentro de cada um dos locais.

Locais	Contrastes						
	1	2	3	4	5	6	7
1	322,4	-3,3	25,9	12,8	-3,5	-2,0	0,6
2	1078,1	-3,7	-10,7	9,3	2,2	-44,0	22,4
3	624,4	36,7	12,3	9,0	0,9	-30,1	16,3
4	303,0	-90,5	-4,7	10,5	2,6	-29,4	9,8
5	211,4	29,2	7,6	10,8	16,0	1,6	0,0
6	109,9	-15,3	18,1	10,5	8,4	11,0	-13,8
7	553,4	12,2	-14,2	13,2	-1,2	-13,1	5,1
Total	3202,6	-34,7	34,3	76,1	25,4	-106,0	40,4

Para qualquer contraste Y_h , o resíduo apropriado \bar{e} é obtido através de seus componentes \hat{Y}_{hk} nos 7 locais, conforme se segue:

$$SQR(Y_h) = \frac{\sum_{k=1}^7 \hat{Y}_{hk}^2}{4 \sum_{i=1}^8 c_{hi}^2} - \frac{\hat{Y}_h^2}{28 \sum_{i=1}^8 c_{hi}^2} .$$

A Tabela 14 apresenta a decomposição de $SQ(TxL)$ segundo o conjunto de contrastes ortogonais definidos anteriormente.

Tabela 14 - Resultados da decomposição da soma de quadrados da interação (TxL).

Contrastes	1	2	3	4	5	6	7
$\sum_{k=1}^7 \gamma_{hk}^2$	4397,80	134,97	96,61	105,34	44,08	166,90	135,04
$4 \sum_{i=1}^8 c_{hi}^2$							
γ_h^2	3052,58	2,15	10,50	103,41	11,52	66,88	29,15
$28 \sum_{i=1}^8 c_{hi}^2$							
Componentes da SQ(TxL)	1345,22	132,82	86,11	1,93	32,56	100,02	105,89

Cada um dos componentes da SQ(TxL) tem 6 graus de liberdade e dá origem aos quadrados médios que constituem os resíduos específicos para testar os contrastes, conforme mostra a Tabela 15.

Tabela 15 - Análise de variância dos dados da Tabela 2, com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos, usando resíduos específicos.

Causas de variação	G.L.	QM(\bar{Y}_h)	QMR(\bar{Y}_h)	F
Y_1	1	3.052,58	224,21	13,61*
Y_2	1	2,15	22,14	0,097
Y_3	1	10,50	14,35	0,732
Y_4	1	103,41	0,32	321,65**
Y_5	1	11,52	5,43	2,12
Y_6	1	66,88	16,67	4,01
Y_7	1	29,15	17,65	1,65

Confrontando as análises apresentadas nas Tabelas 12 e 15, notamos que, além da modificação do nível de significância do primeiro contraste, foi possível ainda, através do emprego do resíduo específico, detectar um outro contraste significativamente diferente de zero, no caso, o contraste de número 4.

5.2.2 - Caso particular

Na análise conjunta de experimentos, algumas vezes não é de interesse fazer a decomposição total da interação (TxL), em virtude da diminuição dos graus de liberdade. Neste caso podemos fazer uma decomposição parcial.

No exemplo que examinamos em 5.1.1 temos dois grupos

de tratamentos e a decomposição pode ser feita da seguinte forma: uma parte para comparar os grupos entre si, uma parte para comparar os tratamentos dentro do grupo A, e outra para comparar os tratamentos dentro do grupo B, resultando a análise apresentada na Tabela 16.

Tabela 16 - Análise de variância dos dados da Tabela 2, com decomposição parcial do resíduo.

Causas de variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Grupos (A vs B)	1	3.052,58	3.052,58	13,61*
Tratamentos d. Grupo A	4	127,58	31,90	3,02*
Tratamentos d. Grupo B	2	96,03	48,02	2,80
(Tratamentos)	(7)	(3.276,19)		
Interação Grupos x Locais	6	1.345,22	224,21	
Interação Grupo A x Locais	24	254,42	10,56	
Interação Grupo B x Locais	12	205,91	17,16	
(Interação TxL)	(42)	(1.804,55)		

Na análise da Tabela 16, para testar os grupos de tratamentos entre si usamos a interação grupos x locais. Podemos observar que este caso corresponde exatamente ao teste do contraste número 1, através de seu resíduo específico, conforme foi feito anteriormente.

No grupo A temos 5 tratamentos e dentro deste grupo são possíveis 4 contrastes ortogonais entre si, cada um com um grau

de liberdade. Na análise apresentada na Tabela 16, os 4 contrastes foram agrupados, dando origem a uma soma de quadrados com 4 graus de liberdade. Para testar a variação dos tratamentos dentro do grupo A, reunimos os componentes do QM(TxL), relativos aos contrastes entre tratamentos deste grupo, e usamos a média desses valores. A seguir discriminamos o procedimento aqui descrito.

$$SQ(\text{Tratamentos d. Grupo A}) = SQ(Y_2) + SQ(Y_3) + SQ(Y_4) + SQ(Y_5) ,$$

$$SQ(\text{Interação Grupo A x Locais}) = SQR(Y_2) + SQR(Y_3) + SQR(Y_4) + SQR(Y_5) ,$$

$$QM(\text{Interação Grupo A x Locais}) = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{l} QMR(Y_2) + QMR(Y_3) + QMR(Y_4) + \\ + QMR(Y_5) \end{array} \right] .$$

É evidente que, para conseguirmos a decomposição da SQT e da SQ(TxL) como a apresentada na Tabela 16, não necessitamos fazer previamente a decomposição total. Basta que se use a maneira tradicional de calcular a soma de quadrados de uma interação, ou seja, procurando a obtenção direta da interação de cada grupo de tratamentos com locais. O que pretendemos na exposição anterior foi mostrar a equivalência de procedimentos.

As considerações feitas em relação aos tratamentos do grupo A, podem ser estendidas aos tratamentos do grupo B.

6. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos, podemos concluir:

6.1 - No caso de um experimento em blocos casualizados, a decomposição da soma de quadrados do resíduo pode ser obtida através do emprego de transformações lineares.

6.2 - Na análise conjunta de experimentos em blocos casualizados, a soma de quadrados da interação (T x L) pode ser decomposta, e a decomposição, como no caso anterior, pode ser obtida através do emprego de transformações lineares.

6.3 - No caso de blocos casualizados, tanto nas análises individuais como na análise conjunta, cada componente do resíduo, obtido através de transformações lineares, corresponde ao resíduo apropriado para testar um dos contrastes segundo os quais foi decomposta a

soma de quadrados de tratamentos.

6.4 - Quando a hipótese de homocedasticidade não é verdadeira, o teste F para contrastes, estruturado através de resíduo específico, tende a apresentar resultados diferentes dos obtidos pelo uso do resíduo médio.

6.5 - Num experimento em blocos casualizados, quando temos apenas dois tratamentos, o problema da heterocedasticidade é irrelevante.

6.6 - Quando se faz a subdivisão do resíduo em componentes simples, ela se faz acompanhar de uma subdivisão do seu número de graus de liberdade, o que nos leva a recomendar cautela no uso deste método, devido à redução drástica do número de graus de liberdade para cada resíduo específico.

7. SUMMARY

The correct use of the analysis of variance requires some basic conditions. One of them is homocedasticity, which means that the experimental errors must have homogeneous variances.

In this work we are dealing with the case the hypothesis of homocedasticity of variances is not valid.

In order to avoid the problem it was proposed the decomposition of the residual sum of squares into components applicable and appropriate to the comparisons (contrasts) of interest. It was applied the method of linear transformation to obtain the residual decomposition.

Two cases were examined: a) an analysis of a randomized block design and, b) a pooled analysis of randomized block designs.

In both cases, it was shown that each residual component obtained by linear transformation, corresponds to the appropriate residual for testing a contrast from the orthogonal set which has indicated the corresponding treatment sum of squares decomposition.

For randomized block design which mathematical model is,

$$y_{ij} = m + t_i + b_j + e_{ij} ,$$

the residual mean square specific to each contrast Y_h is as follows,

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{J-1} \left[\frac{\begin{matrix} I \\ \sum_{j=1} \hat{\psi}_{hj}^2 \end{matrix}}{I} - \frac{\hat{\psi}_h^2}{J \sum_{i=1} c_{hi}^2} \right]$$

where $\hat{\psi}_{hj}$ stands for the estimate of the Y_h contrast within the j^{th} block.

For the case of the pooled analysis of variance of randomized block designs we have considered the mathematical model:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_{jk} + \ell_k + (t\ell)_{ik} + e_{ijk} .$$

In this case the residual mean square considered to test the treatment effect is the Treatment x Local (TxL) interaction as we have show through the variance-component decomposition. The components of this interaction each corresponding to the specific residual to test a contrast Y_h is given by

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{K-1} \left[\begin{array}{c} K \\ \Sigma \\ k=1 \end{array} \frac{\hat{\gamma}_{hk}^2}{\begin{array}{c} I \\ J \Sigma \\ i=1 \end{array} c_{hi}^2} - \frac{\hat{\gamma}_h^2}{\begin{array}{c} I \\ JK \Sigma \\ i=1 \end{array} c_{hi}^2} \right]$$

where $\hat{\gamma}_{hk}$ is the estimate of the Y_h contrast in the k^{th} local.

It was shown in this work that under heterocedasticity of variances the "F" test for contrasts based on specific residuals gives different result when compared to the one based on the average mean square.

Another conclusion which comes from the numerical results is that the decomposition of the residual sum of squares in to simple components implies a corresponding decomposition of its number of degrees of freedom so that we recommend caution when using the proposed method because of the drastic reduction of the number of degrees of freedom associated to each specific residual.

8. LITERATURA CITADA

BARTLETT, M.S., 1937. Properties of Sufficiency and Statistical Tests. Proceedings of the Royal Statistical Society, Ser. A, 160:268-82.

BOX, G.E.P., 1953. Non-Normality and Tests on Variances. Biometrika. Cambridge, 40:318-335.

COCHRAN, W.G., 1947. Some Consequences When the Assumptions for the Analysis of Variance Are Not Satisfied. Biometrics. Raleigh, 3: 22-38.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Design. 2^a Edição, Nova York, Wiley Publications in Statistics, 611 p.

COX, D.R. e E.J. SNELL, 1968. A General Definition of Residuals. Journal of the Royal Statistical Society. Londres, 30:248-275.

DIXON, W.J. e F.J. MASSAY JR., 1969. Introduction to Statistical Analysis. 3^a Edição, Nova York, McGraw-Hill Book Company. 638 p.

HOFFMANN, R., 1975. Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamento. Mimeografado. Piracicaba, ESALQ/USP, 22 p.

KOCH, G.G., 1970. The Use of Non-Parametric Methods in the Statistical Analysis of a Complex Split Plot Experiment. Biometrics. Raleigh, 26:105-128.

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8.^a Edição. Piracicaba, SP, Livraria Nobel, 430 p.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. Statistical Methods. 6.^a Edição. Ames, Iowa, The Iowa State University Press. 593 p.

STEEL, R.G.D. e T.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. Nova York, McGraw-Hill Book Company Inc. 481 p.