ANÁLISE INTRABLOCOS DE UM EXPERIMENTO EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS, AUMENTADO PELA ADIÇÃO DE ALGUNS TRATAMENTOS COMUNS A TODOS OS BLOCOS

JOSÉ GERALDO FERREIRA

Orientador: Dr. Clóvis Pompílio de Abreu

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Junho, 1 9 8 0

Aos meus pais,

que tantos sacrifícios dedicaram à
minha formação profissional;

Às minhas irmãs,

pela amizade e companheirismo que
sempre nos uniram;

À Diva, minha esposa,

pelo apoio e estímulo constantes;

Aos meus filhos Ricardo e Renato,

D E D I C O .

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Clóvis Pompílio de Abreu, pela orientação geral do trabalho.

Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, pelas brilhantes sugestões apresentadas.

Ao Dr. F. Pimentel Gomes, Coordenador do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica no ciclo 1974/76, pela maneira sábia com que dirigiu o Curso, bem como pelas valiosas sugestões apresentadas.

Ao Governo do Estado do Espírito Santo, pela autorização concedida para a realização do Curso.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro concedido.

A todos que me ajudaram e estimularam a estudar.

Í N D I C E

1. RESUMO

Trata o presente trabalho da análise intrablocos de um ensaio em blocos incompletos equilibrados, que sofreu a adição de c tratamentos em cada bloco.

O modelo adotado para a análise de variância é

$$Y = X\beta + \varepsilon ,$$

onde: Y = vetor das observações y_{uh};

X = matriz dos coeficientes dos parâmetros;

β = vetor dos parâmetros;

ε = vetor dos erros e_{uh}.

Através da utilização do método dos quadrados mínimos, fórmulas específicas são obtidas, de sorte a permitir:

a) a estimação dos efeitos dos tratamentos ajustados, isto é, aqueles obtidos através da eliminação dos efeitos de blocos;

b) o cálculo das diversas somas de quadrados, para a composição do quadro de análise de variância;

c) o cálculo das estimativas das variâncias dos três (3) tipos existentes de contrastes entre os efeitos estimados de tratamentos ajustados.

O material utilizado foi um experimento sobre competição de variedades e linhagens de soja (*Glycine max* L.), realizado no Espírito Santo, onde toda a teoria desenvolvida foi aplicada.

2. INTRODUÇÃO

Na experimentação agrícola, não raro o pesquisador se depara com uma situação em que se torna inviável o estabelecimento de blocos completos, isto é, onde cada um contém todos os tratamentos.

É o que acontece, por exemplo, quando o número de tratamentos é muito grande, tornando-se difícil conseguir uma adequada homogeneidade dentro dos blocos, ou quando o material experimental é muito heterogêneo, ou ainda, quando o número de unidades por bloco é forçosamente menor que o número de tratamentos. Seja qual for o motivo, o pesquisador terá como uma boa opção, nessas circunstâncias, a utilização de blocos incompletos, isto é, onde cada bloco contém apenas determinados tratamentos.

Fazem parte desse grupo de ensaios, os denominados blocos incompletos equilibrados ou balanceados, de grande utilização entre nós, caracterizados basicamente por v tratamentos, repetidos r vezes em b blocos, constituídos por k parcelas cada, onde dois tratamentos aparecem juntos, no mesmo bloco, o mesmo número λ de vezes, devendo satisfazer ainda às seguintes condições: $bk = rv$ e $\lambda(v-1) = r(k-1)$.

Por outro lado, há situações em que se recomenda o uso de determinados tratamentos em todos os blocos. É o que ocorre, por exemplo, quando se deseja comparar alguns tratamentos novos com outros de reconhecido comportamento e interesse, e que deveriam servir como uma espécie de controle.

No trabalho ora proposto, considera-se o caso de um ensaio em blocos incompletos equilibrados, onde cada bloco sofreu a adição de c tratamentos, comuns a todos eles. Depara-se, assim, com duas categorias de tratamentos: os comuns a todos os blocos, denominados "tratamentos adicionais" e os comuns a apenas determinado número de blocos, ou seja, aqueles incluídos entre os v tratamentos do delineamento original.

Pretende-se apresentar o método geral de análise intrablocos para esse tipo de ensaio, isto é, aquele onde só as comparações entre parcelas do mesmo bloco são usadas nas estimativas dos efeitos dos tratamentos.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Diversos autores têm se preocupado com a análise de experimentos em blocos com tratamentos comuns, principalmente depois do trabalho desenvolvido por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958), quando, a partir daí, começaram a surgir diversos estudos em torno do assunto. Esses autores consideram o caso da análise de um grupo de experimentos em blocos completos casualizados, onde alguns tratamentos são comuns a todos os blocos do conjunto. Os tratamentos comuns são designados por esse nome e os outros são denominados tratamentos "regulares". Consideram o estudo como um caso especial de um trabalho anteriormente proposto por RAO (1947) e comparam-no com uma situação similar resumidamente discutida por YATES (1936). O conjunto dos experimentos é encarado como um delineamento em blocos incompletos (modelo tipo I) e, a soma de quadrados dos tratamentos ajustados é obtida pela subtração entre a soma de quadrados total e a soma de quadrados de blocos (usual) mais a soma de quadrados da interação (tratamentos comuns versus experimentos) mais a soma de quadrados do resíduo. Apresentam, ainda, um método para obtenção das estimativas das variâncias de quatro (4) tipos de contrastes, envolvendo as médias de tratamentos ajustadas, discutindo alguns testes de significância possíveis de serem aplicados. A análise de variância é dada e ilustrada com dois experimentos envolvendo diferentes espécies de *Eucalyptus*, cada qual com cinco (5) repetições e dez (10) tratamentos, um dos quais comum a todos os blocos.

De outra forma, FEDERER (1961) apresenta um estudo onde define como "delineamento aumentado" algum delineamento padrão (blocos completos casualizados, blocos incompletos e outros) que sofra o acréscimo de "novos" tratamentos e apresenta a análise de variância generalizada para esses delineamentos. Ilustra o trabalho focalizando inicialmente um exemplo em que o delineamento básico foi em blocos casualizados, aumentados por um conjunto de "novos" tratamentos, cada um desses figurando somente uma vez no experimento. A análise de variância é apresentada e o cálculo das estimativas das variâncias dos contrastes é feito considerando-se todos os tipos possíveis de comparações, entre os efeitos de tratamentos, ou seja, entre 2 tratamentos "padrões", entre 2 "novos" tratamentos no mesmo bloco e em blocos diferentes, e entre um tratamento "padrão" com um "novo" tratamento. Finalmente, o autor apresenta um segundo exemplo em que o delineamento básico é um látice balanceado, novamente com cada "novo" tratamento aparecendo somente uma vez e o cálculo das estimativas das variâncias dos contrastes entre tratamentos é feito de maneira semelhante ao primeiro exemplo.

Um método para análise conjunta de experimentos em Blooos Incompletos Balanceados com alguns tratamentos comuns foi apresentado por PAVATE (1961), que considera o trabalho de PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958) como um caso especial do seu. Considera $\underline{g}$ experimentos em Blocos Incompletos Balanceados (parâmetros $\underline{v}$, $\underline{b}$, $\underline{r}$, $\underline{k}$ e $\underline{\lambda}$) para serem analisados conjuntamente e supõe haver, para cada experimento, $\underline{c}$ tratamentos comuns, de modo a constituir um total de $c + g(v-c)$ diferentes tratamentos no conjunto. A soma de quadrados dos tratamentos ajustados é obtida por 2 métodos: o método geral, sugerido por RAO (1947) e o método simplificado por ele introduzido. Trata ainda das estimativas dos efeitos de tratamentos e das variâncias dos contrastes. O autor considera ainda quatro (4) casos especiais de análise conjunta desses Blocos Incompletos Balanceados:

(a) experimentos com apenas 1 tratamento comum, ou seja, quando $c = 1$;

(b) casos em que $v = c$;

(c) e (d) casos em que os Blocos Incompletos Balanceados reduzem-se a blocos completos casualizados, com $\underline{c}$ tratamentos comuns (estudado por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES, 1958).

SHAH (1963), estudando os delineamentos em Blocos Incompletos Balanceados (parâmetros $\underline{v}$, $\underline{b}$, $\underline{r}$, $\underline{k}$ e $\underline{\lambda}$) provou que

$$x \leq b - 1 - \left[k(r - 1) - t(b - 1)\right]^2/D ,$$

onde: x = nº de blocos possuindo $\underline{t}$ tratamentos comuns com um dado bloco;

$$D = (r - \lambda)k + (\lambda - 1)k^2 + t^2(b - 1) - 2tk(r - 1) .$$

Mostrou, ainda, que se $\underline{x}$ é exatamente igual ao limite máximo do número de blocos, então

$$y = \left[D + tk(r - 1)\right] / \left[k(r - 1) - t(b - 1)\right]$$

é um número inteiro, igual ao número de tratamentos que o dado bloco tem em comum com cada um dos (b - x - 1) blocos restantes.

Um estudo semelhante foi desenvolvido por TREHAN (1963), o qual demonstrou que se $\underline{x}$ é o número de tratamentos comuns para dois blocos de um Bloco Incompleto Balanceado com os parâmetros $\underline{v}$, $\underline{b}$, $\underline{r}$, $\underline{k}$ e $\underline{\lambda}$, então

$$\text{máx.}\ (0\ ,\ T_1) \leq x \leq \text{mín.}(k\ ,\ T_2)\ ,$$

onde: $T_1 = k(r - 1)/(b - 1) - A(b - 2)^{1/2}$;

$T_2 = k(r - 1)/(b - 1) - A(b - 2)^{1/2}$;

$A = \{(v - k)(1 - k)(r - \lambda)\}^{1/2} /(b - 1).$

SWAMINATHAN e DAS (1964) também desenvolveram um estudo sobre análise conjunta de Blocos Incompletos Balanceados com tratamentos comuns, considerando o caso de g experimentos em Blocos Incompletos Balanceados e c tratamentos comuns a todos os ensaios, distinguindo os 2 tipos de tratamentos considerados por outros autores, quais sejam, os tratamentos regulares e os comuns. Os autores apresentam um método de análise desse delineamento, de acordo com as pressuposições do modelo I, bem como um processo para o cálculo das variâncias dos diferentes contrastes entre os efeitos de tratamentos.

Ainda com relação a esses tipos de delineamentos, KALIN (1966) abordou o assunto de uma maneira diferente: a cada bloco de um BIB (elementos t, b, r, k e λ) acrescentou c "control treatments", de sorte a possuir o conjunto um número de tratamentos igual a $v = t + c$, sendo $m = k + c$ o tamanho de cada bloco. Definiu como sendo:

$y' = (y_1, \ldots, y_n)$ o vetor das $n = mb$ observações;

$\phi' = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_v) = (\mu, \phi_1', \ldots, \phi_c', \phi_1'', \ldots, \phi_t'')$ o vetor do parâmetro tratamentos;

$\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_b)$ o vetor do parâmetro bloco, com

$$\beta \cap N(0 ; I_b \sigma_b^2) ;$$

$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ o vetor dos erros, com $e_i \cap N(0 ; I_n \sigma^2)$.

Através do modelo $y = L\beta + A\phi + \varepsilon$, o autor estima os efeitos de tratamentos pelos três sistemas de análise conhecidos: intra-blocos, inter-blocos e combinação das anteriores. O método de análise é ilustrado com detalhes através de um experimento situado no campo médico em que considerou apenas um "control treatment", isto é, onde $c = 1$.

Por outro lado, AFONJA (1968) mostrou que g experimentos em BIB, não precisando todos possuirem necessariamente os mesmos parâmetros, podem ser convenientemente agrupados quando há alguns tratamentos comuns e cada um dos restantes, denominados tratamentos regulares, ocorre em somente um desses experimentos. A estimação dos efeitos de tratamentos envolve a inversão de uma matriz de dimensões $(g+1) \times (g+1)$,cuja forma é apresentada. Nesse estudo, o autor estabelece fórmulas para as somas de quadrados dos tratamentos ajustados e para a soma de quadrados do resíduo,ilustrando com um exemplo para o caso de blocos completos em geral.

Como extensão do método de análise conjunta apresentado em 1958, PIMENTEL GOMES (1970) considerou o caso em que o número de tratamentos regulares e o número de repetições de blocos eram variáveis, ou seja, quando o i-ésimo experimento possuísse z_i tratamentos regulares mais c tratamentos comuns, com r_i repetições, originando, dessa forma, um total de tratamentos igual a $v = \Sigma z_i + c$. Apresenta o esquema de análise de variância do conjunto de ensaios, sendo que as diversas somas de quadrados são obtidas de modo semelhante ao trabalho anteriormente desenvolvido por PIMENTEL GOMES e GUIMARÃES (1958). Como ilustração do método, analisa conjuntamente, com detalhes, dois experimentos com variedades de cana-de-açúcar.

possuindo um deles 3 tratamentos regulares e 3 blocos, enquanto que o outro contava com 4 tratamentos regulares e 4 blocos, tendo ambos o mesmo número de tratamentos comuns (4). Estabelece os quatro (4) tipos de contrastes envolvendo as médias de tratamentos ajustados, bem como fórmulas para obtenção das estimativas de suas variâncias e aplica o teste de Tukey em todos os casos.

4. MATERIAL E MÉTODOS

4.1 - Material

A teoria desenvolvida no presente trabalho é aplicada num experimento sobre competição de variedades e linhagens de soja (*Glycine max* L.), instalado na área experimental do Centro Agropecuário da Universidade Federal do Espírito Santo.

O delineamento utilizado foi o de blocos incompletos equilibrados, aumentado pela adição de dois (2) tratamentos em cada bloco.

Os tratamentos foram as seguintes linhagens e variedades:

Tratamento 1: CTS 135

Tratamento 2: CTS 133

Tratamento 3: CTS 138

Tratamento 4: CTS 139

Tratamento 5: CTS 129

Tratamento A_1: Hardee

Tratamento A_2: Pelicano

4.2 - Métodos

Seja um experimento em blocos incompletos equilibrados (parâmetros $\underline{v}$, $\underline{b}$, $\underline{r}$, $\underline{\lambda}$ e $\underline{k}$), que sofreu a adição de $\underline{c}$ tratamentos, comuns a todos os blocos.

Os dois tipos de tratamentos, assim obtidos, serão designados por:

1, 2, 3, ..., I = os $\underline{v}$ tratamentos do experimento original;

A_1, A_2, A_3, ..., A_c = os $\underline{c}$ tratamentos adicionais de cada bloco.

Os novos elementos do conjunto serão representados por:

v' = nº de tratamentos = $v + c$;

b = nº de blocos;

k' = tamanho de cada bloco = $k + c$;

n = nº total de parcelas = $k'b$;

r' = nº de repetições de cada tratamento $\begin{cases} = b \text{ (para os tratamentos adicionais)} \\ = r \text{ (para os tratamentos do experimento original} \end{cases}$

λ' = nº de vezes em que dois tratamentos ocorrem juntos no mesmo bloco

- = b, no caso de dois tratamentos adicionais;
- = r, no caso de um tratamento de cada tipo;
- = λ, no caso de dois tratamentos do experimento original.

Em atendimento aos objetivos propostos, o trabalho será desenvolvido com base na teoria geral dos delineamentos em blocos incompletos, particularizando os resultados e conclusões, sempre que necessário, para esse caso específico.

Como se sabe, o modelo matemático em que se baseia a análise de variância desses delineamentos é:

$$y_{uh} = m + t_u + b_h + e_{uh} \quad ,$$

onde: y_{uh} = valor observado na parcela que recebeu o tratamento u, situada no bloco h;

m = média geral dos dados;

t_u = efeito do tratamento u;

b_h = efeito do bloco h;

e_{uh} = contribuição do acaso (erro).

Entretanto, prefere-se utilizar o mesmo modelo sem a média, isto é, $y_{uh} = t_u + b_h + e_{uh}$, visto que, considerando os propósitos desse estudo, chega-se aos mesmos resultados, com maior facilidade.

Representado na forma matricial, o modelo assume o aspecto seguinte:

$$Y = X\,\beta + \varepsilon \quad ,$$

em que:

Y = vetor das observações y_{uh}, de dimensões (nx1), do tipo

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \cdots \\ y_{21} \\ \cdots \\ y_{A_{1,1}} \\ \cdots \\ y_{A_{c,b}} \end{bmatrix}$$

β = vetor dos parâmetros, de dimensões $[(v' + b)x1]$ =

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_I \\ t_{A_1} \\ t_{A_2} \\ \cdots \\ t_{A_c} \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_b \end{bmatrix}$$

ε = vetor dos erros e_{uh}, de dimensões (nx1), do tipo
$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \dots \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{A_{1},1} \\ \dots \\ e_{A_{c},b} \end{bmatrix}$$

Deve-se supor que $e_{uh} \cap N(0\ ;\ \sigma^2)$.

X = matriz, de dimensões nx(v'+b) , constituída pelos coeficientes dos parâmetros nas equações $E(y_{uh}) = t_u + b_h$:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Cada x_{sk} é igual a 1 ou 0, conforme a equação contenha ou não o parâmetro $\underline{k}$. Para esse fim, os parâmetros são assim relacionados: t_1, t_2, ..., t_I, t_{A_1}, t_{A_2}, ..., t_{A_c}, b_1, b_2, ..., b_b.

4.2.1 - Estimação dos efeitos de tratamentos ajustados

Como se sabe, do modelo $Y = X\beta + \varepsilon$ chega-se facilmente ao sistema de equações normais

$$X'X\,\hat{\beta} = X'Y \qquad (1)$$

através da aplicação do método dos quadrados mínimos.

Como geralmente se usa tomar $X'X = S$, tem-se que

$$S\,\hat{\beta} = X'Y \; . \qquad (2)$$

Por outro lado, pode-se fazer $X = [X_1, X_2]$, onde:

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1I} & x_{1A_1} & x_{1A_2} & \cdots & x_{1A_c} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2I} & x_{2A_1} & x_{2A_2} & \cdots & x_{2A_c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nI} & x_{nA_1} & x_{nA_2} & \cdots & x_{nA_c} \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1b} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nb} \end{bmatrix}$$

Aqui, a exemplo do que foi feito anteriormente, cada x_{sk} é igual a 1 ou 0, conforme a equação S contenha ou não:

a) o tratamento k, em X_1;

b) o bloco k, em X_2.

Assim,

$$X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \quad \therefore \quad S = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}$$

As quatro matrizes, apresentadas em S, serão designadas doravante por

$$\begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix}$$

e, no caso presente, são representadas teoricamente por:

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{bmatrix},$$

de dimensões (v'xv');

$$K = \begin{bmatrix} k' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k' \end{bmatrix},$$

de dimensões (bxb);

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1b} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \cdots & n_{2b} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{I1} & n_{I2} & n_{I3} & \cdots & n_{Ib} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

de dimensões $(v' \times b)$.

Essa matriz é denominada "matriz de incidência", sendo cada n_{uh} igual a 1 ou 0, conforme o tratamento $\underline{u}$ ocorra ou não no bloco $\underline{h}$.

Por outro lado, pode-se considerar

$$\beta = \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \delta \end{bmatrix} ,$$

onde:

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_I \\ t_{A_1} \\ \cdots \\ t_{A_c} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdots \\ \delta_b \end{bmatrix}$$

Com referência ao sistema $S\hat{\beta} = X'Y$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = X'Y \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'Y \\ X_2'Y \end{bmatrix}$$

Como $X_1'Y$ corresponde à matriz $(v' \times 1)$ dos totais dos tratamentos, e, $X_2'Y$ à matriz $(b \times 1)$ dos totais dos blocos, pode-se representá-las por:

$$X_1'Y = T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdots \\ T_I \\ T_{A_1} \\ \cdots \\ T_{A_c} \end{bmatrix},$$

$$X_2'Y = B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_b \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} R & N \\ N' & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ B \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{cases} R\hat{\tau} + N\hat{b} = T & (3) \\ N'\hat{\tau} + K\hat{b} = B & (4) \end{cases}$$

Geralmente, o que interessa é a obtenção dos efeitos dos tratamentos ajustados, isto é, através da eliminação dos efeitos de blocos.

Para tanto, basta levar o valor de $\hat{\beta}$, dado em (4) à equação (3), chegando-se facilmente a

$$(R - \frac{1}{k'} NN')\ \hat{\tau} = T - \frac{1}{k'} NB \quad ,$$

ou, como é usual apresentar,

$$C\hat{\tau} = Q \quad , \qquad (5)$$

onde: $C = R - \frac{1}{k'} NN'$, e, $Q = T - \frac{1}{k'} NB$.

Por outro lado, tendo em vista a representação geral dada à matriz N, verifica-se que

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & r & r & \ldots & r \\ \lambda & r & \lambda & \ldots & \lambda & r & r & \ldots & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & r & r & r & & r \\ r & r & r & \ldots & r & b & b & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r & r & r & \ldots & r & b & b & \ldots & b \end{bmatrix}$$

Assim, a representação da matriz C (singular), de dimensões (v'xv') será:

$$C = \begin{bmatrix}
r(1-\frac{1}{k'}) & -\frac{\lambda}{k'} & -\frac{\lambda}{k'} & -\cdots & -\frac{\lambda}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\cdots & -\frac{r}{k'} \\
-\frac{\lambda}{k'} & r(1-\frac{1}{k'}) & -\frac{\lambda}{k'} & -\cdots & -\frac{\lambda}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\cdots & -\frac{r}{k'} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\frac{\lambda}{k'} & -\frac{\lambda}{k'} & -\frac{\lambda}{k'} & -\cdots & r(1-\frac{1}{k'}) & -\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\cdots & -\frac{r}{k'} \\
-\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\cdots & -\frac{r}{k'} & b(1-\frac{1}{k'}) & -\frac{b}{k'} & -\cdots & -\frac{b}{k'} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\frac{r}{k'} & -\cdots & -\frac{r}{k'} & -\frac{b}{k'} & -\frac{b}{k'} & -\cdots & b(1-\frac{1}{k'})
\end{bmatrix}$$

Por outro lado, sendo $Q = T - \frac{1}{k'} NB$, tem-se:

$$Q = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_I \\ T_{A_1} \\ \dots \\ T_{A_c} \end{bmatrix} - \frac{1}{k'} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1b} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{I1} & n_{I2} & \dots & n_{Ib} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_b \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_I \\ T_{A_1} \\ \dots \\ T_{A_c} \end{bmatrix} - \frac{1}{k'} \begin{bmatrix} \sum_h n_{1h} B_h \\ \sum_h n_{2h} B_h \\ \dots \\ \sum_h n_{Ih} B_h \\ \sum_h B_h \\ \dots \\ \sum_h B_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_I \\ Q_{A_1} \\ \dots \\ Q_{A_c} \end{bmatrix}$$

Fazendo $\sum_h n_{uh} B_h = S_i$ e $\sum_h B_h = G$, fica

$$Q_i = T_i - \frac{S_i}{k'} \quad \text{e} \quad Q_j = T_j - \frac{G}{k'} \; .$$

O sistema $C\hat{\tau} = Q$ será resolvido, mediante a introdução de uma matriz A, das mesmas dimensões de C, denominada "matriz de restrição", tal que:

$$A\hat{\tau} = \phi \quad .$$

Assim,

$$C\hat{\tau} - A\hat{\tau} = Q - \phi$$

$$\therefore \quad (C - A)\,\hat{\tau} = Q \quad .$$

Fazendo $C - A = M$, vem:

$$M\hat{\tau} = Q \quad ,$$

sendo que $\exists\, M^{-1}$.

Logo,

$$\hat{\tau} = M^{-1} Q \quad , \tag{6}$$

é a solução do sistema.

Essa matriz M^{-1} é do tipo:

$$\begin{bmatrix}
m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1I} & m_{1A_1} & m_{1A_2} & \cdots & m_{1A_c} \\
m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2I} & m_{2A_1} & m_{2A_2} & \cdots & m_{2A_c} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{I1} & m_{I2} & \cdots & m_{II} & m_{IA_1} & m_{IA_2} & \cdots & m_{IA_c} \\
m_{A_1,1} & m_{A_1,2} & \cdots & m_{A_1,I} & m_{A_1,A_1} & m_{A_1,A_2} & \cdots & m_{A_1,A_c} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{A_c,1} & m_{A_c,2} & \cdots & m_{A_c,I} & m_{A_c,A_1} & m_{A_c,A_2} & \cdots & m_{A_c,A_c}
\end{bmatrix}$$

Se $i = 1, 2, 3, \ldots, I$ e $j = A_1, A_2, \ldots, A_c$, os elementos da diagonal de M^{-1} são do tipo m_{ii} (referente a um tratamento $\underline{i}$ do experimento original) e m_{jj} (referente a um tratamento $\underline{j}$

adicional).

Já os elementos fora da diagonal serão dos tipos $m_{ii'}$, $m_{ij'}$, $m_{jj'}$, m_{ji}.

Identificando esses elementos, tem-se a representação genérica da matriz M^{-1} e, obviamente, a solução do problema. Tal pode ser conseguido pelo método de inversão de matrizes pela solução do sistema $C\hat{\tau} = Q$.

Assim, a equação para o tratamento 1 será:

$$r\left(1 - \frac{1}{k'}\right)\hat{t}_1 - \frac{\lambda}{k'}\hat{t}_2 - \dots - \frac{\lambda}{k'}\hat{t}_I - \frac{r}{k'}\hat{t}_{A_1} - \dots - \frac{r}{k'}\hat{t}_{A_c} = Q_1$$

$$r\hat{t}_1 - \frac{r}{k'}\hat{t}_1 - \frac{\lambda}{k'}\hat{t}_2 - \dots - \frac{\lambda}{k'}\hat{t}_I - \frac{r}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = Q_1$$

Somando e subtraindo $\frac{\lambda}{k'}\hat{t}_1$:

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right)\hat{t}_1 - \frac{\lambda}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i - \frac{r}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = Q_1$$

De modo semelhante, pode-se obter as equações para os tratamentos restantes do experimento original:

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right)\hat{t}_2 - \frac{\lambda}{k'}\sum_{i=}^{I}\hat{t}_i - \frac{r}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = Q_2$$

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right)\hat{t}_3 - \frac{\lambda}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i - \frac{r}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = Q_3$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right)\hat{t}_I - \frac{\lambda}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i - \frac{r}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = Q_I$$

Somando, membro a membro, as equações anteriores:

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right) \sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i - v \frac{\lambda}{k'} \sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i - \frac{vr}{k'} \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j = \sum_{i=1}^{I} Q_i$$

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'} - \frac{v\lambda}{k'}\right) \sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i = \sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{vr}{k'} \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j$$

Mas,

$$r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'} - \frac{v\lambda}{k'} = \frac{1}{k'} (k'r - r + \lambda - v\lambda)$$

$$= \frac{1}{k'} \left[r(k' - 1) - \lambda(v - 1)\right]$$

Como $\lambda(v - 1) = r(k - 1)$, fica:

$$r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'} - \frac{v\lambda}{k'} = \frac{1}{k'} \left[r(k' - 1) - r(k - 1)\right]$$

$$= \frac{rc}{k'}$$

Assim,

$$\frac{rc}{k'} \sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i = \sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{vr}{k'} \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j \qquad (7)$$

Por outro lado, as equações para os tratamentos adicionais serão:

$$-\frac{r}{k'} \hat{t}_1 - \frac{r}{k'} \hat{t}_2 - \ldots - \frac{r}{k'} \hat{t}_I + b\left(1 - \frac{1}{k'}\right) \hat{t}_{A_1} - \frac{b}{k'} \hat{t}_{A_2} - \ldots - \frac{b}{k'} \hat{t}_{A_c} = Q_{A_1}$$

$$b\,\hat{t}_{A_1} - \frac{b}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j - \frac{r}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = Q_{A_1} \quad ,$$

que é a equação para o tratamento A_1.

As demais, podem ser obtidas de maneira análoga:

$$b\,\hat{t}_{A_2} - \frac{b}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j - \frac{r}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = Q_{A_2}$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$b\,\hat{t}_{A_c} - \frac{b}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j - \frac{r}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = Q_{A_c}$$

Impondo a restrição usual

$$\frac{b}{k'}\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j + \frac{r}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = 0 \ ,$$

obtém-se:

$$b\,\hat{t}_{A_1} = Q_A \quad \therefore \quad \hat{t}_{A_1} = \frac{Q_{A_1}}{b}$$

$$b\,\hat{t}_{A_2} = Q_{A_2} \quad \therefore \quad \hat{t}_{A_2} = \frac{Q_{A_2}}{b}$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$b\,\hat{t}_{A_c} = Q_{A_c} \quad \therefore \quad \hat{t}_{A_c} = \frac{Q_{A_c}}{b}$$

Somando, membro a membro, vem:

$$\sum_{j=A_1}^{A_c}\hat{t}_j = \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{b} \qquad (8)$$

Levando o valor obtido em (8) para substituir em (7):

$$\frac{rc}{k'}\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = \sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{vr}{k'b}\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j$$

$$\sum_{i=1}^{I}\hat{t}_i = \frac{k'}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{v}{bc}\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j \qquad (9)$$

Substituindo os valores obtidos em (8) e (9), na equação do tratamento $\underline{1}$, vem:

$$\left(r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'}\right)\hat{t}_1 - \frac{\lambda}{k'}\left[\frac{k'}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{v}{bc}\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right] - \frac{r}{k'b}\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j = Q_1$$

Mas,

$$r - \frac{r}{k'} + \frac{\lambda}{k'} = \frac{r(k' - 1) + \lambda}{k'}$$

$$= \frac{r(k + c - 1) + \lambda}{k'}$$

$$= \frac{r(k - 1) + \lambda + rc}{k'}$$

$$= \frac{\lambda(v - 1) + \lambda + rc}{k'}$$

$$= \frac{\lambda v + rc}{k'}$$

Logo,

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right)\hat{t}_1 = Q_1 + \frac{\lambda}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \left(\frac{\lambda v}{c} + r\right)\frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{n}$$

Fazendo, $\dfrac{\lambda v + rc}{k'} = P$, vem:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{P}\left[Q_1 + \frac{\lambda}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \left(\frac{\lambda v}{c} + r\right)\frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{n}\right]$$

De maneira semelhante, obtém-se:

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{P}\left[Q_2 + \frac{\lambda}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \left(\frac{\lambda v}{c} + r\right)\frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{n}\right]$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\hat{t}_I = \frac{1}{P}\left[Q_I + \frac{\lambda}{rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i + \left(\frac{\lambda v}{c} + r\right)\frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{n}\right]$$

Assim, de acordo com (6):

$$
\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_I \\ t_{A_1} \\ t_{A_2} \\ \cdots \\ t_{A_c} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
(\frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc}) & \frac{\lambda}{Prc} & \cdots & \frac{\lambda}{Prc} & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \cdots & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) \\
\frac{\lambda}{Prc} & (\frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc}) & \cdots & \frac{\lambda}{Prc} & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \cdots & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\lambda}{Prc} & \frac{\lambda}{Prc} & \cdots & (\frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc}) & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) & \cdots & \frac{1}{nP}(\frac{\lambda v}{c} + r) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{b} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{b} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{b}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_I \\ Q_{A_1} \\ Q_{A_2} \\ \cdots \\ Q_{A_c} \end{bmatrix}
$$

Logo,

$$m_{ii} = \frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc}$$

$$m_{jj} = \frac{1}{b}$$

$$m_{ii'} = \frac{\lambda}{Prc}$$

$$m_{ij} = \frac{1}{nP}\left(\frac{\lambda v}{c} + r\right)$$

$$m_{ji} = m_{jj'} = 0$$

Por outro lado, vimos que:

$$Q_i = T_i - \frac{S_i}{k'} \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^{I} Q_i = \sum_{i=1}^{I} T_i - \frac{kG}{k'}$$

$$Q_j = T_j - \frac{G}{k'} \quad \therefore \quad \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j = \sum_{j=A_1}^{A_c} T_j - \frac{cG}{k'}$$

Logo,

$$\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \sum_{i=1}^{I} Q_i = \sum_{j=A_1}^{A_c} T_j + \sum_{i=1}^{I} T_i - \frac{G}{k'}(k + c)$$

$$\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \sum_{i=1}^{I} Q_i = G - \frac{G}{k'}(k') = 0$$

Segue portanto, que $\sum_{i=1}^{I} Q_i = - \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j$.

Substituindo em (9), vem:

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i = \left(\frac{-k'b + rv}{rb}\right) \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{c}$$

Como bk = rv, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i = \left(\frac{k' - k}{r}\right) \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{c}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i = \frac{-\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{r} \qquad (10)$$

Substituindo os valores obtidos em (8) e (10), na equação do tratamento $\underline{1}$, vem:

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 - \frac{\lambda}{rc} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \left(\frac{\lambda v}{c} + r\right) \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{n}$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 - \left(\frac{\lambda}{rc} - \frac{\lambda v}{ck'b}\right) \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + r \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{k'b}$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 - \frac{\lambda(k'b - rv)}{rck'b} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + r \frac{\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{k'b}$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 - \frac{\lambda(k' - k)}{rck'} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + r \, \frac{\sum\limits_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{k'b}$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 - \frac{\lambda}{rk'} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \frac{r}{k'b} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 + \frac{(r^2 - \lambda b)}{br} \cdot \frac{\sum\limits_{j=A_1}^{A_c} Q_j}{k'}$$

$$\left(\frac{\lambda v + rc}{k'}\right) \hat{t}_1 = Q_1 + \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j$$

$$\hat{t}_1 = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[Q_1 + \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j \right]$$

ou,

$$\hat{t}_1 = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[Q_1 - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{i=1}^{I} Q_i \right]$$

Assim, para se obter a estimativa do efeito de um tratamento ajustado i do experimento original, pode ser aplicada a fórmula:

$$\hat{t}_i = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[Q_i - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{i=1}^{I} Q_i \right] \qquad (11)$$

A obtenção das estimativas das médias (ajustadas) de tratamentos são dadas por

$$\hat{m}_u = \hat{m} + \hat{t}_u \qquad (12)$$

onde: $\hat{m} = \frac{G}{n}$ (média geral);

$\hat{t}_u$ = estimativa do efeito do tratamento u (ajustado).

4.2.2 - Análise de variância

Tendo em vista a teoria em que se baseiam os delineamentos em blocos incompletos em geral, tem-se:

Quadro 1 - Esquema da análise de variância.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Tratamentos (ajustados)	$v'-1$	SQTaj.	QMTaj. $= \frac{SQTaj}{v'-1}$
Blocos (não ajustados)	$b-1$	SQB(n.aj.)	QMT(n.aj.) $= \frac{SQB(n.aj.)}{b-1}$
Resíduo	$n-v'-b+1$	SQR	QMR $= \frac{SQR}{n-v'-b+1}$
TOTAL	$n-1$	SQTotal	

G.L. = Graus de liberdade;

S.Q. = Soma de Quadrados;

Q.M. = Quadrado Médio.

Como se sabe,

$$SQR = Y'Y - SQP(\hat{\tau},\beta) \quad ,$$

onde: $SQP(\hat{\tau},\beta) = \hat{\beta}'X'Y$ = Soma de Quadrados dos Parâmetros;

$$SQP(\hat{\tau},\beta) = \left[\hat{\tau}' \ , \ \beta'\right] \begin{bmatrix} T \\ B \end{bmatrix}$$

$$SQP(\hat{\tau},\beta) = \hat{\tau}'T + \beta'B$$

Considerando o valor obtido em (3), obtém-se:

$$SQP(\hat{\tau},\beta) = \hat{\tau}'Q + \frac{1}{k'} B'B \quad .$$

Logo,

$$SQR = Y'Y - \hat{\tau}'Q - \frac{1}{k'} B'B \ ,$$

ou,

$$SQR = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - \left(\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i Q_i + \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j Q_j \right) - \frac{1}{k'} \sum_{h=1}^{b} B_h^2$$

Sendo $C = \hat{m}G = \dfrac{G^2}{k'b}$, fica:

$$SQR = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - C - \left(\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i Q_i + \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j Q_j \right) - \left(\frac{1}{k'} \sum_{h=1}^{b} B_h^2 - C \right)$$

Assim,

$$SQTotal = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - C \qquad (13)$$

$$SQTaj. = \sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i Q_i + \sum_{j=A_1}^{A_c} \hat{t}_j Q_j \tag{14}$$

$$SQBn.aj. = \frac{1}{k'} \sum_{h=1}^{b} B_h^2 - C \tag{15}$$

Desenvolvendo a expressão (14), vem:

$$SQTaj. = \sum_{i=1}^{I} \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[Q_i - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{i=1}^{I} Q_i \right] Q_i + \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j}{b} . Q_j$$

$$SQTaj. = \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2 \right] + \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j^2}{b} \tag{16}$$

Por outro lado, considerando apenas os tratamentos adicionais, sabe-se que:

$$SQTadicionais = \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{T_j^2}{b} - \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} T_j \right)^2}{bc} \tag{17}$$

Como $Q_j = T_j - \frac{G}{k'}$, vem:

$$T_j = Q_j + \frac{G}{k'}$$

$$T_j^2 = Q_j^2 + \frac{2G}{k'} Q_j + \frac{G^2}{k'^2}$$

$$SQTadicionais = \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j^2}{b} + \frac{2G}{k'b} \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \frac{cG^2}{k'^2 b} - \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + c \frac{G}{k'}\right)^2}{bc}$$

Simplificando, fica:

$$SQTad. = \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j^2}{b} - \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right)^2}{bc} \qquad (18)$$

Se, na expressão (16), levar-se em conta o valor obtido em (18), fica:

$$SQTaj. = SQTad. + \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2 \right] + \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right)^2}{bc}$$

$$SQTaj. = SQTad. + \frac{k'}{\lambda v + rc} \sum_{i=1}^{I} Q_i^2 + \left[\frac{1}{bc} - \left(\frac{k'}{\lambda v + rc}\right)\left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \right] \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2$$

A expressão $\left[\frac{1}{bc} - \left(\frac{k'}{\lambda v + rc}\right)\left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right)\right]$ pode ser assim simplificada:

$$\frac{1}{bc} - \frac{k'r^2}{(\lambda v + rc)nr} + \frac{k'\lambda b}{(\lambda v + rc)nr} = \frac{1}{bc} - \frac{r}{b(\lambda v + rc)} + \frac{\lambda}{r(\lambda v + rc)}$$

$$= \frac{\lambda vr + bc\lambda}{(\lambda v + rc)bcr}$$

$$= \frac{\lambda bk + bc\lambda}{(\lambda v + rc)bcr}$$

$$= \frac{\lambda k'}{cr(\lambda v + rc)}$$

Logo,

$$SQTaj. = SQTad. + \frac{k'}{\lambda v + rc} \sum_{i=1}^{I} Q_i^2 + \frac{\lambda k'}{cr(\lambda v + rc)} \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2 \quad (19)$$

De outra forma, o processo usual para obtenção da soma de quadrados entre os dois tipos de tratamentos (SQTipos), permite que se escreva:

$$SQTipos = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} T_i\right)^2}{bk} + \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} T_j\right)^2}{bc} - \frac{G^2}{k'b} \quad (20)$$

Como já ficou demonstrado que,

$$\sum_{i=1}^{I} T_i = \sum_{i=1}^{I} Q_i + \frac{kG}{k'} \quad \text{e} \quad \sum_{j=A_1}^{A_c} T_j = \sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j + \frac{cG}{k'} ,$$

substituindo e efetuando as operações necessárias, vem:

$$\text{SQTipos} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2}{bk} + \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right)^2}{bc}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{c\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2 + k\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right)^2}{kc}\right]$$

$$= \frac{1}{b}\left[\frac{c\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2 + k\left(-\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2}{kc}\right]$$

$$= \frac{k'}{bkc}\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2$$

ou,

$$\text{SQTipos} = \frac{k'}{rvc}\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2 \quad . \tag{21}$$

Levando-se em conta o valor obtido em (21) na expressão (19), vem:

$$\text{SQTaj.} = \text{SQTad.} + \text{SQTipos} + \frac{k'}{\lambda v + rc}\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 +$$

$$+ \left[\frac{\lambda k'}{(\lambda r + rc)rc} - \frac{k'}{rvc}\right]\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2$$

$$SQTaj. = SQTad. + SQTipos + \frac{k'}{\lambda v + rc} \sum_{i=1}^{I} Q_i^2 +$$

$$+ \frac{k'}{rc} \left[\frac{\lambda}{\lambda v + rc} - \frac{1}{v} \right] \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2$$

$$SQTaj. = SQTad. + SQTipos + \frac{k'}{\lambda v + rc} \sum_{i=1}^{I} Q_i^2 -$$

$$- \frac{k'}{(\lambda v + rc)v} \left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2$$

$$SQTaj. = SQTad. + SQTipos + \frac{k'}{\lambda v + rc} \left[\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i \right)^2}{v} \right]$$

Como a última expressão corresponde à soma de quadrados entre os tratamentos do experimento original, fica:

$$SQTaj. = SQTad. + SQTipos + SQToriginais \qquad (22)$$

O quadro de análise de variância fica então composto por:

Quadro 2 - Análise de variância com decomposição dos graus de liberdade para tratamentos.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.
Tratamentos (ajustados)	v'-1	$S_1 = \frac{k'}{\lambda v + rc}\left[\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 - \left(\frac{r^2-\lambda b}{nr}\right)\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2\right] + \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j^2}{b}$ (16)	$V_1 = \frac{S_1}{v'-1}$
Entre Tratamentos adicionais	c-1	$S_{11} = \sum_{j=A_1}^{A_c} \frac{Q_j^2}{b} - \frac{\left(\sum_{j=A_1}^{A_c} Q_j\right)^2}{bc}$ (18)	$V_{11} = \frac{S_{11}}{c-1}$
Entre Tratamentos do experimento original	v-1	$S_{12} = \frac{k'}{\lambda v + rc}\left[\sum_{i=1}^{I} Q_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2}{v}\right]$	$V_{12} = \frac{S_{12}}{v-1}$
Entre os dois tipos de tratamentos	1	$S_{13} = \frac{k'}{rvc}\left(\sum_{i=1}^{I} Q_i\right)^2$ (21)	$V_{13} = S_{13}$
Blocos (não ajustados)	b-1	$S_2 = \frac{1}{k'}\sum_{h=1}^{b} B_h^2 - \frac{G^2}{k'b}$	$V_2 = \frac{S_2}{b-1}$
Resíduo	n-b-v+1	$S_3 = S_4 - S_1 - S_2$	$V_3 = \frac{S_3}{n-b-v+1}$
TOTAL	n-1	$S_4 = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - \frac{G^2}{k'b}$	$V_4 = \frac{S_4}{n-1}$

4.2.3 - Variância de um contraste

Como se sabe, nos experimentos em blocos incompletos a variância de um contraste é dada por

$$V(P'\hat{t}) = P'M^{-1} P \sigma^2 , \qquad (23)$$

onde:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_I \\ p_{A_1} \\ p_{A_2} \\ \cdots \\ p_{A_c} \end{bmatrix} ,$$

sendo p_i = coeficiente dos $\hat{t}_s'$ no contraste.

Para o caso específico desse delineamento, devem ser distinguidos três (3) tipos de contrastes entre as estimativas dos efeitos de tratamentos, cujas expressões são dadas a seguir, com base em (23):

1º TIPO: Contraste envolvendo dois tratamentos do experimento original.

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = (m_{ii} + m_{i'i'} - m_{ii'} - m_{i'i}) \sigma^2$$

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = (\frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc} + \frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc} - \frac{\lambda}{Prc} - \frac{\lambda}{Prc})\ \sigma^2$$

$$= \frac{2}{P}\ \sigma^2$$

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = (\frac{2k'}{\lambda v + rc})\ \sigma^2$$

Logo,

$$\hat{V}(\hat{t}_i - \hat{t}_{i'}) = (\frac{2k'}{\lambda v + rc})\ QMR \qquad (24)$$

2º TIPO: Contraste envolvendo dois tratamentos adicionais.

$$V(\hat{t}_j - \hat{t}_{j'}) = (m_{jj} + m_{j'j'} - m_{jj'} - m_{j'j})\ \sigma^2$$

$$= (\frac{1}{b} + \frac{1}{b} - 0 - 0)\sigma^2$$

$$V(\hat{t}_j - \hat{t}_{j'}) = \frac{2}{b}\ \sigma^2$$

Assim,

$$\hat{V}(\hat{t}_j - \hat{t}_{j'}) = \frac{2}{b}\ QMR \quad . \qquad (25)$$

3º TIPO: Contraste envolvendo um tratamento de cada tipo.

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_j) = (m_{ii} + m_{jj} - m_{ij} - m_{ji})\ \sigma^2$$

$$V(\hat{t}_i - \hat{t}_j) = \left[\frac{1}{P} + \frac{\lambda}{Prc} + \frac{1}{b} - \frac{1}{nP}\left(\frac{\lambda v}{c} + r\right) - 0\right]\sigma^2$$

$$= \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{b} + \frac{\lambda b}{Prn} - \frac{r}{nP}\right]\sigma^2$$

$$= \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{b} + \frac{1}{nP}\left(\frac{\lambda b}{r} - r\right)\right]\sigma^2$$

$$= \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{b} - \frac{1}{nP}\left(\frac{r^2 - \lambda b}{r}\right)\right]\sigma^2$$

Logo,

$$\hat{V}(\hat{t}_i - \hat{t}_j) = \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{b} - \frac{1}{nP}\left(\frac{r^2 - \lambda b}{r}\right)\right] QMR \qquad (26)$$

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O quadro abaixo refere-se às produções, em dag/parcela, das variedades e linhagens de soja, constantes do experimento focalizado em 4.1.

Quadro 3 - Produções, em dag/parcela, de variedades e linhagens de soja.

					Totais de Blocos
(1) 108	(2) 125	(3) 129	(A_1) 171	(A_2) 181	714
(1) 115	(2) 121	(4) 156	(A_1) 168	(A_2) 182	742
(1) 112	(2) 132	(5) 171	(A_1) 163	(A_2) 165	743
(1) 116	(3) 142	(4) 160	(A_1) 149	(A_2) 185	752
(1) 114	(3) 135	(5) 142	(A_1) 175	(A_2) 172	738
(1) 118	(4) 151	(5) 152	(A_1) 162	(A_2) 169	752
(2) 129	(3) 131	(4) 138	(A_1) 169	(A_2) 171	738
(2) 141	(3) 128	(5) 181	(A_1) 181	(A_2) 175	806
(2) 138	(4) 145	(5) 178	(A_1) 162	(A_2) 168	791
(3) 129	(4) 141	(5) 161	(A_1) 171	(A_2) 188	790

De acordo com a simbologia adotada, tem-se:

$$v = 5 \quad , \quad c = 2 \quad , \quad v' = 7$$

$$k = 3 \quad , \quad k' = 5$$

$$b = 10$$

$$r = 6$$

$$\lambda = 3$$

$$n = 60$$

$$G = 7.566$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{k'}{\lambda v + rc} = \frac{5}{27} \qquad \therefore \qquad p = \frac{27}{5}$$

$$\frac{r^2 - \lambda b}{nr} = \frac{1}{50}$$

$$m = \frac{G}{n} = 151,32$$

$$c = \frac{G^2}{n} = 1144887,12$$

$$\frac{k'}{rvc} = \frac{1}{12} \quad .$$

A análise intrablocos desse experimento ficará facilitada com a elaboração do seguinte quadro, tendo em vista as expressões obtidas em 4.2.

Quadro 4 - Quadro auxiliar da análise da variância.

TRATAMENTOS DO EXPERIMENTO ORIGINAL							TRATAMENTOS ADICIONAIS			
GRANDEZAS	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{I}$	GRANDEZAS	A_1	A_2	$\sum_{j=A_1}^{A_c}$
T_i	683,000	786,000	794,000	891,000	985,000	4139,000	T_j	1671,000	1756,000	3427,000
T_i^2	466489,000	617796,000	630436,000	793881,000	970225,000	3478827,000	T_j^2	2792241,000	3083536,000	5875777,000
S_i	4441,000	4534,000	4538,000	4565,000	4620,000	-				
$\frac{S_i}{k'}$	888,200	906,800	907,600	913,000	924,000	-	$\frac{G}{k'} = 1513,2$	-	-	-
$Q_i = T_i - \frac{S_i}{k'}$	-205,200	-120,800	-113,600	-22,000	61,000	-400,600	$Q_j = T_j - \frac{G}{k'}$	157,800	242,800	400,600
Q_i^2	42107,0400	14592,840	12904,960	484,000	3721,000	73809,640	Q_j^2	24900,840	58951,840	83852,680
$\hat{t}_i$	-36,516	-20,887	-19,553	-2,590	12,780		$\hat{t}_j$	15,780	24,280	-
$\hat{m}_i = \hat{m} + \hat{t}_i$	114,804	130,433	131,767	148,730	164,100		$\hat{m}_j = \hat{m} + \hat{t}_j$	187,100	175,600	-

Como se depreende do exposto em 4.2.2, as somas de quadrados, calculadas abaixo, são obtidas pela maneira usual:

$$S_2 = \frac{1}{k'} \sum_{h=1}^{b} B_h^2 - \frac{G^2}{k'b} = \frac{1}{5} (714^2 + 742^2 + \ldots + 790^2) -$$

$$- 1144887,12$$

$$S_2 = 1537,28$$

$$S_4 = \sum_{u,h} y_{uh}^2 - \frac{G^2}{k'b} = 25780,88$$

Por outro lado, para se chegar ao resultado final da soma de quadrados de tratamentos (ajustados), pode-se aplicar diretamente a fórmula (16):

$$S_1 = 13074,080 + 8385,267 = 21459,347 \quad .$$

Entretanto, conforme demonstrações procedidas em 4.2.2, o mesmo resultado se consegue por via indireta, isto é, através dos cálculos das somas de quadrados individuais que se seguem:

$$S_{11} = 8385,268 - 8024,018 = 361,250 \quad ,$$

valor oriundo da aplicação da fórmula (17) ou (18).

$$S_{12} = 7724,734 \, ,$$

que corresponde à soma de quadrados entre os tratamentos do experimento original.

$$S_{13} = 13373,363 \, ,$$

que pode ser obtido pela aplicação da fórmula (20) ou (21).

Sendo $S_1 = S_{11} + S_{12} + S_{13}$, tem-se que

$$S_1 = 21459,347 \; .$$

Uma outra maneira para se chegar ao valor de S_1 é calcular inicialmente as estimativas dos efeitos dos tratamentos ajustados, o que se consegue mediante o emprego das fórmulas:

$$\hat{t}_j = \frac{Q_j}{b} \qquad \text{e} \qquad \hat{t}_i = \frac{k'}{\lambda v + rc}\left[Q_i - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right) \sum_{i=1}^{I} Q_i\right]$$

Esses valores encontram-se calculados no quadro 4.

Depois, utilizando-se a expressão (14), chega-se ao valor de S_1.

Dos três (3) métodos apresentados para o cálculo da soma de quadrados de tratamentos (ajustados), vê-se que o mais prático, por possibilitar maior rapidez nos cálculos, é o primeiro, isto é, através do uso da fórmula (16).

Entretanto, o segundo processo apresentado possibilita um estudo mais minucioso, em virtude da decomposição dos graus de liberdade para tratamentos (ajustados). Uma outra vantagem desse método são as várias opções para aplicação das fórmulas, além de serem, algumas delas, bastante utilizadas na análise de experimentos mais simples.

Finalmente, o terceiro método apresentado possui também o seu aspecto positivo, uma vez que o cálculo das estimativas dos efeitos de tratamentos (ajustados), que faz com que ele se torne mais demorado, torna-se necessário para aplicação dos testes de significância.

Assim, a análise de variância fica desta maneira:

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos (ajustados)	6	21459,347	3576,558	43,675**
Entre Trat.adicionais	1	361,250	361,250	4,411*
Entre Trat. do experimento original	4	7724,734	1931,184	23,583**
Entre os dois tipos	1	13373,363	13373,363	163,309**
Blocos (não ajustados)	9	1537,280	170,809	
Resíduo	34	2784,253	81,890	
Total	49	25780,880		

As médias de tratamentos (ajustados), que são apresentadas no quadro 4, foram calculadas com base na expressão (12).

As estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes entre tratamentos ajustados, foram calculadas de acordo com o que ficou estabelecido em 4.2.3:

1º TIPO: $\hat{V}(\hat{Y}) = 30,330$

Serve, por exemplo, para os contrastes $\hat{Y} = \hat{t}_1 - \hat{t}_2$, $\hat{Y} = \hat{t}_2 - \hat{t}_3$, etc.

2º TIPO: $\hat{V}(\hat{Y}) = 16,378$

Refere-se ao contraste $\hat{Y} = \hat{t}_{A_1} - \hat{t}_{A_2}$.

3º TIPO: $\hat{V}(\hat{Y}) = 23,050$

Serve para os contrastes $\hat{Y} = \hat{t}_1 - \hat{t}_{A_1}$, $\hat{Y} = \hat{t}_2 - \hat{t}_{A_1}$, $\hat{Y} = \hat{t}_2 - \hat{t}_{A_2}$, etc.

A partir daí, pode-se escolher um teste de significância adequado e concluir sobre o ensaio.

6. CONCLUSÕES

A análise intrablocos de um experimento em blocos incompletos equilibrados, que sofreu a adição de c tratamentos em cada bloco, revelou as seguintes conclusões:

6.1 - As estimativas dos efeitos de tratamentos (ajustados) são dadas pelas expressões:

$$\hat{t}_i = \frac{k'}{\lambda v + rc}\left[Q_i - \left(\frac{r^2 - \lambda b}{nr}\right)\sum_{i=1}^{I} Q_i\right],$$

para o caso de um tratamento i do experimento original (blocos incompletos equilibrados); e

$$\hat{t}_j = \frac{Q_j}{b},$$

para o caso de um tratamento j adicional.

6.2 - Uma análise de variância mais simples pode ser feita conforme o quadro 1, sendo que a soma de quadrados de tratamentos ajustados pode ser obtida mediante o emprego das fórmulas (14) ou (16); as demais somas de quadrados podem ser calculadas pela maneira usual, através das fórmulas (13) e (15).

6.3 - O desdobramento dos graus de liberdade para tratamentos (ajustados), que permite um estudo mais detalhado da situação, pode ser feito conforme o quadro 2. Entretanto, havendo interesse, as expressões (18) e (21) podem ser substituídas pelas suas equivalentes (17) e (20), respectivamente.

6.4 - Foram distinguidos três (3) tipos de contrastes entre as estimativas dos efeitos de tratamentos (ajustados), cujas variâncias podem ser obtidas através das expressões dadas na seção 4.2.3.

7. SUMMARY

This dissertation discusses the intrablock analysis of an experiment in balanced incomplete blocks which had $\underline{c}$ other treatments added to each block. The model used for the analysis of variance is

$$Y = X\beta + \varepsilon ,$$

where: Y = vector of observations y_{uh};

X = design matrix;

β = vector of parameters;

ε = vector of errors.

By the method of least squares, special formulae were obtained which permit:

a) the estimation of adjusted treatment effects, that is, with elimination of block effects;

b) the computation of sums of squares for the analysis of variance table;

c) the computation of the variance of the three different types of contrasts among adjusted treatment effects.

An example is given, with an experiment on varieties of soybeans (*Glycine max* L.), carried out in the State of Espírito Santo, Brasil.

8. BIBLIOGRAFIA

AFONJA, B., 1968. Analysis of a group of balanced block experiments, having error variance and some treatments in common. Biometrics, 28: 389-400.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1957. Experimental Designs, 2a. edição. John Wiley & Sons, Nova York.

FEDERER, W.T., 1961. Augmented designs with one-way elimination of heterogeneity. Biometrics, 17: 447-473.

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. Macmillan, Nova York.

KALIN, A., 1966. Experimental designs in incomplete blocks with additional control treatments in each block. Metrika 10: 182--218.

KEMPTHORNE, O., 1952. The design and analysis of experiments. John Wiley & Sons, Nova York.

PAVATE, M.V., 1961. Combined analysis of balanced incomplete block designs with some common treatments. Biometrics 17: 111-119.

PIMENTEL GOMES, F. e R.F. GUIMARÃES, 1958. Joint analysis of experiments in complete randomised blocks with some common treatments. Biometrics 14: 521-526.

PIMENTEL GOMES, F., 1970. An extension of the method of joint analysis of experiments in complete randomised blocks. Biometrics 26: 332-336.

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental, 8a. e edição, Livraria Nobel, Piracicaba.

RAO, C.R., 1947. General methods of analysis for incomplete block design. J. Amer. Stat. Assoc. 42: 541-561.

SHAH, S.M., 1963. On the upper bound for the number of blocks in balanced incomplet block designs having a given number of treatments common with a given block. J. Indian Statist. Ass. 1: 219--220.

SWAMINATHAN, S.S. e M.N. DAS, 1964. Combined analysis of incomplete block designs. J. Indian Soc. Agric. Statist. 16: 296-303.

TREHAN, P.M., 1963. On the bounds of the number of common treatments between blocks of balanced incomplete block design. J. Indian Statist. Assi. 1: 102-103.