ANÁLISE DE COVARIÂNCIA EM EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS, COM OBSERVAÇÕES PERDIDAS

JOEL AUGUSTO MUNIZ
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Setembro, 1982

Ao meu irmão José Aurélio (*in memoriam*)

Aos meus pais e sogros,

pelo bom exemplo e dedicação

Aos demais irmãos e cunhados

pelo espírito fraterno e união,

À Orminda, minha esposa,

pelas alegrias e incentivos

D E D I C O

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Humberto de Campos pela eficiente e dedicada orientação durante todo o curso.

À Escola Superior de Agricultura de Lavras, à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiróz" por possibilitarem a realização do curso de pós-graduação.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES/PICD), pela bolsa de estudo concedida.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ , pelos ensinamentos transmitidos.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela atenção e amizade.

Aos colegas de curso pela agradável convivência.

Ao Professor Luiz Henrique de Aquino pela versão do resumo para o inglês.

A todos que , de uma forma ou de outra, contribuiram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

Página

ANÁLISE DE COVARIÂNCIA EM EXPERIMENTOS EM BLOCOS CASUALIZADOS, COM OBSERVAÇÕES PERDIDAS

AUTOR : JOEL AUGUSTO MUNIZ

ORIENTADOR: Dr. Humberto de Campos

R E S U M O

O presente trabalho foi desenvolvido, com o objetivo de determinar fórmulas para estimação de observações perdidas e de variâncias da estimativa de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão envolvendo observações perdidas, na análise de covariância com uma variável auxiliar , nos experimentos em blocos casualizados.

Foram considerados os seguintes casos :perda de uma observação da variável, de uma da covariável, de uma da variável e uma da covariável, no mesmo par ou não , de duas da variável , de duas da covariável.

Em todas as situações, as estimativas das observações perdidas foram determinadas, através da minimização da

soma de quadrados do resíduo, ajustada para regressão, dada pela seguinte expressão :

$$E'yy = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx}$$

No caso da perda de duas observações da variável ou da covariável, aplicou-se o método iterativo sugerido por YATES (1933), utilizando-se as fórmulas que estimam uma observação da variável ou uma da covariável, para a otenção dos valores.

Partindo-se das funções lineares de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão, foram determinadas suas respectivas estimativas de variâncias.

As principais conclusões obtidas foram :

1. as fórmulas de estimação encontradas, exceto o caso da perda do par, são dadas em função de Exy e Exx, assim os valores só podem ser obtidos pelo método iterativo;
2. na aplicação do método iterativo para a obtenção dos valores, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, quando os valores arbitrários iniciais são tomados próximos das médias;
3. no caso de perda de duas observações da variável ou da covariável, a obtenção dos valores através do método iterativo, leva aos mesmos resultados obtidos com o uso das fórmulas específicas de cada caso, mostrando que esse método, pode

ser generalizado estendendo-se para qualquer caso em que tenha ocorrido perda de mais de duas observações da variável ou da covariável;

4. no caso de perda de observações da covariável, as estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão, são obtidas pela fórmula usual;

5. no caso de perda de observações da variável, as estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustadas para regressão, são obtidas por fórmulas específicas a cada situação onde as perdas ocorreram.

COVARIANCE ANALYSIS IN RANDOMIZED BLOCKS DESIGNS WITH MISSING OBSERVATIONS

AUTHOR : JOEL AUGUSTO MUNIZ

ADVISER : Dr. Humberto de Campos

S U M M A R Y

This work has been developed to determine formulas for estimation of missing data and also to find the variance of the estimate of contrasts among treatment means adjusted for regression with missing observations in the covariance analysis with one regressor variable in randomized blocks experiments.

The following cases have been concerned: the lost of just one variable observation, the lost of just one concomitant variable observation; the lost of one variable and one concomitant variable observation in the same pair or in different pairs; the lost of two variable observation and finally the lost of two concomitant variable observations.

For all the situations above related, the estimates of the missing observations had been determined through the minimization of the residual sum of squares adjusted for regression. This error sum of squares has the following expression :

$$E'yy = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx}$$

The iterative method suggested by YATES (1933) has been applied in the situations of missing of two variable or concomitant variable observations. Following his idea it was used the formulas that estimate one variable observation or on concomitant variable observation.

Based on the linear function of contrast among the treatments means adjusted for regression, it was determined its variance estimates.

The main conclusions obtained were :

1. The formulas of estimation found, except for the lost of the pair case, are given as a function of Exy and Exx and consequently the only way to get the values is through the iterative method.
2. When the iterative method is applied to obtain the values it was found that the convergence is obtained more rapidly if the initial arbitrary values are taken in the neighbourhood of the means.

3. For the lost of two variables or concomitant variables ob - servations it was found that the determination of the values by using the iterative method lead to the same results as given by particular formulas for each case. This shows that the studied method can be generalized to any situation in which the lost of more than two observations of the variable or concomitant variable have been happened.

4. For the lost of the concomitant variable observation the va riance estimates of the constrasts among treatment means ad justed for regression are obtained by the usual formula.

5. For the lost of the variable observations the variance esti mates of contrasts among treatment means adjusted for re gression are get by specific formulas for each situation whe re the missings have happened.

1. INTRODUÇÃO

Na experimentação, de modo geral, é difícil controlarem-se todos os fatores que influenciam os resultados finais. Não muito raro depara-se com algumas fontes de variação que não podem ser isoladas pelo delineamento, mas podem ser medidas através de observações adicionais. Quando isto ocorre, a análise de covariância pode ser usada, quase sempre com grande vantagem.

A análise de covariância é uma técnica interessante, que reúne os conceitos de análise de variância e de regressão, tendo como finalidade utilizar uma ou mais variáveis auxiliares, na interpretação dos dados referentes a uma variável considerada de maior importância.

A grande utilidade da análise de covariância é permitir que as estimativas das médias de tratamentos,sejam ajustadas pelas diferenças nas variáveis independentes, também chamadas de variáveis auxiliares, variáveis concomitantes ou ainda de covariáveis. Esse ajuste quase sempre contribui para que as comparações entre as médias de tratamentos sejam feitas com maior precisão.

Apesar de todo cuidado dispensado pelo pesquisador no planejamento, na instalação e na condução de um trabalho experimental, a ocorrência de perdas de parcelas é muito comum na prática, o que muitas vezes dificulta a análise estatística e a interpretação dos dados.

Do ponto de vista estatístico, o conceito de parcela perdida nem sempre corresponde a uma perda real.CAMPOS (1964) considera que se um ou mais dados discrepam muito do razoável ou, mesmo não discrepando, se paira algum senão sobre sua obtenção, já são motivos suficientes para que os mesmos sejam colocados em dúvida e até mesmo considerados como parcelas perdidas.

No caso da análise de covariância, as perdas podem ocorrer com as observações da variável, da covariável ou de ambas.

Neste trabalho, estudou-se a análise de covariância com uma variável auxiliar, nos experimentos em blocos casualizados com observações perdidas, propondo-se fórmulas para estimação nos seguintes casos : perda de uma observação da variável, de uma da covariável, de uma da variável e uma da covariável, no mesmo par ou não , de duas da variável, de duas da covariável.

Para o caso da perda de duas observações da variável ou da covariável, aplicou-se o método iterativo sugerido por YATES (1933), utilizando-se as fórmulas que estimam uma variável ou uma covariável, para a obtenção dos valores.

Foram determinadas ainda, as estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão, para aplicação de métodos de comparações múltiplas.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. Análise de covariância

Segundo SMITH (1957) a análise de covariância foi introduzida por Fisher em 1934.

STEEL e TORRIE (1960) consideram que as finalidades do uso da análise de covariância são :

a) ajudar na interpretação dos dados, especialmente com relação à natureza dos efeitos de tratamentos;

b) dividir uma covariância total ou soma de produtos nas partes componentes;

c) controlar o erro e aumentar a precisão da medida dos efeitos de tratamentos;

d) ajustar as médias de tratamentos da variável dependente, pelas diferenças nos correspondentes valores das variáveis independentes ;

e) estimar observações perdidas, através do método da pseudo-variável.

Esses autores afirmam ainda que as hipóteses exigidas para o uso válido da análise de covariância, são uma combinação das hipóteses exigidas na análise de variância e na regressão linear, podendo ser resumidas em :

a) os valores de x devem ser fixos e suas medidas tomadas sem erro;

b) a regressão de y sobre x, após a retirada dos efeitos de blocos e tratamentos, é linear e independente destes efeitos;

c) os erros do modelo são independentes e normalmente distribuidos, com média zero e mesma variância.

COCHRAN (1957), propõe para uma comparação linear

$$L = \sum_i g_i \bar{y}_i$$

envolvendo médias de tratamentos ajustadas para regressão, a seguinte fórmula para estimativa da variância

$$\hat{V}(L) = s^2 \left\{ \frac{\sum_i g_i^2}{r} + \frac{\left[\sum_i g_i (\bar{x}_i - \bar{x}) \right]^2}{Exx} \right\}$$

onde :

s^2 é o quadrado médio do resíduo, ajustado para regressão;

g_i é o coeficiente da média $\underline{i}$;

r é o número de repetições;

$\bar{x}_i$ é a média da variável auxiliar referente ao tratamento $\underline{i}$;

$\bar{x}$ é a média geral da variável auxiliar;

Exx é a soma de quadrados do resíduo, referente à variável auxiliar.

Para o caso particular de comparações envolvendo duas médias de tratamentos, o autor afirma que a estimativa da variância é dada por

$$\hat{V}(L) = s^2 \left[\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_{i'})^2}{Exx} \right]$$

onde :

s^2 , r, Exx e $\bar{x}_i$, apresentam o mesmo significado anterior;

$\bar{x}_{i'}$ é a média da variável auxiliar referente ao tratamento $\underline{i'}$.

PIMENTEL GOMES (1978) afirma que se os valores das médias da variável auxiliar referentes aos tratamentos não são muito diferentes, então pode-se concluir que os tratamen -

tos não produzem efeitos significativos na variável auxiliar x, o que pode ser averiguado mediante uma análise de variância aplicada aos valores de x. Neste caso, COCHRAN (1957) recomenda usar uma estimativa média para a variância do contraste entre pares de médias de tratamentos, ajustados para regressão, devida a FINNEY (1946), aplicável a qualquer contraste entre duas médias de tratamentos, dada pela fórmula

$$\hat{V}(L) = \frac{2s^2}{r}\left[1 + \frac{Txx}{(t-1)Exx}\right]$$

onde :

s^2, Exx e r, apresentam o mesmo significado anterior;

Txx é a soma de quadrados para tratamentos, referente à variável auxiliar;

t é o número de tratamentos.

A aproximação obtida por esta expressão é razoável segundo SNEDECOR e COCHRAN (1979) e COCHRAN e COX (1980), desde que se verifique a não significância entre os valores da variável auxiliar x e o número de graus de liberdade do resíduo ajustado para regressão não seja inferior a 20.

2.2. Observações perdidas.

O estudo de observações perdidas nos experimentos iniciou-se com ALLAN e WISHART (1930). Esses autores conceituam parcelas perdidas, como aquelas cujas observações são imperfeitas, devido a causas alheias ao controle do pesquisa - dor.

YATES (1933), substituindo os dados perdidos por incógnitas e baseando no método dos quadrados mínimos, procura minimizar a soma de quadrados do resíduo para estimação desses dados. No caso da perda de uma parcela, o autor apresenta fórmulas de estimação, para os experimentos em blocos casualiza - dos e em quadrado latino. Se ocorrerem num experimento várias parcelas perdidas $x, y, z, \ldots$ a soma de quadrados do resíduo será função dessas variáveis. Pelo método dos quadrados míni - mos, tornando mínima essa função, obtém-se um sistema de equações simultâneas em $x, y, z, \ldots$ Essas equações são facilmente resolvidas pelo método iterativo, mas o autor afirma ser desnecessária a determinação das mesmas na prática, uma vez que, repetidas aplicações da fórmula que estima uma única parcela, substituindo por valores arbitrários todas as outras parcelas desconhecidas, é perfeitamente idêntico ao método iterativo ordinário. A solução converge muito rapidamente e em circunstâncias ordinárias, a segunda aproximação já é de boa precisão.

O autor apresenta ainda a variância da média do tratamento com uma parcela perdida, dada no caso de um experimento em blocos casualizados por

$$\frac{1}{q}\left[1+\frac{p}{(p-1)(q-1)}\right]\sigma^2$$

e num quadrado latino por

$$\frac{1}{p}\left[1+\frac{p}{(p-1)(p-2)}\right]\sigma^2$$

onde :

p é o número de tratamentos

q é o número de blocos .

ANDERSON (1946) apresenta uma revisão de literatura sobre parcelas perdidas, nos vários delineamentos, com as respectivas fórmulas até então deduzidas.

CAMPOS (1964) apresenta um estudo sobre a análise de experimentos com parcelas perdidas, determinando fórmulas para o cálculo das estimativas dessas parcelas, bem como variâncias de contrastes de médias de dois tratamentos com e sem parcelas perdidas, nos experimentos em blocos casualizados, em quadrado latino e em períodos sucessivos ("change-over").

O autor apresenta ainda um estudo sobre o método iterativo ou das aproximações sucessivas, sugerido por YATES (1933), para a estimativa de várias parcelas perdidas, utilizando a fórmula que estima uma parcela perdida, dando-se valores iniciais arbitrários para (n-1) delas. Através da teoria matemática das sucessões, o autor comprova que o valor arbitrário inicial pode ser um valor qualquer, uma vez que os valores limites obtidos com infinitas iterações, para as estimativas das parcelas, independem dele.

Segundo PANSE e SUKHATME (1963) o método da análise de covariância para estimativa de parcela perdida nos experimentos em blocos casualizados foi introduzido por Bartlett em 1937. Esse método consiste em admitir uma pseudo-variável x para ser associada com y, o valor das parcelas. A pseudo-variável x assume o valor zero para todas as parcelas exceto a parcela perdida, onde ela assume o valor -1. Para a parcela perdida, a variável y assume o valor zero. Realizada a análise de covariância, obtém-se a estimativa da parcela perdida através da estimativa do coeficiente de regressão linear. Assim, para um experimento em blocos casualizados com I tratamentos, J repetições e com uma parcela perdida y_{ij} , chega-se ao quadro seguinte :

Causa de variação	GL	Σx^2	Σxy	Σy^2
Blocos	J-1	$\frac{1}{I} - \frac{1}{IJ}$	$-\frac{B_j}{I} + \frac{G}{IJ}$	$\frac{1}{I}\sum_j y_{.j}^2 - C$
Tratamentos	I-1	$\frac{1}{J} - \frac{1}{IJ}$	$-\frac{T_i}{J} + \frac{G}{IJ}$	$\frac{1}{J}\sum_i y_{i.}^2 - C$
Resíduo	(I-1)(J-1)	$\frac{(I-1)(J-1)}{IJ}$	$\frac{T_i}{J} + \frac{B_j}{I} - \frac{G}{IJ}$	Subtração
Total	IJ-1	$1 - \frac{1}{IJ}$	$\frac{G}{IJ}$	$\sum_{i,j} y_{ij}^2 - C$

Do quadro anterior a partir do resíduo, obtém - se :

$$y_{ij} = \hat{b} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{IT_i + JB_j - G}{(I-1(J-1)}$$

Esse valor é exatamente igual ao valor que se obtém através da fórmula encontrada minimizando a soma de quadrados do resíduo.

STEEL e TORRIE (1960) afirmam que o procedimento completo, através do método da covariância para estimativa da parcela, faz com que a soma de quadrados do resíduo seja mínima e a soma de quadrados de tratamentos não viciada, ao contrário do que ocorre quando se estima a parcela pela fórmula usual. Quando se estima a parcela perdida pela fórmula usual e se calcula a soma de quadrados de tratamentos, esta é viciada, devendo ser corrigida em certos casos.

PANSE e SUKHATME (1963) afirmam que o método da análise de covariância pode ser estendido para o caso de mais de uma parcela perdida. Neste caso, usa-se uma covariância múltipla, com tantas pseudo-variáveis quantas forem as parcelas perdidas.

COONS (1957) emprega o método da análise de covariância para a estimativa de uma parcela num experimento fatorial $2^5 \times 4$ com repetição fracionada, de uma subparcela num experimento em parcelas subdivididas, com os tratamentos das parcelas em esquema fatorial, bem como de duas subparcelas em parcelas diferentes num experimento em parcelas subdivididas.

O estudo de observações perdidas nos experimentos em parcelas subdivididas, também tem merecido a atenção dos autores nos últimos tempos. RIBEIRO (1980) apresenta um estudo sobre a análise de experimentos em parcelas subdivididas com observações perdidas, onde as parcelas são distribuidas inteiramente ao acaso. HADDAD (1978) e SANCHES (1980) apresentam estudos sobre a análise de experimentos em parcelas subdivididas com observações perdidas, com as parcelas em blocos casualizados.

2.3. Análise de covariância com observações perdidas.

A análise de covariância em experimentos com observações perdidas teve a primeira referência através de BARTLETT (1936) para o caso de um experimento em blocos casualizados. Esse autor afirma que, no caso de se perder uma observação da variável dependente, o correspondente valor da variável auxiliar deve ser descartado, estimando-se ambos valores através da fórmula usual de estimativa de parcela em blocos casualizados.

Nesse caso, tem-se :

$$\hat{x}_{ij} = \frac{Ix_{i.} + Jx_{.j} - x_{..}}{(I-1)(J-1)}$$

e

$$\hat{y}_{ij} = \frac{Iy_{i.} + J\,y_{.j} - y_{..}}{(I-1)(J-1)}$$

onde :

$\hat{x}_{ij}$ e $\hat{y}_{ij}$ são as estimativas das observações da variável auxiliar e da variável dependente;

$x_{i.}$ e $y_{i.}$ são os totais disponíveis para a variável auxiliar e para a variável dependente referentes ao tratamento com observação perdida;

$x_{.j}$ e $y_{.j}$ são os totais disponíveis para a variável auxiliar e para a variável dependente referentes ao bloco com observação perdida;

$x_{..}$ e $y_{..}$ são os totais disponíveis para a variável auxiliar e para a variável dependente referentes a todo o experimento;

I é o número de tratamentos;

J é o número de blocos.

O autor sugere o mesmo procedimento para o caso de se perder o par de observação. A análise de covariância é conduzida da maneira usual, perdendo-se um grau de liberdade para o resíduo. A razão de se estimar ambos elementos do par, quando apenas o valor de y foi perdido, segundo o autor, é que não haverá contribuição da observação perdida para a regressão, quando os rendimentos finais de y forem ajustados pela variação em x. Assim, mesmo que o valor da covariável seja disponível, ele não deve ser usado no ajuste da média do tratamento. Só se usa as observações de x às quais estão associadas as observações de y.

FEDERER (1955) afirma que o procedimento sugeri do por BARTLETT não é correto para o caso de se considerar as observações de x e de y, como provenientes de uma distribuição bivariada, da qual se tem interesse em conhecer as médias $\bar{y}$ e $\bar{x}$, as variâncias e a covariância. Neste caso, há uma perda de informação se um dos valores for descartado, simplesmente porque o outro elemento do par perdeu-se acidentalmente. Uma solução segundo o autor, para o caso de se perder uma observação de x, é estimar o seu valor pela fórmula usual e realizar a análise de covariância sem perder um grau de liberdade para o resíduo. No ajustamento da média do tratamento que teve a observação perdida, deve-se usar os J valores de y e os (J-1) valores de x.

Um outro procedimento sugerido por FEDERER (1955), é o de se estimar a observação perdida da variável auxiliar , condicionando que a soma de quadrados do resíduo ajustada para regressão deve ser mínima. Se por exemplo, for admitido perdida a observação da variável auxiliar no tratamento 1 e no bloco 1, sua estimativa será :

$$\frac{\frac{(I-1)(J-1)}{IJ}\hat{x}_{11} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x}_{..}}{y_{11} - \bar{y}_{1.} - \bar{y}_{.1} + \bar{y}_{..}} = \frac{Exx}{Exy} = \frac{1}{\hat{b}}$$

onde :

Exx é a soma de quadrados do resíduo, referente à variável auxiliar;

Exy é a soma de produtos da variável auxiliar x com a variável dependente y, referente ao resíduo;

$\hat{b}$ é a estimativa do coeficiente de regresão linear;

$\bar{y}_{1.}$, $\bar{y}_{.1}$ e $\bar{y}_{..}$ são, respectivamente, as médias da variável dependente, no tratamento 1, no bloco 1 e em todo o experimento;

$\bar{x}_{1.}$, $\bar{x}_{.1}$ e $\bar{x}_{..}$ são, respectivamente, as médias da variável auxiliar, no tratamento 1, no bloco 1 e em todo o experimento;

I é o número de tratamento;

J é o número de repetições;

y_{11} é o valor da variável dependente associado à observação perdida da variável auxiliar;

$\hat{x}_{11}$ é a estimativa da observação perdida da variável auxiliar.

Como $\hat{x}_{11}$ aparece em Exx e Exy, o autor sugere que se obtenha o seu valor pelo método iterativo. O primeiro valor atribuído a $\hat{x}_{11}$ para se aplicar o método iterativo, pode ser obtido pela fórmula usual de estimativa de parcela, nos experimentos em blocos casualizados. Deve-se observar, que ocorre a perda de um grau de liberdade para o resíduo ajustado para regressão.

No caso de se perder uma observação referente à variável dependente, o autor sugere raciocínio análogo. Se, por exemplo, for admitido perdida a observação da variável dependente no tratamento 1 e no bloco 1 , sua estimativa será :

$$\hat{y}_{11} = \frac{Iy_{1.} + Jy_{.1} - y_{..}}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJ(x_{11} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x}_{..})}{2(I-1)\ (J-1)} \ \frac{Exy}{Exx}$$

onde :

$$Exy = x_{11}\hat{y}_{11} + \sum_{i,j \neq 1,1} x_{ij}y_{ij} - \frac{x_{1.}\ (\hat{y}_{11} + y_{1.}) + \sum_{2}^{I} x_{i.}y_{i.}}{J}$$

$$- \frac{x_{.1}(\hat{y}_{11} + y_{.1}) + \sum_{2}^{J} x_{.j}\ y_{.j}}{I} + \frac{x_{..}(\hat{y}_{11} + y_{..})}{IJ}$$

WILKINSON (1957) apresenta um procedimento para se estimar um conjunto de observações perdidas, aplicável aos delineamentos nos quais a análise estatística pode ser realizada através da teoria dos modelos lineares, que se aplica também à análise de covariância. Este método se baseia na solução de equações do tipo :

$$Au = E$$

onde :

A é a matriz dos coeficientes, determinada pela configuração no delineamento, das parcelas com observações perdidas;

u é o vetor de observações perdidas;

E é um vetor de estimativas prévias para as observações perdidas.

A inversão da matriz A conduz à estimativa final das observações perdidas, pois

$u = A^{-1}E$

Por essa metodologia, estima-se sempre o par de observações, mesmo que um dos elementos seja disponível.

Para se obter os elementos da matriz A, o autor só apresenta a regra para o caso de experimentos em quadrados latinos com linhas duplas.

Um exemplo com 4 tratamentos é apresentado, sendo que foram perdidos três pares de observações em linhas e colunas diferentes.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. Material .

Para comprovação dos resultados foram utilizados dados de um experimento em blocos casualizados, compilados de PIMENTEL GOMES (1978), os quais estão apresentados no Apêndice.

3.2. Métodos .

Seja um experimento em blocos casualizados , com I tratamentos dispostos em J repetições .

O modelo matemático de análise de covariância , conforme é sabido, é o que se segue :

$$Y_{ij} = m + t_i + b_j + bx_{ij} + e_{ij}$$

onde :

Y_{ij} é o valor observado, referente ao tratamento <u>i</u> no bloco j;

m é a média geral teórica;

t_i é o efeito do tratamento <u>i</u>, com i= 1,2,...,I;

b_j é o efeito do bloco j, com j= 1,2,...,J;

b é o coeficiente de regressão linear de Y em relação a x;

$x_{ij} = X_{ij} - \bar{X}$, onde X_{ij} é o valor observado da variável auxiliar;

e_{ij} é o erro experimental associado a Y_{ij}, que se supõe por hipótese, com distribuição normal de média zero e variância σ^2, ou seja, $e_{ij} \cap N(0,\sigma^2)$

Pelos processos usuais, obtém-se o seguinte quadro de análise de covariância:

Causas de variação	GL	Soma de Quadrados e Soma de Produtos: Y^2	XY	X^2
Blocos	J-1	$\frac{1}{I}\sum_j Y_{.j}^2 - C(Y)$	$\frac{1}{I}\sum_j X_{.j}\,Y_{.j} - C(X,Y)$	$\frac{1}{I}\sum_j X_{.j}^2 - C(X)$
Tratamentos	I-1	$\frac{1}{J}\sum_i Y_{i.}^2 - C(Y)$	$\frac{1}{J}\sum_i X_{i.}\,Y_{i.} - C(X,Y)$	$\frac{1}{J}\sum_i X_{i.}^2 - C(X)$
Resíduo	(I-1)(J-1)	E_{YY}	E_{XY}	E_{XX}
Total	IJ-1	$\sum_{i,j} Y_{ij}^2 - C(Y)$	$\sum_{i,j} X_{ij}Y_{ij} - C(X,Y)$	$\sum_{i,j} X_{ij}^2 - C(X)$

Bem como as somas de quadrados de tratamentos e de resíduo, ajustadas para regressão linear, conforme se segue:

Causas de Variação	GL	SQ e SP			GL	SQ(aj)
		y^2	xy	x^2		
Blocos	J-1	Byy	Bxy	Bxx		
Tratamentos	I-1	Tyy	Txy	Txx		
Resíduo	(I-1)(J-1)	Eyy	Exy	Exx	(I-1)(J-1)-1	$E'yy = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx}$
Trat. + Res.	J(I-1)	Tyy+Eyy	Txy+Exy	Txx+Exx	J(I-1)-1	$(Tyy+Eyy)' = Tyy+Eyy - \frac{(Txy+Exy)^2}{Txx+Exx}$
Trat. (aj)					I-1	$T'yy = (Tyy+Byy)' - E'yy$

3.2.1. Estimativas de observações perdidas

As estimativas de observações perdidas da variável, da covariável ou de ambas, foram determinadas através do método dos quadrados mínimos, isto é, tornando mínima a soma de quadrados do resíduo ajustada para regressão linear (E'yy).

Todas as fórmulas obtidas, exceto o caso da perda do par, foram dadas em função de Exy e Exx, assim os valores só puderam ser obtidos pelo método iterativo.

No caso da perda de duas observações da variável ou da covariável, aplicou-se o método iterativo sugerido por YATES (1933), utilizando-se as fórmulas que estimam uma observação da variável ou da covariável, para a obtenção dos valores.

3.2.2. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

Para a aplicação de métodos de comparações múltiplas, fórmulas para o cálculo das estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão, foram determinadas, partindo-se da função linear entre duas médias de tratamentos, conforme procedimento proposto por COCHRAN (1957).

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Embora se tenha deduzido as fórmulas para todos os casos de perdas de observações anteriormente citados, foi apresentada a dedução teórica envolvendo apenas o caso da perda de uma observação da variável.

Nos demais casos , foram apresentadas as fórmulas obtidas por deduções análogas.

4.1. Caso da perda de uma observação da variável .

4.1.1. Fórmula para estimativa de uma observação da variável .

Seja um experimento em blocos casualizados conforme descrito em 3.2.

Admitindo perdida a observação da variável no tratamento 1 e no bloco 1, representada por y, a soma de quadrados do resíduo ajustada para regressão

$$E'yy = Eyy - \frac{(Exy)^2}{Exx}$$

é uma função de y, o que pode ser observado nas expressões seguintes :

a) $Eyy = y^2 - \frac{1}{J}(y+Ty)^2 - \frac{1}{I}(y+By)^2 + \frac{1}{IJ}(y+Gy)^2 +$ constantes

b) $Exy = x_{11}\,y - \frac{T_1x(y+Ty)}{J} - \frac{B_1x\ (y+By)}{I} + \frac{Gx(y+Gy)}{IJ} +$ constantes

Derivando E'yy em relação a y, tem-se

$$\frac{d(E'yy)}{dy} = 2y - \frac{2}{J}(y+Ty) - \frac{2}{I}(y+By) + \frac{2}{IJ}(y+Gy) - \frac{2Exy}{Exx}\left(x_{11} - \frac{T_1x}{J} - \frac{B_1x}{I} + \frac{Gx}{IJ}\right)$$

Igualando a derivada a zero, simplificando-a e reduzindo os termos semelhantes obtém-se :

$$y = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exy}{Exx}$$

onde :

Ty é o total da variável no tratamento que perdeu y;

By é o total da variável no bloco que perdeu y;

Gy é o total da variável em todo o experimento;

T_1x é o total da covariável no tratamento que perdeu y;

B_1x é o total da covariável no bloco que perdeu y ;

Gx é o total da covariável em todo o experimento;

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y perdida.

y é a estimativa da observação da variável .

A fórmula obtida é discordante com a apresentada por FEDERER (1955). Na fórmula apresentada por aquele autor, aparece o fator 2 no denominador do segundo termo referente ao segundo membro.

4.1.2. Exemplo ilustrativo.

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos da estimativa da observação perdida da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 1.

TABELA 1 - Cálculo da estimativa da observação perdida da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (y)				
		100	10	$\overline{T}y$	$\overline{B}y$	$\overline{G}y$
1	Exy	325,7750	244,7750	280,5179	305,9750	286,3596
	y_1	88,2588	84,4649	86,1390	87,3314	86,4126
2	Exy	315,2079	311,7934	313,3001	314,3732	313,5464
	y_2	87,7638	87,6039	87,6745	87,7247	87,6860
3	Exy	314,7625	314,6185	314,6820	314,7273	314,6924
	y_3	87,7430	87,7362	87,7392	87,7413	87,7397
4	Exy	314,7437	314,7376	314,7403	314,7422	314,7407
	y_4	87,7421	87,7418	87,7419	87,7420	87,7420

$\overline{T}y = \frac{348}{7}$ é a média do tratamento que perdeu observação;

$\overline{B}y = \frac{312}{4}$ é a média do bloco que perdeu observação;

$\overline{G}y = \frac{2192}{39}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 1, verifica-se que a convergência se dá após 4 ciclos, arbitrando-se as médias ou mesmo, outros valores, como valores iniciais.

4.1.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.1.3.1. Caso de duas médias de tratamentos, uma delas com observação perdida.

A média do tratamento que contém observação perdida é dada por :

$$\hat{m}_1 = \frac{y + Ty}{J} - \hat{b}\,(\bar{x}_{1.} - \bar{x})$$

A média de outro tratamento qualquer é dada por:

$$\hat{m}_i = \frac{Ti}{J} - \hat{b}\,(\bar{x}_{i.} - \bar{x})$$

Admitindo o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_1 - \hat{m}_i$$

ou seja

$$\hat{Y} = \frac{y + Ty}{J} - \frac{Ti}{J} - \hat{b}\,(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por J e substituindo y por sua estimativa de 4.1.1. obtém - se :

$$J\hat{Y} = Ty + \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1(J-1)} + \frac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)} \frac{Exy}{Exx} - Ti - J\hat{b}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})$$

Desdobrando o valor de Gy como se segue

$$Gy = Ty + By + Ky$$

onde: Ky é o total dos dados associados à variável, excetuando aqueles do bloco e do tratamento em que ocorreu a perda

e reduzindo os termos semelhantes obtém-se :

$$J\hat{Y} = \frac{J}{J-1} Ty + \frac{By}{I-1} - \frac{Ky}{(I-1)(J-1)} - Ti + \hat{b}\left[\frac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)} - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})\right]$$

Assim,

$$J^2\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{J^2}{(J-1)^2}\hat{V}(Ty) + \frac{\hat{V}(By)}{(I-1)^2} + \frac{\hat{V}(Ky)}{[(I-1)(J-1)]^2} + \hat{V}(Ti) - \frac{2}{I-1}\hat{Cov}(Ti,By)$$

$$+ \frac{2}{(I-1)(J-1)}\hat{Cov}(Ti,Ky) + \left[\frac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)} - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})\right]^2 \hat{V}(\hat{b})$$

reduzindo-se os termos semelhantes e simplificando, tem-se :

$$J^2\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{\frac{J[2(I-1)(J-1) + I]}{(I-1)(J-1)} + \frac{1}{Exx}\left[\frac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)} - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})\right]^2\right\} QMR'$$

Portanto a estimativa da variância de $\hat{Y}$ é dada por :

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{\frac{2}{J} + \frac{I}{J(I-1)(J-1)} + \frac{1}{J^2 Exx}[M - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})]^2\right\} QMR'$$

Onde :

QMR' é o quadrado médio do resíduo ajustado para regressão ;

$M = \dfrac{IJx_{11} - IT_1x - JB_1x + Gx}{(I-1)(J-1)}$, conforme suposição admitida em 4.1.1.

4.1.3.2. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

Conforme já é conhecido, neste caso tem-se:

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.2. Caso da perda de uma observação da covariável.

4.2.1. Fórmula para estimativa de uma observação perdida da covariável.

Admitindo perdida a observação x_{11} da covariável no experimento descrito em 3.2., minimizando $E'yy$ chega-se à seguinte fórmula de estimativa:

$$x = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJy_{11} - IT_1y - JB_1y + Gy}{(I-1)\ (J-1)} \quad \frac{Exx}{Exy}$$

onde:

Tx é o total da covariável no tratamento que perdeu x;

Bx é o total de covariável no bloco que perdeu x;

Gx é o total da covariável em todo o experimento;

T_1y é o total da variável no tratamento que perdeu x;

B_1y é o total da variável no bloco que perdeu x;

Gy é o total da variável em todo o experimento;

y_{11} é o valor da variável associado à observação x perdida;

x é a estimativa da observação da covariável.

A fórmula obtida é concordante com a apresentada por FEDERER (1955), tendo alguma diferença nas notações, pois a fórmula daquele autor está expressa em termos de médias.

4.2.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos da estimativa da observação perdida da covariável, através do método iterativo, partindo de diferentes valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 2.

TABELA 2 - Cálculo da estimativa da observação perdida da covariável, pelo método iterativo, partindo de diferentes valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x)				
		20	4	$\bar{T}x$	$\bar{B}x$	$\bar{G}x$
1	Exx	131,9500	35,9500	26,5214	26,3250	26,3724
	Exy	310,0750	298,8750	301,8750	301,3250	301,7109
	x_1	8,1398	7,8346	7,8021	7,8016	7,8017
2	Exx	26,4196	26,3030	26,2983	26,2982	26,2982
	Exy	301,7729	301,5592	301,5365	301,5362	301,5362
	x_2	7,8018	7,8015	7,8015	7,8015	7,8015
3	Exx	26,2982	26,2982	26,2982	26,2982	26,2982
	Exy	301,5363	301,5361	301,5361	301,5362	301,5362
	x_3	7,8015	7,8015	7,8015	7,8015	7,8015

$\bar{T}x = \frac{58}{7}$ é a média do tratamento que perdeu observação;

$\bar{B}x = \frac{30}{4}$ é a média do bloco que perdeu observação;

$\bar{G}x = \frac{314}{39}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 2, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias do tratamento, do bloco ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.2.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

A perda de observação da covariável não influi nas variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustados para regressão. Assim, como já é conhecido tem-se :

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i!})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.3. Caso da perda de uma observação da variável e uma da covariável

4.3.1. No mesmo par .

4.3.1.1. Fórmulas para estimativa de uma observação da variável e uma da covariável formando um par.

Admitindo perdido um par qualquer de observações no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa :

$$y = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} + \left[x - \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} \right] \frac{Exy}{Exx}$$

$$x = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} + \left[y - \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1(J-1)} \right] \frac{Exx}{Exy}$$

onde :

Tx e Ty são os totais da covariável e da variável no tratamento que perdeu o par;

Bx e By são os totais da covariável e da variável no bloco que perdeu o par;

Gx e Gy são os totais da covariável e da variável em todo o experimento;

x e y são as estimativas das observações do par.

Como a expressão que estima y é função de x e vice-versa, a convergência pelo método iterativo, não se dá para um mesmo par de valores, quando se toma diferentes pares de valores iniciais.

Tomando-se como par arbitrário inicial, respectivamente, os valores da estimativa da covariável e da variável obtidos pela fórmula usual para os experimentos em blocos casualizados, anula-se o segundo termo das expressões que estimam x e y. Dessa forma, as fórmulas que estimam a covariável e a variável se reduzem a :

$$x = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} \quad e \quad y = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)}$$

4.3.1.2. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.3.1.2.1. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.3.1.2.2. Caso de duas médias de tratamentos , uma delas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{I}{J(I-1)(J-1)} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.3.2. No mesmo tratamento mas não formando par.

4.3.2.1. Fórmulas para estimativa de uma observação da variável e uma da covariável , no mesmo tratamento mas não formando par.

Admitindo perdidas, respectivamente, as observações x_{12} e y_{11} da covariável e da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'_{yy} chega-se às seguintes fórmulas de estimativa:

$$x = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ (J-1)A' - B + \left[(J-1)B' - A \right] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

$$y = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ (J-1)A - B' + \left[(J-1)B - A' \right] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - ITx - JB'_x + Gx}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{12} - ITy - JB'_y + Gy}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

B'_x é o total da covariável no bloco que perdeu y;

B'_y é o total da variável no bloco que perdeu x;

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y perdida;

y_{12} é o valor da variável associado à observação x perdida;

x e y são respectivamente, as estimativas das observações da covariável e da variável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.3.2.2. Exemplo ilustrativo

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 3.

TABELA 3 - Cálculo das estimativas das observações perdidas , da covariável e da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x,y)				
		20;100	10;50	$\bar{T}x;\bar{T}y$	$\bar{B}x;\bar{B}y$	$\bar{G}x;\bar{G}y$
1	Exx	114,3500	28,3500	27,6643	27,5250	27,8903
	Exy	362,0750	289,0750	274,5869	303,2250	279,0740
	x_1	11,4300	9,5247	9,5482	9,4609	9,5411
	y_1	75,9717	85,3452	84,9830	86,4381	85,0912
2	Exx	32,0695	27,7477	27,7700	27,6909	27,7631
	Exy	318,0075	315,0862	314,8921	315,7152	314,9492
	x_2	9,5490	9,4372	9,4382	9,4340	9,4379
	y_2	84,9713	86,8902	86,8687	86,9515	86,8752
3	Exx	27,7708	27,6712	27,6721	27,6687	27,6718
	Exy	314,8859	315,9919	315,9785	316,0301	315,9826
	x_3	9,4383	9,4328	9,4329	9,4327	9,4329
	y_3	86,8680	86,9756	86,9745	86 9789	86,9749
4	Exx	27,6721	27,6677	27,6678	27,6676	27,6677
	Exy	315,9781	316,0452	316,0445	316,0473	316,0447
	x_4	9,4329	9.4326	9,4326	9,4326	9,4326
	y_4	86,9745	86,9801	86,9801	86,9803	86,9801
5	Exx	27,6678	27,6675	27,6675	27,6675	27,6675
	Exy	316,0444	316,0480	316,0480	316,0480	316,0479
	x_5	9,4326	9,4326	9,4326	9,4326	9,4326
	y_5	86,9801	86,9804	86,9804	86,9804	86,9804

$\bar{T}x = \frac{58}{7}$ e $\bar{T}y = \frac{348}{7}$ são as médias do tratamento que perdeu as observações;

$\bar{B}x = \frac{34}{4}$ e $\bar{B}y = \frac{312}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações;

$\bar{G}x = \frac{314}{39}$ e $\bar{G}y = \frac{2192}{39}$ são as médias gerais do experimento.

Observando-se a Tabela 3, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias do tratamento, dos blocos ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.3.2.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.3.2.3.1. Caso de duas médias de tratamentos uma delas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2}{J} + \frac{I(J-1)}{J^2(I-1)(J-2)} + \frac{1}{J^2 Exx} \left[M - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})\right]^2 \right\} QMR'$$

Onde:

$$M = \frac{I(J-1)x_{11} - ITx - Bx - (J-1)B'x + Gx}{(I-1)(J-2)}$$

4.3.2.3.2. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.3.3. No mesmo bloco mas não formando par.

4.3.3.1. Fórmulas para estimativa de uma observação perdida da variável e uma da covariável, no mesmo bloco mas não formando par.

Admitindo perdidas, respectivamente, as observações x_{21} e y_{11} da covariável e da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa:

$$x = \frac{I-1}{I(I-2)} \left\{ (I-1)A' - B + \left[(I-1)B' - A\right] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

$$y = \frac{I-1}{I(I-2)} \left\{ (I-1)A - B' + \left[(I-1)B - A'\right] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - IT'x - JBx + Gx}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{21} - IT'y - JBy + Gy}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

T'x é o total da covariável no tratamento que perdeu y;

T'y é o total da variável no tratamento que perdeu x;

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y perdida;

y_{21} é o valor da variável associado à observação x perdida;

x e y são, respectivamente , as estimativas das observa -

ções da covariável e da variável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.3.3.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável e da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.

TABELA 4 - Cálculo das estimativas das observações perdidas, da covariável e da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x,y)				
		10;50	5;80	$\bar{T}x;\bar{T}y$	$\bar{B}x;\bar{B}y$	$\bar{G}x;\bar{G}y$
1	Exx	33,1500	30,6500	27,4929	27,9500	28,0804
	Exy	248,9750	339,4750	375,9964	390,4750	273,4752
	x_1	3,8423	4,4985	4,5895	4,6652	4,5213
	y_1	88,5852	93,3388	91,9562	92,4279	91,5564
2	Exx	35,0611	31,2862	31,9989	31,7328	32,2465
	Exy	370,2948	359,8310	361,7830	361,0443	362,4761
	x_2	4,6995	4,8719	4,8385	4,8509	4,8270
	y_2	92,6529	93,9060	93,6458	93,7412	93,5587
3	Exx	31,6148	31,0457	31,1529	31,1130	31,1899
	Exy	360,7198	359,1994	359,4783	359,3740	359,5757
	x_3	4,8564	4,8834	4,8783	4,8802	4,8765
	y_3	93,7842	93,9977	93,9566	93,9718	93,9425
4	Exx	31,0953	31,0092	31,0225	31,0195	31,0311
	Exy	359,3278	359,1053	359,1472	359,1316	359,1617
	x_4	4,8810	4,8852	4,8844	4,8847	4,8841
	y_4	93,9786	94,0118	94,0055	94,0078	94,0033
5	Exx	31,0168	31,0037	31,0062	31,0052	31,0070
	Exy	359,1247	359,0910	359,0975	359,0949	359,0996
	x_5	4,8848	4,8855	4,8853	4,8854	4,8853
	y_5	94,0089	94,0140	94,0130	94,0134	94,0127

$\bar{T}x = \frac{52}{7}$ e $\bar{T}y = \frac{348}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações;

$\bar{B}x = \frac{32}{4}$ e $\bar{T}y = \frac{312}{4}$ são as médias do bloco que perdeu as observações;

$\bar{G}x = \frac{316}{39}$ e $\bar{G}y = \frac{2192}{39}$ são as médias gerais do experimento.

Observando-se a Tabela 4, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias dos tratamentos, do bloco ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.3.3.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.3.3.3.1. Caso de duas médias de tratamentos uma delas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \{ \frac{2}{J} + \frac{I-1}{J(J-1)(I-2)} + \frac{1}{J^2 Exx} [M - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})]^2 \} QMR'$$

onde

$$M = \frac{J(I-1)x_{11} - (I-1)T'x - Tx - JBx + Gx}{(I-2)(J-1)}$$

4.3.3.3.2. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i.'})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.3.4. Em blocos e tratamentos diferentes.

4.3.4.1. Fórmulas para estimativa de uma observação da variável e uma da covariável, em blocos e tratamentos diferentes.

Admitindo perdidas, respectivamente, as observações x_{22} e y_{11} da covariável e da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa:

$$x = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)\, A' + B + [A + (I-1)(J-1)B'] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

$$y = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)\, A + B' + [A' + (I-1)(J-1)B] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - IT'_x - JB'_x + Gx}{(I-1)\,(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{22} - IT'_y - JB'_y + Gy}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

T'_x é o total da covariável no tratamento que perdeu y;

B'_x é o total da covariável no bloco que perdeu y;

T'_y é o total da variável no tratamento que perdeu x;

B'_y é o total da variável no bloco que perdeu x;

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y perdida;

y_{22} é o valor da variável associado à observação x perdida;

x e y são, respectivamente, as estimativas das observações da covariável e da variável.

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.3.4.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável e da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 5.

TABELA 5 - Cálculo das estimativas das observações perdidas, da covariável e da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x,y)				
		10;50	5;80	$\bar{T}x;\bar{T}y$	$\bar{B}x;\bar{B}y$	$\bar{G}x;\bar{G}y$
1	Exx	30,6500	33,1500	27,6643	27,9938	27,4695
	Exy	324,3750	240,1250	264,9515	322,8500	288,0485
	x_1	10,9270	12,3213	11,2446	10,6780	10,9550
	y_1	87,7128	83,4307	86,4231	89,9305	87,5883
2	Exx	34,0327	41,3858	35,4683	33,0058	34,1536
	Exy	381,2857	408,6787	387,2434	376,7994	381,8013
	x_2	10,7596	11,1440	10,8343	10,7064	10,7659
	y_2	88,5081	86,6045	88,1421	88,7808	88,4766
3	Exx	33,3327	34,9980	33,6402	33,1185	33,3582
	Exy	378,2484	385,3305	379,5933	377,3010	378,3607
	x_3	10,7233	10,8098	10,7392	10,7122	10,7246
	y_3	88,6930	88,2601	88,6113	88,7504	88,6862
4	Exx	33,1862	33,5384	33,2501	33,1417	33,1915
	Exy	377,6012	379,1502	377,8848	377,4043	377,6247
	x_4	10,7157	10,7340	10,7190	10,7134	10,7160
	y_4	88,7322	88,6382	88 7150	88,7442	88,7308
5	Exx	33,1558	33,2290	33,1689	33,1466	33,1569
	Exy	377,4665	377,7908	377,5244	377,4257	377,4714
	x_5	10,7142	10,7179	10,7148	10,7137	10,7142
	y_5	88,7404	88,7202	88,7369	88,7429	88,7401

$\bar{T}x = \frac{51}{7}$ e $\bar{T}y = \frac{348}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações;

$\bar{B}x = \frac{35}{4}$ e $\bar{B}y = \frac{312}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações;

$\bar{G}x = \frac{315}{39}$ e $\bar{G}y = \frac{2192}{39}$ são as médias gerais do experimento.

Observando-se a Tabela 5, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias dos tratamentos, dos blocos ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.3.4.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.3.4.3.1. Caso de duas médias de tratamentos, uma delas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{\hat{Y}}) = \frac{QMR'}{J^2\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}^2}\left\{\begin{array}{l}[J(J-1)(I-1)^2]^2(J-2) + [J(J-2)(I-1)+I]^2(I-2) + [J(I-1)]^2(J-2) + [I(J-1)]^2(I-2) + \\ + [(I-1)(J-1)-1]^2(I-2)(J-2) + \{J[(J-1)(I-1)^2-1]\}^2 + [J(J-2)(I-1)]^2 + J\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}^2 + \frac{M^2}{Exx}\end{array}\right\}$$

onde :

$$M = ITx + JBx - Gx + (I-1)(J-1)(IJx_{11} - IT_x' - JB_x' + Gx) - J\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i'.})$$

4.3.4.3.2. Caso de duas médias de tratamentos, sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.4. Caso da perda de duas observações da variável.

4.4.1. No mesmo tratamento.

4.4.1.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da variável, no mesmo tratamento.

Admitindo perdidas as observações y_{11} e y_{12} da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'_{yy} chega-se às seguintes fórmulas de estimativa :

$$y_1 = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ (J-1)A + A' + \left[(J-1)B + B'\right] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

$$y_2 = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ A + (J-1)\ A' + \left[B + (J-1)\ B'\right] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{ITy + JB_1y - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{ITy + JB_2y - Gy}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - IT'_x - JB'_1x + G'_x}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJx_{12} - IT'_x - JB'_2\ x + G'_x}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y perdida;

x_{12} é o valor da covariável associada à observação y perdida;

y_1 e y_2 são as estimativas das observações da variável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.4.1.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 6.

TABELA 6 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (y_1,y_2)				
		80;100	40;50	$\bar{T}y;\bar{T}y$	$\bar{B}_1y;\bar{B}_2y$	$\bar{G}y;\bar{G}y$
1	Exy	312,6750	271,6750	280,1750	305,7250	287,0171
	y_{11}	86,9376	84,9534	85,5590	86,6000	85,6990
	y_{21}	46,2469	45,5373	45,6522	45,9625	45,7229
2	Exy	313,5435	311,6868	312,2433	313,2113	312,3764
	y_{12}	86,9798	86,8980	86,9166	86,9637	86,9315
	y_{22}	46,2575	46,0214	46,0417	46,0534	46,0298
3	Exy	313,5826	313,4853	313,5042	313,5476	313,5163
	y_{13}	86,9817	86,9854	86,9779	86,9800	86,9869
	y_{23}	46,0579	46,0432	46,0570	46,0575	46,0435
4	Exy	313,5643	313,5662	313,5608	313,5628	313,5676
	y_{14}	86,9808	86,9893	86,9806	86,9807	86,9894
	y_{24}	46,0577	46,0442	46,0577	46,0577	46,0442

$\bar{T}y = \frac{297}{6}$ é a média do tratamento que perdeu as observações;

$\bar{B}_1y = \frac{312}{4}$ e $B_2y = \frac{194}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações ;

$\bar{G}y = \frac{2141}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 6, verifica-se que a convergência se dá após 4 ciclos, arbitrando-se as médias ou mesmo outros valores, como valores iniciais.

4.4.1.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.4.1.3.1. Caso de duas médias de tratamentos, uma delas com observações perdidas.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2}{J} + \frac{2I}{J(I-1)(J-2)} + \frac{1}{J^2 Exx} \left[M + N - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i'.}) \right]^2 \right\} QMR'$$

onde :

$$M = \frac{(J-1)(IJx_{11} - IT'_x - JB'_1x + G'_x) + IJx_{12} - IT'_x - JB'_2x + G'_x}{J(I-1)(J-2)}$$

$$N = \frac{(J-1)(IJx_{12} - IT'_x - JB'_2x + G'_x) + IJx_{11} - IT'_x - JB'_1x + G'_x}{J(I-1)(J-2)}$$

4.4.1.3.2. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.4.2. No mesmo bloco .

4.4.2.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da variável, no mesmo bloco.

Admitindo perdidas as observações y_{11} e y_{21} da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa :

$$y_1 = \frac{I-1}{I(I-2)} \{(I-1)A + A' + \left[(I-1)B + B' \right] \frac{Exy}{Exx} \}$$

$$y_2 = \frac{I-1}{I(I-2)} \{A + (I-1)A' + \left[B + (I-1)B'\right] \frac{Exy}{Exx} \}$$

onde :

$$A = \frac{IT_1y + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{IT_2y + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - IT_1'x - JB_x' + G_x'}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJx_{21} - IT_2'x - JB_x' + G_x'}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y_1 perdida;

x_{21} é o valor da covariável associado à observação y_2 perdida;

y_1 e y_2 são as estimativas das observações da variável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.4.2.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da variável, através do método iterativo partindo de diferentes pares de valores iniciais cujos resultados são apresentados na Tabela 7.

TABELA 7 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (y_1, y_2)				
		80;100	40;50	$\overline{T}_1y;\overline{T}_2y$	$\overline{B}y;\overline{B}y$	$\overline{G}y;\overline{G}y$
1	Exy	303,5750	272,5750	281,1750	309,3083	286,5013
	y_{11}	93,3251	91,8185	92,2290	93,5955	92,4954
	y_{21}	82,3804	82,1665	82,2368	82,4320	82,2526
2	Exy	317,3296	315,9951	316,3574	317,5678	316,5956
	y_{12}	93,9936	93,9288	93,9379	93,9967	93,9579
	y_{22}	82,4753	82,4661	82,4809	82,4893	82,4702
3	Exy	317,9217	317,8643	317,8954	317,9231	317,8901
	y_{13}	94,0224	94,0196	94,0126	94,0139	94,0209
	y_{23}	82 4794	82,4790	82,4916	82,4918	82,4791
4	Exy	317,9472	317,9448	317,9372	317,9384	317,9459
	y_{14}	94,0236	94,0235	94,0146	94,0147	94,0236
	y_{24}	82,4795	82,4795	82,4919	82,4919	82,4995

$\overline{T}_1y = \frac{348}{7}$ e $\overline{T}_2y = \frac{360}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações;

$\overline{B}y = \frac{254}{3}$ é a média do bloco que perdeu as observações ;

$\overline{G}y = \frac{2134}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 7, verifica-se que a convergência se dá após 4 ciclos, arbitrando-se as médias ou mesmo outros valores, como valores iniciais.

4.4.2.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

4.4.2.3.1. Caso de duas médias de tratamentos, ambas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2}{J-1} + \frac{1}{J^2 E_{xx}} \left[M - N - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.})\right]^2 \right\} QMR'$$

onde :

$$M = \frac{(I-1)(IJx_{11} - IT_1'x - JB_x' + G_x') + IJx_{21} - IT_2'x - JB_x' + G_x'}{I(I-2)(J-1)}$$

$$N = \frac{(I-1)(IJx_{21} - IT_2'x - JB_x' + G_x') + IJx_{11} - IT_1'x - JB_x' + G_x'}{I(I-2)(J-1)}$$

4.4.2.3.2. Caso de duas médias de tratamentos, uma delas com observação perdida.

a) Observação perdida no tratamento 1.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2}{J} + \frac{I-1}{J(I-2)(J-1)} + \frac{1}{J^2 E_{xx}} \left[M - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})\right]^2 \right\} QMR'$$

b) Observação perdida no tratamento 2.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2}{J} + \frac{I-1}{J(I-2)(J-1)} + \frac{1}{J^2 Exx} \left[N - J(\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{i.}) \right]^2 \right\} QMR'$$

4.4.2.3.3. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.4.3. Em blocos e tratamentos diferentes.

4.4.3.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da variável, em blocos e tratamentos diferentes.

Admitindo perdidas as observações y_{11} e y_{22} da variável no experimento descrito em 3.2., minimizando $E'yy$ chega-se às seguintes fórmulas de estimativa. :

$$y_1 = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)\,A - A' + [(I-1)(J-1)B - B'] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

$$y_2 = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)\,A' - A + [(I-1)(J-1)B' - B] \frac{Exy}{Exx} \right\}$$

Onde :

$$A = \frac{IT_1y + JB_1y - Gy}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{IT_2y + JB_2y - Gy}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJx_{11} - IT_1'x - JB_1'x + G_x'}{(I-1(J-1)} \qquad B' = \frac{IJx_{22} - IT_2'x - JB_2'x + G_x'}{(I-1)(J-1)}$$

Sendo que :

x_{11} é o valor da covariável associado à observação y_1 perdida;

x_{22} é o valor da covariável associada à observação y_2 perdida;

y_1 e y_2 são as estimativas das observações da variável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.4.3.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da variável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 8.

TABELA 8 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da variável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (y_1, y_2)				
		80;100	40;50	$\bar{T}_1y;\bar{T}_2y$	$\bar{B}_1y;\bar{B}_2y$	$\bar{G}y;\bar{G}y$
1	Exy	311,0750	270,0750	278,8322	303,7250	284,9961
	y_{11}	88,6702	86,7555	87,1645	88,3270	87,4523
	y_{21}	36,0837	35,9402	35,9708	36,0579	35,9924
2	Exy	312,4865	310,7490	311,1201	312,1751	311,3813
	y_{12}	88,7361	88,6550	88,6723	88,7216	88,6845
	y_{22}	36,0886	36,0825	36,0838	36,0875	36,0847
3	Exy	312,5464	312,4727	312,4885	312,5332	312,4995
	y_{13}	88,7389	88,7355	88,7362	88,7383	88,7367
	y_{23}	36,0888	36,0886	36,0886	36,0888	36,0886
4	Exy	312,5489	312,5458	312,5465	312,5484	312,5469
	y_{14}	88,7390	88,7389	88,7389	88,7390	88,7389
	y_{24}	36,0888	36,0888	36,0888	36,0888	36,0888

$\bar{T}_1y = \frac{348}{7}$ e $\bar{T}_2y = \frac{351}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as obervações;

$\bar{B}_1y = \frac{312}{4}$ e $\bar{B}_2y = \frac{178}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações;

$\bar{G}y = \frac{2125}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 8, verifica-se que a convergência se dá após 4 ciclos, arbitrando-se as médias ou mesmo outros valores, como valores iniciais.

4.4.3.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustados para regressão.

4.4.3.3.1. Caso de duas médias de tratamentos, ambas com observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left\{ \frac{2(I-1)}{(I-1)(J-1)-1} + \frac{1}{J^2 Exx} \left[M - J(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{2.})\right]^2 \right\} QMR'$$

onde :

$$M = \frac{IJ(x_{11} - x_{22}) + I(T_1'x - T_2'x) + J(B_1'x - B_2'x)}{(I-1)(J-1) - 1}$$

4.4.3.3.2. Caso de duas médias de tratamentos, uma delas com observação perdida.

a) Observação perdida no tratamento 1.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{QMR'}{J^2\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}^2} \left\{ \begin{array}{l} [J(J-1)(I-1)^2]^2(J-2) + [J(J-2)(I-1)+I]^2(I-2) + [J(I-1)]^2(J-2) + [I(J-1)]^2(I-2) + \\ + [(I-1)(J-1)-1]^2(I-2)(J-2) + \{J[(J-1)(I-1)^2-1]\}^2 + [J(J-2)(I-1)]^2 + J\{[(I-1)J-1)]^2-1\}^2 + \frac{M^2}{Exx} \end{array} \right\}$$

onde :

$$M = (I-1)(J-1)(IJx_{11} - IT_1'x - JB_1'x + G_x') - (IJx_{22} - IT_2'x - JB_2'x + G_x') - J\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}(\bar{x}_{1.} - \bar{x}_{i.})$$

b) Observação perdida no tratamento 2

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{QMR'}{J^2\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}^2}\left\{\begin{array}{l}[J(J-1)(I-1)^2]^2(J-2)+[J(J-2)(I-1)+I]^2(I-2)+[J(I-1)]^2(J-2)+[I(J-1)]^2(I-2)\ + \\ +[(I-1)(J-1)-1]^2(I-2)(J-2)+\{J[(J-1)(I-1)^2-1]\}^2+[J(J-2)(I-1)]^2+J\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}^2+\dfrac{M^2}{Exx}\end{array}\right\}$$

onde :

$$M = (I-1)(J-1)(IJx_{22} - IT_2'x - JB_2'x + G_x') - (IJx_{11} - IT_1'x - JB_1'x + G_x') - J\{[(I-1)(J-1)]^2-1\}\ (\bar{x}_{2.} - \bar{x}_{1.})$$

4.4.3.3.3. Caso de duas médias de tratamentos sem observação perdida.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.5. Caso da perda de duas observações da covariável .

4.5.1. No mesmo tratamento .

4.5.1.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da covariável, no mesmo tratamento.

Admitindo perdidas as observações x_{11} e x_{12} da covariável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa:

$$x_1 = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ (J-1)\, A + A' + \left[(J-1)\, B + B'\right] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

$$x_2 = \frac{J-1}{J(J-2)} \left\{ A + (J-1)\, A' + \left[B + (J-1)\, B'\right] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{ITx + JB_1x - Gx}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{ITx + JB_2x - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJy_{11} - IT'_y - JB'_1y + G'_y}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{12} - IT'_y - JB'_2y + G'_y}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

y_{11} é o valor da variável associado à observação x_1 perdida;

y_{12} é o valor da variável associado à observação x_2 perdida;

x_1 e x_2 são as estimativas das observações da covariável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.5.1.2. Exemplo ilustrativo .

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 9.

TABELA 9 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da covariável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

C i c l o s		Valores Arbitrários Iniciais (x_1, x_2)				
		10;10	5;5	$\overline{T}x;\overline{T}x$	$\overline{B}_1x;\overline{B}_2x$	$\overline{G}x;\overline{G}x$
1	Exx	30,6500	38,6500	26,6167	26,2500	26,6403
	Exy	308,9750	275,9750	296,8970	298,3750	295,9487
	x_{11}	7,8899	7,9818	7,8684	7,8646	7,8692
	x_{12}	9,5347	9,8921	9,4510	9,4364	9,4543
2	Exx	26,7402	27,2602	26,6442	26,6284	26,6478
	Exy	304,7526	306,9258	304,2440	304,1550	304,2641
	x_{12}	7,8641	7,8665	7,8637	7,8637	7,8638
	x_{22}	9,4345	9,4438	9,4329	9,4327	9,4330
3	Exx	26,6263	26,6364	26,6246	26,6244	26,6248
	Exy	304,1432	304,2003	304,1336	304,1322	304,1345
	x_{13}	7,8637	7,8637	7,8637	7,8637	7,8637
	x_{23}	9,4327	9,4329	9,4326	9,4326	9,4327

$\overline{T}x = \frac{49}{6}$ é a média do tratamento que perdeu as observações;

$\overline{B}_1x = \frac{30}{4}$ e $\overline{B}_2x = \frac{34}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações;

$\overline{G}x = \frac{305}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 9, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias do tratamento, dos blocos ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.5.1.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

Da mesma forma como em 4.2.3. tem-se :

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx}\right] QMR'$$

4.5.2. No mesmo bloco.

4.5.2.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da covariável, no mesmo bloco.

Admitindo perdidas as observações x_{11} e x_{21} da covariável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa :

$$x_1 = \frac{I-1}{I(I-2)} \{(I-1)\ A + A' + [(I-1)\ B + B']\ \frac{Exx}{Exy}\}$$

$$x_2 = \frac{I-1}{I(I-2)} \{A + (I-1)\ A' + [B + (I-1)\ B']\ \frac{Exx}{Exy}\}$$

onde :

$$A = \frac{IT_1x + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{IT_2x + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJy_{11} - IT_1'y - JB_y' + G_y'}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{21} - IT_2'y - JB_y' + G_y'}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

y_{11} é o valor da variável associado à observação x_1 perdida;

y_{21} é o valor da variável associado à observação x_2 perdida;

x_1 e x_2 são as estimativas das observações da covariável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.5.2.2. Exemplo ilustrativo.

Com os dados apresentados no Apêndice 1, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 10.

TABELA 10 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da covariável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x_1, x_2)				
		10;10	5;5	$\overline{T}_1x;\overline{T}_2x$	$\overline{B}x;\overline{B}x$	$\overline{G}x;\overline{G}x$
1	Exx	34,6000	31,8500	26,6714	26,7033	27,3329
	Exy	258,6750	329,1750	295,5321	291,5750	285,7618
	x_{11}	7,0548	7,2244	7,2541	7,2468	7,2294
	x_{21}	3,8287	4,6532	4,7983	4,7624	4,6779
2	Exx	32,1125	29,3270	28,9292	29,0249	29,2574
	Exy	347,9488	335,8647	333,7376	334,2630	335,5028
	x_{12}	7,2448	7,2675	7,2704	7,2698	7,2681
	x_{22}	4,7528	4,8636	4,8778	4,8745	4,8661
3	Exx	29,0510	28,7595	28 7231	28,7316	28,7530
	Exy	334,4046	332,7816	332,5727	332,6217	332,7446
	x_{13}	7,2696	7,2716	7,2719	7,2718	7,2717
	x_{23}	4,8738	4,8835	4,8849	4,8846	4,8838
4	Exx	28,7340	23,7086	28,7051	28,7059	28,7080
	Exy	332,6352	332,4888	332,4688	332,4732	332,4856
	x_{14}	7,2718	7,2720	7,2720	7,2720	7,2720
	x_{24}	4,8845	4,8853	4,8854	4,8853	4,8853

$\overline{T}_1x = \frac{58}{7}$ e $\overline{T}_2x = \frac{52}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações;

$\overline{B}x = \frac{23}{4}$ é a média do bloco que perdeu as observações;

$\overline{G}x = \frac{307}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 10, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias dos tratamentos, do bloco ou de todo o experimento como valores iniciais.

4.5.2.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.5.3. Em blocos e tratamentos diferentes.

4.5.3.1. Fórmulas para estimativa de duas observações perdidas da covariável, em blocos e tratamentos diferentes.

Admitindo perdidas as observações x_{11} e x_{22} da covariável no experimento descrito em 3.2., minimizando E'yy chega-se às seguintes fórmulas de estimativa :

$$x_1 = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)A - A' + [(I-1)(J-1)B - B'] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

$$x_2 = \frac{(I-1)(J-1)}{[(I-1)(J-1)]^2 - 1} \left\{ (I-1)(J-1)A' - A\ [(I-1)(J-1)B' - B] \frac{Exx}{Exy} \right\}$$

onde :

$$A = \frac{IT_1x + JB_1x - Gx}{(I-1)(J-1)} \qquad A' = \frac{IT_2x + JB_2x - Gx}{(I-1)(J-1)}$$

$$B = \frac{IJy_{11} - IT_1'y - JB_1'y + G_y'}{(I-1)(J-1)} \qquad B' = \frac{IJy_{22} - IT_2'y - JB_2'y + G_y'}{(I-1)(J-1)}$$

sendo que :

y_{11} é o valor da variável associado à observação x_1 perdida;

y_{22} é o valor da variável associado à observação x_2 perdida;

x_1 e x_2 são as estimativas das observações da covariável;

Os demais termos têm o mesmo significado anterior.

4.5.3.2. Exemplo ilustrativo.

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável, através do método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 11.

TABELA 11 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da covariável, pelo método iterativo, partindo de diferentes pares de valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x_1, x_2)				
		10;10	5;5	$\bar{T}_1x;\bar{T}_2x$	$\bar{B}_1x;\bar{B}_2x$	$\bar{G}x;\bar{G}x$
1	Exx	33,2500	37,7500	26,7612	26,8125	26,3830
	Exy	347,8750	232,3750	285,8750	318,1250	302,8908
	x_{11}	7,7041	7,6946	7,7043	7,7056	7,7053
	x_{21}	10,9620	13,1022	10,8989	10,6004	10,6907
2	Exx	32,8346	45,2034	32,5676	31,3781	31,7247
	Exy	367,8157	415,7510	366,4045	359,7179	361,7397
	x_{12}	7,7050	7,7023	7,7050	7,7052	7,7053
	x_{22}	10,7600	11,3827	10,7477	10,6947	10,7098
3	Exx	31,9984	34,7600	31,9493	31,7404	31,7994
	Exy	363,2919	377,2396	363,0159	361,8300	362,1672
	x_{13}	7,7052	7,7046	7,7051	7,7052	7,7052
	x_{23}	10,7219	10,8519	10,7197	10,7104	10 7130
4	Exx	31,8471	32,3721	31,8385	31,8019	31,8123
	Exy	362,4388	365,3518	362,3899	362,1816	362,2409
	x_{14}	7,7052	7,7051	7,7052	7,7052	7,7052
	x_{24}	10,7152	10,7387	10,7148	10,7132	10,7136

$\bar{T}_1x = \frac{58}{7}$ e $\bar{T}_2x = \frac{51}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações;

$\bar{B}_1x = \frac{30}{4}$ e $\bar{B}_2x = \frac{35}{4}$ são as médias dos blocos que perderam as observações;

$\bar{G}x = \frac{306}{38}$ é a média geral do experimento.

Observando-se a Tabela 11, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, arbitrando-se as médias dos tratamentos, dos blocos ou de todo o experimento como valores iniciais .

4.5.3.3. Estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre duas médias de tratamentos ajustadas para regressão.

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \left[\frac{2}{J} + \frac{(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{i'.})^2}{Exx} \right] QMR'$$

4.6. Método iterativo para estimativa , no caso da perda de mais de uma observação da variável ou da covariável.

Os valores encontrados nos exemplos ilustrativos de perda de observações da variável ou da covariável, apresentados em 4.4. e em 4.5., podem também ser obtidos através do método iterativo. Esse método, proposto por YATES (1933) e mais detalhadamente estudado por CAMPOS (1964), consiste em utilizar sucessivamente a fórmula que estima uma observação para estimar os valores de mais de uma.

4.6.1. Método iterativo para estimativa, no caso da perda de duas observações da variável.

No caso da perda de uma observação da variável, a fórmula de estimativa obtida em 4.1.1. é dada por :

$$y = \frac{ITy + JBy - Gy}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJx_{11} - IT_1'x - JB_1'x + G_x'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exy}{Exx} \qquad (1)$$

No exemplo ilustrativo apresentado em 4.4.1.2., os valores y_1 e y_2 podem também ser obtidos arbitrando-se um valor para uma das observações e estimando a outra pela fórmula (1). Com a estimativa obtida, torna-se a usar a fórmula(1), obtendo uma estimativa para o valor arbitrado. Completa-se assim, o primeiro ciclo de iteração.

Arbitrando-se por exemplo um valor y_{20} , obtém-se uma primeira estimativa para y_1 dada por :

$$y_{11} = \frac{I(Ty+y_{20}) + JB_1y - (Gy + y_{20})}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJx_{11} - IT_1'x - JB_1'x + G_x'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exy}{Exx}$$

Com o valor y_{11}, calcula-se y_{21} da seguinte maneira :

$$y_{21} = \frac{I(Ty+y_{11}) + JB_2y - (Gy+y_{11})}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJx_{12} - IT_1'x - JB_2'x + G_x'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exy}{Exx}$$

Pelo mesmo raciocínio, obtém-se em novos ciclos de iteração, os valores y_{12}, y_{22},... até obter a convergência.

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da variável, pelo método iterativo, utilizando-se a fórmula que estima uma observação, partindo de diferentes valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 12.

TABELA 12 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da variável, pelo método iterativo, utilizando-se a fórmula que estima uma observação, partindo de diferentes valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (y_{10}, y_{20})	
		80;100	$\bar{T}y$;$\bar{T}y$
1	Exy	312,6750	280,1750
	y_{11}	94,6452	85,9087
	Exy	325,8557	312,9428
	y_{21}	47,2166	45,9013
2	Exy	320,5773	312,5829
	y_{12}	87,4748	86,9125
	Exy	314,1240	313,4864
	y_{22}	46,1312	46,0475
3	Exy	314,0155	313,5010
	y_{13}	87,0124	86,9764
	Exy	313,5993	313,5585
	y_{23}	46,0624	46,0570
4	Exy	313,5924	313,5595
	y_{14}	86,9828	86,9805
	Exy	313,5658	313,5631
	y_{24}	40,0580	46,0577
5	Exy	313,5653	313,5632
	y_{15}	86,9809	86,9808
	Exy	313,5636	313,5632
	y_{25}	46,0577	46,0577

$\bar{T}y = \frac{297}{6}$ é a média do tratamento que perdeu as observações.

Observando-se a Tabela 12, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente arbitrando-se a média do tratamento como valor inicial.

4.6.2. Método iterativo para estimativa, no caso da perda de duas observações da covariável.

No caso da perda de uma observação da covariável, a fórmula de estimativa obtida em 4.2.1. é dada por :

$$x = \frac{ITx + JBx - Gx}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJy_{11} - IT_1'y - JB_1'y + G_y'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exx}{Exy} \qquad (2)$$

No exemplo ilustrativo apresentado em 4.5.2.2., os valores x_1 e x_2 podem também ser obtidos arbitrando-se um valor para uma das observações e estimando a outra pela fórmula (2). Com a estimativa obtida, torna-se a usar a fórmula(2), obtendo uma estimativa para o valor arbitrado. Completa-se assim, o primeiro ciclo de iteração.

Arbitrando-se por exemplo um valor x_{20}, obtém-se uma primeira estimativa para x_1 dada por:

$$x_{11} = \frac{IT_1x + J(Bx + x_{20}) - (Gx + x_{20})}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJy_{11} - IT_1'y - JB_1'y + G_y'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exx}{Exy}$$

Com o valor x_{11} , calcula-se x_{21} da seguinte maneira :

$$x_{21} = \frac{IT_2x + J(Bx + x_{11}) - (Gx + x_{11})}{(I-1)(J-1)} + \frac{IJy_{21} - IT_2'y - JB_1'y + G_y'}{(I-1)(J-1)} \quad \frac{Exx}{Exy}$$

Pelo mesmo raciocínio, obtém-se em novos ciclos de iteração, os valores x_{12}, x_{22},... até obter a convergência.

Com os dados apresentados no Apêndice, procedeu-se aos cálculos das estimativas das observações perdidas da covariável, pelo método iterativo, utilizando-se a fórmula que estima uma observação, partindo de diferentes valores iniciais, cujos resultados são apresentados na Tabela 13.

TABELA 13 - Cálculo das estimativas das observações perdidas da covariável, pelo método iterativo, utilizando-se a fórmula que estima uma observação, partindo de diferentes valores iniciais.

Ciclos		Valores Arbitrários Iniciais (x_{10},x_{20})	
		10;10	$\overline{T}_1x$;$\overline{T}_2x$
1	Exx	34,6000	26,6714
	Exy	258,6750	295,5321
	x_{11}	8,5980	7,9117
	Exx	32,9616	26,5262
	Exy	257,6936	295,2703
	x_{21}	4,3380	4,9714
2	Exx	31,9579	28,8339
	Exy	341,4916	331,6370
	x_{12}	7,1424	7,2941
	Exx	30,2839	28,4917
	Exy	340,4727	331,2047
	x_{22}	4,7979	4,8976
3	Exx	28,9251	28,6758
	Exy	333,6663	332,2968
	x_{13}	7,2504	7,2750
	Exx	28,9300	28,6732
	Exy	333,7420	332,2834
	x_{23}	4,8727	4,8872
4	Exx	28,7340	28,6998
	Exy	332,6340	332,4376
	x_{14}	7,2689	7,2724
	Exx	28,7360	28,6994
	Exy	332,6469	332,4358
	x_{24}	4,8836	4,8857
5	Exx	28,7080	28,7032
	Exy	332,4855	332,4573
	x_{15}	7,2715	7,2720
	Exx	28,7084	28,7031
	Exy	332,4874	332,4571
	x_{25}	4,8852	4,8855

$\overline{T}_1x = \frac{58}{7}$ e $\overline{T}_2x = \frac{52}{7}$ são as médias dos tratamentos que perderam as observações.

Observando-se a Tabela 13, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente arbitrando-se a média dos tratamentos como valores iniciais.

Os resultados obtidos nas tabelas 12 e 13 mostram que o método iterativo pode ser generalizado para qualquer caso em que tenha ocorrido perda de mais de uma observação da variável ou da covariável.

5. CONCLUSÕES

Com base nos resultados, podem ser tiradas para a análise de covariância com uma variável auxiliar nos experimentos em blocos casualizados com observações perdidas, as seguintes conclusões :

5.1. Todas as fórmulas obtidas, com exceção para o caso da perda do par, são dadas em função de Exy e Exx e assim os valores só podem ser obtidos pelo método iterativo.

5.2. No caso da perda de uma observação da variável e uma da covariável formando um par, a fórmula que estima y é função de x e vice - versa . Nesse caso, a convergência pelo método iterativo não se dá para o mesmo par de valores, quando se toma diferentes pares de valores iniciais.

Tomando-se o par arbitrário, respectivamente , pelos valores da estimativa da covariável e da variável obtidos pela fórmula usual para os experimentos em blocos casualizados, anula-se o segundo termo das expressões que estimam x e y. Assim, para a estimativa do par usa-se a fórmula usual para uma parcela nos experimentos em blocos casualizados.

5.3. Com relação à aplicação do método iterativo para a obtenção dos valores, verifica-se que a convergência se dá mais rapidamente, quando os valores arbitrários iniciais são tomados próximos das médias.

5.4. No caso da perda de duas observações da variável ou da covariável, a obtenção dos valores através do método iterativo sugerido por YATES (1933), leva aos mesmos resultados obtidos com o uso de fórmulas específicas de cada caso. Portanto esse método pode ser generalizado estandendo-se para qualquer caso em que tenha ocorrido perda de mais de duas observações da variável ou da covariável. Deve-se observar no entanto, que a convergência é um pouco mais lenta e o volume de cálculo maior, recomendando-se recursos de computação eletrônica.

5.5. No caso da perda de observações da covariável, as estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão, são obtidas pela fórmula usual.

5.6. No caso da perda de observações da variável, as estimativas de variâncias das estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustados para regressão, são obtidas por fórmulas específicas a cada situação onde as perdas ocorreram.

6. LITERATURA CITADA

ALLAN, F.E. e J. WISHART, 1930. A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work. Jour. Agr. Sci., Cambridge, 20:399-406.

ANDERSON, R.L., 1946. Missing-plot techniques. Biometrics, Raleigh, 2:41-46.

BARTLETT, M.S., 1936. A note on the analysis of covariance. Jour. Agr. Sci., Cambridge, 26:488-491.

CAMPOS, H., 1964. Estudo sobre a análise de experimentos com parcelas perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP, 84p. (Tese de Doutoramento).

COCHRAN, W.G., 1957. Analysis of covariance: its nature and uses. Biometrics, Raleigh, 13:261-281.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1980. Diseños Experimentales. Versión en español del Centro de Estadística y Cálculo. Colegio de Posgraduados, ENA, Chapingo. 1ª. edição, 6ª. reimpressão, Editorial Trillas, México, 661p.

COONS, I., 1957. The analysis of covariance as a missing plot technique. Biometrics, Raleigh, 13:387-405.

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. Macmillan, Nova York, 544p.

FINNEY, D.J., 1946. Standard errors of yields adjusted for regression on an independent measurement. Biometrics, Raleigh, 2:53-65.

HADDAD, M.L., 1978. Estudo sobre parcela perdida em delineamentos em parcelas subdivididas. Piracicaba, ESALQ/USP , 53p. (Dissertação de Mestrado).

PANSE, V.G. e P. V. SUKHATME, 1963. Métodos Estadísticos para Investigadores Agrícolas. Traducción al español de Ana María Flores y Maria Guadalupe Lomeli. 2ª.edição, Fondo de Cultura Económica, México, 347p.

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental . 8ª. edição. Livraria Nobel, São Paulo, 430p.

RIBEIRO, V. Q., 1980. Análise de ensaios em parcelas subdivididas com observações perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP , 85p. (Dissertação de Mestrado).

SANCHES, S.F., 1980. Análise de experimentos em parcelas subdivididas, em blocos casualizados, com perda de uma ou duas subparcelas ou parcelas. Piracicaba, ESALQ/USP, 119p. (Tese de Doutorado).

SMITH, H.F., 1957. Interpretation of adjusted treatment means and regressions in analysis of covariance. Biometrics, Raleigh, 13:282-308.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1979. Métodos Estadísticos. Traducción al español de J.A. Reinosa Fuller, 1ª. edição, 6ª. reimpressão, Compañia Editorial Continental, S.A., México, 703p.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill Book Company, Inc., Nova York, 481p.

WILKINSON, G.N., 1957. The analysis of covariance with incomplete data. Biometrics, Raleigh, 13:363-372.

YATES, F., 1933. The analysis of replicated experiments when the fields results are incomplete. Emp. Jour. Exp. Agric., Oxford, 1:129-142.

7. APÊNDICE- Ensaio de controle de pragas do feijoeiro, onde:

x é o número de plantas/parcela

y é a produção em g/parcela

Blocos		Tratamentos					Totais Blocos
		Testemunha	Disyston	Ekatin	Keltane	Diazinon	
I	x	9	7	9	6	8	39
	y	74	58	118	41	95	386
II	x	9	8	9	9	8	43
	y	51	67	48	38	41	245
III	x	8	5	9	8	9	39
	y	95	40	49	77	39	300
IV	x	9	8	9	9	9	44
	y	62	58	64	92	114	390
V	x	9	6	8	7	6	36
	y	60	29	67	57	35	248
VI	x	9	8	8	7	8	40
	y	47	64	51	77	49	288
VII	x	6	9	8	8	9	40
	y	14	55	15	59	39	182
VIII	x	8	8	9	8	9	42
	y	19	47	29	32	100	227
Totais	x	67	59	69	62	66	323
Totais	y	422	418	441	473	512	2266

FONTE : PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8ª. edição. Livraria Nobel, São Paulo, 430p.