ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM TRATAMENTOS SECUNDÁRIOS EM APENAS ALGUNS DOS TRATAMENTOS PRINCIPAIS

ADAIR JOSÉ REGAZZI

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Tese apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Abril, 1984

A Deus,

Ao meu pai,

À minha mãe (in memoriam),

Aos meus irmãos,

AGRADEÇO

À minha esposa Maria Inês,

Aos meus filhos Analice e Gustavo,

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Humberto de Campos, pela sugestão do tema, pela orientação segura e valiosa durante todo o curso e, em especial, na realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade oferecida para realização do curso.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP, pelos ensinamentos e constante disponibilidade.

À CAPES, através do Plano Institucional de Capacitação de Docentes, da Universidade Federal de Viçosa (PICD/UFV), pelo auxílio financeiro prestado.

Aos colegas do curso, pela amizade e troca de idéias.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelas atenções dispensadas.

A todos que contribuíram para a realização do curso e deste trabalho.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMO	vii
SUMMARY	xi
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
3. MATERIAL	15
4. MÉTODOS	17
4.1. Modelo matemático	17
4.2. Equações normais, estimadores dos parâmetros, somas de quadrados e esperanças dos quadrados médios	19
4.2.1. Equações normais	19
4.2.2. Estimadores dos parâmetros	35
4.2.3. Somas de quadrados	41
4.2.4. Esperanças dos quadrados médios	45
4.3. Testes de hipóteses e quadros de análise	47
4.4. Comparações múltiplas	55
4.4.1. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais	56
4.4.1.1. As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que possuem tratamentos secundários	59

Pág.

4.4.1.2. As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários 60

4.4.1.3. Das duas médias envolvidas no contraste, uma é relativa a um tratamento principal que possui tratamentos secundários e outra a um que não possui esses tratamentos 60

4.4.2. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários 62

4.4.3. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários dentro do i-ésimo tratamento principal 63

4.4.4. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do k-ésimo tratamento secundário 63

4.5. Decomposições total e parcial do resíduo (a) 68

4.5.1. Decomposição total do resíduo (a) 68

4.5.2. Decomposição parcial do resíduo (a) 80

5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO 82

5.1. Análise de variância 82

5.2. Comparações múltiplas 86

Pág.

5.2.1. Entre efeitos estimados de tratamentos principais.. 86

5.2.2. Entre efeitos estimados de tratamentos secundários. 88

5.2.3. Entre efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal 88

5.2.4. Entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do k-ésimo tratamento secundário 89

5.3. Análise de variância com decomposições total e parcial do resíduo (a) 90

5.3.1. Decomposição total do resíduo (a) 90

5.3.2. Decomposição parcial do resíduo (a) 96

6. CONCLUSÕES 100

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 103

ANÁLISE DE EXPERIMENTOS EM PARCELAS SUBDIVIDIDAS COM TRATAMENTOS SECUNDÁRIOS EM APENAS ALGUNS DOS TRATAMENTOS PRINCIPAIS

Autor: Adair José Regazzi

Orientador: Dr. Humberto de Campos

R E S U M O

Neste trabalho, foi feito um estudo dos experimentos com parcelas subdivididas em blocos casualizados, com tratamentos secundários em apenas alguns dos tratamentos principais.

Para tanto, adotou-se o modelo matemático:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk}$$

onde, $i = 1, 2, \ldots, I, I+1, \ldots, L$; $j = 1, 2, \ldots, J$;

$k = 1, 2, \ldots, s_i$, com $s_i = K$, para $i = 1, 2, \ldots, I$, e $s_i = 1$, para $i = I+1, I+2, \ldots, L$; sendo $n = J(IK+L-I)$ o número total de observações.

Ademais, é necessário considerar que na análise em questão, quando $s_i = 1$, os $(L-I)J$ valores observados do tipo y_{ij1} ,

para $i = I+1, I+2, \ldots, L$ e $j = 1, 2, \ldots, J$, são descritos pelo modelo adotado eliminando os efeitos t'_k e $(tt')_{ik}$, uma vez que os (L-I) tratamentos principais não possuem tratamentos secundários.

Definindo agora os termos do modelo, tem-se:

m = média geral;

t_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento principal T ;

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

δ_{ij} = efeito residual das parcelas, caracterizado como componente do erro (a);

t'_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento secundário T' ;

$(tt')_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T' ;

e_{ijk} = efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro (b).

Sobre as distribuições das variáveis aleatórias δ_{ij} e e_{ijk} , foram feitas as seguintes pressuposições:

a) δ_{ij} são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(0; \sigma^2_\delta)$;

b) e_{ijk} são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(0; \sigma^2)$;

c) δ_{ij} e e_{ijk} são não correlacionadas.

Assumiu-se ainda, que o modelo matemático adotado, inclui as seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^{L} s_i t_i = \sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_{k=1}^{K} t'_k = \sum_{i=1}^{I} (tt')_{ik} = \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} = 0 .$$

No desenvolvimento da metodologia, supôs-se um ensaio com parcelas subdivididas no qual os $\underline{L}$ tratamentos principais foram dispostos em blocos casualizados. Considerou-se ainda, sem perda de generalidade, que os $\underline{K}$ tratamentos secundários estivessem presentes apenas nos $\underline{I}$ primeiros tratamentos principais.

Sob essas condições, foram determinados:

a) o sistema de equações normais;

b) estimadores dos parâmetros;

c) somas de quadrados;

d) esperanças dos quadrados médios;

e) critérios para os testes das hipóteses de nulidade usuais;

f) critérios para comparações múltiplas, baseados nas variâncias das funções lineares estimáveis.

Os testes das três hipóteses básicas, isto é, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos principais (T), efeitos de tratamentos secundários (T') e efeitos de interação (TxT'), portaram-se como de modo usual, no tocante aos resíduos apropriados.

Neste trabalho, estruturou-se também decomposições total e parcial do resíduo (a) em componentes aplicáveis e apropriados às comparações (contrastes) de interesse, empregando o método das transformações lineares para mostrar essa decomposição, sendo este um dos procedimentos para contornar problemas de heterocedasticidade do erro.

Mostrou-se que cada componente do resíduo (a), conseguido através de transformações lineares, corresponde ao resíduo apropriado para testar um contraste do conjunto ortogonal, segundo o qual foi decomposta a soma de quadrados de tratamentos principais.

Neste caso, o resíduo (a) se identifica com a "interação" tratamentos principais x blocos (TxB). Assim sendo, cada componente desta "interação", correspondendo ao resíduo específico para testar um contraste Y_h é dado por:

$$QMR_a(Y_h) = \frac{1}{J-1}\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{J}(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum\limits_{i=1}^{L} s_i\, a_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{J\sum\limits_{i=1}^{L} s_i\, a_{hi}^2}\right]$$

onde $\hat{Y}_{hj}$ é a estimativa do contraste Y_h no bloco $\underline{j}$, e os a_{hi} são os coeficientes do contraste entre totais de tratamentos.

SPLIT-PLOT EXPERIMENTS WITH SUB-TREATMENTS IN ONLY SOME OF THE MAIN TREATMENTS

Author: Adair José Regazzi

Adviser: Dr. Humberto de Campos

S U M M A R Y

Split-plot Designs are treated in situations were sub--treatments do not appear with all main treatments. For this purpose the usual model was considered:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \ldots, I, I+1, \ldots, L \;;\; j = 1, 2, \ldots, J$$

$$k = 1, 2, \ldots, s_i \;, \quad \begin{cases} s_i = K & \text{for } i = 1, 2, \ldots, I \\ s_i = 1 & \text{for } i = I+1, \ldots, L \;; \end{cases}$$

being $n = J(IK+L-I)$ the total number of observations.

Furthermore it is necessary to consider that in the proposed analysis, when $s_i = 1$, the $(L-I)J$ observed values of y_{ij1} type, $i = I+1, I+2, \ldots, L$ and $j = 1, 2, \ldots, J$, are described by the

adopted model eliminating t'_k and $(tt')_{ik}$ effects, as long as the (L-I) main treatments do not have secondary treatments.

Now, defining the model terms we have:

y_{ijk} : observed value of the $(i,k)\underline{th}$ sub-plot in the $j\underline{th}$ block;

m : general mean;

t_i : $i\underline{th}$ level of main treatment effect;

b_j : $j\underline{th}$ level of block effect;

δ_{ij} : residual effect due to plots, characterized as (a)-component ot the error;

t'_k : $k\underline{th}$ level of sub-treatment effect;

$(tt')_{ik}$: $(i, k)\underline{th}$ level of main treatment x subtreatment interaction effect;

e_{ijk} : residual effect due to sub-plots, characterized as (b)-component of error.

With respect to the distributions of the random variables δ_{ij} and e_{ijk}, the following restrictions were made:

(a) δ_{ij} are r.v. independently and identically distributed as $N(0; \sigma^2_\delta)$;

(b) e_{ijk} are r.v. independently and identically distributed as $N(0; \sigma^2)$;

(c) δ_{ij} and e_{ijk} are not correlated.

We have assumed also that the mathematical model adopted will have to include the following conditions:

$$\sum_{i=1}^{L} s_i t_i = \sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_{k=1}^{K} t'_k = \sum_{i=1}^{I} (tt')_{ik} = \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} = 0 \cdot$$

In the methodology development we have assumed a Split--plot design where L main treatments has been arranged in randomized blocks. We have also considered, without loss of generallity, that the K secondary treatments are present only in the first I main treatments.

Under these conditions were determined:

(a) Normal Equations;

(b) Parameter estimators;

(c) Sums of squares;

(d) Expected mean squares;

(e) Criteria of usual hipotheses tests;

(f) Multiple Comparisons Criteria, based on the estimable linear functions variances.

The tests of the three basic hypotheses, that is, the ones for main and secondary null effect hypotheses and for TxT' interaction are calculated by the usual way, with respect to the appropriated error mean square.

The total and partial decompositions of the (a) residue in components appropriated to compare treatments with possible different variances.

We have showed that each (a) residue component obtained by linear transformation, corresponds to the appropriated residue to test a contrast from the orthogonal set under which the sum of squares of main treatment was decomposed.

In this last case, the (a) residue is identified with the main treatment x blocks (TxB) "interaction". In this case each component of this "interaction" will correspond to the specific residue to test a contrast Y_h and will be given by:

$$QMR_a(Y_h) = \frac{1}{J-1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{J}(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i\, a_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{J\sum_{i=1}^{L} s_i\, a_{hi}^2}\right]$$

where $\hat{Y}_{hj}$ is the Y_h contrast estimate in block $\underline{j}$, and the a_{hi} are the contrast coefficients among main treatments totals.

1. INTRODUÇÃO

Os experimentos em parcelas subdivididas são constituídos por dois tipos diferentes de tratamentos, onde, nas parcelas têm-se os tratamentos principais e nas subparcelas os tratamentos secundários. Tais experimentos têm grande utilidade na experimentação agropecuária, principalmente devido à maior facilidade de instalação no campo, comparativamente ao esquema fatorial, apesar de uma redução do número de graus de liberdade, decorrente da existência de dois resíduos.

Segundo LEONARD e CLARK (1939), os experimentos em parcelas subdivididas foram propostos por Yates, em 1933, e têm sido de grande valia para os estudiosos das mais diversas áreas de pesquisa. No tocante à pesquisa agropecuária, sua aplicação vem sendo ressaltada por autores consagrados, como STEEL e TORRIE (1960), SNEDECOR e COCHRAN (1967), COCHRAN e COX (1976), PIMENTEL GOMES (1978), dentre outros.

A farta bibliografia existente em relação a tais ensaios tem mostrado uma certa tendência dos experimentadores para a disposição dos tratamentos principais em blocos casualizados, e esse fato pode, de certo modo, ser justificado pela grande simplicidade desse delineamento.

Existem situações em que o experimentador, por alguma razão, é levado a realizar um experimento em parcelas subdivididas, onde apenas alguns dos tratamentos principais (T) apresentam tratamentos secundários (T'). Na revisão bibliográfica, não se encontrou nenhum trabalho que abordasse especificamente tal caso. Assim, propôs-se apresentar um estudo sobre este tema, tendo como objetivos deduzir a análise de variância, justificando o teste "F", assim como, os métodos de comparações múltiplas.

Procurou-se ainda, como um dos objetivos deste trabalho, deduzir resíduos específicos para cada contraste de tratamentos principais, obtendo-se um método geral de determinação desses resíduos, sendo este um dos procedimentos para contornar problemas de heterocedasticidade do erro.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo LEONARD e CLARK (1939), os ensaios em parcelas subdivididas tiveram seu início com Yates, por volta de 1933, seguido de Le Clerg, em 1937, e Goulden em 1939.

O esquema do experimento em parcelas subdivididas é apresentado, dentre outros, por KEMPTHORNE (1952), ANDERSON e BANCROFT (1952), STEEL e TORRIE (1960), COCHRAN e COX (1976), como sendo uma variação do experimento fatorial em T e T' tratamentos, onde os tratamentos das parcelas são dispostos em qualquer tipo de delineamento, sendo os mais usados os em blocos casualizados e em quadrado latino, e os tratamentos T' das subparcelas, dispostos ao acaso dentro de cada parcela.

COCHRAN e COX (1976) apresentam várias considerações sobre o experimento em parcelas subdivididas, e mostram ser vantajoso o seu uso, se os efeitos de T' e da interação TxT' são de maior interesse que os efeitos de T. Afirmam ainda que o aumento da precisão de T' e da interação TxT' se obtém mediante a redução da precisão de T.

No tocante à eficiência dos testes para tratamentos principais e secundários, TAYLOR (1950), KEMPTHORNE (1952), FEDERER (1955), COCHRAN e COX (1976), dentre outros, são unânimes em afirmar a maior precisão existente no teste de tratamentos secundários.

KEMPTHORNE (1952) afirma que, para $\underline{t}$ tratamentos principais distribuídos em $\underline{r}$ blocos e $\underline{s}$ tratamentos secundários, com a decomposição do Quadro 1

QUADRO 1 - Esquema da análise de variância.

Causa de Variação	G.L.	Q.M.
Blocos	r - 1	
Tratamentos principais (T)	t - 1	
Erro (a)	(r - 1)(t - 1)	W
Tratamentos secundários (S)	s - 1	
T x S	(t - 1)(s - 1)	
Erro (b)	t(r - 1)(s - 1)	E
T o t a l	rst - 1	

a eficiência estimada para os tratamentos principais comparativamente aos ensaios em blocos casualizados é dada por

$$E_1 = \frac{E'}{W}$$

enquanto que, para os tratamentos secundários e interação é dada por

$$E_2 = \frac{E'}{E}$$

onde

$$E' = \frac{(t - 1)W + t(s - 1)E}{ts - 1}$$

Por sua vez, FEDERER (1955) também propõe fórmulas para calcular a eficiência dos ensaios em parcelas subdivididas com relação aos ensaios em blocos casualizados. Assim, segundo esse autor, a eficiência para comparação de tratamentos principais é dada por

$$E_3 = \frac{(p - 1)E_a + p(q - 1)E_b}{(pq - 1)E_a}$$

enquanto que, para comparação de tratamentos secundários e interação, a eficiência é

$$E_4 = \frac{(p - 1)E_a + p(q - 1)E_b}{(pq - 1)E_b}$$

para $\underline{p}$ níveis do tratamento principal e $\underline{q}$ níveis do tratamento secundário, erro a (E_a) e erro b (E_b) .

Naturalmente, as fórmulas apresentadas por KEMPTHORNE (1952) e FEDERER (1955) são idênticas.

LEAL (1979) enfoca o uso dos experimentos em parcelas subdivididas, na análise dos ensaios com medidas repetidas sobre unidades experimentais, como uma alternativa para o uso da análise multivariada, quando se constata a uniformidade da matriz de variâncias e covariâncias. Sob esse prisma, concorda com STEEL e TORRIE (1960), CALZADA BENZA (1970) e LITTLE e HILLS (1972), os quais argumentam que os experimentos onde observações sucessivas são feitas sob a mesma unidade experimental, durante um certo intervalo de tempo, em muitos aspectos se assemelham a experimentos em parcelas subdivididas, nos quais cada unidade experimental é dividida em subunidades distintas.

CONDÉ (1974) fez um estudo dos componentes de variância nos experimentos em parcelas subdivididas, cujo esquema da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios, estão apresentadas no Quadro 2.

QUADRO 2 - Esquema da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios, de um experimento em parcelas subdivididas em blocos casualizados.

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	ESPERANÇA DOS QUADRADOS MÉDIOS*
Blocos	$J - 1$	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta + f_1(\theta)$
Tratamentos (T)	$I - 1$	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	$(I - 1)(J - 1)$	$\sigma^2 + K\sigma^2_\delta$
Tratamentos (T')	$K - 1$	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
T x T'	$(I - 1)(K - 1)$	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	$I(J - 1)(K - 1)$	σ^2
TOTAL	$IJK - 1$	

(*) $f_1(\theta) = IK \sum_j b_j^2 / (J - 1)$

$f_2(\theta) = JK \sum_i t_i^2 / (I - 1)$

$f_3(\theta) = IJ \sum_k t'^2_k / (K - 1)$

$f_4(\theta) = J \sum_{i,k} (tt')^2_{ik} / (I - 1)(K - 1)$

As hipóteses preliminares de interesse, em ensaios com parcelas subdivididas, são:

$H_o(1)$: $t_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, I$ tratamentos principais;

$H_o(2)$: $t'_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, K$ tratamentos secundários;

$H_o(3)$: $tt'_{ik} = 0$.

Os resíduos apropriados para testar essas hipóteses são evidentes quando se observam as esperanças dos quadrados médios apresentadas no Quadro 2.

Se as hipóteses de nulidade $H_o(1)$ e ou $H_o(2)$ forem rejeitadas, conclui-se pela significância de ao menos um, dentre os contrastes entre os tratamentos. Nesse caso, torna-se recomendável a utilização dos métodos de comparações múltiplas, como os de Tukey, Duncan, Scheffé, e outros.

Segundo PIMENTEL GOMES (1978) e LEAL (1979), dentre outros, quando a interação T x T' é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois este fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente, em relação aos tratamentos principais. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, isoladamente.

Sob esse aspecto, se $H_o(3)$ resulta significativa, então $H_o(2)$ e $H_o(3)$ conjuntamente devem ser decompostas em I subhipóteses do tipo:

$H'_o(1) : t'/t_1 = 0$

$H'_o(2) : t'/t_2 = 0$

$\ldots \quad \ldots$

$H'_o(I) : t'/t_I = 0$

com o seguinte critério para os respectivos testes, conforme apresentado no Quadro 3.

QUADRO 3 - Critério para os testes das I subhipóteses.

SUBHIPÓTESES	G.L.	F (OBSERVADO)
$H'_o(1)$	$(K - 1); I(J - 1)(K - 1)$	$(QMT'/T_1)/QMR(b)$
$H'_o(2)$	$(K - 1); I(J - 1)(K - 1)$	$(QMT'/T_2)/QMR(b)$
...	...	...
$H'_o(I)$	$(K - 1); I(J - 1)(K - 1)$	$(QMT'/T_I)/QMR(b)$

Assim, a adoção desse procedimento alteraria apenas a parte da análise relativa às subparcelas, cuja modificação está apresentada no Quadro 4.

QUADRO 4 - Desdobramento da interação T x T' em I subhipóteses.

CAUSA DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE
T'/T_1	K - 1
T'/T_2	K - 1
...	...
T'/T_I	K - 1
Resíduo (b)	I(J - 1)(K - 1)
TOTAL	IJK - 1

No tocante à variância das funções lineares estimáveis, STEEL e TORRIE (1960) apresentam resultados que podem ser resumidos conforme o Quadro 5.

QUADRO 5 - Comparação entre médias dos efeitos estimados e estimativas das variâncias.

COMPARAÇÃO ENTRE MÉDIAS DOS EFEITOS ESTIMADOS	ESTIMATIVAS DAS VARIÂNCIAS
$\hat{m}_A - \hat{m}_{A'}$	(2/sr) QMR(a)
$\hat{m}_B - \hat{m}_{B'}$	(2/pr) QMR(b)
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{AB'}$	(2/r) QMR(b)
$\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$	(2/sr) [QMR(a) + (s-1) QMR(b)]

onde, p = nº de tratamentos principais;

s = nº de tratamentos secundários;

r = nº de repetições;

A e B referem-se aos tratamentos principais e secundários, respectivamente.

No contraste $\hat{m}_{AB} - \hat{m}_{A'B}$, a variável observada tem distribuição aproximada de "t", com n' graus de liberdade. Nesse caso, n' é obtido pela aproximação proposta por SATTERTHWAITE (1946), que é dado por:

$$n' = \frac{[QMR\ (a) + (s - 1)\ QMR\ (b)]^2}{\dfrac{[QMR\ (a)]^2}{n_a} + \dfrac{(s - 1)^2\ [QMR\ (b)]^2}{n_b}}$$

onde n_a e n_b, são os números de graus de liberdade para os resíduos a e b, respectivamente.

A presença de erros grosseiros, a assimetria extrema, as anomalias de certos tratamentos, as mudanças na variância residual e a falta de aditividade dos efeitos reais são, segundo COCHRAN (1947), os principais fatores que podem afetar a validade da análise de variância . Dependendo de cada caso, os métodos apontados por este autor para contornar essas dificuldades seriam: omissão de certos tratamentos, desdobramento da variância residual em componentes e transformação dos dados antes da análise.

Ao examinarem as razões para a subdivisão do resíduo, COCHRAN e COX (1976) afirmaram que, muitas vezes, há motivos para acreditar que a soma de quadrados do resíduo não é homogênea, isto é, os erros não são homocedásticos como é postulado no modelo matemático. Neste caso, a decomposição do resíduo é útil para melhor compreensão da natureza do quadrado médio residual e para obtenção de testes válidos. Os autores mostraram como pode ser feito o cálculo de um resíduo específico para cada contraste entre tratamentos, num experimento em blocos casualizados, exemplificando numericamente com um contraste entre parcelas tratadas e não tratadas.

Uma maneira prática para a decomposição do resíduo foi apresentada por STEEL e TORRIE (1960). Num experimento em blocos casualizados, foi estabelecido um conjunto de contrastes ortogonais. A seguir, foi calculado o valor de cada contraste dentro de cada um dos blocos. Afirmam estes autores que, se o modelo de blocos casualizados é válido, qualquer comparação dentro de um bloco não é influenciada pelo nível geral do bloco. Como conseqüência, concluem que a variância de qualquer com paração, calculada entre blocos, seria uma variância apropriada para testar contrastes entre totais de tratamentos. O processo é aplicado numericamente, mas os autores não apresentam a dedução do método.

HOFFMANN (1975) apresentou um método, baseado em transformações lineares ortogonais, para mostrar a decomposição da soma de quadrados de tratamentos. O autor mostra a invariância da soma de quadrados numa transformação linear ortogonal e dá uma interpretação geométrica à transformação.

Uma aplicação do método da decomposição do resíduo foi apresentada por PIMENTEL GOMES (1978), analisando um grupo de experimentos de adubação de algodão. O autor, ao fazer a análise conjunta dos diversos locais, considera individualmente os graus de liberdade relativos a contrastes de tratamentos e mostra como cada contraste pode ser testado diretamente pelo correspondente componente do resíduo, no caso representado pela interação locais x tratamentos. Contudo, alerta o referido autor que este método tem a desvantagem de reduzir excessivamente o número de graus de liberdade para os testes, recomendando seu uso somente quando for grande o número de locais.

FERREIRA (1978) estruturou a decomposição do resíduo em componentes aplicáveis e apropriados às comparações (contrastes) de interesse, onde através do método das transformações lineares, mostrou a decomposição do resíduo. Na primeira parte, considerou um experimento em blocos casualizados com $\underline{I}$ tratamentos e $\underline{J}$ blocos, obtendo os quadrados médios residuais, específicos a cada contraste, dado por:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{J-1}\left[\frac{\sum_{j=1}^{J}\hat{Y}_{hj}^2}{\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2} - \frac{\hat{Y}_h^2}{J\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2}\right],$$

onde $\hat{Y}_{hj}$ representa a estimativa do contraste Y_h dentro do bloco j. Na segunda parte, considerou o caso da análise conjunta de experimentos em blocos casualizados. O resíduo considerado para testar tratamentos foi a interação tratamentos x locais. Cada componente dessa interação, correspondendo ao resíduo específico para testar um contraste Y_h, foi dado por:

$$QMR(Y_h) = \frac{1}{K-1}\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}\hat{Y}_{hk}^2}{J\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2} - \frac{\hat{Y}_h^2}{JK\sum_{i=1}^{I} c_{hi}^2}\right]$$

onde $\hat{Y}_{hk}$ é a estimativa do contraste Y_h no local k. Em ambos os casos considerados, mostrou que cada componente do resíduo, conseguido através de transformações lineares, corresponde ao resíduo apropriado, para testar um contraste do conjunto ortogonal, segundo o qual foi decomposta a soma de quadrados de tratamentos.

3. MATERIAL

Os dados utilizados neste trabalho estão apresentados no Quadro 6, e referem-se à porcentagem de plantas sobreviventes, transformados em arc sen $\sqrt{\%/100}$, na cultura da cana-de-açúcar, fornecidos pelo IAA - PLANALSUCAR - Piracicaba, SP (1981). Efetuou-se a transformação arc sen $\sqrt{\%/100}$, admitindo que os dados originais tenham distribuição binomial. Por outro lado, convém salientar que a validade da transformação não foi verificada, por não constituir objetivo deste estudo.

O experimento foi realizado visando à comparação de 3 fungicidas a 3 concentrações e duas testemunhas. O delineamento foi o de blocos casualizados com 3 repetições, no esquema de parcelas subdivididas. Dos 5 tratamentos principais, apenas 3 possuíam tratamentos secundários.

QUADRO 6 - Dados de porcentagem de plantas sobreviventes transformados em arc sen $\sqrt{\%/100}$.

TRAT. / BLOCOS	T_1			T_2			T_3			T_4	T_5
	T'_1	T'_2	T'_3	T'_1	T'_2	T'_3	T'_1	T'_2	T'_3		
1	38,94	42,13	40,40	52,54	50,77	53,73	40,69	59,15	46,43	50,77	20,70
2	47,87	42,13	45,00	56,79	60,00	50,77	63,43	60,00	43,57	64,60	38,94
3	58,37	48,50	39,23	63,43	58,37	52,65	69,29	69,29	52,24	60,80	49,31

FONTE: IAA - PLANALSUCAR - Piracicaba, SP (1981).

Tratamentos principais (T)

1) Fungicida Exp. 1976
2) Fungicida Demosal
3) Fungicida Benlate
4) Testemunha sem inoculação do patógeno
5) Testemunha com inoculação do patógeno

Tratamentos secundários (T')

1) Concentração 1/1000
2) Concentração 1/2000
3) Concentração 1/4000

Denominou-se ainda de grupo 1 (G_1) ao grupo formado pelos tratamentos principais que possuem tratamentos secundários, e de grupo 2 (G_2) aos que não possuem esses tratamentos.

4. MÉTODOS

4.1. Modelo matemático

Para a análise proposta, foram considerados, sem perda de generalidade, os tratamentos secundários apenas nos I primeiros tratamentos principais.

Tomou-se como modelo matemático, para esses ensaios, o modelo:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + t'_k + (tt')_{ik} + \delta_{ij} + e_{ijk} \qquad (4.1.a)$$

com $i = 1, 2, \ldots, I, I+1, I+2, \ldots, L$;

$j = 1, 2, \ldots, J$;

$k = 1, 2, \ldots, s_i$;

onde, $s_i = K$, para $i = 1, 2, \ldots, I$ e $s_i = 1$, para $i = I+1, I+2, \ldots, L$; sendo $n = J(IK + L - I)$ o número total de observações.

Ademais, é necessário considerar que na análise em questão, quando $s_i = 1$, os $(L-I)J$ valores do tipo y_{ij1}, para $i = I+1, I+2, \ldots, L$ e $j = 1, 2, \ldots, J$, são descritos pelo modelo (4.1.a) eliminando os e feitos t'_k e $(tt')_{ik}$, uma vez que os (L-I) tratamentos principais não possuem tratamentos secundários.

Definindo agora os termos do modelo (4.1.a), tem-se:

y_{ijk} = valor observado da ik-ésima subparcela, no j-ésimo bloco;

m = média geral;

t_i = efeito do i-ésimo nível do tratamento principal T;

b_j = efeito do j-ésimo bloco;

t'_k = efeito do k-ésimo nível do tratamento secundário T';

$(tt')_{ik}$ = efeito da interação do i-ésimo nível do tratamento T com o k-ésimo nível do tratamento T';

δ_{ij} = efeito residual das parcelas, caracterizado como componente do erro (a);

e_{ijk} = efeito residual das subparcelas, caracterizado como componente do erro (b).

Sobre as distribuições das variáveis aleatórias δ_{ij} e e_{ijk}, foram feitas as seguintes pressuposições:

a) δ_{ij} são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(0; \sigma^2_\delta)$;

b) e_{ijk} são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição $N(0; \sigma^2)$;

c) δ_{ij} e e_{ijk} são não correlacionadas.

Assumiu-se ainda, que o modelo matemático (4.1.a) inclui as seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^{L} s_i t_i = \sum_{j=1}^{J} b_j = \sum_{k=1}^{K} t'_k = \sum_{i=1}^{I} (tt')_{ik} = \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} = 0 .$$

4.2. Equações normais, estimadores dos parâmetros, somas de quadrados e esperanças dos quadrados médios

As suposições feitas em (4.1), são fundamentais na análise de variância para dar validade aos testes de hipóteses a serem efetuados. Porém, para aplicação do método dos mínimos quadrados, visando a obtenção do sistema de equações normais, estimadores dos parâmetros, a partição da soma de quadrado total e o número de graus de liberdade associado a cada fonte de variação, de acordo com o modelo (4.1.a), supôs-se apenas o erro e_{ijk} como aleatório.

4.2.1. Equações normais

Tomando-se o modelo (4.1.a), na forma matricial

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad ,$$

e usando o método dos mínimos quadrados, obteve-se o sistema de equações normais

$$X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y} \quad ,$$

onde,

X é a matriz dos coeficientes dos parâmetros, de dimensões $(n) \times (L + J + K + IK + LJ + 1)$;

$\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ é o vetor das soluções de mínimos quadrados, para os efeitos dos parâmetros, de dimensões $(L + J + K + IK + LJ + 1) \times (1)$;

$\underset{\sim}{y}$ é o vetor dos valores observados, de dimensões $(n) \times (1)$.

Desse modo, a matriz X foi partida de modo conveniente, resultando

$$X = \left[\underset{\sim}{j}, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\right] ,$$

onde,

$\underset{\sim}{j}$ é o vetor composto de 1's referentes aos coeficientes da média geral m, de dimensões (n) x (1);

X_2 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos principais, de dimensões (n) x (L);

X_3 é a matriz dos coeficientes associados aos blocos, de dimensões (n) x (J);

X_4 é a matriz dos coeficientes associados aos tratamentos secundários, de dimensões (n) x (K);

X_5 é a matriz dos coeficientes associados às interações $(tt')_{ik}$, de dimensões (n) x (IK);

X_6 é a matriz dos coeficientes associados às "interações" $(tb)_{ij}$ denotada por δ_{ij}, de dimensões (n) x (LJ).

Assim, X'X resultou do tipo

$$
X'X = \begin{bmatrix}
\underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{j}'X_2 & \underset{\sim}{j}'X_3 & \underset{\sim}{j}'X_4 & \underset{\sim}{j}'X_5 & \underset{\sim}{j}'X_6 \\
X_2'\underset{\sim}{j} & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\
X_3'\underset{\sim}{j} & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\
X_4'\underset{\sim}{j} & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\
X_5'\underset{\sim}{j} & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 \\
X_6'\underset{\sim}{j} & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6
\end{bmatrix}
$$

$(L + J + K + IK + LJ + 1)$ $\qquad$ $(L + J + K + IK + LJ + 1)$

As submatrizes de $X'X$ têm a composição que se segue:

$\underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{j} = J(IK + L - I) = n$ = número total de observações;

$\underset{\sim}{j}'X_2 = {}_{(1)}[JK, JK, \ldots, JK, J, J, \ldots, J]_{(L)}$ = vetor associado ao número de repetições dos tratamentos principais, sendo JK para $i = 1, 2, \ldots, I$, e J para $i = I+1, I+2, \ldots, L$;

$\underset{\sim}{j}'X_3 = {}_{(1)}[(IK + L - I), (IK + L - I), \ldots, (IK + L - I)]_{(J)}$ = vetor associado ao número de subparcelas por bloco;

$\underset{\sim}{j}'X_4 = {}_{(1)}[IJ, IJ, \ldots, IJ]_{(K)}$ = vetor associado ao número de repetições dos tratamentos secundários;

$\underset{\sim}{j}'X_5 = {}_{(1)}[J, J, \ldots, J]_{(IK)}$ = vetor associado ao número de repetições das interações $(tt')_{ik}$;

$\underset{\sim}{j}'X_6 = {}_{(1)}[K, K, \ldots, K, 1, 1, \ldots, 1]_{(LJ)}$ = vetor associado ao número de repetições das "interações" $(tb)_{ij}$, denotada por δ_{ij}, onde seus elementos valem K para $i = 1, 2, \ldots, I$, e 1 para $i = I+1, I+2, \ldots, L$;

$X_2'X_2$ = diag {JK, JK, ..., JK, J, J, ..., J} = matriz diagonal das repetições dos tratamentos principais, de dimensões (L)x(L);

$X_2'X_3 = {}_{(L)}\left[n_{ij}\right]_{(J)}$, onde

$$n_{ij} = \begin{cases} K, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, I \\ 1, \text{ para } i = I+1, I+2, \ldots, L \end{cases}$$

é a matriz de incidência dos tratamentos principais nos blocos, sendo n_{ij} o número de observações que cada combinação ij fornece.

Considerando o exemplo do capítulo 3, tem-se:

$$X_2'X_3 = {}_{(5)}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(3)}$$

$X_2'X_4 = {}_{(L)}\left[n_{ik}\right]_{(K)}$, onde

$$n_{ik} = \begin{cases} J \text{ , para } i = 1, 2, \ldots, I \\ 0 \text{ , para } i = I+1, I+2, \ldots, L \end{cases}$$

é a matriz do número de repetições de cada par $(tt')_{ik}$.

No exemplo em questão, obteve-se:

$$X'_2X_4 = {}_{(5)}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3)}$$

$$X'_2X_5 = {}_{(L)}\begin{bmatrix} J & \dots & J & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J & \dots & J & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & J & \dots & J \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(IK)}$$

é a matriz de incidência dos tratamentos principais nos pares $(tt')_{ik}$.

No exemplo em questão, obteve-se:

$$X'_2X_5 = {}_{(5)}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(9)}$$

$$
\underset{(L)}{X_2'X_6} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
K & \cdots & K & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & K & \cdots & K & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & K & \cdots & K & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1
\end{array}\right]_{(LJ)}
$$

é a matriz de incidência dos tratamentos principais nos pares δ_{ij} .

No exemplo em questão, obteve-se:

$$
X_2'X_6 = \underset{(5)}{\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right]}_{(15)}
$$

$$
X_3'X_3 = \text{diag}\,\{(IK + L - I), (IK + L - I), \ldots, (IK + L - I)\}
$$

é a matriz diagonal do número de subparcelas por bloco, de dimensões (J) x (J).

$$X_3'X_4 = \underset{(J)}{\begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ I & I & \dots & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & I & \dots & I \end{bmatrix}}_{(K)} = I \, . \, E_{(J)\,(K)}$$

é a matriz controle do número de tratamentos principais que possuem tratamentos secundários, por bloco; I é o número de tratamentos principais que possuem tratamentos secundários, e $E_{(J)\,(K)}$ é uma matriz cujos elementos são todos iguais à unidade, de dimensões (J) x (K).

$$X_3'X_5 = \underset{(J)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{(IK)} = E_{(J)\,(IK)}$$

é a matriz de incidência da interação $(tt')_{ik}$, nos blocos, de dimensões (J) x (IK).

$$X_3'X_6 = {}_{(J)}\left[K \, . \, I_{(J)} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; K \, . \, I_{(J)} \;\vdots\; I_{(J)} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; I_{(J)} \right]_{(LJ)}$$

é a matriz de incidência da "interação" δ_{ij} nos blocos ; $I_{(J)}$ é uma matriz identidade de dimensão (J), onde tem-se $K \, . \, I_{(J)}$, para $i = 1, 2, \dots, I$ e $I_{(J)}$ para $i = I+1, I+2, \dots, L$.

No exemplo em questão, obteve-se:

$$X_3'X_6 = {}_{(3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{(15)}$$

$$X_4'X_4 = \text{diag}\ \{IJ, IJ, \ldots, IJ\}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos tratamentos secundários, de dimensões $(K) \times (K)$.

$$X_4'X_5 = {}_{(K)}\left[\ J \cdot I_{(K)} \;\vdots\; J \cdot I_{(K)} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; J \cdot I_{(K)}\right]_{(IK)}$$

é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares $(tt')_{ik}$.

No exemplo em questão, obteve-se:

$$X_4'X_5 = {}_{(3)}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]_{(9)}$$

$$X_4'X_6 = {}_{(K)}\left[{}_{(K)}E_{(IJ)} \;\vdots\; {}_{(K)}\Phi_{[(L-I)J]}\right]_{(LJ)}$$

é a matriz de incidência dos tratamentos secundários nos pares δ_{ij}, e Φ é uma matriz nula.

No exemplo em questão, obteve-se:

$$\underset{(3)}{X_4'X_6} = \left[\begin{array}{ccccccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{(15)}$$

$$X_5'X_5 = \text{diag}\ \{J, J, \ldots, J\}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos pares $(tt')_{ik}$, de dimensões $(IK) \times (IK)$.

$$\underset{(IK)}{X_5'X_6} = \left[\begin{array}{ccccc|c} \Omega & \Phi & \Phi & \ldots & \Phi & \\ \Phi & \Omega & \Phi & \ldots & \Phi & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \Phi^* \\ \Phi & \Phi & \Phi & \ldots & \Omega & \end{array}\right]_{(LJ)}$$

é a matriz de incidência das interações $(tt')_{ik}$ nos pares δ_{ij} , onde

$$\Omega = \underset{(K)\ (J)}{E} \ , \ \Phi = \underset{(K)\ (J)}{\Phi} \ , \ \text{e} \ \ \Phi^* = \underset{(IK)\ [(L-I)J]}{\Phi}$$

No exemplo em questão, obteve-se:

$$
X'_5 X_6 = \left[\begin{array}{ccccccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$(9) \qquad\qquad\qquad\qquad (15)$$

$$X'_6 X_6 = \text{diag } \{K, K, \ldots, K, 1, 1, \ldots, 1\}$$

é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos pares δ_{ij} , de dimensões (LJ) x (LJ), onde tem-se o valor K para $i = 1, 2, \ldots, I$, e 1 para $i = I+1, I+2, \ldots, L$.

Obteve-se, então o sistema de equações normais:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{j} & \underset{\sim}{j}'X_2 & \underset{\sim}{j}'X_3 & \underset{\sim}{j}'X_4 & \underset{\sim}{j}'X_5 & \underset{\sim}{j}'X_6 \\ X_2'\underset{\sim}{j} & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ X_3'\underset{\sim}{j} & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ X_4'\underset{\sim}{j} & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ X_5'\underset{\sim}{j} & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 \\ X_6'X & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \underset{\sim}{\hat{\tau}} \\ \underset{\sim}{\hat{\theta}} \\ \underset{\sim}{\hat{\tau}}^* \\ \underset{\sim}{\hat{\theta}}^* \\ \underset{\sim}{\hat{\delta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{j}'\underset{\sim}{y} \\ X_2'\underset{\sim}{y} \\ X_3'\underset{\sim}{y} \\ X_4'\underset{\sim}{y} \\ X_5'\underset{\sim}{y} \\ X_6'\underset{\sim}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ \underset{\sim}{T} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{T}^* \\ \underset{\sim}{B}^* \\ \underset{\sim}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.2.1.a)$$

onde,

$\hat{m}$ = efeito estimado da média geral;

G = total geral observado;

$\underset{\sim}{\hat{\tau}} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \cdots \\ \hat{t}_L \end{bmatrix}_{(L)\ (1)}$ é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos principais;

$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdots \\ T_L \end{bmatrix}_{(L)\ (1)}$ é o vetor dos totais observados para os tratamentos principais;

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}} = \underset{(J)}{} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \cdots \\ \hat{b}_J \end{bmatrix}_{(1)}$$ é o vetor dos efeitos estimados para blocos;

$$\underset{\sim}{B} = \underset{(J)}{} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_J \end{bmatrix}_{(1)}$$ é o vetor dos totais observados para blocos;

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}^*} = \underset{(K)}{} \begin{bmatrix} \hat{t}'_1 \\ \hat{t}'_2 \\ \cdots \\ \hat{t}'_K \end{bmatrix}_{(1)}$$ é o vetor dos efeitos estimados para os tratamentos secundários;

$$\underset{\sim}{T^*} = \underset{(K)}{} \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ \cdots \\ T'_K \end{bmatrix}_{(1)}$$ é o vetor dos totais observados para os tratamentos secundários;

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{*}_{(IK)} = \begin{bmatrix} \hat{tt}'_{11} \\ \hat{tt}'_{12} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{1K} \\ \hat{tt}'_{21} \\ \hat{tt}'_{22} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{2K} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{I1} \\ \hat{tt}'_{I2} \\ \cdots \\ \hat{tt}'_{IK} \end{bmatrix}_{(1)}$$

é o vetor dos efeitos estimados para a interação $(tt')_{ik}$;

$$\underset{\sim}{B}^* = {}_{(IK)}\begin{bmatrix} TT'_{11} \\ TT'_{12} \\ \cdots \\ TT'_{1K} \\ TT'_{21} \\ TT'_{22} \\ \cdots \\ TT'_{2K} \\ \cdots \\ TT'_{I1} \\ TT'_{I2} \\ \cdots \\ TT'_{IK} \end{bmatrix}_{(1)}$$

é o vetor dos totais observados para a interação $(tt')_{ik}$;

$$\underset{\sim}{\hat{\delta}} = \underset{(LJ)}{} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{11} \\ \hat{\delta}_{12} \\ \cdots \\ \hat{\delta}_{1J} \\ \hat{\delta}_{21} \\ \hat{\delta}_{22} \\ \cdots \\ \hat{\delta}_{2J} \\ \cdots \\ \hat{\delta}_{L1} \\ \hat{\delta}_{L2} \\ \cdots \\ \hat{\delta}_{LJ} \end{bmatrix}_{(1)}$$

é o vetor dos efeitos estimados para a "interação" (tb_{ij}) denotada por δ_{ij} ;

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underset{(LJ)}{} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ \cdots \\ P_{1J} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ \cdots \\ P_{2J} \\ \\ \cdots \\ \\ P_{L1} \\ P_{L2} \\ \cdots \\ P_{LJ} \end{bmatrix}_{(1)}$$

é o vetor dos totais observados para a "interação" δ_{ij} .

4.2.2. Estimadores dos parâmetros

Efetuando-se as multiplicações sugeridas em (4.2.1.a) foram obtidas as equações normais:

$$\begin{aligned}
n\,\hat{m} + \underset{\sim}{j}'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + \underset{\sim}{j}'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + \underset{\sim}{j}'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + \underset{\sim}{j}'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + \underset{\sim}{j}'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= G \\
X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_2'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_2'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + X_2'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + X_2'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + X_2'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= \underset{\sim}{T} \\
X_3'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_3'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_3'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + X_3'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + X_3'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + X_3'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= \underset{\sim}{B} \\
X_4'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_4'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_4'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + X_4'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + X_4'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + X_4'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= \underset{\sim}{T}^* \\
X_5'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_5'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_5'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + X_5'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + X_5'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + X_5'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= \underset{\sim}{B}^* \\
X_6'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_6'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} + X_6'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} + X_6'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* + X_6'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* + X_6'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} &= \underset{\sim}{\Delta}
\end{aligned} \qquad (4.2.2.a)$$

Como $X'X$ é singular e o sistema é consistente e indeterminado, para obtenção de uma solução, adotou-se, dentre os muitos existentes, o procedimento proposto por PIMENTEL GOMES (1967).

Desse modo, tomou-se uma matriz A de restrições, tal que:

$$A\,\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

onde,

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & \underset{\sim}{j}'X_2 & \underset{\sim}{j}'X_3 & \underset{\sim}{j}'X_4 & \underset{\sim}{j}'X_5 & \underset{\sim}{j}'X_6 \\ \hline & \Phi & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ \hline & X_3'X_2 & \Phi & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ \hline \underset{\sim}{0} & \Phi & X_4'X_3 & \Phi & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ \hline & \Phi & X_5'X_3 & \Phi & \Phi & X_5'X_6 \\ \hline & \Phi & \Phi & X_6'X_4 & X_6'X_5 & \Phi \end{array}\right]$$

(L+J+K+IK+LJ+1) (L+J+K+IK+LJ+1)

$\underset{\sim}{0}$ é um vetor nulo, de dimensões (L + J + K + IK + LJ + 1) x 1;

Φ's são matrizes nulas.

Assim sendo,

$$X'X\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

$$A\,\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

Efetuando-se a subtração, tem-se:

$$(X'X - A)\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}$$

Fazendo $X'X - A = M$, onde M é suposta não singular, uma das infinitas soluções que satisfazem (4.2.2.a) é:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = M^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

onde M^{-1} é uma inversa generalizada (inversa condicional) de $X'X$.

Outras soluções do tipo $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^G X'\underset{\sim}{y}$, podem ser adotadas, onde $(X'X)^G$ é qualquer inversa generalizada, isto é, inversa de Moore-Penrose, mínimos quadrados ou condicional, pelo fato de que o produto $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_i' X'\underset{\sim}{y}$ é invariante para todo $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_i$ solução das equações normais.

Efetuando-se as multiplicações para o sistema

$$M\,\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{y} \quad ,$$

resultou:

$$\left.\begin{array}{llllll}
n\,\hat{m} & & & & & = G \quad (1) \\
X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_2'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} & & & & & = \underset{\sim}{T} \quad (2) \\
X_3'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} & + X_3'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} & & & & = \underset{\sim}{B} \quad (3) \\
X_4'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_4'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} & & + X_4'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* & & & = \underset{\sim}{T}^* \quad (4) \\
X_5'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_5'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} & & + X_5'X_4\hat{\underset{\sim}{\tau}}^* & + X_5'X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* & & = \underset{\sim}{B}^* \quad (5) \\
X_6'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X_6'X_2\hat{\underset{\sim}{\tau}} & + X_6'X_3\hat{\underset{\sim}{\theta}} & & & + X_6'X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} & = \underset{\sim}{\Delta} \quad (6)
\end{array}\right. \qquad (4.2.2.b)$$

Então, de (1) obteve-se

$$\hat{m} = \frac{G}{n} \qquad (4.2.2.c)$$

De (2) obteve-se

$$\hat{\underset{\sim}{\tau}} = (X_2'X_2)^{-1}(\underset{\sim}{T} - X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m}) \qquad (4.2.2.d)$$

$$\therefore\ \hat{t}_i = \frac{T_i}{JK} - \hat{m} \quad , \text{ para } \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

$$\hat{t}_i = \frac{T_i}{J} - \hat{m} \quad , \text{ para } \quad i = I+1, I+2, \ldots, L \ .$$

De (3) obteve-se

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}} = (X_3'X_3)^{-1}(\underset{\sim}{B} - X_3'\underset{\sim}{j}\,\hat{m}) \qquad (4.2.2.e)$$

$$\therefore\ \hat{b}_j = \frac{B_j}{(IK+L-I)} - \hat{m}$$

Substituindo-se $\underset{\sim}{\hat{\tau}}$ em (4), obteve-se

$$X_4'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}}^* = \underset{\sim}{T}^* - X_4'X_2\left[(X_2'X_2)^{-1}(\underset{\sim}{T} - X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m})\right] - X_4'\underset{\sim}{j}\,\hat{m}$$

$$X_4'X_4\underset{\sim}{\hat{\tau}}^* = \underset{\sim}{T}^* - X_4'X_2(X_2'X_2)^{-1}\underset{\sim}{T} + X_4'X_2(X_2'X_2)^{-1}\,X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} - X_4'\underset{\sim}{j}\,\hat{m}$$

Mas

$$X_4'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\underset{\sim}{j}\,\hat{m} = X_4'\underset{\sim}{j}\,\hat{m}$$

então

$$\underset{\sim}{\hat{\tau}}^* = (X_4'X_4)^{-1}\left[\underset{\sim}{T}^* - X_4'X_2(X_2'X_2)^{-1}\,\underset{\sim}{T}\right] \qquad (4.2.2.f)$$

$$\therefore\ \hat{t}_k' = \frac{T_k'}{IJ} - \frac{\sum_{i=1}^{I} T_i}{IJK}$$

ou ainda,

$$\hat{t}'_k = \frac{T'_k}{IJ} - \hat{m} - \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \hat{t}_i$$

Para a determinação dos efeitos estimados dos pares tt'_{ik}, foram substituídos em (5), os valores de $\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\tau}}^*$, obtidos respectivamente de (4.2.2.d) e (4.2.2.f), resultando

$$X'_5\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_5X_2\left[(X'_2X_2)^{-1}(\underset{\sim}{T} - X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m})\right] + X'_5X_4\,\{(X'_4X_4)^{-1}\left[\underset{\sim}{T}^* - X'_4X_2(X'_2X_2)^{-1}\underset{\sim}{T}\right]\} +$$

$$+ X'_5X_5\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* = \underset{\sim}{B}^*$$

então

$$X'_5\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_5X_2(X'_2X_2)^{-1}\,\underset{\sim}{T} - X'_5X_2(X'_2X_2)^{-1}\,X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_5X_4(X'_4X_4)^{-1}\,\underset{\sim}{T}^* -$$

$$- X'_5X_4(X'_4X_4)^{-1}\,X'_4X_2(X'_2X_2)^{-1}\,\underset{\sim}{T} + X'_5X_5\,\hat{\underset{\sim}{\theta}}^* = \underset{\sim}{B}^*$$

Mas

$$X'_5X_2(X'_2X_2)^{-1}\,X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m} = X'_5\underset{\sim}{j}\,\hat{m}$$

$$\therefore\ \hat{\underset{\sim}{\theta}}^* = (X'_5X_5)^{-1}\,B^* + (X'_5X_5)^{-1}\left[X'_5X_4(X'_4X_4)^{-1}X'_4X_2(X'_2X_2)^{-1} - X'_5X_2(X'_2X_2)^{-1}\right]\underset{\sim}{T} -$$

$$- (X'_5X_5)^{-1}\,X'_5X_4(X'_4X_4)^{-1}\,\underset{\sim}{T}^* \qquad (4.2.2.g)$$

$$\therefore\ (\hat{tt'})_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J} + \frac{1}{IJK}\sum_{i=1}^{I} T_i - \frac{T_i}{JK} - \frac{T'_K}{IJ}\ ,$$ para $i = 1, 2, \ldots, I,$ e $k = 1, 2, \ldots, K$

ou ainda

$$(t\hat{t}')_{ik} = \frac{TT'_{ik}}{J} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{t}'_k$$

Para a determinação dos efeitos estimados dos pares tb_{ij}, denotado por δ_{ij}, foram substituídos em (6), os valores de $\hat{\underset{\sim}{\tau}}$ e $\hat{\underset{\sim}{\theta}}$, obtidos respectivamente de (4.2.2.d) e (4.2.2.e), resultando:

$$X'_6\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_6X_2\left[(X'_2X_2)^{-1}(\underset{\sim}{T} - X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m})\right] + X'_6X_3\left[(X'_3X_3)^{-1}(\underset{\sim}{B} - X'_3\underset{\sim}{j}\,\hat{m})\right] +$$

$$+ X'_6X_6\,\hat{\delta} = \underset{\sim}{\Delta}$$

então

$$X'_6\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_6X_2(X'_2X_2)^{-1}\,\underset{\sim}{T} - X'_6X_2(X'_2X_2)^{-1}\,X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_6X_3(X'_3X_3)^{-1}\,\underset{\sim}{B} -$$

$$- X'_6X_3(X'_3X_3)^{-1}\,X'_3\underset{\sim}{j}\,\hat{m} + X'_6X_6\hat{\underset{\sim}{\delta}} = \underset{\sim}{\Delta}$$

Mas

$$X'_6X_2(X'_2X_2)^{-1}\,X'_2\underset{\sim}{j}\,\hat{m} = X'_6\underset{\sim}{j}\,\hat{m}$$

$$\therefore\ \hat{\underset{\sim}{\delta}} = (X'_6X_6)^{-1}\,\underset{\sim}{\Delta} - (X'_6X_6)^{-1}\,X'_6X_2(X'_2X_2)^{-1}\,\underset{\sim}{T} - (X'_6X_6)^{-1}X'_6X_3(X'_3X_3)^{-1}\,\underset{\sim}{B} +$$

$$+ (X'_6X_6)^{-1}\,X'_6X_3(X'_3X_3)^{-1}\,X'_3\underset{\sim}{j}\,\hat{m} \qquad (4.2.2.h)$$

Assim, o efeito estimado para um elemento qualquer δ_{ij}, fica

$$\hat{\delta}_{ij} = \frac{P_{ij}}{K} - \frac{T_i}{JK} - \frac{B_j}{IK+L-I} + \hat{m} \quad , \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

ou ainda

$$\hat{\delta}_{ij} = \frac{P_{ij}}{K} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{b}_j$$

e

$$\hat{\delta}_{ij} = P_{ij} - \frac{T_i}{J} - \frac{B_j}{IK+L-I} + \hat{m} \quad , \quad \text{para} \quad i = I+1, I+2, \ldots, L$$

ou ainda

$$\hat{\delta}_{ij} = P_{ij} - \hat{m} - \hat{t}_i - \hat{b}_j$$

4.2.3. Somas de quadrados

A partição da soma de quadrado total, para o modelo adotado, é dada por:

SQTotal = SQBlocos + SQTratamentos T + SQResíduo (a) +

+ SQTratamentos T' + SQ(TxT') + SQResíduo (b) .

Uma grande vantagem da solução obtida para (4.2.2.b), reside no fato de que, multiplicando cada estimador pelo segundo membro da respectiva equação normal, tem-se prontamente as somas de quadrados decompostas de acordo com as causas de variação.

Desse modo obteve-se:

$$\hat{m}\, G = C \Rightarrow C = \frac{G^2}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}\right)^2}{n}$$

$$SQBlocos = \hat{\underset{\sim}{\theta}}'\underset{\sim}{B} = \sum_{j=1}^{J} \hat{b}_j\, B_j = \frac{1}{IK+L-I}\sum_{j=1}^{J} B_j^2 - C$$

$$SQTratamentos\ T = \hat{\underset{\sim}{\tau}}'\underset{\sim}{T} = \sum_{i=1}^{L} \hat{t}_i T_i = \sum^{L} \frac{T_i^2}{Js_i} - C$$

$$SQRes\acute{\imath}duo\ (a) = \hat{\underset{\sim}{\delta}}'\underset{\sim}{\Delta} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \hat{\delta}_{ij}\, P_{ij}$$

$$\therefore\ SQRes\acute{\imath}duo\ (a) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{s_i} - C - SQBlocos - SQTratamentos\ T$$

onde

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{s_i} - C = SQParcelas$$

$$SQTratamentos\ T' = \hat{\underset{\sim}{\tau}}^{*\prime}\underset{\sim}{T}^{*} = \sum_{k=1}^{K} \hat{t}'_k\, T'_k = \frac{1}{IJ}\sum_{k=1}^{K} T_k'^2 - C_1 ,$$

onde

$$C_1 = \frac{(\sum_{k=1}^{K} T'_k)^2}{IJK} = \frac{(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk})^2}{IJK}$$

$$SQ(TxT') = \underset{\sim}{\hat{\theta}}{}^{*\prime}\underset{\sim}{B}{}^{*} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} (t\hat{t}')_{ik}\ (TT')_{ik}$$

$$\therefore\ SQ(TxT') = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} (TT')^2_{ik} - C_1 - (\frac{1}{JK}\sum_{i=1}^{I} T_i^2 - C_1) -$$

$$- \text{SQTratamentos } T'$$

$$\text{SQResíduo (b)} = \text{SQTotal} - \text{SQParcelas} - \text{SQTratamentos } T' -$$

$$- SQ(TxT')$$

onde

$$\text{SQTotal} = \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \frac{1}{n}\underset{\sim}{y}'\ E_{(n)}\ \underset{\sim}{y} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}^2 - C$$

As somas de quadrados, em termos de formas quadráticas, podem ser escritas como:

$$\underset{\sim}{y}'Q_1\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}'Q_2\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{y}'Q_3\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{y}'Q_4\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{y}'Q_5\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{y}'Q_6\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{y}'Q_7\underset{\sim}{y}\quad ,$$

onde os Q_i com $i = 1, 2, \ldots, 7$, são os núcleos das formas quadráticas que dão as somas de quadrados total, blocos, tratamentos T, resíduo (a), tratamentos T', interação T x T' e resíduo (b), respectivamente.

Desse modo, obteve-se:

$$Q_1 = \left[I_{(n)} - \frac{1}{n} E_{(n)}\right] \quad ; \quad \text{posto}\left[Q_1\right] = n - 1$$

$$Q_2 = \left[X_3(X_3'X_3)^{-1} X_3' - \frac{1}{n} E_{(n)}\right] \quad ; \quad \text{posto}\left[Q_2\right] = J - 1$$

$$Q_3 = \left[X_2(X_2'X_2)^{-1} X_2' - \frac{1}{n} E_{(n)}\right] \quad ; \quad \text{posto}\left[Q_3\right] = L - 1$$

$$Q_4 = \left[X_6(X_6'X_6)^{-1} X_6' - X_2(X_2'X_2)^{-1} X_2' - X_3(X_3'X_3)^{-1} X_3' + \frac{1}{n} E_{(n)}\right] \quad ;$$

$$\text{posto}\left[Q_4\right] = (L - 1)(J - 1)$$

$$Q_5 = \left[X_4(X_4'X_4)^{-1} X_4' - X_2(X_2'X_2)^{-1} X_2'X_4(X_4'X_4)^{-1} X_4'\right] \quad ;$$

$$\text{posto}\left[Q_5\right] = K - 1$$

$$Q_6 = \left[X_5(X_5'X_5)^{-1} X_5' + X_2(X_2'X_2)^{-1} X_2'X_4(X_4'X_4)^{-1} X_4' - \right.$$

$$\left. - X_2(X_2'X_2)^{-1} X_2'X_5(X_5'X_5)^{-1} X_5' - X_4(X_4'X_4)^{-1} X_4'X_5(X_5'X_5)^{-1} X_5'\right] \quad ;$$

$$\text{posto}\left[Q_6\right] = (I - 1)(K - 1)$$

$$Q_7 = \left[I_{(n)} - X(X'X)^G X'\right] \quad ; \quad \text{posto}\left[Q_7\right] = I(J - 1)(K - 1)$$

4.2.4. Esperanças dos quadrados médios

A partir do modelo adotado e das fórmulas que expressam as somas de quadrados usando a notação de somatório, aplicou-se esperança matemática e obteve-se as esperanças dos quadrados médios, cujos resultados estão apresentados no Quadro 7.

Estes mesmos resultados podem ser obtidos a partir das formas quadráticas que dão as somas de quadrados. Segundo SEARLE (1971), a esperança matemática de uma forma quadrática $\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}$ é:

$$E(\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = E(\underset{\sim}{y}')\ Q\ E(\underset{\sim}{y}) + tr(QV) \quad , \qquad (4.2.4.a)$$

sendo Q o núcleo da forma quadrática, $V = var(\underset{\sim}{y})$ e <u>tr</u> indica o operador traço de uma matriz.

Baseado neste método, será dado um procedimento para a determinação das esperanças dos quadrados médios, para o modelo em questão, cujo desenvolvimento será mostrado a seguir.

Seja o modelo (4.1.a) na forma matricial

$$\underset{\sim}{y} = X\ \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (4.2.4.b)$$

Seja a partição de $\underset{\sim}{\beta}$ como

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\beta}_1 \\ \text{----} \\ \underset{\sim}{\beta}_\delta \end{bmatrix} \quad , \qquad (4.2.4.c)$$

onde $\underset{\sim}{\beta}_1$ contém todos os componentes de efeito fixo do modelo (inclusive a média m) e $\underset{\sim}{\beta}_\delta$ representa o efeito aleatório $\underset{\sim}{\delta}$.

O modelo (4.2.4.b) é escrito em termos de (4.2.4.c) como

$$\underset{\sim}{y} = X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 + X_\delta \underset{\sim}{\beta}_\delta + \underset{\sim}{\varepsilon} \quad , \qquad (4.2.4.d)$$

onde X é particionada conformavelmente para o produto $X\underset{\sim}{\beta}$. Sendo assim,

$$X = \left[X_1 \;\vdots\; X_\delta \right]$$

onde X_δ corresponde à matriz X_6 e X_1 à parte restante da partição feita em (4.2.1).

Considerando as suposições feitas em (4.1), pode-se escrever:

$$E(\underset{\sim}{y}) = X_1 \underset{\sim}{\beta}_1 \quad , \qquad (4.2.4.e)$$

e

$$V = var(y) = X_\delta \; var(\underset{\sim}{\beta}_\delta) X'_\delta + \sigma^2 \; I_{(n)} \quad , \quad (4.2.4.f)$$

onde $var(\underset{\sim}{\beta}_\delta)$ é a matriz de covariância do efeito aleatório $\underset{\sim}{\delta}$. Esse efeito foi assumido independente, com variância uniforme σ^2_δ, assim

$$var(\underset{\sim}{\beta}_\delta) = \sigma^2_\delta \; I_{(LJ)} \quad , \qquad (4.2.4.g)$$

Substituindo-se (4.2.4.g) em (4.2.4.f), obteve-se

$$V = X_\delta X'_\delta \sigma^2_\delta + \sigma^2 I_{(n)} \quad , \qquad (4.2.4.h)$$

De (4.2.4.e) e (4.2.4.h), o valor esperado da forma quadrática dada em (4.2.4.a), é

$$E(\underset{\sim}{y}'Q\underset{\sim}{y}) = (X_1\underset{\sim}{\beta}_1)'Q\, X_1\underset{\sim}{\beta}_1 + \sigma^2_\delta\, tr(Q\, X_\delta X'_\delta) + \sigma^2\, tr(Q) \qquad (4.2.4.i)$$

Desse modo, usando-se a expressão (4.2.4.i), chega-se ao mesmo resultado para as esperanças dos quadrados médios, apresentados no Quadro 7.

4.3. Testes de hipóteses e quadros de análise

Conforme citado anteriormente, nos ensaios em parcelas subdivididas, existe, geralmente, interesse em se testar as três hipóteses básicas:

$$H_o(1) : t_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, L$$

$$H_o(2) : t'_k = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

$$H_o(3) : tt'_{ik} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, I; \quad k = 1, 2, \ldots, K \quad ,$$

que são, respectivamente, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos principais, de tratamentos secundários e da interação.

Com exceção do teste para blocos, os resíduos adequados para os testes das hipóteses básicas, ficaram evidentes quando se observou a coluna relativa às esperanças dos quadrados médios, apresentadas no Quadro 7.

QUADRO 7 - Esquema da análise de variância e esperanças dos quadrados médios.

CAUSAS DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE	SOMAS DE QUADRADOS	ESPERANÇAS DOS QUADRADOS MÉDIOS*
Blocos	J-1	SQBlocos	$\sigma^2 + K_1\sigma_\delta^2 + f_1(\theta)$
Tratamentos (T)	L-1	SQTrat. T	$\sigma^2 + K_2\sigma_\delta^2 + f_2(\theta)$
Resíduo (a)	(J-1)(L-1)	SQR (a)	$\sigma^2 + K_2\sigma_\delta^2$
Parcelas	LJ-1	soma	
Tratamentos (T')	K-1	SQTrat. T'	$\sigma^2 + f_3(\theta)$
T x T'	(I-1)(K-1)	SQT x T'	$\sigma^2 + f_4(\theta)$
Resíduo (b)	I(J-1)(K-1)	diferença	σ^2
Total	IJK+(L-I)J - 1	SQTotal	

(*)

$$K_1 = \frac{IK^2 + L - I}{IK + L - I} \qquad f_2(\theta) = \frac{J}{(L-1)} \sum_{i=1}^{L} s_i t_i^2$$

$$K_2 = \frac{(IK + L - I)^2 - (IK^2 + L - I)}{(L-1)(IK + L - I)} \qquad f_3(\theta) = \frac{IJ}{(K-1)} \sum_{k=1}^{K} t'^2_k$$

$$f_1(\theta) = \frac{(IK + L - I)}{(J-1)} \sum_{j=1}^{J} b_j^2 \qquad f_4(\theta) = \frac{J}{(I-1)(K-1)} \sum_{i,k=1}^{I,K} (tt')^2_{ik}$$

Então, no tocante às três hipóteses básicas, o experimento segundo a análise proposta, comportou-se de modo análogo ao experimento em parcelas subdivididas ("Split-plot") completo.

Assim, ficaram determinados os critérios para os respectivos testes, conforme está apresentado no Quadro 8.

QUADRO 8 - Testes para as três hipóteses básicas.

HIPÓTESES	G.L.	F (observado)
$H_o(1)$	(L-1) ; (J-1)(L-1)	QMTrat. T/QMR(a)
$H_o(2)$	(K-1) ; I(J-1)(K-1)	QMTrat. T'/QMR(b)
$H_o(3)$	(I-1)(K-1) ; I(J-1)(K-1)	QMT x T'/QMR(b)

No entanto, se for desejável testar-se uma hipótese adicional, relativa aos efeitos de blocos, ou seja, testar $H_o(4)$: $b_j = 0$, j = 1, 2, ..., J blocos, pode-se efetuar um teste aproximado, de modo análogo ao apresentado por OSTLE (1954), cujo procedimento é o seguinte:

$$F = \frac{\text{QMBlocos}}{f} \;, \quad F_\alpha(n\;;\;n') \qquad (4.3.a)$$

onde <u>f</u> é uma combinação linear dos resíduos, dado por

$$f = \left[a_1 \text{QMR}(a) + a_2 \text{QMR}(b)\right] \;;\; a_1 = \frac{K_1}{K_2} \;,\quad a_2 = 1 - \frac{K_1}{K_2} \;,$$

n = número de graus de liberdade de blocos;

n' é um valor aproximado, derivado da fórmula de SATTERTHWAITE (1946), para o número de graus de liberdade relativos à combinação linear dos resíduos, onde:

$$n' = \frac{f^2}{\dfrac{[a_1 QMR(a)]^2}{n_a} + \dfrac{[a_2 QMR(b)]^2}{n_b}}$$

n_a e n_b são os números de graus de liberdade para os resíduos a e b, respectivamente.

Justificando-se a expressão (4.3.a), tem-se que:

$$F = \frac{QMBlocos}{a_1 QMR(a) + a_2 QMR(b)}$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2 + K_1 \hat{\sigma}^2_\delta + f_1(\hat{\theta})}{\dfrac{K_1}{K_2}(\hat{\sigma}^2 + K_2 \hat{\sigma}^2_\delta) + (1 - \dfrac{K_1}{K_2})\hat{\sigma}^2}$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2 + K_1 \hat{\sigma}^2_\delta + f_1(\hat{\theta})}{\hat{\sigma}^2 + K_1 \hat{\sigma}^2_\delta} \qquad (4.3.b)$$

Vê-se, de acordo com (4.3.b), que através da expressão (4.3.a), testa-se realmente o efeito de blocos, ou seja, $H_o(4) : b_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, J$ blocos.

Pelo Quadro 7, pode-se observar que tem-se $(I-1)(K-1)$ graus de liberdade para a interação TxT', o que, à primeira vista, deveria ser $(L-1)(K-1)$. Isto se deve ao fato de que, na análise proposta, há tratamentos secundários em apenas $\underline{I}$ dos tratamentos principais, ou seja, dos $\underline{L}$ tratamentos principais, somente $\underline{I}$ interagem com os $\underline{K}$ tratamentos secundários. Convém salientar ainda, que a parte da análise relativa às subparcelas é idêntica ao "Split-plot" completo.

Por outro lado, segundo PIMENTEL GOMES (1978) e LEAL (1979), dentre outros, quando a interação TxT' é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois esse fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente em relação aos tratamentos principais. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, isoladamente.

Sob esse aspecto, se $H_o(3)$ resulta significativa, então $H_o(2)$ e $H_o(3)$ conjuntamente devem ser decompostas em $\underline{I}$ subhipóteses do tipo:

$$H'_o(1) : t'/t_1 = 0$$

$$H'_o(2) : t'/t_2 = 0$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$H'_o(I) : t'/t_I = 0$$

com o critério para os respectivos testes apresentados no Quadro 9.

QUADRO 9 - Testes para as I subhipóteses.

SUBHIPÓTESES	G.L.	F (observado)
$H'_o(1)$	$(K-1)$; $[I(J-1)(K-1)]$	$(QMT'/T_1)/QMR(b)$
$H'_o(2)$	$(K-1)$; $[I(J-1)(K-1)]$	$(QMT'/T_2)/QMR(b)$
...	...	...
$H'_o(I)$	$(K-1)$; $[I(J-1)(K-1)]$	$(QMT'/T_I)/QMR(b)$

onde:

$$SQT'/T_i = \frac{1}{J}\left[\sum_{k=1}^{K} y_{i.k}^2 - \frac{(\sum_{k=1}^{K} y_{i.k})^2}{K}\right]$$

A adoção desse procedimento, modificaria apenas a parte da análise relativa às subparcelas, cuja decomposição de tratamentos T' e interação TxT' em I subhipóteses, está apresentada no Quadro 10.

QUADRO 10 - Decomposição de tratamentos T' e interação TxT' em I subhipóteses.

CAUSA DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE
T'/T_1	K - 1
T'/T_2	K - 1
...	...
T'/T_I	K - 1
Resíduo (b)	I(J - 1)(K - 1)

Outra alternativa se $H_o(3)$ resulta significativa, caso haja interesse, as hipóteses $H_o(1)$ e $H_o(3)$ conjuntamente, podem ser decompostas em $\underline{K}$ subhipóteses do tipo:

$$H_o''(1) : t/t_1' = 0$$

$$H_o''(2) : t/t_2' = 0$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$H_o''(K) : t/t_K' = 0$$

Para o teste destas $\underline{K}$ subhipóteses, no "Split-plot" completo, o teste F tem como denominador uma combinação linear dos resíduos $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Aqui também, neste estudo, o teste é análogo, com algumas considerações que serão discutidas a seguir.

Sabe-se que só existe interação de $\underline{I}$ tratamentos principais com os $\underline{K}$ tratamentos secundários. Assim, o resíduo apropriado para os testes das $\underline{K}$ subhipóteses é dado por:

$$QMRes = \frac{1}{K} \left[QMR_a(G_1) + (K - 1)QMR(b)\right] \quad ,$$

onde $QMR_a(G_1)$, refere-se ao quadrado médio do resíduo (a), ignorando da análise os (L-I) tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários. Denominou-se de grupo 1 (G_1), os tratamentos principais que possuem tratamentos secundários.

O $QMR_a(G_1)$ pode ser interpretado, portanto, como um resíduo específico para o teste entre tratamentos principais que possuem tratamentos secundários. Posteriormente, será visto como obter o $QMR_a(G_1)$ através de uma decomposição do resíduo, usando transformações lineares.

Assim, o critério para o teste das $\underline{K}$ subhipóteses está apresentado no Quadro 11.

QUADRO 11 - Testes para as $\underline{K}$ subhipóteses.

SUBHIPÓTESES	G.L.	F (observado)
$H''_o(1)$	(I - 1) ; n*	$(QMT/T'_1)/QMRes$
$H''_o(2)$	(I - 1) ; n*	$(QMT/T'_2)/QMRes$
...	...	...
$H''_o(K)$	(I - 1) ; n*	$(QMT/T'_K)/QMRes$

onde n* é o número de graus de liberdade obtido pela aproximação proposta por SATTERTHWAITE (1946), dado por:

$$n^* = \frac{\left[QMR_a(G_1) + (K-1)QMR(b)\right]^2}{\dfrac{\left[QMR_a(G_1)\right]^2}{(I-1)(J-1)} + \dfrac{\left[(K-1)\ QMR(b)\right]^2}{I(J-1)(K-1)}} \qquad (4.3.c)$$

e,

$$SQT/T'_k = \frac{1}{J}\left[\sum_{i=1}^{I} y_{i.k}^2 - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{I} y_{i.k}\right)^2}{I}\right]$$

Assim, com a adoção desse procedimento, tem-se a decomposição de tratamentos T e interação TxT' em $\underline{K}$ subhipóteses, apresentada no Quadro 12.

QUADRO 12 - Decomposição de tratamentos T e interação TxT' em $\underline{K}$ sub-hipóteses.

CAUSA DE VARIAÇÃO	GRAUS DE LIBERDADE
T/T'_1	I - 1
T/T'_2	I - 1
...	...
T/T'_K	I - 1
Resíduo	n*

4.4. Comparações múltiplas

Considerando a possibilidade de rejeição de, ao menos uma das hipóteses de nulidade, referentes aos efeitos de tratamentos, bem como da interação, formularam-se as regras para os testes de contrastes entre efeitos dos parâmetros envolvidos.

Naturalmente, são aplicáveis quaisquer dos métodos usuais para comparações múltiplas. Neste estudo, apenas a título de ilustração, optou-se pelo método de Tukey. Ademais, foram estudados os quatro casos clássicos, citados em PIMENTEL GOMES (1978).

4.4.1. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais

Considerou-se o critério do método de Tukey, citado em PIMENTEL GOMES (1978).

D.M.S. = q $\sqrt{(1/2)\hat{V}(\hat{Y})}$, onde D.M.S. é a diferença mínima significativa e q é o valor da amplitude total estudentizada, obtido de tabela apropriada, à taxa α previamente estabelecida.

Seja o modelo matemático:

$$y_{ijk} = m + t_i + b_j + \delta_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk}$$

onde:

$i = 1, 2, \ldots, I, I+1, \ldots, L$

$j = 1, 2, \ldots, J$

$k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$

$n_{ij} = K$, para $i = 1, 2, \ldots, I$

$n_{ij} = 1$, para $i = I+1, \ldots, L$

É interessante notar que nesta análise, tem-se JK observações para um tratamento principal que possui tratamentos secundários, e apenas J observações para aqueles que não possuem esses tratamentos. E ainda, dos L tratamentos principais, somente I interagem com os K tratamentos secundários.

Com base no modelo matemático, e usando as restrições que lhe foram impostas, obteve-se a variância do contraste $\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, cuja dedução é apresentada a seguir.

$$y_{ij.} = n_{ij}m + n_{ij}t_i + n_{ij}b_j + n_{ij}\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{K} t'_k + \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} + \sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

$$y_{i..} = n_{i.}m + n_{i.}t_i + \sum_{j=1}^{J} n_{ij}b_j + \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\delta_{ij} + \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

$$\hat{m}_i = \frac{y_{i..}}{n_{i.}} = m + t_i + \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\delta_{ij} + \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

Por analogia:

$$\hat{m}_{i'} = \frac{y_{i'..}}{n_{i'.}} = m + t_{i'} + \frac{1}{n_{i'.}}\sum_{j=1}^{J} n_{i'j}\delta_{i'j} + \frac{1}{n_{i'.}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{i'j}} e_{i'jk}$$

$$\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$$

$$\hat{Y} = t_i - t_{i'} + \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{n_{i'.}}\sum_{j=1}^{J} n_{i'j}\delta_{i'j} +$$

$$+ \frac{1}{n_{i.}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk} - \frac{1}{n_{i'.}}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{i'j}} e_{i'jk}$$

$$E(\hat{Y}) = E(\hat{m}_i - \hat{m}_{i'}) = t_i - t_{i'}$$

Por definição:

$$V(\hat{Y}) = E\left[\hat{Y} - E(\hat{Y})\right]^2$$

Logo,

$$V(\hat{Y}) = E \left[\frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{n_{i'.}} \sum_{j=1}^{J} n_{i'j}\delta_{i'j} + \frac{1}{n_{i.}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk} - \frac{1}{n_{i'.}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{i'j}} e_{i'jk} \right]^2$$

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{n_{i.}^2} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}^2 \sigma_\delta^2 + \frac{1}{n_{i'.}^2} \sum_{j=1}^{J} n_{i'j}^2 \sigma_\delta^2 + \frac{1}{n_{i.}^2} n_{i.}\sigma^2 + \frac{1}{n_{i'.}^2} n_{i'.}\sigma^2$$

$$V(\hat{Y}) = \left(\frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{i'.}}\right)\sigma^2 + \left(\frac{\sum_{j=1}^{J} n_{ij}^2}{n_{i.}^2} + \frac{\sum_{j=1}^{J} n_{i'j}^2}{n_{i'.}^2}\right)\sigma_\delta^2 \qquad (4.4.a)$$

ou ainda, $V(\hat{Y}) = b_1\sigma^2 + b_2\sigma_\delta^2$

$$b_1 = \frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{i'.}}$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} n_{ij}^2}{n_{i.}^2} + \frac{\sum_{j=1}^{J} n_{i'j}^2}{n_{i'.}^2}$$

Os componentes de variância σ^2 e σ_δ^2 , podem ser estimados com base no Quadro 7, do seguinte modo:

$$\hat{\sigma}^2 = QMR(b)$$

$$\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{QMR(a) - QMR(b)}{K_2}$$

Logo,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = b_1 \, QMR(b) + b_2 \left[\frac{QMR(a) - QMR(b)}{K_2}\right]$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (b_1 - \frac{b_2}{K_2}) QMR(b) + \frac{b_2}{K_2} QMR(a)$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (\frac{b_1 K_2 - b_2}{K_2}) QMR(b) + \frac{b_2}{K_2} QMR(a)$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{1}{K_2} \left[b_2 \, QMR(a) + (b_1 K_2 - b_2) QMR(b)\right]$$

O número de graus de liberdade n", associados a $\hat{V}(\hat{Y})$, é derivado da fórmula de SATTERTHWAITE (1946), onde:

$$n'' = \frac{\left[b_2 QMR(a) + (b_1 K_2 - b_2) QMR(b)\right]^2}{\dfrac{\left[b_2 QMR(a)\right]^2}{n_a} + \dfrac{\left[(b_1 K_2 - b_2) QMR(b)\right]^2}{n_b}} ,$$

n_a e n_b são os números de graus de liberdade para os resíduos a e b , respectivamente.

Dentro do ítem (4.4.1), para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, há três casos a considerar:

4.4.1.1. As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que possuem tratamentos secundários.

Neste caso, tem-se que: $n_{ij} = n_{i'j} = K$ e $n_{i.} = n_{i'.} = JK$. Logo, de acordo com (4.4.a), vem:

$$V(\hat{Y}) = \frac{2}{JK}(\sigma^2 + K\,\sigma_\delta^2) .$$

Para este tipo de comparação, a expressão acima é usualmente encontrada na literatura. Porém, é interessante notar que neste estudo obteve-se $E[QMRes(a)] = \sigma^2 + K_2\sigma_\delta^2$ com $K_2 \neq K$, enquanto que no caso usual tem-se $E[QMRes(a)] = \sigma^2 + K\,\sigma_\delta^2$.

4.4.1.2. As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários.

Neste caso, tem-se que: $n_{ij} = n_{i'j} = 1$ e $n_{i.} = n_{i'.} = J$. Logo de acordo com (4.4.a), vem:

$$V(\hat{Y}) = \frac{2}{J}(\sigma^2 + \sigma_\delta^2) .$$

4.4.1.3. Das duas médias envolvidas no contraste, uma é relativa a um tratamento principal que possui tratamentos secundários e outra a um que não possui esses tratamentos.

Seja então: $n_{ij} = K$, $n_{i'j} = 1$, $n_{i.} = JK$ e $n_{i'.} = J$.

Logo, de acordo com (4.4.a), vem:

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{JK}\left[(K + 1)\sigma^2 + 2K\,\sigma_\delta^2\right] .$$

De acordo com as considerações anteriores, pode-se observar que há uma variância para cada tipo de comparação. Na prática, pode-se optar em tomar como estimador da variância do estimador do contraste, uma variância, que é dada aproximadamente por:

$$\hat{V}(\hat{Y}) \simeq \left(\frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{i'.}}\right) QMR(a) \qquad (4.4.b)$$

Logo,

$$D.M.S. \simeq q \sqrt{(1/2)\left(\frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{i'.}}\right) QMR(a)} \qquad (4.4.c)$$

com $q\left[\alpha,\ L,\ (L-1)(J-1)\right]$.

Usando a expressão (4.4.b), tem-se:

Para o caso 4.4.1.1 : $\hat{V}(\hat{Y}) \simeq \frac{2}{JK}\ QMR(a)$

Para o caso 4.4.1.2 : $\hat{V}(\hat{Y}) \simeq \frac{2}{J}\ QMR(a)$

Para o caso 4.4.1.3 : $\hat{V}(\hat{Y}) \simeq \left(\frac{1}{JK} + \frac{1}{J}\right) QMR(a)$

Desse modo, com o uso da expressão (4.4.b) no cálculo das variâncias, observou-se que, para as comparações envolvendo dois tratamentos principais onde existem tratamentos secundários, tem-se o mesmo resultado usualmente encontrado na literatura para os ensaios em "Split-

-plot" completo. Nos outros dois casos, o resultado é diferente, o que se deve ao fato do desbalanceamento existente na análise em estudo.

Observou-se que a parte "inferior" da análise proposta, apresentada no Quadro 7, tem resultado idêntico ao usualmente apresentado na literatura. Desse modo, pode-se ignorar da análise os (L-I) tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários, que esta parte da análise permanece inalterada. Assim, os próximos três casos clássicos de comparações múltiplas que serão apresentados, são também idênticos àqueles encontrados na literatura, e podem ser facilmente deduzidos, utilizando a metodologia apresentada em (4.4.1).

4.4.2. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários

Para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$, obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{IJ} \, QMR(b) \quad .$$

Logo,

$$D.M.S. = q \sqrt{\frac{QMR(b)}{IJ}} \qquad (4.4.d)$$

onde o valor $q_{[\alpha,\ K,\ I(J-1)(K-1)]}$, é obtido de tabelas apropriadas.

Este resultado é idêntico àqueles encontrados na literatura, para a diferença mínima significativa entre dois efeitos de tratamentos secundários, em "Split-plot" completo.

4.4.3. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal

Para o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'} \quad , \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, I \; ,$$

obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{J} \, QMR(b)$$

Logo,

$$D.M.S. = q \sqrt{\frac{QMR(b)}{J}} \quad , \qquad (4.4.e)$$

com $q \left[\alpha, K, I(J-1)(K-1)\right]$, resultado idêntico àqueles encontrados na literatura para os ensaios em "Split-plot" completo.

4.4.4. Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do k-ésimo tratamento secundário

Para o contraste

$$\hat{Y} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k} \quad , \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, I \; ,$$

obteve-se

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{JK} \left[QMR_a(G_1) + (K-1) \; QMR(b)\right]$$

Logo,

$$D.M.S. = q \sqrt{\frac{QMR_a(G_1) + (K-1)QMR(b)}{JK}} \, , \qquad (4.4.f)$$

com $q_{[\alpha,\ I,\ n^*]}$, e n^* o número de graus de liberdade obtido através da expressão (4.3.c).

Este resultado é idêntico aqueles usualmente encontrados na literatura para este tipo de comparação, com a ressalva de que, o quadrado médio do resíduo (a), neste caso, diz respeito a um resíduo específico para os tratamentos principais que possuem tratamentos secundários, o qual denotou-se por $QMR_a(G_1)$, conforme já exposto anteriormente.

Sabe-se que, geralmente não se compara efeitos estimados de blocos. Porém, em certos casos, este pode ser um fator de interesse. Sendo assim, obteve-se a variância para um contraste entre duas médias de blocos, cuja dedução é apresentada a seguir, usando a mesma metodologia do ítem (4.4.1).

Seja o contraste: $\hat{Y} = \hat{m}_j - \hat{m}_{j'}$

$$y_{ij.} = n_{ij}m + n_{ij}t_i + n_{ij}b_j + n_{ij}\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{K} t'_k + \sum_{k=1}^{K} (tt')_{ik} + \sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

$$y_{.j.} = n_{.j}m + \sum_{i=1}^{L} n_{ij}t_i + n_{.j}b_j + \sum_{i=1}^{L} n_{ij}\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

$$\hat{m}_j = \frac{y_{.j.}}{n_{.j}} = m + b_j + \frac{1}{n_{.j}}\sum_{i=1}^{L} n_{ij}\delta_{ij} + \frac{1}{n_{.j}}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk}$$

Por analogia:

$$\hat{m}_{j'} = \frac{y_{.j'.}}{n_{.j'}} = m + b_{j'} + \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} n_{ij'} \delta_{ij'} + \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{n_{ij'}} e_{ij'k}$$

$$\hat{Y} = \hat{m}_j - \hat{m}_{j'}$$

$$\hat{Y} = b_j - b_{j'} + \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{L} n_{ij} \delta_{ij} - \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} n_{ij'} \delta_{ij'} +$$

$$+ \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk} - \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{n_{ij'}} e_{ij'k}$$

$$E(\hat{Y}) = b_j - b_{j'}$$

$$\hat{Y} - E(\hat{Y}) = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{L} n_{ij} \delta_{ij} - \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} n_{ij'} \delta_{ij'} + \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk} -$$

$$- \frac{1}{n_{.j'}} \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{n_{ij'}} e_{ij'k}$$

Por definição:

$$V(\hat{Y}) = E\left[\hat{Y} - E(\hat{Y})\right]^2$$

$$V(\hat{Y}) = E\left[\frac{1}{n_{.j}}\sum_{i=1}^{L} n_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{n_{.j'}}\sum_{i=1}^{L} n_{ij'}\delta_{ij'} + \frac{1}{n_{ij}}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{n_{ij}} e_{ijk} - \frac{1}{n_{.j'}}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{n_{ij'}} e_{ij'k}\right]^2$$

Na análise proposta, tem-se:

$$n_{ij} = n_{ij'} = K \quad , \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, I$$

$$n_{ij} = n_{ij'} = 1 \quad , \quad \text{para} \quad i = I+1, \ldots, L$$

Logo,

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{(IK+L-I)^2}\left[2(IK^2+L-I)\sigma_\delta^2 + 2(IK+L-I)\sigma^2\right]$$

$$V(\hat{Y}) = \frac{2}{(IK+L-I)}\left[\sigma^2 + \frac{(IK^2+L-I)}{(IK+L-I)}\sigma_\delta^2\right]$$

$$V(\hat{Y}) = \frac{2}{(IK+L-I)}(\sigma^2 + K_1\sigma_\delta^2)$$

ou ainda,

$$\hat{V}(\hat{Y}) = c_1\hat{\sigma}^2 + c_2\hat{\sigma}_\delta^2 \quad , \quad \text{onde:} \quad c_1 = \frac{2}{(IK+L-I)} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{2K_1}{(IK+L-I)}$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = c_1 QMR(b) + c_2 \left[\frac{QMR(a) - QMR(b)}{K_2}\right]$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (c_1 - \frac{c_2}{k_2}) QMR(b) + \frac{c_2}{K_2} QMR(a)$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{1}{K_2}\left[c_2 QMR(a) + (c_1 K_2 - c_2)\, QMR(b)\right]$$

O número de graus de liberdade n''', associados a $\hat{V}(\hat{Y})$, é derivado da fórmula de SATTERTHWAITE (1946), onde:

$$n''' = \frac{\left[c_2 QMR(a) + (c_1 K_2 - c_2) QMR(b)\right]^2}{\frac{\left[c_2 QMR(a)\right]^2}{n_a} + \frac{\left[(c_1 K_2 - c_2) QMR(b)\right]^2}{n_b}} ,$$

n_a e n_b são os números de graus de liberdade para os resíduos a e b, respectivamente.

Na prática, pode-se optar em tomar como estimador da variância do estimador do contraste, uma variância que é dada aproximadamente por:

$$\hat{V}(\hat{Y}) \simeq \frac{2}{IK+L-I} QMR(a)$$

Logo,

$$D.M.S. \simeq q \sqrt{\frac{QMR(a)}{IK+L-I}} ,$$

com $q\ [\alpha,\ J,\ (L-1)(J-1)]$.

4.5. Decomposições total e parcial do resíduo (a)

4.5.1. Decomposição total do resíduo (a)

Observou-se, através do Quadro 7, que o denominador apropriado para o teste F, de tratamentos principais, é o quadrado médio do resíduo (a). Pode ocorrer que alguns componentes da soma de quadrados deste resíduo, o qual se identifica com a "interação" TxB, sejam muito discrepantes, isto é, a variação desta "interação" não é homogênea. Nesse sentido, é importante fazer um teste para os componentes da "interação". Constatada a heterogeneidade, nesse sentido, o teste F para tratamentos T, conforme estruturado, não é apropriado.

Uma das maneiras de se contornar esse problema consiste em decompor a soma de quadrados de tratamentos T, segundo um conjunto de contrastes ortogonais, que proporcionem as comparações de interesse. Do mesmo modo, pode-se decompor a soma de quadrados do resíduo (a), de forma a se obter um resíduo específico, para cada um dos contrastes.

A metodologia empregada neste trabalho, para a decomposição da soma de quadrados do resíduo (a), é a mesma que foi apresentada por HOFFMANN (1975), na decomposição da soma de quadrados de tratamentos, e posteriormente utilizada por FERREIRA (1978), na decomposição do resíduo de um experimento em blocos casualizados com I tratamentos e

$\underline{J}$ repetições. Esta metodologia se baseia na teoria das transformações lineares, mais precisamente, nas transformações ortogonais.

Foi visto que a soma de quadrados do resíduo (a), pode ser obtida subtraindo-se da soma de quadrados de parcelas as somas de quadrados referentes a blocos e a tratamentos T, ou seja:

$$SQR_a = SQParcelas - SQBlocos - SQTrat.\ T$$

ou

$$SQR_a = \left(\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{s_i} - C \right) - \left(\frac{1}{IK+L-I} \sum_{j=1}^{J} B_j^2 - C \right) - \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{T_i^2}{Js_i} - C \right)$$

ou ainda,

$$SQR_a = \left(\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{ij}^2}{s_i} - \frac{1}{IK+L-I} \sum_{j} B_j^2 \right) - \left(\frac{1}{J} \sum_{i} \frac{T_i^2}{s_i} - C \right) , \quad (4.5.1.a)$$

onde:

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}$$

$$s_i = K , \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

$$s_i = 1 , \quad \text{para} \quad i = I+1, I+2, \ldots, L$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk} \quad ;$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk} \quad ;$$

$$C = \frac{G^2}{J(IK+L-I)} \quad , \quad \text{sendo} \quad G = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{s_i} y_{ijk}$$

De acordo com (4.5.1.a), a soma de quadrados do resíduo (a) pode ser expressa pela diferença de duas somas de quadrados e ainda pode ser posta na seguinte forma:

$$SQR_a = \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{P_{ij}^2}{s_i} - \frac{1}{IK+L-I} B_j^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{T_i^2}{s_i} - \frac{G^2}{IK+L-I} \right) \tag{4.5.1.b}$$

Pode-se então aplicar a metodologia das transformações ortogonais para realizar a decomposição da soma de quadrados do resíduo (a).

Sejam as transformações

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix} = D\lambda\underset{\sim}{\theta}_{1j} \quad e \quad \underset{\sim}{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_L \end{bmatrix} = D\lambda\underset{\sim}{\theta}_2 \quad , \tag{4.5.1.c}$$

onde D é uma matriz ortogonal de dimensões LxL, em que os elementos da última linha são iguais a $d_{Li} = \frac{\sqrt{s_i}}{\sqrt{IK+L-I}}$, i = 1, 2, ..., L (note-se que essa linha é um vetor com módulo igual a 1) e as demais linhas de vem satisfazer a certas condições, conforme será visto adiante. A matriz λ e os vetores $\underset{\sim}{\theta}_{1j}$ e $\underset{\sim}{\theta}_{2}$ são definidos da seguinte forma:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{s_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{s_L}} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\theta}_{1j} = \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \\ P_{Lj} \end{bmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{\theta}_{2} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_L \end{bmatrix},$$

onde $\underset{\sim}{\theta}_{1j}$ é o vetor dos totais dos L tratamentos no bloco $\underline{j}$, e $\underset{\sim}{\theta}_{2}$ é o vetor dos L totais de tratamentos.

De acordo com as transformações definidas em (4.5.1.c), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{L} u_i^2 = \underset{\sim}{U}'\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\theta}'_{1j}\lambda D'D\lambda\underset{\sim}{\theta}_{1j} = (\underset{\sim}{\theta}'_{1j}\lambda)(\lambda\underset{\sim}{\theta}_{1j}) = \sum_{i=1}^{L} \frac{P_{ij}^2}{s_i}, \qquad (4.5.1.d)$$

e

$$\sum_{i=1}^{L} v_i^2 = \underset{\sim}{V}'\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{\theta}'_{2}\lambda D'D\lambda\underset{\sim}{\theta}_{2} = (\underset{\sim}{\theta}'_{2}\lambda)(\lambda\underset{\sim}{\theta}_{2}) = \sum_{i=1}^{L} \frac{T_i^2}{s_i}. \qquad (4.5.1.e)$$

Ainda pela definição das transformações, os elementos u_L e v_L ficam:

$$u_L = \frac{1}{\sqrt{IK+L-I}} \sum_{i=1}^{L} P_{ij} = \frac{1}{\sqrt{IK+L-I}} B_j \quad \therefore \quad u_L^2 = \frac{1}{IK+L-I} B_j^2 \, , \qquad (4.5.1.f)$$

e

$$v_L = \frac{1}{\sqrt{IK+L-I}} \sum_{i=1}^{L} T_i = \frac{1}{\sqrt{IK+L-I}} G \quad \therefore \quad v_L^2 = \frac{1}{IK+L-I} G^2 \, . \qquad (4.5.1.g)$$

De (4.5.1.b), (4.5.1.d), (4.5.1.e), (4.5.1.f) e (4.5.1.g), vem:

$$SQR_a = \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{L} u_i^2 - u_L^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{i=1}^{L} v_i^2 - v_L^2 \right)$$

$$SQR_a = \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{i=1}^{L-1} u_i^2 \right) - \frac{I}{J} \left(\sum_{i=1}^{L-1} v_i^2 \right) ,$$

ou

$$SQR_a = \sum_{j=1}^{J} \left(\sum_{h=1}^{L-1} u_h^2 \right) - \frac{1}{J} \left(\sum_{h=1}^{L-1} v_h^2 \right) , \qquad (4.5.1.h)$$

onde o índice $\underline{h}$ se refere à variação do índice original $\underline{i}$ nas (L-1) primeiras colunas).

Da matriz D, sabe-se que sua última linha é um vetor com módulo igual a 1, cujos elementos são iguais a $\frac{\sqrt{s_i}}{\sqrt{IK+L-I}}$, i= 1, 2,..., L. Deve-se agora verificar quais as condições a serem satisfeitas pelos elementos que, inicialmente, chamou-se de d_{hi} (h = 1, 2, ..., L - 1 ; i = 1, 2, ..., L), das L-1 primeiras linhas de D.

Para que essas linhas sejam ortogonais com a última, deve-se ter

$$\sum_{i=1}^{L} d_{hi} \sqrt{s_i} = 0 \quad , \; (h = 1, 2, \ldots, L-1). \qquad (4.5.1.i)$$

Para que elas sejam ortogonais entre si é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{L} d_{hi} d_{ji} = 0 \quad , \qquad (4.5.1.j)$$

com $h \neq j$ $(h = 1, 2, \ldots, L-1; \; j = 1, 2, \ldots, L-1)$.

Além dessas condições, para que D seja uma matriz ortogonal deve-se ter:

$$\sum_{i=1}^{L} d_{hi}^2 = 1 \; . \qquad (4.5.1.k)$$

Fazendo:

$$d_{hi} = \frac{\dfrac{c_{hi}}{\sqrt{s_i}}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}}} \qquad (4.5.1.\ell)$$

a condição (4.5.1.k) fica imediatamente satisfeita.

Sendo c_{hi} o coeficiente da média do i-ésimo tratamento T, a condição (4.5.1.i) exige que

$$\sum_{i=1}^{L} c_{hi} = 0 \qquad (4.5.1.m)$$

e a condição (4.5.1.j) exige que

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi} c_{ji}}{s_i} = 0 \quad , \qquad (4.5.1.n)$$

com $h \neq j$ $(h = 1, 2, \ldots, L-1)$; $j = 1, 2, \ldots, L-1)$.

De acordo com (4.5.1.c), tem-se:

$$u_h = \sum_{i=1}^{L} d_{hi} \frac{P_{ij}}{\sqrt{s_i}}$$

e

$$v_h = \sum_{i=1}^{L} d_{hi} \frac{T_i}{\sqrt{s_i}}$$

Considerando (4.5.1.ℓ), obtém-se:

$$u_h = \frac{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} P_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}}}$$

e

$$v_h = \frac{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} T_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}}} \quad .$$

consequentemente,

$$u_h^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} P_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} \qquad (4.5.1.o)$$

e

$$v_h^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} T_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} \qquad (4.5.1.p)$$

As expressões (4.5.1.h), (4.5.1.o) e (4.5.1.p) mostram que se pode decompor a SQR_a da maneira conveniente, desde que os coeficientes c_{hi} sejam escolhidos de modo a satisfazer as restrições (4.5.1.m) e (4.5.1.n).

Assim,

$$SQR_a = \sum_{j=1}^{J} \left[\sum_{h=1}^{L-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} P_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} \right] - \frac{1}{J} \sum_{h=1}^{L-1} \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} T_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} ,$$

ou

$$SQR_a = \sum_{h=1}^{L-1} \left[\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} P_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}}{s_i} T_i\right)^2}{J \sum_{i=1}^{L} \frac{c_{hi}^2}{s_i}} \right] .$$

Fazendo $a_{hi} = \dfrac{c_{hi}}{s_i}$, tem-se:

$$SQR_a = \sum_{h=1}^{L-1} \left[\sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} a_{hi} P_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i a_{hi}^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{L} a_{hi} T_i\right)^2}{J \sum_{i=1}^{L} s_i a_{hi}^2} \right] . \qquad (4.5.1.q)$$

Utilizando a expressão (4.5.1.q), as restrições (4.5.1.m) e (4.5.1.n) passam a ser:

$$\sum_{i=1}^{L} s_i \; a_{hi} = 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{L} s_i \; a_{hi} \; a_{ji} = 0 \quad ,$$

com $h \neq j$ $(h = 1, 2, \ldots, L-1 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, L-1)$.

Em virtude das condições impostas aos coeficientes a_{hi}, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{L} a_{hi} \; T_i$$

representa a estimativa de um contraste Y_h , entre totais de tratamentos, e

$$\sum_{i=1}^{L} a_{hi} \; P_{ij} \quad ,$$

denotado por $\hat{Y}_{hj}$, representa a sua estimativa dentro de um determinado bloco j .

Então (4.5.1.q) pode ser posta na forma:

$$SQR_a = \sum_{h=1}^{L-1} \left[\frac{\sum_{j=1}^{J} (\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i \, a_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{J \sum_{i=1}^{L} s_i \, a_{hi}^2} \right] . \qquad (4.5.1.r)$$

Mas,

$$\frac{(\hat{Y}_h)^2}{J \sum_{i=1}^{L} s_i \, a_{hi}^2} = SQ\ (Y_h) \quad ,$$

$$\frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i \, a_{hi}^2} = SQ\ (Y_h \text{ d. bloco } j) \quad ,$$

e

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{(\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i \, a_{hi}^2} = SQ\ (Y_h \text{ d. Blocos}) \; .$$

Assim, de (4.5.1.r), vem:

$$SQR_a = \sum_{h=1}^{L-1} \left[SQ(Y_h \text{ d. Blocos}) - SQ\ (Y_h) \right] \quad . \qquad (4.5.1.s)$$

Por outro lado, numa análise de variância em blocos casualizados no esquema de parcelas subdivididas, o resíduo (a) se identifica com a "interação" entre tratamentos principais e blocos (TxB).

Desdobrando-se a SQTrat. T em seus (L-1) componentes, relativos a (L-1) contrastes ortogonais, tem-se:

$$\text{SQTrat. } T = SQY_1 + SQY_2 + \ldots + SQY_{L-1} \quad .$$

Logo, a SQ(TxB) pode também ser decomposta conforme se segue:

$$SQ(TxB) = SQ(Y_1 xB) + SQ(Y_2 xB) + \ldots + SQ(Y_{L-1} xB) \quad ,$$

onde $SQ(Y_h xB)$ gera um resíduo apropriado para o contraste Y_h .

Logo,

$$SQR_a = \sum_{h=1}^{L-1} SQ(Y_h xB) = \sum_{h=1}^{L-1} SQR_a\,(Y_h) \quad . \qquad (4.5.1.t)$$

Num desdobramento usual de uma interação entre dois fatores A e C , pode-se estudar o comportamento de um dos fatores em cada nível do outro, como por exemplo:

$$\begin{array}{c} A \text{ d. } C_1 \\ A \text{ d. } C_2 \\ \vdots \\ A \text{ d. } C_J \end{array}$$

e sabe-se que:

$$\sum_{j=1}^{J} SQ(A \text{ d. } C_j) = SQ(A \times C) + SQA \quad ,$$

ou seja

$$SQ(A \times C) = \sum_{j=1}^{J} SQ(A \text{ d. } C_j) - SQA \qquad (4.5.1.u)$$

De (4.5.1.s), (4.5.1.t) e (4.5.1.u), vem:

$$SQ(Y_h \text{ d. Blocos}) - SQ(Y_h) = SQ(Y_h \times B) = SQR_a\ (Y_h) \quad ,$$

isto é, a SQR_a se decompõe em (L-1) componentes, cada um deles associado a um dos (L-1) contrastes ortogonais em que se decompõe a SQTrat. T .

Pode-se então concluir que:

$$SQR_a\ (Y_h) = \frac{\sum_{j=1}^{J} (\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{L} s_i\ a_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{J \sum_{i=1}^{L} s_i\ a_{hi}^2}$$

Cumpre observar que em cada decomposição da SQR_a , os contrastes devem ser ortogonais entre si. Entretanto, desde que se tenha definido um contraste, pode-se obter, isoladamente, qualquer componente dessa decomposição.

No caso em estudo, a SQR_a tem (L-1)(J-1) graus de liberdade, então cada um dos seus (L-1) componentes tem (J-1) graus de liberdade, e dá origem a quadrados médios do tipo:

$$QMR_a\ (Y_h) = \frac{SQR_a\ (Y_h)}{J-1} \quad ,$$

que são os resíduos apropriados para testar contrastes entre totais de tratamentos principais.

A verificação e discussão desse resultado está apresentada na seção (5.3), na parte relativa à ilustração do método proposto.

4.5.2. Decomposição parcial do resíduo (a)

Nos casos onde podem ser formados grupos de tratamentos, com variâncias não muito discrepantes dentro de cada grupo, a decomposição total do resíduo talvez não seja o procedimento mais indicado. Nestes casos, uma decomposição parcial do resíduo pode ser mais viável, visto que, obtendo-se resíduos específicos para testar grupos de contrastes simultaneamente, proporcionará a vantagem de se ter um maior número de graus de liberdade para os testes a serem efetuados.

Seja então, os L tratamentos principais divididos em dois grupos, a saber:

Grupo 1 (G_1) : com os I tratamentos principais que possuem tratamentos secundários.

Grupo 2 (G_2) : com os (L-I) tratamentos principais restantes.

Ao estabelecer o conjunto de contrastes ortogonais de interesse, pode-se ter:

	G.L.	S.Q. Resíduo
G_1 vs G_2	1	SQR_1
Dentro de G_1	$I - 1$	SQR_2
Dentro de G_2	$L - I - 1$	SQR_3

Desse modo, calcula-se a soma de quadrados do resíduo correspondente à decomposição estabelecida. Naturalmente, se, por exemplo, um determinado grupo incluir apenas um tratamento, não existirá comparação dentro desse grupo.

Assim,

$$SQR_a = SQR_1 + SQR_2 + SQR_3$$

O número de graus de liberdade é assim distribuído:

SQR_a com $(L-1)(J-1)$ graus de liberdade,

SQR_1 com $(J-1)$ graus de liberdade,

SQR_2 com $(I-1)(J-1)$ graus de liberdade e

SQR_3 com $(L-I-1)(J-1)$ graus de liberdade.

Na seção (5.3) é apresentado um exemplo numérico, com uma discussão detalhada do procedimento anteriormente descrito.

5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Julgou-se adequada a ilustração dos resultados obtidos neste estudo. Assim, com base nos dados do Quadro 6, foram efetuados os cálculos, ilustrando os procedimentos aqui apresentados.

5.1. Análise de variância

Com os dados do Quadro 6, obteve-se o resultado da análise de variância que está apresentado no Quadro 13.

QUADRO 13 - Análise de variância dos dados do Quadro 6.

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	2	725,1243		
Tratamentos (T)	4	1581,8322	395,4580	11,28**
Resíduo (a)	8	280,5663	35,0708	
Parcelas	(14)	(2587,5228)		
Tratamentos (T')	2	330,8404	165,4202	4,69*
T x T'	4	155,2821	38,8205	1,10
Resíduo (b)	12	422,8914	35,2409	
Total	32	3496,5367		

(**) $P < 0,01$

(*) $P < 0,05$

A análise anterior forneceu evidências para a rejeição de $H_o(1)$ e $H_o(2)$, aos níveis de 1 e 5% de probabilidade, respectivamente. Concluiu-se, então, pela diferença significativa , entre tratamentos principais e entre tratamentos secundários.

De acordo com (4.3), apesar de não ter havido rejeição de $H_o(3)$, a título de ilustração, efetuou-se a aplicação dos testes para $H'_o(i)$, cujos resultados estão apresentados no Quadro 14.

QUADRO 14 - Análise de variância com o desdobramento T'/T_i .

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	2	725,1243		
Tratamentos (T)	4	1581,8322	395,4580	11,28**
Resíduo (a)	8	280,5663	35,0708	
Parcelas	(14)	(2587,5228)		
T'/T_1	2	71,4062	35,7031	1,01
T'/T_2	2	44,5041	22,2521	0,63
T'/T_3	2	370,2122	185,1061	5,25*
Resíduo (b)	12	422,8914	35,2409	
Total	32	3496,5367		

(**) $P < 0,01$

(*) $P < 0,05$

Desse modo, rejeitou-se a hipótese $H_o'(3)$, ao nível de 5% de probabilidade. Observa-se que, o desdobramento anterior (T'/T_i) , absorve as somas de quadrados devida aos tratamentos secundários e à interação.

Ainda de acordo com (4.3), a título de ilustração, foram efetuados os testes para $H_o''(k)$. Neste caso tem-se:

$$QMRes = \frac{1}{K}\left[QMR_a(G_1) + (K-1)QMR(b)\right]$$

$$QMRes = \frac{1}{3}\left[16{,}8223 + (3-1)35{,}2409\right]$$

$$QMRes = 29{,}1014 \ .$$

O valor do $QMR_a(G_1) = 16{,}8223$ é obtido de uma análise auxiliar considerando o "Split-plot" completo, ou seja, ignorando nesta análise os tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários.

De acordo com (4.3.c),

$$n^* = \frac{\left[16{,}8223 + (3-1)35{,}2409\right]^2}{\frac{(16{,}8223)^2}{4} + \frac{\left[(3-1)35{,}2409\right]^2}{12}} \simeq 16$$

Assim, obteve-se o resultado apresentado no Quadro 15.

QUADRO 15 - Análise de variância com o desdobramento T/T'_k .

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
T/T'_1	2	173,1125	86,5563	2,97
T/T'_2	2	532,9174	266,4587	9,16**
T/T'_3	2	176,6634	88,3317	3,04
Resíduo	16	...	29,1014	

(**) P < 0,01

Desse modo, rejeitou-se a hipótese $H_o''(2)$, ao nível de 1% de probabilidade. Observa-se que o desdobramento acima (T/T_k'), absorve as somas de quadrados devida aos tratamentos principais que possuem tratamentos secundários [SQTrat. $T(G_1)$ = 727,4112] e devida à interação (SQ TxT' = 155,2821).

5.2. Comparações múltiplas

De acordo com (4.4), foram calculadas as estimativas das variâncias das estimativas dos contrastes e foram estudados os quatro casos de comparações múltiplas, obtendo-se as D.M.S. pelo método de Tukey , a título de ilustração, sem prejuízo do uso de qualquer outro procedimento para comparações múltiplas.

5.2.1. Entre efeitos estimados de tratamentos principais

Neste caso em estudo, para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_i - \hat{m}_{i'}$, segundo (4.4.c), há três casos a considerar:

1º) As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que possuem tratamentos secundários

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (\frac{1}{9} + \frac{1}{9})(35{,}0708) = 7{,}7935$$

$$D.M.S.(5\%) = (4{,}89)\left[\frac{1}{2}\ (7{,}7935)\right]^{1/2} = 9{,}65$$

2º) As duas médias envolvidas no contraste são relativas a dois tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})(35{,}0708) = 23{,}3805$$

$$D.M.S.' = (4{,}89)\left[\frac{1}{2}\ (23{,}3805)\right]^{1/2} = 16{,}72$$

3º) Das duas médias envolvidas no contraste, uma é relativa a um tratamento principal que possui tratamentos secundários e outra a um que não possui esses tratamentos

$$\hat{V}(\hat{Y}) = (\frac{1}{9} + \frac{1}{3})(35{,}0708) = 15{,}5870$$

$$D.M.S.'' = (4{,}89)\left[\frac{1}{2}\ (15{,}5870)\right]^{1/2} = 13{,}65$$

As médias são as seguintes:

$\bar{T}_1 = 44{,}73$

$\bar{T}_2 = 55{,}45$

$\bar{T}_3 = 56{,}01$

$\bar{T}_4 = 58{,}72$

$\bar{T}_5 = 36{,}32$

Erro padrão:

$s(\bar{T}_i) = 1{,}97$, para $i = 1, 2, 3$

$s(\bar{T}_i) = 3{,}42$, para $i = 4, 5$.

5.2.2. Entre efeitos estimados de tratamentos secundários

Para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_k - \hat{m}_{k'}$, foi obtida, segundo (4.4.d):

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{9} (35,2409) = 7,8313$$

$$\text{D.M.S.}(5\%) = (3,77) \left[\frac{1}{2} (7,8313)\right]^{1/2} = 7,46$$

As médias são as seguintes:

$\overline{T}'_1 = 54,60$

$\overline{T}'_2 = 54,48$ Erro padrão = 1,98

$\overline{T}'_3 = 47,11$

5.2.3. Entre efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal

Para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{ik'}$ com $i = 1, 2, 3$, foi obtida, segundo (4.4.e):

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{3} (35,2409) = 23,4939$$

$$\text{D.M.S.}(5\%) = (3,77) \left[\frac{1}{2} (23,4939)\right]^{1/2} = 12,92$$

As médias dos fungicidas (T) dentro de cada concentração (T'), estão apresentadas no Quadro 16. Naturalmente, a D.M.S.= 12,92 faz comparações no sentido das linhas.

QUADRO 16 - Médias dos fungicidas dentro de cada concentração*.

FUNGICIDA (T_i)	CONCENTRAÇÃO (T'_k) 1	2	3
1	48,39	44,25	41,54
2	57,59	56,38	52,38
3	57,80	62,81	47,41

* Erro padrão: $s(\hat{m}_{k/i}) = 3,43$ e $s(\hat{m}_{i/k}) = 3,11$

5.2.4. Entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do k-ésimo tratamento secundário

Para o contraste $\hat{Y} = \hat{m}_{ik} - \hat{m}_{i'k}$, com $k = 1, 2, 3$, foi obtida, segundo (4.4.f):

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{9}\left[16,8223 + (3-1)(35,2409)\right] = 19,4009$$

$$\text{D.M.S.}(5\%) = (3,65)\left[\frac{1}{2}(19,4009)\right]^{1/2} = 11,37$$

A D.M.S. = 11,37 compara as médias do Quadro 16, no sentido das colunas.

5.3. Análise de variância com decomposições total e parcial do resíduo (a)

5.3.1. Decomposição total do resíduo (a)

Considerou-se a análise de variância apresentada no Quadro 13, como uma análise preliminar.

Seja a decomposição da SQTrat. T segundo um conjunto de contrastes ortogonais, onde as comparações de interesse são dadas pelos contrastes:

Y_1 : Fungicidas (G_1) versus testemunhas (G_2);

Y_2 : Fungicida Exp. 1766 versus os demais;

Y_3 : Fungicida Demosal versus fungicida Benlate;

Y_4 : Testemunha sem inoculação versus testemunha com inoculação.

No Quadro 17, apresentam-se os contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados. Cada soma de quadrados desse Quadro tem um único grau de liberdade, e seu conjunto constitui uma decomposição da soma de quadrados de tratamentos T .

QUADRO 17 - Contrastes com seus coeficientes, divisores e somas de quadrados, referentes aos dados do Quadro 6.

TRATAMENTOS	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$\hat{Y}_h$	$J \sum_{i=1}^{L} s_i a_{hi}^2$	$SQ(Y_h)$
TOTAIS DE TRATAMENTOS	402,57	499,05	504,09	176,17	108,95			
$\hat{Y}_1$	+2	+2	+2	-9	-9	245,34	3(198)	101,3329
$\hat{Y}_2$	+2	-1	-1	0	0	-198,00	3(18)	726,0000
$\hat{Y}_3$	0	+1	-1	0	0	-5,04	3(6)	1,4112
$\hat{Y}_4$	0	0	0	+1	-1	67,22	3(2)	753,0881
TOTAL								1581,8322

Cada uma das comparações do Quadro 17, se for testada com o resíduo (a) já obtido no Quadro 13, resulta na análise apresentada no Quadro 18.

QUADRO 18 - Análise de variância com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos T, usando o resíduo (a) médio.

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Y_1	1	101,3329	101,3329	2,89
Y_2	1	726,0000	726,0000	20,70**
Y_3	1	1,4112	1,4112	0,04
Y_4	1	753,0881	753,0881	21,47**
Tratamentos (T)	(4)	(1581,8322)		
Resíduo (a)	8	280,5663	35,0708	

(**) $P < 0,01$

Se há homogeneidade das variâncias dentro de tratamentos principais, a análise apresentada no Quadro 18 é perfeitamente válida.

A heterogeneidade pode, às vezes, ser esperada de antemão em um experimento. Assim, por exemplo, no caso de experimentos em que se testam doses de adubos, fungicidas, inseticidas, as parcelas testemunhas e as parcelas com doses menores poderão apresentar uma maior variabilidade que as com doses maiores. Poderá haver, portanto, uma heterogeneidade de variâncias não se podendo utilizar um erro médio.

Admitiu-se que tenha sido constatada a heterogeneidade do resíduo (a), procedendo-se assim à decomposição da SQR_a, visando a buscar um resíduo apropriado para testar cada um dos contrastes estipulados.

De acordo com o que já foi visto em (4.6), o procedimento consiste em obter o valor de cada contraste, anteriormente estruturado no Quadro 17, dentro de cada bloco, conforme é mostrado no Quadro 19.

QUADRO 19 - Estimativas dos contrastes definidos no Quadro 17, dentro de cada um dos blocos.

BLOCOS	CONTRASTES			
	$\hat{Y}_1$	$\hat{Y}_2$	$\hat{Y}_3$	$\hat{Y}_4$
1	206,33	-60,37	10,77	30,07
2	7,26	-64,56	0,56	25,66
3	31,75	-73,07	-16,37	11,49
TOTAL	245,34	-198,00	-5,04	67,22

Para qualquer contraste Y_h , o resíduo apropriado é obtido através dos seus componentes Y_{hj} , estimados nos três blocos, conforme se segue:

$$SQR_a(Y_h) = \frac{\sum_{j=1}^{3} (\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{5} s_i a_{hi}^2} - \frac{(\hat{Y}_h)^2}{3 \sum_{i=1}^{5} s_i a_{hi}^2}$$

Assim, para Y_1 , por exemplo, tem-se:

$$SQR_a(Y_1) = \frac{(206,33)^2 + (7,26)^2 + (31,75)^2}{198} - \frac{(245,34)^2}{3(198)} = 119,0350$$

De forma análoga, foram calculados os componentes do resíduo (a) para os demais contrastes. Os resultados numéricos estão apresentados no Quadro 20.

QUADRO 20 - Resultados da decomposição total da soma de quadrados do resíduo (a).

	CONTRASTES			
	1	2	3	4
$\dfrac{\sum_{j=1}^{3} (\hat{Y}_{hj})^2}{\sum_{i=1}^{5} s_i \cdot a_{hi}^2}$	220,3679	730,6531	64,0472	847,3303
$\dfrac{(\hat{Y}_h)^2}{3 \sum_{i=1}^{5} s_i \, a_{hi}^2}$	101,3329	726,0000	1,4112	753,0881
COMPONENTES DA SQR_a	119,0350	4,6531	62,6360	94,2422

Deve-se observar ainda que, na decomposição da soma de quadrados do resíduo (a), os 8 graus de liberdade são também decompostos, e cada um dos 4 componentes tem 2 graus de liberdade.

A seguir, foram testados os contrastes, cada um com seu resíduo específico, conforme está apresentado no Quadro 21.

QUADRO 21 - Análise de variância com desdobramento do número de graus de liberdade de tratamentos T e usando os resíduos específicos.

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	Q.M.(Y_h)	$QMR_a(Y_h)$	F
Y_1	1	101,3329	59,5175	1,70
Y_2	1	726,0000	2,3265	312,05**
Y_3	1	1,4112	31,3180	0,04
Y_4	1	753,0881	47,1211	15,98

(**) $P < 0,01$

Pode-se observar que o quadrado médio do resíduo (a) da análise de variância do Quadro 18 é a média aritmética dos componentes residuais apresentados no Quadro 21.

As conclusões oriundas das duas análises (Quadros 18 e 21) diferem, mostrando que, com o uso de resíduos específicos para os testes, pode-se chegar a resultados diferentes daqueles obtidos com o uso do resíduo médio.

Segundo COCHRAN e COX (1976), um argumento contrário ao emprego do método, é o da diminuição do número de graus de liberdade, o que às vezes torna o teste inadequado às circunstâncias presentes. Concluem afirmando que este método não deve ser usado sem boas razões.

5.3.2. Decomposição parcial do resíduo (a)

Considerou-se a análise de variância apresentada no Quadro 13, como uma análise preliminar.

Definindo agora:

Grupo 1 : tratamentos principais que possuem tratamentos secundários,

Grupo 2 : tratamentos principais que não possuem tratamentos secundários.

Seja então, a seguinte decomposição: uma parte para comparar os grupos entre si, uma, para comparar os tratamentos dentro do grupo 1, e outra, para comparar os tratamentos dentro do grupo 2, resultando a análise apresentada no Quadro 22.

QUADRO 22 - Análise de variância dos dados do Quadro 6, com decomposição parcial do resíduo (a).

CAUSA DE VARIAÇÃO	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	2	725,1243		
Grupos (G_1 vs G_2)	1	101,3329	101,3329	1,70
Entre fungicidas (G_1)	2	727,4112	363,7056	21,62**
Entre testemunhas (G_2)	1	753,0881	753,0881	15,98
(Tratamentos T)	(4)	(1581,8322)		
Int. Grupos x Blocos	2	119,0350	59,5175	
Int. Grupo 1 x Blocos	4	67,2891	16,8223	
Int. Grupo 2 x Blocos	2	94,2422	47,1211	
Resíduo (a)	(8)	(280,5663)		
Tratamentos (T')	2	330,8404	165,4202	4,69*
Int. G_1 x T'	4	155,2821	38,8205	1,10
Resíduo (b)	12	422,8914	35,2409	
Total	32	3496,5367		

(**) $P < 0,01$

(*) $P < 0,05$

Na análise apresentada no Quadro 22, para testar grupos entre si, usa-se a interação grupos x blocos. Pode-se observar que este caso corresponde exatamente ao teste do contraste número 1, através do seu resíduo específico, conforme foi feito anteriormente.

Para se conseguir a decomposição da SQTrat. T e da SQR_a como apresentada no Quadro 22, não é necessário fazer previamente a decomposição total. A decomposição da SQR_a pode ser obtida usando a maneira tradicional de calcular a soma de quadrados de uma interação, ou seja, procurar diretamente a interação de cada grupo de tratamentos com blocos.

No grupo 1 há três tratamentos T e dentro deste grupo são possíveis dois contrastes ortogonais entre si, cada um com um grau de liberdade. Caso tenha sido feita a decomposição total, os dois contrastes podem ser agrupados, dando origem a uma soma de quadrados com dois graus de liberdade. Para testar a variação dos tratamentos T dentro do grupo 1, podem ser reunidos os componentes do QMR_a, relativos aos contrastes entre tratamentos deste grupo, e usar a média desses valores. Desse modo, o procedimento é o seguinte:

$$\text{SQ Entre fungicidas } (G_1) = SQ(Y_2) + SQ(Y_3) \quad ,$$

$$\text{SQ (Int. Grupo 1 x Blocos)} = SQR_a(Y_2) + SQR_a(Y_3) \quad ,$$

$$\text{QM (Int. Grupo 1 x Blocos)} = \frac{1}{2}\left[QMR_a(Y_2) + QMR_a(Y_3)\right] \quad .$$

Assim, numa decomposição parcial, os resíduos específicos podem ser obtidos diretamente, ou aproveitar os resultados de uma decomposição total. O que se pretendeu na exposição anterior, foi mostrar a equivalência de procedimentos.

Pode-se observar ainda no Quadro 22, que o teste para testemunhas foi com a interação grupo 2 x blocos, o que corresponde exatamente ao teste do contraste número 4, através do seu resíduo específico, conforme foi feito anteriormente. É interessante salientar que o quadrado médio da interação grupo 1 x blocos, é exatamente igual ao $QMR_a(G_1)$, o qual foi definido anteriormente.

6. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos, concluiu-se:

6.1. Os testes das três hipóteses básicas, isto é, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos principais (T), efeitos de tratamentos secundários (T') e efeitos de interação (TxT'), portaram-se como de modo usual, no tocante aos resíduos apropriados.

6.2. O teste da hipótese adicional, com respeito aos efeitos de blocos, portou-se de modo diferente do usual, sendo necessário portanto, obter uma combinação linear dos resíduos, para o referido teste.

6.3. No teste F, para o desdobramento de tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário (T/T'_k), o denominador é uma combinação linear dos dois resíduos, sendo que o resíduo (a) neste caso, diz respeito a um resíduo específico para os tratamentos principais que possuem tratamentos secundários, pois dos L tratamentos principais, apenas I têm interação com os K tratamentos secundários.

6.4. Em relação às comparações múltiplas, as variâncias dos contrastes entre efeitos estimados de tratamentos principais, apresentaram comportamento diferente daqueles usualmente encontrados na literatura para os ensaios em parcelas subdivididas em blocos casualizados. Isto se deve ao fato do desbalanceamento existente na análise em estudo. Os outros três casos clássicos de comparações múltiplas, mostraram-se análogos aos procedimentos usuais, sendo que para a comparação entre efeitos estimados de dois tratamentos principais dentro de um mesmo tratamento secundário, o quadrado médio do resíduo (a) contido na combinação linear dos dois resíduos, diz respeito a um resíduo específico para os tratamentos principais que possuem tratamentos secundários.

6.5. No caso de um experimento em parcelas subdivididas, com as parcelas dispostas em blocos casualizados, a decomposição da soma de quadrados do resíduo (a) pode ser obtida através do emprego de transformações lineares.

6.6. Se há heterogeneidade nas variâncias dentro dos tratamentos principais, mas é possível formar subgrupos onde as variâncias não sejam muito discrepantes dentro de cada grupo, a decomposição parcial do resíduo (a) é mais indicada, visto que, obtendo-se resíduos específicos para testar grupos de contrastes simultaneamente, proporcionará a vantagem de se ter um maior número de graus de liberdade associados aos testes a serem efetuados.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 399 pp.

CALZADA BENZA, J., 1970. Métodos Estadísticos para la Investigación. 3ª ed., Lima, Peru, Editorial Jurídica, 644 pp.

COCHRAN, W.G., 1947. Some Consequences When the Assumptions for the Analysis of Variance are not Satisfied. Biometrics, Raleigh, 3: 22-38.

COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1976. Diseños Experimentales. 3ª ed., Trillas, México, 661 pp.

CONDÉ, A.R., 1974. Estudo dos Componentes de Variância nos Experimentos em Parcelas Subdivididas. Piracicaba, ESALQ/USP, 57 pp. (Dissertação de Mestrado).

FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design. 1ª Edição, Nova York, McMillan Co., 544 pp.

FERREIRA, L.E.P., 1978. A Decomposição do Resíduo em Casos de Heterocedasticidade nas Análises de Variância de Ensaios em Blocos Casualizados. Piracicaba, ESALQ/USP, 64 pp. (Dissertação de Mestrado).

HOFFMANN, R., 1975. Decomposição da Soma de Quadrados de Tratamento. Mimeografado. Piracicaba, ESALQ/USP, 22 pp.

KEMPTHORNE, O., 1952. The Design and Analysis of Experiments. 1ª Edição, Nova York, John Wiley and Sons, 631 pp.

LEAL, M.L.S., 1979. Análise de Dados Experimentais com Medidas Repetidas. Brasília, Universidade Federal de Brasília, 99 pp. (Dissertação de Mestrado).

LEONARD, W.H. e A.G. CLARK, 1939. Field Plot Technique. Mineapolis, Burgess, 288 pp.

LITTLE, T.M. e F.J. HILLS, 1972. Statistical Methods in Agricultural Research. 1ª ed., Univ. of California Press, Davis, 242 pp.

OSTLE, B., 1954. Statistics in Research. 1ª ed., The Iowa State College Press, Ames, Iowa, 487 pp.

PIMENTEL GOMES, F., 1967. The Solution of Normal Equations of Experimental Design Models. Ciência e Cultura, 19: 567-573.

PIMENTEL GOMES, F., 1978. Curso de Estatística Experimental. 8ª Edição. Piracicaba, SP, Livraria Nobel, 430 pp.

SATTERTHWAITE, F.E., 1946. An Aproximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics, Fort Collins, 2:110-114.

SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. Nova York, John Wiley e Sons, Inc., 532 pp.

SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1967. Statistical Methods. 6ª Edição. Ames, Iowa, The Iowa State University Press, 593 pp.

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. Nova York, McGraw-Hill Book Company, 481 pp.

TAYLOR, J., 1950. The Comparison of Pairs of Treatments in Split-Plot Experiments. Biometrika, Londres, 37: 443-444.