DELINEAMENTO DE TRÊS PARÂMETROS

SUELI COSTA E SILVA

Orientador: Dr. CLOVIS POMPILIO DE ABREU

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Julho, 1984

Ao meu esposo (Paulo): meu afeto.

*Aos meus pais (Moraes e Sofia): minha
gratidão.*

*Ao meu filho (Marcus Vinícius): dedico
com amor.*

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Dr. Clóvis Pompílio de Abreu, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação, apoio e incentivo.
- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Titular, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", e Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, pelo apoio e amizade.
- Ao Dr. Lauro Boechat Batista, Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFRRJ, pela amizade e sugestões apresentadas.
- Ao Dr. Francisco Ademar Costa, Professor Adjunto do Departamento de Matemática da UFRRJ, que nos encaminhou no ensino da Estatística.
- À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro durante a realização do Curso.
- Ao Programador Jorge Bastos Costa, pelo processamento dos dados.
- À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, pelo trabalho de datilografia.

Aos colegas, pela amizade e companheirismo.

A todos aqueles que, de um modo ou de outro, tenham colaborado para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. MATERIAL E MÉTODOS	7
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	10
5. CONCLUSÕES	33
6. BIBLIOGRAFIA	35
7. APÊNDICE	38

DELINEAMENTO DE TRÊS PARÂMETROS

Autora: Sueli Costa e Silva

Orientador: Prof. Dr. Clóvis Pompílio de Abreu

R E S U M O

Um novo tipo de delineamento foi desenvolvido para permitir ajustar aos dados um polinômio do segundo grau com duas variáveis independentes, usando três parâmetros: δ , γ e P .

O delineamento é constituído por um fatorial 2×2 , onde os níveis codificados das variáveis são -1 e $+1$, acrescido dos pontos codificados $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \gamma)$, $(0, -\gamma)$ e $(0, 0)$, onde o ponto central é repetido P vezes.

Fórmulas que permitem a ortogonalização deste delineamento foram conseguidas, sendo que quando $\delta = \gamma$, o delineamento torna-se um Composto Central Ortogonal com P pontos centrais.

Foram determinadas fórmulas das estimativas dos coeficientes polinomiais e suas respectivas somas de quadrados e variâncias.

Pesquisando-se as variâncias das estimativas dos coeficientes, chegou-se à conclusão que quando $\delta=1$, as variâncias das estimativas de β_1 e β_{12} são mínimas se $P=1$ e a variância da estimativa de β_{11} é mínima quando $P=4$.

Por outro lado, quando $\gamma=1$, as variâncias das estimativas de β_2 e β_{12} são mínimas se $P=1$ e a variância da estimativa de β_{22} é mínima quando $P=4$.

Se o pesquisador quiser adotar somente um ponto central, recomenda-se o delineamento fatorial 3×3 . Para mais um ponto central, recomenda-se para o fator mais importante o valor de $\delta=1$ se este fator estiver representado em X_1 e $\gamma=1$ se este fator estiver representado em X_2 .

Finalmente, foi verificado que quando P é maior do que um, as variâncias das estimativas de β_1 , β_{11} e β_{12} são mínimas quando $\delta=1$ do que quando o delineamento transforma-se em composto central ortogonal e as variâncias das estimativas de β_2 , β_{22} e β_{12} são mínimas quando $\gamma=1$ do que quando o delineamento transforma-se em Composto Central Ortogonal.

A THREE PARAMETERS DESIGN

Author: Sueli Costa e Silva
Adviser: Prof. Dr. Clóvis Pompílio de Abreu

S U M M A R Y

A new design was developed for fitting to data a second-degree polynomial equation with two factors and three parameters δ , γ , and P .

There were $8+P$ treatment combinations, four from the 2×2 Factorial Design were the coded levels of the X -variables were -1 and $+1$, and additional treatment combinations $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \gamma)$, $(0, -\gamma)$, and P central points.

Formulas to make the design orthogonal were determined, and when $\delta=\gamma$ the design becomes to a Orthogonal Central Composite Design with P central points.

It were determined formulas to estimate the polynomial regression coefficients and its sums of squares and variances.

It was verified when $\delta=1$ the variances of the β_1 and β_{12} estimated coefficients are smallest if $P=1$ and the variance of the β_{11} estimated coefficient is smallest if $P=4$.

It also verified when $\gamma=1$ the variances of the β_2 and β_{12} estimated coefficients are smallest if $P=1$ and the variance of the β_{22} estimated coefficient is smallest if $P=4$.

For one central point it is better to use a 3x3 Factorial Design and for P greater than one, for the most important factor it may to use $\delta=1$ if this factor lies in X_1 -axis or $\gamma=1$ if this factor lies in X_2 -axis.

Finally, it was verified that when P is greater than one, for $\delta=1$ the variances of the β_1 , β_{11} and β_{12} estimated coefficients are smaller than when the design becomes a Orthogonal Central Composite Design and for $\gamma=1$ the variances of the β_2 , β_{22} and β_{12} estimated coefficients are smaller than when the design becomes a Orthogonal Central Composite Design.

1. INTRODUÇÃO

Sabemos que, em adubação, vários delineamentos foram e estão sendo introduzidos na experimentação agronômica, tomando como base os delineamentos fatoriais. Com o objetivo de reduzir o número excessivo de tratamentos por bloco, os delineamentos fatoriais fracionários foram introduzidos.

Posteriormente, visando uma maior redução do número de combinações entre os níveis dos fatores, foram introduzidos os delineamentos compostos centrais, que tiveram origem na experimentação química, mais tarde adaptados à experimentação agronômica.

Depois dos delineamentos compostos centrais, foram desenvolvidos diversos outros delineamentos, tais como delineamento Guadalupe, delineamento em círculos, etc., para o estudo de superfície de resposta.

Nos delineamentos adequados aos estudos de superfícies polinomiais quadráticas, cada fator deve ter o mesmo peso de importância que os demais. Entretanto, em determinadas culturas, um determinado fator deve ter maior significância do que outros na produção. Por isto, os coeficientes do polinômio do segundo grau correspondentes a este fator devem ser melhor estimados do que os demais coeficientes.

Baseando-se neste raciocínio, o autor se propõe a desenholver um novo delineamento adequado ao estudo de superfície polinomial quadrática com dois fatores, usando três parâmetros (δ , γ e P), de modo a possibilitar ao pesquisador melhor estimar os coeficientes correspondentes ao fator mais importante na cultura.

2. REVISÃO DE LITERATURA

YATES (1937) descreveu pela primeira vez os delineamentos fatoriais e apresentou vários trabalhos sobre o assunto. Segundo o autor, os delineamentos fatoriais poderão apresentar uma pequena eficiência relativa quando comparados com experimentos que envolve poucos tratamentos, visto que quando há um número elevado de tratamentos resultantes das combinações entre os níveis dos fatores há dificuldade na eliminação de diferenças de fertilidade dentro de uma mesma repetição e, conseqüentemente, o erro padrão por parcelas tende a ser alto.

FINNEY (1945), procurando contornar o problema de um número excessivo de tratamentos nos delineamentos fatoriais, apresentou os delineamentos fatoriais fracionários.

BOX e WILSON (1951) apresentaram os delineamentos compostos centrais nos estudos de superfícies polinomiais, com o obje-

tivo de minimizar o número de tratamentos. Estes delineamentos foram propostos basicamente para pesquisas químicas na qual a experimentação era sequencial e o erro experimental pequeno, sendo depois aplicados na experimentação agrônômica.

BOX e HUNTER (1957) introduziram o critério de rotacionalidade nos delineamentos compostos centrais. O critério é baseado no mesmo erro padrão da estimativa da resposta polinomial para todos os pontos igualmente distanciados do ponto central.

As repetições do ponto central foram relatadas por COCHRAN e COX (1971), citando Box e Hunter (1957). Segundo eles, essas repetições determinam a precisão da estimativa da resposta do polinômio do segundo grau no centro ou próximo do ponto central.

ROJAS (1963) modificou o delineamento composto central incluindo um tratamento testemunha. Este delineamento recebeu o nome de "San Cristóbal". Mais tarde, ROJAS (1972) apresentou o delineamento "San Cristóbal Ortogonal".

STAVROU e CADY (1967) fizeram uma ligeira modificação no delineamento de TRAMEL (1957), colocando em dois blocos os tratamentos de cada cubo e repetindo os pontos axiais em cada bloco. Se for usado o ponto central, deve-se ter um em cada bloco, segundo este novo delineamento.

VOSS e PESEK (1967) propuseram o delineamento composto central aumentado, com a adição de mais quatro tratamentos correspondentes a meio cubo nos níveis ± 2 .

PIMENTEL GOMES (1969) apresentou um estudo da determinação de máximo, mínimo ou ponto de sela nas superfícies polinomiais, usando congruência de matrizes.

PENTEADO e BATISTA (1971) estudaram a eficiência do delineamento composto central em comparação com os fatoriais completos de dois fatores e uma das suas conclusões é que o delineamento composto central é menos eficiente do que o delineamento fatorial 5×5 .

MYERS (1971) relatou que os delineamentos compostos centrais podem ser comparados com quaisquer outros delineamentos que visem ao ajustamento aos dados um polinômio do segundo grau, com base na eficiência de cada coeficiente do polinômio do segundo grau.

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972) estudaram a eficiência do delineamento composto central rotativo, com um ponto central, em relação ao fatorial 3^3 , e chegaram à conclusão de que o delineamento fatorial é mais eficiente do que o delineamento composto central rotativo. Neste estudo, os autores fizeram ajustamento de intervalos de comprimento das variáveis, de modo que todos os delineamentos comparados tivessem os mesmos intervalos das variáveis.

PAEZ e SILVA (1975) divulgaram alguns delineamentos adequados à adubação e citaram o delineamento Guadalupe, o qual foi apresentado em Turrialba, Costa Rica, em 1972.

BATISTA (1976) estudou a condição de ortogonalidade no delineamento composto central com um máximo de quatro fatores e

também determinou as fórmulas das variâncias das estimativas dos coeficientes polinomiais, com um ponto central.

BATISTA e SILVA (1978) estudaram a ortogonalidade do delineamento composto central com $P+1$ pontos centrais e verificaram que a fórmula de α que ortogonaliza o referido delineamento é a mesma encontrada no presente trabalho, onde

$$\delta = (-2 + \sqrt{8 + P})^{1/2}$$

BATISTA (1978) apresentou o delineamento em círculos, o qual teve origem nos princípios de um maior número de níveis para cada fator, menor número de combinações entre os níveis e ortogonalidade do delineamento.

COSTA (1980) apresentou um novo tipo de delineamento ortogonal adequado para a regressão polinomial do segundo grau com diversos pontos centrais, e chegou à conclusão de que este delineamento é mais eficiente quando se usa somente um ponto central.

JORGE (1980) estudou o delineamento Guadalupe para três fatores, analisado através de modelo de regressão polinomial quadrática. Segundo a autora, este delineamento foi mais eficiente do que os delineamentos fatoriais 3^3 e o composto central, quando se usa o mesmo intervalo de comprimento preconizado por PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972).

3. MATERIAL E MÉTODOS

Consideremos um ponto codificado com as coordenadas $(0, 0)$, o qual poderá ser repetido P vezes. Adicionamos, a este ponto, um fatorial 2×2 , centrado nele, no qual os níveis dos fatores estão codificados em -1 e $+1$ e ainda os pontos $(0, \gamma)$, $(0, -\gamma)$, $(\delta, 0)$ e $(-\delta, 0)$. Assim, passamos a ter um novo delineamento que será denominado de DELINEAMENTO DE TRÊS PARÂMETROS (Figura 1).

Este novo delineamento poderá apresentar um máximo de cinco níveis para cada fator, sendo que dois níveis codificados de um fator poderão ser diferentes de dois níveis codificados de outro fator se e somente se $\gamma \neq \delta$.

O número total de combinações entre os níveis dos fatores é $8+P$, se $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$.

Figura 1 - Delineamento de Três Parâmetros.

Aos dados deste delineamento, ajustaremos um polinômio do segundo grau com dois fatores, dado pelo seguinte modelo matemático:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_{1u}^2) + \beta_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_{2u}^2) + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u$$

A seguir, serão determinadas fórmulas que permitam a ortogonalização do delineamento proposto e as estimativas das variâncias dos coeficientes, como também a eficiência deste delineamento em comparação com o delineamento fatorial 3x3.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Vamos considerar o seguinte modelo matemático:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u} - \bar{X}_{1u}) + \beta_{22} (X_{2u} - \bar{X}_{2u}) + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u .$$

A partir deste modelo, montamos uma matriz X (Quadro 1).

Na obtenção da matriz $X'X$, denominamos E, F e G três expressões, que são definidas por:

$$E = 4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)}{8 + P} , \quad F = 4 - \frac{(4 + 2\delta^2)(4 + 2\gamma^2)}{8 + P}$$

$$G = 4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P}$$

Quando F é igualado a zero ($F=0$), a matriz torna-se diagonal (Quadro 3) e, consequentemente, as estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau tornam-se independentes, ortogonalizando o delineamento. Assim, quando $F=0$, vem:

$$4 - \frac{(4 + 2\delta^2)(4 + 2\gamma^2)}{8 + P} = 0 . \quad (1)$$

Quadro 1 - Matriz X do delineamento de três parâmetros:

X_{1u}	X_{2u}	$(X_{1u}^2 - \bar{X}_{1u}^2)$	$(X_{2u}^2 - \bar{X}_{2u}^2)$	$X_{1u}X_{2u}$	
1	1	$1 - A$	$1 - B$	1	} P pontos centrais
1	-1	$1 - A$	$1 - B$	-1	
-1	1	$1 - A$	$1 - B$	-1	
-1	-1	$1 - A$	$1 - B$	1	
δ	0	$\delta^2 - A$	$0 - B$	0	
$-\delta$	0	$\delta^2 - A$	$0 - B$	0	
0	γ	$0 - A$	$\gamma^2 - B$	0	
0	$-\gamma$	$0 - A$	$\gamma^2 - B$	0	
0	0	$0 - A$	$0 - B$	0	
...	...	...	...	...	
0	0	$0 - A$	$0 - B$	0	

onde:

$$\bar{X}_{1u}^2 = A = \frac{4 + 2\delta^2}{8 + P}$$

$$\bar{X}_{2u}^2 = B = \frac{4 + 2\gamma^2}{8 + P}$$

Em (1), δ e γ assumem valores no campo positivo, e P é um número natural.

Desenvolvendo (1), obtemos uma fórmula para δ que ortogonaliza este delineamento.

$$\delta = \left(\frac{4 + P - 2\gamma^2}{2 + \gamma^2} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

para $4 + P \geq 2\gamma^2$.

Se em (1) fizermos $\delta=\gamma$, e desenvolvendo a expressão, teremos um caso particular, que é a fórmula de δ que permite a ortogonalização deste delineamento, dada por:

$$\delta = [-2 + \sqrt{8 + P}]^{1/2}. \quad (3)$$

Esta fórmula é a mesma encontrada por BATISTA e SILVA (1978), que ortogonaliza o delineamento composto central com dois fatores. Assim, se considerarmos neste delineamento $\delta=\gamma$, teremos o delineamento composto central ortogonal com P pontos centrais.

Quando $P=\gamma=1$, em (2) obtemos $\delta=1$ e, conseqüentemente, teremos o fatorial completo 3×3 , onde os níveis dos fatores estão codificados em -1, 0 e +1 (Figura 2).

Portanto, podemos verificar que o presente delineamento é bastante geral e, conforme os valores assumidos por δ e γ , o delineamento passa a ser um fatorial 3×3 ou um delineamento composto central ortogonal com P pontos centrais e dois fatores. Logicamente, no caso do delineamento fatorial 3×3 , o valor de $P=1$.

Figura 2 - Delineamento de Três Parâmetros, quando $P=\delta=\gamma=1$.

Quadro 2 - Matriz $X'X$ do delineamento de três parâmetros

$$\begin{bmatrix} 4 + 2\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 2\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F & 0 \\ 0 & 0 & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

onde:

$$E = 4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P}$$

$$F = 4 - \frac{(4 + 2\delta^2)(4 + 2\gamma^2)}{8 + P}$$

$$G = 4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P}$$

Quadro 3 - Matriz diagonal $X'X$ do delineamento de três parâmetros.

$$\begin{bmatrix} 4 + 2\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 2\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

onde:

$$E = 4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P}$$

$$G = 4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P}$$

Quadro 4 - Matriz diagonal $X'X$ do delineamento de três parâmetros,
com r repetições.

$$\begin{bmatrix} r(4 + 2\delta^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r(4 + 2\gamma^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & rE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & rG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4r \end{bmatrix}$$

Quadro 5 - Matriz diagonal $(X'X)^{-1}$ do delineamento de três parâmetros, com r repetições.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r(4 + 2\delta^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(4 + 2\gamma^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{rE} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{rG} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix}$$

Se na matriz $X'X$ (Quadro 2), o valor de F não fosse igualado a zero, e se considerássemos $\delta=\gamma=\sqrt{2}$, teríamos um caso particular do delineamento proposto no presente trabalho, que seria o delineamento composto central rotacional com dois fatores.

Pode-se notar, pela fórmula (2) que os valores de δ e γ dependem de P . O menor valor que P pode assumir é 1 e, neste caso, δ e γ variam no intervalo $[0 ; \sqrt{2,5}]$.

À medida que aumentamos o valor de P na fórmula (2), os intervalos de variação de δ e de γ aumentam. Por exemplo, quando $P=10$, o intervalo de variação de δ e γ é $[0 ; \sqrt{7}]$.

Variando na fórmula (2) o valor de P de 1 até 10, e atribuindo alguns valores de γ em seu respectivo campo de variação, teremos valores de δ que ortogonalizam o presente delineamento (Tabelas 1 a 10).

Quando $F=0$, a matriz torna-se diagonal (Quadro 3) e é bem simples a sua inversão. No entanto, os cálculos efetuados foram para uma repetição. Considerando para r repetições (Quadro 4), podemos determinar $(X'X)^{-1}$ (Quadro 5).

Sabemos, pelo método dos quadrados mínimos, que as fórmulas para $\hat{\beta}$ são determinadas matricialmente por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y ;$$

Assim, podemos facilmente determinar as fórmulas que permitem os cálculos das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no presente delineamento. Portanto, teremos:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_{1u} Y_u}{r(4 + 2\delta^2)} \quad , \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum X_{2u} Y_u}{r(4 + 2\gamma^2)} \quad ,$$

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{\sum X_{1u}^2 Y_u - \frac{(4 + 2\delta^2) \sum Y_u}{8 + P}}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}$$

$$\hat{\beta}_{22} = \frac{\sum X_{2u}^2 Y_u - \frac{(4 + 2\gamma^2) \sum Y_u}{8 + P}}{r \left[4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P} \right]}$$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum X_{1u} X_{2u} Y_u}{4r}$$

onde X_{1u} , X_{2u} , X_{1u}^2 , X_{2u}^2 , são os valores encontrados nas colunas da matriz X (Quadro 1).

Se utilizássemos o modelo matemático:

$$Y_u = \beta_0 + \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} X_{1u}^2 + \beta_{22} X_{2u}^2 + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u \quad ,$$

poderíamos facilmente verificar que a expressão que possibilita a determinação de $\hat{\beta}_0$ é dada por:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \frac{(4 + 2\delta^2)}{8 + P} \hat{\beta}_{11} - \frac{(4 + 2\gamma^2)}{8 + P} \hat{\beta}_{22}$$

Pelo método dos quadrados mínimos, sabemos que a soma de quadrados de regressão é dada por:

$$SQR = \hat{\beta}' X'Y$$

Como os coeficientes são todos independentes, vem:

$$SQ(\hat{\beta}_1) = \hat{\beta}_1 \Sigma X_{1u} Y_u$$

$$SQ(\hat{\beta}_2) = \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2u} Y_u$$

$$SQ(\hat{\beta}_{11}) = \hat{\beta}_{11} \left[\Sigma X_{1u}^2 Y_u - \frac{(4 + 2\delta^2) \Sigma Y_u}{8 + P} \right]$$

$$SQ(\hat{\beta}_{22}) = \hat{\beta}_{22} \left[\Sigma X_{2u}^2 Y_u - \frac{(4 + 2\gamma^2) \Sigma Y_u}{8 + P} \right]$$

$$SQ(\hat{\beta}_{12}) = \hat{\beta}_{12} \Sigma X_{1u} X_{2u} Y_u$$

Através do método dos quadrados mínimos, sabe-se que a matriz de dispersão é obtida pelo produto $(X'X)^{-1} \sigma^2$. Assim, facilmente se obtêm as variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no presente delineamento:

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{r(4 + 2\delta^2)}$$

$$V(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{r(4 + 2\gamma^2)}$$

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}$$

$$V(\hat{\beta}_{22}) = \frac{\sigma^2}{r \left[4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P} \right]}$$

$$V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\sigma^2}{4r}$$

Alguns valores de δ , γ e P que ortogonalizam o delineamento proposto estão contidos nas Tabelas de 1 a 10, apresentadas no Apêndice. Considerando estes valores, temos as variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau (Tabelas 11 a 20, do Apêndice).

Analisando as Tabelas 11 a 20, pode-se verificar, para os diferentes valores de P que:

a) À medida que os valores de δ diminuem, a variância da estimativa de β_1 (que está relacionada com δ) aumenta, levando-nos a crer, à primeira vista, que obtêm-se maior precisão de estimação deste coeficiente quando são usados os maiores valores de δ , para cada P pré-fixado.

b) À medida que os valores de γ aumentam, a variância da estimativa de β_2 (que está relacionada com γ) diminui, levando-nos a crer, à primeira vista, que obtêm-se maior precisão de estimação des

te coeficiente quando são usados os maiores valores de γ , para cada P .

c) Quando $0 \leq \delta \leq 1$, a variância da estimativa de β_{11} atinge um valor máximo neste intervalo. Neste intervalo, para $P=1$, o valor mínimo é obtido quando $\delta=0$. Para $P=2$, o mínimo é obtido quando $\delta=0$ ou $\delta=1$ e para $P>2$, a variância da estimativa de β_{11} é mínima quando $\delta=1$. Para $\delta>1$, à medida que δ cresce, a variância da estimativa de β_{11} diminui, levando-nos a crer que obtêm-se maior precisão da estimativa de β_{11} quando são usados os maiores valores de δ .

d) Quando $0 \leq \gamma \leq 1$, a variância da estimativa de β_{22} atinge um valor máximo neste intervalo. Neste mesmo intervalo, para $P=1$ o valor mínimo é obtido quando $\gamma=0$ e para $P=2$, o valor mínimo é obtido quando $\gamma=0$ ou $\gamma=1$. Para $P>2$, a variância da estimativa de β_{22} é mínima quando $\gamma=1$. Para $\gamma>1$, à medida que γ cresce, a variância da estimativa de β_{22} diminui, levando-nos a crer que obtêm-se maior precisão da estimativa de β_{22} quando são usados os maiores valores de γ .

e) Os valores das variâncias das estimativas de β_{12} permanecem constantes, independentemente dos valores assumidos pelos três parâmetros, conforme a fórmula $V(\beta_{12}) = \frac{\sigma^2}{4r}$.

No entanto, as conclusões obtidas das Tabelas 11 a 20 são tendenciosas, visto que, para os diferentes valores assumidos por δ e γ , os intervalos de comprimento das variáveis X_1 e X_2 são diferentes. Assim, para contornar este problema, deve-se corrigir os

diferentes intervalos de comprimento, de modo que os mesmos fiquem iguais. Isto é obtido fazendo com que estes intervalos sejam de amplitude 2 para os diferentes valores de δ e γ . Então, é necessário dividirmos por δ todas as vezes que $\delta \geq 1$ e por γ todas as vezes que $\gamma \geq 1$.

Pode-se notar que, quando $\delta=1$ ou $\gamma=1$, a divisão não é necessária, e quando $\delta < 1$ ou $\gamma < 1$, a divisão não pode ser feita, pois o intervalo já é 2 e se for feita, ficará maior do que 2.

Com a adoção desta sistemática, podemos fazer comparações das variâncias dos coeficientes do polinômio do segundo grau, para os diferentes valores assumidos por P , δ e γ . Assim, obtemos estas variâncias já corrigidas (Tabelas 21 a 30 do Apêndice).

Pelas Tabelas 21 a 30, pode-se verificar, para os diferentes valores de P :

- a) A variância da estimativa de β_1 é mínima quando $\delta=1$.
- b) A variância da estimativa de β_2 é mínima quando $\gamma=1$.
- c) Para $P=1$, a variância da estimativa de β_{11} é mínima quando $\delta=0$. No caso de termos $P=2$, a variância de β_{11} será mínima quando $\delta=1$ ou $\gamma=0$. Para $P>2$, a variância da estimativa do parâmetro em questão será mínima quando $\delta=1$.
- d) Para $P=1$, a variância da estimativa de β_{22} é mínima quando $\gamma=0$. Para $P=2$, a variância da estimativa de β_{22} é mínima quando $\gamma=0$ ou $\gamma=1$, e para $P>2$, esta variância é menor quando $\gamma=1$.
- e) A variância da estimativa de β_{12} é mínima quando $\delta=1$ ou $\gamma=1$.

É fácil notar que quando ajustamos para um mesmo valor os intervalos de comprimento das variáveis X_1 e X_2 , as variâncias dos coeficientes tornam-se:

$$a.1) \quad V(\hat{\beta}_1) = \frac{\delta^2 \sigma^2}{r(4 + 2\delta^2)}, \quad \text{para } \delta > 1$$

$$a.2) \quad V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{r(4 + 2\delta^2)}, \quad \text{para } 0 \leq \delta \leq 1$$

$$b.1) \quad V(\hat{\beta}_2) = \frac{\gamma^2 \sigma^2}{r(4 + 2\gamma^2)}, \quad \text{para } \gamma > 1$$

$$b.2) \quad V(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{r(4 + 2\gamma^2)}, \quad \text{para } 0 \leq \gamma \leq 1$$

$$c.1) \quad V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\delta^4 \sigma^2}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}, \quad \text{para } \delta > 1$$

$$c.2) \quad V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}, \quad \text{para } 0 \leq \delta \leq 1$$

$$d.1) \quad V(\hat{\beta}_{22}) = \frac{\gamma^4 \sigma^2}{r \left[4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P} \right]}, \quad \text{para } \gamma > 1$$

$$d.2) \quad V(\hat{\beta}_{22}) = \frac{\sigma^2}{r \left[4 + 2\gamma^4 - \frac{(4 + 2\gamma^2)^2}{8 + P} \right]}, \quad \text{para } 0 \leq \gamma \leq 1$$

$$e.1) \quad V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\gamma^2 \sigma^2}{4r} \quad , \text{ para } 0 \leq \delta \leq 1 \text{ e } \gamma > 1$$

$$e.2) \quad V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\delta^2 \sigma^2}{4r} \quad , \text{ para } \delta > 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1$$

$$e.3) \quad V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\delta^2 \gamma^2 \sigma^2}{4r} \quad , \text{ para } \delta > 1 \text{ e } \gamma > 1$$

Com estas fórmulas, podemos determinar a variância mínima para cada coeficiente, como se segue:

a) Determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_1$

$$a.1) \quad V(\hat{\beta}_1) = \frac{\delta^2 \sigma^2}{r(4 + 2\delta^2)} \quad , \quad \text{ para } \delta \geq 1$$

Simplificando, temos:

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{r\left(\frac{4}{\delta^2} + 2\right)}$$

e é fácil ver que, quando $\delta=1$, o denominador da fórmula é máximo. Consequentemente, a variância de $\hat{\beta}_1$ é mínima neste ponto.

$$a.2) \quad V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{r(4 + 2\delta^2)} \quad , \quad \text{ para } 0 \leq \delta \leq 1 \quad ,$$

é fácil notar que, neste caso, quando $\delta=1$ a variância de $\hat{\beta}_1$ é mínima.

Portanto, a variância da estimativa de β_1 é mínima quando $\delta=1$, para quaisquer valores dos outros parâmetros.

b) Determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_2$:

Por raciocínio análogo à determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_1$, podemos provar que a variância de $\hat{\beta}_2$ é mínima quando $\gamma=1$, independentemente dos valores de P .

c) Determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_{11}$:

$$c.1) V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\delta^4 \sigma^2}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}, \text{ para } \delta \geq 1.$$

Desenvolvendo esta fórmula, vem:

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{\frac{2r}{8 + P} \left[6 + P + \frac{2}{\delta^2} \left(\frac{4 + P}{\delta^2} - 4 \right) \right]}$$

Observe-se que, quanto maior o valor de δ , menor será o denominador desta fórmula e, conseqüentemente, maior será a variância. Assim, a variância de $\hat{\beta}_{11}$ será mínima quando $\delta=1$.

$$c.2) V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{r \left[4 + 2\delta^4 - \frac{(4 + 2\delta^2)^2}{8 + P} \right]}, \quad \text{para } 0 \leq \delta \leq 1.$$

Para determinarmos o máximo ou o mínimo desta função, vamos estudar as derivadas primeira e segunda. Assim, calculando a derivada primeira e igualando a zero, e estudando a derivada segunda, vem:

$$\delta = \sqrt{\frac{4}{6 + P}},$$

valor este que torna máxima a função, pois a derivada segunda é negativa neste ponto. Portanto, no intervalo $0 \leq \delta \leq 1$, a função atinge o máximo.

Substituindo em c.2, $\delta=1$, temos:

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2(8 + P)}{r(12 + 6P)}$$

e quando $\delta=0$, temos:

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2(8 + P)}{r(16 + 4P)}$$

Assim, podemos ver que quando $P=1$, a variância é mínima quando $\delta=0$, e para $P=2$, a variância é mínima quando $\delta=0$ ou $\delta=1$, e para $P>2$, a variância de $\hat{\beta}_{11}$ é mínima quando $\delta=1$.

d) Determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_{22}$:

Por raciocínio análogo à determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_{11}$, podemos dizer que para $P=1$, a variância mínima de $\hat{\beta}_{22}$ é obtida quando $\gamma=0$; para $P=2$, a variância mínima de $\hat{\beta}_{22}$ é obtida quando $\gamma=0$ ou $\gamma=1$; e para $P>2$, a variância mínima de $\hat{\beta}_{22}$ é obtida quando $\gamma=1$.

e) Determinação da variância mínima de $\hat{\beta}_{12}$:

$$e.1) V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\gamma^2 \sigma^2}{4r}, \text{ para } 0 \leq \delta \leq 1 \text{ e } \gamma \geq 1,$$

é fácil ver que a variância é mínima quando $\gamma=1$.

$$e.2) V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\delta^2 \sigma^2}{4r}, \text{ para } \delta \geq 1 \text{ e } 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Verificamos que a variância de $\hat{\beta}_{12}$ é mínima quando $\delta=1$.

$$e.3) V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\delta^2 \gamma^2 \sigma^2}{4r}, \text{ para } \delta \geq 1 \text{ e } \gamma \geq 1.$$

Pela fórmula de δ , pode-se notar que para $\delta>1$ e $\gamma>1$, o intervalo de variação de δ e γ é:

$$\left[1; \sqrt{\frac{2+P}{3}} \right],$$

através da substituição $\gamma=1$ em (2).

Pelas derivadas primeira e segunda da variância de $\hat{\beta}_{12}$, verificamos que quando $\delta = [-2 + \sqrt{8 + P}]^{1/2}$, isto é, quando $\delta = \gamma$ (delineamento composto central ortogonal, com P pontos centrais), a variância da estimativa de β_{12} é máxima. É fácil verificar que a variância de $\hat{\beta}_{12}$ será mínima quando $\delta=1$ ou $\gamma=1$, e será dada por:

$$V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{(2 + P)\sigma^2}{12r}$$

Para compararmos as variâncias de um determinado coeficiente estimado da função polinomial nos diversos valores de P, devemos levar em consideração que a área a ser utilizada deve ser a mesma para qualquer valor de P, e com $r = \frac{1}{8 + P}$.

Levando-se em consideração este raciocínio, podemos fazer as seguintes comparações:

a) Comparação da $V(\hat{\beta}_1)$ para os diferentes valores de P.

A variância da estimativa de β_1 é mais eficiente quando $\delta=1$, para qualquer valor de P. Assim, quando $\delta=1$, temos:

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{6r}$$

Levando-se em consideração a mesma área a ser utilizada, temos:

$$V(\hat{\beta}_1) = \frac{(8 + P)\sigma^2}{6}, \quad \text{para } \delta = 1.$$

Assim, é fácil ver que a $V(\hat{\beta}_1)$ é mínima quando $P=1$, isto é, a $V(\hat{\beta}_1)$ é menor quando for adotado o delineamento fatorial 3x3.

b) Comparação da $V(\hat{\beta}_2)$ para os diferentes valores de P .

Por raciocínio análogo à comparação da $V(\hat{\beta}_1)$ para os diferentes valores de P , chega-se à conclusão que a $V(\hat{\beta}_2)$ é menor quando for adotado o delineamento fatorial 3x3.

c) Comparação da $V(\hat{\beta}_{12})$ para os diferentes valores de P .

A variância da estimativa de β_{12} é mínima quando $\delta=1$ ou $\gamma=1$, para qualquer valor de P . A fórmula da variância da estimativa de β_{12} é dada por:

$$V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{\sigma^2}{4r} .$$

Levando-se em consideração a correção para a mesma área total do experimento, vem:

$$V(\hat{\beta}_{12}) = \frac{(8 + P) \sigma^2}{4} .$$

Assim, é fácil ver que a $V(\hat{\beta}_{12})$ é mínima quando $P=1$, isto é, a $V(\hat{\beta}_{12})$ é mais correta se for adotado o delineamento fatorial 3x3.

d) Comparação da $V(\hat{\beta}_{11})$ para os diferentes valores de P .

A variância da estimativa de β_{11} é mínima quando $\delta=0$ se $P=1$, e para $P=2$ é mínima se $\delta=0$ ou $\delta=1$. Para $P \geq 2$, se $\delta=1$.

Embora quando $P=1$ a $V(\hat{\beta}_{11})$ é mínima para $\delta=0$, adotaremos o valor de $\delta=1$, pois as variâncias das estimativas de β_1 e β_{12} são mínimas para $\delta=1$, e, por outro lado, se adotarmos $\delta=1$, a $V(\hat{\beta}_{11})$ é um pouco maior do que quando $\delta=0$ (Tabelas 11 e 21).

Assim, para $\delta=1$, independentemente de P , vem:

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{r \left[6 - \frac{36}{8 + P} \right]},$$

isto é,

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma^2}{r \left[\frac{6}{8 + P} (2 + P) \right]}, \text{ para } \delta = 1.$$

Considerando-se o ajuste para a mesma área total do experimento, vem:

$$V(\hat{\beta}_{11}) = \frac{(8 + P)^2 \sigma^2}{6(2 + P)}, \text{ para } \delta = 1.$$

Por esta expressão determinamos, através de derivadas, o ponto mínimo que é $P = 4$.

Assim, a $V(\hat{\beta}_{11})$, para $\delta=1$ é mínima quando $P=4$.

e) Comparação da $V(\tilde{\beta}_{22})$ para os diferentes valores de P .

Por raciocínio análogo ao item d, chegamos à conclusão que a $V(\tilde{\beta}_{22})$, para $\gamma=1$ é mais eficiente quando $P=4$.

5. CONCLUSÕES

Do presente trabalho pode-se tirar as seguintes conclusões:

1) A fórmula de δ que ortogonaliza o delineamento é dada pela expressão:

$$\delta = \left(\frac{4 + P - 2\gamma^2}{2 + \gamma^2} \right)^{1/2}, \quad \text{para } 4 + P \geq 2\gamma^2$$

2) Quando $\delta = \gamma$, o delineamento torna-se um composto central ortogonal, com P pontos, e a fórmula de δ é dada pela expressão:

$$\delta = (-2 + \sqrt{8 + P})^{1/2}.$$

Observando-se que $V(\hat{\beta}_1)$, $V(\hat{\beta}_{11})$ dependem de δ e $V(\hat{\beta}_2)$, $V(\hat{\beta}_{22})$ dependem de γ e $V(\hat{\beta}_{12})$ depende de δ ou γ ou ambos, teremos:

3) Para cada valor de P , as variâncias das estimativas de β_1 e β_2 são mínimas quando $\delta=1$ e $\gamma=1$, respectivamente.

4) Para $P=1$, as variâncias das estimativas de β_{11} e β_{22} são mínimas quando $\delta=0$ e $\gamma=0$, respectivamente. Se $P=2$, estas variâncias serão mínimas quando $\delta=0$ ou $\delta=1$ e $\gamma=0$ ou $\gamma=1$, respectivamente. E quando $P>2$, as variâncias serão mínimas quando $\delta=1$ e $\gamma=1$.

5) A variância da estimativa de β_{12} é mínima quando $\delta=1$ ou $\gamma=1$.

6) Quando $P=1$, as variâncias das estimativas de β_1 e β_{12} , β_2 e β_{12} são mínimas se $\delta=1$ e $\gamma=1$, respectivamente.

7) Se $P=4$, as variâncias das estimativas de β_{11} e β_{22} são mínimas se $\delta=1$ e $\gamma=1$, respectivamente.

8) Se o pesquisador quiser adotar somente um ponto central, recomenda-se usar o delineamento fatorial 3×3 .

9) Se for utilizado mais de um ponto central, recomenda-se para o fator mais importante o valor de $\delta=1$ e $\gamma=1$, se estes fatores estiverem representados em X_1 e em X_2 , respectivamente.

10) Para P maior do que um, as variâncias das estimativas de β_1 , β_{11} , β_{12} e β_2 , β_{22} , β_{12} são mínimas se utilizarmos $\delta=1$ ou $\gamma=1$ do que quando o delineamento é composto central ortogonal.

6. BIBLIOGRAFIA

BATISTA, L.B., 1976. Determinação de α para tornar ortogonal o delineamento composto central (Box). Piracicaba. ESALQ/USP, 26 p. (Dissertação de Mestrado).

BATISTA, L.B., 1978. Delineamento em círculos. Pesq. Agropec. Bras. 13(4): 9-12.

BATISTA, L.B. e S.C. e SILVA, 1978. Determinação de fórmulas no delineamento composto central (Box). Pesq. Agropec. Bras. 13(2): 39-47.

BOX, G.E.P. e T.S. HUNTER, 1957. Multifactor experimental designs for exploring response surface. Ann. Math. Stat. 28: 195-241.

BOX, G.E.P. e K.B. WILSON, 1951. On the experimental attainment of optimum conditions. Journal of the Royal Statistical Society, série B, 13: 1-45.

- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1971. Experimental Design. 2^a edição. John Wiley. 335-375.
- COSTA, F.A., 1980. Novo tipo de delineamento ortogonal adequado para a regressão polinomial do segundo grau. Piracicaba, ESALQ/USP. 32 p. (Dissertação de Mestrado).
- FINNEY, D.J., 1945. The fractional replication of factorial arrangements. Ann. Eugen. 12: 291-301.
- JORGE, J.P.N., 1980. Delineamento Guadalupe para três fatores, analisado através de modelo de regressão polinomial quadrática. Piracicaba, ESALQ/USP. 56 p. (Dissertação de Mestrado).
- MYERS, R.H., 1971. Response Surface Methodology. Allyn and Bacon, 126-175.
- PENTEADO, A.F. e L.B. BATISTA, 1971. Eficiência do ensaio composto central (Box) em comparação com os fatoriais completos de dois fatores. XIII Congresso Brasileiro de Ciências do Solo, Vitória, E.S.
- PIMENTEL GOMES, F., 1969. Novos aspectos de estudo econômico de ensaio de adubação. Fertilitê, 34: 3-9.
- PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS, 1972. The efficiency of factorial 3^3 designs as compared as to a central composite rotatable designs. Potash Review, fev.
- PIMENTEL GOMES, F. e I.R. NOGUEIRA, 1977. Extrapolação ou projeção: uma técnica difícil e perigosa. Ciência e Cultura, 29(12): 1386-1389.

- PÁEZ, G. e T. SILVA, 1975. Delineamento dos experimentos de adubação. Brasília, EMBRAPA, D.P.D. 55 p.
- ROJAS, B.A., 1963. The San Cristóbal designs for fertilizer experiments. In: WILLIAM, J.R. Ed., Proc. Int. Soc. of Sugar Cane Technologists. Eleventh Congress, Mauritius. Nova York, Elsevier Publ. Comp., 197-203.
- ROJAS, B.A., 1972. The orthogonal San Cristóbal design. In: HENDERSON, M.T., Ed., Proc. Int. Soc. of Sugar Cane Technologists. Fourteenth Congress, Nova Orleans. Louisiana, Franklin Press Inc., 1085-1093.
- STAVROU, J. e F.B. CADY, 1967. Counfounding the triple cube response surface design to reduce block size. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Madison, 31: 126-128.
- TRAMEL, T.E., 1957. A suggested procedure for agronomic-economic fertilizer experiments. In: BAUM, E.L.; E.D. HEADY; J.T. PESEK e C.G. HILDRETH, Ed., Economic and Technical Analysis of Fertilizer Innovations and Resource Use. Ames, The Iowa State College Press, 168-175.
- VOSS, R. e J. PESEK, 1967. Yield of corn grain as affected by fertilizer rates and environmental factors. Agron. J. Madison, 59: 567-572.
- YATES, F., 1937. The Design and Analysis of Factorial Experiments. Tech. Commun Bur. Soil. Sci., Harpenden, 35: 77 p.

7. A P Ê N D I C E

Tabela 1 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=1$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	1,5811388
0,1	1,5740432
0,2	1,5529856
0,3	1,5186245
0,4	1,4719603
0,5	1,4142136
0,6	1,3466846
0,7	1,2706131
0,8	1,1870515
0,9	1,0967440
*1,0	1,0000000
1,1	0,8965147
1,2	0,7850348
1,3	0,6625893
1,4	0,5222332
1,5	0,3429971
1,5811388	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento fatorial 3×3 e ao mesmo tempo delineamento composto central ortogonal com dois fatores e com um ponto central.

Tabela 2 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=2$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	1,7320508
0,1	1,7248549
0,2	1,7035143
0,3	1,6687388
0,4	1,6216132
0,5	1,5634720
0,6	1,4957568
0,7	1,4198818
0,8	1,3371160
0,9	1,2484867
1,0	1,1547004
*1,0780897	1,0780897
1,1	1,0560612
1,1547004	1,0000000
1,2	0,9523535
1,3	0,8426312
1,4	0,7247432
1,5	0,5940885
1,6	0,4392979
1,7	0,2121090
1,7320508	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e dois pontos centrais.

Tabela 3 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=3$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	1,8708286
0,1	1,8635013
0,2	1,8417809
0,3	1,8064215
0,4	1,7585768
0,5	1,6996731
0,6	1,6312625
0,7	1,5548861
0,8	1,4719603
0,9	1,3836874
1,0	1,2909944
1,1	1,1944839
*1,1474426	1,1474426
1,2	1,0943834
1,2909944	1,0000000
1,3	0,9904696
1,4	0,8819173
1,5	0,7669650
1,6	0,6420911
1,7	0,4994890
1,8	0,3150186
1,8708286	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e três pontos centrais.

Tabela 4 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=4$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,0000000
0,1	1,9925234
0,2	1,9703686
0,3	1,9343287
0,4	1,8856182
0,5	1,8257420
0,6	1,7563445
0,7	1,6790702
0,8	1,5954482
0,9	1,5068054
1,0	1,4142135
1,1	1,3184530
1,2	1,2199888
*1,210006	1,2100006
1,3	1,1189427
1,4	1,0150387
1,4142135	1,0000000
1,5	0,9074852
1,6	0,7947195
1,7	0,6737866
1,8	0,5385874
1,9	0,3728776
2,0	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e quatro pontos centrais.

Tabela 5 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=5$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,121320
0,1	2,1136846
0,2	2,0910639
0,3	2,0542874
0,4	2,0046243
0,5	1,9436507
0,6	1,8730924
0,7	1,7946820
0,8	1,7100417
0,9	1,6205968
1,0	1,5275252
1,1	1,4317281
1,2	1,3338182
*1,2671035	1,2671035
1,3	1,2341132
1,4	1,1326203
1,5	1,0289914
1,5275252	1,0000000
1,6	0,9224302
1,7	0,8114724
1,8	0,6934812
1,9	0,5632858
2,0	0,4082483
2,1	0,1675753
2,1213203	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e cinco pontos centrais.

Tabela 6 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=6$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,2360682
0,1	2,2282671
0,2	2,2051630
0,3	2,1676173
0,4	2,1169509
0,5	2,0548048
0,6	1,9829785
0,7	1,9032840
0,8	1,8174240
0,9	1,7269065
1,0	1,6329932
1,1	1,5366754
1,2	1,4386689
1,3	1,3394172
*1,3197186	1,3197186
1,4	1,2390940
1,5	1,1375930
1,6	1,0344929
1,6329932	1,0000000
1,7	0,9289705
1,8	0,8196071
1,9	0,7039489
2,0	0,5773502
2,1	0,4290544
2,2	0,2162964
2,2360682	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e seis pontos centrais.

Tabela 7 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=7$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,3452081
0,1	2,3372392
0,2	2,3136425
0,3	2,2753095
0,4	2,2236108
0,5	2,1602468
0,6	2,0870871
0,7	2,0060153
0,8	1,9188065
0,9	1,8270409
1,0	1,7320508
1,1	1,6348998
1,2	1,5363807
1,3	1,4370250
*1,3685698	1,3685698
1,4	1,3371160
1,5	1,2366938
1,6	1,1355502
1,7	1,0331919
1,7320508	1,0000000
1,8	0,9287601
1,9	0,8208515
2,0	0,7071068
2,1	0,5831757
2,2	0,4392983
2,3	0,2400285
2,3452081	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e sete pontos centrais.

Tabela 8 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=8$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,4494900
0,1	2,4413523
0,2	2,4172582
0,3	2,3781304
0,4	2,3253831
0,5	2,2607770
0,6	2,1862440
0,7	2,1037354
0,8	2,0150947
0,9	1,9219651
1,0	1,8257418
1,1	1,7275486
1,2	1,6282396
1,3	1,5284121
1,4	1,4284272
*1,4142135	1,4142135
1,5	1,3284223
1,6	1,2283210
1,7	1,1278228
1,8	1,0263700
1,8257418	1,0000000
1,9	0,9230657
2,0	0,8164966
2,1	0,7043439
2,2	0,5823932
2,3	0,4413478
2,4	0,2487094
2,4494900	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e oito pontos centrais.

Tabela 9 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros, quando $P=9$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,5495100
0,1	2,5412030
0,2	2,5166115
0,3	2,4766860
0,4	2,4228849
0,5	2,3570227
0,6	2,2810940
0,7	2,1971139
0,8	2,1069870
0,9	2,0124168
1,0	1,9148542
1,1	1,8154754
1,2	1,7151856
1,3	1,6146349
1,4	1,5142421
*1,4570880	1,4570880
1,5	1,4142136
1,6	1,3145611
1,7	1,2151064
1,8	1,1154708
1,9	1,0150387
1,9148542	1,0000000
2,0	0,9128710
2,1	0,8075312
2,2	0,6966927
2,3	0,5761616
2,4	0,4367177
2,5	0,2461829
2,5495100	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e nove pontos centrais.

Tabela 10 - Valores de δ e γ que ortogonalizam o delineamento de três parâmetros quando $P=10$.

Valor de γ	Valor de δ
0,0	2,6457514
0,1	2,6372761
0,2	2,6121888
0,3	2,5714669
0,4	2,5166115
0,5	2,4494900
0,6	2,3721551
0,7	2,2866826
0,8	2,1950359
0,9	2,0989747
1,0	2,0000000
1,1	1,8993361
1,2	1,7979321
1,3	1,6964812
1,4	1,5954482
*1,4975448	1,4975448
1,5	1,4950900
1,6	1,3954818
1,7	1,2965271
1,8	1,1979627
1,9	1,0993437
2,0	1,0000000
2,1	0,8989509
2,2	0,7947198
2,3	0,6849354
2,4	0,5653215
2,5	0,4264014
2,6	0,2340826
2,6457514	0,0000000

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e dez pontos centrais.

Tabela 11 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=1$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,5811388	0,11111111	0,2500000	0,1333333	0,4500001	0,2500000
0,1	1,5740432	0,1116666	0,2487562	0,1357506	0,4535970	0,2500000
0,2	1,5529856	0,1133333	0,2450980	0,1432112	0,4643388	0,2500000
0,3	1,5186245	0,1161111	0,2392345	0,1563543	0,4819691	0,2500000
0,4	1,4719603	0,1200000	0,2314815	0,1762785	0,5056633	0,2500000
0,5	1,4142136	0,1250000	0,2222222	0,2045454	0,5333334	0,2500000
0,6	1,3466846	0,1311111	0,2118644	0,2430527	0,5605940	0,2500000
0,7	1,2706131	0,1383333	0,2008032	0,2935488	0,5798448	0,2500000
0,8	1,1870515	0,1466666	0,1893939	0,3564065	0,5808550	0,2500000
0,9	1,0967440	0,1561111	0,1779359	0,4283630	0,5546859	0,2500000
*1,0	1,0000000	0,1666666	0,1666666	0,5000000	0,5000000	0,2500000
1,1	0,8965147	0,1783333	0,1557632	0,5561006	0,4257857	0,2500000
1,2	0,7850348	0,1911110	0,1453488	0,5822706	0,3462818	0,2500000
1,3	0,6625893	0,2050000	0,1355013	0,5741993	0,2731792	0,2500000
1,4	0,5222332	0,2199999	0,1262626	0,5396435	0,2121522	0,2500000
1,5	0,3429971	0,2361111	0,1176470	0,4914966	0,1640091	0,2500000
1,5811388	0,0000000	0,2500000	0,1111111	0,4500001	0,1333333	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento fatorial 3×3 e ao mesmo tempo delineamento composto central ortogonal com dois fatores e um ponto central.

Tabela 12 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=2$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,7320508	0,1000000	0,2500000	0,0833333	0,4166667	0,2500000
0,1	1,7248549	0,1005000	0,2487562	0,0847315	0,4194349	0,2500000
0,2	1,7035143	0,1020000	0,2450980	0,0890388	0,4276136	0,2500000
0,3	1,6687388	0,1045000	0,2392345	0,0966026	0,4407306	0,2500000
0,4	1,6216132	0,1080000	0,2314815	0,1080321	0,4576742	0,2500000
0,5	1,5634720	0,1125000	0,2222222	0,1242331	0,4761905	0,2500000
0,6	1,4957568	0,1180000	0,2118644	0,1464328	0,4922811	0,2500000
0,7	1,4198818	0,1245000	0,2008032	0,1761332	0,4999602	0,2500000
0,8	1,3371160	0,1320000	0,1893939	0,2148776	0,4922811	0,2500000
0,9	1,2484867	0,1405000	0,1779359	0,2636145	0,4643043	0,2500000
1,0	1,1547005	0,1500000	0,1666666	0,3214286	0,4166667	0,2500000
*1,0780897	1,0780897	0,1581138	0,1581138	0,3701266	0,3701266	0,2500000
1,1	1,0560612	0,1605000	0,1557632	0,3837767	0,3563082	0,2500000
1,1547004	1,0000000	0,1666666	0,1500000	0,4166667	0,3214286	0,2500000
1,2	0,9523535	0,1719999	0,1453488	0,4414994	0,2929323	0,2500000
1,3	0,8426312	0,1845000	0,1355013	0,4829569	0,2344248	0,2500000
1,4	0,7247432	0,1980000	0,1262626	0,4997449	0,1848238	0,2500000
1,5	0,5940885	0,2125000	0,1176470	0,4914968	0,1449275	0,2500000
1,6	0,4392979	0,2279999	0,1096491	0,4649401	0,1137688	0,2500000
1,7	0,2121090	0,2444999	0,1022495	0,4289538	0,0897718	0,2500000
1,7320508	0,0000000	0,2500000	0,1000000	0,4166667	0,0833333	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e dois pontos centrais.

Tabela 13 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=3$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,8708288	0,0909090	0,2500000	0,0571428	0,3928571	0,2500000
0,1	1,8635013	0,0913636	0,2487562	0,0580464	0,3950894	0,2500000
0,2	1,8417809	0,0927273	0,2450980	0,0608250	0,4016240	0,2500000
0,3	1,8064215	0,0950000	0,2392345	0,0656884	0,4118956	0,2500000
0,4	1,7585768	0,0981818	0,2314815	0,0730058	0,4246973	0,2500000
0,5	1,6996731	0,1022727	0,2222222	0,0833333	0,4378110	0,2500000
0,6	1,6312625	0,1072727	0,2118644	0,0974469	0,4476495	0,2500000
0,7	1,5548861	0,1131818	0,2008032	0,1163656	0,4493135	0,2500000
0,8	1,4719603	0,1200000	0,1893939	0,1413276	0,4376751	0,2500000
0,9	1,3836874	0,1277273	0,1779359	0,1736429	0,4096865	0,2500000
1,0	1,2909944	0,1363636	0,1666666	0,2142857	0,3666667	0,2500000
1,1	1,1944839	0,1459091	0,1557632	0,2630663	0,3143415	0,2500000
*1,1474426	1,1474426	0,1507556	0,1507556	0,2884337	0,2884337	0,2500000
1,2	1,0943834	0,1563636	0,1453488	0,3173976	0,2601408	0,2500000
1,2909944	1,0000000	0,1666666	0,1363636	0,3666667	0,2142857	0,2500000
1,3	0,9904696	0,1677272	0,1355013	0,3712821	0,2100447	0,2500000
1,4	0,8819173	0,1800000	0,1262626	0,4159662	0,1672018	0,2500000
1,5	0,7669650	0,1931818	0,1176470	0,4432514	0,1323308	0,2500000
1,6	0,6420911	0,2072727	0,1096491	0,4496575	0,1047571	0,2500000
1,7	0,4994890	0,2222727	0,1022495	0,4377486	0,0832716	0,2500000
1,8	0,3150186	0,2381818	0,0954198	0,4136976	0,0666195	0,2500000
1,8708288	0,0000000	0,2500000	0,0909090	0,3928571	0,0571428	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e três pontos centrais.

Tabela 14 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=4$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,0000000	0,0833333	0,2500000	0,0416666	0,3750000	0,2500000
0,1	1,9925234	0,0837500	0,2487562	0,0422953	0,3768608	0,2500000
0,2	1,9703686	0,0850000	0,2450980	0,0442256	0,3822630	0,2500000
0,3	1,9343287	0,0870833	0,2392345	0,0475945	0,3905996	0,2500000
0,4	1,8856182	0,0900000	0,2314815	0,0526430	0,4006410	0,2500000
0,5	1,8257420	0,0937500	0,2222222	0,0597345	0,4102564	0,2500000
0,6	1,7563445	0,0983333	0,2118644	0,0693813	0,4162043	0,2500000
0,7	1,6790702	0,1037500	0,2008032	0,0822718	0,4143361	0,2500000
0,8	1,5954482	0,1100000	0,1893939	0,0992888	0,4006410	0,2500000
0,9	1,5068054	0,1170833	0,1779359	0,1214911	0,3731111	0,2500000
1,0	1,4142135	0,1250000	0,1666666	0,1500000	0,3333333	0,2500000
1,1	1,3184530	0,1337500	0,1557632	0,1856955	0,2862460	0,2500000
1,2	1,2199888	0,1433333	0,1453488	0,2286102	0,2379443	0,2500000
*1,2100006	1,2100006	0,1443375	0,1443375	0,2332532	0,2332532	0,2500000
1,3	1,1189427	0,1537500	0,1355018	0,2770135	0,1932927	0,2500000
1,4	1,0150387	0,1650000	0,1262626	0,3265693	0,1548947	0,2500000
1,4142135	1,0000000	0,1666666	0,1250000	0,3333333	0,1500000	0,2500000
1,5	0,9074852	0,1770833	0,1176470	0,3705129	0,1233933	0,2500000
1,6	0,7947195	0,1900000	0,1096491	0,4017062	0,0982704	0,2500000
1,7	0,6737866	0,2037499	0,1022495	0,4158249	0,0785330	0,2500000
1,8	0,5385874	0,2183333	0,0954198	0,4131995	0,0631207	0,2500000
1,9	0,3728776	0,2337499	0,0891265	0,3978512	0,0510895	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e quatro pontos centrais.

Tabela 15 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=5$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,1213207	0,0769230	0,2500000	0,0317460	0,3611112	0,2500000
0,1	2,1136846	0,0773077	0,2487562	0,0322071	0,3627009	0,2500000
0,2	2,0910639	0,0784615	0,2450980	0,0336211	0,3672814	0,2500000
0,3	2,0542874	0,0803846	0,2392345	0,0360829	0,3742278	0,2500000
0,4	2,0046243	0,0830769	0,2314815	0,0397589	0,3823170	0,2500000
0,5	1,9436507	0,0865384	0,2222222	0,0449002	0,3895131	0,2500000
0,6	1,8730924	0,0907692	0,2118644	0,0518608	0,3928537	0,2500000
0,7	1,7946820	0,0957692	0,2008032	0,0611201	0,3887305	0,2500000
0,8	1,7100417	0,1015384	0,1893939	0,0733061	0,3738726	0,2500000
0,9	1,6205968	0,1080769	0,1779359	0,0892082	0,3469054	0,2500000
1,0	1,5275252	0,1153846	0,1666666	0,1097561	0,3095238	0,2500000
1,1	1,4317281	0,1234615	0,1557632	0,1359214	0,2661197	0,2500000
1,2	1,3338182	0,1323076	0,1453488	0,1684661	0,2219218	0,2500000
*1,2671035	1,2671035	0,1386750	0,1386750	0,1939642	0,1939642	0,2500000
1,3	1,2341132	0,1419231	0,1355013	0,2074574	0,1810731	0,2500000
1,4	1,1326203	0,1523077	0,1262626	0,2515527	0,1458132	0,2500000
1,5	1,0289914	0,1634615	0,1176470	0,2973251	0,1167228	0,2500000
1,5275252	1,0000000	0,1666666	0,1153846	0,3095238	0,1097561	0,2500000
1,6	0,9224302	0,1753846	0,1096491	0,3393033	0,0933779	0,2500000
1,7	0,8114724	0,1880768	0,1022495	0,3713913	0,0749253	0,2500000
1,8	0,6934812	0,2015384	0,0954198	0,3892973	0,0604350	0,2500000
1,9	0,5632858	0,2157692	0,0891265	0,3922970	0,0490665	0,2500000
2,0	0,4082483	0,2307692	0,0833333	0,3829787	0,0401234	0,2500000
2,1	0,1675753	0,2465384	0,0780031	0,3654966	0,0330538	0,2500000
2,1213207	0,0000000	0,2500000	0,0769230	0,3611112	0,0317460	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e cinco pontos centrais.

Tabela 16 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=6$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,2360682	0,0714285	0,2500000	0,0250000	0,3500000	0,2500000
0,1	2,2282671	0,0717857	0,2487562	0,0253518	0,3513845	0,2500000
0,2	2,2051630	0,0728571	0,2450980	0,0264297	0,3553444	0,2500000
0,3	2,1676173	0,0746428	0,2392345	0,0283023	0,3612493	0,2500000
0,4	2,1169509	0,0771428	0,2314815	0,0310900	0,3678944	0,2500000
0,5	2,0548048	0,0803571	0,2222222	0,0349741	0,3733333	0,2500000
0,6	1,9829785	0,0842857	0,2118644	0,0402093	0,3748287	0,2500000
0,7	1,9032840	0,0889285	0,2008032	0,0471414	0,3691750	0,2500000
0,8	1,8174240	0,0942857	0,1893939	0,0562267	0,3536211	0,2500000
0,9	1,7269065	0,1003571	0,1779359	0,0680503	0,3272068	0,2500000
1,0	1,6329932	0,1071428	0,1666666	0,0833333	0,2916666	0,2500000
1,1	1,5366754	0,1146428	0,1557632	0,1029080	0,2509933	0,2500000
1,2	1,4386689	0,1228571	0,1453488	0,1276228	0,2098121	0,2500000
1,3	1,3394172	0,1317857	0,1355013	0,1581186	0,1717657	0,2500000
*1,3197186	1,3197186	0,1336306	0,1336306	0,1648331	0,1648331	0,2500000
1,4	1,2390940	0,1414285	0,1262626	0,1944179	0,1388360	0,2500000
1,5	1,1375930	0,1517857	0,1176470	0,2353420	0,1115538	0,2500000
1,6	1,0344929	0,1628571	0,1096491	0,2779774	0,0895562	0,2500000
1,6329932	1,0000000	0,1666666	0,1071428	0,2916666	0,0833333	0,2500000
1,7	0,9289705	0,1746428	0,1022495	0,3177044	0,0720868	0,2500000
1,8	0,8196071	0,1871428	0,0954198	0,3492835	0,0533084	0,2500000
1,9	0,7039489	0,2003571	0,0891265	0,3687624	0,0474559	0,2500000
2,0	0,5773502	0,2142857	0,0833333	0,3750001	0,0388888	0,2500000
2,1	0,4290544	0,2289285	0,0780031	0,3697062	0,0320958	0,2500000
2,2	0,2162964	0,2442857	0,0730994	0,3561980	0,0266781	0,2500000
2,2360682	0,0000000	0,2500000	0,0714285	0,3500000	0,0250000	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e seis pontos centrais.

Tabela 17 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=7$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\beta_1)$	$V(\beta_2)$	$V(\beta_{11})$	$V(\beta_{22})$	$V(\beta_{12})$
0,0	2,3452081	0,0666666	0,2500000	0,0202020	0,3409091	0,2500000
0,1	2,3372392	0,0670000	0,2487562	0,0204783	0,3421330	0,2500000
0,2	2,3136425	0,0680000	0,2450980	0,0213263	0,3456094	0,2500000
0,3	2,2753095	0,0696666	0,2392345	0,0227959	0,3507083	0,2500000
0,4	2,2236108	0,0720000	0,2314815	0,0249781	0,3562471	0,2500000
0,5	2,1602468	0,0750000	0,2222222	0,0280083	0,3603604	0,2500000
0,6	2,0870871	0,0786666	0,2118644	0,0320764	0,3604938	0,2500000
0,7	2,0060153	0,0830000	0,2008032	0,0374399	0,3537520	0,2500000
0,8	1,9188065	0,0880000	0,1893939	0,0444390	0,3377649	0,2500000
0,9	1,8270409	0,0936666	0,1779359	0,0535136	0,3118594	0,2500000
1,0	1,7320508	0,1000000	0,1666666	0,0652174	0,2777777	0,2500000
1,1	1,6348998	0,1070000	0,1557632	0,0802192	0,2392093	0,2500000
1,2	1,5363807	0,1146666	0,1453488	0,0992724	0,2003377	0,2500000
1,3	1,4370250	0,1230000	0,1355013	0,1231188	0,1644401	0,2500000
*1,3685698	1,3685698	0,1290994	0,1290994	0,1425286	0,1425286	0,2500000
1,4	1,3371160	0,1319999	0,1262626	0,1522792	0,1333078	0,2500000
1,5	1,2366938	0,1416667	0,1176470	0,1866925	0,1074306	0,2500000
1,6	1,1355502	0,1520000	0,1096491	0,2252261	0,0864884	0,2500000
1,7	1,0331919	0,1629999	0,1022495	0,2652620	0,0697952	0,2500000
1,7320508	1,0000000	0,1666666	0,1000000	0,2777777	0,0652174	0,2500000
1,8	0,9287601	0,1746667	0,0954198	0,3027592	0,0565829	0,2500000
1,9	0,8208515	0,1870000	0,0891265	0,3331608	0,0461432	0,2500000
2,0	0,7071068	0,2000000	0,0833333	0,3529412	0,0378787	0,2500000
2,1	0,5831757	0,2136666	0,0780031	0,3608740	0,0313093	0,2500000
2,2	0,4392983	0,2279999	0,0730994	0,3581612	0,0260586	0,2500000
2,3	0,2400285	0,2430000	0,0685871	0,3475079	0,0218357	0,2500000
2,3452081	0,0000000	0,2500000	0,0666666	0,3409091	0,0202020	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e sete pontos centrais.

Tabela 18 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=8$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\bar{\beta}_1)$	$V(\bar{\beta}_2)$	$V(\bar{\beta}_{11})$	$V(\bar{\beta}_{22})$	$V(\bar{\beta}_{12})$
0,0	2,4494900	0,0625000	0,2500000	0,0166666	0,3333333	0,2500000
0,1	2,4413523	0,0628125	0,2487562	0,0168899	0,3344286	0,2500000
0,2	2,4172582	0,0637500	0,2450980	0,0175729	0,3375186	0,2500000
0,3	2,3781304	0,0653125	0,2392345	0,0187554	0,3419768	0,2500000
0,4	2,3253831	0,0675000	0,2314815	0,0205074	0,3466445	0,2500000
0,5	2,2607770	0,0703125	0,2222222	0,0229331	0,3497267	0,2500000
0,6	2,1862440	0,0737500	0,2118644	0,0261784	0,3488211	0,2500000
0,7	2,1037354	0,0778125	0,2008032	0,0304402	0,3412766	0,2500000
0,8	2,0150947	0,0825000	0,1893939	0,0359786	0,3250130	0,2500000
0,9	1,9219651	0,0878125	0,1779359	0,0431308	0,2995649	0,2500000
1,0	1,8257420	0,0937500	0,1666666	0,0523255	0,2666667	0,2500000
1,1	1,7275486	0,1003125	0,1557632	0,0640925	0,2297702	0,2500000
1,2	1,6282396	0,1075000	0,1453488	0,0790576	0,1927229	0,2500000
1,3	1,5284121	0,1153125	0,1355013	0,0979060	0,1585244	0,2500000
1,4	1,4284272	0,1237500	0,1262626	0,1212815	0,1288195	0,2500000
*1,4142135	1,4142135	0,1250000	0,1250000	0,1250000	0,1250000	0,2500000
1,5	1,3284223	0,1328125	0,1176470	0,1495859	0,1040650	0,2500000
1,6	1,2283210	0,1425000	0,1096491	0,1826512	0,0839715	0,2500000
1,7	1,1278228	0,1528124	0,1022495	0,2193262	0,0679063	0,2500000
1,8	1,0263700	0,1637500	0,0954198	0,2571629	0,0551547	0,2500000
1,8257420	1,0000000	0,1666666	0,0937500	0,2666667	0,0523255	0,2500000
1,9	0,9230657	0,1753124	0,0891265	0,2925318	0,0450528	0,2500000
2,0	0,8164966	0,1875000	0,0833333	0,3214286	0,0370370	0,2500000
2,1	0,7043439	0,2003124	0,0780031	0,3407617	0,0306521	0,2500000
2,2	0,5823932	0,2137500	0,0730994	0,3493882	0,0255396	0,2500000
2,3	0,4413478	0,2278124	0,0685871	0,3482366	0,0214214	0,2500000
2,4	0,2487094	0,2424999	0,0644330	0,3395771	0,0180829	0,2500000
2,4494900	0,0000000	0,2500000	0,0625000	0,3333333	0,0166666	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e oito pontos centrais.

Tabela 19 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=8$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,5495100	0,0588235	0,2500000	0,0139860	0,3269231	0,2500000
0,1	2,5412030	0,0591176	0,2487562	0,0141697	0,3279132	0,2500000
0,2	2,5166115	0,0600000	0,2450980	0,0147313	0,3306878	0,2500000
0,3	2,4766860	0,0614705	0,2392345	0,0157025	0,3346260	0,2500000
0,4	2,4228849	0,0635294	0,2314815	0,0171386	0,3385915	0,2500000
0,5	2,3570227	0,0661764	0,2222222	0,0191218	0,3408522	0,2500000
0,6	2,2810940	0,0694117	0,2118644	0,0217668	0,3391319	0,2500000
0,7	2,1971139	0,0732353	0,2008032	0,0252281	0,3309776	0,2500000
0,8	2,1069870	0,0776470	0,1893939	0,0297090	0,3145353	0,2500000
0,9	2,0124168	0,0826470	0,1779359	0,0354732	0,2894948	0,2500000
1,0	1,9148542	0,0882353	0,1666666	0,0428571	0,2575758	0,2500000
1,1	1,8154754	0,0944117	0,1557632	0,0522814	0,2220394	0,2500000
1,2	1,7151856	0,1011764	0,1453488	0,0642560	0,1864690	0,2500000
1,3	1,6146349	0,1085294	0,1355013	0,0793695	0,1536473	0,2500000
1,4	1,5142421	0,1164706	0,1262626	0,0982438	0,1251031	0,2500000
*1,4570880	1,4570880	0,1212678	0,1212678	0,1109243	0,1109243	0,2500000
1,5	1,4142136	0,1250000	0,1176470	0,1214286	0,1012658	0,2500000
1,6	1,3145611	0,1341176	0,1096491	0,1492043	0,0818693	0,2500000
1,7	1,2151064	0,1438235	0,1022495	0,1812824	0,0663226	0,2500000
1,8	1,1154708	0,1541176	0,0954198	0,2164551	0,0539532	0,2500000
1,9	1,0150387	0,1649999	0,0891265	0,2523720	0,0441325	0,2500000
1,9148542	1,0000000	0,1666666	0,0882353	0,2575758	0,0428571	0,2500000
2,0	0,9128710	0,1764706	0,0833333	0,2857143	0,0363247	0,2500000
2,1	0,8075312	0,1885294	0,0780031	0,3129395	0,0300947	0,2500000
2,2	0,6966927	0,2011764	0,0730994	0,3313727	0,0250986	0,2500000
2,3	0,5761616	0,2144117	0,0685871	0,3400370	0,0210687	0,2500000
2,4	0,4367177	0,2282352	0,0644330	0,3397303	0,0177979	0,2500000
2,5	0,2461829	0,2426470	0,0606060	0,3324176	0,0151262	0,2500000
2,5495100	0,0000000	0,2500000	0,0588235	0,3269231	0,0139860	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e nove pontos centrais.

Tabela 20 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=10$.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\beta_1)$	$V(\beta_2)$	$V(\beta_{11})$	$V(\beta_{22})$	$V(\beta_{12})$
0,0	2,6457514	0,05555555	0,2500000	0,0119047	0,3214286	0,2500000
0,1	2,6372761	0,05583333	0,2487562	0,0120585	0,3223311	0,2500000
0,2	2,6121888	0,05666666	0,2450980	0,0125281	0,3248441	0,2500000
0,3	2,5714669	0,05805555	0,2392345	0,0133394	0,3283522	0,2500000
0,4	2,5166115	0,06000000	0,2314815	0,0145369	0,3317410	0,2500000
0,5	2,4494900	0,06250000	0,2222222	0,0161870	0,3333333	0,2500000
0,6	2,3721551	0,06555555	0,2118644	0,0183818	0,3309603	0,2500000
0,7	2,2866826	0,06916666	0,2008032	0,0212447	0,3223312	0,2500000
0,8	2,1950359	0,07333333	0,1893939	0,0249381	0,3057730	0,2500000
0,9	2,0989747	0,07805555	0,1779359	0,0296719	0,2810954	0,2500000
1,0	2,0000000	0,08333333	0,1666666	0,0357142	0,2500000	0,2500000
1,1	1,8993361	0,08916666	0,1557632	0,0434022	0,2155916	0,2500000
1,2	1,7979321	0,09555555	0,1453488	0,0531504	0,1812412	0,2500000
1,3	1,6964812	0,10250000	0,1355013	0,0654516	0,1495573	0,2500000
1,4	1,5954482	0,11000000	0,1262626	0,0808583	0,1219751	0,2500000
1,4975448	1,4975448	0,1178511	0,1178511	0,0994147	0,0994147	0,2500000
1,5	1,4950900	0,11805555	0,1176470	0,0999308	0,0989011	0,2500000
1,6	1,3954818	0,12666666	0,1096491	0,1231241	0,0800871	0,2500000
1,7	1,2965271	0,13583333	0,1022495	0,1505939	0,0649756	0,2500000
1,8	1,1979627	0,14555555	0,0954198	0,1819213	0,0529282	0,2500000
1,9	1,0993437	0,15583333	0,0891265	0,2158207	0,0433456	0,2500000
2,0	1,0000000	0,16666666	0,08333333	0,2500000	0,0357142	0,2500000
2,1	0,8989509	0,17805555	0,0780031	0,2813921	0,0296160	0,2500000
2,2	0,7947198	0,1899999	0,0730994	0,3068568	0,0247192	0,2500000
2,3	0,6849354	0,2024999	0,0685871	0,3241102	0,0207648	0,2500000
2,4	0,5653215	0,21555555	0,0644330	0,3323795	0,0175520	0,2500000
2,5	0,4264014	0,22916666	0,0606060	0,3324176	0,0149253	0,2500000
2,6	0,2340826	0,24333333	0,0570776	0,3259726	0,0127644	0,2500000
2,6457514	0,0000000	0,25000000	0,05555555	0,3214286	0,0119047	0,2500000

Nota: A estes valores das variâncias multiplica-se σ^2/r .

* $\gamma=\delta$, delineamento composto central ortogonal com dois fatores e dez pontos centrais.

Tabela 21 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=1$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,5811388	0,2777777	0,2500000	0,8333333	0,4500001	0,6250001
0,1	1,5740432	0,2766667	0,2487562	0,8333134	0,4535970	0,6194030
0,2	1,5529856	0,2733333	0,2450980	0,8330030	0,4643388	0,6029411
0,3	1,5186245	0,2677778	0,2392345	0,8315938	0,4819691	0,5765551
0,4	1,4719603	0,2600000	0,2314815	0,8275296	0,5056633	0,5416667
0,5	1,4142136	0,2500000	0,2222222	0,8181819	0,5333334	0,5000001
0,6	1,3466846	0,2377777	0,2118644	0,7993997	0,5605940	0,4533898
0,7	1,2706131	0,2233333	0,2008032	0,7651269	0,5798448	0,4036144
0,8	1,1870515	0,2066666	0,1893939	0,7076585	0,5808550	0,3522728
0,9	1,0967440	0,1877777	0,1779359	0,6197730	0,5546859	0,3007118
1,0	1,0000000	0,1666666	0,1666666	0,5000000	0,5000000	0,2500000
1,1	0,8965147	0,1783333	0,1884734	0,5561006	0,6233924	0,3024999
1,2	0,7850348	0,1911110	0,2093023	0,5822706	0,7180494	0,3599998
1,3	0,6625893	0,2050000	0,2289973	0,5741993	0,7802271	0,4225000
1,4	0,5222332	0,2199999	0,2474747	0,5396435	0,8150035	0,4899999
1,5	0,3429971	0,2361111	0,2647058	0,4914966	0,8302962	0,5625001
1,5811388	0,0000000	0,2500000	0,2777777	0,4500001	0,8333333	0,6250001

Tabela 22 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=2$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,7320508	0,3000000	0,2500000	0,7500001	0,4166667	0,7500001
0,1	1,7248549	0,2990000	0,2487562	0,7499896	0,4194349	0,7437812
0,2	1,7035143	0,2960000	0,2450980	0,7498289	0,4276136	0,7254902
0,3	1,6687388	0,2910000	0,2392345	0,7491043	0,4407306	0,6961723
0,4	1,6216132	0,2839999	0,2314815	0,7470364	0,4576742	0,6574074
0,5	1,5634720	0,2750000	0,2222222	0,7423312	0,4761905	0,6111111
0,6	1,4957568	0,2640000	0,2118644	0,7329630	0,4922811	0,5593221
0,7	1,4198818	0,2510000	0,2008032	0,7158958	0,4999602	0,5040161
0,8	1,3371160	0,2360000	0,1893939	0,6868586	0,4922811	0,4469697
0,9	1,2484867	0,2190000	0,1779359	0,6404790	0,4643043	0,3896797
1,0	1,1547005	0,2000000	0,1666666	0,5714286	0,4166667	0,3333333
1,0780897	1,0780897	0,1837720	0,1837720	0,4999998	0,4999998	0,3377221
1,1	1,0560612	0,1790000	0,1884734	0,4773476	0,5216704	0,3373675
1,1547005	1,0000000	0,1666666	0,2000000	0,4166667	0,5714286	0,3333333
1,2	0,9523535	0,1719999	0,2093023	0,4414994	0,6074237	0,3599998
1,3	0,8426312	0,1845000	0,2289978	0,4829569	0,6695406	0,4225000
1,4	0,7247432	0,1980000	0,2474747	0,4997449	0,7100189	0,4899999
1,5	0,5940885	0,2125000	0,2647058	0,4914968	0,7336957	0,5625001
1,6	0,4392979	0,2279999	0,2807017	0,4649401	0,7455949	0,6399999
1,7	0,2121090	0,2444999	0,2955010	0,4289538	0,7497828	0,7224998
1,7320508	0,0000000	0,2500000	0,3000000	0,4166667	0,7500001	0,7500001

Tabela 23 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=3$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	1,8708288	0,3181818	0,2500000	0,7000000	0,3928571	0,8750001
0,1	1,8635013	0,3172727	0,2487562	0,6999938	0,3950894	0,8681592
0,2	1,8417809	0,3145455	0,2450980	0,6998971	0,4016240	0,8480391
0,3	1,8064215	0,3100000	0,2392345	0,6994640	0,4118956	0,8157895
0,4	1,7585768	0,3036363	0,2314815	0,6982375	0,4246973	0,7731481
0,5	1,6996731	0,2954546	0,2222222	0,6954733	0,4378110	0,7222223
0,6	1,6312625	0,2854546	0,2118644	0,6900228	0,4476495	0,6652543
0,7	1,5548861	0,2736364	0,2008032	0,6801724	0,4493135	0,6044176
0,8	1,4719603	0,2600000	0,1893939	0,6634545	0,4376751	0,5416667
0,9	1,3836874	0,2445454	0,1779359	0,6365156	0,4096865	0,4786477
1,0	1,2909944	0,2272727	0,1666666	0,5952382	0,3666667	0,4166666
1,1	1,1944839	0,2081818	0,1884734	0,5355331	0,4602270	0,4316043
1,1474426	1,1474426	0,1984885	0,1984885	0,4999998	0,4999998	0,4334203
1,2	1,0943834	0,1872727	0,2093023	0,4552829	0,5394276	0,4311627
1,2909944	1,0000000	0,1666666	0,2272727	0,3666667	0,5952382	0,4166666
1,3	0,9904696	0,1677272	0,2289973	0,3712821	0,5999087	0,4225000
1,4	0,8819173	0,1800000	0,2474747	0,4159662	0,6423221	0,4899999
1,5	0,7669650	0,1931818	0,2647058	0,4432514	0,6699248	0,5625001
1,6	0,6420911	0,2072727	0,2807017	0,4496575	0,6865363	0,6399999
1,7	0,4994890	0,2222727	0,2955010	0,4377486	0,6954929	0,7224998
1,8	0,3150186	0,2381818	0,3091603	0,4136976	0,6993451	0,8100000
1,8708288	0,0000000	0,2500000	0,3181818	0,3928571	0,7000000	0,8750001

Tabela 24 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=4$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\beta_1)$	$V(\beta_2)$	$V(\beta_{11})$	$V(\beta_{22})$	$V(\beta_{12})$
0,0	2,0000000	0,3333333	0,2500000	0,6666667	0,3750000	1,0000002
0,1	1,9925234	0,3325000	0,2487562	0,6666626	0,3768608	0,9925373
0,2	1,9703686	0,3300000	0,2450980	0,6665986	0,3822630	0,9705882
0,3	1,9343287	0,3258333	0,2392345	0,6663136	0,3905996	0,9354069
0,4	1,8856182	0,3200000	0,2314815	0,6655113	0,4006410	0,8888889
0,5	1,8257420	0,3125000	0,2222222	0,6637167	0,4102564	0,8333333
0,6	1,7563445	0,3033334	0,2118644	0,6602089	0,4162043	0,7711865
0,7	1,6790702	0,2925000	0,2008032	0,6539229	0,4143361	0,7048193
0,8	1,5954482	0,2800000	0,1893939	0,6433260	0,4006410	0,6363637
0,9	1,5068054	0,2658333	0,1779359	0,6262869	0,3731111	0,5676157
1,0	1,4142135	0,2500000	0,1666666	0,6000001	0,3333333	0,5000000
1,1	1,3184530	0,2325000	0,1884734	0,5611256	0,4190924	0,5258411
1,2	1,2199888	0,2133333	0,2093023	0,5064294	0,4934008	0,5358139
1,3	1,1189427	0,1925000	0,2289973	0,4342423	0,5520633	0,5289837
1,4	1,0150387	0,1700000	0,2474747	0,3466614	0,5950434	0,5048484
1,4142135	1,0000000	0,1666666	0,2500000	0,3333333	0,6000001	0,5000001
1,5	0,9074852	0,1770833	0,2647058	0,3705129	0,6246787	0,5625001
1,6	0,7947195	0,1900000	0,2807017	0,4017062	0,6440252	0,6399999
1,7	0,6737866	0,2037499	0,2955010	0,4158249	0,6559155	0,7224998
1,8	0,5385874	0,2183333	0,3091603	0,4131995	0,6626157	0,8100000
1,9	0,3728776	0,2337499	0,3217468	0,3978512	0,6658033	0,9024999
2,0000004	0,0000000	0,2500000	0,3333333	0,3750000	0,6666667	1,0000002

Tabela 25 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=5$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,1213207	0,3461538	0,2500000	0,6428571	0,3611112	1,1250002
0,1	2,1136846	0,3453846	0,2487562	0,6428542	0,3627009	1,1169157
0,2	2,0910639	0,3430769	0,2450980	0,6428092	0,3672814	1,0931372
0,3	2,0542874	0,3392307	0,2392345	0,6426086	0,3742278	1,0550241
0,4	2,0046243	0,3338461	0,2314815	0,6420469	0,3823170	1,0046296
0,5	1,9436507	0,3269231	0,2222222	0,6407983	0,3895131	0,9444445
0,6	1,8730924	0,3184615	0,2118644	0,6383750	0,3928537	0,8771187
0,7	1,7946820	0,3084615	0,2008032	0,6340658	0,3887305	0,8052208
0,8	1,7100417	0,2969231	0,1893939	0,6268553	0,3738726	0,7310607
0,9	1,6205968	0,2838461	0,1779359	0,6153252	0,3469054	0,6565836
1,0	1,5275251	0,2692307	0,1666666	0,5975611	0,3095238	0,5833333
1,1	1,4317281	0,2530769	0,1884734	0,5711234	0,3896256	0,6200778
1,2	1,3338182	0,2353846	0,2093023	0,5332106	0,4601767	0,6404651
1,2671035	1,2671035	0,2226498	0,2226498	0,4999998	0,4999998	0,6444486
1,3	1,2341132	0,2161538	0,2289973	0,4812259	0,5171629	0,6434824
1,4	1,1326203	0,1953846	0,2474747	0,4139674	0,5601558	0,6285859
1,5	1,0289914	0,1730769	0,2647058	0,3333333	0,5909092	0,5955882
1,5275251	1,0000000	0,1666666	0,2692307	0,3095238	0,5975611	0,5833333
1,6	0,9224302	0,1753846	0,2807017	0,3393033	0,6119616	0,6399999
1,7	0,8114724	0,1880768	0,2955010	0,3713913	0,6257834	0,7224998
1,8	0,6934812	0,2015384	0,3091603	0,3892973	0,6344224	0,8100000
1,9	0,5632858	0,2157692	0,3217468	0,3922970	0,6394404	0,9024999
2,0	0,4082483	0,2307692	0,3333333	0,3829787	0,6419754	1,0000000
2,1	0,1675753	0,2465384	0,3439937	0,3654966	0,6428335	1,1024999
2,1213207	0,0000000	0,2500000	0,3461538	0,3611112	0,6428571	1,1250002

Tabela 26 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=6$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\beta_1)$	$V(\beta_2)$	$V(\beta_{11})$	$V(\beta_{22})$	$V(\beta_{12})$
0,0	2,2360682	0,3571428	0,2500000	0,6250001	0,3500000	1,2500002
0,1	2,2282671	0,3564285	0,2487562	0,6249979	0,3513845	1,2412936
0,2	2,2051630	0,3542857	0,2450980	0,6249645	0,3553444	1,2156860
0,3	2,1676173	0,3507143	0,2392345	0,6248164	0,3612493	1,1746413
0,4	2,1169509	0,3457142	0,2314815	0,6244031	0,3678944	1,1203703
0,5	2,0548048	0,3392857	0,2222222	0,6234889	0,3733333	1,0555555
0,6	1,9829785	0,3314285	0,2118644	0,6217254	0,3748287	0,9830509
0,7	1,9032840	0,3221428	0,2008032	0,6186106	0,3691750	0,9056224
0,8	1,8174240	0,3114286	0,1893939	0,6134345	0,3536211	0,8257576
0,9	1,7269065	0,2992857	0,1779359	0,6052095	0,3272068	0,7455515
1,0	1,6329932	0,2857143	0,1666666	0,5925927	0,2916666	0,6666667
1,1	1,5366754	0,2707143	0,1884734	0,5738227	0,3674790	0,7143145
1,2	1,4386689	0,2542857	0,2093023	0,5467283	0,4350660	0,7451162
1,3	1,3394172	0,2364286	0,2289973	0,5089162	0,4905799	0,7579810
1,3197186	1,3197186	0,2327386	0,2327386	0,4999993	0,4999993	0,7583423
1,4	1,2390940	0,2171429	0,2474747	0,4583036	0,5333524	0,7523232
1,5	1,1375930	0,1964285	0,2647058	0,3941367	0,5647411	0,7279411
1,6	1,0344929	0,1742857	0,2807017	0,3183608	0,5869157	0,6849123
1,6329932	1,0000000	0,1666666	0,2857143	0,2916666	0,5925927	0,6666667
1,7	0,9289705	0,1746428	0,2955010	0,3177044	0,6020758	0,7224998
1,8	0,8196071	0,1871428	0,3091603	0,3492835	0,6120989	0,8100000
1,9	0,7039489	0,2003571	0,3217468	0,3687624	0,6184508	0,9024999
2,0	0,5773502	0,2142857	0,3333333	0,3750001	0,6222223	1,0000002
2,1	0,4290544	0,2289285	0,3439937	0,3697062	0,6242020	1,1024999
2,2	0,2162964	0,2442857	0,3538011	0,3561980	0,6249513	1,2099998
2,2360682	0,0000000	0,2500000	0,3571428	0,3500000	0,6250001	1,2500002

Tabela 27 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=7$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,3452081	0,3666666	0,2500000	0,6111111	0,3409091	1,3750002
0,1	2,3372392	0,3660000	0,2487562	0,6111094	0,3421330	1,3656718
0,2	2,3136425	0,3640000	0,2450980	0,6110838	0,3456094	1,3382351
0,3	2,2753095	0,3606666	0,2392345	0,6109703	0,3507083	1,2942585
0,4	2,2236108	0,3560000	0,2314815	0,6106543	0,3562471	1,2361111
0,5	2,1602468	0,3500000	0,2222222	0,6099586	0,3603604	1,1666667
0,6	2,0870871	0,3426666	0,2118644	0,6086231	0,3604938	1,0889833
0,7	2,0060153	0,3339999	0,2008032	0,6062783	0,3537520	1,0060241
0,8	1,9188065	0,3240000	0,1893939	0,6024056	0,3377649	0,9204546
0,9	1,8270409	0,3126667	0,1779359	0,5962893	0,3118594	0,8345196
1,0	1,7320508	0,3000000	0,1666666	0,5869566	0,2777777	0,7500000
1,1	1,6348998	0,2860000	0,1884734	0,5731170	0,3502262	0,8085511
1,2	1,5363807	0,2706667	0,2093023	0,5531260	0,4154199	0,8497672
1,3	1,4370250	0,2540000	0,2289973	0,5250269	0,4696574	0,8724795
1,3685698	1,3685698	0,2418010	0,2418010	0,4999997	0,4999997	0,8770165
1,4	1,3371160	0,2360000	0,2474747	0,4867624	0,5121151	0,8760606
1,5	1,2366938	0,2166666	0,2647058	0,4366925	0,5438675	0,8602941
1,6	1,1355502	0,1960000	0,2807017	0,3744931	0,5668107	0,8252632
1,7	1,0331919	0,1740000	0,2955010	0,3022726	0,5829361	0,7712578
1,7320508	1,0000000	0,1666666	0,3000000	0,2777777	0,5869566	0,7500001
1,8	0,9287601	0,1746667	0,3091603	0,3027592	0,5939852	0,8100000
1,9	0,8208515	0,1870000	0,3217468	0,3331608	0,6013436	0,9024999
2,0	0,7071068	0,2000000	0,3333333	0,3529412	0,6060607	1,0000002
2,1	0,5831757	0,2136666	0,3439937	0,3608740	0,6089068	1,1024999
2,2	0,4392983	0,2279999	0,3538011	0,3581612	0,6104385	1,2099998
2,3	0,2400285	0,2430000	0,3628258	0,3475079	0,6110541	1,3224997
2,3452078	0,0000000	0,2500000	0,3666666	0,3409091	0,6111111	1,3750002

Tabela 28 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=8$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,4494900	0,3750000	0,2500000	0,6000000	0,3333333	1,5000002
0,1	2,4413523	0,3743750	0,2487562	0,5999987	0,3344286	1,4900500
0,2	2,4172582	0,3725000	0,2450980	0,5999784	0,3375186	1,4607842
0,3	2,3781304	0,3693750	0,2392345	0,5998888	0,3419768	1,4138758
0,4	2,3253831	0,3650000	0,2314815	0,5996400	0,3466445	1,3518519
0,5	2,2607770	0,3593750	0,2222222	0,5990940	0,3497267	1,2777779
0,6	2,1862440	0,3525000	0,2118644	0,5980508	0,3488211	1,1949155
0,7	2,1037354	0,3443750	0,2008032	0,5962278	0,3412766	1,1064257
0,8	2,0150947	0,3350000	0,1893939	0,5932338	0,3250130	1,0151517
0,9	1,9219651	0,3243750	0,1779359	0,5885318	0,2995649	0,9234875
1,0	1,8257420	0,3125000	0,1666666	0,5813953	0,2666667	0,8333333
1,1	1,7275486	0,2993750	0,1884734	0,5708582	0,3364064	0,9027879
1,2	1,6282396	0,2850000	0,2093023	0,5556696	0,3996298	0,9544185
1,3	1,5284121	0,2693750	0,2289973	0,5342825	0,4527616	0,9869780
1,4	1,4284272	0,2525000	0,2474747	0,5049250	0,4948729	0,9997977
1,4142135	1,4142135	0,2499999	0,2499999	0,4999999	0,4999999	0,9999998
1,5	1,3284223	0,2343750	0,2647058	0,4658385	0,5268293	0,9926470
1,6	1,2283210	0,2150000	0,2807017	0,4157859	0,5503157	0,9656140
1,7	1,1278228	0,1943750	0,2955010	0,3548576	0,5671601	0,9190083
1,8	1,0263700	0,1725000	0,3091603	0,2853803	0,5789927	0,8532824
1,8257420	1,0000000	0,1666666	0,3125000	0,2666667	0,5813953	0,8333333
1,9	0,9230657	0,1753124	0,3217468	0,2925318	0,5871328	0,9024999
2,0	0,8164966	0,1875000	0,3333333	0,3214286	0,5925925	1,0000002
2,1	0,7043439	0,2003124	0,3439937	0,3407617	0,5961256	1,1024999
2,2	0,5823932	0,2137500	0,3538011	0,3493882	0,5982817	1,2099998
2,3	0,4413478	0,2278124	0,3628258	0,3482366	0,5994601	1,3224997
2,4	0,2487094	0,2424999	0,3711339	0,3395771	0,5999480	1,4399995
2,4494900	0,0000000	0,2500000	0,3750000	0,3333333	0,6000000	1,5000002

Tabela 29 -- Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=9$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\hat{\beta}_1)$	$V(\hat{\beta}_2)$	$V(\hat{\beta}_{11})$	$V(\hat{\beta}_{22})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
0,0	2,5495100	0,3823529	0,2500000	0,5909091	0,3269231	1,6250002
0,1	2,5412030	0,3817647	0,2487562	0,5909080	0,3279132	1,6144280
0,2	2,5166115	0,3799999	0,2450980	0,5908917	0,3306878	1,5833332
0,3	2,4766860	0,3770589	0,2392345	0,5908191	0,3346260	1,5334930
0,4	2,4228849	0,3729411	0,2314815	0,5906184	0,3385915	1,4675927
0,5	2,3570227	0,3676471	0,2222222	0,5901795	0,3408522	1,3888890
0,6	2,2810940	0,3611764	0,2118644	0,5893436	0,3391319	1,3008475
0,7	2,1971139	0,3535294	0,2008032	0,5878895	0,3309776	1,2068274
0,8	2,1069870	0,3447058	0,1893939	0,5855125	0,3145353	1,1098485
0,9	2,0124168	0,3347058	0,1779359	0,5817985	0,2894948	1,0124554
1,0	1,9148542	0,3235294	0,1666666	0,5761904	0,2575758	0,9166667
1,1	1,8154754	0,3111765	0,1884734	0,5679479	0,3250877	0,9970246
1,2	1,7151856	0,2976471	0,2093023	0,5561068	0,3866618	1,0590696
1,3	1,6146349	0,2829412	0,2289973	0,5394501	0,4388321	1,1014766
1,4	1,5142421	0,2670588	0,2474747	0,5165193	0,4805958	1,1235351
1,4570880	1,4570880	0,2574643	0,2574643	0,4999997	0,4999997	1,1268941
1,5	1,4142136	0,2500000	0,2647058	0,4857144	0,5126582	1,1250002
1,6	1,3145611	0,2317647	0,2807017	0,4455581	0,5365388	1,1059649
1,7	1,2151064	0,2123530	0,2955010	0,3951962	0,5539327	1,0667588
1,8	1,1154708	0,1917647	0,3091603	0,3351202	0,5663790	1,0078625
1,9	1,0150387	0,1700000	0,3217468	0,2678992	0,5751401	0,9298487
1,9148542	1,0000000	0,1666666	0,3235294	0,2575758	0,5761904	0,9166667
2,0	0,9128710	0,1764706	0,3333333	0,2857143	0,5811966	1,0000002
2,1	0,8075312	0,1885294	0,3439937	0,3129395	0,5852853	1,1024999
2,2	0,6966927	0,2011764	0,3538011	0,3313727	0,5879504	1,2099998
2,3	0,5761616	0,2144117	0,3628258	0,3400370	0,5895894	1,3224997
2,4	0,4367177	0,2282352	0,3711339	0,3397303	0,5904922	1,4399995
2,5	0,2461829	0,2426470	0,3787879	0,3324176	0,5908687	1,5625002
2,5495100	0,0000000	0,2500000	0,3823529	0,3269231	0,5909091	1,6250002

Tabela 30 - Variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no delineamento de três parâmetros, quando $P=10$, para o mesmo intervalo de comprimento.

Valor de γ	Valor de δ	$V(\tilde{\beta}_1)$	$V(\tilde{\beta}_2)$	$V(\tilde{\beta}_{11})$	$V(\tilde{\beta}_{22})$	$V(\tilde{\beta}_{12})$
0,0	2,6457514	0,3888888	0,2500000	0,5833333	0,3214286	1,7500002
0,1	2,6372761	0,3883333	0,2487562	0,5833325	0,3223311	1,7388062
0,2	2,6121888	0,3866666	0,2450980	0,5833190	0,3248441	1,7058823
0,3	2,5714669	0,3838889	0,2392345	0,5832592	0,3283522	1,6531105
0,4	2,5166115	0,3800000	0,2314815	0,5830941	0,3317410	1,5833334
0,5	2,4494900	0,3750000	0,2222222	0,5827339	0,3333333	1,5000002
0,6	2,3721551	0,3688889	0,2118644	0,5820503	0,3309603	1,4067797
0,7	2,2866826	0,3616666	0,2008032	0,5808652	0,3223312	1,3072290
0,8	2,1950359	0,3533333	0,1893939	0,5789366	0,3057730	1,2045455
0,9	2,0989747	0,3438888	0,1779359	0,5759369	0,2810954	1,1014235
1,0	2,0000000	0,3333333	0,1666666	0,5714286	0,2500000	1,0000000
1,1	1,8993361	0,3216667	0,1884734	0,5648324	0,3156475	1,0912613
1,2	1,7979321	0,3088889	0,2093023	0,5553927	0,3758215	1,1637208
1,3	1,6964812	0,2950000	0,2289973	0,5421462	0,4271506	1,2159755
1,4	1,5954482	0,2800000	0,2474747	0,5239086	0,4685793	1,2472724
1,5	1,4975448	0,2642976	0,2642976	0,4999998	0,4999998	1,2573589
1,6	1,3954818	0,2638889	0,2647058	0,4993084	0,5006868	1,2573528
1,7	1,2965271	0,2283334	0,2955010	0,4669169	0,5248590	1,2463159
1,8	1,1979627	0,2088889	0,3091603	0,4255335	0,5426824	1,2145094
1,9	1,0993437	0,1883333	0,3217468	0,3746767	0,5556193	1,1624429
2,0	1,0000000	0,1666666	0,3333333	0,3152296	0,5648840	1,0907223
2,1	0,8989509	0,1780555	0,3439937	0,2500000	0,5714286	1,0000002
2,2	0,7947198	0,1899999	0,3538011	0,2813921	0,5759754	1,1024999
2,3	0,6849354	0,2024999	0,3628258	0,3068568	0,5790619	1,2099998
2,4	0,5653215	0,2155555	0,3711339	0,3241102	0,5810846	1,3224997
2,5	0,4264014	0,2201666	0,3787879	0,3323795	0,5823339	1,4399995
2,6	0,2340826	0,2433333	0,3858448	0,3324176	0,5830224	1,5625002
2,6457514	0,0000000	0,2500000	0,3888888	0,3259726	0,5833061	1,6900000
				0,3214286	0,5833333	1,7500002