ESTIMADORES DE BAYES. APLICAÇÃO AO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

NEWMAN RIBEIRO SIMÕES

Orientador: Prof. Dr. Décio Barbin

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz», da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
julho, 1981

A meu pai (*in memoriam*)

A minha mãe

À Beth, minha esposa,

Ao Ricardo, meu filho,

pelo amor que nos une,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Décio Barbin, pela orientação segura e valiosa prestada em todo Curso de Pós-Graduação.

A todos os meus amigos e colegas do Curso e Colégio Luiz de Queiroz (CLQ), pela profícua convivência e pelo estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, pelas críticas, sugestões valiosas e pela elaboração do programa de computador.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela dedicação prestimosa na transmissão dos ensinamentos durante o Curso de Pós-Graduação.

Ao Professor Dr. Rodolfo Hoffmann, pelas sugestões críticas.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, pela amizade e pela admirável precisão na datilografia deste trabalho.

Aos meus familiares, pela compreensão e o incentivo constante.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1 - Elementos do Método de Bayes	4
2.2 - Teoria da Informação e Informação "A Priori"	9
2.3 - Estimadores de Bayes e Aplicação em Regressão Linear	13
2.4 - Generalidades	16
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	18
3.1 - Elementos do Método Bayesiano em Problemas de Estimação	18
3.1.1 - O teorema de Bayes	18
3.1.2 - O método bayesiano na estimação de parâmetros	24
3.1.2.1 - A estimação como processo de tomada de decisão	24
3.1.2.2 - Estimadores de Bayes	27
3.1.2.3 - Especificação da Função Perda ...	29
3.2 - A Distribuição "A Priori"	34
3.2.1 - Generalidades	34
3.2.2 - O conceito de informação contida na amostra	37
3.2.3 - Ausência de informação "a priori"	47
3.2.4 - Distribuições conjugadas	53
3.3 - Aplicações em Modelo de Regressão Linear Simples ..	56

	Pág.
3.3.1 - O modelo e pressuposições	56
3.3.2 - Uso da f.d.p. indicando ausência de informação "a priori"	57
3.3.2.1 - F.D.P.s marginais "a posteriori" para os parâmetros	61
3.3.2.2 - Estimadores de Bayes para os parâmetros	63
3.3.2.3 - Testes de hipóteses a respeito dos parâmetros	65
3.3.2.4 - Intervalos de confiança para os parâmetros	72
3.3.2.5 - Intervalo de previsão	74
3.3.3 - Uso da f.d.p. "a priori" informativa	77
3.3.3.1 - F.D.P. "a priori" normal para os coeficientes e variância residual conhecida	77
3.3.3.2 - Uso da Distribuição Conjugada ...	84
4. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO DE DADOS	91
4.1 - Obtenção dos Dados	91
4.2 - Resultados	94
4.3 - Exemplo Ilustrativo	100
4.4 - Discussão dos Resultados	109
4.4.1 - Estimativas dos parâmetros	109

4.4.2 - Estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros	111
4.4.3 - Intervalos de Confiança para os parâmetros..	113
4.4.4 - Resultados gerais sobre a Análise de Regressão Simulada	113
4.5 - Sugestões Para Outros Estudos	115
5. CONCLUSÕES	117
6. LITERATURA CITADA	120
APÊNDICE I: PROGRAMA UTILIZADO NA SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	127
APÊNDICE II: REGRESSÕES COM VARIÂNCIAS DIFERENTES	131

ESTIMADORES DE BAYES. APLICAÇÃO AO MODELO DE REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

Autor: Newman Ribeiro Simões

Orientador: Dr. Décio Barbin

R E S U M O

Este estudo apresenta, através de revisão bibliográfica, os elementos do método de Bayes em problemas de estimação de parâmetros, assunto pouco difundido na língua portuguesa.

O desenvolvimento teórico mostra, de um modo geral, como as informações anteriores a um experimento são incorporadas às informações provindas de um experimento atual, através do Teorema de Bayes. São definidas Função Perda e Função Risco, mostrando como são obtidos os estimadores de Bayes quando se utiliza a função perda quadrática. Atenção particular é dada ao estudo da distribuição "a priori", reunindo algumas conclusões de trabalhos sobre informação contida na amostra e sobre a distribuição "a priori" nas situações em que não se dispõe de informação prévia sobre os parâmetros. Dispondo de informações prévias, mostra-se como o método

de Bayes pode utilizá-las, através das chamadas Distribuições Conjugadas.

Os conceitos gerais do método bayesiano são aplicados na estimação de parâmetros em Modelo de Regressão Linear Simples, encontrando-se, no caso de função perda quadrática, os estimadores de Bayes, as funções de densidade de probabilidade "a posteriori", os testes de hipóteses, intervalos de confiança para os parâmetros e intervalo de previsão, nas situações em que a distribuição "a priori" indica ignorância sobre os parâmetros, e em que essa distribuição é informativa.

Experimentos são simulados para mostrar o comportamento das estimativas de Bayes em relação às estimativas de mínimos quadrados, particularmente no caso em que se dispõem de pequenas amostras atuais e informações prévias fidedignas, e na hipótese de que os coeficientes de regressão e as variâncias são os mesmos para as duas amostras. A robustez do método é verificada no caso em que esta hipótese é violada, modificando-se a variância dos dados da "amostra atual" em relação aos dados da "amostra prévia". Um método aproximado para a análise desta última situação é indicado.

BAYES' ESTIMATORS. APPLICATION TO THE UNIVARIATE LINEAR REGRESSION MODEL

Author: Newman Ribeiro Simões

Adviser: Dr. Décio Barbin

S U M M A R Y

This study shows, through bibliographical revision, how the elements of Bayes' method are used in problems of parameter estimation, matter little diffused in portuguese language.

The theoretical development shows, by and large, how previous information can be incorporated to an actual experiment, through Bayes' theorem. Bayes' estimators based on quadratic loss are obtained with particular attention to prior distributions analysis, gathering some conclusions about information within sample and how to consider prior distributions in situations where no prior information do exist about parameters. Otherwise we show how to use Bayes' method, through Conjugated Distributions, when we do have prior information.

The general concepts of Bayesian Method are applied

to the parameter estimation in the Univariate Normal Linear Regression Model, in the case of quadratic loss function. We look at Bayes' estimators, the posterior probability density functions, hypothesis tests, confidence intervals for the parameters and predictive interval, in situations in which the prior distributions indicate ignorance about the parameters and when this distribution is informative.

Experiments are simulated to show the behaviour of Bayes' estimators compared to the least squares method, particularly in the case in which we have actual small sample size and creditable previous samples, and assuming regression coefficients and the variances being the same in the two samples. The robustness of the method is verified when this hypothesis is violated, changing the variance of the data of the actual sample compared to data of the past sample. An approximated method to deal with this last situation is indicated.

1. INTRODUÇÃO

Ao delinear um experimento, estabelecer um modelo matemático, estimar parâmetros, elaborar testes de hipóteses e analisar resultados, o estatístico utiliza teorias disponíveis, corroboradas pela evidência da aplicação prática. À medida que estuda um fenômeno particular, o pesquisador incorpora novos conhecimentos sobre o mesmo e amplia sua visão sobre a relação que este fenômeno mantém com as situações mais gerais. É frequente, por exemplo, o estudioso sentir, por simples análise dos resultados, que o experimento não foi bem conduzido, ou que o modelo matemático foi inadequado. Entretanto, uma vez delineado o experimento, estabelecido o modelo matemático consoante com os fundamentos teóricos, as conclusões ficam restritas ao conjunto dos dados amostrais. Mas, em muitas aplicações, o pesquisador dispõe de informações fidedignas provindas de experiências ante-

riores e que podem ser úteis para aumentar a precisão das estimativas, particularmente no caso de, no momento, só poder contar com pequenas amostras.

O método bayesiano considera, sob o enfoque da Teoria da Decisão, a possibilidade de incorporar na análise ambos os tipos de informações: "anterior" ao experimento (por meio da expressão matemática da distribuição "a priori") e da evidência da experiência (através da função de verossimilhança da amostra), fornecendo a "distribuição 'a posteriori'".

Embora relativamente recente, o enfoque bayesiano da Estatística tem recebido contribuição crescente nos mais variados aspectos como a estimação de parâmetros, o da amostragem, o do estudo dos componentes de variância, testes de hipóteses, etc., o que se pode observar pelas publicações em livros e revistas especializadas. Entretanto, a revisão bibliográfica nos indica que com muito pouco podemos contar na literatura em português.

Como é um método que veio ampliar as perspectivas de alguns aspectos da análise estatística, onde é de notória eficácia e, pelo fato de avançar rapidamente nas conquistas teóricas, é preciso abrir discussão a respeito e avaliar a sua utilização nas aplicações práticas, testar a sua eficiência e delimitar as suas restrições.

Cabe ressaltar que o método bayesiano não se contrapõe à Estatística Clássica, mas a amplia e lhe dá um aspecto particular. É lógico que para este avanço se processar foi necessário não

só aparecerem novas fórmulas de trabalhoso manejo algébrico, como também a reformulação de todo um conjunto de princípios e atitudes diante dos problemas científicos da Estatística.

O objetivo principal deste trabalho é discutir alguns aspectos gerais do processo de estimação bayesiano, reunindo diversos temas tratados em livros textos e artigos pouco divulgados na língua portuguesa. Sem a preocupação de apresentar coisas inéditas, procurou-se aplicar o método de Bayes em uma situação particular, não muito explorada, que é o da estimação de parâmetros em regressão linear simples. Em virtude disto procurou-se acentuar a importância da revisão bibliográfica, preparando o campo àqueles que tenham interesse em se aprofundar no assunto.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo é uma fonte indicadora de bibliografia para quem tiver necessidade de aprofundar os assuntos tratados nos capítulos seguintes. Não se trata, portanto, de leitura obrigatória para compreensão do conteúdo deste trabalho.

2.1 - Elementos do Método de Bayes

Os fundamentos do método bayesiano, nos seus aspectos gerais, e os elementos necessários para um estudo inicial, podem ser encontrados nos trabalhos a seguir.

BARNARD (1958) escreve nota bibliográfica como introdução à republicação do trabalho do Reverendo Thomas Bayes, em 1763, na qual desenvolve uma série de proposições a respeito da adição e multiplicação de probabilidades, para concluir com o Teorema da Probabilidade Inversa.

JEFFREYS (1948), em livro texto com primeira edição em 1939, sistematiza e amplia os conceitos relativos à inferência in dutiva e utiliza o teorema de Bayes para formalizar os mais diversos empregos da Matemática Estatística sob este novo enfoque, sendo considerado, ao lado de Savage e Wald, como precursor de métodos alternativos à Estatística Clássica.

WALD (1939) comenta restrições de Neyman e Pearson a respeito de testes de hipóteses que, na determinação da região de re jeição do teste, depende do valor verdadeiro do parâmetro (para tornar mínima a probabilidade do erro tipo II). Introduz o conceito de "função ponderadora" ("weighted function"), que expressa a importância relativa do erro cometido ao se aceitar uma hipótese quando um valor particular do parâmetro é verdadeiro. A partir daí, e considerando a distribuição "a priori" para o parâmetro, formula as bases para o enfoque do teste de hipóteses através da teoria da decisão. Associado ao problema de escolher um "sistema admissível de região de aceitação", desenvolve o conceito de melhor estimador, demonstrando teoremas sobre suas propriedades. Mais tarde (1950), o mesmo autor completa este assunto em livro texto, concluindo que, com estes novos elementos, o melhor estimador para o verdadeiro valor desconhecido do parâmetro é o estimador de Bayes.

SAVAGE (1954), em livro texto, apresenta conceitos fundamentais para o desenvolvimento de tópicos como o de amostragem, estimação por pontos, testes de hipóteses e estimação por intervalo,

através do enfoque da Teoria da Decisão. Apresenta algumas definições e discute as maneiras através das quais podem ser entendidos, sob o aspecto formal da matemática, conceitos como os de probabilidade subjetiva, de utilidade e de função perda. O conteúdo do trabalho tem a maior importância pela maneira como é apresentado, solicitando do leitor uma postura diferente em relação aos problemas da Estatística para a aceitação do método Minimax que o autor desenvolve, e que requer bases e fundamentos semelhantes aos do método de Bayes.

BARNARD (1954) apresenta alguns resultados obtidos por WALD (1950) e LINDLEY (1953), de forma simplificada na sua demonstração, e amplia outros conceitos sobre funções de decisão estatística como generalização do lema fundamental de Neyman e Pearson. O autor demonstra um lema geométrico, a partir do qual o instrumento matemático utilizado na demonstração de um lema estatístico é simplificado.

PRATT, RAIFFA e SCHLAIFER (1964) desenvolvem os fundamentos da decisão em condições de incerteza, pela regra de Bayes, a partir de dois princípios que afirmam que quem decide pode encontrar sua escala de preferências sobre as consequências de sua decisão e julgamentos com relação a eventos não possíveis, baseados em experimento fictício, com ocorrências subjetivas e igualmente prováveis. Mostram que os dois princípios de comportamento consistente requerem que a escala de julgamento de quem decide deve obedecer aos axiomas de probabilidade, e que concordam com a usual definição de probabilidade condicional e com as regras de Bayes.

LINDLEY (1965) assume o enfoque bayesiano como base para todo um livro texto dividido em duas partes. A primeira abordando os conceitos usuais do estudo de probabilidade, dando ênfase especial à interpretação do Teorema de Bayes e suas aplicações naqueles conceitos. A segunda parte, dedicada à Inferência Estatística, desenvolve e aprofunda a maneira bayesiana de análise, sempre comparando com os métodos usuais da verossimilhança e dos mínimos quadrados. Embora tenha considerado praticamente só o caso de distribuição "a priori" indicando "ignorância" ou vago conhecimento, em nosso ponto de vista esta é uma obra indispensável à iniciação do estudo sob este enfoque da Inferência Estatística.

FERGUSON (1969) apresenta a Estatística Matemática, toda ela sob o ponto de vista da Teoria da Decisão introduzida por Wald. Um livro texto que aborda de maneira profunda os aspectos da Matemática envolvidos nos conceitos de probabilidade e estatística, sendo particularmente útil na abordagem formal dos conceitos de Utilidade e Probabilidade Subjetiva, usados no desenvolvimento dos processos Minimax e de Bayes. A leitura deste trabalho exige, para bom aproveitamento, o conhecimento avançado em probabilidade, análise no espaço euclidiano e conhecimento dos tópicos usuais da Estatística Matemática.

Em ZACKS (1971) encontra-se uma abordagem mais profunda sobre os métodos de Inferência Estatística, incluindo capítulos especiais ao processo Minimax e ao método de Bayes.

MOOD e GRAYBILL (1972) apresentam, em livro texto (Capítulo 8), as definições básicas para o entendimento e aplicação da Teoria da Decisão e, conseqüentemente, do método bayesiano de estimação. Função perda, função risco e risco esperado, são conceitos desenvolvidos e de fácil compreensão, sem, contudo, aprofundar suas aplicações, citando o método bayesiano, sem assumi-lo no restante da abordagem.

De maneira semelhante o fazem FREEMAN (1963) e HOOG e CRAIG (1959), em seus livros textos. WONNACOTT e WONNACOTT (1976), também em livro texto sobre Econometria (Capítulo 10), apresentam uma introdução à Teoria da Decisão, com exemplos simples de aplicação do método bayesiano de estimação e de testes de hipóteses.

SILVEY (1978), em monografia sobre Probabilidade Aplicada e Estatística, dedica o Capítulo 10 ao enfoque bayesiano, aprofundando alguns conceitos, como escolha da distribuição "a priori", distribuição "a priori" imprópria e intervalo de confiança bayesiano. No capítulo seguinte apresenta uma introdução à Teoria da Decisão, abordando aspectos como os de função de decisão, função risco, problemas de decisão sequencial de Bayes. O "processo Minimax" de decisão, que se baseia nos mesmos conceitos iniciais do método de Bayes, é apresentado.

2.2 - Teoria da Informação e Informação "a priori"

McMILLAN (1953) descreve os modelos matemáticos sob os quais a teoria da comunicação é baseada e apresenta uma exposição com certos detalhes e crítica parcial do tratamento de Shannon para cada problema. O trabalho parte da colocação de uma mensagem transmitida estocasticamente e chega a uma descrição matemática que possibilita o tratamento estatístico desta situação. Apresenta o conceito de entropia, com especificação de entropia marginal e entropia condicional média. Um teorema geral é desenvolvido para a teoria de processos estocásticos discretos.

LINDLEY (1956) introduz uma medida de informação fornecida por um experimento, a partir do trabalho de Shannon e que, para delinear o experimento, exige o conhecimento "a priori" (expresso através da distribuição de probabilidade "a priori" sobre o espaço paramétrico). Estabelece, como aplicação desta medida de informação, uma solução para alguns problemas de delineamento experimental quando o objetivo do experimento não é tomar decisões, mas adquirir conhecimento sobre o estado da natureza, objeto da pesquisa. O autor coloca, como condição básica para o estudo da informação, a aceitação da distribuição de probabilidades "a priori", e utiliza o teorema de Bayes para definir a quantidade de informação após a realização do experimento. Algumas definições e certas propriedades são formalizadas por teoremas que permitem comparar as informações provin-

das de diversos experimentos. Exemplos são apresentados na situação em que duas consequências elementares são justificadas pelos conceitos apresentados, não envolvendo considerações de risco ou custo de experimentação, mas apenas a de ganhar e medir informação sobre o estado da natureza. São elas: a) entre vários experimentos será escolhido aquele em que a quantidade média de informação é maior; b) o estatístico termina o experimento quando tiver obtido informação suficiente.

Em 1957, LINDLEY discute métodos de amostragem em população binomial, com a finalidade de obter uma precisão pré-estabelecida ao se procurar encontrar a proporção desconhecida de uma característica estudada. Utiliza o conceito de Informação, devido a Shannon, e o conceito de medida de informação provinda de um experimento, apresentado pelo autor em 1956, a relação entre estes e o conceito de informação de Fisher para caracterizar esquemas amostrais. Estabelece a equivalência assintótica da variância "a posteriori" do parâmetro e a variância de um estimador assintoticamente eficiente do mesmo.

RAIFFA e SCHLAIFFER (1961), em livro texto, com abordagem ampla sobre aplicações da Teoria Estatística da Decisão, apresentam uma forma especial de distribuição "a priori conjugada" para representar a informação que se obtém através de experimentos anteriores. A distribuição "a priori conjugada" é admitida da mesma forma que aquela indicada pela verossimilhança da amostra e permite ob

ter, através do método de Bayes, distribuição "a posteriori" da mesma forma. Todas as distribuições fundamentais de uso na Estatística são estudadas com este tipo de distribuição "a priori". Um aspecto interessante sobre como obter informação com finalidade de se tomar decisões através de amostragem é desenvolvido. RAIFFA (1977), em livro texto, apresenta esta última abordagem sem considerar os aspectos matemáticos em profundidade, e fornecendo orientação no processo de tomada de decisão.

Propriedades de invariância de transformações bayesianas sobre o parâmetro, quando se usa a distribuição "a priori" proposta por JEFFREYS (1948) para representar ausência de informação prévia (ou "ignorância") a respeito do parâmetro, são desenvolvidas por HARTIGAN (1964). O mesmo autor, em 1965, considerando estas condições, discute e propõe uma forma de densidade de probabilidade "a priori" que minimiza assintoticamente o "viés" do estimador associado.

BARTHOLOMEW (1965) considera o problema de inferência sobre um único parâmetro, do qual depende a distribuição de uma variável aleatória, quando nenhuma informação "a priori" é disponível. Discute exemplos em que não é possível encontrar, pelo método bayesiano, propriedades requeridas pelos métodos clássicos. A magnitude da diferença entre afirmações probabilísticas pelos dois métodos é calculada discutindo a discrepância entre as duas teorias e sugerindo que é consequência da fixação do tamanho dos experimentos amostrais.

WINKLER (1967) focaliza a determinação da distribuição "a priori" e alguns problemas da determinação que aparecem quando aquele que toma decisões deseja quantificar opiniões em condições de incerteza. Considera uma série de técnicas de determinação em problemas estatísticos, juntamente com a instrução necessária que estas técnicas exigem para serem entendidas e aplicadas. Desenvolve um questionário que é usado em estudo no qual uma pessoa determina distribuições de probabilidades anteriormente à realização de um experimento e os resultados indicam que, na maioria dos casos, é factível na determinação de distribuições de probabilidades subjetivas "a priori". Apresenta um questionário revisado com indicações de seu uso potencial e sugere futuras pesquisas sobre o assunto estudado.

AKAIKE (1978) considera distribuição de probabilidade sobre o espaço paramétrico, ao obter estimativa da distribuição de uma futura observação, justificando assim o uso do procedimento bayesiano na Inferência Estatística. Desenvolve um procedimento objetivo na avaliação da distribuição "a priori" indicando "ignorância" a respeito dos parâmetros e interpretada como distribuição imparcial. Utiliza o conceito de entropia na escolha da "função ganho" ao tomar uma densidade como estimativa da verdadeira densidade de probabilidade de uma distribuição.

2.3 - Estimadores de Bayes e Aplicação em Regressão Linear

O método Bayesiano é utilizado por EVANS (1964) para encontrar novas formas gerais de estimadores da variância de distribuição normal e as condições sob as quais estas formas conduzem a estimadores, anteriormente proposto por GOODMAN, comparando diversas funções perda. Utiliza densidade "a priori" conjugada.

PRATT (1965) apresenta interpretações bayesianas sobre as afirmações padrões da inferência estatística. Estimação, estatísticas suficientes, estimador imparcial, estimador consistente, região de confiança e nível de significância em testes de hipóteses, são conceitos que o autor apresenta sob o ponto de vista do método de Bayes.

BICKEL e BLACKWELL (1967) desenvolvem teoremas envolvendo estimadores de Bayes não tendenciosos e mostram que o risco de Bayes é nulo se a função perda é quadrática.

EFRON e MORRIS (1971) consideram o problema de estimação bayesiana da média da distribuição normal quando a distribuição "a priori" da própria média é normal. Mostram que o estimador usual de Bayes, nesta situação, apresenta alto risco se a verdadeira média é afastada da média da distribuição "a priori". Sugerem regras que não apresentam esta propriedade indesejável.

TIAO e ZELLNER (1964) utilizam o enfoque bayesiano para combinar a informação obtida pela amostra como conhecimento pré

vio para se fazer inferências sobre os parâmetros do modelo de regressão em amostragem subsequente. Os autores consideram diversas situações com relação às variâncias, conforme as duas amostras possam ou não serem consideradas da mesma população. Generalizam as conclusões para o caso de vários conjuntos de experimentos serem conduzidos em sequência ou não, mas em condições completamente diferentes. Expressão de aproximação assintótica é deduzida para superar complicações de cálculos no caso de muitos experimentos, principalmente quando o número de parâmetros é elevado. Os autores citam conclusões semelhantes obtidas por THEIL (1963) através de método não-bayesiano e apresentam exemplo de aplicação.

Em 1965, ZELLNER e CHETTY revisam a dedução da função de densidade de previsão do modelo de regressão múltipla, estabelecendo teorema geral sobre previsão ótima por pontos e mostram como esta densidade de previsão pode ser empregada em análise de problemas econométricos de investimento. De maneira semelhante, os autores desenvolvem a função de densidade de previsão em modelos de regressão multivariada e indicam seu uso em uma série de problemas.

LINDLEY e EL-SAYYAD (1968) desenvolvem o método bayesiano aplicado à estimação de relação funcional linear; HARTIGAN (1969) propõe a aplicação do método em previsões lineares; LINDLEY e SMITH (1972) determinam os estimadores de Bayes em regressão múltipla e SMITH (1973) amplia este estudo, observando com mais detalhes algumas propriedades gerais dos estimadores resultantes e compara,

com exemplo, os resultados com aqueles obtidos pelo método dos mínimos quadrados.

ZELLNER (1971) desenvolve um trabalho criterioso, abordando praticamente todos os aspectos da Inferência Estatística através do método de Bayes na Econometria. Após tratar dos princípios bayesianos em geral, a aplicação é apresentada em alguns tópicos da análise de regressão, abordando os casos de erros autocorrelacionados, erros nas variáveis, modelos de séries temporais, modelos de regressão multivariada, modelos de equações simultâneas e testes de hipóteses, sob o ponto de vista bayesiano.

ROTHERBERG (1973) desenvolve interessante trabalho sobre o uso de informação "a priori" para se obter estimação eficiente por pontos, com aplicações em análise de regressão na Econometria e dá ênfase especial ao problema das equações simultâneas. Analisa como as informações, disponíveis antes de se realizar o experimento, podem ser incorporadas no modelo pela teoria clássica da estimação, como é o caso da identificação dos parâmetros estruturais das equações simultâneas. Por outro lado, quando informações extras sobre os parâmetros são disponíveis, o método bayesiano é proposto como alternativa eficiente de análise e exemplo numérico de aplicação é apresentado, comparando os resultados da estimação pelos dois processos.

2.4 - Generalidades

Alguns tópicos mais específicos são encontrados em:

AITCHISON (1964) que, comentando as dificuldades de formulação, desenvolvimento e interpretação da região de tolerância pela teoria clássica, propõe a análise deste problema sob o ponto de vista bayesiano, indicando suas vantagens ao selecionar uma região ótima entre um conjunto de possíveis regiões de tolerância. THATCHER (1964), que analisa as relações entre previsão de Bayes e limite de confiança na situação em que, dado um número de sucessos em amostra aleatória, os limites de previsão podem ser determinados para o número que será observado na amostra subsequente, por um caminho que não depende de suposições ou inferência sobre a proporção desconhecida na população. Duas diferentes distribuições "a priori" são utilizadas para a regra de sucessão de Laplace e os resultados sugerem um tipo de "estratégia de previsão". O autor compara os valores numéricos das duas espécies de limites e explora a diferença conceitual entre ambos, mostrando que, para alguns casos, os resultados e interpretações são completamente diferentes.

PLACKETT (1966) explora as diferenças de opiniões e enfatiza as concordâncias entre a análise bayesiana, e a clássica. Discute alguns tópicos específicos, como a distribuição "a priori" e a obtenção de famílias de densidade conjugada.

LINDLEY (1972) revisou, de maneira geral, os mais variados aspectos da estatística bayesiana através de monografia em que

compara a eficiência deste enfoque com o da estatística clássica, usando argumentos puramente teóricos. É um importante trabalho que sintetiza as conquistas do método bayesiano, bem como suas limitações atuais, comentando e orientando sobre os trabalhos publicados a respeito de cada item abordado. Uma bibliografia com indicação de 270 trabalhos é apresentada no final.

Finalmente citam-se algumas fontes que possibilitam a comparação do método bayesiano com os métodos clássicos, em questões importantes que se colocam na própria base de formulação conceitual de cada um dos processos. ZELLNER (1974) faz um comentário comparativo em problemas de Econometria, e TIAO e BOX (1974) comentam os estimadores de Bayes.

Alguns comentários sobre assuntos específicos, mas que chegam a alcançar um aspecto de confronto entre bayesianos e não-bayesianos na formulação geral dos métodos, podem ser de interesse e encontrados nas discussões, por vários autores, de alguns artigos já mencionados anteriormente, como em AITCHISON (1964), BORCH (1967), LINDLEY e SMITH (1972), PLACKETT (1966), PRATT (1965) e THATCHER (1964).

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 - Elementos do Método Bayesiano em Problemas de Estimação

3.1.1 - O Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes (algumas vezes chamado de Regra de Bayes ou Princípio da Probabilidade Inversa) foi estabelecido pelo Reverendo Thomas Bayes (1702-1761) no artigo "An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances" publicado postumamente (1763) e republicado em *Biometrika* (1958).

Basicamente o Teorema de Bayes é empregado na solução do seguinte problema: seja um evento aleatório E e sejam $A_1; A_2; \dots; A_n$ eventos exaustivos e mutuamente exclusivos de um espaço amostral S , tomados "a priori" como causas de E ; com a realização de um experimento de resultado E , qual a probabilidade de que tenha sido causado por A_i ?

Figura 1 - Ilustração da demonstração do Teorema de Bayes.

P.S. Laplace, em *Théorie Analytique des Probabilités*, 1812, o enunciou explicitamente e, de maneira simples, é assim desenvolvido:

$$E = S \cap E = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap E$$

$$E = (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup \dots \cup (A_n \cap E)$$

onde os $(A_i \cap E)$ são mutuamente exclusivos (Figura 1).

Sejam: $P(A_i)$ a probabilidade "a priori" de A_i (ou seja, na ignorância da realização de E); $P(E|A_i)$ a probabilidade condicional de E quando produzido pela causa A_i ; $P(A_i|E)$ a probabilidade "a posteriori" de A_i (isto é, sua probabilidade dado que E foi verificado).

Assim:

$$P(E) = P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + \dots + P(A_n \cap E)$$

$$P(E) = P(A_1) \cdot P(E|A_1) + P(A_2) \cdot P(E|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(E|A_n)$$

E, como

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i \cap E)}{P(E)} \quad \text{e} \quad P(A_i \cap E) = P(A_i) \cdot P(E|A_i) ,$$

tem-se:

$$P(A_i|E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{P(A_1) \cdot P(E|A_1) + P(A_2) \cdot P(E|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(E|A_n)}$$

$$\therefore P(A_i|E) = \frac{P(A_i) \cdot P(E|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(E|A_j)} \quad (1.1)$$

A utilização deste teorema como fundamento do método bayesiano na Estatística só foi possível com a evolução do conceito de probabilidade, baseado em frequência relativa da ocorrência de eventos, para aquele que axiomatiza a teoria da medida de conjuntos (Kolmogoroff) e para outros conceitos mais atuais, como o da probabilidade subjetiva. Particularmente, o conceito indutivo de probabilidade sistematizado por J.M. Keynes (1921) permitiu um avanço para que Jeffreys, com sua teoria da Inferência Indutiva, criasse as bases fundamentais para o emprego do teorema de Bayes em diversos aspectos da Inferência Estatística. Seu conceito fundamental é o de "grau de confiança" ("degree of belief") em uma proposição que satisfaz certas regras de consistência e pode, em consequência destas regras, ser expressa formalmente por números⁽¹⁾.

(1) Uma apresentação detalhada pode ser encontrada em SAVAGE (1954) página 27, sobre probabilidade subjetiva.

Assim, passemos de eventos para proposições e de probabilidade de eventos para probabilidades de proposições que representam nosso "grau de confiança" na proposição e que é condicional ao nosso estado atual de informação sobre a mesma.

O Teorema de Bayes é usado para tornar operacional e quantitativo o processo de modificar probabilidade (representando "grau de confiança" em proposições) tendo em vista a incorporação de novas informações (geralmente como resultados de experimentos, considerações teóricas ou mesmo observação casual), como se pode observar no esquema da Figura 2, apresentado por ZELLNER (1971).

Figura 2 - O processo de revisão da probabilidade através de novos dados, pelo Teorema de Bayes.

Para utilizarmos (1.1) na estimação de parâmetros e descrever funções de densidade de probabilidade (f.d.p), consideremos os seguintes elementos:

a) Espaço Paramétrico (Ω): constituído por todos os valores possíveis do parâmetro (θ), que é também chamado de "estado da natureza".

b) Espaço Amostral (S): constituído por todos os valores que pode assumir a variável aleatória X , cuja distribuição de probabilidade depende do estado da natureza (θ).

O método bayesiano considera θ como variável aleatória que tem distribuição de probabilidade sobre Ω . Como parâmetros são definidos como números fixos, esta consideração pode causar controvérsias se não entendida pelo prisma de "grau de confiança" em uma proposição. Sendo um parâmetro, θ representa o estado real da natureza e não significa que ocorra com certa probabilidade. Apenas que, tendo o seu valor verdadeiro desconhecido, pode ser tomado como variável aleatória pelos Estatísticos que decidem em situações de incerteza.

Assim representamos:

a) $\pi(\theta|I_0)$: F.D.P. "a priori", que representa nosso "grau de confiança para os possíveis valores do parâmetro", baseado em nossa informação inicial I_0 (antes de conhecer a informação proveniente do experimento). (2)

b) $p(x|\theta)$: função de verossimilhança da amostra.

c) $\pi(\theta|x;I)$: F.D.P. "a posteriori", que representa nosso "grau de confiança" para o parâmetro, após incorporar à nossa informação inicial (I_0) a informação proveniente do experimento.

(2) Para maiores detalhes sobre a informação "a priori" e a f.d.p. "a priori", designamos um item específico, adiante.

Podemos estabelecer o teorema para variáveis aleatórias contínuas, sendo que θ e x podem representar valores singulares ou vetores aleatórios para os parâmetros e observações⁽³⁾.

Desta forma:

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta) \cdot p(x|\theta)}{p(x)} \quad (1.2)$$

onde $p(x) = \int_{\Omega} \pi(\theta) \cdot p(x|\theta) d\theta$.

A expressão (1.2) pode ser escrita na forma:

$$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) \cdot p(x|\theta) \quad , \quad (1.3)$$

onde $\propto$ indica proporcionalidade; $p(x)$ é a densidade marginal de x e representa o recíproco da constante normalizadora da .f.d.p. de (1.2), no sentido de que $\int_{\Omega} \pi(\theta|x) d\theta = 1$.

A Figura 2 e a forma (1.2) do Teorema de Bayes mostram como nossa informação inicial sobre o estado da natureza, representada na f.d.p. "a priori", $\pi(\theta)$, é modificada pela evidência da experiência, representada pela informação provinda da amostra através da função de verossimilhança $p(x|\theta)$. Assim, ambas as informações são incorporadas em nosso estado atual de conhecimento sobre o fenômeno em estudo. Por outro lado, se dois conjuntos de dados x_1 e x_2 ocorrem em sequência, então a distribuição "a posteriori" para x_1

(3) Por facilidade de representação e por estar implícito no conceito, deixaremos de escrever I nas funções acima representadas.

pode ser "a priori" para x_2 , indicando que, em condições gerais, a informação provinda das amostras (na possibilidade de obtê-las em sequência) vai dominando a f.d.p. "a posteriori" que, por sua vez, tende
rá ocorrer mais concentrada em torno do verdadeiro valor do parâmetro:

$$\pi(\theta|x_1) \propto \pi(\theta) \cdot p(x_1|\theta)$$

que, usado como conhecimento "a priori" para um novo conjunto de da
dos x_2 , gerados independentemente de x_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1;x_2) &\propto \pi(\theta|x_1) \cdot p(x_2|\theta) && \text{ou} \\ \pi(\theta|x_1;x_2) &\propto \pi(\theta) \cdot p(x_1|\theta) \cdot p(x_2|\theta) && . \quad (1.4) \end{aligned}$$

Vê-se que (1.4) mostra que a f.d.p. para θ é a mesma quando usamos o processo sequencial de $\pi(\theta)$ para $\pi(\theta|x_1)$ e então pa
ra $\pi(\theta|x_1,x_2)$ ou quando usamos a função de verossimilhança para com
binar amostras, através de $p(x_1,x_2|\theta)$ em conjunção com $\pi(\theta)$.

3.1.2 - O Método Bayesiano na estimação de parâmetros

3.1.2.1 - A estimação como processo de tomada de decisão

A análise estatística, sob o ponto de vista da deci
são, tem sido desenvolvida, além do método bayesiano, pelo chamado
Processo Minimax⁽⁴⁾. Não é intenção deste trabalho confrontá-los en
tre si, mas apenas apresentar o enfoque bayesiano como um método al

(4) Sobre o Processo Minimax, dentro da bibliografia citada no fi
nal, pode-se encontrar detalhes nos trabalhos de SAVAGE (1954),
FERGUSON (1969) e ZACKS (1971).

alternativo ao tratamento clássico em certa classe de problemas.

A teoria estatística da decisão é concernente à análise de experimentos aleatórios, com o propósito de tomar a melhor decisão sob condições de incerteza. De um modo geral, todos os aspectos da Estatística podem ser tratados sob este prisma e, particularmente, a teoria da estimação, os testes de hipóteses e intervalos de confiança fazem parte de uma extensa lista bibliográfica de trabalhos teóricos e práticos da Estatística. Os conceitos fundamentais e grande parte de sua teoria são devidos a WALD (1939 e 1950) e LEHMANN (1950). Nas palavras do primeiro (pág. 2): "Problemas de decisão estatística ocorrem quando estamos face a um conjunto de decisões alternativas, uma das quais deve ser tomada, e o grau de preferência pelas várias possíveis decisões depende de distribuições desconhecidas de alguma variável aleatória".

Os efeitos da decisão tomada nos problemas estatísticos dependem, assim, do desconhecido estado da natureza, representado pelo vetor paramétrico (ou um parâmetro singular) θ . Se para um problema específico podemos definir um conjunto $A = \{a_i\}$ de todas as ações possíveis que se podem adotar, podemos assumir que todos os pares $(a; \theta)$ podem ser ordenados em preferência pela chamada Função Perda, ℓ , tal que $\ell(a; \theta) \geq 0$ e que reflete a perda ao tomar a ação a quando o verdadeiro estado da natureza é θ . Assim, $\ell(a_1; \theta_1) < \ell(a_2; \theta_2)$ é equivalente a afirmar que $(a_1; \theta_1)$ é preferível a $(a_2; \theta_2)$. Se θ fosse conhecido, a melhor decisão seria selecionar a ação que minimizasse $\ell(a; \theta)$. Entretanto, θ não é conhecido e o problema de decisão ocorre.

Para se ter uma estrutura matemática do processo, admitimos que aquele que decide possa fundamentar sua decisão na observação do valor de uma variável aleatória, ou vetor, X , cuja distribuição também depende do verdadeiro estado da natureza. Com base na informação do experimento, quem decide escolhe a ação $a = d(x) \in A$ (onde d é a função de decisão de $S \times A$), a partir da perda correspondente $\ell(a; \theta) = \ell[d(x); \theta]$.

Ainda que as funções ℓ e d estejam determinadas, na prática a perda depende das observações particulares x_i , obtidas na amostra aleatória. Desta forma, a perda é, ela mesma, uma variável aleatória e, para uma certa função de Decisão d e uma função Perda ℓ , definiremos a Função Risco⁽⁵⁾ $R(d; \theta)$, como sendo o valor esperado da função Perda:

$$\begin{aligned} R(d; \theta) &= E[\ell(a; \theta)] = E\{\ell[d(x); \theta]\} \\ R(d; \theta) &= \int_S \ell[d(x); \theta] p(x|\theta) dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $p(x|\theta)$ é a f.d.p. de x_n para dado θ e a integração é feita sobre o conjunto S de possíveis valores amostrais x_n .

Como a função Risco depende da função de Decisão d escolhida para o problema, da função Perda ℓ e do parâmetro desconhecido, admitimos como boa decisão aquela que torna mínimo o Risco para cada valor do parâmetro θ .

A decisão será ótima (d^*) se existir uma função de decisão que tenha o Risco uniformemente mínimo, ou seja:

(5) Um estudo detalhado sobre a Teoria do Risco pode ser encontrada em BORCH (1967), com discussão por vários autores.

$$r [d^*(x); \theta] \leq r [d(x); \theta]$$

para todo $\theta \in \Omega$ e para toda função d . Em geral tal função não existe e outros critérios serão necessários, como se faz na estimação usual que geralmente se restringe à adoção de estimadores não tendenciosos e de variância mínima.

Para o estatístico, nos problemas de estimação por pontos, as funções de decisões são os estimadores e a decisão (ou ação) é a estimativa $\hat{\theta}$ do parâmetro.

3.1.2.2 - Estimadores de Bayes

Seja $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n com densidade $p(x|\theta)$. Como vimos anteriormente, θ é considerado como variável aleatória de f.d.p. $\pi(\theta)$ e que, ao variar, determina diferentes densidades e a amostra aleatória foi tomada de uma destas densidades. Queremos estimar o valor particular de θ que determina tal densidade.

Os elementos necessários serão, no método bayesiano:

- a) $d(x) = d(x_1, \dots, x_n) = \hat{\theta}$;
- b) Função Perda: $\ell(\hat{\theta}, \theta)$;
- c) Função Risco (ou simplesmente Risco): $R(d; \theta) = E [\ell(\hat{\theta}; \theta)]$.

Uma vez que θ é variável aleatória, determinaremos o valor θ^* de θ que torna mínimo o Risco esperado:

$$\theta^* = \min_{\hat{\theta}} E [\ell(\hat{\theta}; \theta)] = \min_{\hat{\theta}} \int_{\Omega} R(d; \theta) \pi(\theta) d\theta \quad (1.6)$$

Por (1.5) podemos escrever:

$$\theta^* = \min_{\hat{\theta}} \int_{\Omega} \left\{ \int_S \ell(\hat{\theta}; \theta) p(x|\theta) dx \right\} \pi(\theta) d\theta \quad (1.7)$$

Considerando que sejam satisfeitas as condições para mudança na ordem de integração (em geral estas condições são satisfeitas), podemos escrever (1.7) na forma:

$$\theta^* = \min_{\hat{\theta}} \int_S \left\{ \int_{\Omega} \ell(\hat{\theta}; \theta) p(x|\theta) \pi(\theta) d\theta \right\} dx$$

Mas, por (1.2), $p(x|\theta) \pi(\theta) = p(x) \pi(\theta|x)$, e a expressão de θ^* fica:

$$\theta^* = \min_{\hat{\theta}} \int_S \left\{ \int_{\Omega} \ell(\hat{\theta}; \theta) \pi(\theta|x) d\theta \right\} p(x) dx \quad (1.8)$$

Como $p(x)$ é não negativa, podemos minimizar o risco esperado, minimizando a integral entre chaves de (1.8), para cada x_i fixo. Em outras palavras, escolhemos $d^*(x) = \theta^*$ para cada x_i fixo, como sendo a decisão que minimiza a Perda Esperada "a posteriori", chamada de Risco "a posteriori": $\bar{R}(d; \theta)$.

Logo:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \min_{\hat{\theta}} \int_{\Omega} \ell(\hat{\theta}; \theta) \pi(\theta|x) d\theta \\ \theta^* &= \min_{\hat{\theta}} [\bar{R}(d; \theta)] \end{aligned} \quad (1.9)$$

DEFINIÇÃO: Chama-se Estimador de Bayes para o parâmetro θ , o valor de $\hat{\theta}$, em função da variável aleatória X , que torna mínimo o Risco "a posteriori".

3.1.2.3 - Especificação da função Perda

Em problemas de estimação pouco se tem tratado sobre a função Perda ("loss function") - $\ell[d(x); \theta]$, sendo mais frequente nas discussões da teoria da decisão que, embora dependendo da estimação, considera outros aspectos mais específicos. E também, pelo fato de que a interpretação da função Perda, não sendo muito clara, fez com que muitos autores desenvolvessem a análise bayesiana em termos da função Utilidade - $U(d; \theta)$ de $A \times \Omega$ e que descreve o valor da decisão d quando o verdadeiro valor do parâmetro é θ . Assim, o problema é resolvido pela maximização da utilidade esperada "a posteriori":

$$\bar{U}(d; \theta) = \int_{\Omega} U(d; \theta) p(\theta|x) d\theta$$

Uma discussão crítica sobre Utilidade pode ser encontrada em SAVAGE (1954) e, de maneira muito clara, em RAIFFA e SCHLAIFER (1961) que, numa linguagem matemática formal, apresentam os diversos aspectos aplicados à Teoria da Decisão. PRATT (1964) mostra como a Utilidade pode ser descrita de maneira completa e satisfatória quando as consequências são inteiramente monetárias. Discute como podem ser medidas as implicações na forma de utilidade do montan

te monetário (z):

$$u(z) = 1 - e^{-az} - (1 - w) e^{-bz} ,$$

$a; b > 0$ e $0 \leq w \leq 1$.

Convém salientar que a existência e o preciso entendimento, bem como a mais precisa formalização na Teoria da Decisão, não invalidam e nem contrariam o uso da função Perda. A questão se coloca mais no âmbito da interpretação e utilização conveniente destes dois conceitos.

A estimação por pontos, sob várias funções Perda, foi discutida por BRITNEY e WINKLER (1968); EVANS (1964) considerou a estimação da variância da distribuição normal, levando em conta vários tipos de função Perda; EL-SAYYAD (1967), da mesma maneira, estudou a estimação em distribuição exponencial; ANTHEMAN (1965) abordou o problema da escolha do tamanho da amostra simples, levando em consideração a função Perda e dividindo a Perda em perda final e custos amostrais; VARIAN (1964) mostra uma situação prática (em estudo econômico de determinação de preço), onde a função perda quadrática é inapropriada por assinalar a mesma perda, tanto ao subestimar como ao superestimar o preço, propondo então uma função chamada "linex" (linear-exponencial), da forma:

$$L(y_e; y_a) = b \cdot \exp [a(y_e - y_a)] - c(y_e - y_a) - b$$

que, aplicada em modelo de regressão linear, mostrando ser uma expressão que bem se adapta ao modelo e à distribuição "a priori" nor

mal-conjugada.

Em muitos problemas de decisão, entre os quais se inclui o de estimação de parâmetros, é muito difundido o uso da função Perda da forma:

$$l(\hat{\theta}; \theta) = c(\theta) \cdot (\hat{\theta} - \theta)^2,$$

onde $c(\theta) > 0$ para todos os valores de θ e $\hat{\theta} = d(x)$.

Figura 3 - Ilustração da função perda quadrática.

Neste caso a perda é maior quanto mais distante estiver $\hat{\theta}$ do verdadeiro valor do parâmetro e sua expressão, além de satisfazer a condição de definição de que $l(\hat{\theta}; \theta) \geq 0$, mostra que a perda é nula se $\hat{\theta}$ representa o verdadeiro valor do parâmetro. Uma outra característica favorável ao seu uso é que é facilmente diferenciável nos problemas de minimização e mantém simples a estrutura algébrica da expressão da distribuição "a posteriori".

Uma dificuldade que aparece é como encontrar $c(\theta)$ que torne a perda realística, mas normalmente estamos interessados na

comparação relativa de duas funções de decisão, no que $c(\theta)$ desempenha papel secundário.

Usando esta função Perda, o Risco será:

$$R(d; \theta) = E [c(\theta) \cdot (\hat{\theta} - \theta)^2] = c(\theta) \cdot E [(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

e, sendo $\hat{\theta}_1 = d_1(x)$ e $\hat{\theta}_2 = d_2(x)$ tal que $R(d_1; \theta) > R(d_2; \theta)$, teremos:

$$E [\ell(\hat{\theta}_1; \theta)] > E [\ell(\hat{\theta}_2; \theta)]$$

$$c(\theta) \cdot E [(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] > c(\theta) \cdot E [(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]$$

e como $c(\theta) > 0$,

$$E [(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] > E [(\hat{\theta}_2 - \theta)^2] .$$

Esta desigualdade mostra que a comparação de Riscos para dois estimadores independe de $c(\theta)$.

Consideremos θ o vetor aleatório de parâmetros e M uma conhecida matriz simétrica definida positiva. Podemos definir a Função Perda Quadrática "a posteriori"

$$\ell(\hat{\theta}; \theta) = (\theta - \hat{\theta})' \cdot M \cdot (\theta - \hat{\theta})$$

e o Risco "a posteriori" será desenvolvido na forma:

$$\begin{aligned} \bar{R}(d; \theta) &= E [\ell(\hat{\theta}; \theta)] = E [(\theta - \hat{\theta})' \cdot M \cdot (\theta - \hat{\theta})] \\ &= E \{ [(\theta - E\theta) - (\hat{\theta} - E\theta)]' \cdot M \cdot [(\theta - E\theta) - (\hat{\theta} - E\theta)] \} \\ &= E \left\{ \begin{aligned} &(\theta - E\theta)' \cdot M \cdot (\theta - E\theta) - (\theta - E\theta)' \cdot M \cdot (\hat{\theta} - E\theta) - (\hat{\theta} - E\theta)' \cdot M \cdot (\theta - E\theta) + \\ &+ (\hat{\theta} - E\theta)' \cdot M \cdot (\hat{\theta} - E\theta) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Como $E(\theta - E\theta) = 0$, teremos:

$$\bar{R}(d; \theta) = E[(\theta - E\theta)' M(\theta - E\theta)] + (\hat{\theta} - E\theta)' M(\hat{\theta} - E\theta) \quad (1.10)$$

O estimador de Bayes, de acordo com (1.9), é o valor de $\hat{\theta}$ que minimiza o Risco "a posteriori". A primeira parcela do segundo membro de (1.10) não envolve $\hat{\theta}$ e, como M é definida e positiva, a segunda parcela será minimizada se tomarmos

$$\hat{\theta} = E\theta \quad ,$$

ou seja,

$$\theta^* = \min_{\hat{\theta}} [\bar{R}(d; \theta)] = E(\theta) \quad . \quad (1.11)$$

Concluimos assim uma importante regra que será utilizada nos problemas de estimação deste trabalho: quando usamos a função Perda Quadrática, o estimador de Bayes é a média, $E(\theta)$, da distribuição "a posteriori".

De maneira semelhante, demonstra-se que se a função Perda for $\ell(d; \theta) = |\theta - \hat{\theta}|$ e a f.d.p. "a posteriori" é contínua e própria com $a \leq \theta \leq b$ (a e b conhecidos) o estimador ótimo por pontos é a Mediana da f.d.p. "a posteriori".

3.2 - A Distribuição "A Priori"

3.2.1 - Generalidades

Como vimos em 3.1, as afirmações probabilísticas a respeito do parâmetro θ (singular ou vetor de parâmetros) que representa o verdadeiro estado da natureza são feitas sob condições de incerteza e, assim, tomado no método bayesiano como variável aleatória. Daremos uma atenção especial a este item, que nos parece fundamental na caracterização do método adotado.

Sob o enfoque da Teoria da Decisão, o método bayesiano, particularmente na estimação de parâmetros, incorpora na análise ambas as informações: "anterior" ao experimento, através da expressão matemática da f.d.p. "a priori", e a evidência da experiência através da função de verossimilhança da amostra, fornecendo a distribuição "a posteriori".

De uma maneira geral, quem decide tem para si dois tipos de problemas:

1º) tomar a melhor decisão com base nos resultados de um experimento;

2º) delinear o melhor experimento, de modo a colher informações nas quais a decisão será baseada.

Parece-nos claro que, em ambas as situações, quem decide possui alguma informação "a priori", chegando, em caso extremo, a ter que tomar decisões sem oportunidade de delinear experimentos,

baseando-se em conhecimentos resultantes de dados anteriores e que não estão sob o seu controle. Neste caso a solução de Bayes minimiza o "risco 'a priori'"

$$r^*(d) = \int_{\Omega} \int_S \ell(d; \theta) \cdot f(x; \theta) \cdot \pi(\theta) \, dx \, d\theta = \int_{\Omega} r(d; \theta) \cdot \pi(\theta) \, d\theta \quad ,$$

onde $\pi(\theta)$ é a f.d.p. "a priori" sobre o espaço paramétrico.

Pelos processos clássicos de estimação (mínimos quadrados e método da máxima verossimilhança), a informação "a priori" é caracterizada pelo conhecimento da forma da função de densidade e do espaço paramétrico, sendo a estimação avaliada com base na distribuição amostral, usando comumente o estimador de variância mínima na classe dos estimadores imparciais. O método de Bayes dispensa a imparcialidade, mas inclui a informação "a priori" sobre os parâmetros.

Quanto à natureza da informação "a priori", podemos obtê-la através de dados passados, gerados por experimentos cientificamente conduzidos e que são disponíveis para análises futuras. Em outras situações a informação "a priori" é resultado de observação casual, considerações teóricas e não provenientes de um conjunto particular de dados. Em qualquer situação, ou mesmo se ambos os tipos de informação são disponíveis, é necessário avaliar a sua importância, no sentido de aumentar a precisão da estimativa dos parâmetros, particularmente em pequenas amostras. Se a perda em ignorar informação extra sobre os parâmetros é pequena, não há necessidade de desenvolver métodos algébricos complicados para incorporá-la. Caso con-

trário, é valioso obter e usar tal informação em nosso trabalho estatístico.

Uma vez aceito que "graus de confiança" sobre os parâmetros antes que se realize a experiência podem ser descritos por distribuição de probabilidades, é desejável encontrar métodos algébricos eficientes e flexíveis para incorporar estas informações na expressão matemática dos problemas de estimação.

RAIFFA e SCHLAIFER (1961) sugerem algumas condições que devem ser observadas na escolha da família F de distribuições a serem utilizadas para representar a distribuição "a priori" em um problema particular:

a) " F deve ser analiticamente tratável em três aspectos: 1º) deve ser razoavelmente fácil determinar a distribuição "a posteriori" resultante de uma dada distribuição "a priori" e dada por uma amostra; 2º) deve ser possível expressar em forma conveniente as esperanças matemáticas de funções perda (ou funções utilidade) com respeito a algum membro de F ; 3º) F deve ser fechada, no sentido de que se "a priori" é membro de F , "a posteriori" também será um membro de F .

b) F deve ser completa, assim existirá um membro de F capaz de expressar a informação e o grau de confiança "a priori" daquele que decide.

c) F deve ser parametrizável, de maneira que possa ser facilmente interpretada, no sentido de ser fácil verificar que o membro es-

colhido da família esteja de acordo com o julgamento "a priori" sobre θ e não um mero artifício concordando com uma ou duas sumarizações quantitativas deste julgamento."

Nos exemplos de aplicação do método bayesiano desenvolvidos em 3.3., estimando parâmetros em modelos de regressão linear, consideraremos as situações em que a distribuição "a priori" representa desconhecimento ou ignorância a respeito dos parâmetros (distribuição "a priori" difusa) e o caso de distribuição "a priori" não difusa, representando o conhecimento que se tem sobre os parâmetros antes de realizar o experimento.

3.2.2 - O conceito de informação contida na amostra

Como dissemos anteriormente, o método bayesiano, principalmente quando aplicado em tomadas de decisão, utiliza informações extras sobre os parâmetros (além daquelas sobre os apropriados espaços paramétricos e amostral e da função de densidade) e as incorpora na estimação do verdadeiro valor do parâmetro, de maneira explícita pela distribuição "a priori". Nos métodos não bayesianos, a utilização da informação "a priori" se faz de maneira implícita como é, por exemplo, na decisão em delinear este ou aquele tipo de experimento conforme determina a análise teórica da situação objetiva em estudo. A diferença fundamental é que todo o peso da decisão é colocado, no método clássico, na evidência dos dados amostrais.

Usado ou não como fundamento da tomada de decisão, o resultado de qualquer experimento conduzido dentro de critérios científicos, poderá servir para ampliar nosso conhecimento sobre o estado real da natureza e se prestar para solucionar problemas de delineamentos experimentais, bem como, ser útil em futuras tomadas de decisão. Assim, o estatístico irá delinear, entre vários experimentos possíveis, aquele que irá fornecer a maior quantidade média de informação.

O conceito e a expressão "quantidade de informação" foram dados inicialmente por R.A. Fisher em 1921, e por ele mesmo desenvolvidos em "Theory of Statistical Estimation" - 1925. Em 1948, estudando problemas ligados à comunicação, Shannon amplia e estabelece uma maneira de medir a informação que LINDLEY (1956) utiliza para introduzir a medida de informação proveniente de um experimento. As conclusões mais importantes deste último trabalho, servirão de base para a apresentação do que se segue.

A comparação entre os conhecimentos anterior e posterior à realização de um experimento torna possível medir a quantidade de informação provinda do experimento, e a consideração da distribuição "a priori" é básica para este estudo. Se a distribuição "a priori" é, por exemplo, concentrada em um valor do parâmetro, ou seja, se o estado da natureza é conhecido, então nenhum experimento é informativo sobre o parâmetro.

Para a distribuição "a priori", $\pi(\theta)$, a quantidade de

informação com relação a $d\theta$ é definida por⁽⁶⁾:

$$I_0 = \int_{\Omega} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta, \quad (2.1)$$

se $\pi(\theta) \neq 0$, e se $\pi(\theta) = 0$, define-se integrando igual a zero.

Após o experimento ter sido realizado e o valor de x observado, a quantidade de informação é

$$I_1(x) = \int_{\Omega} \pi(\theta|x) \ln \pi(\theta|x) d\theta, \quad (2.2)$$

e se $\pi(\theta|x) = 0$, define-se o integrando com valor zero.

Uma notação útil para (2.1) e (2.2) se faz usando o conceito de esperança matemática:

$$I_0 = E_{\theta} [\ln \pi(\theta)] \quad (2.3)$$

$$I_1(x) = E_{\theta} [\ln \pi(\theta|x)] \quad (2.4)$$

Nota-se que a medida do conteúdo informativo depende da base do logarítmo. As unidades mais comumente usadas são: "bit", se a base do logarítmo é dois e "nit" se usarmos o logarítmo natural. Empregaremos este último em nossas considerações e é fácil observar que:

$$1 \text{ bit} = 0,693 \text{ nit}$$

$$1 \text{ nit} = 1,443 \text{ bit}$$

(6) Um estudo introdutório sobre como chegar a esta expressão analítica pode ser feito em HOFFMANN (1980), pág. 287, e de maneira bem prática e ilustrativa em PUGACHEV (1973), pág. 278, que define a medida quantitativa de indeterminação de fenômenos aleatórios no conceito de Entropia do experimento.

DEFINIÇÃO 1: A quantidade de informação provinda de um experimento $\underline{e}$, com conhecimento "a priori" $\pi(\theta)$, quando a observação é x , é definida:

$$I[\underline{e}; \pi(\theta); x] = I_1(x) - I_0 \quad . \quad (2.5)$$

DEFINIÇÃO 2: A quantidade média de informação provinda do experimento $\underline{e}$, com conhecimento "a priori" $\pi(\theta)$, é:

$$I(e) = I[\underline{e}; \pi(\theta)] = E_x [I_1(x) - I_0] \quad . \quad (2.6)$$

Esta última expressão pode ser escrita por outras maneiras também úteis. Por (2.3) e (2.4) teremos:

$$\begin{aligned} I(e) &= E_x \{ E_\theta [\ln \pi(\theta|x)] - E_\theta [\ln \pi(\theta)] \} \\ &= E_x \{ E_\theta [\ln \pi(\theta|x) - \ln \pi(\theta)] \} \\ I(e) &= E_x \left\{ E_\theta \left[\ln \frac{\pi(\theta|x)}{\pi(\theta)} \right] \right\} \quad . \quad (2.7) \end{aligned}$$

Pela expressão (1.2) do teorema de Bayes, (2.7) também pode se apresentar na forma:

$$I(e) = E_x \left\{ E_\theta \left[\ln \frac{p(x|\theta)}{p(x)} \right] \right\} \quad (2.8)$$

Por outro lado, se $p(x|\theta)$ é a densidade conjunta para x e θ , então:

$$p(x;\theta) = p(x|\theta) \pi(\theta)$$

e

$$p(x|\theta) = \frac{p(x;\theta)}{\pi(\theta)},$$

e teremos:

$$I(e) = E_x \left\{ E_\theta \left[\ln \frac{p(x;\theta)}{p(x) \pi(\theta)} \right] \right\}$$

$$I(e) = \int_S \int_\Omega p(x;\theta) \ln \left[\frac{p(x;\theta)}{p(x) \pi(\theta)} \right] d\theta dx \quad (2.9)$$

Utilizando o operador informação I com o operador de esperança matemática E , Lindley introduz uma expressão útil em cálculos para (2.9).

Definindo a informação para uma função de densidade $p(x)$:

$$I_x p(x) = \int_S p(x) \ln p(x) dx,$$

teremos:

$$I(e) = E_\theta I_x p(x|\theta) - I_x E_\theta p(x|\theta) \quad (2.10)$$

DEFINIÇÃO 3: Dois experimentos, e_1 e e_2 , com $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, são independentes se $p(x_1, x_2 | \theta) = p(x_1 | \theta) \cdot p(x_2 | \theta)$ para todo $\theta \in \Omega$.

DEFINIÇÃO 4: Sejam e_1 e e_2 dois experimentos com $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Dizemos que e_1 é mais informativo que e_2 e, para toda $\pi(\theta)$:

$$I[e_1; \pi(\theta)] \geq I[e_2; \pi(\theta)] \quad , \quad (2.11)$$

o que mostra que o mérito de cada experimento só pode ser julgado pela referência à distribuição "a priori".

Seguem, sem demonstração, algumas propriedades sobre a medida da informação provinda de um experimento, a maioria das quais, desenvolvidas no trabalho de Lindley citado, em forma de teoremas:

Propriedades:

- a) $I(e) \geq 0$, com igualdade somente se $p(x|\theta)$ não depende de θ .
- b) Se e_1 e e_2 são dois experimentos e $e = (e_1; e_2)$, chamado de soma dos experimentos, então:

$$I(e) = I(e_1) + I(e_2|e_1) \quad .$$

- c) Se x_1 é suficiente para x (no sentido de Neyman-Fisher da fatorização), então $I(e) = I(e_1)$. Em palavras, não haverá perda de informação se concentrarmos nossa atenção à observação da estatística suficiente.
- d) Se e_1 e e_2 são experimentos independentes, então

$$I(e_2|e_1) \leq I(e_2) \quad ,$$

ou seja, um deles é, em média, mais informativo se realizado anteriormente ao outro.

- e) A informação contida na amostra não pode ser aumentada por uma operação estatística e é invariante se, e somente se, for empregada uma estatística suficiente.

É interessante apresentar o conceito de Entropia de uma variável aleatória, que pode ser visto de maneira acessível em PUGACHEV (1973). A Entropia (H) é tomada como medida quantitativa da indeterminação de uma prova, e define-se:

$$H = - \int_S p(x) \ln p(x) dx \quad (2.12)$$

ou,

$$H = - E [\ln p(x)] ,$$

onde $p(x)$ representa a f.d.p. da variável aleatória contínua X.

Na prática, para se eliminar a indeterminação de uma variável aleatória é necessário efetuar um experimento e determinar o valor que esta toma. Na verdade, a variável aleatória X que nos interessa não é passível de observação, o que nos leva a tirar conclusões dela a respeito de outras variáveis aleatórias, ou seja, observar variáveis aleatórias que contenham informação a respeito de X. A entropia condicional média de X com relação a Y se determina pela fórmula:

$$H_y [X] = - \int_{-\infty}^{\infty} \int p(x;y) \ln p_1(x|y) dx dy ,$$

ou,

$$H_y [X] = -E[\ln p(x|Y)] .$$

É fácil verificar que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$H_y [X] = H [x] ,$$

o que mostra que as variáveis aleatórias independentes de X não podem conter nenhuma informação sobre X.

Definimos a Entropia conjunta das variáveis X e Y:

$$H [X;Y] = H [X] + H_x [Y] = H [Y] + H_y [X] ,$$

e se elas são independentes:

$$H [X;Y] = H [X] + H [Y] .$$

Notemos que a diminuição na Entropia da variável X, obtida como resultado da observação da variável Y, pode ser tomada como medida da quantidade de informação sobre X, contida em Y. E podemos escrever:

$$I_y [X] = H [X] - H_y [X] .$$

$$\text{Como } H [X;Y] = H [X] + H_x [Y] = H [Y] + H_y [X] ,$$

$$H [X] - H_y [X] = H [Y] - H_x [Y]$$

$$I_y [X] = I_x [Y] .$$

Esta última igualdade mostra que se as variáveis X e Y são dependentes, cada uma delas contém uma quantidade positiva de informação sobre a outra.

Finalmente citaremos três propriedades sobre a Entropia de variáveis aleatórias, que justificam, sob este aspecto, o uso frequente de certas distribuições⁽⁷⁾:

1º) Entre todas as variáveis aleatórias que têm a mesma dispersão, aquelas normalmente distribuídas são as que possuem a maior Entropia.

2º) Entre todas as variáveis aleatórias contínuas e positivas, com a mesma esperança matemática, as que possuem maior Entropia são aquelas distribuídas pela lei exponencial.

3º) Entre todas as distribuições com mesmo intervalo limitado de valores possíveis para a variável aleatória, a distribuição uniforme neste intervalo é a que possui maior Entropia.

Por outro lado, a quantidade de informação de Fisher sobre θ (designada aqui por i_θ), contida em uma observação $X \in S$, é dada (para certas condições de regularidade quanto à diferenciação sob o sinal da integral) por:

$$i_\theta = E_\theta \left\{ \frac{\partial \log p(x|\theta)}{\partial \theta} \right\}^2 \quad (2.12)$$

(7) Uma demonstração da 1.^a propriedade pode ser vista em PUGACHEV (1973), pág. 291.

ou

$$i_{\theta} = - E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \log p(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.13)$$

No caso de θ ser um vetor de k parâmetros, teremos a matriz de informação de Fisher. É a matriz de ordem $k \times k$, cujo (i,j) -ésimo elemento é:

$$E_{\theta} \left[\frac{\partial \log p(x|\theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \log p(x|\theta)}{\partial \theta_j} \right] = - E_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \log p(x|\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

Lembramos que esta definição é utilizada na conhecida desigualdade de Cramér-Rao para a variância de um estimador não tendencioso de θ :

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{E_{\theta} \left[\partial \log p(x|\theta) / \partial \theta \right]^2} = \frac{1}{i_{\theta}}$$

LINDLEY (1957) observou as diferenças entre o conceito de informação de Fisher e aquele desenvolvido por Shannon. Além daquela fundamental de que Fisher não usou a distribuição "a priori" do parâmetro desconhecido, o conceito de Shannon, em esquemas amostrais, utiliza a verossimilhança do ponto amostral, considerando θ como variável aleatória. Por outro lado, Lindley verifica a equivalência entre ambos quando aplicados a esquemas amostrais de informação constante e a equivalência assintótica entre a variância "a posteriori" de θ e a variância de um estimador assintoticamente eficiente de θ .

3.2.3 - Ausência de informação "a priori"

Em algumas situações podemos sentir que não existe nenhuma informação "a priori" sobre o estado real da natureza. O esquema bayesiano deve considerar também este caso e selecionar distribuições "a priori" que representem desconhecimento ou "ignorância" sobre os parâmetros para utilizar a expressão (1.2) na determinação da distribuição "a posteriori".

Praticamente toda bibliografia consultada nos mostra que, embora com algumas variações em casos muito específicos, este problema tem sido resolvido com base em duas regras estabelecidas e discutidas por JEFFREYS (1948). Um dos casos ilustrativos utilizado neste trabalho, será baseado nestas regras que passamos a apresentar.

REGRA 1: Se temos completa "ignorância" sobre o valor do parâmetro, que pode ter valores em um intervalo finito ou em toda extensão do campo real, a sua distribuição "a priori" pode ser tomada como uniforme neste intervalo.

REGRA 2: Se a nossa "ignorância" é a respeito de um parâmetro que pode assumir valores de 0 a $+\infty$, a distribuição "a priori" do seu logaritmo pode ser tomada como uniforme neste intervalo.

A Regra 1 pode englobar casos como, por exemplo, a média de uma distribuição normal ($-\infty < \mu < +\infty$) ou de uma distribuição binomial ($0 \leq p \leq 1$), e representa-se nas formas:

$$\pi(\theta) d\theta \propto d\theta$$

ou (2.14)

$$\pi(\theta) \propto \text{constante}$$

para $-\infty < \theta < +\infty$ ou $-k \leq \theta \leq k$.

Esta f.d.p. pode ser imprópria, pois $\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = \infty$ e, neste caso, tomando-se $-\infty < \theta < +\infty$ como uma afirmação certa, Jeffreys utilizou o símbolo ∞ para representar a probabilidade de um evento certo, ao invés de 1. No ponto de vista de Jeffreys, sendo a, b, c e d números reais finitos, então teremos indeterminação na razão:

$$\frac{P(a < \theta < b)}{P(c < \theta < d)}$$

e, por isto, não podemos fazer nenhuma afirmação de que θ esteja em um particular par de intervalos, tomando então (2.14) como representação de "ignorância".

Para $-k \leq \theta \leq k$, podemos escrever a f.d.p. própria, desde que façamos:

$$p(\theta) d\theta = \frac{1}{2k} d\theta \quad . \quad (2.15)$$

Neste caso, a razão

$$\frac{P(a < \theta < b)}{P(c < \theta < d)} = \frac{\frac{b-a}{2k}}{\frac{d-c}{2k}} = \frac{b-a}{d-c}$$

é determinada, para a, b, c e d números reais finitos do intervalo $[-k; k]$. Podemos considerar que para k tendo alto valor, tem-se uma aproximação para a forma (2.14) desde que a razão

$$\frac{\lim_{k \rightarrow \infty} P(a < \theta < b)}{\lim_{k \rightarrow \infty} P(c < \theta < d)} \text{ é da forma } \frac{0}{0}.$$

Por outro lado, se tomarmos a medida de informação para uma f.d.p., usada para concluir (2.10)

$$I_{\theta} \pi(\theta) = \int_{-k}^k \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta$$

pode-se verificar que a informação mínima a respeito do parâmetro θ ocorre quando se faz uso da f.d.p. própria em (2.15).

Para demonstrar isto devemos minimizar a informação na condição de que:

$$\int_{-k}^k \pi(\theta) d\theta = 1.$$

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, podemos estabelecer:

$$\phi = I_{\theta} \pi(\theta) + \lambda \left[\int_{-k}^k \pi(\theta) d\theta - 1 \right]$$

$$\phi = \int_{-k}^k \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta + \lambda \int_{-k}^k \pi(\theta) d\theta - \lambda$$

Derivando em relação a $\pi(\theta)$ e igualando a zero teremos a condição para minimização:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \pi(\theta)} = 1 + \ln \pi(\theta) + \lambda = 0$$

ou

$$\ln \pi(\theta) = -(\lambda + 1)$$

$$\pi(\theta) = e^{-(\lambda+1)}$$

Substituindo na condição, encontramos:

$$\lambda + 1 = \ln 2K ,$$

então

$$\pi(\theta) = e^{-\ln 2K} = e^{\ln 1/2K} ,$$

ou seja,

$$\pi(\theta) = \frac{1}{2K} ,$$

que representa a f.d.p. de (2.15).

Deve-se ressaltar que o uso da f.d.p. imprópria para a distribuição "a priori" indicando "ignorância", combinada com a verossimilhança da amostra, através do teorema de Bayes, normalmente fornece f.d.p. "a posteriori" própria e informativa sobre os parâmetros.

A Regra 2 de Jeffreys pode ser aplicada no caso de o parâmetro (por exemplo a variância) assumir valores de 0 a $+\infty$. Neste caso assumimos que $\phi = \ln \theta$ é uniformemente distribuído, ou seja:

$$\pi(\phi) d\phi \propto d\phi \quad ,$$

uma vez que $0 < \theta < +\infty$ tem-se $-\infty < \phi < +\infty$ e recai-se na análise da regra 1.

Como $d\phi = \frac{d\theta}{\theta}$, podemos escrever:

$$\pi(\theta) d\theta \propto \frac{d\theta}{\theta} \quad (0 < \theta < +\infty) \quad (2.16)$$

De maneira semelhante ao que foi feito para a Regra 1, podemos demonstrar que $p(\phi) \propto \text{constante}$ é a condição para que a informação seja minimizada, o que é uma justificativa teórica de que podemos tomar $\phi = \ln \theta$ como uniformemente distribuída para indicar nosso desconhecimento a respeito de θ e que implica em (2.16).

Finalmente, ainda a respeito do estudo de Jeffreys sobre distribuição "a priori", representando pouco conhecimento ou "ignorância" acerca dos parâmetros, podemos citar, uma forma geral de f.d.p. "a priori", que é consistente em relação a propriedades de invariância⁽⁸⁾.

Sendo θ um vetor de parâmetros, a f.d.p. "a priori" é tomada como:

$$\pi(\theta) \propto |i_{\theta}|^{1/2} \quad (2.17)$$

onde i_{θ} é a matriz de informação de Fisher, apresentada em (2.12) e (2.13).

Jeffreys mostrou que a forma (2.17) é invariante no

(8) Além de JEFFREYS (1948), uma exposição detalhada pode ser vista em HARTIGAN (1964).

sentido de que se um modelo foi parametrizado em termos do vetor μ , onde $\mu = F(\theta)$, com F sendo uma transformação diferenciável dos elementos de θ um a um, as afirmações probabilísticas "a posteriori" serão consistentes em relação às do modelo parametrizado em θ . Seria o caso, por exemplo, de se trabalhar com o desvio padrão (σ), a variância (σ^2) ou a precisão ($h = \sigma^{-2}$).

A f.d.p. de (2.17) representa uma forma útil para indicar desconhecimento "a priori", o que pode ser mostrado em termos da teoria da informação.

A informação sobre θ , contida em $p(x|\theta)$ é definida:

$$I_x(\theta) = \int_S p(x|\theta) \ln p(x|\theta) dx$$

e a informação média "a priori":

$$\bar{I}_x = \int_{\Omega} I_x(\theta) \pi(\theta) d\theta .$$

Definimos o ganho de informação:

$$G = \bar{I}_x - \int_{\Omega} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta$$

$$G = \int_{\Omega} I_x(\theta) \pi(\theta) d\theta - \int_{\Omega} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta .$$

Assim, para adotarmos uma determinada f.d.p. própria como sendo "a priori" que represente "ignorância" sobre os parâmetros, devemos tomar aquela que maximize G , sujeito a $\int_{\Omega} \pi(\theta) d\theta = 1$. Entretanto, verifica-se que a chamada "priori" invariante de Jeffreys em (2.17) nem sempre maximiza G ⁽⁹⁾. Se tomarmos G' como forma assin-

(9) Em ZELLNER (1971), pág. 51, podem ser vistos dois exemplos em distribuição normal, onde a referida priori de Jeffreys maximiza $\bar{G}$ e um exemplo onde isto não ocorre.

tótica de G, verificamos que (2.17) satisfaz a condição de maximização:

$$G' = \int_{\Omega} \pi(\theta) \ln \sqrt{n} |i_{\theta}|^{1/2} d\theta - \int_{\Omega} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta ,$$

onde $\underline{n}$ é o número de observações independentes de $p(x|\theta)$.

Para concluir, podemos dizer que, além de satisfatória para a maioria dos casos, as Regras de Jeffreys consideram distribuição "a priori" uniforme que atende às condições de Raiffa-Schlaifer apresentadas em 3.2.1.

3.2.4 - Distribuições conjugadas

Como foi visto em 3.2.1, o conhecimento anterior ao experimento deve ser expresso pela f.d.p. da distribuição "a priori" que atenda a algumas condições que facilitem, não só o tratamento algébrico, como também traduzam o nosso grau de confiança a respeito de afirmações probabilísticas sobre o parâmetro. Os mesmos autores, RAIFFA e SCHLAIFER (1961), propõem o uso de Distribuições Conjugadas para atender àquelas condições.

Basicamente, a idéia utilizada por estes autores é a de usar como núcleo ("kernel") da f.d.p. "a priori" o mesmo núcleo da função de verossimilhança amostral. Desta forma, se a distribuição "a posteriori" apresentar os mesmos parâmetros e pertencer à mesma família de distribuições de probabilidade, dizemos que a família é conjugada em relação ao modelo usado na amostra atual.

Sendo D uma função de densidade de θ , e K uma outra função de θ , tal que

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{\int_{\Omega} K(\theta) d\theta} ,$$

ou seja, a razão $\frac{K(\theta)}{D(\theta)} = \int_{\Omega} K(\theta) d\theta$ é constante em relação a θ , podemos escrever:

$$D(\theta) \propto K(\theta)$$

e dizemos que K é um núcleo ("kernel") da densidade de θ .

Assim, se a verossimilhança de x dado θ é fornecida por

$$p(x|\theta) = k(x|\theta) \cdot \rho(x) , \quad \text{para todo } x \text{ e } \theta ,$$

dizemos que $k(x|\theta)$ é o núcleo da verossimilhança de x , dado θ e $\rho(x)$ é o "resíduo" desta verossimilhança.

Pelo teorema de Bayes (1.2) e sendo $K'(\theta)$ o núcleo da f.d.p. "a priori", podemos escrever:

$$\pi(\theta|x) = \pi(\theta) p(x|\theta) N(x)$$

com $N(x) = [p(x)]^{-1}$.

$$\text{Então } \pi(\theta|x) = K'(\theta) \left[\int_{\Omega} k'(\theta) d\theta \right]^{-1} k(x|\theta) \rho(x) N(x)$$

$$\pi(\theta|x) \propto K'(\theta) k(x|\theta) .$$

Consideremos também $z = \tilde{z}(x)$ como um conjunto de estatísticas calculadas a partir dos dados amostrais. Se $\pi(\theta|z) = \pi(\theta|x)$

então z é um conjunto de estatísticas suficientes⁽¹⁰⁾.

TEOREMA⁽¹¹⁾: Sejam $z_{(1)}$ e $z_{(2)}$ dois conjuntos de estatísticas suficientes que descrevem um modelo de amostragem, tal que $z_{(1)} = z_p(x_1; \dots; x_p)$ e $z_{(2)} = z_{n-p}(x_{p+1}; \dots; x_n)$, então é possível encontrar uma operação binária $*$ tal que $z_* = z_{(1)} * z_{(2)}$ apresenta as propriedades:

- a) $p_n(x_1; \dots; x_n | \theta) \propto k(z_* | \theta)$;
- b) $k(z_* | \theta) \propto k(z_{(1)} | \theta) \cdot k(z_{(2)} | \theta)$.

Assim, se $z = \tilde{z}(x)$ é uma estatística suficiente; se $k(z | \theta)$ é o núcleo da verossimilhança de x dado θ e se $\pi(\theta) = k(z' | \theta)$, então o teorema de Bayes fornecerá a f.d.p. "a posteriori" definida por:

$$\pi(\theta | z) \propto \pi(\theta) k(z | \theta)$$

ou

$$\pi(\theta | z) \propto k(z' | \theta) \cdot k(z | \theta) \propto k(z_* | \theta) ,$$

ou seja, o núcleo da densidade "a priori" combina com o núcleo da f.d.p. da amostra "atual" da mesma maneira como se combinam dois núcleos das densidades amostrais. Além disso, se obtém simplificação considerável quando se usam estatísticas suficientes que resumem toda a informação relevante, contida na amostra.

(10) O conceito bayesiano de estatística suficiente e a comparação com o conceito de Fisher-Neyman, pode ser encontrado em LINDLEY (1965), págs. 46-58 e em FERGUSON (1969), Capítulo 3.

(11) A demonstração deste teorema pode ser vista em RAIFFA e SCHALAIFFER (1961), pág. 45.

3.3 - Aplicações em Modelo de Regressão Linear Simples

3.3.1 - O modelo e pressuposições

Faremos aplicação do método bayesiano de estimação por pontos na situação em que se observa uma dependência linear de uma variável aleatória Y em função de uma variável não-aleatória X , o que pode ser estabelecido pelo modelo estatístico:

$$Y_i = A + \beta X_i + u_i \quad (i=1,2,\dots,n) . \quad (3.1)$$

Ao estabelecermos o modelo, e dispondo de n pares de valores das variáveis, pressupomos que:

- I) Os valores da variável independente, X , são fixos (não-aleatórios);
- II) Os erros u_i são independentes e normalmente distribuídos, com média zero e variância σ^2 (chamada de variância residual).

Assim, podemos escrever:

$$u_i \sim N(0; \sigma^2) \quad (3.2a)$$

$$E(u_i) = 0 \quad (3.2b)$$

$$E(u_i^2) = E[Y_i - A - \beta X_i]^2 = \sigma^2 \quad (3.2c)$$

$$E(u_i, u_j) = 0, \text{ para } i \neq j . \quad (3.2d)$$

Para simplificação dos cálculos, podemos utilizar a variável centrada $x_i = X_i - \bar{X}$, o que corresponderia, graficamente, a tomar a média de X_i como origem dos eixos das abcissas. Desta forma

o modelo estatístico fica:

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - \bar{X}) + u_i$$

ou

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$

(3.3)

De acordo com a notação introduzida anteriormente, definimos:

$\pi(\theta) = \pi(\alpha; \beta; \sigma^2)$: f.d.p. da distribuição "a priori", onde θ é o vetor aleatório dos parâmetros;

$p(y|\theta)$: função de verossimilhança da amostra aleatória

$$y = (y_1; y_2; \dots; y_n);$$

$\pi(\theta|y) = \pi(\alpha; \beta; \sigma^2|y)$: f.d.p. da distribuição "a posteriori".

3.3.2 - Uso da f.d.p. indicando ausência de informação "a priori"

Esta primeira aplicação é interessante para comparar os resultados com os obtidos pelos métodos usuais de Mínimos Quadrados e da Máxima Verossimilhança, que não consideram conhecimento sobre os parâmetros anterior à realização do experimento.

Pelo método bayesiano, o desconhecimento ou "ignorância" "a priori" sobre os parâmetros (considerados variáveis aleatórias) deve ser evidenciado na expressão (1.2). Utilizaremos, para este caso, a f.d.p. "a priori", de acordo com as regras de Jeffreys, expressas por (2.14) e (2.16).

Assim, para α e β , $-\infty < \alpha$; $\beta < +\infty$, consideramos a f.d.p. "a priori":

$$\pi(\alpha) d\alpha = k_1 d\alpha \quad \text{ou} \quad \pi(\alpha) d\alpha \propto d\alpha \quad (3.4a)$$

$$\pi(\beta) d\beta = k_2 d\beta \quad \text{ou} \quad \pi(\beta) d\beta \propto d\beta \quad (3.4b)$$

Como $0 < \sigma^2 < +\infty$, tomamos $\phi = \ln \sigma^2$ e teremos $-\infty < \phi < +\infty$ e a f.d.p. será:

$$\pi(\phi) d\phi = k_3 d\phi \quad \text{ou} \quad \pi(\phi) d\phi \propto d\phi$$

Sendo $d\phi = \frac{d\sigma^2}{\sigma^2}$, teremos:

$$\pi(\sigma^2) d\sigma^2 = k_3 \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} \quad \text{ou} \quad \pi(\sigma^2) d\sigma^2 \propto \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} \quad (3.4c)$$

Considerando α , β e σ^2 independentemente distribuídos, a f.d.p. "a priori" será:

$$\pi(\alpha; \beta; \sigma^2) = k_1 k_2 k_3 \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{ou} \quad \pi(\alpha; \beta; \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (3.5)$$

Pelas pressuposições do modelo, os Y_i (dados os x_i , α , β e σ^2) serão normal e independentemente distribuídos, com

$$E(Y_i | x_i; \alpha; \beta; \sigma^2) = \alpha + \beta x_i$$

e

$$V(Y_i | x_i; \alpha; \beta; \sigma^2) = \sigma^2 \quad \text{ou} \quad V(Y_i | x_i; \theta) = \sigma^2.$$

Desta forma a Função de Verossimilhança fica:

$$p(y|x; \alpha; \beta; \sigma^2) = (2\pi \cdot \sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [Y_i - \alpha - \beta(X_i - \bar{X}_i)]^2 \right\} \quad (3.6)$$

Para se determinar a f.d.p. "a posteriori" para os parâmetros, utilizamos a fórmula de Bayes:

$$\pi(\alpha; \beta; \sigma^2 | y) = \frac{\pi(\alpha; \beta; \sigma^2) \cdot p(y | \alpha; \beta; \sigma^2)}{p(y)}$$

ou, com $\theta = (\alpha; \beta; \sigma^2)'$:

$$\pi(\theta | y) = \frac{\pi(\theta) \cdot p(y | \theta)}{p(y)} \quad \text{ou} \quad \pi(\theta | y) = k \cdot \pi(\theta) \cdot p(y | \theta) \quad (3.7)$$

onde,

$$k^{-1} = p(y) = \int_{\Omega} \pi(\theta) \cdot p(y | \theta) \, d\theta$$

Para obtermos $k = [p(y)]^{-1}$ escrevemos a densidade conjunta $p(y; \alpha; \beta; \sigma^2)$ e integramos em relação aos parâmetros obtendo a densidade marginal $p(y)$:

$$p(y; \alpha; \beta; \sigma^2) = \pi(\alpha; \beta; \sigma^2) \cdot p(y | \alpha; \beta; \sigma^2)$$

$$p(y; \alpha; \beta; \sigma^2) = \frac{k_4}{\sigma^2} (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [Y_i - \alpha - \beta x_i]^2 \right\},$$

$(k_4 = k_1 k_2 k_3),$

$$p(y; \alpha; \beta; \sigma^2) = k_4 (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-1/2} (n+2) \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [Y_i - \alpha - \beta x_i]^2 \right\} \quad (3.8)$$

Por simplicidade, a menos que traga dúvidas, deixaremos de escrever o índice do somatório. Façamos, também:

$$S_{xx} = \sum (X_i - \bar{X})^2 = \sum x_i^2 \quad (3.9a)$$

$$S_{yy} = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 \quad (3.9b)$$

$$S_{xy} = \sum (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i \quad (3.9c)$$

$$S^2 = \sum y_i^2 - \frac{[\sum x_i y_i]^2}{\sum x_i^2} \quad \text{ou} \quad S^2 = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \quad (3.9d)$$

$$a = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i \quad \text{e} \quad b = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (3.9e)$$

Com as notações em (3.9), o somatório do expoente da expressão (3.8) pode ser escrito de forma mais adequada:

$$\begin{aligned} \sum^n [Y_i - \alpha - \beta x_i]^2 &= \sum^n [(Y_i - \bar{Y}) + (\bar{Y} - \alpha) - \beta x_i]^2 \\ &= \sum y_i^2 + n(\bar{Y} - \alpha)^2 + \beta^2 \sum x_i^2 + 2(\bar{Y} - \alpha) \sum (Y_i - \bar{Y}) - 2\beta \sum x_i y_i - \\ &\quad - 2\beta(\bar{Y} - \alpha) \sum x_i \\ &= S_{yy} + n(\alpha - a)^2 + \beta^2 S_{xx} - 2\beta S_{xy} \\ &= S_{yy} + n(\alpha - a)^2 + S_{xx} \left(\beta^2 - 2\beta \frac{S_{xy}}{S_{xx}} + \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}^2} \right) - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \\ &= S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} + n(\alpha - a)^2 + S_{xx} \left(\beta - \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum [Y_i - \alpha - \beta x_i]^2 = S^2 + n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2$$

Logo:

$$\begin{aligned} p(y; \alpha; \beta; \sigma^2) &= k_4 \cdot (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-1/2} (n+2) \cdot e^{-(S^2/2\sigma^2)} \cdot e^{-(n/2\sigma^2)(\alpha-a)^2} \times \\ &\quad \times e^{-(S_{xx}/2\sigma^2)(\beta-b)^2} \end{aligned}$$

então:

$$k^{-1} = p(y) = k_4 (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-1/2} (n+2) \cdot e^{-(S^2/2\sigma^2)} \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-(n/2\sigma^2)(\alpha-a)^2} \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-(S_{xx}/2\sigma^2)(\beta-b)^2} d\beta \right] d\alpha \right\} d\sigma^2$$

Resolvendo as integrais, obtemos:

$$k = \frac{1}{k_4} \cdot \frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} (\pi)^{1/2} (n-2) S^{n-2} \quad (3.10)$$

A f.d.p. "a posteriori" para os parâmetros ficará:

$$\pi(\alpha; \beta; \sigma^2 | y) = k \cdot \pi(\alpha; \beta; \sigma^2) \cdot p(y | \alpha; \beta; \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{k_4} \cdot \frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} (\pi)^{1/2} (n-2) \cdot S^{n-2} \cdot k_4 (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-1/2} (n+2) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [S^2 + n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2] \right\}$$

$$\pi(\alpha; \beta; \sigma^2 | y) = \frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}{2^{n/2} \cdot \pi} \cdot \frac{S^{n-2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} (\sigma^2)^{-1/2} (n+2) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [S^2 + n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2] \right\} \quad (3.11)$$

3.3.2.1 - F.D.P.s marginais "a posteriori" para os parâmetros

a) F.D.P. marginal "a posteriori" para β

Integrando (3.11) em relação a α , obtemos:

$$\pi(\beta; \sigma^2 | y) = A \int_{-\infty}^\infty e^{-(n/2\sigma^2)(\alpha-a)^2} d\alpha = A \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} (\sigma^2)^{1/2}$$

onde A é tudo que não envolve $\underline{\alpha}$ em (3.11)

$$\pi(\beta; \sigma^2 | y) = \frac{\sqrt{S_{xx}} S^{n-2}}{2^{1/2(n-1)} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}-1)} (\sigma^2)^{-1/2(n+1)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [S^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]} \quad (3.12)$$

Integrando em relação a σ^2 , encontramos:

$$\pi(\beta | y) = \frac{\sqrt{S_{xx}} S^{n-2}}{2^{1/2(n-1)} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}-1)} \int_0^\infty (\sigma^2)^{-1/2(n+1)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [S^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]} d\sigma^2$$

$$\therefore \pi(\beta | y) = \frac{\sqrt{S_{xx}} S^{n-2}}{B(\frac{n}{2}-1; \frac{1}{2})} [S^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]^{-1/2(n-1)} \quad (3.13)$$

b) F.D.P. marginal "a posteriori" para α

Integrando (3.11), em relação a β e, em seguida, em relação a σ^2 , teremos:

$$\pi(\alpha; \sigma^2 | y) = \frac{\sqrt{n} S^{n-2} (\sigma^2)^{-1/2(n+1)}}{2^{1/2(n-1)} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2}-1)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [S^2 + n(\alpha-a)^2]} \quad (3.14)$$

e

$$\pi(\alpha | y) = \frac{\sqrt{n} S^{n-2}}{B(\frac{n}{2}-1; \frac{1}{2})} [S^2 + n(\alpha-a)^2]^{-1/2(n-1)} \quad (3.15)$$

c) F.D.P. marginal "a posteriori" para σ^2

Integrando (3.12) em relação a β ou integrando (3.14) em relação a α encontraremos:

$$\pi(\sigma^2 | y) = \frac{S^{n-2}}{2^{(n/2)-1} \Gamma(\frac{n}{2}-1)} (\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-(S^2/2\sigma^2)} \quad (3.16)$$

e) F.D.P. conjunta "a posteriori" para α e β

Integrando (3.11) em relação a σ^2 , obteremos:

$$\pi(\alpha; \beta | y) = C \int_0^\infty (\sigma^2)^{-1/2 (n+2)} \cdot e^{-(1/2\sigma^2) [S^2 + n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]} d\sigma^2$$

onde C inclui todos os termos que não envolvem σ^2 .

$$\therefore \pi(\alpha; \beta | y) = \frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}} (S^2)^{(n/2)-1}}{\pi B(\frac{n}{2}-1; 1)} [S^2 + n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]^{-n/2} \quad (3.17)$$

3.3.2.2 - Estimadores de Bayes para os parâmetros

Como vimos em 3.1.2.2, o estimador de Bayes deve minimizar o Risco "a posteriori". Se utilizarmos a função Perda Quadrática, o estimador de Bayes é a média da distribuição "a posteriori".

a) Estimador para α

Na f.d.p. "a posteriori" de α em (3.15) fazemos $v = n-2$ e determinamos a esperança matemática:

$$\pi(\alpha | y) = \frac{\sqrt{n} S^v}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} [S^2 + n(\alpha-a)^2]^{-1/2 (v+1)}$$

$$\begin{aligned}\alpha^* = E(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot \pi(\alpha|y) \, d\alpha = \frac{\sqrt{n} \, S^v}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot [S^2 + n(\alpha-a)^2]^{-1/2(v+1)} \, d\alpha \\ &= \frac{\sqrt{n} \, S^v}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \, S^{-(v+1)} \left[1 + \left(\frac{\alpha-a}{S/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-1/2(v+1)} \, d\alpha\end{aligned}$$

$$\text{fazendo } \frac{\alpha-a}{S/\sqrt{n}} = w \implies \alpha = \frac{S}{\sqrt{n}} w + a \implies d\alpha = \frac{S}{\sqrt{n}} dw$$

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{n} \, S^{-1}}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(a + \frac{S}{\sqrt{n}} w\right) (1 + w^2)^{-1/2(v+1)} \, dw$$

$$\alpha^* = \frac{1}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \left[a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (1 + w^2)^{-1/2(v+1)} \, dw + \frac{S}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} w(1 + w^2)^{-1/2(v+1)} \, dw \right]$$

A primeira integral dentro dos colchetes vale $B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})$

e a segunda integral vale zero, logo:

$$\alpha^* = \frac{1}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \cdot a \cdot B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})$$

$$\therefore \alpha^* = a = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (3.18)$$

Este resultado era o esperado, uma vez que, sem informação "a priori", o peso da informação sobre α provém do resultado observado na amostra.

b) Estimador para β

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente para α , teremos:

$$\beta^* = E(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta \cdot \pi(\beta|y) d\beta = \frac{\sqrt{S_{xx}} S^v}{B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} \beta [S^2 + S_{xx}(\beta-b)^2]^{-1/2(v+1)} d\beta$$

e encontraremos:

$$\beta^* = b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (3.19)$$

Vale aqui a mesma observação feita para o resultado (3.18).

3.3.2.3 - Testes de hipóteses a respeito dos parâmetros

a) Considerando os termos que não incluem os parâmetros α e β como constantes, podemos escrever (3.11) na forma:

$$\pi(\alpha; \beta|y) \propto e^{-(n/2\sigma^2)(\alpha-a)^2} e^{-(S_{xx}/2\sigma^2)(\beta-b)^2}$$

Isto nos mostra que α e β (independentes) têm as seguintes distribuições "a posteriori", respectivamente:

$$\alpha \sim N(a; \frac{\sigma^2}{n}) \quad (3.20a)$$

$$\beta \sim N(b; \frac{\sigma^2}{S_{xx}}) \quad (3.20b)$$

As distribuições indicadas em (3.20) concordam com os resultados observados em (3.18) e (3.19) para os estimadores de Bayes para os parâmetros α e β . Por outro lado, nos mostram também

que as variâncias dessas distribuições são:

$$V(\alpha) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (3.21a)$$

e

$$V(\beta) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \quad (3.21b)$$

Para as afirmações probabilísticas "a posteriori", para os intervalos de confiança e para testes de significância acerca dos parâmetros, podemos considerar as seguintes variáveis com distribuições normais padronizadas:

$$\frac{\alpha - a}{\sqrt{V(\alpha)}} = \frac{\alpha - a}{(\sigma^2/n)^{1/2}} \sim N(0;1) \quad (3.22a)$$

$$\frac{\beta - b}{\sqrt{V(\beta)}} = \frac{\beta - b}{(\sigma^2/S_{xx})^{1/2}} \sim N(0;1) \quad (3.22b)$$

Como a variância é desconhecida, podemos substituí-la por uma estimativa e as variáveis terão distribuição "t" como mostramos a seguir.

Por (3.15) escrevemos:

$$\pi(\alpha|y) \propto [S^2 + n(\alpha - a)^2]^{-1/2 (n-1)}$$

fazendo: $v = n-2$ e $s^2 = \frac{S^2}{v}$, teremos:

$$\pi(\alpha|y) \propto [vs^2 + n(\alpha - a)^2]^{-1/2 (v+1)} .$$

Consideremos

$$t_1 = \frac{\alpha - a}{[S^2/n(n-2)]^{1/2}} = \frac{\alpha - a}{[s^2/n]^{1/2}},$$

onde s^2/n é a estimativa da variância de α : $\hat{V}(\alpha) = s^2/n$.

O Jacobiano da transformação é constante, e podemos es
crever:

$$\pi(t_1 | y) \propto \left[1 + \frac{t_1^2}{v} \right]^{-1/2 (v+1)}$$

$$\pi(t_1 | y) = \frac{1}{\sqrt{v} B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{t_1^2}{v} \right)^{-1/2 (v+1)}$$

Esta última expressão da f.d.p. "a posteriori" nos
mostra que a variável aleatória

$$t_1 = \frac{\alpha - a}{(S^2/nv)^{1/2}} = \frac{\alpha - a}{\sqrt{\hat{V}(\alpha)}}$$

tem distribuição de "t" com $v = n-2$ graus de liberdade.

De maneira análoga, podemos verificar que, de (3.13)

$$\pi(\beta | y) \propto [S^2 + S_{xx}(\beta - b)^2]^{-1/2 (v+1)}$$

$$\pi(t_2 | y) = \frac{1}{\sqrt{v} B(\frac{v}{2}; \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{t_2^2}{v} \right)^{-1/2 (v+1)}$$

Concluimos que $t_2 = \frac{\beta - b}{[S^2/v(S_{xx})]^{1/2}} = \frac{\beta - b}{\sqrt{\hat{V}(\beta)}}$ tem dis-
tribuição de "t" com $v = n-2$ graus de liberdade.

Assim, os valores de t_1 e t_2 , acima descritos, são utilizados para testar hipóteses sobre valores dos parâmetros (considerando-se cada um individualmente), sendo comparados com valores de tabelas de "t" para $v = n-2$ graus de liberdade, como no processo usual.

b) De (3.16) podemos escrever:

$$\pi(\sigma^2 | y) \propto (\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-(S^2/2\sigma^2)}$$

Fazendo $w = \frac{S^2}{\sigma^2}$, o jacobiano da transformação vale $-\frac{(\sigma^2)^2}{S^2}$, então:

$$\pi(w | y) \propto \left(\frac{S^2}{w}\right)^{-n/2} \cdot e^{-w/2} \cdot \frac{S^2}{w^2}$$

$$\pi(w | y) \propto w^{(v/2)-1} \cdot e^{-w/2}$$

ou

$$\pi(w | y) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2}) \cdot 2^{v/2}} w^{(v/2)-1} \cdot e^{-w/2}$$

Esta última expressão nos mostra que a variável $w = \frac{S^2}{\sigma^2}$ tem distribuição de "qui-quadrado" com $v = n-2$ graus de liberdade.

c) Para testar hipóteses conjuntas sobre α e β , consideremos (3.17), que pode ser escrita

$$\pi(\alpha, \beta | y) \propto [S^2 + n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2]^{-n/2}$$

$$\pi(\alpha, \beta | y) \propto (S^2)^{-n/2} \left[1 + \frac{n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2}{S^2} \right]^{-n/2}$$

$$\pi(\alpha, \beta | y) \propto \left[1 + \frac{n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2}{vs^2} \right]^{-n/2}$$

sendo a constante de proporcionalidade igual a

$$\frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}{B(\frac{n-2}{2}; 1)} \cdot \frac{1}{vs^2}$$

Fazendo:

$$F = \frac{n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2}{2s^2} ,$$

o Jacobiano da transformação vale $\frac{2s^2}{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}$ e escrevemos:

$$\pi(F | y) = \frac{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}{B(\frac{n-2}{2}; 1)} \cdot \frac{1}{vs^2} \left[1 + \frac{2}{v} F \right]^{-n/2} \cdot \frac{2s^2}{\sqrt{n} \sqrt{S_{xx}}}$$

$$\pi(F | y) = \frac{1}{B(\frac{v}{2}; 1)} \left(\frac{2}{v} \right) \left[1 + \frac{2}{v} F \right]^{-1/2 (v+2)}$$

Comparando com a f.d.p. de uma distribuição de F com v_1 e v_2 graus de liberdade:

$$p(F | v_1; v_2) = \frac{1}{B(\frac{v_1}{2}; \frac{v_2}{2})} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{v_1/2} \cdot F^{(v_1/2)-1} \left[1 + \frac{v_1}{v_2} F \right]^{-1/2 (v_1+v_2)}$$

notamos que a última expressão tem a mesma forma com $v_1 = 2$ e $v_2 = v$.

Logo:

$$F = \frac{n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2}{2s^2}$$

tem distribuição de F com 2 e v graus de liberdade.

Quando quisermos testar uma única hipótese envolvendo, concomitantemente, os valores dos dois parâmetros α e β , utilizamos o teste F. Vale a pena notar que, neste caso, testar as hipóteses

$$H_0: \alpha = \alpha_1 \text{ e } \beta = \beta_1$$

contra

$$H_A: \alpha \neq \alpha_1 \text{ e } \beta \neq \beta_1$$

não significa fazer dois testes consecutivos para $H_0: \alpha = \alpha_1$ e, em seguida, outro para a hipótese $H_0: \beta = \beta_1$.

Este teste de hipótese conjunta sobre os parâmetros de $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$, significa testar a hipótese de que a equação de regressão tem equação: $y = \alpha_1 + \beta_1 x$.

d) O teste de significância para $\beta = 0$, ou seja, para a independência entre as duas variáveis, pode ser colocado sob outra forma, comparável ao que se faz normalmente na análise de variância. Pelo que foi visto anteriormente em (a), e pela simetria da distribuição de "t", podemos elevar ao quadrado, obtendo

$$t_{\varepsilon}^2 = \frac{b^2}{s^2/v(S_{xx})} = \frac{b^2}{\left[s_{yy} - \frac{s_{xy}^2}{s_{xx}} \right] / (n-2)}$$

Escrevendo:

$$S_{yy} = \left[S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \right] + \left[\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \right]$$

onde $S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \text{Soma de Quadrados Total};$

$$\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = b \cdot S_{xy} = \text{Soma de Quadrados devida à Regressão};$$

$$S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \text{Soma de Quadrados Residual}.$$

Desta forma:

$$\text{SQ Total} = \text{SQ Reg} + \text{SQ Res}$$

e, desde que $t_{\varepsilon}^2(v)$ é equivalente a $F_{1,v}$, podemos usar este último teste

$$t_{\varepsilon}^2 = F_{1,v} = \frac{\frac{\text{SQ Reg}}{1}}{\frac{\text{SQ Res}}{v}} = \frac{\text{QM Reg}}{\text{QM Res}}.$$

Estes resultados concordam com aqueles usuais da análise de variância, e podemos fazer:

Causas da Variação	Graus de Liberdade	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	F
Regressão	1	$S_{xy}^2 / S_{xx} = b^2 \cdot \sum x_i^2$	$b^2 \cdot S_{xx}$	QMReg/QMRes
Resíduo	$v=n-2$	$S_{yy} - (S_{xy}^2 / S_{xx}) = S^2$	$S^2 / v = s^2$	
Total	$n-1$	S_{yy}		

3.3.2.4 - Intervalos de confiança para os parâmetros

Sendo t_0 o valor crítico de tabela com $v = n-2$ graus de liberdade e a um nível de confiança estabelecido, os intervalos de confiança para α e β são, respectivamente:

$$a - t_0 \cdot s(\alpha) < \alpha < a + t_0 \cdot s(\alpha)$$

e

$$b - t_0 \cdot s(\beta) < \beta < b + t_0 \cdot s(\beta)$$

onde $s(\alpha) = \sqrt{\tilde{V}(\alpha)}$ e $s(\beta) = \sqrt{\tilde{V}(\beta)}$.

Embora o método de Bayes forneça no caso em questão, os mesmos valores numéricos obtidos pelos métodos usuais, a sua interpretação do intervalo de confiança é diferente. Aqui, obtida a f.d.p. "a posteriori" para β , por exemplo, e sendo $R \subset \Omega$ (uma particular sub-região do espaço paramétrico) e $1-\varepsilon$ o nível de confiança estabelecido para se encontrar t_0 , o intervalo de confiança acima significa que:

Figura 4 - Intervalo de confiança de Bayes $(\beta_1; \beta_2)$ para o parâmetro β , ao nível de confiança ε .

Notemos que este intervalo é certamente único apenas nas distribuições unimodais. Nestes casos, se a distribuição for simétrica, centrada no valor modal, o intervalo com dada probabilidade contendo β é o intervalo bayesiano de máxima densidade "a posteriori". É claro que o interesse é obter o intervalo de menor amplitude possível. Logo, devemos minimizar $(\beta_2 - \beta_1)$, sujeito à condição de que

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \pi(\beta|y) d\beta = 1 - \varepsilon$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, podemos formar:

$$\phi = \beta_2 - \beta_1 + \lambda \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \pi(\beta|y) d\beta - 1 + \varepsilon \right]$$

Derivando parcialmente em relação a β_1 e β_2 e igualando a zero:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_1} = -1 - \lambda \pi(\beta_1|y) = 0 \implies 1 + \lambda \pi(\beta_1|y) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta_2} = +1 + \lambda \pi(\beta_2|y) = 0 \implies 1 + \lambda \pi(\beta_2|y) = 0$$

donde $\pi(\beta_1|y) = \pi(\beta_2|y)$.

Assim, determinando β_1 e β_2 tal que $\pi(\beta_1|y) = \pi(\beta_2|y)$, o intervalo $[\beta_1; \beta_2]$ será mínimo nos casos de distribuições unimodais (como ilustra a Figura 4).

Na teoria não-bayesiana, o intervalo de confiança é tomado como aleatório e tendo a probabilidade $(1-\epsilon)$ de cobrir o verdadeiro valor do parâmetro. Em outras palavras, se considerarmos um grande número de amostras, os intervalos considerados incluirão o parâmetro em $100(1-\epsilon)\%$ dos casos.

Na teoria bayesiana, onde as afirmações são condicionais às observações amostrais, com as quais se estabelece o intervalo, a interpretação é de que a probabilidade "a posteriori" de que o verdadeiro valor de β esteja no intervalo é de $100(1-\epsilon)\%$.

3.3.2.5 - Intervalo de previsão

Em algumas circunstâncias é necessário estimar o valor de Y que corresponda a um valor de X que não existe na amostra; estabelecer limites para o valor esperado de Y para um dado X_0 , ou mesmo testar a hipótese de que a reta de regressão passe através do ponto $(x_0; y_0)$.

Nestes casos devemos utilizar a distribuição "a posteriori" de

$$\delta = E(y|x_0) = \alpha + \beta(X_0 - \bar{X})$$

Para uma dada variância, as expressões (3.11) e (3.20) nos mostram que $E(y|x_0)$ tem distribuição normal com:

$$\text{média} = E[E(y|x_0)] = a + b(x_0 - \bar{x}) = \delta$$

$$\begin{aligned}\text{variância} &= V[E(y|x_o)] = V[\alpha + \beta x_o] = V(\alpha) + x_o^2 V(\beta) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + x_o^2 \cdot \frac{\sigma^2}{S_{xx}} = \left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}}\right) \cdot \sigma^2\end{aligned}$$

Logo:

$$\delta = E[y|x_o] \cap N\left\{a + bx_o; \left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}}\right) \cdot \sigma^2\right\}$$

Também, para um dado x_o , a distribuição conjunta "a posteriori" de δ e σ^2 será:

$$\pi(\delta; \sigma^2 | x_o) = \pi(\delta | \sigma^2; x_o) \cdot \pi(\sigma^2 | x_o)$$

$$\propto (\sigma^2)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}} \right) \right]^{-1} [\delta - E(\delta)]^2}$$

$$\times (\sigma^2)^{-(1/2v)-1} \cdot e^{-S^2/2\sigma^2}$$

$$\propto (\sigma^2)^{-1/2(v+3)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \{ S^2 + \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}} \right) \right]^{-1} [\delta - E(\delta)]^2 \}}$$

Integrando em relação a σ^2 :

$$\pi(\delta | x_o) \propto \left\{ S^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}} \right)^{-1} [\delta - E(\delta)]^2 \right\}^{-1/2(v+1)}$$

$$\pi(\delta | x_o) \propto \left\{ 1 + \frac{[\delta - E(\delta)]^2}{S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{x_o^2}{S_{xx}} \right)} \right\}^{-1/2(v+1)}$$

Se fizermos:

$$t_3 = \frac{\delta - E(\delta)}{\left[S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}} \right) / v \right]^{1/2}}$$

o Jacobiano da transformação é constante e

$$\pi(t_3 | x_0) \propto \left\{ 1 + \frac{t_3^2}{v} \right\}^{-1/2(v+1)}$$

o que mostra que a distribuição "a posteriori" de $E(y|x_0)$ é tal que

$$\frac{E(y|x_0) - (a + bx_0)}{\left[\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}} \right) s^2 \right]^{1/2}}$$

tem distribuição de "t" com $v = n-2$ graus de liberdade.

Esta última conclusão nos permite utilizar o teste "t" para testar a hipótese de que $E(y|x_0) = y_0$, ou seja, que a reta de regressão passa pelo ponto $(x_0; y_0)$. Além disso podemos estabelecer o intervalo de confiança para $E(y|x_0)$, considerando t_0 como valor crítico de "t" com $(n-2)$ graus de liberdade, e ao nível de confiança estabelecido e encontraremos:

$$\hat{\delta} - t_0 \cdot s(y_0) < E(y|x_0) < \hat{\delta} + t_0 \cdot s(y_0) \quad (3.23)$$

onde

$$\hat{\delta} = E[E(y|x_0)] \quad \text{e} \quad s^2(y_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}} \right) \cdot \frac{s^2}{v}$$

Em outras situações, queremos prever o valor da variável dependente para $x = x_0$. A precisão desta previsão é feita pelo intervalo de previsão. Para um determinado valor de $x = x_0$, os valores de Y (como variável aleatória) variam em torno de $E(y|x_0)$ (sua verdadeira média), com variância σ^2 . Como y_0 , estimativa de $E(y|x_0)$, também é variável aleatória, a variância σ_p^2 é dada por:

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 + V[E(y|x_0)] = \sigma^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right) \sigma^2$$

$$\sigma_p^2 = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right) \cdot \sigma^2$$

O intervalo de previsão para uma nova observação será estimado por:

$$\hat{\delta} - t_o \cdot s_p < y_o < \hat{\delta} + t_o \cdot s_p \quad (3.24)$$

onde $s_p^2 = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right) \cdot s^2$.

3.3.3 - Uso da F.D.P. "a priori" informativa

3.3.3.1 - F.D.P. "a priori" normal para os coeficientes e variância residual conhecida

Esta situação tem mais interesse teórico, permitindo verificar, pela expressão analítica dos estimadores, como e com que peso relativo a informação "a priori" e a informação contida na amostra interferem no grau de confiança que podemos ter na estimati-

va "a posteriori". O pouco interesse prático desta situação é que consideramos a variância conhecida, o que normalmente não ocorre.

O fato de considerarmos a distribuição "a priori" normal para os parâmetros significa que as experiências anteriores nos levaram a ter um grau de confiança maior num determinado valor para o parâmetro, com certa variação, como vimos em (2.4). Desta forma, para α e β , consideramos as f.d.p. "a priori":

$$\alpha \cap N(\alpha_o; \sigma_a^2) \rightarrow \pi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_a} e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2} (\alpha - \alpha_o)^2}, \quad (3.25a)$$

$$\beta \cap N(\beta_o; \sigma_b^2) \rightarrow \pi(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_b} e^{-\frac{1}{2\sigma_b^2} (\beta - \beta_o)^2}, \quad (3.25b)$$

$$\text{e com variância conhecida} \rightarrow \sigma^2 = \sigma_o^2. \quad (3.25c)$$

Sendo α e β independentemente distribuídos, a distribuição conjunta "a priori" fica:

$$\pi(\alpha; \beta) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b} e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2} (\alpha - \alpha_o)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_b^2} (\beta - \beta_o)^2} \quad (3.25d)$$

Pelas pressuposições do modelo apresentado em (3.2), os Y_i serão normal e independentemente distribuídos com média

$$E[Y_i | \alpha, \beta, X_i; \sigma_o^2] = \alpha + \beta x_i$$

e variância

$$V(Y_i | x_i; \beta; \alpha) = \sigma_o^2.$$

A função de verossimilhança será dada por:

$$p(y|\alpha;\beta;\sigma_0^2) = (2\pi)^{-n/2} \cdot (\sigma_0^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta x_i)^2} \quad (3.26)$$

Para encontrarmos a f.d.p. da distribuição "a posteriori"

$$\pi(\alpha;\beta|y;\sigma_0^2) = \frac{\pi(\alpha;\beta) \cdot p(y|\alpha,\beta,\sigma_0^2)}{p(y)}$$

devemos encontrar $p(y)$. Para isto, escrevemos a distribuição conjunta:

$$\begin{aligned} p(y;\alpha;\beta) &= \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2}(\alpha-\alpha_0)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_b^2}(\beta-\beta_0)^2} \cdot (2\pi)^{-n/2} \times \\ &\quad \times (\sigma_0^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}[S^2+n(\alpha-a)^2+S_{xx}(\beta-b)^2]} \\ p(y;\alpha;\beta) &= \frac{(2\pi)^{-1/2(n+2)}}{\sigma_a\sigma_b} (\sigma_0^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{S^2}{2\sigma_0^2}} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{S_{xx}}{\sigma_0^2}(\beta-b)^2 + \frac{1}{\sigma_b^2}(\beta-\beta_0)^2\right]} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{n}{\sigma_0^2}(\alpha-a)^2 + \frac{1}{\sigma_a^2}(\alpha-\alpha_0)^2\right]} \end{aligned}$$

Melhorando os expoentes, fazemos:

$$\begin{aligned} &\frac{n}{\sigma_0^2} \alpha^2 - \frac{2n}{\sigma_0^2} a\alpha + \frac{n}{\sigma_0^2} a^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} \alpha^2 - 2 \frac{1}{\sigma_a^2} \alpha_0 \cdot \alpha + \frac{1}{\sigma_a^2} \alpha_0^2 = \\ &= \left(\frac{n}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}\right) \cdot \alpha^2 - 2\left(\frac{n}{\sigma_0^2} a + \frac{1}{\sigma_a^2} \alpha_0\right) \cdot \alpha + \frac{n}{\sigma_0^2} a^2 + \frac{1}{\sigma_a^2} \alpha_0^2 \end{aligned}$$

e chamamos:

$$M = \frac{n}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \quad e \quad N = \frac{n}{\sigma_o^2} a + \frac{\alpha_o}{\sigma_a^2} \quad (3.27a)$$

$$P = \frac{S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \quad e \quad Q = \frac{b \cdot S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{\beta_o}{\sigma_b^2} \quad (3.27b)$$

Completando o quadrado da expressão acima:

$$(\sqrt{M} \alpha - \frac{N}{\sqrt{M}})^2 + \frac{na^2}{\sigma_o^2} + \frac{\alpha_o^2}{\sigma_a^2} - \frac{N^2}{M} = (\sqrt{M} \alpha - \frac{N}{\sqrt{M}})^2 + R = M(\alpha - \frac{N}{M})^2 + R$$

De maneira semelhante o outro expoente fica:

$$\frac{S_{xx}}{\sigma_o^2} (\beta - b)^2 + \frac{1}{\sigma_b^2} (\beta - \beta_o)^2 = P(\beta - \frac{Q}{P})^2 + T$$

$$\text{onde } T = \frac{b^2 \cdot S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{\beta_o^2}{\sigma_b^2} - \frac{Q^2}{P}$$

Logo:

$$p(y; \alpha; \beta) = A \cdot e^{-1/2(R+T)} \cdot e^{-P/2[\beta - (Q/P)]^2} \cdot e^{-M/2[\alpha - (N/M)]^2}$$

$$p(y) = A \cdot e^{-1/2(R+T)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-P/2[\beta - (Q/P)]^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-M/2[\alpha - (N/M)]^2} d\alpha \right] d\beta$$

Resolvendo as integrais encontramos:

$$p(y) = A \cdot e^{-1/2(R+T)} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{P} \cdot \sqrt{M}} \quad (3.28)$$

Assim, a f.d.p. "a posteriori" ficará:

$$\pi(\alpha; \beta | y; \sigma_o^2) = \frac{A \cdot e^{-M/2[\alpha - (N/M)]^2} \cdot e^{-P/2[\beta - (Q/P)]^2} \cdot e^{-1/2(R+T)}}{A \cdot e^{-1/2(R+T)} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{P} \cdot \sqrt{M}}}$$

$$\therefore \pi(\alpha; \beta | y; \sigma_o^2) = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-P/2[\beta - (Q/P)]^2} \cdot \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-M/2[\alpha - (N/M)]^2} \quad (3.29)$$

A estimativa de Bayes para os parâmetros será, como foi adotado em 3.2.2, a média da distribuição "a posteriori".

Por (3.29) podemos observar que:

$$\pi(\alpha | y) = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-M/2[\alpha - (N/M)]^2} \therefore \alpha \cap N\left(\frac{N}{M}; \frac{1}{M}\right) \quad (3.30a)$$

e

$$\pi(\beta | y) = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-P/2[\beta - (Q/P)]^2} \therefore \beta \cap N\left(\frac{Q}{P}; \frac{1}{P}\right) \quad (3.30b)$$

Assim as estimativas de Bayes (α^* e β^*), para os parâmetros α e β , e suas respectivas variâncias, serão:

$$\alpha^* = \frac{N}{M} = \frac{\frac{n}{\sigma_o^2} a + \frac{\alpha_o}{\sigma_a^2}}{\frac{n}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}} \quad \text{ou} \quad \alpha^* = \frac{\frac{n}{\sigma_o^2} a + \alpha_o (\sigma_a^2)^{-1}}{\left(\frac{n}{\sigma_o^2}\right)^{-1} + (\sigma_a^2)^{-1}} \quad (3.31a)$$

$$V(\alpha) = \frac{1}{M} = \frac{1}{\frac{n}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_a^2}} \quad \text{ou} \quad V(\alpha) = \frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma_o^2}\right)^{-1} + (\sigma_a^2)^{-1}} \quad (3.31b)$$

De modo semelhante, teremos para β ; a partir de (3.30b)

$$\beta^* = \frac{Q}{P} = \frac{\frac{b \cdot S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{\beta_o}{\sigma_b^2}}{\frac{S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}} \quad \text{ou} \quad \beta^* = \frac{b \left(\frac{\sigma_o^2}{S_{xx}} \right)^{-1} + \beta_o (\sigma_b^2)^{-1}}{\left(\frac{\sigma_o^2}{S_{xx}} \right)^{-1} + (\sigma_b^2)^{-1}} \quad (3.32a)$$

$$V(\beta) = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{S_{xx}}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}} \quad \text{ou} \quad V(\beta) = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_o^2}{S_{xx}} \right)^{-1} + (\sigma_b^2)^{-1}} \quad (3.32b)$$

Podemos definir Precisão como sendo o recíproco da variância:

$$h_a = \frac{1}{\sigma_a^2} = (\sigma_a^2)^{-1} \quad \text{precisão "a priori" do parâmetro } \alpha$$

$$h_b = \frac{1}{\sigma_b^2} = (\sigma_b^2)^{-1} \quad \text{precisão "a priori" do parâmetro } \beta$$

$$h'_a = \frac{n}{\sigma_o^2} = \left(\frac{\sigma_o^2}{n} \right)^{-1} \quad \text{precisão amostral sobre } \alpha$$

$$h'_b = \frac{S_{xx}}{\sigma_o^2} = \left(\frac{\sigma_o^2}{S_{xx}} \right)^{-1} \quad \text{precisão amostral sobre } \beta$$

Desta forma, podemos escrever (3.31a) e (3.31b) das seguintes maneiras:

$$\alpha^* = \frac{a h'_a + \alpha_o h_a}{h'_a + h_a} \quad \text{e} \quad V(\alpha) = \frac{1}{h'_a + h_a} \quad (3.34a)$$

De maneira semelhante (3.32a) e (3.32b) ficarão:

$$\beta^* = \frac{b \cdot h'_b + \beta_o \cdot h_b}{h'_b + h_a} \quad \text{e} \quad V(\beta) = \frac{1}{h'_b + h_b} \quad . \quad (3.34b)$$

Estas duas últimas expressões nos mostram fatos interessantes sobre as estimativas de Bayes. Embora a situação seja hipotética, porquanto estamos considerando a variância conhecida, os resultados expressam analiticamente resultados esperados pelo método e pelo bom senso:

a) Os estimadores de Bayes (média da distribuição "a posteriori") para os parâmetros são médias aritméticas ponderadas das médias "a priori" e amostral, cujos pesos são as respectivas precisões. Assim, quanto maior a precisão da informação provinda dos dados, maior será o peso a eles associado; quanto maior a precisão da informação "a priori", maior o peso a ela associado.

b) Quando n aumenta, a precisão amostral sobre α também aumenta, o que faz diminuir a variância "a posteriori", $V(\alpha)$.

c) Quanto maior o número de elementos amostrados e quanto menos concentrados em torno de $\bar{X}$ estiverem os x_i amostrados (maior S_{xx}), tanto maior será a precisão amostral sobre β . Assim, a variância "a posteriori" decrescerá.

3.3.3.2 - Uso da Distribuição Conjugada

Em nosso exemplo de aplicação faremos uso das distribuições conjugadas citadas em 3.2.4 e que passamos a desenvolver para o caso do modelo de regressão linear simples em estudo.

Seja conhecida uma amostra $\{y_1\}$ de tamanho n_1 . Partindo de "ignorância" sobre os valores dos parâmetros, obtemos a f.d.p. da distribuição "a posteriori", como mostra a expressão (3.11):

$$\pi_1(\alpha, \beta, \sigma^2 | y_1) \propto (\sigma^2)^{-1/2(n_1+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[v_1 s_1^2 + n_1 (\alpha - a_1)^2 + S'_{xx} (\beta - b_1)^2 \right] \right\} \quad (3.35)$$

Como vimos, as informações que podemos obter sobre os parâmetros, a partir desta amostra são que:

$$\alpha \cap N(a_1; \frac{\sigma^2}{n_1})$$

$$\beta \cap N(b_1; \frac{\sigma^2}{S'_{xx}})$$

$$\frac{v_1 s_1^2}{\sigma^2} \cap \chi^2_{(v_1)}$$

Estas informações podem ser usadas como conhecimento prévio para os novos dados que podemos obter, fazendo uma amostragem de tamanho n , admitindo que esta seja oriunda da mesma população e cuja verossimilhança é dada por:

$$p(y|\alpha; \beta; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [vs^2 + n(\alpha-a)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2] \right\} \quad (3.36)$$

Combinando (3.35) e (3.36) pelo teorema de Bayes, te
remos a f.d.p. da distribuição "a posteriori":

$$\pi_2(\alpha; \beta; \sigma^2 | y_1; y) \propto \pi_1(\alpha, \beta, \sigma^2 | y_1) \cdot p(y | \alpha, \beta, \sigma^2)$$

$$\pi_2(\alpha; \beta; \sigma^2 | y_1; y) \propto (\sigma^2)^{-1/2(n_1+n+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\begin{array}{l} v_1 s_1^2 + vs^2 + \\ + n_1(\alpha-a_1)^2 + n(\alpha-a)^2 + \\ + S'_{xx}(\beta-b_1)^2 + \\ + S_{xx}(\beta-b)^2 \end{array} \right] \right\} \quad (3.37)$$

Pelo que foi visto em 3.2.4, o uso de distribuição "a
priori" conjugada com a verossimilhança da amostra, conduz à distri
buição "a posteriori" com f.d.p. da mesma forma.

Assim:

$$\pi_2(\alpha; \beta; \sigma^2 | y_1; y) \propto (\sigma^2)^{-1/2(n_2+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\begin{array}{l} v_2 s_2^2 + n_2(\alpha-a_2)^2 + \\ + S''_{xx}(\beta-b_2)^2 \end{array} \right] \right\} \quad (3.38)$$

Para podermos comparar (3.38) com (3.37), façamos al
gumas passagens algébricas dentro dos colchetes do expoente desta úl
tima expressão (3.37):

$$\begin{aligned} E &= v_1 s_1^2 + vs^2 + n_1(\alpha-a_1)^2 + n(\alpha-a)^2 + S'_{xx}(\beta-b_1)^2 + S_{xx}(\beta-b)^2 \\ &= v_1 s_1^2 + vs^2 + n_1 \alpha^2 - 2n_1 a_1 \alpha + n_1 a_1^2 + n \alpha^2 - 2na \alpha + na^2 + S'_{xx} \beta^2 - \\ &\quad - 2S'_{xx} b_1 \beta + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} \beta^2 - 2S_{xx} b \beta + S_{xx} b^2 \end{aligned}$$

$$E = v_1 s_1^2 + v s^2 + (n_1 + n) \alpha^2 - 2(n_1 a_1 + n a) \alpha + n_1 a_1^2 + n a^2 + (S'_{xx} + S_{xx}) \beta^2 - \\ - 2(S'_{xx} b_1 + S_{xx} b) \beta + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} b^2 ,$$

fazendo: $n_2 = n_1 + n$

$$n_2 a_2 = n_1 a_1 + n a$$

$$S''_{xx} = S'_{xx} + S_{xx}$$

$$S''_{xx} \cdot b_2 = S'_{xx} b_1 + S_{xx} b$$

e completando os quadrados, teremos:

$$E = v_1 s_1^2 + v s^2 + n_1 a_1^2 + n a^2 + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} b^2 + n_2 (\alpha - a_2)^2 - n_2 a_2^2 + \\ + S''_{xx} (\beta - b_2)^2 - S''_{xx} b_2^2 .$$

Logo:

$$v_2 s_2^2 = v_1 s_1^2 + v s^2 + n_1 a_1^2 + n a^2 + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} b^2 - n_2 a_2^2 - S''_{xx} b_2^2 \quad (3.39)$$

Desta forma, temos os elementos para tirar conclusões de como nosso conhecimento "a priori", formalizado por (3.35) foi modificado pela evidência da amostra atual (3.36) e evidenciado pela f.d.p. "a posteriori" em (3.38).

A expressão (3.38) é da mesma forma que (3.11) e, portanto, todas as conclusões desenvolvidas de 3.3.2 são válidas para este caso e resumidas assim:

a) F.D.P. marginais "a posteriori" para os parâmetros:

$$\pi_2(\alpha|y_1; y) = \frac{\sqrt{n_2} \cdot S_2^{n_2-2}}{B\left(\frac{n_2}{2} - 1; \frac{1}{2}\right)} [S_2^2 + n_2(\alpha - a_2)^2]^{-1/2(n_2-1)} \quad (3.40a)$$

$$\pi_2(\beta|y_1; y) = \frac{\sqrt{S_{xx}''} \cdot S_2^{n_2-2}}{B\left(\frac{n_2}{2} - 1; \frac{1}{2}\right)} [S_2^2 + S_{xx}''(\beta - b_2)^2]^{-1/2(n_2-1)} \quad (3.40b)$$

$$\pi_2(\sigma^2|y_1; y) = \frac{S_2^{n_2-2}}{2^{(n_2/2)-1} \cdot \Gamma\left(\frac{n_2}{2} - 1\right)} (\sigma^2)^{-n_2/2} \cdot e^{-S_2^2/2\sigma^2} \quad (3.40c)$$

$$\pi_2(\alpha; \beta|y_1; y) \propto [S_2^2 + n_2(\alpha - a_2)^2 + S_{xx}''(\beta - b_2)^2]^{-n_2/2} \quad (3.40d)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{n_2} (n_1 a_1 + n a) \\ b_2 &= \frac{1}{S_{xx}''} (S_{xx}' b_1 + S_{xx} b) \\ S_2^2 &= v_2 s_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

e, por (3.39):

$$s_2^2 = \frac{1}{v_2} (v_1 s_1^2 + v s^2 + n_1 a_1^2 + n a^2 + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} b^2 - n_2 a_2^2 - S''_{xx} b_2^2)$$

b) Estimadores de Bayes para os parâmetros e suas variâncias:

As distribuições "a posteriori" para os parâmetros α e β serão:

$$\alpha \cap N(a_2; \frac{\sigma^2}{n_2})$$

$$\beta \cap N(b_2; \frac{\sigma^2}{S''_{xx}})$$

Assim:

$$\alpha^* = a_2 = \frac{n_1 a_1 + n a}{n_1 + n} \quad e \quad V(\alpha) = \frac{\sigma^2}{n_2} \quad (3.42a)$$

e

$$\beta^* = b_2 = \frac{S'_{xx} b_1 + S_{xx} b}{S''_{xx}} \quad e \quad V(\beta) = \frac{\sigma^2}{S''_{xx}} \quad (3.42b)$$

c) Imparcialidade das estimativas de Bayes:

De (3.42a):

$$\begin{aligned} E(a_2) &= \frac{1}{n_2} E(n_1 a_1 + n a) = \frac{1}{n_2} [n_1 E(a_1) + n E(a)] \\ &= \frac{1}{n_2} [n_1 \alpha + n \alpha] = \alpha \end{aligned}$$

De (3.42b):

$$\begin{aligned} E(b_2) &= \frac{1}{S''_{xx}} E(S'_{xx} b_1 + S_{xx} b) = \frac{1}{S''_{xx}} [S'_{xx} E(b_1) + S_{xx} E(b)] \\ &= \frac{1}{S''_{xx}} [S'_{xx} \beta + S_{xx} \beta] = \beta \end{aligned}$$

De (3.39):

$$\begin{aligned} v_2 E(s_2^2) &= v_1 E(s_1^2) + v E(s^2) + n_1 E(a_1^2) + n E(a^2) + S'_{xx} E(b_1^2) + \\ &\quad + S_{xx} E(b^2) - n_2 E(a_2^2) - S''_{xx} E(b_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 E(s_2^2) &= v_1 \sigma^2 + v \sigma^2 + n_1 \left(\frac{\sigma^2}{n_1} + \alpha^2 \right) + n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \alpha^2 \right) + \\ &\quad + S'_{xx} \left(\frac{\sigma^2}{S'_{xx}} + \beta^2 \right) + S_{xx} \left(\frac{\sigma^2}{S_{xx}} + \beta^2 \right) - \\ &\quad - n_2 \left(\frac{\sigma^2}{n_2} + \alpha^2 \right) - S''_{xx} \left(\frac{\sigma^2}{S''_{xx}} + \beta^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 E(s_2^2) &= (v_1 + v) \sigma^2 + (n_1 + n) \alpha^2 + (S'_{xx} + S_{xx}) \beta^2 + 4\sigma^2 - \\ &\quad - n_2 \alpha^2 - S''_{xx} \beta^2 - 2\sigma^2 \end{aligned}$$

$$v_2 E(s_2^2) = (v_1 + v + 2) \sigma^2$$

$$v_2 E(s_2^2) = v_2 \sigma^2 \implies E(s_2^2) = \sigma^2$$

d) Intervalos de confiança e testes de hipóteses:

De maneira análoga ao que foi desenvolvido em 3.3.2.3, podemos deduzir que:

$\frac{\alpha - a_2}{s(a_2)}$ tem distribuição de "t" com $v_2 = n_2 - 2$ graus de liberdade;

$\frac{\beta - b_2}{s(b_2)}$ tem distribuição de "t" com $v_2 = n_2 - 2$ graus de liberdade;

$\frac{v_2 s_2^2}{\sigma^2}$ tem distribuição de "qui-quadrado" com $v_2 = n_2 - 2$ graus de liberdade;

$$\text{onde: } s(a_2) = \sqrt{V(a_2)} = \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \quad \text{e} \quad s(b_2) = \sqrt{V(b_2)} = \frac{s_2}{\sqrt{S''_{xx}}}$$

Desta forma, os testes de hipóteses, Intervalos de Confiança para os parâmetros e Intervalo de Previsão são elaborados da mesma maneira já vista em 3.3.2.3, 3.3.2.4 e 3.3.2.5.

4. COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS ATRAVÉS DE SIMULAÇÃO DE DADOS

4.1 - Obtenção dos Dados

Usou-se o Computador IBM 1130 para a simulação dos dados e para os cálculos necessários à análise estatística, através do programa constante no Apêndice I.

A análise de regressão pelo método dos Mínimos Quadrados foi aplicada aos dados da chamada "Amostra Atual", de tamanhos $n=7$, $n=11$ e $n=15$.

O método de Bayes, para a análise de regressão, se baseou em dados informativos, disponíveis previamente através de estatísticas suficientes, obtidas da chamada "Amostra Prévia" (também gerada por simulação aleatória), de tamanho $n_1=21$, com valores da variável independente (considerada não aleatória) iguais a: -30; -30; -30; -20; -20; -20; -10; -10; -10; 0; 0; 0; 10; 10; 10; 20; 20;

20; 30; 30; 30. As informações "a priori" foram incorporadas à análise atual pela Distribuição Conjugada.

Foram estabelecidos 11 (onze) casos de "experimentos", obedecendo aos seguintes critérios:

a) Os dados foram gerados segundo os modelos:

$$Y_i = 60 + 0,8 x_i + e_i^{(I)}, \quad \text{para a "Amostra Prévia"}$$

e

$$Y_j = 60 + 0,8 x_j + e_j^{(II)}, \quad \text{para a "Amostra Atual"}$$

onde, x é a variável independente, com valores centrados em $x=0$;

$$e_i^{(I)} \cap N(0; \sigma_1^2) \quad \text{e} \quad e_j^{(II)} \cap N(0; \sigma_2^2)$$

b) Os 11 casos de simulação foram subdivididos em dois grupos, conforme os dados das amostras "Atual" e "Prévia" fossem gerados com variâncias residuais iguais ou diferentes;

$$\text{Grupo I: } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$\text{Grupo II: } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

c) A simulação dos dados amostrais, para cada um dos 11 casos, foi feita conforme os tamanhos das amostras e valores das variâncias residuais, constantes na Tabela 1.

Tabela 1 - Especificação dos 11 casos de simulação dos dados amostrais conforme o tamanho da amostra e variância residual.

GRUPO	CASO	Amostra "Prévia"		Amostra "Atual"	
		n_1	σ_1^2	n	σ_2^2
I	1º	21	36	7	36
I	2º	21	36	11	36
I	3º	21	36	15	36
I	4º	21	144	7	144
I	5º	21	144	11	144
I	6º	21	144	15	144
II	7º	21	36	7	144
II	8º	21	36	11	144
II	9º	21	36	15	144
II	10º	21	144	7	36
II	11º	21	144	11	36

d) Os valores da variável x_j utilizados, de acordo com o tamanho da Amostra "Atual", foram:

$n=7$: -30; -20; -10; 0; 10; 20; 30

$n=11$: -30; -20; -20; -10; -10; 0; 10; 10; 20; 20; 30

$n=15$: -30; -30; -20; -20; -10; -10; 0; 0; 0; 10; 10; 20; 20;
30; 30

e) A simulação dos dados amostrais e a análise de regressão pelos dois métodos foram processadas, repetindo-se duzentas vezes este procedimento para cada um dos 11 casos.

4.2 - Resultados

Com os dados gerados foram obtidos:

a) A análise de regressão, segundo o modelo $Y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$, para cada uma das duzentas repetições, em cada caso, determinando-se as estimativas dos parâmetros, as estimativas das variâncias das estimativas, os intervalos de confiança para os parâmetros ao nível de confiança de 95%.

Nas amostras "Prévia" e "Atual" foram feitas as análises pelo método dos Mínimos Quadrados. Para a análise pelo método de Bayes utilizaram-se as expressões obtidas em 3.3.3.2, de Distribuições Conjugadas.

b) Os valores médios (das duzentas repetições) das estimativas dos parâmetros, das estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros e dos limites dos intervalos de confiança dos parâmetros, para cada caso considerado.

c) O erro quadrático médio das estimativas dos parâmetros para cada um dos 11 casos considerados e para os dois métodos.

O erro quadrático médio é aqui definido por:

$$EQM_{\alpha} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\hat{\alpha}_i - 60)^2, \text{ para as estimativas de } \alpha;$$

$$EQM_{\beta} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\hat{\beta}_i - 0,8)^2, \text{ para as estimativas de } \beta.$$

d) A frequência das estimativas dos parâmetros em 30 pequenos intervalos de amplitude 1,00 e entre os valores 40,50 e 70,50 para α ; de amplitude 0,40 e entre os valores 0,22 e 1,42 para β , em cada um dos casos.

De posse dos dados gerados pela simulação, e feitas as análises de regressão pelos dois métodos considerados, os resultados obtidos podem ser observados nas Tabelas de 2 a 5.

A Tabela 2 mostra os valores médios obtidos em 200 repetições, para cada caso do Grupo I. Os dados para a Amostra "Prévia" e Amostra "Atual" foram gerados com erros residuais de mesma variância.

A Tabela 3 mostra os valores médios obtidos em 200 repetições, para cada caso do Grupo II. Os dados para as Amostras "Prévia" e "Atual" foram gerados com erros residuais de variâncias diferentes.

Nas Tabelas 4 e 5 são apresentadas as distribuições de frequências das estimativas de Mínimos Quadrados nas Amostras "Atuais" e estimativas de Bayes para os parâmetros α e β , nos casos do Grupo II.

É valioso ressaltar que as estimativas de Bayes para os casos do Grupo II foram obtidas sob a hipótese de que os dados das amostras "Prévia" e "Atual" tivessem a mesma variância residual, embora, para este grupo, tenham sido consideradas diferentes. Tal procedimento visa testar a robustez do método quando é violada a hipótese.

Tabela 2 - Valores médios das estimativas, das variâncias destas estimativas, e dos limites de intervalo de confiança a 95%, para os parâmetros α e β , nas 200 repetições de cada caso do Grupo I.

CASO	ANÁLISE	ESTIMATIVAS		VARIÂNCIA DA ESTIMATIVA		ERRO QUADRÁTICO		INTERVALOS DE CONFIANÇA 95%	
		α	β	α	β	α	β	α	β
$\sigma_1^2=36$	"PRÉVIA"	60,05	0,798	1,73	0,0043	1,6686	0,0037	57,33-62,77	0,66-0,93
$\sigma_2^2=36$	"ATUAL"	60,09	0,794	5,26	0,0131	5,7316	0,0109	54,46-65,72	0,51-1,07
1º	BAYES	60,06	0,799	1,29	0,0032	1,3781	0,0026	57,74-62,38	0,68-0,91
$\sigma_1^2=36$	"PRÉVIA"	60,03	0,802	1,73	0,0043	2,0467	0,0027	57,32-62,73	0,66-0,93
$\sigma_2^2=36$	"ATUAL"	59,92	0,796	3,27	0,0094	3,4682	0,0093	55,92-63,91	0,58-1,01
2º	BAYES	59,99	0,800	1,13	0,0029	1,3099	0,0022	57,84-62,14	0,69-0,91
$\sigma_1^2=36$	"PRÉVIA"	59,99	0,803	1,73	0,0043	1,7020	0,0039	57,27-62,71	0,66-0,93
$\sigma_2^2=36$	"ATUAL"	60,04	0,807	2,33	0,0062	2,3541	0,0059	56,79-63,28	0,63-0,97
3º	BAYES	60,01	0,801	0,99	0,0025	1,0145	0,0024	58,00-62,02	0,70-0,90
$\sigma_1^2=144$	"PRÉVIA"	60,03	0,803	6,93	0,0173	6,8229	0,0155	54,58-65,47	0,53-1,07
$\sigma_2^2=144$	"ATUAL"	59,86	0,805	20,44	0,0511	19,1941	0,0531	48,78-70,94	0,24-1,35
4º	BAYES	59,98	0,802	5,16	0,0129	5,2817	0,0117	55,36-64,61	0,57-1,03
$\sigma_1^2=144$	"PRÉVIA"	60,00	0,796	6,72	0,0168	6,6327	0,0193	54,64-65,36	0,52-1,06
$\sigma_2^2=144$	"ATUAL"	60,13	0,791	13,34	0,0386	13,7690	0,0358	52,11-68,15	0,36-1,22
5º	BAYES	60,05	0,797	4,48	0,0117	4,0317	0,0128	55,75-64,34	0,57-1,01
$\sigma_1^2=144$	"PRÉVIA"	59,94	0,794	6,83	0,0170	7,0028	0,0170	54,54-65,34	0,52-1,06
$\sigma_2^2=144$	"ATUAL"	60,13	0,793	9,41	0,0252	9,8341	0,0260	53,64-66,63	0,45-1,12
6º	BAYES	60,02	0,794	3,96	0,0101	4,5144	0,0095	56,01-64,03	0,59-0,99
(1)	(2)	(3)		(4)		(5)		(6)	

Tabela 3 - Valores médios das estimativas, das variâncias destas estimativas, e dos limites do intervalo de confiança a 95%, para os parâmetros α e β , nas 200 repetições de cada caso do Grupo II.

CASO	ANÁLISE	ESTIMATIVAS		VARIÂNCIA DA ESTIMATIVA		ERRO QUADRÁTICO		INTERVALOS DE CONFIANÇA 95%	
		α	β	α	β	α	β	α	β
$\sigma_1^2=36$ $\sigma_2^2=144$ 7º	"PRÉVIA" "ATUAL" BAYES	60,00 59,92 59,98	0,802 0,793 0,797	1,73 20,18 2,25	0,0043 0,0504 0,0056	1,8115 21,6413 2,3025	0,0043 0,0521 0,0056	57,29-62,72 49,00-70,34 56,94-63,03	0,66-0,93 0,24-1,34 0,64-0,95
$\sigma_1^2=36$ $\sigma_2^2=144$ 8º	"PRÉVIA" "ATUAL" BAYES	60,01 60,07 60,03	0,802 0,806 0,805	1,69 13,28 2,29	0,0042 0,0384 0,0060	1,9169 11,4027 2,1608	0,0033 0,0413 0,0058	57,33-62,69 52,02-68,12 56,97-63,09	0,66-0,93 0,37-1,23 0,64-0,95
$\sigma_1^2=36$ $\sigma_2^2=144$ 9º	"PRÉVIA" "ATUAL" BAYES	59,95 59,88 59,92	0,797 0,796 0,797	1,73 9,18 2,19	0,0043 0,0245 0,0056	1,6544 9,3973 2,3032	0,0042 0,0276 0,0055	57,22-62,67 53,47-66,29 56,94-62,90	0,66-0,93 0,46-1,12 0,64-0,94
$\sigma_1^2=144$ $\sigma_2^2=36$ 10º	"PRÉVIA" "ATUAL" BAYES	60,17 59,93 60,11	0,798 0,778 0,786	6,69 5,40 4,11	0,0167 0,0135 0,0102	7,2130 5,3451 4,2450	0,0150 0,0138 0,0088	54,82-65,53 54,26-65,59 55,98-64,24	0,52-1,06 0,49-1,05 0,58-0,99
$\sigma_1^2=144$ $\sigma_2^2=36$ 11º	"PRÉVIA" "ATUAL" BAYES	59,95 59,86 59,92	0,793 0,791 0,791	6,92 3,23 3,35	0,0017 0,0093 0,0088	7,4059 3,5464 3,6603	0,0115 0,0095 0,0059	54,51-65,38 55,88-63,85 56,21-63,62	0,52-1,07 0,57-1,00 0,60-0,98
(1)	(2)	(3)		(4)		(5)		(6)	

Tabela 4 - Distribuição de frequências das estimativas de Mínimos Quadrados (MQ) e de Bayes (B), para o parâmetro α (valor verdadeiro = 60) nos casos do Grupo II.

INTERVALOS	7º CASO n=7		8º CASO n=11		9º CASO n=15		10º CASO n=7		11º CASO n=11	
	MQ	B	MQ	B	MQ	B	MQ	B	MQ	B
<47,49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47,50-48,49	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
48,50-49,49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49,50-50,49	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50,50-51,49	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
51,50-52,49	6	0	1	0	1	0	1	0	0	0
52,50-53,49	5	0	4	0	1	0	1	0	0	0
53,50-54,49	6	0	8	0	3	0	1	0	0	0
54,50-55,49	15	0	8	0	5	0	2	2	0	3
55,50-56,49	11	1	10	1	17	1	9	7	8	6
56,50-57,49	15	6	19	7	17	6	13	11	13	13
57,50-58,49	12	30	12	19	18	28	34	20	32	18
58,50-59,49	14	40	28	47	25	49	23	37	34	39
59,50-60,49	22	46	20	43	25	48	26	45	33	40
60,50-61,49	17	41	21	54	26	39	42	32	45	51
61,50-62,49	15	27	11	17	19	20	21	18	16	14
62,50-63,49	9	8	21	12	21	6	18	15	15	6
63,50-64,49	14	1	19	0	10	2	4	9	2	6
64,50-65,49	8	0	7	0	7	1	4	2	2	4
65,50-66,49	6	0	8	0	1	0	1	2	0	0
66,50-67,49	6	0	3	0	1	0	0	0	0	0
67,50-68,49	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0
68,50-69,49	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
69,50-70,49	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
>70,50	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4.3 - Exemplo Ilustrativo

Sorteada uma das duzentas repetições do 1º caso, os dados obtidos por simulações e os resultados correspondentes da análise de regressão são apresentados a seguir.

4.3.1 - Amostra "Prévia"

Os dados gerados pelo modelo $Y_i = 60 + 0,8 x_i + e_i^{(I)}$, com $e_i^{(I)}$ distribuído normalmente com média zero e variância $\sigma_1^2 = 36$, encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6 - Dados do 1º caso, simulados para a "Amostra Prévia", de tamanho $n_1=21$.

x_i	Y_i	x_i	Y_i	x_i	Y_i
-30	42,6033	-10	56,3636	10	67,1884
-30	31,3419	-10	50,2652	20	82,0902
-30	41,3210	0	62,8533	20	70,3279
-20	46,5628	0	63,7680	20	77,8651
-20	45,1694	0	65,2851	30	86,7205
-20	39,3568	10	78,9015	30	81,8474
-10	42,2986	10	73,3064	30	88,0109

O método dos Mínimos Quadrados fornece o seguinte conjunto de estatísticas suficientes $(n_1; a_1; b_1; s_1^2; S'_{xx})$:

$$\begin{aligned} n_1 &= 21 & b_1 &= 0,8247 & S'_{xx} &= 8400 \\ a_1 &= 61,59 & s_1^2 &= 25,20 & & \end{aligned}$$

4.3.2 - "Amostra Atual" e Estimativas de Bayes

Os dados gerados pelo modelo $Y_j = 60 + 0,8 x_j + e_j^{(II)}$, com $e_j^{(II)}$ distribuído normalmente com média zero e variância $\sigma_2^2 = 36$, encontram-se na Tabela 7.

Tabela 7 - Dados do 1º caso, simulados para a "Amostra Atual".

x_j	Y_j	x_j	Y_j
-30	36,1354	10	69,4674
-20	40,6495	20	81,8488
-10	47,6850	30	90,3001
0	74,0876		

O método dos Mínimos Quadrados para a "Amostra Atual" e o método de Bayes forneceram os seguintes resultados:

a) Estimativas dos parâmetros e as estimativas de suas variâncias:

"Amostra Atual"

$$a = 62,88 \quad \hat{V}(a) = 5,1771 \quad s^2 = 36,24$$

$$b = 0,9524 \quad \hat{V}(b) = 0,0129$$

Estimativas de Bayes

$$a_2 = 61,91 \quad \hat{V}(a_2) = 0,96$$

$$b_2 = 0,8567 \quad \hat{V}(b_2) = 0,0024$$

As equações das retas estimadas por Mínimos Quadrados e pelo método de Bayes acham-se representadas na Figura 5, comparadas com a verdadeira reta de regressão.

As distribuições "a posteriori" para os parâmetros α e β , baseadas no método de Bayes, estão representadas na Figura 6, pelas funções de densidade de probabilidade — $\pi(\alpha|y)$ e $\pi(\beta|y)$ — e comparadas com aquelas obtidas por Mínimos Quadrados aplicado à amostra "Atual" — $p(a)$ e $p(b)$ — e obtidas a partir das expressões (3.13) e (3.15).

b) Intervalos de confiança para os parâmetros:

Os intervalos de confiança para α e β ao nível de 95% foram determinados. Utilizando apenas a amostra "Atual", encontramos:

$$57,03 < \alpha < 68,73$$

$$0,66 < \beta < 1,24$$

O método bayesiano fornece:

$$58,89 < \alpha < 63,93$$

$$0,75 < \beta < 0,96$$

c) Intervalos de confiança para $E(Y_h)$ e intervalo de previsão para Y_h :

Para estimar o valor de Y_h que corresponde a um valor de x_h que não aparece na amostra, fazemos

$$\hat{Y}_h = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_h$$

e cuja precisão é avaliada pelo intervalo de previsão, cujos limites, ao nível de confiança de 95%, são dados por:

$$\hat{Y}_h \pm 15,477 \sqrt{\frac{8}{7} + \frac{x_h^2}{2800}}$$

ao se aplicar (3.24) à amostra "Atual".

O intervalo de Bayes, ao mesmo nível de confiança, tem limites dados por:

$$\hat{Y}_h \pm 12,377 \sqrt{\frac{29}{28} + \frac{x_h^2}{11200}}$$

O intervalo de confiança para $E(Y_h) = \alpha + \beta x_h$, ao nível de confiança de 95%, tem limites dados por:

$$\hat{Y}_h \pm 15,477 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{x_h^2}{2800}}$$

no caso de se aplicar (3.23) à amostra "Atual", enquanto que o intervalo, segundo Bayes, tem limites dados por:

$$\hat{Y}_h \pm 12,377 \sqrt{\frac{1}{28} + \frac{x_h^2}{11200}} .$$

Estes resultados podem ser observados na Figura 7.

d) Distribuição conjunta das estimativas dos parâmetros e da variância:

Por (3.14) e (3.12) encontramos a f.d.p. da distribuição conjunta para a estimativa do parâmetro e da variância, e que foram locadas em gráficos de isodensidade, como mostram as Figuras 8 e 9.

Figura 5 - Representação gráfica da reta ajustada (—) e a verdadeira reta de regressão (---).

A- Reta ajustada por Mínimos Quadrados: $\hat{Y}=62,88+0,9524x$

B- Reta ajustada pelo Método de Bayes: $\hat{Y}=61,91+0,8567x$

Figura 6 - Distribuição "a posteriori" para os parâmetros α e β da equação de regressão (—) comparada com a estimativa da f.d.p., obtida na amostra "Atual" pelo método de Mínimos Quadrados (---).

Figura 7 - A reta estimada, o Intervalo de Confiança (—) para $E(Y_h)$ e o Intervalo de Previsão (---) para Y_h .
 A - Pelo método dos Mínimos Quadrados
 B - Pelo método de Bayes

Figura 8 - Curvas de isodensidade da f.d.p. conjunta de α e β .

A - Por Mínimos Quadrados; o valor modal é 0,00432, para $a = 62,882$ e $s^2 = 22,65$

B - Pelo método de Bayes; o valor modal é 0,0234, para $a_2 = 61,915$ e $s_2^2 = 24,134$

Figura 9 - Curvas de isodensidades da f.d.p. conjunta de β e σ^2 .
 A - Por Mínimos Quadrados; o valor modal é 0,0863, para $b=0,9524$ e $s^2=22,65$
 B - Pelo método de Bayes; o valor modal é 0,4696, para $b_2=0,8567$ e $s_2^2=24,134$

4.4 - Discussão dos Resultados

Ao analisar os resultados obtidos, convém salientar que os dados disponíveis para informação "a priori" foram também simulados, de modo a considerar todas as situações possíveis quanto à qualidade da informação sobre os verdadeiros valores dos parâmetros. Apenas foi considerado fixo o tamanho da amostra "prévia" ($n_1 = 21$), maior que o da amostra "atual" (disponível para análise pelo método dos Mínimos Quadrados).

No presente estudo, a análise de regressão pelo método de Bayes utilizou apenas o caso das Distribuições Conjugadas para incorporar informação "a priori" às informações contidas na amostra "atual" e desenvolvido em 3.3.3.2.

4.4.1 - Estimativas dos parâmetros

A coluna (3) das Tabelas 2 e 3 mostra que as estimativas de Mínimos Quadrados e de Bayes para os parâmetros α e β da equação de regressão tendem aos valores verdadeiros ($\alpha=60$ e $\beta=0,80$), pelos valores médios obtidos nas 200 repetições de cada caso. Isto se explica pela lei dos Grandes Números e pelo fato de os estimadores serem imparciais.

Os estimadores de Bayes para o caso em questão são dados por (3.42):

$$\alpha^* = a_2 = \frac{n_1 a_1 + na}{n_1 + n}$$

$$\beta^* = b_2 = \frac{S'_{xx} b_1 + S_{xx} b}{S'_{xx} + S_{xx}} .$$

Estas expressões mostram que o estimador de Bayes é média ponderada com pesos positivos e, portanto, fornecerá estimativa com valor entre os valores ponderados e mais próximo daquele de maior peso.

Em 4.3, o exemplo particular do 1º caso estudado mostra que se pudéssemos contar, no momento, com apenas uma pequena amostra ($n=7$) e dispondo de informações prévias mais confiáveis ($n_1=21$), o método de Bayes melhoraria sensivelmente as estimativas, principalmente a do parâmetro β . Estes resultados podem ser visualizados na Figura 6, com a distribuição "a posteriori" de Bayes mais concentrada próxima ao valor verdadeiro do parâmetro.

Nos casos do Grupo II, onde os dados das amostras "prévia" e "atual" foram gerados com diferentes variâncias residuais, as estimativas poderiam ser obtidas de maneira aproximada pelas fórmulas (A-6) desenvolvidas no Apêndice II. Entretanto, os resultados apresentados referem-se à aplicação das fórmulas (3.42) anteriores, e as Tabelas 4 e 5 permitem verificar que as estimativas de Bayes são relativamente robustas. Contrariando a hipótese de igualdade de variâncias (sob a qual foram desenvolvidas), as estimativas de Bayes apresentaram distribuição de frequência mais concentrada em torno do

valor verdadeiro do parâmetro que as estimativas de Mínimos Quadrados, notadamente nos 7º, 8º e 9º casos em que se considerou um aumento de $\sigma_1^2 = 36$ (amostra "prévia") para $\sigma^2 = 144$ (amostra "atual") na variância residual. Mantida a hipótese de que os valores verdadeiros dos parâmetros sejam os mesmos, as estimativas de Bayes incorporaram, neste caso, informações "a priori" mais fidedignas (por se basearem em amostra de tamanho maior e de menor variância) que aquelas fornecidas pela amostra "atual". Para os 10º e 11º casos, diminuindo-se o valor da variância dos dados "atuais" em relação a dos dados da amostra "prévia", a vantagem da estimativa de Bayes se verifica, de certa forma, apenas quando obtida com base em amostra anterior de tamanho bem maior que a da "atual".

4.4.2 - Estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros

Os valores médios para as estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros, apresentados na coluna (4) da Tabela 2 tenderam aos valores verdadeiros destas variâncias e se confirmaram pelos valores dos erros quadráticos médios — coluna (5) — para todos os casos do Grupo I.

As expressões que determinaram estas estimativas foram as usuais obtidas pelo método dos Mínimos Quadrados na análise dos dados da amostra "atual" e pelas fórmulas (3.42) para a análise de Bayes:

$$\hat{V}(a) = \frac{s^2}{n} \quad ; \quad \hat{V}(b) = \frac{s^2}{S_{xx}}$$

e

$$\hat{V}(a_2) = \frac{s_2^2}{n_1 + n} \quad ; \quad \hat{V}(b_2) = \frac{s_2^2}{S'_{xx} + S_{xx}}$$

respectivamente, e, de (3.41):

$$s_2^2 = \frac{1}{(n_1 + n - 2)} \left[(n_1 - 2)s_1^2 + (n - 2)s^2 + n_1 a_1^2 + n a^2 + S'_{xx} b_1^2 + S_{xx} b^2 - (n_1 + n) a_2^2 - (S'_{xx} + S_{xx}) b_2^2 \right] .$$

Estas expressões mostram uma qualidade vantajosa dos estimadores de Bayes em relação aos de Mínimos Quadrados, que é de apresentarem menor variância.

Para os casos do Grupo II, os valores aproximados das estimativas destas variâncias podem ser determinados pelas expressões (A-5) encontradas no Apêndice II. Entretanto, para este estudo, os cálculos foram feitos na hipótese de as variâncias serem iguais e resultaram em valores consideravelmente menores quando obtidos pelo método de Bayes nos 7º, 8º e 9º casos, onde as informações prévias são baseadas em dados de menor variância, encontrados em amostras de tamanho maior. Para estes casos, se o interesse é ter conhecimento mais exato sobre o verdadeiro valor do parâmetro, o método de Bayes ofereceu estimativas de menor variância, mesmo que a situação real contrarie a hipótese de igualdade das variâncias e mesmo que a estimativa subestime a verdadeira variância atual. No 10º caso, as estimativas de Bayes para as variâncias das estimativas dos

parâmetros não apresentaram diferença significativa em relação às que_ las da análise "atual", enquanto que são maiores no 11º caso, para a estimativa da variância da estimativa de α .

4.4.3 - Intervalos de confiança para os parâmetros

As Tabelas 2 e 3 mostram que os valores médios das amplitudes dos Intervalos de Confiança para os parâmetros nas 200 repetições, foram menores quando foi utilizado o método bayesiano.

Além de apresentarem estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros menores, a análise bayesiana opera com maior número de graus de liberdade, o que determina menor valor de "t", utilizado na determinação dos limites do intervalo de confiança.

4.4.4 - Resultados gerais sobre a análise de regressão simulada

Os resultados discutidos nos três últimos itens, permitem fazer as seguintes observações gerais:

a) Quando a variância não sofre modificação do momento em que se toma o conjunto de estatísticas suficientes para representar as informações "a priori", até o momento em que se toma a amostra para a análise atual, a eficiência do método bayesiano é menos notória, à medida que o tamanho da amostra "atual" aumenta. Bastaria, por exem

plo, utilizar os mesmos dados simulados, invertendo-se a situação das amostras "atual" e "prévia" (o que é possível, pois ambas foram geradas aleatoriamente). Nesta nova situação, as estimativas de Bayes, usando Distribuições Conjugadas, são as mesmas. Entretanto, as estimativas de Mínimos Quadrados são obtidas em amostra "atual" mais informativa ($n=21$) que a "prévia" ($n_1=7$; $n_1=11$ ou $n_1=15$).

b) De um modo geral, a violação da hipótese de que a variância é a mesma, no caso em estudo mostrou-se que os resultados, quanto à eficiência dos estimadores de Bayes, não são significativamente modificados.

c) As estimativas das variâncias das estimativas dos parâmetros sendo menores e o número de graus de liberdade maiores no método de Bayes, fizeram com que conclusões semelhantes fossem estendidas para o intervalo de previsão para Y_h e intervalo de confiança para $E(Y_h)$, o que se pode verificar pela Figura 7 do exemplo em 4.3.

d) Os intervalos de confiança para os parâmetros, determinados neste estudo, ao nível de confiança de 95%, foram sempre menores quando obtidos pelo método de Bayes e, nas 200 repetições de cada caso, cobriram os verdadeiros valores dos parâmetros, nas percentagens que constam da Tabela 8.

Tabela 8 - Percentagens dos Intervalos de Confiança de Bayes que cobrem os verdadeiros valores dos parâmetros, observadas nas 200 repetições de cada caso.

GRUPO	CASO	PARÂMETROS	
		α	β
I	1º	93,5%	95,0%
	2º	89,0%	97,0%
	3º	94,5%	96,0%
	4º	93,5%	96,5%
	5º	96,5%	95,0%
	6º	93,0%	97,0%
II	7º	95,5%	94,0%
	8º	95,0%	93,0%
	9º	94,0%	95,0%
	10º	94,0%	97,5%
	11º	92,5%	98,0%

4.5 - Sugestões Para Outros Estudos

O manuseio dos dados simulados permitiu sugerir estudos de outras situações que não foram objetos deste trabalho:

a) Verificar, sob a hipótese de que os parâmetros α e β do modelo de regressão linear simples sejam iguais nos momentos em que se tomam as amostras "prévia" e "atual", até que proporção as variân-

cias podem ser modificadas, de modo a garantir a robustez do método de Bayes. Comparar estes resultados com aqueles que se podem obter de maneira aproximada quando se estudam as regressões com variâncias diferentes (Apêndice II), e verificar a precisão da aproximação deste método.

b) As Distribuições Conjugadas, usadas pelo método bayesiano neste trabalho, permitiram encontrar f.d.p. "a posteriori" de fácil manejo algébrico e com possibilidades de análise estatística semelhante àquela usada pelo método dos Mínimos Quadrados aplicada aos dados da amostra "atual". Nesta situação, admitir que nosso grau de confiança "a priori" sobre o parâmetro α , por exemplo, se traduz por uma distribuição normal de média a_1 e variância $\frac{s_1^2}{n_1}$, significa que estamos dando um peso maior ao valor central desta distribuição como informação prévia sobre o verdadeiro valor do parâmetro. Entretanto, pode acontecer que as informações disponíveis antes de se realizar o experimento atual não sejam convincentes, a ponto de se admitir maior grau de confiança a um valor particular do parâmetro. Mas o intervalo de confiança a um certo nível, obtido pelos métodos usuais na análise prévia, pode nos fornecer um intervalo de possíveis valores para o verdadeiro parâmetro. Assim, poder-se-ia deduzir as f.d.p. "a posteriori" pelo método de Bayes, baseando-se em distribuição "a priori" uniforme naquele intervalo. Esta situação não foi encontrada na literatura, a ponto de sugerir aplicação.

5. CONCLUSÕES

A análise do modelo de regressão linear, simples desenvolvida neste trabalho utilizou o método de Bayes para incorporar as informações sobre os parâmetros obtidos em uma amostra "prévia", àquelas encontradas na amostra "atual".

Adotou-se a função perda quadrática, para a qual o estimador de Bayes é a média da distribuição "a posteriori".

As estimativas de Bayes foram comparadas com as estimativas de mínimos quadrados, obtidas com os dados da amostra "atual", e as conclusões, de maneira geral, foram as seguintes:

a) O método bayesiano permite utilizar a função perda para adequar a estimação de parâmetros, de maneira realista, ao processo de decisão, mas a escolha correta desta função para traduzir uma situação prática, bem como as dificuldades algébricas nas deduções analí

ticas, têm sido limitações à aplicação do método.

b) Utilizando-se da distribuição "a priori" indicando "ignorância" sobre os parâmetros, as conclusões do método bayesiano são semelhantes às aquelas obtidas pelo método de Mínimos Quadrados, pois toda a informação sobre os parâmetros provém apenas da amostra "atual".

c) Na situação do item anterior, uma vantagem do método de Bayes é que na própria expressão analítica da função de densidade de probabilidade (f.d.p.) da distribuição "a posteriori" encontramos o tipo de teste de hipótese a ser aplicado à estimativa do parâmetro.

d) Quando a variância residual é conhecida, a estimativa de Bayes para um parâmetro é a média aritmética ponderada das estimativas "a priori" e amostral, cujos pesos são os inversos das respectivas variâncias. A precisão (inverso da variância) da estimativa de Bayes é a soma das precisões das estimativas "a priori" e "atual".

e) Quando a variância residual é desconhecida, e as informações disponíveis sobre os parâmetros pela amostra "prévia" são expressas por estatísticas suficientes, podemos incorporá-las às informações obtidas na amostra "atual" pelo teorema de Bayes, utilizando Distribuições Conjugadas.

f) Sob a hipótese de que os dados da amostra "prévia" e da amostra "atual" provêm da mesma população (mesma variância residual e mesmos parâmetros), o uso das Distribuições Conjugadas fornece esti

mativas imparciais, com menor variância que aquelas obtidas pelo método de Mínimos Quadrados, principalmente quando se dispõem de pequenas amostras "atuais".

g) Na situação do item anterior, os intervalos de confiança para os parâmetros e o intervalo de previsão são menores quando se usam os estimadores de Bayes.

h) A simulação de dados, além de confirmar as conclusões dos itens f e g, mostrou que a estimativa de Bayes tende mais rapidamente ao verdadeiro valor do parâmetro ao se fazerem repetições dos experimentos. Utilizando os mesmos estimadores de Bayes, o método se revelou robusto para pequenas diferenças entre as variâncias residuais das amostras "prévia" e "atual".

6. LITERATURA CITADA

- AITCHISON, J., 1964. Bayesian Tolerance Regions. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 26: 161-175.
- ANTLEMAN, G.R., 1965. Insensitivity to Non-Optimal Design in Bayesian Decision Theory. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 60: 584-601.
- AKAIKE, H., 1978. A New Look at the Bayes Procedure. Biometrika. Londres, 65: 53-59.
- BARNARD, G.A., 1954. Simplified Decision Functions. Biometrika. Londres, 41: 241-251.
- BARNARD, G.A., 1958. Thomas Bayes - A Bibliographical Note. Biometrika. Londres, 45: 293-295.
- BARTHOLOMEW, D.J., 1965. A Comparison of Some Bayesian and Frequentist Inferences. Biometrika. Londres, 52: 19-36.

- BAYES, T., 1958. An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Biometrika. Londres, 45: 296-315.
- BICKEL, P.J. e D. BLACKWELL, 1967. A Note on Bayes Estimates. Ann. Math. Statist. Baltimore, 38: 1907-1911.
- BORCH, K., 1967. The Theory of Risk. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 29: 432-467.
- BOX, G.E.P. e G.C. TIAO, 1962. A Further Look at Robustness Via Bayes's Theorem. Biometrika. Londres, 49: 419-432.
- EFRON, B. e C. MORRIS, 1971. Limiting the Risk of Bayes and Empirical Bayes Estimators - Part I: The Bayes Case. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 66: 807-815.
- EVANS, I.G., 1964. Bayesian Estimation of the Variance of Normal Distribution. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 26: 63-68.
- EL-SAYYAD, G.M., 1967. Estimation of the Parameter of an Exponential Distribution. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 29: 525-532.
- FERGUSON, T.S., 1969. Mathematical Statistics. 3^a Edição. Nova York, Academic Press, 396 p.
- FREEMAN, H., 1963. Introduction to Statistical Inference. Massachusetts, Addison-Wesley. 445 p.
- HADLEY, G., 1967. Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. São Francisco, Holden-Day. 570 p.

- HARTIGAN, J., 1964. Invariant Prior Distributions. Ann. Math. Statist. Baltimore, 35: 836-845.
- HARTIGAN, J., 1965. The Assymptotically Umbiased Prior Distributions. Ann. Math. Statist. Baltimore, 36: 1137-1152.
- HARTIGAN, J., 1969. Linear Bayesian Methods. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 31: 446-454.
- HOFFMANN, R., 1980. Estatística para Economistas. São Paulo, Livraria Pioneira Editora. 379 p.
- HOFFMANN, R. e S. VIEIRA, 1977. Análise de Regressão - Uma Introdução à Econometria. São Paulo, HUCITEC-EDUSP. 339 p.
- HOOG, R.V. e A.T. CRAIG, 1959. Introduction to Mathematical Statistics. Nova York, Macmillan. 438 p.
- JEFFREYS, H., 1948. Theory of Probability. 2^a Edição. Oxford, Clarendon Press. 578 p.
- LEHMANN, E.L., 1950. Some Principles of the Theory of Testing Hypotheses. Ann. Math. Statist. Baltimore, 21: 1-26.
- LINDLEY, D.V., 1953. Statistical Inference. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 15: 30-76.
- LINDLEY, D.V., 1956. On a Measure of the Information Provided by an Experiment. Ann. Math. Statist. Baltimore, 27: 986-1005.
- LINDLEY, D.V., 1957. Binomial Sampling Schemes and the Concept of Information. Biometrika. Londres, 44: 179-186.

- LINDLEY, D.V., 1965. Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint. Volume II. Cambridge, University Press. 291 p.
- LINDLEY, D.V., 1972. Bayesian Statistics - A Review. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics. 83 p.
- LINDLEY, D.V. e G.M. EL-SAYYAD, 1968. The Bayesian Estimation of Linear Functional Relationships. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 30: 190-202.
- LINDLEY, D.V. e A.F.M. SMITH, 1972. Bayes Estimates for the Linear Model. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 34: 1-41.
- McMILLAN, B., 1953. The Basic Theorems of Information Theory. Ann. Math. Statist. Baltimore, 24: 196-219.
- MOOD, A.M. e F.A. GRAYBILL, 1972. Introducción a la Teoría de la Estadística. 4.^a Edição. Madrid, Aguilar Ediciones. 536 p. Tradução de Rafael Pro Bermejo.
- PLACKETT, R.L., 1966. Current Trends in Statistical Inference. J. Roy. Statist. Soc. A. Londres, 129: 249-267.
- PRATT, J.W., 1964. Risk Aversion in the Small and in the Large. Econometrica. Clevedon, 32: 122-136.
- PRATT, J.W., 1965. Bayesian Interpretation of Standard Inference Statements. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 27: 169-203.
- PRATT, J.W.; H. RAIFFA e R. SCHALAIFER, 1964. The Foundation of Decision Under Uncertainty: an Elementary Exposition. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 59: 353-375.

- PUGACHEV, V.S., 1973. Introducción a la Teoría de las Probabilidades. Moscou, Editorial Mir. 323 p. Tradução de A. Samojválov.
- RAIFFA, H., 1977. Teoria da Decisão. São Paulo, Vozes-EDUSP. 346 p. Tradução de Sérgio Ellery Girão Barroso.
- RAIFFA, H. e R. SCHALAIFER, 1961. Applied Statistical Decision Theory. Boston, Harvard University. 355 p.
- ROTHENBERG, T.J., 1973. Efficient Estimation with a Priori Information. Londres, Yale University Press. 181 p.
- ROTHEMBERG, T.J., 1974. The Bayesian Approach and Alternatives in Econometrics - II. In: FIENBERG, S.E. e A. ZELLNER. Studies in Bayesian Econometrics and Statistics. North-Holand. p. 55-67.
- SAVAGE, L.J., 1954. The Foundations of Statistics. Nova York, John Wiley. 294 p.
- SILVEY, S.D., 1978. Statistical Inference. 3.^a Edição. Londres, Chapman and Hall. 191 p.
- SMITH, A.F.M., 1973. A General Bayesian Linear Model. J. Roy. Statistic. Soc. B. Londres, 35: 67-75.
- THATCHER, A.R., 1964. Relationships Between Bayesian and Confidence Limits for Predictions. J. Roy. Statist. Soc. B. Londres, 26: 176-192.
- THEIL, H., 1963. On the Use of Incomplet Prior Information in Regression Analysis. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 58: 401-414.

- TIAO, G.C. e G.E.P. BOX, 1974. Some Comments on "Bayes" Estimator.
In: FIENBERG, S.E. e A. ZELLNER. Studies in Bayesian Econometrics and Statistics. North-Holland. p. 619-626.
- TIAO, G.C. e A. ZELLNER, 1964. Bayes's Theorem and the Use of Prior Knowledge in Regression Analysis. Biometrika. Londres, 51: 219-230.
- VARIAN, H.R., 1974. A Bayesian Approach to Real Estate Assessment.
In: FIENBERG, S.E. e A. ZELLNER. Studies in Bayesian Econometrics and Statistics. North-Holland. p. 195-208.
- WALD, A., 1939. Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses. Ann. Math. Statist. Baltimore, 10: 299-326.
- WALD, A., 1950. Statistical Decision Functions. Nova York, John Wiley. 179 p.
- WINKLER, R.L., 1967. The Assessment of Prior Distributions in Bayesian Analysis. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 62: 776-800.
- WONNACOTT, R.J. e T.H. WONNACOTT, 1976. Econometria. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 424 p. Tradução de Maria C. Silva.
- ZACKS, S., 1971. The Theory of Statistical Inference. Nova York, John Wiley. 609 p.
- ZELLNER, A., 1971. An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics. Nova York, John Wiley. 423 p.

ZELLNER, A., 1974. The Bayesian Approach and Alternatives in Econometrics - I. In: FIENBERG, S.E. e A. ZELLNER. Studies in Bayesian Econometrics and Statistics. North-Holland. p. 39-54.

ZELLNER, A. e V.K. CHETTY, 1965. Prediction and Decision Problems in Regression Models From the Bayesian Point of View. J. Am. Statist. Assoc. Washington, 60: 608-616.

APÊNDICE I
PROGRAMA UTILIZADO NA SIMULAÇÃO E
ANÁLISE DOS DADOS

```

*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*1005(CARD,1132PRINTER,DISK)
      DIMENSION X(50),Y(50),Z(50),XLFIT(9)
      DIMENSION D1(9),D2(9),D3(9)
      DIMENSION W(200),V(200)
      DIMENSION S(200),URQ1(3),URQ2(3),F(32),PCT(32),STATS(5)
      DEFINE FILE 100(200,27,U,II)
      DEFINE FILE 200(200,27,U,JJ)
      DEFINE FILE 300(200,27,U,KK)

100 PAUSE 1111
      READ(2,1000)A,R,T1,T2,F,FJ,NX1,NX,NEX,IX
1000 FORMAT(5F10.0,2F5.0,4I5)
      READ(2,1001)(X(I),I=1,NX1)
1001 FORMAT(20F4.0)
      READ(2,1001)(Z(I),I=1,NX)
      A1M=0
      R1M=0
      AM=0
      A2M=0
      RM=0
      R2M=0
      DO 198 J=1,NFX
198 S(J)=1
      URQ1(1)=40.5
      URQ1(2)=32
      URQ1(3)=70.5
      URQ2(1)=0.22
      URQ2(2)=32
      URQ2(3)=1.42
      DO 8 I=1,9
      D1(I)=0
      D2(I)=0
8 D3(I)=0
      DO 50 IFX=1,NFX
      DO 1 J=1,NX1
      XM=A+R*X(J)
      CALL UNNOR(R,XM,F,IX)
1 Y(J)=R
      CALL DATSW(1,JL)
      GO TO (301,302),JL
301 WRITE(3,7000)(Y(K),K=1,NX1)
302 CONTINUE
7000 FORMAT(10F10.4)
      CALL REGRF(X,Y,NX1,T1,AF1,RF1,VAF1,VRF1,CFA1I,
      *CFA1S,CFA1I,CFA1S,RR1,5XX1,5XY1,5YY1,SS1)
      WRITE(100,IFX)AF1,RF1,VAF1,VRF1,CFA1I,CFA1S,
      *CFA1I,CFA1S,RR1
      D1(1)=D1(1)+AF1
      D1(2)=D1(2)+RF1

```

```

D1(3)=D1(3)+VAE1
D1(4)=D1(4)+VAF1
D1(5)=D1(5)+CFA1I
D1(6)=D1(6)+CFA1S
D1(7)=D1(7)+CFB1I
D1(8)=D1(8)+CFB1S
D1(9)=D1(9)+RR1
DO 2 J=1,NX
XM=A+R*7(J)
CALL UNNOR(R,XM,EJ,IX)
2 Y(J)=R
CALL DATSW(1,KL)
GO TO (401,402),KL
401 WRITE (3,7000) (Y(K),K=1,NX)
402 CONTINUE
CALL RFGRF(Z,Y,NX,T,AE,RF,VAE,VBE,CFAI,
*CFAS,CFBI,CFBS,RR,SXX,SXY,SYX,SS)
WRITE (2001:IX) AF,RF,VAE,VAF,CFAI,CFAS,CFBI,CFBS,RR
D2(1)=D2(1)+AE
D2(2)=D2(2)+RF
D2(3)=D2(3)+VAF
D2(4)=D2(4)+VBE
D2(5)=D2(5)+CFAI
D2(6)=D2(6)+CFAS
D2(7)=D2(7)+CFBI
D2(8)=D2(8)+CFBS
D2(9)=D2(9)+RR
N2=NX+NX1
A2=(NX1*AF1+NX*AF)/N2
SXX2=SXX1+SXX
SYX2=SYX1+SYX
SXY2=SXY1+SXY
R2=(SXX1*RF1+SXX*RF)/SXX2
SS2=((NX1-2)*SS1+(NX-2)*SS+NX1*AE1**2+
*NX*AF**2+SXX1*RF1**2+SXX*RF**2-
*N2*A2**2-SXX2*R2**2)/(N2-2)
V2A=SS2/N2
FA=SQRT(V2A)
V2R=SS2/SXX2
FR=SQRT(V2R)
DA=T2*FA
CIAI=A2-DA
CIAS=A2+DA
DR=T2*FR
CIRI=R2-DR
CIRS=R2+DR
RR2=SXY2**2/(SXX2*SYX2)
WRITE (3001:IX) A2,R2,V2A,V2R,CIAI,CIAS,CIRI,CIRS,RR2
D3(1)=D3(1)+A2
D3(2)=D3(2)+R2
D3(3)=D3(3)+V2A
D3(4)=D3(4)+V2R
D3(5)=D3(5)+CIAI
D3(6)=D3(6)+CIAS
D3(7)=D3(7)+CIRI
D3(8)=D3(8)+CIRS
D3(9)=D3(9)+RR2
A1M=A1M+(AF1-A)**2
R1M=R1M+(RF1-R)**2

```

```

      AM=AM+(AF-A)**2
      RM=RM+(RF-R)**2
      A2M=A2M+(A2-A)**2
      R2M=R2M+(R2-R)**2
50  CONTINUE
      DO 51 I=1,9
        D1(I)=D1(I)/NFX
        D2(I)=D2(I)/NFX
51  D3(I)=D3(I)/NFX
      A1M=A1M/NFX
      R1M=R1M/NFX
      AM=AM/NFX
      RM=RM/NFX
      A2M=A2M/NFX
      R2M=R2M/NFX
      WRITE(3,2000)
2000 FORMAT('1',5X,'A',7X,'B',6X,'VA',6X,'VB',5X,'LA1',5X,
+ 'LAS',5X,'LR1',5X,'LRS',6X,'R2')
      DO 3 IFX=1,NFX
        READ(100,1EX)XLFIT
        W(IFX)=XLFIT(1)
        V(IFX)=XLFIT(2)
3      WRITE(3,2001)XLEIT
        WRITE(3,5000)(D1(I),I=1,9)
        JK=1
        GO TO 5050
5000 FORMAT(72(' '),3F8.2,F8.4,4F8.2,F8.4)
2001 FORMAT(3F8.2,F8.4,4F8.2,F8.4)
5051 WRITE(3,2000)
      DO 4 IFX=1,NFX
        READ(200,1EX)XLFIT
        W(IFX)=XLEIT(1)
        V(IFX)=XLFIT(2)
4      WRITE(3,2001)XLEIT
        WRITE(3,5000)(D2(I),I=1,9)
        JK=2
        GO TO 5050
5052 WRITE(3,2000)
      DO 5 IFX=1,NFX
        READ(300,1EX)XLFIT
        W(IFX)=XLFIT(1)
        V(IFX)=XLFIT(2)
5      WRITE(3,2001)XLFIT
        WRITE(3,5000)(D3(I),I=1,9)
        JK=3
        GO TO 5050
5053 WRITE(3,2002)AM,RM,A2M,R2M,A1M,R1M
2002 FORMAT('1',' QUADRADOS MEIOS PARA A,B,ATAIS E PARA BAYES'
+ '//6F10.4)
      GO TO 100
5050 CONTINUE
      CALL TAB1(W,S,1,UR01,F,PCT,STATS,200,1)
      WRITE(3,2000)F
2000 FORMAT('1' FREQUENCIAS'/14F5.0)
      CALL TAB1(V,S,1,UR02,F,PCT,STATS,200,1)
      WRITE(3,2000)F
      GO TO(5051,5052,5053),JK
      END

```

APÊNDICE II
REGRESSÕES COM VARIÂNCIAS
DIFERENTES

REGRESSÕES COM VARIÂNCIAS DIFERENTES

Em algumas situações, temos motivos para considerar que no período entre a realização do experimento que nos forneceu as estatísticas para informações "a priori" e a realização do experimento "atual", tenha ocorrido modificação no valor da variância residual, embora os parâmetros sejam os mesmos. Nestas condições, a dedução dos estimadores dos parâmetros e variâncias, se faz da maneira a seguir, com base no artigo de TIAO e ZELLNER (1964).

Consideremos os modelos de regressão "a priori" e "atual", respectivamente:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \quad (i=1,2,\dots,n_1)$$

$$Y_j = \alpha + \beta x_j + e_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

onde $e_i \sim N(0; \sigma_1^2)$ e $e_j \sim N(0; \sigma^2)$.

Por (3.11) podemos escrever para a f.d.p. "a priori":

$$\pi_1(\alpha; \beta; \sigma_1^2) \propto (\sigma_1^2)^{-1/2(n_1+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} [v_1 s_1^2 + n_1(\alpha - a_1)^2 + S'_{xx}(\beta - b)^2] \right\}$$

E, para a amostra "atual":

$$p(y|\alpha; \beta; \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-1/2(n+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [vs^2 + n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2] \right\}$$

A f.d.p. "a posteriori" será:

$$\pi_2(\alpha; \beta; \sigma_1^2; \sigma^2 | y_1, y) \propto (\sigma_1^2)^{-1/2(n_1+2)} \cdot (\sigma^2)^{-1/2(n+2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} [v_1 s_1^2 + n_1(\alpha - a_1)^2 + S'_{xx}(\beta - b_1)^2] \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [vs^2 + n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2] \right\}$$

Integrando em relação a σ_1^2 e σ^2 teremos:

$$\pi_2(\alpha; \beta | y_1, y, \sigma_1^2, \sigma^2) \propto \int_0^\infty (\sigma_1^2)^{-1/2(n_1+2)} \cdot e^{-(K_1/2\sigma_1^2)} \left[\int_0^\infty (\sigma^2)^{-1/2(n+2)} \times \right. \\ \left. \times e^{-(K/2\sigma^2)} d\sigma^2 \right] d\sigma_1^2$$

$$\pi_2(\alpha; \beta | y_1, y, \sigma_1^2; \sigma^2) \propto K_1^{-(n_1/2)} \cdot K^{-n/2}$$

$$\text{onde } K = [vs^2 + n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2] \cdot$$

Fazendo:

$$Q = \frac{n(\alpha - a)^2 + S_{xx}(\beta - b)^2}{s^2} \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{n_1(\alpha - a_1)^2 + S'_{xx}(\beta - b_1)^2}{s_1^2}$$

$$v = n - 2$$

e

$$v_1 = n_1 - 2$$

$$S^2 = v s^2 \quad \text{e} \quad S_1^2 = v_1 s_1^2 \quad ,$$

teremos:

$$\begin{aligned} \pi_2(\alpha; \beta | y_1, y_2) &\propto \left[1 + \frac{Q_1}{v_1} \right]^{-(n_1/2)} \cdot \left[1 + \frac{Q}{v} \right]^{-n/2} \\ \pi_2(\alpha; \beta | y_1, y_2) &\propto \left[1 + \frac{Q_1}{v_1} \right]^{-1/2(v_1+2)} \cdot \left[1 + \frac{Q}{v} \right]^{-1/2(v+2)} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Desenvolvendo cada potência:

$$\left[1 + \frac{Q}{v} \right]^{-1/2(v+2)} = e^{-1/2(v+2) L[1+(Q/v)]}$$

mas, pela fórmula de Taylor:

$$L\left(1 + \frac{Q}{v}\right) = \frac{Q}{v} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{v}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Q}{v}\right)^3 - \dots = \frac{Q}{v} + R$$

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{Q}{v} \right]^{-1/2(v+2)} &= e^{-1/2(v+2) [(Q/v)+R]} \\ &= e^{-Q/2} \cdot e^{-1/2 \{ [2(Q/v)] + (v+2)R \}} \end{aligned}$$

Adaptando o desenvolvimento pela fórmula de Mac-Laurin feito por TIAO e ZELLNER, encontra-se:

$$e^{-1/2 \{ [2(Q/v)] + (v+2)R \}} = \sum_{j=0}^{\infty} q_j v^{-j}$$

onde: $q_0 = 1$
 $q_1 = \frac{1}{4} [Q^2 - 4Q]$
 $q_2 = \frac{1}{96} [3Q^4 - 40Q^3 + 192Q^2]$

Logo, (A.1) fica :

$$\pi_2(\alpha; \beta | y_1; y) \propto e^{-1/2(Q_1 + Q)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i v_i^{-i} \sum_{j=0}^{\infty} q_j v^{-j} \quad (A.2)$$

Assim, (A.2) representa o desenvolvimento assintótico da f.d.p. "t"-dupla de (A.1) e, para analisarmos, consideremos apenas o termo principal do desenvolvimento:

$$\pi_2(\alpha; \beta | y_1; y) \propto e^{-1/2(Q_1 + Q)}, \quad (A.3)$$

onde $\propto$ indica "aproximadamente proporcional a".

Usando, por facilidade algébrica, a forma matricial, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q &= \frac{1}{s_1^2} [n_1(\alpha - a_1)^2 + s'_{xx}(\beta - b_1)^2] + \frac{1}{s_2^2} [n(\alpha - a)^2 + s_{xx}(\beta - b)^2] \\ &= (B - \bar{B})' \cdot D \cdot (B - \bar{B}) \end{aligned}$$

onde:

$$\bar{B} = D^{-1} (M_1 \cdot \hat{B}_1 + M \cdot \hat{B}) \quad \text{é o vetor média do termo principal do desenvolvimento assintótico, e:}$$

$$M_1 = \frac{1}{s_1^2} X_1' X_1 \quad ; \quad M = \frac{1}{s^2} X' X$$

$$\hat{B}_1 = (X_1' X_1)^{-1} X_1' y_1 \quad ; \quad \hat{B} = (X' X)^{-1} X' y \quad (A.4)$$

$$D = M_1 + M = \frac{1}{s_1^2} X_1' X_1 + \frac{1}{s^2} X' X$$

Assim teremos:

$$D = \frac{1}{s_1^2} \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & S'_{xx} \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & S_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{s_1^2} + \frac{n}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{S'_{xx}}{s_1^2} + \frac{S_{xx}}{s^2} \end{bmatrix}$$

A matriz das estimativas de variâncias e covariâncias das estimativas dos parâmetros será:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{n_1}{s_1^2} + \frac{n}{s^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{S'_{xx}}{s_1^2} + \frac{S_{xx}}{s^2}} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

Determinemos a matriz das estimativas dos parâmetros

($\bar{B}$). De (A.4) podemos escrever:

$$M_1 \hat{B}_1 = \frac{1}{s_1^2} X_1' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' y_1 = \frac{1}{s_1^2} \begin{bmatrix} n_1 \\ \sum Y_i \\ S'_{xy} \end{bmatrix} \quad e \quad M \hat{B} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} n \\ \sum Y_j \\ S_{xy} \end{bmatrix}$$

Então:

$$\bar{B} = D^{-1} (M_1 \hat{B}_1 + M \cdot \hat{B}) = D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{n_1 a_1}{s_1^2} + \frac{na}{s^2} \\ \frac{S'_{xx} b_1}{s_1^2} + \frac{S_{xx} b}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{n_1 a_1}{s_1^2} + \frac{na}{s^2} \\ \frac{n_1}{s_1^2} + \frac{n}{s^2} \\ \frac{S'_{xx} b_1}{s_1^2} + \frac{S_{xx} b}{s^2} \\ \frac{S'_{xx}}{s_1^2} + \frac{S_{xx}}{s^2} \end{bmatrix}$$

Logo, pela aproximação assintótica, os estimadores de Bayes para os parâmetros podem ser escritos:

$$a_2 = \frac{\frac{n_1 a_1}{s_1^2} + \frac{na}{s^2}}{\frac{n_1}{s_1^2} + \frac{n}{s^2}} \quad e \quad b_2 = \frac{\frac{S'_{xx} b_1}{s_1^2} + \frac{S_{xx} b}{s^2}}{\frac{S'_{xx}}{s_1^2} + \frac{S_{xx}}{s^2}} \quad (A.6)$$

Utilizando a definição de precisão mencionada em 3.3.1, pode-se apresentar as expressões de (A.6) nas formas:

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot h'_a + a \cdot h_a}{h'_a + h_a} \quad e \quad b_2 = \frac{b_1 \cdot h'_b + b \cdot h_b}{h'_b + h_b} \quad (A.7)$$

As estimativas das variâncias das estimativas dos pa râmetros ficariam, por (A.5):

$$\hat{V}(a_2) = \frac{1}{h'_a + h_a} \quad e \quad \hat{V}(b_2) = \frac{1}{h'_b + h_b} \quad (A.8)$$