SOBRE UM MODELO LINEAR PARA ENSAIOS EM “SWITCHBACK” DELINEADOS EM BLOCOS CASUALIZADOS

MARIA ANGELICA FERRAZ DE TOLEDO MACHADO

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Maio - 1984

*Aos meus avós,
Aos meus pais,
Ao meu marido, e
Aos meus filhos:
 Fernando,
 Renata e
 Ana Paula,*

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Antônio Francisco Iemma, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação na execução deste trabalho.
- Ao Dr. Décio Barbin, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação e apoio concedido no decorrer do Curso.
- Ao Dr. Humberto de Campos, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo apoio concedido no decorrer do Curso.
- Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Professor Livre-Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos.
- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ, pelos ensinamentos.
- À Diretoria do Instituto de Economia Agrícola da Secretaria da Agricultura, pelo afastamento concedido.
- Ao meu pai, Dr. Francisco Ferraz de Toledo, Professor Titular do Departamento de Agricultura e Horticultura da ESALQ, pelo apoio, incentivo e revisão final do trabalho.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, pela datilografia deste trabalho.

Aos colegas de Pós-Graduação pela convivência.

Aos Professores Dr. Raul Dantas D'Arce, Dr. Wilson Mattos e Dr. Paulo Machado, pelo fornecimento dos dados.

Aos Funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela colaboração.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	xi
SUMMARY	xiv
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 - Generalidades	5
2.2 - Modelo Matemático	6
2.3 - Sistema de Equações Normais	9
2.4 - Solução do Sistema de Equações Normais, Análise de Variância e Comparações Múltiplas	11
3. MATERIAL	43
4. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	46
4.1 - Introdução	46
4.2 - Adoção de Um Modelo Linear	48
4.2.1 - Exigências do modelo adotado	49
4.3 - Equações Normais	50
4.3.1 - Solução do sistema para a média ..	64
4.3.2 - Solução do sistema para efeitos de tratamentos eliminando-se efeitos de vacas	65
4.3.3 - Solução do sistema para vacas ...	70
4.3.4 - Solução do sistema para efeitos li near e quadrático de períodos ...	71

4.3.5 - Solução do sistema para efeitos de blocos	72
4.3.6 - Solução do sistema para efeitos da interação período (linear) x vacas	73
4.4 - Somas de Quadrados	74
4.4.1 - Soma de quadrados devida à média..	75
4.4.2 - Soma de quadrados devida aos efeitos de blocos	75
4.4.3 - Soma de quadrados devida aos efeitos de vacas ignorando efeitos de tratamentos	78
4.4.4 - Soma de quadrados devida a efeitos de tratamentos	78
4.4.5 - Soma de quadrados devida a efeitos de períodos	81
4.4.6 - Soma de quadrados devida a interação período (linear) x vacas	82
4.5 - Esperanças Matemáticas	83
4.5.1 - Esperança Matemática de $B'M_7^{-1}B$..	83
4.5.2 - Esperança Matemática de $V'M_{12}^{-1}V$..	85
4.5.3 - Esperança Matemática de $\hat{r}' Q^*$...	86
4.5.4 - Esperança Matemática de $P'M_{19}^{-1}P$...	88
4.5.5 - Esperança Matemática de $C'M_{21}^{-1}C$...	89
4.5.6 - Esperança Matemática de $y'y$	90

4.5.7 - Esperança Matemática da correção	
$M_1^{-1} [y'X_1X_1'y]$	92
4.5.8 - Esperança Matemática da correção para blocos	93
4.5.9 - Esperança Matemática de	
$\frac{1}{v \sum x_j^2} (P_s - P_1)^2$	95
4.5.10 - Esperança Matemática de	
$\frac{1}{\sum x_j^2} [y'X_6X_6'y]$	96
4.5.11 - Esperança Matemática da soma de quadrados devida a efeito de blo <u>co</u> s	97
4.5.12 - Esperança Matemática da soma de quadrados devida a efeitos de va <u>ca</u> s ignorando tratamentos	98
4.5.13 - Esperança Matemática da soma de quadrados devida a efeitos de tra <u>ta</u> mentos (ajustada)	99
4.5.14 - Esperança Matemática da soma de quadrados devida a efeitos de pe <u>ri</u> odos	99
4.5.15 - Esperança Matemática da soma de quadrados devida a efeitos da in <u>te</u> ração período (linear) x vacas	100

	Pág.
4.5.16 - Esperança Matemática da soma de quadrado do resíduo	101
4.6 - Distribuição das Formas Quadráticas	104
4.6.1 - Distribuição de $B'M_7^{-1}B/\sigma^2$	105
4.6.2 - Distribuição de $V'M_{12}^{-1}V/\sigma^2$	106
4.6.3 - Distribuição de $\hat{\tau}'Q^*/\sigma^2$	108
4.6.4 - Distribuição de $P'M_{19}^{-1}P/\sigma^2$	110
4.6.5 - Distribuição de $C'M_{21}^{-1}C/\sigma^2$	111
4.6.6 - Distribuição de $y'y/\sigma^2$	112
4.6.7 - Distribuição da SQR/σ^2	113
4.7 - Distribuição dos Quocientes	115
4.7.1 - Distribuição do quociente	
$\frac{B'M_7^{-1}B/n_1.\sigma^2}{SQR/n_7.\sigma^2}$	115
4.7.2 - Distribuição do quociente	
$\frac{V'M_{12}^{-1}V/n_2.\sigma^2}{SQR/n_7.\sigma^2}$	116
4.7.3 - Distribuição do quociente	
$\frac{\hat{\tau}'Q^*/n_3.\sigma^2}{SQR/n_7.\sigma^2}$	117
4.7.4 - Distribuição do quociente	
$\frac{P'M_{19}^{-1}P/n_4.\sigma^2}{SQR/n_7.\sigma^2}$	118

4.7.5 - Distribuição do quociente

$\frac{C'M_{21}^{-1}C/n_5.\sigma^2}{SQR/n_7.\sigma^2}$		119
4.8 - Testes de Hipóteses e Quadro da Análise de Variância		120
4.9 - Comparações Múltiplas		122
5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO		123
5.1 - Modelo Matemático		123
5.2 - Equações Normais		128
5.3 - Solução do Sistema de Equações Normais ..		133
5.3.1 - Estimativa da média		133
5.3.2 - Estimativa dos efeitos de tratamen tos eliminando-se efeitos de vacas		133
5.3.3 - Estimativa dos efeitos de vacas ..		135
5.3.4 - Estimativa dos efeitos lineare e qua drático de períodos		136
5.3.5 - Estimativa dos efeitos de blocos..		137
5.3.6 - Estimativa dos efeitos da intera- ção período (linear) x vacas		137
5.4 - Somas de Quadrados		138
5.4.1 - Obtenção da soma de quadrados de $\hat{m}$		138
5.4.2 - Obtenção da soma de quadrados de blocos		138

	Pág.
5.4.3 - Obtenção da soma de quadrados de tratamentos (ajustada)	139
5.4.4 - Obtenção da soma de quadrados de vacas	139
5.4.5 - Obtenção da soma de quadrados de períodos	139
5.4.6 - Obtenção da soma de quadrados da interação período (linear) x va- cas	140
5.5 - Quadro da Análise de Variância e Testes de Hipóteses	140
5.6 - Comparações Múltiplas	141
6. CONCLUSÕES	142
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144

SOBRE UM MODELO LINEAR PARA ENSAIOS EM "SWITCHBACK" DELINEADOS EM BLOCOS CASUALIZADOS

Autor: Maria Angélica Ferraz de Toledo Machado
Orientador: Dr. Antonio Francisco Iemma

R E S U M O

Com este trabalho, pretendeu-se estabelecer um modelo linear para ensaios em "switchback", onde o efeito de blocos estivesse presente.

O modelo adotado foi o seguinte:

$$y_{ijkl} = m + b_{\ell}z_j + v_i + t_k + \alpha_1x_j + \alpha_2z_j + c_ix_j + e_{ijkl}$$

onde, para $i=1,2,\dots,v$; $j=1,2,\dots,J$; $k=1,2,\dots,p$; $\ell=1,2,\dots,L$,

y_{ijkl} é o valor observado na i -ésima vaca, do j -ésimo período, submetida ao k -ésimo tratamento do ℓ -ésimo bloco;

m é a média geral;

b_l é o efeito do bloco l ;
 v_i é o efeito da vaca i ;
 t_k é o efeito do tratamento k ;
 α_1 é o efeito linear de período;
 α_2 é o efeito quadrático de período;
 c_i é o efeito da interação período (linear) x vacas;
 e_{ijkl} é o erro experimental onde se supõe que

$$e_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$$

e que todos os erros experimentais sejam independentes;

e

$$x_j = \begin{cases} -1 & \text{se } j=1 & (1^\circ \text{ Período}) \\ 0 & \text{se } j=2 & (2^\circ \text{ Período}) \\ 1 & \text{se } j=3 & (3^\circ \text{ Período}) \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j=1 & (1^\circ \text{ Período}) \\ -2 & \text{se } j=2 & (2^\circ \text{ Período}) \\ 1 & \text{se } j=3 & (3^\circ \text{ Período}) \end{cases}$$

que correspondem à aplicação do conceito de polinômios ortogonais para o desmembramento dos componentes linear e quadrático dos períodos.

Sob essas condições, foram obtidos o sistema de equações normais, a solução do sistema e as somas de

quadrados, as distribuições e esperanças matemáticas das formas quadráticas, o quadro da análise de variância com as esperanças dos quadrados médios, os critérios para os testes das hipóteses de nulidade usuais e os critérios para comparações múltiplas pelo Método de Tukey.

Pudemos observar, com os resultados obtidos que o modelo adotado reproduziu as fórmulas encontradas na bibliografia para análise de dados em ensaios "switch back", que ele se mostrou adequado para os testes de efeitos de tratamentos, blocos, vacas e interação linear períodos x vacas. No que se refere a efeitos de períodos o teste F obtido através desse modelo é apenas aproximado.

ON A LINEAR MODEL TO SWITCHBACK TRIALS IN
DESIGNED RANDOMIZED BLOCKS

Author: Maria Angélica Ferraz de Toledo Machado
Adviser: Dr. Antonio Francisco Iemma

S U M M A R Y

The objective of this work was to develop a linear model for switchback trials where the block effect is present. The following model was used:

$$y_{ijk\ell} = m + b_{\ell}z_j + v_i + t_k + \alpha_1x_j + \alpha_2z_j + c_ix_j + e_{ijk\ell}$$

where for $i=1,2,\dots,v$; $j=1,2,\dots,J$; $k=1,2,\dots,p$; $\ell=1,2,\dots,\dots,L$, and

$y_{ijk\ell}$ is the observed value for the i -th cow in the j -th period, under the k -th treatment of the ℓ -th block;

m - overall mean;

b_{ℓ} - block ℓ effect;

v_i - cow i effect;
 t_k - treatment k effect;
 α_1 - period linear effect;
 α_2 - period quadratic effect;
 c_i - period (linear) x cows interaction effect;
 e_{ijkl} - experimental error, assuming $e_{ijkl} \cap N(0, \sigma^2)$
 and that all experimental errors are independent, and

$$x_j = \begin{cases} -1 & \text{if } j=1 & (1^{\text{st}} \text{ Period}) \\ 0 & \text{if } j=2 & (2^{\text{sd}} \text{ Period}) \\ +1 & \text{if } j=3 & (3^{\text{rd}} \text{ Period}) \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{if } j=1 & (1^{\text{st}} \text{ Period}) \\ -2 & \text{if } j=2 & (2^{\text{sd}} \text{ Period}) \\ 1 & \text{if } j=3 & (3^{\text{rd}} \text{ Period}) \end{cases}$$

which correspond to the orthogonal polynomial concept on the separation of the periods' linear and quadratic components. Under these conditions the following parameters were obtained: a system its solution and the sum of squares, the distribution and mathematical expectations, the table of analysis of variance along with the mean squares expectations, the criteria to test the null hypothesis and the criteria for multiple comparisons through the use of

the Tukey's test.

The results obtained showed that the model adopted reproduced the formulae found in the literature for the data analysis of switchback trials, and also that it was adequate for testing treatments, blocks, cows and linear interaction between periods and cows effects. The F test for testing period effects obtained from this model was a somewhat approximate value.

1. INTRODUÇÃO

Nos experimentos com vacas em lactação, os ensaios de dupla reversão, "switchback" são de grande utilidade, pois permitem que, para a comparação de um dado número de tratamentos, o pesquisador faça uso de uma quantidade menor de animais do que aquela tradicionalmente necessária em outros esquemas experimentais.

Assim, por exemplo, para a comparação de efeitos de três tratamentos em três repetições são necessários nove animais para os experimentos delineados inteiramente ao acaso, em blocos casualizados ou em quadrados latinos; enquanto que a mesma comparação pode requerer apenas seis animais se o pesquisador adotar o esquema "switchback".

Naturalmente, é redundante ressaltar a impor

tância da redução do número de animais necessários para se testar um conjunto de hipóteses de interesse, principalmente no caso de animais de grande porte e de alto valor, como as vacas leiteiras de boa qualidade. Esse fato, por si só, pode ser um bom indicador para o uso de tais ensaios.

O esquema apresentado a seguir ilustra um ensaio em "switchback" com três tratamentos.

ESQUEMA COMPLETO

VACAS	P E R I O D O S		
	I	II	III
1	A	B	A
2	B	C	B
3	C	A	C
4	A	C	A
5	B	A	B
6	C	B	C

Podemos também, quando o número de tratamentos é ímpar igual ou maior que 5, utilizar os esquemas reduzidos, que requerem somente metade das sequências exigidas pelo esquema completo (LUCAS, 1956).

Além desse fato, existe o problema inerente à influência que a curva de lactação exerce sobre os efeitos de tratamentos. Este nos parece ser o ponto alto da questão e aqui está patenteado o real valor das idéias de BRANDT (1938) e LUCAS (1956), pois o "switchback" permite reduzir sensivelmente os efeitos dessas influências.

Ademais, segundo GODOI (1971), a interação período (linear) x vacas parte do resíduo da análise de variância apresenta "bias" (tendenciosidade), decorrente do fato, já discutido por Lucas (1958) e Pimentel Gomes (1960), de que às grandes produções correspondem grandes declínios, levando à super-estimação de σ^2 . Os ensaios em "switchback" vem corrigir essa tendenciosidade da variância residual, no entanto, possuem uma restrição séria de corrente da perda de graus de liberdade do resíduo de $(v-1)$, onde v corresponde ao número de vacas envolvidas.

Por outro lado, apesar do uso exaustivo dos esquemas em "switchback" no domínio da experimentação agropecuária e recentemente em diversas áreas da medicina humana, praticamente não existem na bibliografia disponível, estudos sobre aspectos importantes do ponto de vista da inferência estatística.

Um passo significativo nesse sentido foi a-

presentado por GODOI (1971), que propõe e discute o uso de dois modelos: simplificado e completo, deduzindo as expressões para as somas de quadrados.

Em seu trabalho, o autor apresenta, embora sem discutir, um modelo que inclui o efeito de blocos.

Este fato, aliado às necessidades surgidas em pesquisas desenvolvidas no Departamento de Zootecnia da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", motivou-nos ao estudo detalhado de um modelo linear para ensaios em "switchback", no qual os efeitos de blocos estivessem presentes.

Assim, temos como objetivos, discutir do ponto de vista estatístico, certos detalhes como as pressuposições do modelo, distribuições e esperanças matemáticas das formas quadráticas e suas implicações na inferência estatística, dentre outros, e apresentar conclusões que possam ser interpretadas e adotadas por pesquisadores da área animal.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 - Generalidades

Segundo GILL (1978), os ensaios de reversão devem ser utilizados quando os efeitos de períodos são grandes e variam de um animal para outro, como por exemplo, a curva de lactação que varia de acordo com a habilidade genética do animal. São eles caracterizados pela aplicação de um ou mais tratamentos duas vezes ao mesmo animal. Para dois tratamentos, segundo esse autor, podem ser utilizados dois tipos de sequências de reversão:

a) Sequências simples de reversão (ABA e BAB) se as tendências são lineares, como para produção de leite depois de 4-6 semanas de lactação;

b) Sequências duplas de reversão (ABAB e BABA), se as tendências são aproximadamente de forma quadrática. Por exemplo, em experimentos com gado de leite, algumas vacas podem estar no início da lactação, quando a produção de leite tende a seguir uma curva convexa com o tempo.

2.2 - Modelo Matemático

Nos artigos fundamentais sobre experimentos de reversão apresentados por BRANDT (1938) e LUCAS (1956) não se encontram deduções da análise de variância nem sugestões de modelos matemáticos e as fórmulas são sempre apresentadas sem qualquer demonstração.

Com a finalidade de obter um modelo matemático adequado, que através de deduções teóricas reproduzissem os resultados apresentados por BRANDT (1938) e LUCAS (1956), GODOI (1971) estudou dois modelos matemáticos. Em primeiro lugar esse autor estudou o modelo simplificado ou reduzido apresentado a seguir:

$$y_{ijk} = m + v_i + p_j + t_k + e_{ijk} \quad ,$$

onde,

m = média;

v_i = efeito da vaca i ;

p_j = efeito do período j ;

t_k = efeito do tratamento k;

e_{ijk} = erro aleatório onde se supõe $e_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ e independentes;

para o esquema completo com três tratamentos e para o esquema reduzido com cinco tratamentos. Concluiu ele que o modelo simplificado resolve a dedução da análise estatística do delineamento "switchback", porém, o resíduo decorrente desse modelo apresenta tendenciosidade. Esse "bias" decorre do efeito de interação período (linear) x vacas não isolado pelo modelo.

Para eliminar essa tendenciosidade, GODOI (1971) propõe o modelo completo:

$$y_{ijk} = m + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 z_j + c_i x_j + e_{ijk} ,$$

onde:

m = média;

v_i = efeito da vaca i;

t_k = efeito do tratamento k;

b_1 = efeito linear do período;

b_2 = efeito quadrático do período;

c_i = efeito da interação período (linear) x vacas;

e_{ijk} = erro com distribuição normal de média zero e variância σ^2 ;

$$x_j = \begin{cases} -1 & \text{se } j=1 \\ 0 & \text{se } j=2 \\ 1 & \text{se } j=3 \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j=1 \\ -2 & \text{se } j=2 \\ 1 & \text{se } j=3 \end{cases}$$

através do qual ele consegue separar o resíduo do modelo simplificado em duas partes: linear e quadrática. Mostrando, então, ser o modelo completo adequado para o "switch-back".

GILL (1981) apresentou também um modelo matemático para ensaios em "switchback", para dois tratamentos e três períodos:

$$y_{ijk} = \mu + D_i + p_j + \tau_k + e_{ijk}$$

que o autor adota também para ensaios em "crossover", onde:

D_i = efeito de animal $i=1,2,\dots r$ = número de animais;

p_j = efeito de período $j=1,2,3$;

τ_k = efeito de tratamento $k=1,2$; e

2.3 - Sistema de Equações Normais

GODOI (1971) obteve o sistema de equações normais a partir do modelo:

$$y = X\beta + \epsilon,$$

onde:

y = vetor das observações;

X = matriz do delineamento;

β = vetor dos parâmetros;

ϵ = vetor dos erros, onde se pressupõe que os ϵ_{ijk} são independentes e com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

A metodologia usada baseia-se no método dos mínimos quadrados (GRAYBILL, 1961), que através da minimização da variável $\epsilon'\epsilon$ resulta no sistema

$$X'X \hat{\beta} = X'y.$$

Como em esquemas experimentais desse tipo, o sistema acima não tem solução única, o autor apresentou uma matriz de restrições, A , de tal forma que

$$c \left[\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} \right] = \alpha,$$

onde:

c = posto;

α = número de parâmetros.

Dessa maneira, o sistema

$$(X'X + A'A) \hat{\beta} = X'y ,$$

tem solução única, portanto:

$$\hat{\beta} = (X'X + A'A)^{-1} X'y$$

Essa matriz de restrição tem sido de grande utilidade para facilitar o emprego do computador na obtenção da solução do sistema.

Dentro desse contexto, segundo SEARLE (1971), todos os parâmetros são estimáveis e também todas as funções lineares desses parâmetros, pois a matriz $(X'X + A'A)$ é não-singular e seu posto é igual ao número de parâmetros do vetor β .

Uma outra maneira de se obter a solução desse sistema, segundo SCHEFFE (1959), seria através do uso das inversas generalizadas. Caso em que a solução do sistema de equações não é única, portanto os parâmetros não são estimáveis mas sim algumas funções lineares deles.

2.4 - Solução do Sistema de Equações Normais, Análise de Variância e Comparações Múltiplas

Student, em 1908, citado por GODOI (1971), apresentou pela primeira vez uma prova de significância para as médias das diferenças.

BRANDT (1938) apresentou uma extensão do teste t de "Student" para a comparação de médias de dois tratamentos em ensaios de reversão ou "switchback" envolvendo dois, três, quatro ou mais períodos testes.

Em um experimento envolvendo três períodos testes, por exemplo, foram utilizados dois grupos de animais, A e B, para testar dois tratamentos, X e Y, simultaneamente na ordem XYX no grupo A e YXY no grupo B. Para cada animal foram computadas as diferenças

$$D_i = y_{i1} - 2y_{i2} + y_{i3} \quad ,$$

onde $i=1,2,\dots,v$ e v = número de animais. Foram calculadas para cada grupo: a média e a variância dos D_i e então obtida a variável para o teste de significância

$$t = \frac{\bar{D}_A - \bar{D}_B}{s} \sqrt{\frac{(n_A)(n_B)}{n_A + n_B}} \quad ,$$

com $n_A + n_B - 2$ graus de liberdade, onde:

$\bar{D}_A$ = média dos D_i do grupo A;

$\bar{D}_B$ = média dos D_i do grupo B;

n_A = número de animais do grupo A;

n_B = número de animais do grupo B; e

$$s = \sqrt{\frac{(n_A - 1) s_A^2 + (n_B - 1) s_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

com s_A^2 = variância dos D_i do grupo A;

s_B^2 = variância dos D_i do grupo B.

Após a obtenção do valor da estatística t , foi feita a comparação com o valor de t da tabela proposta por Fisher. De modo análogo, o autor mostrou a comparação entre dois tratamentos envolvendo dois e quatro períodos testes.

Nesse trabalho, BRANDT (1938) apresentou, embora sem deduções, a análise de variância para ensaios de reversão ou "switchback" comparando dois tratamentos em 2, 3 e 4 períodos testes. Os resultados descritos abaixo para ilustrar a análise de variância proposta, foram obtidos em um ensaio de alimentação para 10 vacas em lactação.

O número de graus de liberdade total apresentado foi $3v-1$ onde v é o número de animais testados.

A subdivisão proposta para esses graus de liberdade, especificando a estrutura do experimento, foi a seguinte:

Causas de Variação	G.L.	
Período		(2)
Termo linear	P_1	1
Termo quadrático	P_2	1
Individuais		(9)
Vacas do Grupo A	C_A	4
Vacas do Grupo B	C_B	4
Grupo	G	1
Interações		(9)
Entre o termo linear e vacas no Grupo A	$P_1 \times C_A$	4
Entre o termo linear e vacas no Grupo B	$P_1 \times C_B$	4
Entre o termo linear e Grupo	$P_1 \times G$	1
Interações		(9)
Entre o termo quadrático e vacas no Grupo A	$P_2 \times C_A$	4
Entre o termo quadrático e vacas no Grupo B	$P_2 \times C_B$	4
Entre o termo quadrático e Grupo	$P_2 \times G$	1
Total		29

Para a obtenção das correspondentes somas de quadrados, BRANDT (1938) apresentou os seguintes resultados:

SOMA DE QUADRADOS TOTAL

$$\left(\text{Soma do quadrado de} \right)_{\text{cada observação}} = \frac{(\text{soma das observações})^2}{\text{número total de observações}}$$

SOMA DE QUADRADOS PARA PERÍODOS

Segundo esse autor, desde que haja 3 períodos experimentais existem duas comparações independentes, ou graus de liberdade entre totais de períodos. Para comparar o total do primeiro período com o total do terceiro período há 1 grau de liberdade, e para comparar a soma dos totais do primeiro e terceiro períodos com duas vezes o total do segundo período tem-se também 1 grau de liberdade. O primeiro desses dois graus de liberdade pode ser designado como o termo linear e o segundo como o termo quadrático.

A soma de quadrados para o termo linear (P_1) é uma fração do quadrado da diferença entre os totais do 1º e 3º períodos. O denominador da fração é o produto do

número de observações dentro de cada total de período e a soma dos quadrados dos coeficientes dos termos do numerador.

$$P_1 = \frac{(\text{Total do 1º Período} - \text{Total do 3º Período})}{(\text{Nº de animais}) [(1)^2 + (-1)^2]}$$

A soma de quadrados para o termo quadrático (P_2) é uma fração do quadrado da diferença entre os totais do 1º e 3º períodos e duas vezes o total do 2º período. O denominador da fração é o produto do nº de observações dentro de cada total de período e a soma dos quadrados dos coeficientes dos termos do numerador

$$P_2 = \frac{[(\text{Total do 1º P} + \text{Total do 3º P}) - 2(\text{Total do 2º P})]^2}{(\text{Nº de animais}) [(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2]}$$

SOMA DE QUADRADOS PARA VACAS DENTRO DO GRUPO A

$$\frac{(\text{Total animal 1 do Grupo A})^2 + \dots + (\text{Total do último animal do Grupo A})^2}{\text{Nº de períodos}} - \frac{(\text{Total Grupo A})^2}{3(\text{nº animais } G_A)}$$

SOMA DE QUADRADOS PARA VACAS DENTRO DO GRUPO B

$$\frac{(\text{Total animal 1 do Grupo B})^2 + \dots + (\text{Total do último animal do Grupo B})^2}{\text{Nº de períodos}} - \frac{(\text{Total Grupo B})^2}{3(\text{nº animais } G_B)}$$

SOMA DE QUADRADOS PARA GRUPOS

$$\frac{(\text{Total Grupo A})^2 + (\text{Total Grupo B})^2}{\text{Nº total de observações de cada grupo}} - \frac{(\text{Total Geral})^2}{\text{Nº total de observações}}$$

INTERAÇÕES

As porções da soma de quadrados total atribuídas para as várias interações foram calculadas baseadas em diferenças, como a seguir.

SOMA DE QUADRADOS DA INTERAÇÃO PERÍODO LINEAR x VACAS DO GRUPO A

$$\frac{1}{[(1)^2 + (-1)^2]} \left\{ (y_{11k} - y_{13k})^2 + (y_{21k} - y_{23k})^2 + \dots + (y_{r_A 1k} - y_{r_A 3k})^2 - \frac{[\sum_i (y_{i1k} - y_{i3k})]^2}{\text{Nº de animais do G}_A} \right\}$$

onde,

y_{ijk} é o valor observado para o i -ésimo animal no j -ésimo período recebendo o k -ésimo tratamento;

$i = 1, 2, \dots, r_A$ para o Grupo A, $i = 1, 2, \dots, r_B$ para o Grupo B;

$j = 1, 2, 3$;

$k = 1, 2$.

SOMA DE QUADRADOS DA INTERAÇÃO PERÍODO LINEAR x VACAS DO GRUPO B

$$\frac{1}{[(1)^2 + (-1)^2]} \left\{ (y_{11k} - y_{13k})^2 + (y_{21k} - y_{23k})^2 + \dots + (y_{r_B 1k} - y_{r_B 3k})^2 - \frac{[\sum (y_{i1k} - y_{i3k})]^2}{\text{Nº de animais do } G_B} \right\}$$

SOMA DE QUADRADOS DA INTERAÇÃO PERÍODO LINEAR E GRUPO

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{r_A} (y_{i1k} - y_{i3k}) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{r_B} (y_{i1k} - y_{i3k}) \right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{r_A+r_B} (y_{i1k} - y_{i3k}) \right]^2 / 2}{\text{Nº de animais dentro do grupo } [(1)^2 + (-1)^2]}$$

SOMA DE QUADRADOS DA INTERAÇÃO ENTRE O TERMO QUADRÁTICO E VACAS DO GRUPO A

$$\frac{\sum_{i=1}^{r_A} D_i^2 - (\sum_{i=1}^{r_A} D_i)^2 / \text{Nº de animais do Grupo A}}{[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]}$$

SOMA DE QUADRADO DA INTERAÇÃO ENTRE O TERMO QUADRÁTICO E VACAS DO GRUPO B

$$\frac{\sum_{i=1}^{r_B} D_i^2 - (\sum_{i=1}^{r_B} D_i)^2 / \text{Nº de animais do Grupo B}}{[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]}$$

SOMA DE QUADRADOS DA INTERAÇÃO ENTRE O TERMO QUADRÁTICO E GRUPO

$$\frac{\sum_{i=1}^{r_A} D_i^2 + \sum_{i=1}^{r_B} D_i^2 - (\sum_{i=1}^{r_A} D_i + \sum_{i=1}^{r_B} D_i)^2 / 2}{\text{Nº de animais dentro do grupo } [(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]}$$

Ainda segundo BRANDT (1938), devido às características do delineamento de reversão ou "switchback", o efeito de tratamento é idêntico ao efeito da interação entre o termo quadrático e grupo. Ele demonstra que isso é facilmente observado pela tabela abaixo.

PERÍODOS		
TERMO QUADRÁTICO		
GRUPO	I + III	2(II)
A	$X_1 + X_3$	$2Y_2$
B	$Y_1 + Y_3$	$2X_2$

onde:

X_1 é o tratamento X no 1º período;

X_2 é o tratamento X no 2º período;

X_3 é o tratamento X no 3º período; e

Y de modo análogo.

A interação entre o termo quadrático e grupo é a comparação diagonal da tabela mencionada acima, que é função da expressão $(X_1 - 2X_2 + X_3) - (Y_1 - 2Y_2 + Y_3)$. Essa expressão é também a diferença entre os resultados obtidos das rações X e Y adequadamente ponderada para uso eficiente de todas as informações disponíveis.

Nesse experimento, devido ao delineamento, existe uma relevante questão: A significância da variabilidade devida ao tratamento, como foi mostrado, é a mesma para interação entre termo quadrático e grupo. A estimativa apropriada para o erro, quando se testa a significância dessa interação, é obtida juntando-se a interação entre termos quadráticos e os grupos.

	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
$P_2 \times G_A$	4			
$P_2 \times G_B$	4			
Erro (Soma)	8	SQ Erro	SQ Erro/8	
$P_2 \times G$	1	SQ ($P_2 \times G$)	[SQ ($P_2 \times G$)]/1	[QM($P_2 \times G$)]/QM Erro

$$SQ \text{ Erro} = SQ(P_2 \times G_A) + SQ(P_2 \times G_B)$$

O autor apresentou também a análise de covariância para uma e duas variáveis concomitantes.

Seath (1944), citado por LUCAS (1956), planejou um delineamento em "switchback" com quatro sequências para estudar um fatorial 2×2 . O delineamento forneceu um teste sensível para dois efeitos principais, mas produziu um teste pobre para a interação.

Snedecor (1946), citado por GODOI (1971), também descreveu uma eficiente análise estatística para ensaios "switchback".

PATTERSON (1950) e LUCAS (1951), trabalhando com ensaios rotacionais (os ensaios rotacionais se caracterizam pelo fato de cada animal receber tratamentos distintos, isto é, não existe repetição de tratamento durante a realização do ensaio), chegaram ambos a resultados mostrando tendenciosidade na estimativa da variância residual nesses ensaios.

O "bias" é captado quando se desdobra a variância nos componentes linear e quadrático.

TAYLOR e AMSTRONG (1953) mostraram que o delineamento "switchback" pode ser estendido para qualquer número de tratamentos e tem resumidamente indicado o método de análise. Introduziram os delineamentos reduzidos, isto é, delineamentos nos quais cada combinação de tratamentos aparece em uma sequência apenas, ao invés de duas, como ocorre nos delineamentos completos.

LUCAS (1956) ressaltou a sensibilidade de ensaio de reversão quando se faz pesquisa com gado de leite. Basicamente, entretanto, esses delineamentos permitiam a comparação de somente dois tratamentos, e isso tem imposto alguma limitação na sua utilidade.

O autor dedicou seu trabalho para delineamentos em "switchback" que permitam comparações de três ou mais tratamentos.

O delineamento básico de "switchback" apresentado no trabalho, foi o seguinte:

PERÍODO EXPERIMENTAL	TRATAMENTO-SEQUÊNCIA	
	1	2
1	1	2
2	2	1
3	1	2

Segundo o autor, o esquema para tratamentos resulta em comparações particularmente sensíveis, porque ele permite eliminar do erro residual:

- a) efeito de períodos devido a mudanças no ambiente;
- b) variação no nível de produção entre vacas; e
- c) a maior parte da variação entre vacas quanto ao grau de inclinação da curva de lactação.

Ele citou a análise estatística de Brandt (1938) e o teste para comparação de dois tratamentos.

O autor mostrou que a comparação de p tratamentos requer $p(p-1)$ sequências de tratamentos (delineamento completo). Se p é ímpar e igual a 5 ou maior, entretanto, delineamentos que requerem somente $p(p-1)/2$ sequências podem ser usadas (delineamento reduzido). O autor apresentou uma seleção de esquemas padrões para delineamentos completos (com 3, 4 e 6 tratamentos) e reduzidos (com 5, 7 e 9 tratamentos). Os delineamentos completos foram subdivididos dentro de $p-1$ blocos de p sequências cada, e o delineamento reduzido dentro de $(p-1)/2$ blocos de p sequências cada. Segundo o autor, para um erro experimental mínimo, as vacas designadas para o esquema devem ter passado do pico da lactação antes de iniciar o experimento e nenhum animal deverá passar do meio da gestação até o final do ensaio. Sempre que o número de animais que satisfazem essas condições não é suficiente para iniciar todas as sequências do delineamento ao mesmo tempo, podem ser utilizados blocos.

O autor apresentou a seguinte análise estatística. Preliminarmente foram computadas para cada vaca, a quantidade: $D = Y_1 - 2Y_2 + Y_3$, no qual Y_1 , Y_2 e Y_3 representam os valores observados nos períodos 1, 2 e 3 res

pectivamente. O passo seguinte foi computar:

M = soma dos D's para todas as vacas em todas as sequências, e se o delineamento é em blocos, calcula-se para cada bloco;

B = soma dos D's no bloco.

No terceiro passo foi calculado para cada tratamento:

Q = soma dos D's para vacas recebendo o tratamento no 1º e 3º períodos, menos a soma dos D's para vacas recebendo o tratamento no 2º período.

FONTES DE VARIAÇÃO	G.L.	SOMA DE QUADRADOS	
		Abreviatura	Fórmulas
Correção	1	C.F.	$\frac{M^2}{np(p-1)}$
Total (corrigido)	$\frac{np(p-1)}{2} - 1$	T.S.S.	$\frac{1}{6} \sum_i \sum_j D_{ij}^2 - CF$
Blocos (se presente)	v-1	S.S.B.	$\frac{1}{6} \sum_u \frac{B_u^2}{m_u} - CF$
Tratamentos	p-1	S.S.T.	$\frac{1}{6np} \sum_k Q_k^2$
Erro (blocos presentes)	$\frac{np(p-1)-2(p+v)+2}{2}$	S.S.E.	TSS - SSB - SST
Erro (sem blocos)	$\frac{np^2 + (n+2)p}{2}$	S.S.E.	TSS - SST

O divisor 6 que aparece nas fórmulas das somas de quadrados, segundo o autor, é usado para colocar as somas de quadrados em uma base por vaca e por período.

p = nº de tratamentos;

$$n = \begin{cases} r & \text{em delineamentos reduzidos;} \\ 2r & \text{em delineamentos completos;} \end{cases}$$

onde r = nº de vacas por sequência de tratamentos;

v = nº de blocos no delineamento;

m_u = nº de vacas no u -ésimo bloco;

D_{ij} = valor D para a j -ésima vaca na i -ésima sequência de tratamento;

B_u = valor B para o u -ésimo bloco;

Q_k = valor Q para o k -ésimo tratamento.

Os quadrados médios podem ser computados e o teste F para tratamentos feito de modo usual.

Média de Tratamento: A média para o k -ésimo tratamento foi obtida como

$$\bar{Y} + Q_k/2np,$$

no qual $\bar{Y}$ é a média geral das produções no experimento, isto é, a média dos dados originais, não a média dos D 's.

O erro padrão da diferença de tratamentos apresentado pelo autor foi $\sqrt{3s^2/np}$, onde $s^2 = \text{QMR}$.

O autor apresentou ainda a análise de v_a .

riância quando existem dados perdidos ou anormais, pois ocasionalmente uma vaca pode iniciar o experimento e não terminar, ou sua produção durante um ou mais períodos experimentais pode ser anormal devido a fatores não controláveis. Quando isso ocorre é necessário ajustar um valor D , que viabiliza a análise de variância. Se o delineamento é em blocos, o valor perdido D é obtido pela fórmula:

$$D = \frac{np B'_s + m_s (Q'_{sf} - Q'_{sc})}{np(m_s - 1) - 2m_s}$$

onde n e p são definidos como anteriormente e:

m_s = nº de vacas no bloco onde o valor perdido ocorre;

B'_s = soma dos D referentes aos valores não perdidos do bloco;

Q'_{sf} = valor Q para o tratamento que ocorre no 1º e 3º períodos da vaca problema;

Q'_{sc} = valor Q para o tratamento que ocorre no 2º período da vaca problema.

Se o delineamento não é em blocos a fórmula fica:

$$D = \frac{2M' + (p-1) (Q'_{sf} - Q'_{sc})}{np^2 - (n+2) p}$$

no qual M' = a soma dos D's não perdidos, e as outras quantidades são definidas como anteriormente.

O autor apresentou também um exemplo no qual os dados simulam um experimento comparando 3 tratamentos com 12 animais; para ilustrar o procedimento em blocos ele assumiu que 6 das vacas iniciam o experimento em um tempo com delineamento completo, e as vacas remanescentes iniciam mais tarde em 2 grupos de 3, cada grupo formando um bloco. Ele mostrou ainda a análise de variância, as médias dos tratamentos, o erro padrão das diferenças de tratamentos e também o coeficiente de variação dado por:

$$CV = \frac{100 \sqrt{QMR}}{\hat{m}}$$

onde, CV = coeficiente de variação;

QMR = quadrado médio do resíduo;

$\hat{m}$ = média geral.

GODOI (1971), após a obtenção da solução do sistema de equações normais, obteve as deduções matemáticas das fórmulas da análise de variância de um delineamento em "switchback", através dos modelos matemáticos propostos.

O primeiro modelo utilizado pelo autor foi o modelo matemático simplificado ou reduzido, isto é,

$$y_{ijk} = m + v_i + p_j + t_k + e_{ijk} ,$$

conforme descrito em 2.2.

O autor fez o estudo para esse modelo utilizando dois casos:

CASO I - Esquema completo.

VACAS	PERÍODOS		
	P ₁	P ₂	P ₃
v ₁	1*	2	1
v ₂	2	3	2
v ₃	3	1	3
v ₄	1	3	1
v ₅	2	1	2
v ₆	3	2	3

*Os números dentro do quadro (acima), referem-se aos tratamentos atribuídos às parcelas.

O autor obteve, como solução do sistema de equações normais, para o esquema em estudo, as seguintes estimativas:

a) Para a média:

$$\hat{m} = \frac{G}{18} , \text{ onde } G \text{ é o total geral.}$$

b) Para efeito de períodos:

$$\hat{p}_1 = \frac{P_1}{6} - \frac{G}{18}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{P_2}{6} - \frac{G}{18}$$

$$\hat{p}_3 = \frac{P_3}{6} - \frac{G}{18}$$

onde P_j é o total correspondente ao período j .

c) Para efeito de vacas:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{3} (V_1 - \frac{3G}{18} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{3} (V_2 - \frac{3G}{18} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{3} (V_3 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_4 = \frac{1}{3} (V_4 - \frac{3G}{18} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_5 = \frac{1}{3} (V_5 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_2)$$

$$\hat{v}_6 = \frac{1}{3} (V_6 - \frac{3G}{18} - \hat{t}_2 - 2\hat{t}_3)$$

onde V_i é o total correspondente à vaca i .

Através das soluções do sistema de equações normais, obteve-se a Soma de Quadrados dos Parâmetros:

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = & \hat{t}_1 T_1 + \hat{t}_2 T_2 + \hat{t}_3 T_3 + \hat{v}_1 V_1 + \hat{v}_2 V_2 + \\ & + \dots + \hat{v}_6 V_6 + \hat{p}_1 P_1 + \hat{p}_2 P_2 + \hat{p}_3 P_3 . \end{aligned}$$

Como os parâmetros de tratamentos e vacas não são independentes, a soma de quadrados de parâmetros foi rearranjada de forma a ficar ortogonalmente partida.

Assim,

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = & \sum_{k=1}^3 \hat{t}_k Q_k^* + \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 V_i^2 - \frac{G^2}{18} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{18} \right) \end{aligned}$$

onde $Q_k^* = \frac{1}{3} Q_k$, e

Q_k = soma dos D's em que o tratamento k aparece nos 1º e 3º períodos, subtraída da soma dos D's em que o tratamento k aparece no 2º período (definida por LUCAS, 1956).

Foi também obtida pelo autor a solução do sistema para efeitos de tratamentos:

$$\hat{t}_k = \frac{1}{4} Q_k^* .$$

Portanto a Soma de Quadrado de Parâmetros, ficou:

$$\text{SQ Parâmetros} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 Q_k^2 + \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 V_i^2 - \frac{G^2}{18} \right) + \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{18} \right)$$

$$\text{SQ Parâmetros} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^3 Q_k^2 + \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 V_i^2 - \frac{G^2}{18} \right) + \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{18} \right)$$

$$\text{SQ Parâmetros} = \text{SQ Trat. (aj.)} + \text{SQ Vacas (usual)} + \text{SQ Períodos (usual)}$$

Verificou-se que existe uma perfeita identidade das somas de quadrados de tratamentos ajustadas, justificando o modelo simplificado para a derivação dessa parte da soma de quadrados total.

As partes correspondentes a vacas e períodos não foram levadas em consideração na análise convencional, apresentada por LUCAS (1956).

CASO II - Esquema reduzido.

VACAS	P E R Í O D O S		
	I	II	III
v_1	1	2	1
v_2	2	3	2
v_3	3	4	3
v_4	4	5	4
v_5	5	1	5
v_6	1	3	1
v_7	2	4	2
v_8	3	5	3
v_9	4	1	4
v_{10}	5	2	5

Do mesmo modo como foi feito para o Caso I, o autor obteve a solução do sistema de equações normais:

a) Para a média:

$$\hat{m} = \frac{G}{30}$$

b) Para efeito de vacas:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{3} (V_1 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2)$$

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{3} (V_2 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_3 = \frac{1}{3} (V_3 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_3 - \hat{t}_4)$$

$$\hat{v}_4 = \frac{1}{3} (V_4 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_4 - \hat{t}_5)$$

$$\hat{v}_5 = \frac{1}{3} (V_5 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_5 - \hat{t}_1)$$

$$\hat{v}_6 = \frac{1}{3} (V_6 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_3)$$

$$\hat{v}_7 = \frac{1}{3} (V_7 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_4)$$

$$\hat{v}_8 = \frac{1}{3} (V_8 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_3 - \hat{t}_5)$$

$$\hat{v}_9 = \frac{1}{3} (V_9 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_4 - \hat{t}_1)$$

$$\hat{v}_{10} = \frac{1}{3} (V_{10} - 3\hat{m} - 2\hat{t}_5 - \hat{t}_2)$$

c) Para efeitos de períodos:

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{10} (P_1 - 10\hat{m})$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{10} (P_2 - 10\hat{m})$$

$$\hat{p}_3 = \frac{1}{10} (P_3 - 10\hat{m})$$

A soma de quadrados dos Parâmetros resultou:

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = \hat{m}G + \hat{t}_1 T_1 + \hat{t}_2 T_2 + \hat{t}_3 T_3 + \hat{v}_1 V_1 + \dots + \\ + \hat{v}_{10} V_{10} + \hat{p}_1 P_1 + \hat{p}_2 P_2 + \hat{p}_3 P_3 \end{aligned}$$

que, desenvolvida, fica:

$$\begin{aligned} \text{SQ Parâmetros} = \sum_{k=1}^5 \hat{t}_k Q_k^* + \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{10} V_i^2 - \frac{G^2}{30} \right) + \\ + \left(\frac{1}{10} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{30} \right) \end{aligned}$$

Pela estrutura do desenvolvimento, o autor chegou à generalização,

$$Q_k^* = T_k - \frac{2}{3} \sum_k V_k' - \frac{1}{3} \sum_k V_k''$$

$$\hat{t}_k = \frac{3}{2np} Q_k^* ,$$

onde,

V_k' = total correspondente às vacas que receberam o tratamento k nos 1º e 3º períodos;

V_k'' = total correspondente às vacas que receberam o tratamento k no 2º período;

r = número de repetições de cada sequência;

$$n = \begin{cases} r, & \text{se foi esquema reduzido;} \\ 2r, & \text{se foi esquema completo.} \end{cases}$$

O autor mostrou ainda um exemplo numérico on
de apresentou a análise de variância para o modelo simplii
ficado.

Fonte de Variação	G.L.
Vacas (não aj.)	v-1
Períodos	j-1
Tratamentos	p-1
Resíduo	por diferença
Total	N-1

A análise de variância apresentada por Lucas (1956) e citada pelo autor, é:

Fonte de Variação	G.L.	S.Q.
Tratamento (aj.)	p-1	SQT
Resíduo	por diferença	SQ Res.
Total	v-1	SQ Total

onde:

$$SQ \text{ Total} = \frac{1}{6} \sum D_i^2 - \frac{1}{3np(p-1)} (\sum D_i)^2$$

$$SQ \text{ Resíduo} = SQ \text{ Total} - SQ \text{ Trat. (aj.)}$$

O autor, examinando a composição do resíduo no modelo reduzido mostrou que se pode decompô-lo em 2 partes aditivas, ou sejam:

Interação período (efeito linear) x vacas: $v-1$

Interação período (efeito quadrático) x vacas (eliminado efeito de tratamento) $v-p$

onde o componente linear é obtido pela diferença entre o resíduo do modelo simplificado e o resíduo da análise de LUCAS (1956).

Fonte de Variação	G.L.	S.Q.
P' x V	$v-1$	por diferença
P'' x V	$v-p$	SQ Res. (LUCAS)
Total (Res. Mod. Red.)		SQ Res. (Mod.Red.)

Para verificar se os dois componentes estimam σ^2 , o autor obteve os componentes de variância.

A seguir, GODOI (1971) introduziu o modelo matemático completo dos ensaios "switchback", isto é, um modelo matemático que permitia a estimação de parcelas, dedução das somas de quadrados ajustadas e possibilitava a aplicação de esperança matemática às estimativas de médias, variâncias, parcelas perdidas, etc.

O modelo matemático introduzido foi:

$$y_{ijk} = m + v_i + t_k + b_1 x_j + b_2 z_j + c_i x_j + c_{ijk} ,$$

conforme descrito em (2.2).

O autor demonstrou que o modelo proposto corresponde ao desdobramento do resíduo do modelo reduzido nas partes linear e quadrática, conservando os demais efeitos inalterados, a não ser o desmembramento feito dos componentes linear e quadrático dos períodos, através da aplicação do conceito de polinômios ortogonais no modelo reduzido.

Foi admitido um esquema com dois tratamentos, duas repetições por sequência e 6 vacas, como a seguir:

VACAS	P ₁	P ₂	P ₃
1	1	2	1
2	1	2	1
3	1	2	1
4	2	1	2
5	2	1	2
6	2	1	2

Após a montagem da equação matricial, o autor obteve as soluções do sistema:

a) Para efeito linear de período:

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

b) Para efeito quadrático de período:

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{36} (P_1 - 2P_2 + P_3)$$

c) Para efeito da interação (linear) períodos x Vacas:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{2} (y_{131} - y_{111}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{2} (y_{231} - y_{211}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_3 = \frac{1}{2} (y_{331} - y_{311}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_4 = \frac{1}{2} (y_{432} - y_{412}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_5 = \frac{1}{2} (y_{532} - y_{512}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{c}_6 = \frac{1}{2} (y_{632} - y_{612}) - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

A solução do sistema de equações normais para os demais parâmetros é obtida da mesma maneira que no caso do modelo matemático reduzido.

As fórmulas, para completar o quadro de análise de variância, para os componentes linear e quadrático de períodos e a interação período (linear) x vacas, apresentadas foram:

$$SQ(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \frac{1}{12} (P_1 - P_3)^2 + \frac{1}{36} (P_1 - 2P_2 + P_3)^2$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{18}$$

$$SQ(\hat{c}_i) = \frac{1}{2} \sum_i (y_{i3k} - y_{i1k})^2 - \frac{1}{12} (P_1 - P_3)^2$$

O autor apresenta ainda a generalização:

$$SQ(\hat{b}_1, \hat{b}_2) = \frac{1}{v} \left(\sum_{j=1}^3 P_j^2 \right) - \frac{G^2}{3v}$$

$$SQ(\hat{c}_i) = \frac{1}{2} \sum_i (y_{i3k} - y_{i1k})^2 - \frac{1}{2v} (P_1 - P_3)^2$$

Combinando os resultados do modelo matemático reduzido e os do completo, foi obtida a seguinte análise de variância:

F. de Variação	G.L.	S.Q.
Vacas (ign. trat.)	v-1	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^v V_i^2 - \frac{G^2}{3v}$
Períodos (línear)	1	$\frac{1}{2v} (P_1 - P_3)^2$
Períodos (quadr.)	1	$\frac{1}{6v} (P_1 - 2P_2 + P_3)^2$
Tratamentos (aj.)	p-1	$\frac{3}{2np} \sum_{k=1}^p (Q_k^*)^2$
Int. P' x V	v-1	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^v (y_{i3k} - y_{i1k})^2 - \frac{1}{2v} (P_1 - P_3)^2$
Resíduo	v-p	por diferença
Total	3v-1	$\sum_{i,j} y_{ijk}^2 - \frac{G^2}{3v}$

com as seguintes esperanças dos quadrados médios:

Fontes de Variação	E(Q.M.)
Vacas (ign. trat.)	
Períodos (linear)	$\sigma^2 + 12 b_1^2$
Períodos (quadr.)	$\sigma^2 + 36 b_2^2$
Trat. (aj.)	$\sigma^2 + 2(t_1 - t_2)^2$
Interação P' x v	$\sigma^2 + \frac{2}{5} \sum_i c_i^2$
Resíduo	σ^2

GODOI (1971) apresentou também a aplicação do modelo matemático completo no estudo do delineamento em "switchback" quando se tem perda de parcela.

O autor discutiu as fórmulas de Lucas (1956) para o cálculo da parcela perdida, e através da esperança matemática demonstra o "bias" na estimativa do quadrado médio de tratamentos, fato que compromete a aplicação do teste F.

Segundo o autor, uma outra maneira de se desenvolver a soma de quadrados de tratamentos ajustada, quando se perde uma ou mais parcelas, poderia ser obtida deduzindo-se as fórmulas a partir do modelo completo, o qual

permite o conhecimento do fator de ajustamento.

Para o esquema em estudo, o autor apresentou o contraste entre estimativas de duas médias, que é dado por:

$$\hat{c} = \frac{1}{2np} (Q_1 - Q_2) ,$$

e a variância da estimativa $\hat{c}$, é:

$$V(\hat{c}) = E\{[\hat{c} - E(\hat{c})]^2\}$$

$$V(\hat{c}) = \frac{5}{16} \sigma^2 .$$

Substituindo-se σ^2 pela estimativa s^2 , resultou:

$$\hat{V}(\hat{c}) = \frac{5}{16} s^2 .$$

Esse resultado é o mesmo quando se deduz a fórmula da variância do contraste entre duas médias a partir da expressão do cálculo de parcela perdida (LUCAS,1956) ou pelo Método Direto apresentado por GODOI (1971) conhecendo-se as expressões de $\hat{t}_1$ e $\hat{t}_2$.

O autor apresentou ainda um exemplo numérico para ilustrar as deduções feitas e também a introdução do efeito de blocos no modelo completo sem entrar em dedu-

ções teóricas.

Apresenta, ademais, um programa para computador eletrônico na linguagem FORTRAN-1130, e sugere um modelo matemático para a análise de covariância de dados de delineamentos em "switchback".

KALIL (1971) apresentou as fórmulas obtidas por LUCAS (1956) para análise de variância nos ensaios de reversão. O autor apresentou como exemplo, ensaios utilizando as fórmulas propostas considerando também, casos de parcela perdida.

Lucas (1975), segundo GODOI (1983), propôs o estudo dos componentes de variância quando a interação período (linear) x animais é considerada aleatória, linha de pesquisa não seguida pelo autor.

GODOI (1983), com o objetivo de implementar a análise de dados de produção de leite, propôs o estudo de dois modelos. No Modelo I o autor admitiu a independência dos erros e no Modelo II foi admitida a hipótese de erros correlacionados segundo o esquema auto-regressivo.

O autor chegou à conclusão de que os dados de produção de leite tomados para ensaios em "switchback" possuem correlações entre períodos do tipo auto-regressivo. Portanto, ao comparar os dois modelos o autor concluiu que o Modelo II conduz a testes de significância mais poderosos.

3. MATERIAL

A exemplificação da metodologia aqui apresentada será feita com os dados obtidos da pesquisa "Utilização de Sub-Produtos da Fermentação Alcoólica na Alimentação de Vacas em Lactação", realizada no Estábulo Experimental do Departamento de Zootecnia da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", no período de junho a dezembro de 1982.

O esquema adotado para se testar três tratamentos, foi o seguinte:

ANIMAL	P E R Í O D O S		
	I	II	III
BLOCO 1			
1	A	B	A
2	A	C	A
3	B	A	B
4	B	C	B
5	C	A	C
6	C	B	C
BLOCO 2			
7	A	B	A
8	A	C	A
9	B	A	B
10	B	C	B
11	C	A	C
12	C	B	C

e os dados obtidos para produção de leite, em quilogramas (kg), constam da Tabela 1.

Tabela 1 - Produção de leite (kg) de vacas recebendo diferentes fontes de nitrogênio.

ANIMAIS		P E R Í O D O S		
		I	II	III
BLOCO 1	1	20,04 (A)	21,19 (B)	17,52 (A)
	2	17,30 (A)	19,01 (C)	15,07 (A)
	3	25,36 (B)	26,39 (A)	22,39 (B)
	4	15,52 (B)	13,53 (C)	11,57 (B)
	5	19,93 (C)	17,92 (A)	13,93 (C)
	6	13,12 (C)	12,18 (B)	12,82 (C)
BLOCO 2	7	14,08 (A)	13,80 (B)	11,74 (A)
	8	19,04 (A)	18,65 (C)	15,81 (A)
	9	16,19 (B)	14,94 (A)	13,13 (B)
	10	25,07 (B)	24,15 (C)	19,92 (B)
	11	18,95 (C)	17,64 (A)	14,02 (C)
	12	18,75 (C)	17,86 (B)	13,41 (C)

4. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

4.1 - Introdução

Para o desenvolvimento teórico, foi suposto um ensaio em "switchback" com p tratamentos, v animais, J períodos, $S = p.(p-1)$ sequências e $L = (p-1)$ blocos, conforme LUCAS (1956).

Como em um ensaio em "switchback" as generalizações tornam-se muitas vezes difíceis e pouco esclarecedoras, havemos por bem construir um exemplo inicial e usá-lo como suporte, sem perda de generalidade, para as deduções.

Com esse objetivo foi adotado o seguinte esquema:

ANIMAIS	P E R I O D O S		
	I	II	III
BLOCO 1			
1	A	B	A
2	B	C	B
3	C	A	C
BLOCO 2			
4	B	A	B
5	C	B	C
6	A	C	A

As características desse esquema representao tivo descrito acima são:

$p = 3$ = número de tratamentos;

$J = 3$ = número de períodos;

$L = (p-1) = 2$ = número de blocos, onde cada bloco possui p sequências;

$v = 6$ = número de animais;

$S = p(p-1) = 6$ = número de sequências.

4.2 - Adoção de Um Modelo Linear

Seja o modelo linear $y = X\beta + \epsilon$, onde:

y é um vetor de realizações de variáveis aleatórias;

X é uma matriz conhecida, dos coeficientes dos parâmetros;

β é um vetor de parâmetros desconhecidos;

ϵ é um vetor de erros aleatórios, tal que

$$\epsilon \cap N(\phi, I\sigma^2) ;$$

caracterizado por:

$$y_{ijk\ell} = m + b_{\ell}z_j + v_i + t_k + \alpha_1x_j + \alpha_2z_j + c_ix_j + e_{ijk\ell} \quad (I)$$

onde:

$y_{ijk\ell}$ é o valor observado na i -ésima vaca, do j -ésimo período, submetida ao k -ésimo tratamento do ℓ -ésimo bloco;

m é a média geral;

b_{ℓ} é o efeito do bloco ℓ ($\ell=1,2,\dots,L$);

v_i é o efeito da vaca i ($i=1,2,\dots,v$);

t_k é o efeito do tratamento k ($k=1,2,\dots,p$);

α_1 é o efeito linear de período;

α_2 é o efeito quadrático de período;

c_i é o efeito da interação período (linear) x vacas;

e_{ijkl} é o erro experimental, onde se supõe que

$$e_{ijkl} \cap N(0, \sigma^2)$$

e que todos os erros experimentais sejam independentes.

Além disso,

$$x_j = \begin{cases} -1 & \text{se } j=1 & (1^\circ \text{ Período}) \\ 0 & \text{se } j=2 & (2^\circ \text{ Período}) \\ 1 & \text{se } j=3 & (3^\circ \text{ Período}) \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j=1 & (1^\circ \text{ Período}) \\ -2 & \text{se } j=2 & (2^\circ \text{ Período}) \\ 1 & \text{se } j=3 & (3^\circ \text{ Período}) \end{cases}$$

que correspondem à aplicação do conceito de polinômios ortogonais para o desmembramento dos componentes linear e quadrático dos períodos.

4.2.1 - Exigências do modelo adotado

Conforme sugerido na descrição do modelo, sua adequação está restrita a certas exigências, conforme relacionado a seguir:

- i) Aditividade dos efeitos;
- ii) Erros com distribuição normal, onde $E(e_i) = 0$ e $V(e_i) = \sigma^2$;
- iii) Homogeneidade de variâncias;
- iv) Independência dos erros.

Para que se possa analisar um conjunto de dados, através do modelo proposto neste estudo, torna-se necessária a aplicação de testes que permitam verificar se as pressuposições do modelo não estão sendo violadas em prejuízo da confiabilidade dos testes F na análise de variância.

Dentre os processos mais comuns utilizados para esse fim, daremos prioridade, neste estudo, à análise gráfica de resíduos, conforme procedimentos amplamente descritos em ANSCOMBE (1961), ANSCOMBE e TUKEY (1963), NETER e WASSERMAN (1977), dentre outros.

4.3 - Equações Normais

Para a obtenção do sistema de equações normais $X'X \hat{\beta} = X'y$, efetuamos a partição da matriz X , conforme CHAKRABARTI (1962), PIMENTEL GOMES (1967), IEMMA (1981), entre outros.

Então, a matriz relativa ao exemplo citado em (4.1) resultou:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de dimensões $N \times (L + v + p + (J-1) + v + 1)$, ou

$$X = [X_1 \begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} X_2 \begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} X_3 \begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} X_4 \begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} X_5 \begin{smallmatrix} \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} X_6]$$

onde:

X_1 = vetor dos coeficientes da média, de dimensões $(N) \times (1)$, onde $N = 3v$ é o número total de observações;

X_2 = matriz dos coeficientes associados aos blocos, de dimensões $(N) \times (L)$;

X_3 = matriz dos coeficientes associados a vacas, de dimensões $(N) \times (v)$;

X_4 = matriz dos coeficientes associados aos tratamentos, de dimensões $(N) \times (p)$;

X_5 = matriz dos coeficientes associados aos efeitos linear e quadrático de períodos, de dimensões $(N) \times (J-1)$;

X_6 = matriz dos coeficientes associados aos efeitos da interação período (linear) x vacas, de dimensões $(N) \times (v)$.

Assim, o Sistema de Equações Normais obtido, foi:

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 \\ X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \\ \hat{v} \\ \hat{\tau} \\ \hat{a} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'y \\ X'y \\ X'y \\ X'y \\ X'y \\ X'y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ B \\ V \\ T \\ P \\ C \end{bmatrix} \quad (I)$$

onde:

$X'X$ tem dimensões $[L + v + p + (J-1) + v + 1]$;

$X_1'X_1 = M_1 = N =$ número de observações, que no exemplo em questão, resultou $X_1'X_1 = M_1 = 18$;

$X_1'X_2 = M_2 = m_{\ell} \cdot \sum z_j \cdot (1) [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{(L)} =$ matriz associada à soma, por animal, dos coeficientes dos efeitos de blocos, sendo m_{ℓ} o número de animais do bloco ℓ , e $\sum z_j = 0$, então:

$X_1'X_2 = M_2 = (1) [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{(L)} = (1)\phi_{(L)}$, onde $(1)\phi_{(L)}$ é uma matriz nula. Assim, no exemplo obteve-se $X_1'X_2 = M_2 = (1)\phi_{(2)}$;

$X_1'X_3 = M_3 = (1) [J \ J \ \dots \ J]_{(v)} =$ matriz associada ao número de períodos, onde v é o número de animais. Então: $X_1'X_3 = M_3 = 3 (1)E_{(6)}$, e E é uma matriz cujos elementos são todos iguais à unidade;

$X_1'X_4 = M_4 = (1) [r_k \quad r_k \quad \dots \quad r_k]_{(p)} =$ vetor associado ao número de repetições de tratamentos, isto é, ao número de vezes em que cada tratamento foi aplicado durante o ensaio. No exemplo citado em (4.1) o número de repetições r_k é igual a 6, pois cada tratamento foi utilizado 6 vezes durante o experimento, portanto:

$$X_1'X_4 = M_4 = 6 (1) E_{(3)};$$

$X_1'X_5 = M_5 = (1) [v \sum x_j \quad v \sum z_j \quad \dots]_{(J-1)} =$ vetor associado à soma dos coeficientes lineares quadrático de períodos. Sendo $\sum x_j = \sum z_j = 0$, então: $X_1'X_5 = M_5 = (1) [0 \quad 0 \quad \dots]_{(J-1)} = (1) \phi_{(J-1)}$. Como no exemplo em estudo $J=3$, então:

$$X_1'X_5 = M_5 = (1) \phi_{(2)};$$

$X_1'X_6 = M_6 = (1) [\sum x_j \quad \sum x_j \quad \dots \quad \sum x_j]_{(v)} =$ vetor associado à soma dos coeficientes da Interação Período (linear) x Vacas. Sendo $v = 6$, obtivemos $X_1'X_6 = M_6 = (1) \phi_{(6)};$

$$X_2'X_2 = M_7 = \begin{matrix} & \begin{vmatrix} m_{\ell} \sum z_j^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{\ell} \sum z_j^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{\ell} \sum z_j^2 \end{vmatrix} \\ (L) & \end{matrix} = m_{\ell} \sum z_j^2 I_{(L)}$$

é a matriz associada ao produto dos coeficientes quadráticos de blocos pelos coeficientes linear e quadrático de períodos. Como $\sum x_j \cdot z_j = 0$, $\sum z_j^2 = 6$, e no nosso exemplo com $m_k = 3$, obtivemos

$$X_2'X_5 = M_{10} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}_{(2)} ;$$

$X_2'X_6 = M_{11} = (L)\phi(v)$, é a matriz nula associada ao produto dos coeficientes quadráticos de blocos pelos coeficientes lineares da interação Período (linear) x Vacas. Para o exemplo em questão:

$$X_2'X_6 = M_{11} = (2)\phi(6);$$

$X_3'X_3 = M_{12} = J \cdot I_{(v)}$, é a matriz diagonal associada ao número de períodos. Como temos $J = 3$ períodos, obtivemos: $X_3'X_3 = M_{12} = 3 I_{(6)}$;

$$X_3'X_4 = M_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vp} \end{pmatrix}_{(v)} \quad (p)$$

é a matriz associada ao número de vezes em que cada animal recebe o tratamento k durante o ensaio. No exemplo citado em (4.1), temos o ani-

mal 1 na sequência: ABA, logo a_{11} que será o número de vezes que o animal 1 recebe o tratamento A, isto é, tratamento 1, é igual a 2, e a_{12} que é o número de vezes que o animal 1 recebe o tratamento 2 (B), é igual a 1, e a_{13} o número de vezes que o animal 1 recebe o tratamento 3 (C) é igual a zero. Portanto:

$$X_3'X_4 = M_{13} = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$X_3'X_5 = M_{14} = (v)\phi(J-1)$, é a matriz associada à soma por animal dos coeficientes linear e quadrático dos períodos. Logo: $X_3'X_5 = M_{14} = (6)\phi(2)$;

$X_3'X_6 = M_{15} = \Sigma x_j \cdot I(v) = (v)\phi(v)$, é a matriz associada à soma por animal dos coeficientes da Interação Períodos (linear) x Vacas. Para o exemplo em estudo, obtivemos:

$$X_3'X_6 = M_{15} = (6)\phi(6) ;$$

$X_4'X_4 = M_{16} = r_k \cdot I_{(p)}$, é a matriz diagonal associada ao número de repetições dos tratamentos. Como no exemplo em estudo cada tratamento aparece 6 vezes durante o ensaio, temos $r_k = 6$. Portanto: $X_4'X_4 = M_{16} = 6 \cdot I_{(3)}$;

$X_4'X_5 = M_{17} = (p)\phi_{(J-1)}$, é a matriz resultante do produto da matriz dos coeficientes dos efeitos de tratamentos pela matriz dos coeficientes linear e quadrático dos períodos. Para o exemplo citado, obtivemos $X_4'X_5 = M_{17} = \begin{matrix} \phi \\ (3) \end{matrix} \begin{matrix} \\ (2) \end{matrix}$;

$X_4'X_6 = M_{18} = (p)\phi_{(v)}$, é a matriz resultante do produto dos coeficientes dos efeitos de tratamentos pela matriz dos coeficientes da Interação Período (linear) x Vacas. Então:

$$X_4'X_6 = M_{18} = \begin{matrix} \phi \\ (3) \end{matrix} \begin{matrix} \\ (6) \end{matrix} ;$$

$$X_5'X_5 = M_{19} = v \cdot \begin{matrix} \begin{pmatrix} \Sigma x_j^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \Sigma z_j^2 \end{pmatrix} \\ (J-1) \end{matrix} \begin{matrix} \\ (J-1) \end{matrix}$$

é a matriz diagonal associada ao produto do número de animais pela soma dos quadrados dos coeficientes linear e quadrático de períodos, que para o exemplo em estudo, resultou:

$$X_5'X_5 = M_{19} = 6 \cdot \begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ (2) \end{matrix} \begin{matrix} \\ (2) \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \\ (2) \end{matrix} ;$$

$$X_5'X_6 = M_{20} = \underset{(J-1)}{\begin{pmatrix} \Sigma x_j^2 & \Sigma x_j^2 & \dots & \Sigma x_j^2 \\ \Sigma x_j & \Sigma z_j & \dots & \Sigma x_j & \Sigma z_j \end{pmatrix}}_{(v)}$$

é a matriz associada ao produto dos coeficientes linear e quadrático de períodos pelos coeficientes da Interação Períodos (linear) x Vacas, resultando, para o exemplo em estudo:

$$X_5'X_6 = M_{20} = \underset{(2)}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{(6)} ;$$

$X_6'X_6 = M_{21} = \Sigma x_j^2 I_{(v)}$, é a matriz diagonal associada à soma dos quadrados dos coeficientes da Interação Período (linear) x Vacas. Como $\Sigma x_j^2 = 2$ e no exemplo citado em 4.1 temos 6 animais, resultou: $X_6'X_6 = M_{21} = 2 \cdot I_{(6)}$.

De modo análogo, o vetor $\hat{\beta}$ ficou constituído de:

$\hat{m}$ = média geral;

$\hat{b}$ = vetor das soluções de mínimos quadrados para efeitos de blocos;

$\hat{v}$ = vetor das soluções de mínimos quadrados para efeitos de vacas;

$\hat{t}$ = vetor das soluções de mínimos quadrados para efeitos de tratamentos;

$\hat{\alpha}$ = vetor das soluções de mínimos quadrados para efeitos linear e quadrático de períodos;

$\hat{c}$ = vetor das soluções de mínimos quadrados para efeitos da interação Período (linear) x Vacas.

Para o vetor $X'y$, tem-se:

$X'_1y = G$ = total das observações $y_{ijk\ell}$;

$$X'_2y = B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

onde: $B_\ell = \sum D_i$ = soma dos D_i dos animais que pertencem ao bloco ℓ ; e

$$D_i = y_{i1k\ell} - 2y_{i2k\ell} + y_{i3k\ell},$$

segundo BRANDT (1938) e LUCAS (1956);

$X'_3y = V$ = vetor dos totais de vacas;

$X'_4y = T$ = vetor dos totais de tratamentos;

$$X'_5y = P = \begin{pmatrix} P_3 - P_1 \\ P_1 - 2P_2 + P_3 \end{pmatrix},$$

onde: P_1 = total do 1º período;

P_2 = total do 2º período;

P_3 = total do 3º período.

$$X_6' y = C = \begin{bmatrix} y_{13k\ell} - y_{11k\ell} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y_{v3k\ell} - y_{v1k\ell} \end{bmatrix} ;$$

resultando em:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \phi & M_3 & M_4 & \phi & \phi \\ \phi & M_7 & \phi & \phi & M_{10} & \phi \\ M_3' & \phi & M_{12} & M_{13} & \phi & \phi \\ M_4' & \phi & M_{13}' & M_{16} & \phi & \phi \\ \phi & M_{10}' & \phi & \phi & M_{19} & M_{20} \\ \phi & \phi & \phi & \phi & M_{20}' & M_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \\ \hat{v} \\ \hat{t} \\ \hat{a} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ B \\ V \\ T \\ P \\ C \end{bmatrix} \quad (II)$$

Por outro lado, sabemos, da teoria geral, que o sistema de equações normais é sempre consistente, admitindo mais de uma solução nos casos como este, em que a matriz X não é de posto completo.

Desse modo, visando à obtenção de solução única para o sistema, adotamos o uso de restrições não estimáveis nas soluções, conforme amplamente abordado em textos de Estatística Experimental e Modelos Lineares. Esse procedimento pareceu ser adequado, pois, o uso das in-

versas generalizadas, embora se constitua num procedimento elegante, é em geral inviável para pesquisadores que não dispõem de computadores de grande porte, adequados ao uso de "pacotes".

Assim, na obtenção de solução única, foram tomadas as restrições:

$$\sum_{i=1}^V \hat{v}_i = 0 \quad ; \quad \sum_{\ell=1}^L \hat{b}_{\ell} = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^P \hat{t}_k = 0 \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^V \hat{c}_i = 0 \quad .$$

Nesse contexto, ressalta-se aqui, que alguns produtos de interesse, que aparecem em (II), podem ser colocados sob a forma das restrições citadas, e este fato simplificará sobremaneira a solução do sistema de equações normais. São eles:

$$i) \quad M_3 \quad \underline{\hat{b}} = J \cdot \sum_{\ell} \hat{b}_{\ell} = \phi \quad ;$$

$$ii) \quad M_3 \quad \underline{\hat{v}} = J \cdot \sum_i \hat{v}_i = \phi \quad ;$$

$$iii) \quad M_4 \quad \underline{\hat{t}} = r_k \cdot \sum_k \hat{t}_k = \phi \quad ;$$

$$iv) \quad M'_{10} \quad \underline{\hat{b}} = m_{\ell} \cdot \sum_j z_j^2 \cdot \sum_{\ell} \hat{b}_{\ell} = \phi \quad ;$$

$$v) \quad M_{20} \quad \underline{\hat{c}} = \sum_j x_j^2 \cdot \sum_i \hat{c}_i = \phi \quad .$$

Consideradas as restrições, o sistema de equações normais (II), resultou:

$$M_1 \hat{m} = G$$

$$M_7 \hat{b} + M_{10} \hat{\alpha} = B$$

$$M'_3 \hat{m} + M_{12} \hat{v} + M_{13} \hat{t} = V$$

$$M'_4 \hat{m} + M'_{13} \hat{v} + M_{16} \hat{t} = T$$

$$M_{19} \hat{\alpha} = P$$

$$M'_{20} \hat{\alpha} + M_{21} \hat{c} = C$$

Esse sistema pode ser partido em dois sub-sistemas independentes, como a seguir:

SUB-SISTEMA 1:

$$M_1 \hat{m} = G$$

$$M'_3 \hat{m} + M_{12} \hat{v} + M_3 \hat{t} = V$$

$$M'_4 \hat{m} + M'_{13} \hat{v} + M_{16} \hat{t} = T$$

SUB-SISTEMA 2

$$M_{70} \hat{\alpha} + M_{10} \hat{\alpha} = B$$

$$M_{19} \hat{\alpha} = P$$

$$M'_{20} \hat{\alpha} + M_{21} \hat{\alpha} = C$$

4.3.1 - Solução do sistema para a média

Através do sub-sistema 1,

$$M_1 \hat{m} = G ,$$

obtivemos:

$$\hat{m} = M_1^{-1} G .$$

Como $M_1 = N$, escalar, a solução do sistema para $\hat{m}$ é:

$$\hat{m} = \frac{G}{N} \quad (III)$$

e, no exemplo em questão:

$$\hat{m} = \frac{G}{18}$$

4.3.2 - Solução do sistema para efeitos de tratamentos eliminando-se efeitos de vacas

Para eliminar os efeitos de vacas, optamos conforme CHAKRABARTI (1962), por pré-multiplicar ambos os membros do sistema II pela matriz W definida como:

$$W = \begin{bmatrix} \phi & \phi & -M'_{13}M^{-1}_{12} & I & \phi & \phi \end{bmatrix}.$$

Então, efetuando o produto:

$$W \cdot \begin{bmatrix} M_1 & \phi & M_3 & M_4 & \phi & \phi \\ \phi & M_7 & \phi & \phi & M_{10} & \phi \\ M'_3 & \phi & M_{12} & M_{13} & \phi & \phi \\ M'_4 & \phi & M'_{13} & M_{16} & \phi & \phi \\ \phi & M'_{10} & \phi & \phi & M_{19} & M_{20} \\ \phi & \phi & \phi & \phi & M'_{20} & M_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \\ \hat{v} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = W \cdot \begin{bmatrix} G \\ B \\ V \\ T \\ P \\ C \end{bmatrix}$$

obtivemos:

Como $(-M'_{13} M_{12}^{-1} M_{12} + M'_{13}) = \phi$, resultou:

$$(-M'_{13} M_{12}^{-1} M'_3 + M'_4) \hat{m} + (-M'_{13} M_{12}^{-1} M_{13} + M_{16}) \hat{\tau} = (-M'_{13} M_{12}^{-1} V + T) ,$$

e também: $(-M'_{13} M_{12}^{-1} M'_3 + M'_4) = \phi$, então:

$$(-M'_{13} M_{12}^{-1} M_{13} + M_{16}) \hat{\tau} = (-M'_{13} M_{12}^{-1} V + T) .$$

Fazendo:

$$(-M'_{13} M_{12}^{-1} M_{13} + M_{16}) = C^*$$

e

$$(-M'_{13} M_{12}^{-1} V + T) = Q^* ,$$

obtivemos:

$$C^* \hat{\tau} = Q^* , \quad (IV)$$

que é o sistema de equações normais para tratamentos eliminados os efeitos de vacas.

Como a matriz C^* tem característica igual a $(p-1)$, uma alternativa segundo CHAKRABARTI (1962), é introduzir uma restrição não estimável nas soluções.

Sendo assim, obtemos um novo sistema de equações:

$$A \hat{\tau} = \phi . \quad (V)$$

Somando-se (V) em (IV), obtemos:

$$(C^* + A) \cdot \underline{\hat{t}} = Q^*$$

Sendo $C^* + A = N^*$, logo:

$$N^* \underline{\hat{t}} = Q^* .$$

Como por hipótese, a matriz N^* é não singular, temos:

$$\underline{\hat{t}} = N^{\pm 1} Q^* . \quad (VI)$$

Admitindo-se a restrição $\sum_{k=1}^p \hat{t}_k = 0$, e tomando-se a matriz A como:

$$A = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_2 = \sum_{i,k} (a_{i',k'} \cdot a_{i,k})$ para $i \neq i'$ e $k \neq k'$ e a_{ik} é o número de vezes que o animal $\underline{i}$ recebeu o tratamento $\underline{k}$, onde $k=1,2,\dots,p$ e $i=1,2,\dots,v$, vem:

$$N^* = (r_k - \frac{\lambda_1}{J} + \frac{\lambda_2}{J}) I_{(p)} ,$$

e $\lambda_1 = \sum_{i,k} a_{i,k}^2$ para $i=i'$ e $k=k'$, então, no exemplo em questão:

$$N^* = \left(6 - \frac{10}{3} + \frac{4}{3}\right) I_{(3)} = 4 \cdot I_{(3)}$$

$$N^* = 4 \cdot I_{(3)}$$

$$N^{*1} = \frac{1}{4} I_{(3)}$$

Sendo $Q^* = (-M'_{13} M_{12}^{-1} V + T)$, resulta em:

$$Q^* = \begin{bmatrix} T_1 - \frac{2}{3} (V_1 + V_6) - \frac{1}{3} (V_3 + V_4) \\ T_2 - \frac{2}{3} (V_2 + V_4) - \frac{1}{3} (V_1 + V_5) \\ T_3 - \frac{2}{3} (V_3 + V_5) - \frac{1}{3} (V_2 + V_6) \end{bmatrix} \quad (\text{VII})$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} T_1 - \frac{2}{3} (V_1 + V_6) - \frac{1}{3} (V_3 + V_4) \\ T_2 - \frac{2}{3} (V_2 + V_4) - \frac{1}{3} (V_1 + V_5) \\ T_3 - \frac{2}{3} (V_3 + V_5) - \frac{1}{3} (V_2 + V_6) \end{bmatrix} \quad (\text{VIII})$$

que é a solução do sistema para tratamentos, eliminando-se os efeitos de vacas.

4.3.3 - Solução do sistema para vacas

Do sub-sistema 1, temos:

$$M'_3 \hat{m} + M_{12} \hat{v} + M_{13} \hat{t} = V \quad ,$$

portanto:

$$M_{12} \hat{v} = V - M_{13} \hat{t} - M'_3 \hat{m} \quad .$$

Sendo M_{12} não singular, obtivemos:

$$\hat{v} = M_{12}^{-1} V - M_{12}^{-1} M_{13} \hat{t} - M_{12}^{-1} M'_3 \hat{m} \quad ,$$

que é a solução do sistema para vacas em função da média geral ($\hat{m}$) e dos efeitos de tratamentos ($\hat{t}$) que foram obtidos em 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \\ \hat{v}_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} V_1 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_2 \\ V_2 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_2 - \hat{t}_3 \\ V_3 - 3\hat{m} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_3 \\ V_4 - 3\hat{m} - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_2 \\ V_5 - 3\hat{m} - \hat{t}_2 - 2\hat{t}_3 \\ V_6 - 3\hat{m} - 2\hat{t}_1 - \hat{t}_3 \end{bmatrix}$$

Esses resultados coincidem com aqueles obtidos por GODOI (1971), que estudou um modelo matemático semelhante sem considerar efeitos de blocos.

4.3.4 - Solução do sistema para efeitos linear e quadrático de períodos

Tomando-se a segunda equação do sub-sistema 2, temos:

$$M_{19} \hat{\alpha} = P .$$

Como M_{19} é não singular, existe M_{19}^{-1} tal que $M_{19}^{-1} M_{19} = I$, logo:

$$\hat{\alpha} = M_{19}^{-1} P ,$$

e então:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{v \sum z_j^2} (P_1 - 2P_2 + P_3) .$$

Assim, para o exemplo, vem

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{36} (P_1 - 2P_2 + P_3) .$$

Esses resultados coincidem com as fórmulas obtidas por GODOI (1971).

4.3.5 - Solução do sistema para efeitos de blocos

Do sub-sistema 2 temos:

$$M_7 \underline{\delta} + M_{10} \hat{\underline{\alpha}} = B$$

$$M_7 \underline{\delta} = B - M_{10} \hat{\underline{\alpha}} \quad .$$

Sendo M_7 não singular, existe M_7^{-1} tal que $M_7^{-1} M_7 = I$, portanto, pré-multiplicando ambos os membros por M_7^{-1} , obtém-se:

$$M_7^{-1} M_7 \underline{\delta} = M_7^{-1} B - M_7^{-1} M_{10} \hat{\underline{\alpha}}$$

$$\underline{\delta} = M_7^{-1} B - M_7^{-1} M_{10} \hat{\underline{\alpha}} \quad ,$$

que é a solução do sistema para blocos em função dos efeitos de períodos obtidos em 4.3.4.

$$\delta_{\ell} = \frac{1}{m_{\ell} \sum z_j^2} B_{\ell} - \hat{\alpha}_2$$

$$\delta_{\ell} = \frac{1}{18} B_{\ell} - \frac{1}{36} (P_1 - 2P_2 + P_3) \quad .$$

4.3.6 - Solução do sistema para efeitos da interação Período (linear) x Vacas

Ainda do segundo sub-sistema temos:

$$M'_{20} \hat{\underline{\alpha}} + M_{21} \hat{\underline{c}} = C$$

$$M_{21} \hat{\underline{c}} = C - M'_{20} \hat{\underline{\alpha}}$$

Sendo M_{21} não singular, vem:

$$\hat{\underline{c}} = M_{21}^{-1} C - M_{21}^{-1} M'_{20} \hat{\underline{\alpha}}$$

$$\hat{c}_i = \frac{1}{\sum x_j^2} (y_{i3k\ell} - y_{i1k\ell}) - \hat{\alpha}_1$$

Para o exemplo em questão, temos:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{2} (y_{1311} - y_{1111}) - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{2} (y_{2321} - y_{2121}) - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{c}_3 = \frac{1}{2} (y_{3331} - y_{3131}) - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{c}_4 = \frac{1}{2} (y_{4322} - y_{4122}) - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{c}_5 = \frac{1}{2} (y_{5332} - y_{5132}) - \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{c}_6 = \frac{1}{2} (y_{6312} - y_{6112}) - \hat{\alpha}_1$$

com $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{12} (P_3 - P_1)$, conforme 4.3.4.

Esses resultados coincidem também com os obtidos por GODOI (1971).

4.4 - Somas de Quadrados

Com base no modelo adotado em (4.2), e tomando-se:

$$SQR = y'y - \hat{\beta}' X'y ,$$

onde $\hat{\beta}' X'y$ é a soma de quadrados dos parâmetros, definida como:

$$\hat{\beta}' X'y = [\hat{m} \quad \hat{b}' \quad \hat{v}' \quad \hat{t}' \quad \hat{\alpha}' \quad \hat{c}'] \begin{pmatrix} G \\ B \\ V \\ T \\ P \\ C \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}' X'y = [\hat{m}G + \hat{b}'B + \hat{v}'V + \hat{t}'T + \hat{\alpha}'P + \hat{c}'C] ,$$

que, através de (4.3), resultou:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}' X'y &= G' M_1^{-1} G + [B'(M_7^{-1})' B - \hat{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1}' B] + \\
&+ [V' M_{12}^{-1}' V - \hat{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1}' V - \hat{m} M_3 (M_{12}^{-1})' V] + \quad (4.4.a) \\
&+ \hat{\tau}' T + P' M_{19}^{-1} P + [C' M_{21}^{-1}' C - \hat{\alpha}' M_{20}' (M_{21}^{-1})' C] .
\end{aligned}$$

Reunindo os termos onde aparece o vetor dos efeitos de tratamentos $\hat{\tau}'$, resultou:

$$\begin{aligned}
\text{SQR} &= y'y - G' M_1^{-1} G - [B' M_7^{-1}' B - \hat{\alpha}' M_{10}' (M_7^{-1})' B] - \\
&- [V' M_{12}^{-1}' V - \hat{m} M_3 (M_{12}^{-1})' V] - \hat{\tau}' [T - M_{13}' M_{12}^{-1}' V] - \quad (4.4.b) \\
&- P' M_{19}^{-1} P - [C' M_{21}^{-1}' C - \hat{\alpha}' M_{20}' M_{21}^{-1}' C] ,
\end{aligned}$$

onde:

4.4.1 - Soma de quadrados devida à média:

$$\text{SQ}(\hat{m}) = G' M_1^{-1} G = \frac{G^2}{N}$$

4.4.2 - Soma de quadrados devida aos efeitos de blocos

$$\text{SQ Blocos} = B'(M_7^{-1})' B - \hat{\alpha}' M_{10}' (M_7^{-1})' B$$

onde, $B'(M_7^{-1})' B = \frac{1}{\sum z_j^2} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{m_\ell} B_\ell^2$, e

$$\hat{\alpha}' M_1' (M_7^{-1})' B = \hat{\alpha}_2 (B_1 + B_2)$$

Por (4.3.4) temos que:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)}{v \sum z_j^2}$$

e, como:

$$P = X_5' y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{(2)} \cdot (N) y_{(1)} = \begin{pmatrix} -P_1 + P_2 \\ P_1 - 2P_2 + P_3 \end{pmatrix}$$

e

$$B = X_2' y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{(2)} \cdot (N) y_{(1)} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

temos que:

$$B_1 + B_2 = P_1 - 2P_2 + P_3,$$

portanto, $\hat{\alpha}_2$ pode ser escrito na forma:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{(B_1 + B_2)}{v \sum z_j^2},$$

logo,

$$\hat{\alpha}' M_1' (M_7^{-1})' B = \frac{(B_1 + B_2)^2}{v \sum z_j^2} .$$

Então, a SQ Blocos resultou:

$$SQ \text{ Blocos} = \frac{1}{\sum z_j^2} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{m_\ell} B_\ell^2 - \frac{(\sum_{\ell=1}^L B_\ell)^2}{v \sum z_j^2}$$

Podemos estabelecer analogia com a fórmula para SQ Blocos apresentada por LUCAS (1956), pois:

$$B_1 = D_1 + D_2 + D_3$$

e

$$B_2 = D_4 + D_5 + D_6 ,$$

logo, $B_1 + B_2 = \sum D_i$, portanto:

$$\frac{(B_1 + B_2)^2}{v \sum z_j^2} = \frac{(\sum D_i)^2}{3np (p-1)} = C_B ,$$

conforme LUCAS (1956), onde, segundo o autor, $n = 2R$ e R é o número de repetições de cada sequência.

A fórmula para a soma de quadrados de blocos apresentada por ele, sem demonstrações, é a seguinte:

$$SQ \text{ Blocos} = \frac{1}{6} \sum_{\ell=1}^L \frac{1}{m_\ell} B_\ell^2 - \frac{(\sum D_i)^2}{3np (p-1)} .$$

4.4.3 - Soma de quadrados devida aos efeitos de vacas, ignorando efeitos de tratamentos

Através da soma de quadrados de resíduo (4.4.b), temos que:

$$\text{SQ Vacas (ign.trat.)} = [V'(M_{12}^{-1})'V - \hat{m} M_3(M_{12}^{-1})' V] .$$

Como:

$$\hat{m} M_3 M_{12}^{-1} V = \frac{G^2}{N} ,$$

obtivemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \text{SQ Vacas (ign.trat.)} &= V' M_{12}^{-1} V - \hat{m} M_3(M_{12}^{-1})' V \\ &= V' M_{12}^{-1} V - \frac{G^2}{N} \\ &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^V V_i^2 - \frac{G^2}{N} . \end{aligned}$$

4.4.4 - Soma de quadrados devida a efeitos de tratamentos ajustada para vacas

De (4.4.b) temos que:

$$\text{SQ Trat. (aj.)} = \hat{\tau}' (-M_{13}' M_{12}^{-1} V + T) .$$

Em (4.3.2) vimos que:

$$Q^* = - M_{13}' M_{12}^{-1} V + T ,$$

que para o exemplo em estudo resultou em:

$$\left. \begin{aligned} Q_1^* &= T_1 - \frac{2}{3} (V_1 + V_6) - \frac{1}{3} (V_3 + V_4) \\ Q_2^* &= T_2 - \frac{2}{3} (V_2 + V_4) - \frac{1}{3} (V_1 + V_5) \\ Q_3^* &= T_3 - \frac{2}{3} (V_3 + V_5) - \frac{1}{3} (V_2 + V_6) \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4.1)$$

logo,

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \hat{\tau}' (-M'_{13} M_{12}^{-1} V + T) = \hat{\tau}' Q .$$

Podemos, também aqui, estabelecer uma analogia com a fórmula da SQ Tratamentos apresentada por LUCAS (1956).

O quadro a seguir serve para auxiliar a comparação desejada.

VACAS	PERÍODOS			D_i
	I	II	III	
BLOCO 1				
1	y_{1111}	y_{1222}	y_{1311}	$y_{1111} - 2y_{1222} + y_{1311}$
2	y_{2121}	y_{2231}	y_{2321}	$y_{2121} - 2y_{2231} + y_{2321}$
3	y_{3131}	y_{3211}	y_{3331}	$y_{3131} - 2y_{3211} + y_{3331}$
BLOCO 2				
4	y_{4122}	y_{4212}	y_{4322}	$y_{4122} - 2y_{4212} + y_{4322}$
5	y_{5132}	y_{5222}	y_{5332}	$y_{5132} - 2y_{5222} + y_{5332}$
6	y_{6112}	y_{6232}	y_{6312}	$y_{6112} - 2y_{6232} + y_{6312}$

LUCAS (1956) apresenta a fórmula da soma de quadrados de tratamentos para p tratamentos:

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \frac{1}{6np} \sum_{k=1}^p Q_k^2 ,$$

onde,

Q_k = soma dos D's em que o tratamento k aparece nos 1º e 3º períodos, subtraída da soma dos D's em que o tratamento k aparece no 2º período;

$n = 2R$;

R = nº de repetições de cada sequência.

Nas equações (Q_k^*) de (VII), ao substituirmos os totais de vacas (V_i) e os totais de tratamentos (T_k) em função das observações y_{ijk} , de acordo com o quadro acima, resultou:

$$Q_1^* = \frac{1}{3} [(D_1 + D_6) - (D_3 + D_4)] = \frac{1}{3} Q_1$$

$$Q_2^* = \frac{1}{3} [(D_2 + D_4) - (D_1 + D_5)] = \frac{1}{3} Q_2$$

$$Q_3^* = \frac{1}{3} [(D_3 + D_5) - (D_2 + D_6)] = \frac{1}{3} Q_3$$

Como em (VIII), temos:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{4} Q_1^* = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} Q_1 = \frac{1}{12} Q_1$$

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{4} Q_2^* = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} Q_2 = \frac{1}{12} Q_2$$

$$\hat{t}_3 = \frac{1}{4} Q_3^* = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} Q_3 = \frac{1}{12} Q_3$$

logo, a fórmula obtida neste trabalho para a soma de quadrados de tratamentos resultou em:

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \hat{\underline{t}}' Q^* = \frac{1}{4} Q^{*'} Q^* = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^P Q_k^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^P \left(\frac{1}{3} Q_k \right)^2$$

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \sum_{k=1}^P Q_k^2 = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^P Q_k^2 ,$$

que coincide com a proposta por LUCAS (1956). Para o exemplo em questão, onde $p=3$ e $n=2$, resultou:

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \frac{1}{6.2.3} \sum_{k=1}^P Q_k^2 = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^P Q_k^2 .$$

4.4.5 - Soma de quadrados devida a efeitos de pe ríodos

De (4.4.b) obtemos:

$$SQ \text{ Períodos} = P' M_{19}^{-1} P = \hat{\underline{\alpha}}' P$$

$$SQ \text{ Períodos} = \hat{\alpha}_1 (P_3 - P_1) + \hat{\alpha}_2 (P_1 - 2P_2 + P_3)$$

que, por (4.3.4) ficou:

$$\begin{aligned} SQ \text{ Períodos} &= \frac{(P_3 - P_1)^2}{v \sum x_j^2} + \frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)^2}{v \sum z_j^2} \\ &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{N} \end{aligned}$$

$$SQ \text{ Períodos} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 P_j^2 - \frac{G^2}{18}$$

onde:

$$SQ \text{ Período (linear)} = SQ (\hat{\alpha}_1) = \frac{(P_3 - P_1)^2}{v \sum x_j^2} = \frac{(P_3 - P_1)^2}{12}$$

$$SQ \text{ Períodos (quadrático)} = SQ (\hat{\alpha}_2) = \frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)^2}{v \sum z_j^2} = \frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)^2}{36}$$

Esses resultados coincidem com as fórmulas apresentadas por BRANDT (1938) e GODOI (1971).

4.4.6 - Soma de quadrados devida à interação Período (linear) x Vacas

$$SQ \text{ Int. Período (linear) x Vacas} = C' M_{21}^{-1} C - \hat{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} C$$

$$SQ \text{ Int. Período (linear) x Vacas} = \frac{1}{\sum x_j^2} \sum_i (y_{i3k\ell} - y_{i1k\ell})^2 - \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)^2,$$

que, para o exemplo em estudo, resultou:

$$SQ \text{ Int. Período (linear) x Vacas} = \frac{1}{2} \sum_i (y_{i3k\ell} - y_{i1k\ell})^2 - \frac{1}{12} (P_3 - P_1)^2$$

Os resultados dos ítems 4.4.3, 4.4.4 e 4.4.6 coincidem com os obtidos por GODOI (1971).

4.5 - Esperanças Matemáticas

Para a obtenção das esperanças matemáticas, utilizamos o modelo tipo I ou modelo de efeitos fixos:

4.5.1 - Esperança matemática de $B' M_7^{-1} B$.

Como B está representando $X_2'y$, então:

$$B' M_7^{-1} B = y' X_2 M_7^{-1} X_2' y \quad (4.5.1.a)$$

$$E B' (M_7^{-1})' B = E(y' X_2 M_7^{-1} X_2' y)$$

e, no modelo temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = X\beta + \epsilon \\ \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \\ \epsilon \text{ independentes} \end{array} \right. \quad (4.5.1.b)$$

$$E(\beta' M_7^{-1} B) = E[(\beta' X' + \epsilon') X_2 M_7^{-1} X_2' (X\beta + \epsilon)]$$

$$E(\beta' M_7^{-1} B) = \beta' X' X_2 M_7^{-1} X_2' X\beta + \sigma^2 \text{tr}(X_2 M_7^{-1} X_2')$$

sendo:

$$X_2'X = [\phi \quad M_7 \quad \phi \quad \phi \quad M_{10} \quad \phi]$$

e

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

$$\beta'X'X_2 M_7^{-1} X_2'X \beta = (\underline{b}' M_7' + \underline{\alpha}' M_{10}') M_7^{-1} (M_7 \underline{b} + M_{10} \underline{\alpha})$$

Sendo M_7 simétrica, $M_7' = M_7$,

$$= \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha}$$

Como:

$$\underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} = \underline{\alpha}' M_{10}' \underline{b} = \phi$$

$$\beta'X'X_2 M_7^{-1} X_2'X \beta = \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha} \quad (4.5.1.c)$$

Portanto:

$$E[B' M_7^{-1} B] = f_1(\beta) + L \sigma^2 \quad (4.5.1.d)$$

$$\text{onde } f_1(\beta) = \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha}.$$

4.5.2 - Esperança matemática de $V' M_{12}^{-1} V$

Como V está representando $X_3'y$, então:

$$V' M_{12}^{-1} V = y' X_3 M_{12}^{-1} X_3' y \quad (4.5.2.a)$$

$$E[V' M_{12}^{-1} V] = E[y' X_3 M_{12}^{-1} X_3' y]$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$E[V' M_{12}^{-1} V] = \beta' X' X_3 M_{12}^{-1} X_3' X \beta + \sigma^2 \text{tr}(X_3 M_{12}^{-1} X_3') .$$

Sendo:

$$X_3' X = [M_3' \quad \phi \quad M_{12} \quad M_{13} \quad \phi \quad \phi]$$

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

logo:

$$\begin{aligned} \beta' X' X_3 M_{12}^{-1} X_3' X \beta &= (m M_3' + \underline{v}' M_{12} + \underline{\tau}' M_{13}') M_{12}^{-1} (M_3' m + M_{12} \underline{v} + M_{13} \underline{\tau}) \\ &= m M_3 M_{12}^{-1} M_3' m + m M_3 M_{12}^{-1} M_{12} \underline{v} + \\ &\quad + m M_3 M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} + \underline{v}' M_{12} M_{12}^{-1} M_3' m + \\ &\quad + \underline{v}' M_{12} M_{12}^{-1} M_{12} \underline{v} + \underline{v}' M_{12} M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} + \\ &\quad + \underline{\tau}' M_{13} M_{12}^{-1} M_3' m + \underline{\tau}' M_{13} M_{12}^{-1} M_{12} \underline{v} + \\ &\quad + \underline{\tau}' M_{13} M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} \end{aligned}$$

$$\beta' X' X_3 M_{12}^{-1} X_3' X \beta = N m^2 + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2 \underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} \quad (4.5.2.b)$$

Portanto,

$$E(\underline{v}' M_{12}^{-1} \underline{v}) = f_2(\beta) + \underline{v}' \sigma^2 \quad (4.5.2.c)$$

$$\text{onde: } f_2(\beta) = N m^2 + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2 \underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau}.$$

4.5.3 - Esperança matemática de $\hat{\tau}' Q^*$

Sendo $\hat{\tau} = N^{\star-1} Q^*$ e $Q^* = W X' y$, então:

$$\hat{\tau}' Q^* = Q^{*\prime} N^{\star-1} Q^* = y' X W' N^{\star-1} W X' y \quad (4.5.3.a)$$

$$E(\hat{\tau}' Q^*) = E[y' X W' N^{\star-1} W X' y],$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$E(\hat{\tau}' Q^*) = \beta' X' X W' N^{\star-1} W X' X \beta + E(\epsilon' X W' N^{\star-1} W X' \epsilon) \quad (4.5.3.b)$$

Sendo válidas as propriedades abaixo, segundo PIMENTEL GOMES (1967) e IEMMA (1981),

$$W X' X \beta = C^* \tau = Q^*$$

$$W X' X W' = C^* \quad (4.5.3.c)$$

onde W é a matriz definida em 4.3.2.

$$\beta' X' X W' N^{\star-1} W X' X \beta = \underline{\tau}' C^{*\prime} N^{\star-1} C^* \tau$$

e, desde que $C^* N^{\star 1} C^* = C^* N^{\star 1} C^* = C^*$, e, ainda, $C^* \underline{1} = Q^*$, temos:

$$\beta' X' X W' N^{\star 1} W X' X \beta = \underline{1}' C^* \underline{1} = \underline{1}' Q^*$$

e

$$E[\epsilon' X W' N^{\star 1} W X' \epsilon] = \sigma^2 \text{tr}(X W' N^{\star 1} W X')$$

Fazendo $X W' N^{\star 1} = A_1$ e $W X' = B_1$, temos:

$$\text{tr}(A_1 B_1) = \text{tr}(B_1 A_1) = \text{tr}(W X' X W' N^{\star 1})$$

que, por (4.6.3.c), fica:

$$\text{tr}(W X' X W' N^{\star 1}) = \text{tr}(C^* N^{\star 1}) .$$

Então:

$$E[\epsilon' X W' N^{\star 1} W X' \epsilon] = \sigma^2 \text{tr}(C^* N^{\star 1}) ,$$

como $C^* N^{\star 1}$ é uma matriz idempotente, pois

$$C^* N^{\star 1} C^* N^{\star 1} = C^* N^{\star 1} ,$$

então,

$$\text{tr}(C^* N^{\star 1}) = r(C^* N^{\star 1}) .$$

O produto de uma matriz singular por uma matriz não singular preserva a característica da matriz singular:

$$\text{tr}(C^*N^{\#1}) = r(C^*N^{\#1}) = r(C^*) = p-1 \quad (4.5.3.d)$$

Portanto,

$$E(\hat{\tau}' Q^*) = f_3(\beta) + (p-1) \sigma^2 \quad (4.5.3.e)$$

onde $f_3(\beta) = \tau' Q^*$.

4.5.4 - Esperança matemática de $P' M_{19}^{-1} P$

Como P está representando $X'_5 y$, então:

$$P' M_{19}^{-1} P = y' X_5 M_{19}^{-1} X'_5 y \quad (4.5.4.a)$$

$$E(P' M_{19}^{-1} P) = E[y' X_5 M_{19}^{-1} X'_5 y] ,$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$E[P' M_{19}^{-1} P] = \beta' X' X_5 M_{19}^{-1} X'_5 X \beta + \sigma^2 \text{tr}(X_5 M_{19}^{-1} X'_5) .$$

Sendo:

$$X'_5 X = [\phi \quad M'_{10} \quad \phi \quad \phi \quad M_{19} \quad M_{20}]$$

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

logo:

$$\begin{aligned}
\beta' X' X_5 M_{19}^{-1} X_5' X \beta &= (\underline{b}' M_{10}' + \underline{\alpha}' M_{19}' + \underline{c}' M_{20}') M_{19}^{-1} (M_{10}' \underline{b} + M_{19}' \underline{\alpha} + M_{20}' \underline{c}) \\
&= \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{20}' \underline{c} + \\
&\quad + \underline{\alpha}' M_{19}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19}' \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{19}' M_{20}' \underline{c} + \\
&\quad + \underline{c}' M_{20}' M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{c}' M_{20}' \underline{\alpha} + \\
&\quad + \underline{c}' M_{20}' M_{19}^{-1} M_{20}' \underline{c} \\
&= \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19}' \underline{\alpha} \quad (4.5.4.b)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$E[P' M_{19}^{-1} P] = f_4(\beta) + (J-1) \sigma^2 \quad (4.5.4.c)$$

$$\text{onde } f_4(\beta) = \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19}' \underline{\alpha}.$$

4.5.5- Esperança matemática de $C' M_{21}^{-1} C$

Como C está representando $X_6'y$

$$C' M_{21}^{-1} C = y' X_6 M_{21}^{-1} X_6' y \quad (4.5.5.a)$$

$$E[C' M_{21}^{-1} C] = E[y' X_6 M_{21}^{-1} X_6' y]$$

que, por (4.5.1. b), fica:

$$E[C' M_{21}^{-1} C] = \beta' X' X_6 M_{21}^{-1} X_6' X \beta + \sigma^2 \text{tr}(X_6 M_{21}^{-1} X_6') .$$

Sendo:

$$X_6'X = [\phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad M_{20}' \quad M_{21}']$$

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

então:

$$\begin{aligned} \beta'X_6'X_6 M_{21}^{-1} X_6'X\beta &= (\underline{\alpha}' M_{20} + \underline{c}' M_{21}') M_{21}^{-1} (M_{20}' \underline{\alpha} + M_{21} \underline{c}) \\ &= \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{21} \underline{c} + \\ &\quad + \underline{c}' M_{21}' M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21}' M_{21}^{-1} M_{21} \underline{c} \end{aligned}$$

Sendo M_{21} simétrica, $M_{21} = M_{21}'$

$$\beta'X_6'X_6 M_{21}^{-1} X_6'X\beta = \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21} \underline{c} \quad (4.5.5.b)$$

Portanto:

$$E[\underline{c}' M_{21}^{-1} \underline{c}] = f_5(\beta) + v \sigma^2$$

$$\text{onde } f_5(\beta) = \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21} \underline{c}.$$

4.5.6 - Esperança matemática de $y'y$.

De (4.5.1.b), temos:

$$y'y = (\beta'X' + \epsilon') (X\beta + \epsilon)$$

$$E(y'y) = E[\beta'X'X\beta + \beta'X'\epsilon + \epsilon' X\beta + \epsilon'\epsilon]$$

$$E(y'y) = \beta'X'X\beta + E(\epsilon'\epsilon)$$

$$E(y'y) = \beta'X'X\beta + N \sigma^2 \quad .$$

Sendo:

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

$$X'X = \begin{bmatrix} M_1 & \phi & M_3 & M_4 & \phi & \phi \\ \phi & M_7 & \phi & \phi & M_{10} & \phi \\ M_3' & \phi & M_{12} & M_{13} & \phi & \phi \\ M_4' & \phi & M_{13}' & M_{16} & \phi & \phi \\ \phi & M_{10}' & \phi & \phi & M_{19} & M_{20} \\ \phi & \phi & \phi & \phi & M_{20}' & M_{21} \end{bmatrix}$$

Obtemos:

$$E(y'y) = f_6(\beta) + N \sigma^2 \quad ,$$

$$\begin{aligned} f_6(\beta) = & N m^2 + \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + \underline{\tau}' M_{16} \underline{\tau} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} + \\ & + \underline{c}' M_{21} \underline{c} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + 2\underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + \\ & + 2\underline{c}' M_{20}' \underline{\alpha} \end{aligned} \quad (4.5.6.a)$$

4.5.7 - Esperança matemática de $M_1^{-1} [y'X_1X_1'y]$

$$M_1^{-1} [y'X_1X_1'y] = \frac{1}{N} [y'X_1X_1'y] = \frac{1}{N} G^2$$

$$\frac{1}{N} E[G^2] = \frac{1}{N} E[y'X_1X_1'y]$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E(G^2) &= \frac{1}{N} E[(B'X' + \epsilon') X_1X_1' (X\beta + \epsilon')] \\ &= \frac{1}{N} (\beta'X'X_1X_1'X\beta) + \frac{1}{N} E[\epsilon'X_1X_1'\epsilon] \end{aligned}$$

Como

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

$$X_1'X = [N \quad \phi \quad M_3 \quad M_4 \quad \phi \quad \phi]$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} (\beta'X'X_1X_1'X\beta) &= m^2 N + 2m M_3 \underline{v} + 2m M_4 \underline{\tau} + \\ &+ \frac{1}{N} \underline{\tau}' M_4' M_4 \underline{\tau} + \frac{1}{N} \underline{v}' M_3' M_3 \underline{v} + \\ &+ \frac{2}{N} \underline{v}' M_3' M_4 \underline{\tau} \end{aligned}$$

que, ao efetuarmos os produtos e aplicarmos as restrições impostas na solução do sistema de equações normais, resulta:

$$\frac{1}{N} (\beta' X' X_1 X_1' X \beta) = m^2 \cdot N \quad (4.5.7.a)$$

Portanto,

$$E[M_1^{-1} (y' X_1 X_1' y)] = E[G^2/N] = f_7(\beta) + \sigma^2 \quad (4.5.7.b)$$

onde $f_7(\beta) = m^2 N$.

4.5.8 - Esperança matemática da correção para blocos

Segundo LUCAS (1956):

$$C_B = \frac{(\sum D_i)^2}{3np(p-1)} = \frac{(B_1 + B_2)^2}{v \sum z_j^2} = \frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)^2}{v \sum z_j^2}$$

Sendo:

$$\frac{(P_1 - 2P_2 + P_3)^2}{v \sum z_j^2} = \frac{1}{v \sum z_j^2} [y' X_2 \text{ E } X_2' y]$$

$$\frac{1}{v \sum z_j^2} E[P_1 - 2P_2 + P_3]^2 = \frac{1}{v \sum z_j^2} E[y' X_2 \text{ E } X_2' y]$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$\frac{1}{v \sum z_j^2} E[y' X_2 \text{ E } X_2' y] = \beta' X' X_2 \text{ E } X_2' X \beta + E[\epsilon' X_2 \text{ E } X_2' \epsilon] \quad .$$

Sendo:

$$X_2'X = [\phi \quad M_7 \quad \phi \quad \phi \quad M_{10} \quad \phi]$$

$$\beta' = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{\quad}]$$

então:

$$\begin{aligned} \beta'X'X_2 \text{ E } X_2'X\beta &= (\underline{b}' M_7' + \underline{\alpha}' M_{10}') \text{ E } (M_7 \underline{b} + M_{10} \underline{\alpha}) \\ &= \underline{b}' M_7' \text{ E } M_7 \underline{b} + \underline{b}' M_7' \text{ E } M_{10} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{10}' \text{ E } M_7 \underline{b} + \\ &\quad + \underline{\alpha}' M_{10}' \text{ E } M_{10} \underline{\alpha} \end{aligned}$$

Sendo $\sum_{\ell} b_{\ell} = 0$, uma das restrições impostas, resulta:

$$\beta'X'X_2 \text{ E } X_2'X\beta = \underline{\alpha}' M_{10}' \text{ E } M_{10} \underline{\alpha}$$

e

$$\begin{aligned} E[\varepsilon'X_2 \text{ E } X_2'X_2] &= \sigma^2 \text{ tr}(X_2 \text{ E } X_2') = \sigma^2 \text{ tr}(X_2'X_2 \text{ E } E_L) \\ &= \sigma^2 \text{ tr}(M_7 \text{ E } E_L) \end{aligned}$$

$$\text{tr}(M_7 \text{ E } E_L) = \sigma^2 \cdot m_{\ell} \cdot \sum_j z_j^2 \cdot L = \sigma^2 \cdot m_{\ell} \cdot \sum_j z_j^2 \cdot (J-1)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v \sum_j z_j^2} E[y'X_2 \text{ E } X_2'y] &= \frac{1}{v \sum_j z_j^2} [\underline{\alpha}' M_{10}' \text{ E } M_{10} \underline{\alpha}] + \frac{1}{v \sum_j z_j^2} m_{\ell} \sum_j z_j^2 (J-1) \sigma^2 \\ &= \frac{1}{36} [\underline{\alpha}' M_{10}' \text{ E } M_{10} \underline{\alpha}] + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$E(C_B) = f_8(\beta) + \sigma^2 \quad (4.5.8.a)$$

$$\text{onde } f_8(\beta) = \frac{1}{v \sum z_j^2} [\underline{\alpha}' M'_{10} E M_{10} \underline{\alpha}] = \frac{1}{36} [\underline{\alpha}' M'_{10} E M_{10} \underline{\alpha}] .$$

$$4.5.9 - \text{Esperança matemática de } \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)^2$$

Como:

$$P' M_{19}^{-1} P = \frac{1}{v \sum z_j^2} [P_1 - 2P_2 + P_3]^2 + \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)^2$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)^2 &= P' M_{19}^{-1} P - \frac{1}{v \sum z_j^2} (P_1 - 2P_2 + P_3)^2 \\ &= P' M_{19}^{-1} P - C_B \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v \sum x_j^2} E[(P_3 - P_1)^2] = E[P' M_{19}^{-1} P] - E(C_B) ,$$

que, por (4.5.4.c) e (4.5.8.a), fica:

$$\begin{aligned} &= \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M'_{10} \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} + (J-1) \sigma^2 - \\ &\quad - \frac{1}{v \sum z_j^2} [\underline{\alpha}' M'_{10} E M_{10} \underline{\alpha}] - \sigma^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{1}{v \sum x_j^2} E[(P_3 - P_1)^2] = f_9(\beta) + (J-2) \sigma^2 \quad (4.5.9.a)$$

onde $f_9(\beta) = \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} - \frac{1}{v \Sigma x_j^2} (\underline{\alpha}' M_{10}' E M_{10} \underline{\alpha})$.

4.5.10 - Esperança matemática de $\frac{1}{\Sigma x_j^2} [y' X_6 X_6' y]$

$$E \left\{ \frac{1}{\Sigma x_j^2} \left[\sum_i (y_{i3k\ell} - y_{i1k\ell})^2 \right] \right\} = \frac{1}{\Sigma x_j^2} E [y' X_6 X_6' y]$$

que, por (4.5.1.b), fica:

$$\frac{1}{\Sigma x_j^2} E[y' X_6 X_6' y] = \frac{1}{\Sigma x_j^2} [\beta' X' X_6 X_6' X \beta + E(\epsilon' X_6 X_6' \epsilon)]$$

Sendo:

$$X_6' X = [\phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad M_{20}' \quad M_{21}']$$

$$\hat{\beta} = [m \quad \underline{b}' \quad \underline{v}' \quad \underline{\tau}' \quad \underline{\alpha}' \quad \underline{c}']$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma x_j^2} (\beta' X' X_6 X_6' X \beta) &= \frac{1}{\Sigma x_j^2} (\underline{\alpha}' M_{20} + \underline{c}' M_{21}) (M_{20}' \underline{\alpha} + M_{21}' \underline{c}) \\ &= \frac{1}{\Sigma x_j^2} \left[\underline{\alpha}' M_{20} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}' \underline{c} + \underline{c}' M_{21}' M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21}' M_{21}' \underline{c} \right] \\ &= \frac{1}{\Sigma x_j^2} \underline{\alpha}' M_{20} M_{20}' \underline{\alpha} + \frac{1}{2} \underline{c}' M_{21}' M_{21}' \underline{c} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Sigma x_j^2} E [\epsilon' X_6 X_6' \epsilon] = \frac{1}{\Sigma x_j^2} \sigma^2 \text{tr}(X_6 X_6')$$

$$\text{tr}(X_6 X_6') = \text{tr}(X_6' X_6) = \Sigma x_j^2 v$$

logo:

$$\frac{1}{\Sigma x_j^2} E [\epsilon' X_6 X_6' \epsilon] = \frac{1}{\Sigma x_j^2} \sigma^2 \Sigma x_j^2 v = v \sigma^2 .$$

Portanto:

$$\frac{1}{\Sigma x_j^2} E[y' X_6 X_6' y] = f_{10}(\beta) + v \sigma^2 \quad (4.5.10.a)$$

$$\text{onde: } f_{10}(\beta) = \frac{1}{\Sigma x_j^2} (\underline{\alpha}' M_{20} M_{20}' \underline{\alpha}) + \frac{1}{\Sigma x_j^2} (\underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c}) .$$

4.5.11 - Esperança matemática da soma de quadrados devida a efeito de blocos

De (4.4.2) temos:

$$SQ \text{ Blocos} = B' M_7^{-1} B - \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} B$$

$$\text{onde: } \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} B = C_B$$

$$SQ \text{ Blocos} = B' M_7^{-1} B - C_B$$

$$E [SQ \text{ Blocos}] = E[B' M_7^{-1} B] - E[C_B]$$

que, por (4.5.1.d) e (4.5.8.a), resultou:

$$\begin{aligned} E[SQ \text{ Blocos}] &= \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha} + L \sigma^2 - \\ &\quad - \frac{1}{v \Sigma z_j^2} [\underline{\alpha}' M_{10}' E M_{10} \underline{\alpha}] - \sigma^2 \end{aligned}$$

Sendo:

$$\underline{\alpha}' M'_{10} M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha} = \frac{1}{v \sum z_j^2} [\underline{\alpha}' M'_{10} E M_{10} \underline{\alpha}]$$

obtivemos:

$$E[\text{SQ Blocos}] = f_{11}(\beta) + (L-1) \sigma^2 \quad (4.5.11.a)$$

onde $f_{11}(\beta) = \underline{b}' M_7 \underline{b}$.

4.5.12 - Esperança matemática da soma de quadrados devida a efeitos de vacas ignorando tratamentos

$$\text{SQ Vacas (ign.trat.)} = V' M_{12}^{-1} V - \frac{G^2}{N}$$

$$E[\text{SQ Vacas (ign.trat.)}] = E[V' M_{12}^{-1} V] - \frac{1}{N} E(G^2)$$

que, por (4.5.2.c) e (4.5.7.b), fica:

$$\begin{aligned} E[\text{SQ Vacas (ign.trat.)}] &= N m^2 + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \\ &\quad + \underline{\tau}' M'_{13} M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} + \\ &\quad + v \sigma^2 - N m^2 - \sigma^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$E[\text{SQ Vacas (ign.trat.)}] = f_{12}(\beta) + (v-1) \sigma^2 ,$$

onde: $f_{12}(\beta) = \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \underline{\tau}' M'_{13} M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} .$

4.5.13 - Esperança matemática da soma de quadrados devida a efeitos de tratamentos (ajustada)

Por (4.4.4), temos:

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \hat{\tau}' Q^*$$

$$E[SQ \text{ Trat. (aj.)}] = E(\hat{\tau}' Q^*)$$

que, por (4.5.3.e), fica:

$$E[SQ \text{ Trat. (aj.)}] = f_{13}(\beta) + (p-1) \sigma^2$$

onde $f_{13}(\beta) = \tau' Q^*$.

4.5.14 - Esperança matemática da soma de quadrados devida a efeitos de períodos

Por (4.4.5):

$$\frac{1}{v} \sum P_j^2 - \frac{G^2}{N} = P' M_{19}^{-1} P$$

$$E \left[\frac{1}{v} \sum P_j^2 - \frac{G^2}{N} \right] = E[P' M_{19}^{-1} P]$$

que, por (4.5.4.c), fica:

$$E[P' M_{19}^{-1} P] = f_{14}(\beta) + (J-1) \sigma^2 ,$$

onde, $f_{14}(\beta) = \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} - \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha}$.

4.5.15 - Esperança matemática da soma de quadrados devida a efeitos da interação período (linear) x vacas

Por (4.4.6):

$$SQ(c) = \frac{1}{\sum x_j^2} \sum_i (y_{i3k\ell} - y_{i1k\ell})^2 - \frac{1}{v \sum x_j^2} (P_3 - P_1)^2$$

Então:

que, por (4.5.10.a) e (4.5.9.a), temos:

$$E[SQ(c)] = \frac{1}{\sum x_j^2} \underline{\alpha}' M_{20} M_{20}' \underline{\alpha} + \frac{1}{\sum x_j^2} \underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c} + v \sigma^2 -$$

$$+ \frac{1}{v \sum z_j^2} (\underline{\alpha}' M_{10}' E M_{10} \underline{\alpha}) \quad (J-2) \sigma^2$$

Sendo:

$$\underline{\alpha}' M_{20} M_{20}' \underline{\alpha} = v (\sum x_j^2)^2 \alpha_1^2$$

$$\underline{\alpha}' M_{10} \underline{\alpha} = v \sum x_j^2 \alpha_1^2 + v \sum z_j^2 \alpha_2^2$$

$$\frac{1}{v \sum z_j^2} \underline{\alpha}' M_{10}' E M_{10} \underline{\alpha} = v \sum z_j^2 \alpha_2^2$$

$$\underline{\alpha}' M_{20} M_{21} \underline{c} = \underline{c}' M_{21} M_{20}' \underline{\alpha} = \phi$$

$$E[SQ(c)] = f_{15}(\beta) + (v-J+2) \sigma^2$$

$$\text{onde } f_{15}(\beta) = \frac{1}{\sum x_j^2} \underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c} - \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} .$$

4.5.16 - Esperança matemática da soma de quadrados do resíduo

Por (4.4), temos:

$$SQR = y'y - \hat{\beta}' X'y$$

$$E[SQR] = E[y'y] - E[\hat{\beta}' X'Y]$$

$$E[SQR] = E[y'y] - E[G^2/N] - E[SQB] - E[SQV(\text{ign. trat.})] -$$

$$- E[SQ \text{ Trat. (aj.)}] - E[SQP] - E[SQ(c)] ,$$

que, por (4.5.6), (4.5.7), (4.5.11), (4.5.12), (4.5.13), (4.5.14) e (4.5.15), fica:

$$\begin{aligned}
E[SQR] = & N m^2 + \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + \underline{\tau}' M_{16} \underline{\tau} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} + \\
& + \underline{c}' M_{21} \underline{c} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + 2\underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + 2\underline{c}' M_{20} \underline{\alpha} + \\
& + N \sigma^2 - N m^2 - \sigma^2 - \underline{b}' M_7 \underline{b} - (L-1) \sigma^2 - \\
& - \underline{v}' M_{12} \underline{v} - 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} - \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} - (v-1) \sigma^2 - \\
& - \underline{\tau}' Q^* - (p-1) \sigma^2 - \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} - \\
& - \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} - (J-1) \sigma^2 - \frac{1}{2} \underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c} + \\
& + \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} - (v-J+2) \sigma^2
\end{aligned}$$

Sendo:

$$\frac{1}{2} \underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c} = \frac{1}{2} 2\underline{c}' M_{21} \underline{c} = \underline{c}' M_{21} \underline{c}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\tau}' Q^* &= \underline{\tau}' C^* \underline{\tau} = \underline{\tau}' (M_{16} - M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13}) \underline{\tau} = \\
&= \underline{\tau}' M_{16} \underline{\tau} - \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau}
\end{aligned}$$

logo:

$$E[SQR] = [N - L - 2v - p - J + 4] \sigma^2 ,$$

sendo $J=3$,

$$E[SQR] = [N - L - 2v - p + 1] \sigma^2$$

QUADRO DAS ESPERANÇAS MATEMÁTICAS DAS SOMAS DE QUADRADOS

Causas de Variação	Esperança Matemática das Somas de Quadrados
Blocos	$f_{11}(\beta) + (L-1) \sigma^2$
Vacas	$f_{12}(\beta) + (v-1) \sigma^2$
Tratamentos (aj.)	$f_{13}(\beta) + (p-1) \sigma^2$
Períodos	$f_{14}(\beta) + (J-1) \sigma^2$
Interação Período (linear) x Vacas	$f_{15}(\beta) + (v-J+2) \sigma^2$
Resíduo	$(N - L - 2v - p + 1) \sigma^2$

onde:

$$f_{11}(\beta) = \underline{b}' M_7 \underline{b}$$

$$f_{12}(\beta) = \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau}$$

$$f_{13}(\beta) = \underline{\tau}' Q^*$$

$$f_{14}(\beta) = \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha}$$

$$f_{15}(\beta) = \frac{1}{\sum x_j^2} \underline{c}' M_{21}' M_{21} \underline{c} - \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b}$$

4.6 - Distribuição das Formas Quadráticas

Os três teoremas apresentados a seguir serão utilizados nas deduções a serem efetuadas:

TEOREMA 1 (GRAYBILL, 1961):

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2 I)$, então:

$$Y' A_i Y / \sigma^2 \sim \chi^2(n_i, \lambda_i) \quad ,$$

isto é, $Y' A_i Y / \sigma^2$ tem distribuição de qui-quadrado não central, com n_i graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $\lambda_i = \mu' A_i \mu / 2\sigma^2$, se e somente se A_i for uma matriz idempotente de característica n_i .

TEOREMA 2 (SEARLE, 1971):

Se $Y \sim N(\mu, \Sigma)$, então as formas quadráticas, $Y' A_i Y = Y' A_j Y$, são independentes se e somente se $A_i \Sigma A_j = \phi$, ou, de modo equivalente, $A_j \Sigma A_i = \phi$.

TEOREMA 3 (SEARLE, 1971):

Se as variáveis aleatórias U_i e U_j são independentes, onde $U_i \sim \chi^2(n_i, \lambda_i)$ e $U_j \sim \chi^2(n_j)$, então:

$$\frac{U_i/n_i}{U_j/n_j} \sim F(n_i, n_j, \lambda_i) ,$$

isto é, $\frac{U_i/n_i}{U_j/n_j}$ tem distribuição de F não central com n_i e n_j graus de liberdade e parâmetro de não centralidade λ_i .

4.6.1 - Distribuição de $B'M_7^{-1}B/\sigma^2$

De (4.5.1.a), temos:

$$B' M_7^{-1} B = y' X_2 M_7^{-1} X_2' y = y' A_1 y , \quad (4.6.1.a)$$

onde $A_1 = X_2 M_7^{-1} X_2'$, logo:

$$A_1^2 = X_2 M_7^{-1} X_2' X_2 M_7^{-1} X_2' .$$

Sendo $X_2' X_2 = M_7$, então:

$$A_1^2 = X_2 M_7^{-1} X_2' = A_1 , \quad (4.6.1.b)$$

isto é, A_1 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$r(A_1) = \text{tr}(X_2 M_7^{-1} X_2') ,$$

que, por (4.5.1), ficou:

$$r(A_1) = \text{tr}(A_1) = L . \quad (4.6.1.c)$$

No modelo (3.2), temos:

$$Y \cap N(X\beta, \sigma^2 I) \quad (4.6.1.d)$$

então,

$$\mu' A_1 \mu = \beta' X' X_2 M_7^{-1} X_2' X \beta ,$$

que, por (4.5.1.c), resultou:

$$\begin{aligned} \mu' A_1 \mu &= \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + \underline{\alpha}' M_{10}' \underline{b} + \\ &+ \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha} \end{aligned}$$

Pelo teorema 1, temos:

$$B' M_7^{-1} B / \sigma^2 \cap \chi^2(n_1, \lambda_1) , \quad (4.6.1.f)$$

onde:

$$\begin{aligned} n_1 &= L; \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2\sigma^2} (\underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{10}' M_7^{-1} M_{10} \underline{\alpha}) = \frac{1}{2\sigma^2} f_1(\beta). \end{aligned}$$

4.6.2 - Distribuição de $V' M_{12}^{-1} V / \sigma^2$

De (4.5.2.a), temos:

$$V' M_{12}^{-1} V = y' X_3 M_{12}^{-1} X_3' y = y' A_2 y , \quad (4.6.2.a)$$

onde $A_2 = X_3 M_{12}^{-1} X_3' .$

Então:

$$A_2^2 = X_3 M_{12}^{-1} X_3' X_3 M_{12}^{-1} X_3'$$

Sendo $X_3'X_3 = M_{12}$, logo:

$$A_2^2 = X_3 M_{12}^{-1} X_3' = A_2, \quad (4.6.2.b)$$

isto é, A_2 é uma matriz idempotente. Então:

$$r(A_2) = \text{tr}(X_3 M_{12}^{-1} X_3') ,$$

que, por (4.5.2), ficou:

$$r(A_2) = \text{tr}(A_2) = v \quad (4.6.2.c)$$

Por (4.6.1.d), segue-se que:

$$\mu' A_2 \mu = \beta' X' X_3 M_{12}^{-1} X_3' X \beta ,$$

que, por (4.5.2.b), fica:

$$\begin{aligned} \mu' A_2 \mu = & N m^2 + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \\ & + \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau} \end{aligned} \quad (4.6.2.d)$$

Pelo Teorema 1, tem-se:

$$V' M_{12}^{-1} V / \sigma^2 \sim \chi^2(n_2, \lambda_2) \quad (4.6.2.e)$$

onde:

$$n_2 = v;$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2\sigma^2} [N m^2 + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \underline{\tau}' M_{13}' M_{12}^{-1} M_{13} \underline{\tau}] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} f_2(\beta) . \end{aligned}$$

4.6.3 - Distribuição de $\hat{\tau}'Q^*/\sigma^2$

De (4.5.3.a), temos:

$$\hat{\tau}'Q^* = y'X W' N^{*-1} W X'y = y'A_3 y, \quad (4.6.3.a)$$

onde $A_3 = X W' N^{*-1} W X'$, logo,

$$A_3^2 = X W' N^{*-1} W X'X W' N^{*-1} W X',$$

que, por (4.5.3.c), ficou:

$$A_3^2 = X W' N^{*-1} C^* N^{*-1} W X'.$$

Sendo $C^* = (N^* - A)$, então:

$$A_3^2 = X W' N^{*-1} (N^* - A) N^{*-1} W X'$$

$$A_3^2 = X W' N^{*-1} N^* N^{*-1} W X' - X W' N^{*-1} A N^{*-1} W X'$$

Na equação (VI), temos:

$$A \hat{\tau} = \phi$$

$$A N^{*-1} Q^* = \phi$$

$$A N^{*-1} W X'y = \phi$$

Como y é o vetor das observações, cujos valores são diferentes de zero, temos:

$$A N^{*-1} W X' = \phi,$$

logo,

$$A_3^2 = X W' N^{\star 1} W X' = A_3, \quad (4.6.3.b)$$

isto é, A_3 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$r(A_3) = \text{tr}(X W' N^{\star 1} W X')$$

que, por (4.5.3.d), fica:

$$\text{tr}(X W' N^{\star 1} W X') = p-1 \quad (4.6.3.c)$$

Por (4.6.1.d), segue-se que:

$$\mu' A_3 \mu = \beta' X' X W' N^{\star 1} W X' X \beta$$

que, por 4.5.3, fica:

$$\mu' A_3 \mu = \tau' Q^* \quad (4.6.3.d)$$

Pelo Teorema 1, temos:

$$\hat{\tau}' Q^* / \sigma^2 \sim \chi^2(n_3, \lambda_3) \quad (4.6.3.e)$$

onde:

$$n_3 = p-1;$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2\sigma^2} [\tau' Q^*] = \frac{1}{2\sigma^2} f_3(\beta).$$

4.6.4 - Distribuição de $P'M_{19}^{-1}P/\sigma^2$

De (4.5.4.a):

$$P'M_{19}^{-1}P = y'X_5 M_{19}^{-1} X_5' y = y'A_4 y \quad , \quad (4.6.4.a)$$

onde $A_4 = X_5 M_{19}^{-1} X_5'$.

Então

$$A_4^2 = X_5 M_{19}^{-1} X_5' X_5 M_{19}^{-1} X_5' \quad .$$

Sendo: $X_5' X_5 = M_{19}$, logo:

$$A_4^2 = X_5 M_{19}^{-1} X_5' = A_4 \quad , \quad (4.6.4.b)$$

isto é, A_4 é uma matriz idempotente. Assim sendo, segue-se que:

$$r(A_4) = \text{tr}(X_5 M_{19}^{-1} X_5') \quad ,$$

que, por 4.5.4, fica:

$$r(A_4) = \text{tr}(A_4) = (J-1) \quad . \quad (4.6.4.c)$$

Por (4.6.1.d), segue-se que:

$$\mu'A_4\mu = \beta'X'X_5 M_{19}^{-1} X_5' X\beta \quad ,$$

que, por 4.6.4, fica:

$$\mu'A_4\mu = \underline{b}' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' \underline{b} + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} \quad (4.6.4.d)$$

Pelo Teorema 1, temos:

$$P' M_{19}^{-1} P / \sigma^2 \sim \chi^2(n_4, \lambda_4) \quad , \quad (4.6.4.c)$$

onde:

$$n_4 = (J-1)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2\sigma^2} [b' M_{10} M_{19}^{-1} M_{10}' b + \alpha' M_{19} \alpha] = \frac{1}{2\sigma^2} f_4(\beta).$$

4.6.5 - Distribuição de $C' M_{21}^{-1} C / \sigma^2$

De (4.5.5.a), temos:

$$C' M_{21}^{-1} C = y' X_6 M_{21}^{-1} X_6' y = y' A_5 y \quad , \quad (4.6.5.a)$$

onde, $A_5 = X_6 M_{21}^{-1} X_6'$.

Então:

$$A_5^2 = X_6 M_{21}^{-1} X_6' X_6 M_{21}^{-1} X_6' \quad .$$

Sendo $X_6' X_6 = M_{21}$, logo:

$$A_5^2 = X_6 M_{21}^{-1} X_6' = A_5 \quad , \quad (4.6.5.b)$$

isto é, A_5 é uma matriz idempotente. Então:

$$r(A_5) = \text{tr}(X_6 M_{21}^{-1} X_6') \quad ,$$

que, por (4.5.5), fica:

$$r(A_5) = \text{tr}(A_5) = v \quad . \quad (4.6.5.c)$$

Por (4.6.1.d) segue-se que:

$$\mu' A_5 \mu = \beta' X' X_6 M_{21}^{-1} X_6' X \beta ,$$

que, por 4.5.5, fica:

$$\mu' A_5 \mu = \underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21} \underline{c} \quad (4.6.5.d)$$

Pelo teorema 1, temos:

$$C' M_{21}^{-1} C / \sigma^2 \cap \chi^2(n_5, \lambda_5) , \quad (4.6.5.e)$$

onde:

$$n_5 = v$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2\sigma^2} [\underline{\alpha}' M_{20} M_{21}^{-1} M_{20}' \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21} \underline{c}] = \frac{1}{2\sigma^2} f_5(\beta).$$

4.6.6 - Distribuição de $y'y/\sigma^2$

Temos $y'y = y'Iy = y'A_6 y$, onde $A_6 = I_N$.

Como A_6 é uma matriz idempotente, de característica N , então, pelo teorema 1 e por (4.5.6.a), temos:

$$y'y / \sigma^2 \cap \chi^2(n_6, \lambda_6) ,$$

onde:

$$n_6 = N ;$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{2\sigma^2} \left| \begin{array}{l} m^2 N + \underline{b}' M_7 \underline{b} + \underline{v}' M_{12} \underline{v} + \underline{\tau}' M_{16} \underline{\tau} + \\ + \underline{\alpha}' M_{19} \underline{\alpha} + \underline{c}' M_{21} \underline{c} + 2\underline{v}' M_{13} \underline{\tau} + \\ + 2\underline{b}' M_{10} \underline{\alpha} + 2\underline{c}' M_{20} \underline{\alpha} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} f_6(\beta) .$$

4.6.7 - Distribuição da SQR/σ^2

Por (4.5.16), temos:

$$SQR = y'y - \frac{G^2}{N} - (B' M_7^{-1} B - C_B) - (V' M_{12}^{-1} V - \frac{G^2}{N}) -$$

$$- \hat{\tau}' Q^* - P' M_{19}^{-1} P - [C' M_{21}^{-1} C - (P' M_{19}^{-1} P - C_B)]$$

$$SQR = y'y - B' M_7^{-1} B - V' M_{12}^{-1} V - \hat{\tau}' Q^* - C' M_{21}^{-1} C$$

$$SQR = y'y - y'A_1 y - y'A_2 y - y'A_3 y - y'A_5 y$$

$$SQR = y' [I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5] y = y'A_7 y \quad (4.6.7.a)$$

onde: $A_7 = I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5$.

Então:

$$A_7^2 = (I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5)(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5)$$

$$A_7^2 = I^2 - A_1 - A_2 - A_3 - A_5 - A_1 + A_1^2 + A_1 A_2 + A_1 A_3 +$$

$$+ A_1 A_5 - A_2 + A_2 A_1 + A_2^2 + A_2 A_3 + A_2 A_5 - A_3 +$$

$$+ A_3 A_1 + A_3 A_2 + A_3^2 + A_3 A_5 - A_5 + A_5 A_1 + A_5 A_2 +$$

$$+ A_5 A_3 + A_5^2 .$$

Já vimos que:

$$A_1 = A_1^2 \quad ; \quad A_2 = A_2^2 \quad ; \quad A_3 = A_3^2 \quad \text{e} \quad A_5 = A_5^2$$

e sendo:

$$A_1 A_2 = (A_2 A_1)' = \phi$$

$$A_1 A_3 = (A_3 A_1)' = \phi$$

$$A_1 A_5 = (A_5 A_1)' = \phi$$

$$A_2 A_3 = (A_3 A_2)' = \phi$$

$$A_2 A_5 = (A_5 A_2)' = \phi$$

$$A_3 A_5 = (A_5 A_3)' = \phi$$

então:

$$A_7^2 = I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5 = A_7 \quad (4.6.7.b)$$

isto é, A_7 é uma matriz idempotente. Então:

$$r(A_7) = \text{tr}(I_N - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) \quad ,$$

$$\begin{aligned} r(A_7) &= \text{tr}(I_N) - \text{tr}(A_1) - \text{tr}(A_2) - \\ &\quad - \text{tr}(A_3) - \text{tr}(A_5) \quad . \end{aligned}$$

Como $\text{tr}(I_N) = N$, e usando (4.6.1.c), (4.6.2.c), (4.6.3.c) e (4.6.5.c), temos:

$$r(A_7) = N - L - v - p + 1 - v$$

$$r(A_7) = N - L - 2v - p + 1 \quad (4.6.7.c)$$

$$\begin{aligned}
\mu' A_7 \mu &= \beta' X' [I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5] X \beta \\
&= \beta' X' X \beta - \beta' X' A_1 X \beta - \beta' X' A_2 X \beta - \\
&\quad - \beta' X' A_3 X \beta - \beta' X' A_5 X \beta \\
\mu' A_7 \mu &= 0
\end{aligned} \tag{4.6.7.d}$$

Pelo teorema 1, temos:

$$SQR/\sigma^2 \cap \chi^2(n_7, 0)$$

ou, de modo equivalente:

$$SQR/\sigma^2 \cap \chi^2_{n_7} \tag{4.6.7.e}$$

onde, por (4.6.7.c): $n_7 = N - L - 2v - p + 1$. Tem, portanto, distribuição de qui-quadrado central, com n_7 graus de liberdade.

4.7 - Distribuição dos Quocientes

$$4.7.1 - \text{Distribuição do quociente: } \frac{B' M_7^{-1} B / n_f \sigma^2}{SQR / n_7 \sigma^2}$$

De (4.6.1.a) e (4.6.7.a), temos:

$$B' M_7^{-1} B = y' A_1 y$$

$$SQR = y' (I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) y$$

$$\begin{aligned}
A_1(1 - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) &= A_1 - A_1^2 - A_1A_2 - \\
&\quad - A_1A_3 - A_1A_5 \\
&= A_1 - A_1 - \phi - \phi - \phi \\
&= \phi \qquad (4.7.1.a)
\end{aligned}$$

então, pelo teorema 2, com $\Sigma = \sigma^2 I$, conforme (4.6.1.d), $B'M_7^{-1}B$ e SQR são independentes. Sendo assim, de (4.6.1.f) e (4.6.7.e), usando o teorema 3, temos:

$$\frac{B'M_7^{-1}B/n_1 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2} \sim F(n_1, n_7, \lambda_1) \quad , \qquad (4.7.1.b)$$

onde:

$$\begin{aligned}
n_1 &= 1 \\
n_7 &= N - 1 - 2v - p + 1 \\
\lambda_1 &= \frac{1}{2\sigma^2} \ell_1(\beta)
\end{aligned}$$

$$4.7.2 - \text{Distribuição do quociente } \frac{V'M_{12}^{-1}V/n_2 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2}$$

De (4.6.2.a) e (4.6.7.a), temos:

$$V'M_{12}^{-1}V = y'A_2y$$

$$SQR = y'(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5)y \quad .$$

Como:

$$\begin{aligned}
 A_2(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) &= A_2 - A_2A_1 - A_2^2 - A_2A_3 - A_2A_5 \\
 &= A_2 - \phi - A_2 - \phi - \phi \\
 &= \phi
 \end{aligned} \tag{4.7.2.a}$$

então, pelo teorema 2, com $\Sigma = \sigma^2 I$, conforme (4.6.1.d), $V'M_{12}^{-1}V$ e SQR são independentes. Sendo assim, de (4.6.2.e) e (4.6.7.e), usando o teorema 3, temos:

$$\frac{V'M_{12}^{-1}V/n_2 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2} \sim F(n_2, n_7, \lambda_2) \quad , \quad (4.7.2.b)$$

onde:

$$n_2 = v$$

$$n_7 = N - L - 2v - p + 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma^2} f_2(\beta) \quad .$$

$$4.7.3 - \text{Distribuição do quociente } \frac{\hat{\tau}'Q^*}{n_3\sigma^2} / \frac{SQR}{n_7\sigma^2}$$

De (4.6.3.a) e (4.6.7.a), temos:

$$\hat{\tau}'Q^* = y'A_3y$$

$$SQRes. = y'(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5)y$$

Como :

$$\begin{aligned} A_3(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5)' &= A_3 - A_3A_1 - A_3A_2 - A_3^2 - A_3A_5 \\ &= \phi \end{aligned} \quad (4.7.3.a)$$

então, pelo teorema 2, com $\Sigma = \sigma^2 I$, conforme (4.6.1.d), $\hat{\tau}'Q^*$ e SQR são independentes. Sendo assim, de (4.6.3.e) e (4.6.7.e), usando o teorema 3, temos:

$$\frac{\hat{\tau}'Q^*/n_3 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2} \cap F(n_3, n_7, \lambda_3) \quad (4.7.3.b)$$

onde:

$$n_3 = p-1$$

$$n_7 = n - L - 2v - p + 1$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2\sigma^2} f_3(\beta)$$

$$4.7.4 - \text{Distribuição do quociente } \frac{P'M_{19}^{-1}P/n_4 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2}$$

De (4.6.4.a) e (4.6.7.a), temos:

$$P'M_{19}^{-1}P = y'A y$$

e

$$SQR = y'(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) y$$

Como

$$A_4(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) \neq \phi,$$

isto é, o produto das matrizes não nulo, isso indica que $P'M_1^{-1}P$ e SQR não são independentes, logo o quociente:

$$\frac{P'M_1^{-1}P/n_4 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2}$$

não tem distribuição exata de F.

$$4.7.5 - \text{Distribuição do quociente } \frac{C'M_{21}^{-1}C/n_5 \cdot \sigma^2}{SQR/n_7 \cdot \sigma^2}$$

De (4.6.5.a) e (4.6.7.a), temos:

$$C'M_{21}^{-1}C = y'A_5 y$$

$$SQR = y'(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) y$$

Como

$$\begin{aligned} A_5(I - A_1 - A_2 - A_3 - A_5) &= A_5^2 - A_5A_1 - A_5A_2 - A_5A_3 - A_5^2 \\ &= \phi \end{aligned} \quad (4.7.5.a)$$

então, pelo teorema 2, com $\Sigma = \sigma^2 I$, conforme (4.6.1.d), $C'M_{21}^{-1}C$ e SQR são independentes. Sendo assim, de (4.6.5.e) e (4.6.7.e), usando o teorema 3, temos:

$$\frac{C' M_{21}^{-1} C / n_5 \cdot \sigma^2}{\text{SQR} / n_7 \cdot \sigma^2} \quad F(n_5, n_7, \lambda_5) \quad (4.7.5.b)$$

onde:

$$n_5 = v$$

$$n_7 = N - L - 2v - p + 1$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2\sigma^2} f_5(\beta)$$

4.8 - Testes de Hipóteses e Quadro da Análise da Variância

Nos ensaios em "switchback" existe geralmente interesse em se testar a hipótese básica:

$$H_0: t_k = 0 ; k = 1, 2, \dots, p$$

que é a hipótese de nulidade para efeitos de tratamentos.

No entanto, outros testes de hipóteses podem eventualmente ser efetuados, conforme demonstrado em 4.7 e também sugerido no quadro a seguir. Entretanto, esse quadro deve ser analisado com cautela, pois vimos em 4.7.4 que Períodos e o Resíduo não são independentes, o que torna o teste F apenas aproximado para este caso.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	E(Q.M.)
Blocos	L-1	$B'M_7^{-1}B - \hat{\alpha}'M_1'M_7^{-1}B$	$\sigma^2 + \frac{1}{(L-1)} f_{11}(\beta)$
Vacas	v-1	$V'M_{12}^{-1}V - \frac{G^2}{N}$	$\sigma^2 + \frac{1}{(v-1)} f_{12}(\beta)$
Tratamentos (aj.)	p-1	$\tau'Q^*$	$\sigma^2 + \frac{1}{(p-1)} f_{13}(\beta)$
Períodos	J-1	$P'M_{19}^{-1}P$	$\sigma^2 + \frac{1}{(J-1)} f_{14}(\beta)$
Int. Período (linear) x Vacas	(v-J+2)	$C'M_{21}^{-1}C - \hat{\alpha}'M_2'M_{21}^{-1}C$	$\sigma^2 + \frac{1}{(v-J+2)} f_{15}(\beta)$
Resíduo	(N-L-2v-p+1)	Por diferença	σ^2
TOTAL	3v-1	$Y'Y - \frac{G^2}{N}$	

Assim, ficou determinado o critério para o teste:

HIPÓTESE	G.L.	F _(observado)
$H_0: t_k = 0$	$(p-1); (N-L-2v-p+1)$	QM Trat (aj.) / QM Res.

4.9 - Comparações Múltiplas

Para se comparar as médias de tratamentos, consideramos o critério de Tukey, descrito em NETER e WASSERMAN (1977), para modelos com estrutura de erros $I\sigma^2$,

$$D.M.S. = q \sqrt{(1/2) \hat{V}(\hat{Y}_O)} ,$$

onde D.M.S. é a diferença mínima significativa, q é o valor da amplitude total estudentizada e $\hat{V}(\hat{Y}_O)$ é a variância estimada do contraste estimado $\hat{Y}_O$, obtido por:

$$\hat{Y}_O = (\hat{m} + \hat{t}_k) - (\hat{m} + \hat{t}_{k'}) = \hat{t}_k - \hat{t}_{k'}$$

e

$$\hat{V}(\hat{Y}_O) = \hat{V}(\hat{t}_k - \hat{t}_{k'}) .$$

5. ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Os dados descritos em (3) foram utilizados para ilustrar a metodologia proposta.

5.1 - Modelo Matemático

Para se verificar a adequacidade do modelo adotado, foi feita a análise gráfica de resíduos.

Para o modelo linear adotado escrito na forma

$$Y = X\beta + \epsilon ,$$

onde: Y é o vetor das observações;

X é a matriz do delineamento;

β é o vetor dos parâmetros;

$\underline{e}$ é um vetor de erros com distribuição normal de média zero e variância $\sigma^2 I$, independentes.

O vetor ($\underline{e}$) dos resíduos observados, onde os parâmetros são estimados pelo método dos mínimos quadrados, é obtido através de:

$$\underline{e} = (Y - X\hat{\beta}) ,$$

onde $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$, pois com as restrições admitidas em (4), a matriz X passa a ter posto completo.

Para se verificar a adequacidade do modelo, segundo ANSCOMBE (1973), os resíduos e_i s quando plotados contra o valor ajustado $\hat{Y}_i$ não devem exibir nenhuma tendência em torno de seu valor médio $\bar{e}_i = 0$. DRAPER e SMITH (1966) utilizam para a verificação dessa tendência o resíduo normalizado

$$d_i = \frac{e_i}{\sqrt{QM \text{ Res.}}} .$$

Para o modelo ser considerado adequado, eles deverão distribuir-se aleatoriamente na forma de uma faixa horizontal em torno de zero.

Com os valores das estimativas dos parâmetros contidos em $\hat{\beta}$ podemos determinar:

$$\underline{e} = (Y_{obs} - X\hat{\beta}) = (Y_{obs} - \hat{Y}) ,$$

e, de posse do quadro de análise de variância foram determinados os resíduos normalizados:

$$d_i = \frac{e_i}{\sqrt{QM \text{ Res.}}}$$

Os valores dos d_i da Tabela 2 foram plotados contra os valores de $\hat{Y}_i$ (Figura 1), através da qual pudemos observar que o modelo se mostra adequado para a análise dos dados.

Tabela 2 - Valores obtidos para as estimativas de $\hat{Y}$, do erro $\underline{e}$ e do erro normalizado $\underline{d}$.

Y ESTIMADO $\hat{Y}_i$	ERRO e_i	ERRO NORMALIZADO d_i
20,34	-0,3	-0,3041
20,59	0,6	0,6082
17,82	-0,3	-0,3041
17,66	-0,36	-0,3650
18,28	0,72	0,7300
15,43	-0,36	-0,3650
25,82	-0,46	-0,4663
25,47	0,92	0,9326
22,85	-0,46	-0,4663
15,00	0,52	0,5272
14,57	-1,04	-1,0544
11,05	0,52	0,5272
19,96	-0,03	-0,0304
17,87	0,06	0,0608
13,96	-0,03	-0,0304
12,49	0,63	0,6387
13,44	-1,26	-1,2774
12,19	0,63	0,6387
13,93	0,15	0,1521
14,11	-0,31	-0,3142
11,59	0,15	0,1521
18,92	0,12	0,1217
18,89	-0,24	-0,2434
15,69	0,12	0,1217
15,96	0,23	0,2332
15,40	-0,46	-0,4664
12,90	0,23	0,2332
25,16	-0,09	-0,0912
23,97	0,18	0,1824
20,01	-0,09	-0,0912
19,08	-0,13	-0,1318
17,37	0,27	0,2736
14,15	-0,13	-0,1318
19,03	-0,28	-0,2839
17,30	0,56	0,5678
13,69	-0,28	-0,2839

Figura 1 - Gráfico de Resíduos.

5.2 - Equações Normais

Verificadas as exigências do modelo matemático, determinou-se o sistema de equações normais, conforme (I):

$$\begin{pmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & X_1'X_3 & X_1'X_4 & X_1'X_5 & X_1'X_6 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & X_2'X_3 & X_2'X_4 & X_2'X_5 & X_2'X_6 \\ X_3'X_1 & X_3'X_2 & X_3'X_3 & X_3'X_4 & X_3'X_5 & X_3'X_6 \\ X_4'X_1 & X_4'X_2 & X_4'X_3 & X_4'X_4 & X_4'X_5 & X_4'X_6 \\ X_5'X_1 & X_5'X_2 & X_5'X_3 & X_5'X_4 & X_5'X_5 & X_5'X_6 \\ X_6'X_1 & X_6'X_2 & X_6'X_3 & X_6'X_4 & X_6'X_5 & X_6'X_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{b} \\ \hat{v} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ B \\ V \\ T \\ P \\ C \end{pmatrix}$$

onde, para: $k=1,2,\dots,p=3$ tratamentos,

$j=1,2,\dots,J=3$ períodos,

$s=1,2,\dots,S=6$ sequências,

$r=1,2,\dots,R=2$ repetições de sequências,

$\ell=1,2,\dots,L=2$ blocos,

$i=1,2,\dots,v=12$ animais,

$$X_1'X_1 = M_1 = N = 3v = 36$$

$$X_1'X_2 = M_2 = (1)\phi(2)$$

$$X_1'X_3 = M_3 = 3 \quad (1)E_{(12)}$$

$$X_1'X_4 = M_4 = 12 \quad (1)E_{(3)}$$

$$X_1'X_5 = M_5 = (1)\phi_{(2)}$$

$$X_1'X_6 = M_6 = (1)\phi_{(12)}$$

$$X_2'X_2 = M_7 = 36 \quad I_{(2)}$$

$$X_2'X_3 = M_8 = (2)\phi_{(12)}$$

$$X_2'X_4 = M_9 = (2)\phi_{(3)}$$

$$X_2'X_5 = M_{10} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}_{(2)} \quad (2)$$

$$X_2'X_6 = M_{11} = (2)\phi_{(12)}$$

$$X_3'X_3 = M_{12} = 3 \quad I_{(12)}$$

$$B = \begin{pmatrix} -15,87 \\ -13,97 \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 223,35 \\ 217,26 \\ 181,33 \end{pmatrix} ; \quad T = \begin{pmatrix} 207,49 \\ 214,18 \\ 200,27 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 58,75 \\ 51,38 \\ 74,14 \\ 40,62 \\ 51,78 \\ 38,12 \\ 39,62 \\ 53,50 \\ 44,26 \\ 69,14 \\ 50,61 \\ 50,02 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} -2,52 \\ -2,23 \\ -2,97 \\ -3,95 \\ -6,00 \\ -0,30 \\ -2,34 \\ -3,23 \\ -3,06 \\ -5,15 \\ -4,93 \\ -5,34 \end{pmatrix}$$

5.3 - Solução do Sistema de Equações Normais

Admitidas as restrições impostas em (4.3),
 $\sum_i^v \hat{v}_i = 0$, $\sum_l^L \hat{b}_l = 0$, $\sum_k^P \hat{t}_k = 0$, $\sum_i^V \hat{c}_i = 0$, para que o sistema tenha solução única, pudemos então obter as estimativas dos parâmetros.

5.3.1 - Estimativa da média

Por (4.3.1) temos:

$$\hat{m} = M^{-1} G ,$$

sendo $M_1 = 36$ e $G = 621,94$, obteve-se

$$\hat{m} = \frac{621,94}{36} = 17,276111 .$$

5.3.2 - Estimativa dos efeitos de tratamentos eliminando-se efeitos de vacas

De (4.3.2) temos:

$$\hat{\tau} = N^{*1} Q^*$$

e

$$N^* = \left(r_k - \frac{\lambda_1}{J} + \frac{\lambda_2}{J} \right) I_{(p)} ,$$

sendo $\lambda_1 = \sum_{i,k} a_{i,k}^2$ para $i=i'$, $k=k'$,

$$\lambda_2 = \sum_{i,k} (a_{i',k'} \cdot a_{i,k}) \text{ para } i \neq i', k \neq k'$$

resulta

$$N^* = \left(12 - \frac{20}{3} + \frac{8}{3}\right) I_{(3)} = 8 \cdot I_{(3)}$$

portanto,

$$N^{*1} = \frac{1}{8} I_{(3)} .$$

A matriz Q^* ficou:

$$Q^* = \begin{bmatrix} T_1 - \frac{2}{3} (V_1 + V_2 + V_7 + V_8) - \frac{1}{3} (V_3 + V_5 + V_9 + V_{11}) \\ T_2 - \frac{2}{3} (V_3 + V_4 + V_9 + V_{10}) - \frac{1}{3} (V_1 + V_6 + V_7 + V_{12}) \\ T_3 - \frac{2}{3} (V_5 + V_6 + V_{11} + V_{12}) - \frac{1}{3} (V_2 + V_4 + V_8 + V_{10}) \end{bmatrix}$$

onde, substituindo-se os valores de T_k e V_i , resultou:

$$Q^* = \begin{bmatrix} -1,606667 \\ -0,096667 \\ 1,703334 \end{bmatrix} ,$$

portanto:

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ \hat{t}_2 \\ \hat{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,200833 \\ -0,012083 \\ 0,212916 \end{bmatrix} ; \sum_{k=1}^3 \hat{t}_k = 0$$

5.3.3 - Estimativa dos efeitos de vacas:

De acordo com (4.3.3), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \\ \hat{v}_6 \\ \hat{v}_7 \\ \hat{v}_8 \\ \hat{v}_9 \\ \hat{v}_{10} \\ \hat{v}_{11} \\ \hat{v}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} V_1 - 3\hat{m} - (2\hat{t}_1 + \hat{t}_2) \\ V_2 - 3\hat{m} - (2\hat{t}_1 + \hat{t}_3) \\ V_3 - 3\hat{m} - (\hat{t}_1 + 2\hat{t}_2) \\ V_4 - 3\hat{m} - (2\hat{t}_2 + \hat{t}_3) \\ V_5 - 3\hat{m} - (\hat{t}_1 + 2\hat{t}_3) \\ V_6 - 3\hat{m} - (\hat{t}_2 + 2\hat{t}_3) \\ V_7 - 3\hat{m} - (2\hat{t}_1 + \hat{t}_2) \\ V_8 - 3\hat{m} - (2\hat{t}_1 + \hat{t}_3) \\ V_9 - 3\hat{m} - (\hat{t}_1 + 2\hat{t}_2) \\ V_{10} - 3\hat{m} - (2\hat{t}_2 + \hat{t}_3) \\ V_{11} - 3\hat{m} - (\hat{t}_1 + 2\hat{t}_3) \\ V_{12} - 3\hat{m} - (\hat{t}_2 + 2\hat{t}_3) \end{bmatrix}$$

então,

$$\begin{array}{c}
 \hat{v}_1 \\
 \hat{v}_2 \\
 \hat{v}_3 \\
 \hat{v}_4 \\
 \hat{v}_5 \\
 \hat{v}_6 \\
 \hat{v}_7 \\
 \hat{v}_8 \\
 \hat{v}_9 \\
 \hat{v}_{10} \\
 \hat{v}_{11} \\
 \hat{v}_{12}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 2,445150 \\
 -0,086534 \\
 7,512233 \\
 -3,799034 \\
 -0,091100 \\
 -4,707367 \\
 -3,931534 \\
 0,620150 \\
 -2,447784 \\
 5,707650 \\
 -0,481100 \\
 -0,740700
 \end{array}
 ; \quad \sum_{i=1}^{12} \hat{v}_i = 0$$

5.3.4 - Estimativa dos efeitos linear e quadrático de períodos

De (4.3.4) temos:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{12(2)} (181,33 - 223,35)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{12(6)} (223,35 - 2.217,26 + 181,33)$$

resultando em:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,750833 \\ -0,414444 \end{pmatrix}$$

5.3.5 - Estimativa dos efeitos de blocos

De acordo com (4.3.5), as estimativas dos efeitos de blocos são obtidas através de:

$$\hat{b}_\ell = \frac{1}{m_\ell \cdot \sum z_j^2} B_\ell - \hat{\alpha}_2$$

ou

$$\hat{b}_\ell = \frac{1}{m_\ell \cdot \sum z_j^2} B_\ell - \frac{1}{36} (P_1 - 2P_2 + P_3) ,$$

resultando:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,026389 \\ 0,026389 \end{pmatrix} ; \quad \sum_{\ell=1}^2 \hat{b}_\ell = 0 .$$

5.3.6 - Estimativa dos efeitos da interação período (linear) x vacas

Por (4.3.6), obtemos:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \\ \hat{c}_4 \\ \hat{c}_5 \\ \hat{c}_6 \\ \hat{c}_7 \\ \hat{c}_8 \\ \hat{c}_9 \\ \hat{c}_{10} \\ \hat{c}_{11} \\ \hat{c}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,490833 \\ 0,635833 \\ 0,265833 \\ -0,224166 \\ -1,249166 \\ 1,600833 \\ 0,580833 \\ 0,135833 \\ 0,220833 \\ -0,824166 \\ -0,714166 \\ -0,919166 \end{bmatrix}, \quad \sum_i \hat{c}_i = 0$$

5.4 - Somas de Quadrados

5.4.1 - Obtenção da Soma de Quadrados de $\hat{m}$:

De acordo com (4.4.1):

$$SQ(\hat{m}) = 10.744,704540 .$$

5.4.2 - Obtenção da Soma de Quadrados de Blocos:

Por (4.4.2) obtemos:

$$SQ \text{ Blocos} = 0,050138 .$$

5.4.3 - Obtenção da Soma de Quadrados de Tratamentos (ajustada):

De (4.4.3) temos que:

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = \hat{\tau}' Q^* ,$$

que para o exemplo em estudo resultou em:

$$\begin{aligned} SQ \text{ Trat. (aj.)} &= Q_k^* N^{*1} Q_k^* \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^3 Q_k^{*2} \end{aligned}$$

$$SQ \text{ Trat. (aj.)} = 0,686508$$

5.4.4 - Obtenção da Soma de Quadrados de Vacas

Por (4.4.4), temos:

$$SQ \text{ Vacas (ign.trat.)} = 457,678060$$

5.4.5 - Obtenção da Soma de Quadrados de Períodos

Por (4.4.5) temos:

$$SQ \text{ Períodos} = 85,937043 ,$$

onde,

$$SQ \text{ Períodos (linear)} = 73,570016 ,$$

$$SQ \text{ Períodos (quadrático)} = 12,367027 .$$

5.4.6 - Obtenção da Soma de Quadrados da Interação Período (linear) x Vacas

De (4.4.6) obtivemos:

$$SQ \text{ Interação (Período linear x Vacas)} = 14,655883 .$$

5.5 - Quadro da Análise de Variância e Testes de Hipóteses

Obtivemos o seguinte quadro para a análise de variância:

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	
Blocos	1	0,050138	0,050139	
Vacas (V)	11	457,678060	41,607096	
Tratamentos (aj.)	2	0,686508	0,343254	0,3528 ^{ns}
Períodos (P)	2	85,937043	42,968522	
Interação P (linear) x V	11	14,655883	1,332353	1,37 ^{ns}
Resíduo	8	7,783626	0,972953	
Total	35	566,791230		

$$CV = 5,71\%$$

que não forneceu evidências para a rejeição de H_0 . Concluimos, então, pela não existência de efeito diferencial significativo entre tratamentos.

5.6 - Comparações Múltiplas

Devido à não rejeição de H_0 , pela análise de variância, não é necessário efetuar testes de comparações múltiplas.

Apenas como ilustração, foram colocados os valores das médias de tratamentos e a diferença mínima significativa do teste de Tukey.

Médias de Tratamentos Ajustadas, em kg:

A	B	C
17,0753	17,2640	17,4890

$$\hat{Y} = \hat{m}_k - \hat{m}_k,$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{2}{8} \cdot \text{QM Res.}$$

$$\text{DMS} = q \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{8} \text{QM Res.} \right)} = 1,4089$$

$$q_{0,05;3,8} = 4,04$$

6. CONCLUSÕES

6.1 - O modelo matemático proposto mostrou-se adequado quando se desejou testar a hipótese básica de nulidade sobre os tratamentos.

6.2 - O sistema de equações normais é semelhante ao obtido por GODOI (1971). Quanto a parte que se refere aos efeitos de blocos, não encontramos na literatura dedução matemática que possibilitasse uma comparação com outros trabalhos.

6.3 - Somas de Quadrados

A expressão obtida para soma de quadrados devida a efeitos de blocos coincide com aquela apresentada por LUCAS (1956). Para a soma de quadrados devida a efei-

tos de tratamentos chegou-se ao mesmo resultado obtido por LUCAS (1956) e GODOI (1971). A fórmula obtida para a soma de quadrados devida a efeitos de vacas é a mesma proposta por GODOI (1971). Para a soma de quadrados devida a efeitos de períodos chegamos a resultados coincidentes com as fórmulas apresentadas por BRANDT (1938) e GODOI (1971). A soma de quadrados devida a efeitos da interação período (linear) x vacas também coincide com o resultado apresentado por GODOI (1971).

6.4 - A análise de variância para ensaios como o aqui proposto mostrou-se eficiente quando se deseja testar a hipótese da nulidade

$$H_0: t_1 = t_2 = \dots = t_p = 0 ,$$

pois SQ Trat.(aj.) e SQR são independentes e seu quociente tem distribuição F.

Normalmente nesse tipo de ensaio não se tem interesse em testar os demais efeitos, o que seria possível visto às distribuições dos quocientes, exceto no caso de períodos onde o teste F não é exato devido à não independência das formas quadráticas de Período e Resíduo, obtidas através do modelo estudado.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSCOMBE, F.J., 1961. Examination of Residuals. Fourth Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley, 1(4): 1-36.

ANSCOMBE, F.J., 1973. Graphs in Statistical Analysis. American Statistician, 27: 17-21.

ANSCOMBE, F.J. e J.W. TUKEY, 1963. The Examination and Analysis of Residuals. Technometrics, 5(2).

BRANDT, A.E., 1938. Tests of Significance in Reversal or Switchback Trials. Research Bulletin. Ames, 234: 60-87.

CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments. 1ª ed. Asia Publishing House, Londres, 120 pp.

- DRAPER, N.R. e H. SMITH, 1966. Applied Regression Analysis. Wiley, New York.
- GILL, J.L., 1978. Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. The Iowa State University Press. 1ª ed. Ames, 3 vol. 882 pp.
- GODOI, C.R., 1971. Modelo Matemático dos Ensaio em Dupla Reversão ("Switchback"). Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP, Piracicaba, 52 pp. [Tese de Doutorado].
- GODOI, C.R., 1983. Modelo linear com Auto-Correlação nos Resíduos para a Análise de Produção Leiteira em Experimentos com Dupla Reversão. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP, Piracicaba, 110 pp. [Tese de Livre Docência].
- GRAYBILL, F.A., 1961. An Introduction to Linear Statistical Models. Vol. I. McGraw-Hill.
- IEMMA, A.F., 1981. Análise de Experimentos em Parcelas Subdivididas com Tratamentos Principais Dispostos em Blocos Incompletos Balanceados. Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"/USP, Piracicaba, 145 pp. [Tese de Doutorado].
- KALIL, E.B., 1971. Princípios de Técnica Experimental com Animais. Instituto de Zootecnia de Nova Odessa, Nova Odessa. [Mimeografado].

- LUCAS, H.L., 1951. Bias in Estimation of Error in Change-over Trials, with Dairy Cattle. Jour. Agric. Sci., 41: 146.
- LUCAS, H.L., 1956. Switchback Trials for More Than Two Treatments. Jour. Dairy Sci., 39: 146.
- LUCAS, H.L., 1958. Designs in Animal Science Research Inst. of Stat. Univ. N.C. [Mimeografado].
- NETER, J. e W. WASSERMAN, 1977. Applied Linear Statistical Models. Regression, Analysis of Variance, and Experimental Designs. Richard D. Irwin, Inc., 1ª ed. Illinois, 841 pp.
- PATTERSON, H.D., 1950. The analysis of Change-over Trials. Jour. Agric. Sci., 40: 375.
- PIMENTEL GOMES, F., 1967. The Solution of Normal Equations of Experiments in Incomplete Blocks. Ciência e Cultura. São Paulo, 20: 733-746.
- PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. 6ª ed. Nobel, Piracicaba, 430 pp.
- SCHEFFÉ, H., 1959. The Analysis of Variance. University of California, Berkeley, New York. John Wiley & Sons, Inc., 477 pp.
- SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. N.Y. State College of Agriculture, Cornell University. John Wiley & Sons, Inc., 530 pp.

SEBER, G.A.F., 1977. Linear Regression Analysis. University of Auckland, Auckland, New Zealand. John Wiley & Sons, Inc., 466 pp.

TAYLOR, W.B. e P.J. ARMSTRONG, 1953. The Efficiency of Some Experimental Designs Used in Dairy Husbandry Experiments. J. Agr. Sci., 43: 407.