VARIÂNCIAS DE CONTRASTES DE MÉDIAS NOS ENSAIOS EM PARCELAS SUB-SUBDIVIDIDAS ENVOLVENDO UMA UNIDADE PERDIDA

NORBERTO ANTONIO LAVORENTI

Engenheiro Agrônomo

Orientador : Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração em "Estatística e Experimentação Agronômica".

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Outubro, 1985

A meus pais (JORGE e LEDA)
pelos ensinamentos e oportu-
nidades na vida

A minha esposa (LEILA) pela
compreensão e a meus filhos
(TIAGO e DIOGO) DEDICO com
amor.

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Professor Doutor e acima de tudo amigo Humberto de Campos do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo irrestrito apoio e segura orientação.
- Ao PLANALSUCAR - Programa Nacional de Melhoramento da Cana-de-Açúcar - pela oportunidade e facilidade para a realização desse curso.
- À Seção de Mecanização da Estação Regional Norte do PLANALSUCAR pela cessão dos dados experimentais utilizados neste trabalho.
- Aos Demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos, amizade e sugestões apresentadas.
- Aos Colegas de curso pela amizade e companheirismo.
- A Rosa Maria Alves pela boa vontade na decifração dos meus hieróglifos, para o trabalho de datilografia.
- A Todos que de alguma forma colaboraram na concretização deste trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
RESUMO	ix
SUMMARY	xiii
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO DE LITERATURA	04
3. MATERIAL E MÉTODOS	23
3.1. Material	23
3.2. Métodos	24
3.2.1. Modelo Matemático	24
3.2.2. Decomposição da Soma de Quadrado do Resíduo (c)	27
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
4.1. Decomposição da Soma de Quadrado do Resí- duo (c)	29
4.2. Esperança Matemática das Somas de Quadrado dos Quadrados Médios	33
4.2.1. Total	38
4.2.2. Blocos	43
4.2.3. Tratamentos (A)	47
4.2.4. Parcelas	50
4.2.5. Resíduo (a)	54
4.2.6. Tratamentos (B)	55

Continuação.

	Pág.
4.2.7. Interação de Tratamentos ($A \times B$)	60
4.2.8. Subparcelas	64
4.2.9. Resíduo (b)	67
4.2.10. Tratamentos (C)	68
4.2.11. Interação de Tratamentos ($A \times C$)	72
4.2.12. Interação de Tratamentos ($B \times C$)	76
4.2.13. Interação de Tratamentos ($A \times B \times C$)	81
4.2.14. Resíduo (c)	85
4.2.15. Exemplo Ilustrativo	88
4.3. Estimadores de Variâncias de Contrastes de Médias Envolvendo o Tratamento com a Sub-Subparcela Perdida	90
4.3.1. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A)	90
4.3.2. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B)	95
4.3.3. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (C)	98
4.3.4. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B) Dentro do Tratamento (A_i)	100

Continuação.

Pág.

4.3.5.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A) Dentro do Tratamento (B_k).	104
4.3.6.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (C) Dentro do Tratamento (A_i).	107
4.3.7.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A) Dentro do Tratamento (C_ℓ).	110
4.3.8.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (C) Dentro do Tratamento (B_k).	114
4.3.9.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B) Dentro do Tratamento (C_ℓ).	117
4.3.10.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (C) Dentro dos Tratamentos (A_i) e (B_k)	120
4.3.11.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B) Dentro dos Tratamentos (A_i) e (C_ℓ)	123
4.3.12.	Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A) Dentro dos Tratamentos (B_k) e (C_ℓ)	127

Continuação.

	Pág.
4.3.13. Exemplo Ilustrativo	130
5. CONCLUSÕES	132
6. LITERATURA CITADA	138
7. APÊNDICE	141

VARIÂNCIAS DE CONTRASTES DE MÉDIAS NOS ENSAIOS EM PAR-
CELAS SUB-SUBDIVIDIDAS ENVOLVENDO UMA UNIDADE PERDIDA

Autor: NORBERTO ANTONIO LAVORENTI

Orientador: HUMBERTO DE CAMPOS

R E S U M O

Na experimentação, de um modo geral, quando se têm três fatores para serem estudados simultaneamente, uma das opções é a utilização do delineamento em parcelas sub-subdivididas. Qualquer que seja o delineamento adotado, o número de unidades experimentais é geralmente elevado, aumentando conseqüentemente os riscos de perda de uma ou mais unidades experimentais.

No caso de perda de uma ou mais sub-subparce-
las o valor dessa unidade pode ser estimado e a análise de variância é levada a efeito sem maiores dificuldades.

Uma dificuldade surge na estruturação dos estimadores de variâncias de contrastes de médias envolvendo unidades perdidas.

O objetivo do presente trabalho é a obtenção dos estimadores de variâncias de contrastes envolvendo uma sub-subparcela perdida. Dentre os casos possíveis, foram estudados os 12 de maior interesse, cujos resultados estão apresentados a seguir:

1. Entre médias de tratamentos primários A:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} [E_a + f(I-2)E_c] ;$$

2. Entre médias de tratamentos secundários B:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} [E_b + f(K-2)E_c] ;$$

3. Entre médias de tratamentos terciários C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_\ell) = \frac{2 E_c}{IJK} (1 + f \cdot L) ;$$

4. Entre médias de tratamentos B dentro de um mesmo nível do tratamento A: $\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} [E_b + f(IK-2)E_c] ;$

5. Entre médias de tratamentos A dentro de um mesmo nível do tratamento B:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} [E_a + (K-1)E_b + f(IK^2-2K)E_c] ;$$

6. Entre médias de tratamentos C dentro de um mesmo nível do tratamento A: $\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2 E_c}{JK} (1 + f \cdot IL) ;$

7. Entre médias de tratamentos A dentro de um mesmo nível do tratamento C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [(L-1) + f(IL^2-2)]$$

8. Entre médias de tratamentos C dentro de um mesmo nível do tratamento B: $\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2 E_c}{IJ} (1 + f \cdot KL);$

9. Entre médias de tratamentos B dentro de um mesmo nível do tratamentos C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/\ell}) = \frac{2 E_b}{IJL} + \frac{2 E_c}{IJL} [(L-1) + f(KL^2-2)] ;$$

10. Entre médias de tratamentos C dentro de mesmo níveis dos tratamentos A e B: $\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2 E_c}{J} (1 + f \cdot IKL);$

11. Entre médias de tratamentos B dentro de mesmo níveis dos tratamentos A e C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i\ell}) = \frac{2 E_b}{JL} + \frac{2 E_c}{JL} [(L-1) + f(IKL^2-2)] ;$$

12. Entre médias de tratamentos A dentro de mesmo níveis dos tratamentos B e C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2(K-1)E_b}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [K(L-1) + f(IK^2L^2-2K)] ,$$

onde:

E_a = Quadrado médio do resíduo (a);

E_b = Quadrado médio do resíduo (b);

E_c = Quadrado médio do resíduo (c);

$$f = \frac{1}{2IK(J-1)(L-1)}$$

e ainda:

I = Número de tratamentos primários (A);

K = Número de tratamentos secundários (B);

L = Número de tratamentos terciários (C), e:

J = Número de blocos.

VARIANCES OF CONTRASTS AMONG MEANS IN SPLIT-SPLIT-PLOT
DESIGNS INVOLVING ONE MISSING SUB-SUB-PLOT

Author: NORBERTO ANTONIO LAVORENTI

Adviser: HUMBERTO DE CAMPOS

S U M M A R Y

In agricultural research, in general, when three factors have to be studied simultaneously, one option is the using of Split-Split-Plot Designs. Whichever design been adopted, the number of experimental units is generally high, increasing, consequently, the risk of missing one or more experimental units.

In case of missing one or more sub-sub-plots, the experimental unit value can be estimated and the variance analysis effectuated without large difficulties.

One difficulty appears in the calculus of the variance estimators of the means contrasts involving the missing units.

The objective of this work is to obtain the variance estimators of contrasts involving one missing sub-

-sub-plot. Among the possible cases, the twelve most interesting were studied. They are:

1. Among means of the primary treatment A:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} [E_a + f(I-2)E_c];$$

2. Among means of the secondary treatments B:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} [E_b + f(K-2)E_c];$$

3. Among means of the tertiary treatments C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_\ell) = \frac{2 E_c}{IJK} (1 + f \cdot L);$$

4. Among means of the treatments B within the same level of treatment A: $\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} [E_b + f(IK-2)E_c];$

5. Among means of the treatments A within the same level of treatment B:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} [E_a + (K-1)E_b + f(IK^2-2K)E_c];$$

6. Among means of the treatments C within the same level of treatment A: $\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2 E_c}{JK} (1 + f \cdot IL);$

7. Among means of the treatments A within the same level of treatment C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [(L-1) + f(IL^2-2)];$$

8. Among means of the treatments C within the same level of treatment B: $\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2 E_c}{IJ} (1 + f \cdot KL);$

9. Among means of the treatments B within the same level of treatment C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/\ell}) = \frac{2 E_b}{IJL} + \frac{2 E_c}{IJL} [(L-1) + f(KL^2-2)] ;$$

10. Among means of the treatments C within the same levels of treatments A and B:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2 E_c}{J} (1 + f \cdot IKL) ;$$

11. Among means of the treatments B within the same levels of treatments A and C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2 E_b}{JL} + \frac{2 E_c}{JL} [(L-1) + f(IKL^2-2)] ; \text{ and}$$

12. Among means of the treatments A within the same levels of treatments B and C:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2(K-1)E_b}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [K(L-1) + f(IK^2L^2-2K)]$$

where:

E_a = Error (a) mean square;

E_b = Error (b) mean square;

E_c = Error (c) mean square;

$$f = \frac{1}{2IK(J-1)(L-1)}$$

and:

I = Number of primary treatments (A);

K = Number of secondary treatments (B);

L = Number of tertiary treatments (C), and:

J = Number of blocks.

1. INTRODUÇÃO

Os ensaios em parcelas sub-subdivididas são muito úteis para se estudar três fatores quando, por circunstâncias diversas, de execução por exemplo, não se pode instalar o experimento num esquema fatorial.

Com três fatores sendo estudados concomitantemente, o número de unidades experimentais aumenta consideravelmente, e em igual proporção os riscos de perdas de observações devido as mais diversas causas, alheias ou não ao controle do experimentador.

Às vezes não há propriamente perda da observação, mas o valor encontrado, representativo daquela sub-sub-unidade, discrepa consideravelmente dos demais valores do ensaio ou não é fidedigno. Nesses casos é recomendável admitir a perda da observação.

Não raro o número de observações perdidas é tanto que se for utilizado o processo usual de estimar os seus valores, o ensaio ficará de tal forma artificial, que comprometerá a validade das conclusões obtidas.

Quando se estimam unidades experimentais, o número de graus de liberdade do resíduo correspondente, seja ao nível de subparcelas ou de sub-subparcelas, fica reduzido de 1 grau de liberdade por unidade estimada, pois essas estimativas não têm erro experimental.

O procedimento de recuperar informações perdidas faz com que algumas somas de quadrados nas análises de variância fiquem alteradas, o que, conforme o caso, pode prejudicar as conclusões finais.

De forma prática, numa análise de variância quando se têm valores de F altamente significativos dispensa-se a correção da soma de quadrados. No caso de valores de F próximos ao limite de significância, a introdução da correção poderá modificar as conclusões preliminares obtidas.

A maior dificuldade no caso de observações perdidas nos experimentos em parcelas sub-subdivididas se situa no emprego dos métodos de comparações múltiplas, onde é notória a multiplicidade de casos, correspondendo a cada um deles um distinto estimador de variância de contraste entre médias.

O objetivo do presente trabalho é a obtenção dos estimadores de variâncias de contrastes, envolvendo uma observação perdida, nos casos de maior interesse prático.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Um dos primeiros trabalhos a respeito de perda de parcelas foi apresentado por ALLAN e WISHART (1930) no qual os autores estimavam seus valores através de um processo que, a princípio, pensou-se tratar do Método dos Mínimos Quadrados. Através de cálculo diferencial e aplicando certos artifícios esses autores conseguiram fórmulas que estimavam parcelas perdidas para os delineamentos em blocos casualizados e em quadrados latinos.

YATES (1933) utilizando incógnitas para substituir os valores das parcelas perdidas e aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, chegou aos mesmos resultados apresentados por ALLAN e WISHART (1930).

Um trabalho bem mais completo foi realizado posteriormente por ANDERSON (1946) no qual são apresentadas fórmulas para o cálculo de parcelas perdidas nos mais diferentes delineamentos, inclusive para o de parcelas subdivididas. Segundo o autor, o melhor estimador da parcela perdida, e que torna mínimo o erro experimental a nível de subparcela, é:

$$y = \frac{r(R_j A_i) + \beta(A_i B_k) - A_i}{(r - 1)(\beta - 1)}$$

onde:

y é a estimativa da subparcela perdida ;

A_i = total de todas as subparcelas com o tratamento i ;

$R_j A_i$ = total de todas as subparcelas com o tratamento i na repetição j ;

$A_i B_k$ = total de todas as subparcelas existentes envolvendo a combinação dos tratamentos i e k ;

r = número de repetições , e:

β = número de tratamentos secundários.

Neste trabalho o autor afirma que para a obtenção das somas de quadrados não há necessidade de se preocupar com as observações perdidas.

Assim, para o cálculo das variâncias das diferenças entre médias de tratamentos secundários ele apresenta as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \bar{B}_k^* - \bar{B}_k &\Rightarrow \frac{2 \cdot E_b}{r\alpha - 1} \\
 (2) \quad \overline{A_i B_k^*} - \overline{A_i B_k} &\Rightarrow \frac{2 \cdot E_b}{r - 1} \\
 (3) \quad \overline{A_i B_k} - \overline{A_i, B_k} &\Rightarrow \frac{2 \cdot E_b}{r} \\
 (4) \quad \overline{A_i B_k^*} - \overline{A_i, B_k} &\Rightarrow \left[\frac{E_a + (\beta - 1) \cdot E_b}{\beta} \right] \left[\frac{1}{r} + \frac{r}{r - 1} \right] \\
 (5) \quad \overline{A_i, B_k} - \overline{A_i, B_k} &\Rightarrow \frac{2}{r} \left[\frac{E_a + (\beta - 1) \cdot E_b}{\beta} \right]
 \end{aligned}$$

onde:

α é o número de tratamentos primários;

E_a é a variância residual a nível de parcelas, e:

E_b é a variância residual a nível de subparcelas;

* casos em que houve perda de uma subparcela

Afirma ainda que se o valor estimado Y for utilizado na análise, todas as somas de quadrados ficarão ligeiramente superestimadas com exceção da S.Q. Resíduo (b) e que o teste de significância para os tratamentos a nível

de parcelas não fica seriamente afetado, devido à pequena tendenciosidade introduzida pelo uso do valor estimado da unidade perdida.

Os autores TRUITT e SMITH (1956) fazem menção ao ajuste feito através do uso de covariância e de variáveis "dummy", e citam ainda as metodologias empregadas por ANDERSON e BARTLETT, o mesmo ocorrendo com os autores JOHN e QUENOUILLE (1977) que colocam essa técnica como a mais apropriada.

Fórmulas mais genéricas de estimativas das variâncias de contrastes entre duas médias, para ensaios em parcelas subdivididas, foram introduzidas por COCHRAN e COX (1957), e são apresentadas a seguir:

Contraste	Variância
$a_i - a_i,$	$\frac{2 \cdot (E_a + f \cdot E_b)}{rb}$
$b_j - b_j,$	$\frac{2 \cdot E_b (1 + f \cdot b/a)}{ra}$
$a_i b_j - a_i b_j,$	$\frac{2 \cdot E_b (1 + f \cdot b/a)}{r}$
$a_i b_j - a_i, b_j$ ou	
$a_i b_j - a_i, b_j,$	$\frac{2 \cdot E_a + 2 \cdot E_b [(b-1) + f \cdot b^2]}{rb}$

onde:

E_a é o quadrado médio do resíduo (a);

E_b é o quadrado médio do resíduo (b);

b é o número de tratamentos secundários;

a é o número de tratamentos primários, e:

r é o número de repetições .

O fator $\underline{f}$ possui as seguintes características:

$$f = \frac{1}{2(r - 1)(b - 1)} ,$$

para os casos em que somente uma subparcela foi perdida, e:

$$f = \frac{k}{2(r - d)(b - k + e - 1)}$$

para os casos de mais de uma subparcela perdida e está na dependência da localização dessas perdas, onde:

k é o número de observações perdidas;

e é o número de blocos que contém uma ou mais observações perdidas, e:

d é o número de observações perdidas na unidade da combinação dos tratamentos $a_i b_j$ que é mais afetada.

Esses autores citam ainda o caso de mais de uma subdivisão das parcelas, isto é, o caso de sub-subparcelas, mas sem considerarem observações perdidas. Apresentam os erros padrão das diferenças entre duas médias, conforme se verifica a seguir:

Comparações de Médias	Erros-padrão
$a_i - a_{i'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_a}{r \cdot b \cdot c}}$
$b_j - b_{j'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{r \cdot a \cdot c}}$
$a_i b_j - a_{i'} b_{j'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{r \cdot c}}$
$[a_i b_j - a_{i'} b_{j'}]$ ou $[a_i b_{j'} - a_{i'} b_j]$	$\sqrt{\frac{2 [(b-1)E_b + E_a]}{r \cdot b \cdot c}}$
$c_k - c_{k'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{r \cdot a \cdot b}}$
$a_i c_k - a_{i'} c_{k'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{r \cdot b}}$
$b_j c_k - b_{j'} c_{k'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{r \cdot a}}$
$a_i b_j c_k - a_{i'} b_{j'} c_{k'}$	$\sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{r}}$

Continuação.

Comparações de Médias	Erros-padrão
$[b_{jk} - b_{j',k}]$ ou $[b_{jk} - b_{j',k'}]$	$\sqrt{\frac{2[(c-1)E_c + E_b]}{r \cdot a \cdot c}}$
$a_i b_{jk} - a_i b_{j',k}$	$\sqrt{\frac{2[(c-1)E_c + E_b]}{r \cdot c}}$
$[a_{ik} - a_{i',k}]$ ou $[a_{ik} - a_{i',k'}]$	$\sqrt{\frac{2[(c-1)E_c + E_a]}{r \cdot b \cdot c}}$
$a_i b_{jk} - a_{i'} b_{j',k}$	$\sqrt{\frac{2[b(c-1)E_c + (b-1)E_b + E_a]}{r \cdot b \cdot c}}$

onde:

c é o número de tratamentos terciários, e:

E_c é o quadrado médio do resíduo (c).

CAMPOS (1964) apresenta um estudo bastante interessante sobre o cálculo de parcelas perdidas, utilizando em seu trabalho o Método Iterativo ou das aproximações sucessivas na obtenção de estimativas de duas ou mais parcelas perperdidas nos delineamentos em blocos casualizados e em quadrado latino, estendendo esse conceito para os ensaios em períodos sucessivos.

Fórmulas para obtenção da estimativa de uma e de duas sub-subparcelas foram apresentadas por PINHO (1973), englobando todos os casos possíveis de perdas. Para o caso de uma observação perdida a sua estimativa pode ser obtida a través da equação:

$$y_1 = \frac{r(SP) + c(A_j B_k C_\ell) - A_j B_k}{(r - 1)(c - 1)}$$

onde:

y_1 é a estimativa da unidade perdida ;

r é o número de blocos ;

c é o número de tratamentos terciários;

SP é o total das sub-subparcelas presentes na subparcela onde se perdeu uma observação ;

$A_j B_k C_\ell$ é o total de todas as sub-subparcelas relativas aos tratamentos A_j , B_k e C_ℓ , correspondentes à unidade perdida , e:

$A_j B_k$ é o total de todas as observações relativas aos tratamentos A_j e B_k , correspondentes à sub-subparcela perdida.

A autora apresenta ainda a análise de variância, com as equações para obtenção das somas de quadrados, bem como suas respectivas correções, que estão assim estruturadas:

$$(1) \quad \text{S.Q.Blocos} = \frac{1}{abc} \left[(y_1 + BL)^2 + D \right] - C \quad .$$

A correção correspondente é:

$$U_{\text{Blocos}} = \frac{(r-1)}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{rBL - G}{rabc} - \frac{a(rbc-1) - (r-1)}{rabc} y_9^2 + \\ + \frac{rbc-1}{rbc} y_{11}^2$$

onde:

- a é o número de tratamentos primários A;
- b é o número de tratamentos secundários B;
- BL é o total das unidades restantes no bloco da sub-subparcela perdida ;
- D é a soma de quadrados dos totais de cada bloco excetuando o da sub-subparcela perdida ;
- C é a correção dada por $\frac{(y_1 + G)^2}{rabc}$;
- G é o total das sub-subparcelas restantes ;
- $y_9 = \frac{aA_j + rBL - G}{(rbc-a-r+1)}$;
- A_j é o total de todas as unidades relativas ao j-ésimo tratamento A atribuído à parcela com a unidade perdida , e:

$$y_{1j} = \frac{A_j}{rbc - 1}.$$

$$(2) \quad \text{S.Q.Tratamentos (A)} = \frac{1}{rbc} \left[(y_1 + A_j)^2 + E \right] - C$$

com a correção:

$$U_{TA} = \frac{a-1}{rbc} y_1^2 + 2y_1 \frac{aA_j - G}{rbc} - \frac{a(rbc-1) - (r-1)}{rbc} y_9^2 + \\ + \frac{abc-1}{abc} y_{10}^2$$

onde:

E é a soma dos quadrados dos totais de cada nível do tratamento A, exceto o relativo à sub-subparcela perdida

$$y_{10} = \frac{BL}{abc - 1}$$

$$(3) \quad \text{S.Q.Parcelas} = \frac{1}{bc} \left[(y_1 + P)^2 + F \right] - C$$

onde:

P é o total das sub-subparcelas presentes na parcela onde se perdeu uma unidade ;

F é a soma de quadrados de cada parcela, excetuando-se o da observação perdida.

$$(4) \quad \text{S.Q. Resíduo (a)} = \text{S.Q. Parcelas} - \text{S.Q. Blocos} - \text{S.Q. Tratamentos (A)}.$$

A expressão da correção associada a este resíduo é:

$$U_{RA} = \frac{(a-1)(r-1)}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{raP - aA_j - rBL + G}{rabc} - \frac{bc-1}{bc} y_8^2 + \\ + \frac{a(rbc-1) - (r-1)}{rabc} y_9^2$$

onde:

$$y_8 = \frac{P}{bc-1}$$

$$(5) \quad \text{S.Q. Tratamentos (B)} = \frac{1}{rac} \left[(y_1 + B_k)^2 + H \right] - C$$

e a correção:

$$U_{TB} = \frac{b-1}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{bB_k - G}{rabc} - \frac{ra(bc-1) - (b-1)}{rabc} y_7^2 + \\ + \frac{bc-1}{bc} y_8^2$$

onde:

B_k é o total de todas as observações relativas ao k-ésimo tratamento B atribuído à unidade perdida

H é a soma de quadrados dos totais de cada tratamento B, excetuando-se o da sub-subparcela perdida, e

$$y_7 = \frac{raP + bB_k - G}{(rabc - ra - b + 1)}$$

$$(6) \text{ S.Q. Tratamentos (AxB)} = \frac{1}{rc} \left[(y_1 + A_j B_k)^2 + M \right] - C - \\ - \text{S.Q.Trat.(A)} - \text{S.Q.Trat.(B)}$$

e a correção:

$$U_{AB} = \frac{(a-1)(b-1)}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{ab(A_j B_k) - aA_j - bB_k + G}{rabc} - \\ - \frac{b(rc-1) - (r-1)}{rbc} y_6^2 + \frac{ra(bc-1) - (b-1)}{rabc} y_7^2$$

onde:

M é a soma dos quadrados dos totais de cada combinação $A_j B_k$, excetuando-se o da sub-subparcela perdida, e

$$y_6 = \frac{rP + b(A_j B_k) - A_j}{(rbc - r - b + 1)}$$

$$(7) \text{ S.Q.Subparcelas} = \frac{1}{c} \left[(y_1 + SP)^2 + N \right] - C$$

onde:

N é a soma de quadrados dos totais de cada subparcela, excetuando-se o da sub-subparcela perdida.

$$(8) \quad \text{S.Q. Resíduo (b)} = \text{S.Q. Subparcelas} - \text{S.Q. Parcelas} - \\ - \text{S.Q. Tratamentos (B)} - \text{S.Q. Tratamentos (AxB)}$$

com a correção sendo expressa por:

$$U_{RAB} = \frac{(b-1)(r-1)}{rbc} y_1^2 + 2y_1 \frac{rb(SP) - b(A.B.) - rP + A_j}{rbc} - \\ - \frac{c-1}{c} y_5^2 + \frac{b(rc-1) - (r-1)}{rbc} y_6^2$$

com:

$$y_5 = \frac{SP}{c-1}$$

$$(9) \quad \text{S.Q. Tratamentos (C)} = \frac{1}{rab} \left[(y_1 + c_\ell)^2 + Q \right] - C$$

e a correção:

$$U_{TC} = \frac{c-1}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{cC_\ell - G}{rabc} - \frac{(c-1)(rab-1)}{rabc} y_4^2 + \frac{c-1}{c} y_5^2$$

onde:

C_ℓ é o total de todas as observações relativas ao ℓ -ésimo tratamento C atribuído à unidade perdida;

Q é a soma dos quadrados dos totais de cada tratamento C, excetuando-se o da sub-subparcela perdida, e:

$$y_4 = \frac{rab(SP) + cC_\ell - G}{(c - 1)(rab - 1)}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{S.Q.Tratamentos (AxC)} &= \frac{1}{rb} \left[(y_1 + A_j C_\ell)^2 + R \right] - C - \\ &\quad - \text{S.Q.Tratamentos (A)} - \\ &\quad - \text{S.Q.Tratamentos (C)} \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned} U_{AC} &= \frac{(a - 1)(c - 1)}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{ac(A_j C_\ell) - aA_j - cC_\ell + G}{rabc} - \\ &\quad - \frac{(c - 1)(rb - 1)}{rbc} y_3^2 + \frac{(c - 1)(rab - 1)}{rabc} y_4^2 \end{aligned}$$

$A_j C_\ell$ é o total de todas as observações relativas à A_j e C_ℓ , correspondentes à sub-subparcela perdida;

R é a soma dos quadrados dos totais de cada nível de combinação $A_j C_\ell$, excetuando-se o da sub-subparcela perdida, e:

$$y_3 = \frac{rb(SP) + c(A_j C_\ell) - A_j}{(c-1)(rb-1)}.$$

$$(11) \quad \text{S.Q.Tratamentos (BxC)} = \frac{1}{ra} \left[(y_1 + B_k C_\ell)^2 + S \right] - C -$$

- S.Q.Tratamentos (B) - S.Q.Tratamentos (C)

com:

$$U_{BC} = \frac{(b-1)(c-1)}{rabc} y_1^2 + 2y_1 \frac{bc(B_k C_\ell) - bB_k - cC_\ell + G}{rabc} -$$

$$- \frac{(c-1)(rab-b-a+1)}{rabc} y_2^2 + \frac{(c-1)(rb-1)}{rbc} y_3^2$$

onde:

$B_k C_\ell$ é o total de todas as observações relativas à combinação B_k e C_ℓ , correspondentes à sub-subparcela perdida;

S é a soma dos quadrados dos totais de cada nível da combinação $B_k C_\ell$, excetuando-se aquele da sub-subparcela perdida, e:

$$y_2 = \frac{rab(SP) + bc(B_k C_\ell) + ac(A_j C_\ell) - aA_j - bB_k - cC_\ell + G}{(c-1)(rab-b-a+1)}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \text{S.Q.Tratamentos (AxBxC)} &= \frac{1}{r} \left[(y_1 + A_j B_k C_l)^2 + V \right] - C - \\
 &\quad - \text{S.Q.Trat. (A)} - \text{S.Q.Trat. (B)} - \\
 &\quad - \text{S.Q.Trat. (AxB)} - \text{S.Q.Trat. (AxC)} - \\
 &\quad - \text{S.Q.Trat. (BxC)} - \text{S.Q.Trat. (C)}
 \end{aligned}$$

com a expressão de correção sendo dada por:

$$U_{ABC} = \frac{(c - 1)(rab - a - b + 1)}{rabc} (y_1 - y_2)^2$$

onde:

V é a soma dos quadrados dos totais de cada nível da combinação $A_j B_k C_l$, excetuando-se o da sub-subparcela perdida.

$$(13) \quad \text{S.Q.Total} = y_1^2 + W - C$$

onde:

W é a soma dos quadrados de cada sub-subparcela presente no ensaio.

$$\begin{aligned}
 (14) \quad S.Q. \text{Resíduo } (c) &= S.Q. \text{Total} - S.Q. \text{Subparcelas} - \\
 &\quad - S.Q. \text{Trat. } (C) - S.Q. \text{Trat. } (A \times C) - \\
 &\quad - S.Q. \text{Trat. } (B \times C) - S.Q. \text{Trat. } (A \times B \times C)
 \end{aligned}$$

e neste caso não existe a correção dos casos anteriores.

Assim, conclui PINHO (1973), a correção U_{ABC} será sempre positiva, implicando numa S.Q. tratamentos $(A \times B \times C)$ sempre superestimada, enquanto que as demais correções podem assumir valores tanto positivos quanto negativos, dependendo dos valores estimados para a sub-subparcela.

PINHO (1975) apresentou um estudo sobre componentes de variância nos ensaios em parcelas subdivididas com uma observação perdida. Neste trabalho, determinou os estimadores das variâncias dos diversos contrastes, envolvendo a média de tratamento com observação perdida e comparou esses estimadores com os obtidos por ANDERSON (1946), COCHRAN e COX (1957) e STEEL e TORRIE (1960). Seus resultados foram:

(1) Para duas médias de tratamentos T:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JK} \left[E_a + \frac{(I - 2) E_b}{2I(J - 1)(K - 1)} \right]$$

onde:

J é o número de blocos ;

I é o número de tratamentos primários (T);

K é o número de tratamentos secundários (T');

E_a é o quadrado médio do resíduo (a), e:

E_b é o quadrado médio do resíduo (b).

(2) Para duas médias de tratamentos T' :

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2 E_b}{IJ} \left[1 + \frac{K}{2I(J-1)(K-1)} \right]$$

(3) Para duas médias de T' no mesmo nível de T :

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2E_b}{J} \left[1 + \frac{K}{2(J-1)(K-1)} \right]$$

(4) Para duas médias de T no mesmo nível de T' :

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2 E_a}{JK} + \frac{2 E_b}{JK} \left[(K-1) + \frac{IK^2 - 2}{2I(J-1)(K-1)} \right]$$

GOMES (1976) apresenta também fórmula para a estimativa de uma parcela perdida nos delineamentos em parcelas subdivididas, que é concordante com a citada por COCHRAN e COX (1957).

LITTLE e HILLS (1977) apresentam os mesmos resultados de COCHRAN e COX (1957) e estabelecem relações para a aplicação do teste "t" no confronto de médias de tratamentos (a, b, c).

Variâncias de contrastes entre efeitos de tratamentos são mostradas por SANCHES (1978) para os casos com e sem parcelas perdidas nos ensaios em quadrado latino.

HADDAD (1978) apresentou um caso de perda de uma parcela nos delineamentos em parcelas subdivididas, com K subparcelas e nos casos em que $K \geq 2$. Demonstrou que a soma de quadrados de subtratamentos ajustada é igual àquela obtida usualmente.

SANCHES (1980) complementou o trabalho de HADDAD (1978) deduzindo, além das fórmulas que estimam as perdas, a análise de variância.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. Material

Com o objetivo de ilustrar os resultados obtidos no desenvolvimento teórico deste trabalho serão utilizados dados referentes à determinação do "DEW-LAP" de colmos de cana-de-açúcar de um ensaio sobre a melhor combina-ção entre espaçamentos, variedades e densidades de gemas no plantio. O experimento foi conduzido pela Seção de Mecanização da Estação Regional do IAA/PLANALSUCAR e instalado na Destilaria UBU, em Pernambuco. Nesse experimento foi utilizado o delineamento em parcelas sub-subdivididas, com 4 espaçamentos (1,00 m; 1,20 m; 1,40 m e 1,60 m) dispostos em 4 blocos, constituindo as parcelas. Nas subparcelas foram uti

lizadas 3 variedades de cana-de-açúcar (CB 45-3, CO 997 e RB 72454) e, a nível de sub-subparcelas, 3 densidades de gemas no plantio (12 gemas/m; 15 gemas/m e 18 gemas/m).

3.2. Métodos

3.2.1. Modelo Matemático

Considerando o delineamento em parcelas sub-subdivididas com I tratamentos primários dispostos em J blocos, K tratamentos secundários e L tratamentos terciários, o modelo matemático apropriado ao caso é:

$$x_{ijkl} = m + a_i + r_j + (ar)_{ij} + b_k + (ab)_{ik} + (abr)_{ikj} + c_l + (ac)_{il} + (bc)_{kl} + (abc)_{ikl} + e_{ijkl}$$

onde:

- x_{ijkl} é a j-ésima observação da combinação dos tratamentos $a_i b_k c_l$;
- m é a média geral ;
- a_i é o efeito do tratamento primário i , com $i = 1, 2, \dots, I$;
- r_j é o efeito do bloco j , com $j = 1, 2, \dots, J$;
- $(ar)_{ij}$ é o erro residual a nível de parcelas, admitido aleatório;

- b_k é o efeito do tratamento secundário k , com
 $k = 1, 2, \dots, K$;
- $(ab)_{ik}$ é o efeito da interação do tratamento primário
 i com o tratamento secundário k ;
- $(abr)_{ikj}$ é o erro residual a nível de subparcelas, tam-
 bém admitido aleatório;
- c_ℓ é o efeito do tratamento terciário ℓ , com
 $\ell = 1, 2, \dots, L$;
- $(ac)_{i\ell}$ é o efeito da interação do tratamento primário
 i com o tratamento terciário ℓ ;
- $(bc)_{k\ell}$ é o efeito da interação do tratamento secundá-
 rio k com o tratamento terciário ℓ ;
- $(abc)_{ik\ell}$ é o efeito da interação tripla entre os trata-
 mentos primário i , secundário k e terciário ℓ ,
 e :
- e_{ijkl} é o erro residual a nível de sub-subparcelas,
 também aleatório.

Em todas as deduções será utilizado o mode-
 lo fixo, o qual considera todos os parâmetros como fixos e
 apenas os erros $(ar)_{ij}$, $(abr)_{ikj}$ e e_{ijkl} como aleatórios,
 admitidos com média zero e variâncias σ_{ar}^2 , σ_{abr}^2 e σ_{res}^2 res-
 pectivamente.

O esquema de análise de variância , considerando a perda de uma sub-subparcela é apresentado no Quadro I, a seguir:

QUADRO I - Esquema de Análise de Variância do Delineamento em Parcelas Sub-subdivididas com perda de uma unidade.

Causas de Variação	Graus de Liberdade
Blocos	$J - 1$
Tratamentos (A)	$I - 1$
Resíduo (a)	$(I - 1)(J - 1)$
<hr/>	
Parcelas	$(IJ - 1)$
Tratamentos (B)	$K - 1$
Interação Ax B	$(I - 1)(K - 1)$
Resíduo (b)	$I(J - 1)(K - 1)$
<hr/>	
Subparcelas	$(IJK - 1)$
Tratamentos (C)	$L - 1$
Interação Ax C	$(I - 1)(L - 1)$
Interação Bx C	$(K - 1)(L - 1)$
Interação Ax Bx C	$(I - 1)(K - 1)(L - 1)$
Resíduo (c)	$IK(J - 1)(L - 1) - 1$
<hr/>	
T o t a l	$IJKL - 2$

3.2.2. Decomposição da Soma de Quadrado do Resíduo (c)

A Soma de Quadrado do Resíduo (c) pode ser decomposta em componentes independentes associados a cada nível de combinação de tratamentos $A_i B_k$. Nessas condições a recuperação da informação da sub-subparcela $A_i B_k C_\ell$ do bloco R_j , torna-se viável pela minimização apenas do componente do resíduo (c) relativo ao núcleo $A_i B_k$ que contém a unidade perdida. Isto possibilita a utilização do estimador de uma parcela perdida dos experimentos em blocos casualizados, associando cada combinação $A_i B_k$ à estrutura de um delineamento em blocos.

3.2.3. Variâncias de Contrastes entre Médias, Envolvendo uma Unidade Perdida

Tendo por base o modelo matemático e o estimador da unidade perdida, serão estruturadas as variâncias de contrastes entre médias de tratamentos, envolvendo a sub-subparcela perdida.

Nas deduções apresentadas, não serão levados em conta a média geral e os duplos produtos, uma vez que na elaboração dos contrastes estes componentes se cancelam ou são nulos.

Assim considerar-se-á:

$$\hat{Y} = \hat{m} - \hat{m}_1$$

onde $\hat{m}_1$ é a estimativa da média do tratamento que envolve a sub-subparcela perdida e, ainda:

$$V(\hat{Y}) = E[\hat{Y} - E(\hat{Y})]^2 .$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Decomposição da Soma de Quadrado do Resíduo (c)

Partindo do modelo matemático, representativo de um delineamento em parcelas sub-subdivididas, a nível de cada combinação do tratamento primário A_i com o tratamento B_k tem-se:

INTERAÇÃO TRATAMENTOS $A \times B$	TRATAMENTOS TERCIÁRIOS	BLOCOS/REPETIÇÕES			
		R_1	R_2	...	R_J
$A_i B_k$	C_1	x_{i1k1}	x_{i2k1}	...	x_{iJk1}
	C_2	x_{i1k2}	x_{i2k2}		x_{iJk2}
	...	...	...	...	...
	C_L	x_{i1kL}	x_{i2kL}	...	x_{iJkL}

Esta estrutura pode ser associada a de um experimento em blocos casualizados com L tratamentos e J blocos. Da análise de variância virá:

$$S.Q.Resíduo_{ik} = [S.Q.Total - S.Q.Blocos - S.Q.Tratamentos (C)]_{ik}$$

mas:

$$S.Q.Total = \sum_{j, \ell} x_{ijk\ell}^2 - C_1$$

onde:

$$C_1 = \frac{1}{JL} x_{i.k.}^2$$

$$S.Q.Blocos = \frac{1}{J} \sum_{\ell} x_{i.k\ell}^2 - C_1$$

$$S.Q.Tratamentos (C) = \frac{1}{L} \sum_j x_{ijk.}^2 - C_1$$

Portanto:

$$S.Q.Resíduo_{ik} = \sum_{j, \ell} x_{ijk\ell}^2 - \frac{1}{J} \sum_{\ell} x_{i.k\ell}^2 - \frac{1}{L} \sum_j x_{ijk.}^2 + \frac{1}{JL} x_{i.k.}^2 \quad (1)$$

Por outro lado, considerando o modelo completo de parcelas sub-subdivididas, a Soma de Quadrado do Resíduo (c) fica:

$$\begin{aligned}
 \text{S.Q.Resíduo (c)} &= \text{S.Q.Total} - \text{S.Q.Subparcelas} - \\
 &\quad - \text{S.Q.Tratamentos (C)} - \text{S.Q.Interação Ax}C - \\
 &\quad - \text{S.Q.Interação BxC} - \text{S.Q.Interação Ax}B\text{xC} \quad (2)
 \end{aligned}$$

mas:

$$\begin{aligned}
 \text{S.Q.Interação Ax}B\text{xC} &= \text{S.Q.A,B,C} - \text{S.Q.Tratamentos (A)} - \\
 &\quad - \text{S.Q.Tratamentos (B)} - \text{S.Q.Tratamentos (C)} - \\
 &\quad - \text{S.Q.Interação Ax}B - \text{S.Q.Interação Ax}C - \\
 &\quad - \text{S.Q.Interação BxC}
 \end{aligned}$$

Substituindo em (2), e, sabendo que:

$$\begin{aligned}
 \text{S.Q.A,B} &= \text{S.Q.Tratamentos (A)} + \text{S.Q.Tratamentos (B)} + \\
 &\quad + \text{S.Q.Interação Ax}B \quad ,
 \end{aligned}$$

virã:

$$\begin{aligned}
 \text{S.Q.Resíduo (c)} &= \text{S.Q.Total} - \text{S.Q.Subparcelas} - \text{S.Q.A,B,C} + \\
 &\quad + \text{S.Q.A,B} \quad ,
 \end{aligned}$$

onde:

$$S.Q.Total = \sum_{ijkl} x_{ijkl}^2 - C$$

$$S.Q.Subparcelas = \frac{1}{L} \sum_{ijk} x_{ijk}^2 - C$$

$$S.Q.A,B,C = \frac{1}{J} \sum_{ikl} x_{i.kl}^2 - C$$

$$S.Q.A,B = \frac{1}{JL} \sum_{ik} x_{i.k}^2 - C$$

Portanto:

$$S.Q.Resíduo (c) = \sum_{ijkl} x_{ijkl}^2 - \frac{1}{L} \sum_{ijk} x_{ijk}^2 - \frac{1}{J} \sum_{ikl} x_{i.kl}^2 + \frac{1}{JL} \sum_{ik} x_{i.k}^2 .$$

Colocando $\sum_{ik}$ em evidência fica:

$$S.Q.Resíduo (c) = \sum_{ik} \left(\sum_{jl} x_{ijkl}^2 - \frac{1}{L} \sum_j x_{ijk}^2 - \frac{1}{J} \sum_l x_{i.kl}^2 + \frac{1}{JL} x_{i.k}^2 \right) \quad (3)$$

Identificando o conteúdo do parênteses com

(1), tem-se:

$$S.Q.Resíduo (c) = \sum_{ik} (S.Q.Resíduo)_{ik} = \sum_{ik} [S.Q.Trat.(C) \times \text{Blocos}]_{ik}$$

Em decorrência da independência dos componentes do Resíduo (c), associados aos núcleos $A_i B_k$, a recuperação da informação de uma sub-subparcela perdida é feita levando-se em conta exclusivamente o núcleo $A_i B_k$ afetado e utilizando o estimador de uma parcela perdida do delineamento em blocos casualizados. Este procedimento viabiliza a estimação de diversas unidades perdidas em núcleos $A_i B_k$ distintos, considerando cada caso independentemente.

4.2. Esperança Matemática das Somas de Quadrados e Quadrados Médios

A título de melhor visualização do desenvolvimento teórico, nas determinações das esperanças das somas de quadrados considerar-se-á a perda da sub-subparcela referente à combinação dos tratamentos $A_1 B_1 C_1$ do bloco R_1 .

Assim, segundo PINHO (1973), a estimativa do valor de apenas uma sub-subparcela perdida pode ser calculado através da seguinte expressão geral:

$$y = \frac{J(A_i B_k R_j) + L(A_i B_k C_\ell) - A_i B_k}{(J - 1)(L - 1)} \quad (1)$$

onde:

y é o valor a ser estimado;

J é o número de blocos;

L é o número de tratamentos terciários (C);

$A_i B_k R_j$ é o total de todas as sub-subparcelas presentes na subparcela onde se perdeu a unidade;

$A_i B_k C_\ell$ é o total de todas as sub-subparcelas correspondentes à combinação dos tratamentos $A_i B_k C_\ell$ relativos à sub-subparcela perdida.

$A_i B_k$ é o total de todas as sub-subparcelas presentes na combinação dos tratamentos $A_i B_k$ onde ocorreu a perda da unidade.

Ilustrando o caso suposto, na combinação

$A_1 B_1$, associada a (1), tem-se:

TRATAMENTOS TERCIÁRIOS	BLOCOS			
	R_1	R_2	...	R_J
C_1	Y	$A_1 B_1 C_1$		
C_2	$A_1 B_1 R_1$	R		
...				
C_L				

de tal forma que:

$$A_{11} B_{11} = A_{11} B_{11} R_{11} + A_{11} B_{11} C_{11} + R \quad (2)$$

onde:

R é o total das observações presentes na combinação $A_{11} B_{11}$ exceto as relativas à $A_{11} B_{11} C_{11}$ e à $A_{11} B_{11} R_{11}$.

Substituindo (2) em (1), para este caso tem-se:

$$y = \frac{(J - 1)A_{11} B_{11} R_{11} + (L - 1)A_{11} B_{11} C_{11} - R}{(J - 1)(L - 1)} \quad (3)$$

Expressando os valores de $A_{11} B_{11} R_{11}$, $A_{11} B_{11} C_{11}$ e R em função do modelo matemático virá:

$$\begin{aligned} A_{11} B_{11} R_{11} &= \sum_{\ell=2}^L x_{111\ell} = (L-1)a_{11} + (L-1)r_{11} + (L-1)(ar)_{11} + (L-1)b_{11} + \\ &+ (L-1)(ab)_{11} + (L-1)(abr)_{111} + \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} + \\ &+ \sum_{\ell=1}^L (ac)_{1\ell} + \sum_{\ell=1}^L (bc)_{1\ell} + \sum_{\ell=1}^L (abc)_{11\ell} + \\ &+ \sum_{\ell=2}^L e_{111\ell} - c_{11} - (ac)_{11} - (bc)_{11} - \\ &- (abc)_{111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 B_1 C_1 = \sum_{j=2}^J x_{1j11} &= (J-1)a_1 + \sum_{j=1}^J r_j + \sum_{j=2}^J (ar)_{1j} + (J-1)b_1 + \\
&+ (J-1)(ab)_{11} + \sum_{j=2}^J (abr)_{11j} + (J-1)c_1 + \\
&+ (J-1)(ac)_{11} + (J-1)(bc)_{11} + \\
&+ (J-1)(abc)_{111} + \sum_{j=2}^J e_{1j11} - r_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = \sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L x_{1j1\ell} &= (J-1)(L-1)a_1 + (L-1) \sum_{j=1}^J r_j + \\
&+ (L-1) \sum_{j=2}^J (ar)_{1j} + (J-1)(L-1)b_1 + \\
&+ (J-1)(L-1)(ab)_{11} + (L-1) \sum_{j=2}^J (abr)_{11j} + \\
&+ (J-1) \sum_{\ell=1}^L c_\ell + (J-1) \sum_{\ell=1}^L (ac)_{1\ell} + \\
&+ (J-1) \sum_{\ell=1}^L (bc)_{1\ell} + (J-1) \sum_{\ell=1}^L (abc)_{11\ell} + \\
&+ \sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell} - (L-1)r_1 - (J-1)c_1 - \\
&- (J-1)(ac)_{11} - (J-1)(bc)_{11} - (J-1)(abc)_{111}
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em (3), aplicando as seguintes restrições:

$$\sum_i a_i = 0 ; \sum_j r_j = 0 ; \sum_k b_k = 0 ; \sum_i (ab)_{ik} = \sum_k (ab)_{ik} = \sum_{ik} (ab)_{ik} = 0 ; \sum_\ell c_\ell = 0$$

$$\sum_i (ac)_{i\ell} = \sum_\ell (ac)_{i\ell} = \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell} = 0 ; \sum_k (bc)_{k\ell} = \sum_\ell (bc)_{k\ell} = \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_i (abc)_{ik\ell} &= \sum_k (abc)_{ik\ell} = \sum_\ell (abc)_{ik\ell} = \sum_{ik} (abc)_{ik\ell} = \sum_{i\ell} (abc)_{ik\ell} = \sum_{k\ell} (abc)_{ik\ell} = \\ &= \sum_{ik\ell} (abc)_{ik\ell} = 0 \end{aligned}$$

e simplificando fica:

$$\begin{aligned} y = & a_1 + r_1 + (ar)_{11} + b_1 + (ab)_{11} + (abr)_{111} + c_1 + (ac)_{11} + (bc)_{11} + \\ & + (abc)_{111} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \end{aligned} \quad (4)$$

onde:

$\sum_{j=2}^J e_{1j11}$ é a soma dos (J-1) erros associados às sub-subparcelas presentes na combinação de tratamentos $A_1 B_1 C_1$;

$\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}$ é a soma dos (L-1) erros associados às sub-subparcelas presentes na subparcela $A_1 B_1 R_1$,
e :

$\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}$ é a soma dos $(J-1)(L-1)$ erros associados às subparcelas presentes no núcleo $A_1 B_1$ mas que não receberam o tratamento C_1 e não estão no bloco R_1 .

As expressões correspondentes às esperanças matemáticas das Somas de Quadrados e Quadrados Médios das causas de variação foram as que se seguem.

4.2.1. Total

$$E(S.Q.Total) = E\left(\sum_{ijk\ell} x_{ijk\ell}^2 + y^2\right) - E(C) \quad (I)$$

onde:

$\sum_{ijk\ell} x_{ijk\ell}^2$ representa a soma de quadrado de todas as sub-subparcelas do ensaio, exceto daquela referente à perda.

Assim tem-se:

$$i) \quad E(C) = \frac{E\left(\sum_{ijk\ell} x_{ijk\ell} + y\right)^2}{IJKL}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \sum'_{ijkl} x_{ijkl} + y = & JKL \sum_i a_i + IKL \sum_j r_j + KL \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJL \sum_k b_k + \\
 & + JL \sum_{ik} (ab)_{ik} + L \sum_{ijk} (abr)_{ijk} + IJK \sum_{\ell} c_{\ell} + \\
 & + JK \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell} + IJ \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell} + J \sum_{ik\ell} (abc)_{ik\ell} + \\
 & + \sum'_{ijkl} e_{ijkl} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \\
 & - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \quad (5)
 \end{aligned}$$

onde:

$\sum'_{ijkl} e_{ijkl}$ representa a soma dos $(IJKL - 1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes. Mas esses erros podem ser decompostos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \sum'_{ijkl} e_{ijkl} = & \sum''_{ijkl} e_{ijkl} + \sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell} + \sum_{j=2}^J e_{1j11} + \\
 & + \sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}
 \end{aligned}$$

e ainda:

$\sum_{ijkl} e_{ijkl}$ é a soma dos $JL(IK - 1)$ erros associados aos demais núcleos $A_i B_k$ onde não houve perda de sub-subparcelas.

Substituindo esses erros na equação (5), aplicando a esperança e impondo as restrições tem-se:

$$E\left(\sum_{ijkl} x_{ijkl} + y\right)^2 = LJK^2L^2\sigma_{ar}^2 + LJKL^2\sigma_{abr}^2 + \frac{L^2}{L-1}\sigma^2 + \frac{J^2}{J-1}\sigma^2 + \\ + \frac{[(J-1)(L-1)-1]^2}{(J-1)(L-1)}\sigma^2 + JL(IK-1)\sigma^2$$

pois:

$$E(a_i^2) = a_i^2 ; \quad E(r_j^2) = r_j^2 ; \quad E(b_k^2) = b_k^2 ; \quad E(ab)_{ik}^2 = (ab)_{ik}^2 ;$$

$$E(c_\ell^2) = c_\ell^2 ; \quad E(ac)_{i\ell}^2 = (ac)_{i\ell}^2 ; \quad E(bc)_{k\ell}^2 = (bc)_{k\ell}^2 ;$$

$$E(abc)_{ik\ell}^2 = (abc)_{ik\ell}^2 ; \quad E(ar)_{ij}^2 = \sigma_{ar}^2 ; \quad E(abr)_{ikj}^2 = \sigma_{abr}^2 ;$$

$$E(e)_{ijkl}^2 = \sigma^2$$

Assim:

$$\frac{E(\sum'_{ijkl} x_{ijkl} + y)^2}{IJKL} = KL\sigma_{ar}^2 + L\sigma_{abr}^2 + \frac{JL + IJKL(J-1)(L-1)}{IJKL(J-1)(L-1)} \sigma^2$$

ou ainda:

$$E(C) = KL\sigma_{ar}^2 + L\sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)}\right] \sigma^2 \quad (6)$$

$$ii) \quad E(\sum'_{ijkl} x_{ijkl}^2) + E(y^2) = \sum'_{ijkl} [E(x_{ijkl})^2] + E(y^2)$$

Como:

$$E(y^2) = a_1^2 + r_1^2 + \sigma_{ar}^2 + b_1^2 + (ab)_{11}^2 + \sigma_{abr}^2 + c_1^2 + (ac)_{11}^2 + \\ + (bc)_{11}^2 + (abc)_{111}^2 + \frac{J+L-1}{(J-1)(L-1)} \sigma^2$$

e:

$$E(x_{ijkl})^2 = E[a_i + r_j + (ar)_{ij} + b_k + (ab)_{ik} + (abr)_{ikj} + c_l + \\ + (ac)_{il} + (bc)_{kl} + (abc)_{ikl} + e_{ijkl}]^2$$

Desenvolvendo o quadrado, aplicando o somatório e acrescentando $E(y^2)$ fica:

$$\begin{aligned}
\sum_{ijk\ell} [E(x_{ijk\ell})^2] + E(y^2) = & JKL \sum_i a_i^2 + IKL \sum_j r_j^2 + IJKL \sigma_{ar}^2 + IJL \sum_k b_k^2 + \\
& + JL \sum_{ik} (ab)_{ik}^2 + IJKL \sigma_{abr}^2 + IJK \sum_\ell c_\ell^2 + \\
& + JK \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell}^2 + IJ \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell}^2 + J \sum_{ik\ell} (abc)_{ik\ell}^2 + \\
& + \left[(IJKL - 1) + \frac{J + L - 1}{(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (7)
\end{aligned}$$

Substituindo (6) e (7) em (I) tem-se:

$$\begin{aligned}
E(S.Q.Total) = & JKL \sum_i a_i^2 + IKL \sum_j r_j^2 + KL(IJ - 1) \sigma_{ar}^2 + IJL \sum_k b_k^2 + \\
& + JL \sum_{ik} (ab)_{ik}^2 + L(IJK - 1) \sigma_{abr}^2 + IJK \sum_\ell c_\ell^2 + JK \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell}^2 + \\
& + IJ \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell}^2 + J \sum_{ik\ell} (abc)_{ik\ell}^2 + \\
& + \left[(IJKL - 3) + \frac{(IJKL - 1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2
\end{aligned}$$

4.2.2. Blocos

$$E(S.Q.Blocos) = \frac{1}{IKL} E\left(\sum_{j=2}^J R_j^2\right) + \frac{1}{IKL} E(R_1 + y)^2 - E(C) \quad (II)$$

onde:

R_j é o total de todas as sub-subparcelas do bloco j , exceto daquele onde houve a perda da observação, e:

R_1 é o total de todas as sub-subparcelas presentes no bloco 1 onde ocorreu a perda.

Assim,

$$\begin{aligned} R_j = \sum_{ikl} x_{ijkl} &= KL \sum_i a_i + IKL r_j + KL \sum_i (ar)_{ij} + IL \sum_k b_k + L \sum_{ik} (ab)_{ik} + \\ &+ L \sum_{ik} (abr)_{ikj} + IK \sum_l c_l + K \sum_{il} (ac)_{il} + I \sum_{kl} (bc)_{kl} + \\ &+ \sum_{ikl} (abc)_{ikl} + \sum_{ikl} e_{ijkl} . \end{aligned}$$

Elevando essa expressão ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições já citadas anteriormente, tem-se:

$$E(R_j^2) = I^2 K^2 L^2 r_j^2 + IK^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + IKL^2 \sigma_{abr}^2 + IKL \sigma^2$$

Desenvolvendo o somatório em relação a j ,
virá:

$$\frac{1}{IKL} \sum_{j=2}^J [E(R_j^2)] = IKL \sum_{j=2}^J r_j^2 + KL(J-1)\sigma_{ar}^2 +$$

$$+ L(J-1)\sigma_{abr}^2 + (J-1)\sigma^2. \quad (8)$$

Para o bloco onde houve a perda de informação tem-se:

$$R_1 + y = KL \sum_i a_i + IKL r_1 + KL \sum_i (ar)_{i1} + IL \sum_k b_k + L \sum_{ik} (ab)_{ik} +$$

$$+ L \sum_{ik} (abr)_{ik1} + IK \sum_l c_l + K \sum_{il} (ac)_{il} + I \sum_{kl} (bc)_{kl} +$$

$$+ \sum_{ikl} (abc)_{ikl} + \sum_{ikl} e_{ikl} + \frac{\sum_{l=2}^L e_{111l}}{L-1} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} -$$

$$- \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{l=2}^L e_{1j1l}}{(J-1)(L-1)}$$

onde:

$\sum_{ikl} e_{ikl}$ é a soma dos $(IKL-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no bloco onde o correu a perda da unidade, e que pode ser decomposto em:

$$\sum_{ikl} e_{ikl} = \sum'_{ikl} e_{ikl} + \sum_{kl} e_{ikl} + \sum_{l=2}^L e_{111l}$$

onde:

$\sum'_{ikl} e_{ikl}$ é a soma dos $KL(I-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no bloco onde o correu a perda, exceto os associados com o tratamento A_1 relativo à perda;

$\sum_{kl} e_{ikl}$ é a soma dos $L(K-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes na parcela onde ocorreu a perda, exceto os referentes à subparcela com a observação perdida.

Substituindo esses erros, elevando ao quadrado, aplicando a esperança e considerando as restrições, fica:

$$\begin{aligned} E(R_1 + y)^2 &= I^2 K^2 L^2 r_1^2 + IK^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + IKL^2 \sigma_{abr}^2 + \frac{L^2}{L-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{J-1} + \\ &+ L(K-1)\sigma^2 + KL(I-1)\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Simplificando virá:

$$\frac{E(R_1 + y)^2}{IKL} = IKL r_1^2 + KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{J}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

(9)

Substituindo (6), (8) e (9) em (II) tem-se:

$$\begin{aligned}
 E(S.Q.Blocos) = & IKL \sum_j r_j^2 + JKL \sigma_{ar}^2 + JL \sigma_{abr}^2 + \\
 & + \left[J + \frac{J}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 - KL \sigma_{ar}^2 - L \sigma_{abr}^2 - \\
 & - \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 E(S.Q.Blocos) = & IKL \sum_j r_j^2 + KL(J-1) \sigma_{ar}^2 + L(J-1) \sigma_{abr}^2 + \\
 & + \left[(J-1) + \frac{(J-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Como ao componente "blocos" estão associados $J-1$ graus de liberdade, tem-se:

$$E(Q.M.Blocos) = \frac{E(S.Q.Blocos)}{J-1} ,$$

ou ainda:

$$E(Q.M.Blocos) = \frac{IKL}{J-1} \sum_j r_j^2 + KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

4.2.3. Tratamentos (A)

$$E[\text{S.Q.Tratamentos (A)}] = \frac{1}{JKL} E\left(\sum_{i=2}^I A_i^2\right) + \frac{1}{JKL} E(A_1 + y)^2 - E(C) \quad (\text{III})$$

onde:

A_i é o total de todas as sub-subparcelas que compõem o tratamento A_i , exceto aquele onde houve a perda da informação, e:

A_1 é o total de todas as sub-subparcelas do tratamento A_1 onde ocorreu a perda.

Como,

$$\begin{aligned} A_i = \sum_{jkl} x_{ijkl} &= JKL a_i + KL \sum_j r_j + KL \sum_j (ar)_{ij} + JL \sum_k b_k + \\ &+ JL \sum_k (ab)_{ik} + L \sum_{jk} (abr)_{ikj} + JK \sum_l c_l + \\ &+ JK \sum_l (ac)_{il} + J \sum_{kl} (bc)_{kl} + J \sum_{kl} (abc)_{ikl} + \\ &+ \sum_{jkl} e_{ijkl} \end{aligned}$$

elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições, fica:

$$E(A_i^2) = J^2 K^2 L^2 a_i^2 + JK^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + JKL^2 \sigma_{abr}^2 + JKL \sigma^2$$

Desenvolvendo virá:

$$\frac{1}{JKL} \sum_{i=2}^I [E(A_i^2)] = JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1)\sigma_{ar}^2 + \\ + L(I-1)\sigma_{abr}^2 + (I-1)\sigma^2 \quad (10)$$

Para o tratamento onde ocorreu a perda da sub-subparcela tem-se:

$$A_1 + y = JKL a_1 + KL \sum_j r_j + KL \sum_j (ar)_{1j} + JL \sum_k b_k + \\ + JL \sum_k (ab)_{1k} + L \sum_{jk} (abr)_{1kj} + JK \sum_{\ell} c_{\ell} + \\ + JK \sum_{\ell} (ac)_{1\ell} + J \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell} + J \sum_{k\ell} (abc)_{1k\ell} + \\ + \sum_{jkl} e_{1jkl} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \\ - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)}$$

onde:

$\sum_{jkl} e_{1jkl}$ é a soma dos $(JKL-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no tratamento A_1 , onde ocorreu a perda da observação. Esse componente pode ser desdobrado em:

$$\sum_{jkl} e_{1jkl} = \sum'_{jkl} e_{1jkl} + \sum_{jl} e_{1jkl} + \sum_{l=2}^L e_{111l}$$

onde:

$\sum'_{jkl} e_{1jkl}$ é a soma dos $JL(K-1)$ erros associados às sub-subparcelas que estão no tratamento A_1 mas não receberam o tratamento B_1 correspondente à perda.

$\sum_{jl} e_{1jkl}$ é a soma dos $L(J-1)$ erros associados às sub-subparcelas que estão nas demais subparcelas, que não perderam a observação, do núcleo $A_1 B_1$.

E assim,

$$\begin{aligned} E(A_1 + y)^2 = & J^2 K^2 L^2 a_1^2 + JK^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + JKL^2 \sigma_{abr}^2 + \frac{L^2}{L-1} \sigma^2 + \\ & + \frac{\sigma^2}{J-1} + JL(K-1) \sigma^2 + L(J-1) \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\frac{E(A_1 + y)^2}{JKL} = JKL a_1^2 + KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{I}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

(11)

Pela substituição de (6), (10) e (11) em (III) virã:

$$E[S.Q.Tratamentos (A)] = JKL \sum_i a_i^2 + KL(I-1)\sigma_{ar}^2 + L(I-1)\sigma_{abr}^2 + \left[(I-1) + \frac{(I-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e,

$$E[Q.M.Tratamentos (A)] = \frac{E[S.Q.Tratamento (A)]}{I - 1}$$

ou seja:

$$E[Q.M.Tratamentos (A)] = \frac{JKL}{I-1} \sum_i a_i^2 + KL\sigma_{ar}^2 + L\sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

4.2.4. Parcelas

$$E(S.Q.Parcelas) = \frac{1}{KL} E \left[\sum_{ij} (A_i R_j)^2 \right] + \frac{1}{KL} E(A_1 R_1 + y)^2 - E(C) \quad (IV)$$

onde:

$A_i R_j$ é o total de todas as sub-subparcelas que compõem as parcelas $A_i R_j$ não afetadas pela perda de observação

$A_{11} R_{11}$ é o total de todas as sub-subparcelas presentes na parcela onde houve a perda de informação.

A expressão do modelo que representa cada parcela onde não ocorreu perda é dada por:

$$\begin{aligned} A_i R_j = \sum_{kl} x_{ijkl} = & KL a_i + KL r_j + KL(ar)_{ij} + L \sum_k b_k + \\ & + L \sum_k (ab)_{ik} + L \sum_k (abr)_{ikj} + K \sum_l c_l + \\ & + K \sum_l (ac)_{il} + \sum_{kl} (bc)_{kl} + \sum_{kl} (abc)_{ikl} + \\ & + \sum_{kl} e_{ijkl} . \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições, tem-se:

$$E(A_i R_j)^2 = K^2 L^2 a_i^2 + K^2 L^2 r_j^2 + K^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + KL^2 \sigma_{abr}^2 + KL \sigma^2 .$$

Desenvolvendo o somatório em relação a i e j , virá:

a) para as parcelas independentes de A_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{KL} \sum_{i=2}^I \sum_j [E(A_i R_j)^2] &= JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1) \sum_j r_j^2 + \\ &+ JKL(I-1) \sigma_{ar}^2 + JL(I-1) \sigma_{abr}^2 + \\ &+ J(I-1) \sigma^2 \end{aligned} \quad (a)$$

b) para as parcelas relativas à A_1 , exceto aquela associada à perda da unidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{KL} \sum_{j=2}^J [E(A_1 R_j)^2] &= KL(J-1) a_1^2 + KL \sum_{j=2}^J r_j^2 + KL(J-1) \sigma_{ar}^2 + \\ &+ L(J-1) \sigma_{abr}^2 + (J-1) \sigma^2 \end{aligned} \quad (b)$$

Para a parcela onde ocorreu a perda da observação fica:

$$\begin{aligned} A_{11} R_1 + y &= KL a_1 + KL r_1 + KL(ar)_{11} + L \sum_k b_k + L \sum_k (ab)_{1k} + L \sum_k (abr)_{1k1} + \\ &+ K \sum_\ell c_\ell + K \sum_\ell (ac)_{1\ell} + \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell} + \sum_{k\ell} (abc)_{1k\ell} + \sum_{k\ell} e_{11k\ell} + \\ &+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{11\ell\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

onde:

$\sum_{k\ell} e_{11k\ell}$ é a soma dos $(KL-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes na parcela onde ocorreu a perda, e que pode ser decomposto em:

$$\sum_{k\ell} e_{11k\ell} = \sum_{k\ell} e_{11k\ell} + \sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}.$$

Substituindo, elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições anteriores, virá:

$$\begin{aligned} E(A_{11} R_{11} + y)^2 &= K^2 L^2 a_1^2 + K^2 L^2 r_1^2 + K^2 L^2 \sigma_{ar}^2 + KL^2 \sigma_{abr}^2 + \\ &+ \frac{L^2}{L-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{J-1} + L(K-1) \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{E(A_{11} R_{11} + y)^2}{KL} &= KL a_1^2 + KL r_1^2 + KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \\ &+ \left[1 + \frac{IJ}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Substituindo (6), (a), (b) e (12) em (IV),
virã:

$$E(S.Q.Parcelas) = JKL \sum_i a_i^2 + IKL \sum_j r_j^2 + KL(IJ-1)\sigma_{ar}^2 + \\ + L(IJ-1)\sigma_{abr}^2 + \left[(IJ-1) + \frac{(IJ-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

4.2.5. Resíduo (a)

$$E[S.Q.Resíduo (a)] = E(S.Q.Parcelas) - E(S.Q.Blocos) - \\ - E[S.Q.Tratamentos (A)] \quad (V)$$

Substituindo as expressões resultantes de
(IV), (II) e (III), respectivamente, em (V), virã:

$$E[S.Q.Resíduo (a)] = KL(I-1)(J-1)\sigma_{ar}^2 + L(I-1)(J-1)\sigma_{abr}^2 + \\ + \left[(I-1)(J-1) + \frac{(I-1)(J-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e então:

$$E[Q.M.Resíduo (a)] = \frac{E[S.Q.Resíduo (a)]}{(I-1)(J-1)}$$

ou seja:

$$E[\text{Q.M.Resíduo (a)}] = K L \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

Como se observa, esta expressão é idêntica àquela da esperança da correção (6) apresentada anteriormente.

4.2.6. Tratamentos (B)

$$E[\text{S.Q.Tratamentos (B)}] = \frac{1}{IJL} E\left(\sum_{k=2}^K B_k^2\right) + \frac{1}{IJL} E(B_1 + y)^2 - E(C) \quad (\text{VI})$$

onde:

B_k é a soma de todas as sub-subparcelas que compõem o total de cada tratamento B_k , exceto aquele onde houve a perda da observação, e:

B_1 é a soma de todas as sub-subparcelas presentes no tratamento B_1 que perdeu a sub-subparcela.

Mas:

$$\begin{aligned}
 B_k = \sum_{ij\ell} x_{ijk\ell} &= JL \sum_i a_i + IL \sum_j r_j + L \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJL b_k + \\
 &+ JL \sum_i (ab)_{ik} + L \sum_{ij} (abr)_{ikj} + IJ \sum_{\ell} c_{\ell} + \\
 &+ J \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell} + IJ \sum_{\ell} (bc)_{k\ell} + \\
 &+ J \sum_{i\ell} (abc)_{ik\ell} + \sum_{ij\ell} e_{ijk\ell} .
 \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições fica:

$$E(B_k^2) = IJL^2 \sigma_{ar}^2 + I^2 J^2 L^2 b_k^2 + IJL^2 \sigma_{abr}^2 + IJL \sigma^2 .$$

Desenvolvendo virá:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{IJL} \sum_{k=2}^K [E(B_k^2)] &= L(K-1) \sigma_{ar}^2 + IJL \sum_{k=2}^K b_k^2 + L(K-1) \sigma_{abr}^2 + \\
 &+ (K-1) \sigma^2 \quad (13)
 \end{aligned}$$

Para o tratamento B_1 com a sub-subparcela perdida, tem-se:

$$\begin{aligned}
B_1 + y = & JL \sum_i a_i + IL \sum_j r_j + L \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJL b_1 + \\
& + JL \sum_i (ab)_{i1} + L \sum_{ij} (abr)_{ij} + IJ \sum_{\ell} c_{\ell} + J \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell} + \\
& + IJ \sum_{\ell} (bc)_{1\ell} + J \sum_{i\ell} (abc)_{i1\ell} + \sum_{ij\ell} e_{ij1\ell} + \\
& + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

onde:

$\sum_{ij\ell} e_{ij1\ell}$ é a soma dos $(IJL-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no tratamento B_1 onde ocorreu a perda da observação. Esse componente pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\sum_{ij\ell} e_{ij1\ell} = \sum'_{ij\ell} e_{ij1\ell} + \sum_{j\ell} e_{ij1\ell} + \sum_j e_{1j11}$$

e ainda:

$\sum'_{ij\ell} e_{ij1\ell}$ é a soma dos $JL(I-1)$ erros associados às sub-subparcelas dos núcleos $A_1 B_k$, relativos à perda da observação, mas não estão no núcleo $A_1 B_1$ da ocorrência de perda, e:

$\sum_{j \neq l} e_{ijl}$ é a soma dos $J(L-1)$ erros associados às sub-subparcelas do núcleo $A_1 B_1$, mas não são pertencentes ao tratamento C_1 onde ocorreu a perda.

Substituindo esses somatórios, elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições, fica:

$$E(B_1 + y)^2 = I^2 J^2 L^2 b_1^2 + I J L^2 \sigma_{ar}^2 + I J L^2 \sigma_{abr}^2 + J L (I-1) \sigma^2 + \\ + \frac{J^2}{J-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + J (L-1) \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}$$

e daí:

$$\frac{E(B_1 + y)^2}{I J L} = I J L b_1^2 + L \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{K}{I K (J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

(14)

Substituindo (6), (13) e (14) em (VI), tem-se:

$$\begin{aligned}
E[\text{S.Q.Tratamentos (B)}] &= IJL \sum_k b_k^2 + KL \sigma_{ar}^2 + KL \sigma_{abr}^2 + \\
&+ \left[K + \frac{K}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 - KL \sigma_{ar}^2 - \\
&- L \sigma_{abr}^2 - \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
E[\text{S.Q.Tratamentos (B)}] &= IJL \sum_k b_k^2 + L(K-1) \sigma_{abr}^2 + \\
&+ \left[(K-1) + \frac{(K-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 ,
\end{aligned}$$

e daí obtém-se:

$$E[\text{Q.M.Tratamentos (B)}] = \frac{E[\text{S.Q.Tratamentos (B)}]}{K-1}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
E[\text{Q.M.Tratamentos (B)}] &= \frac{IJL}{K-1} \sum_k b_k^2 + L \sigma_{abr}^2 + \\
&+ \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2
\end{aligned}$$

4.2.7. Interação de Tratamentos (AxB)

$$\begin{aligned}
E(\text{S.Q. Interação AxB}) &= \frac{1}{JL} E \left[\sum_{ik} (A_i B_k)^2 \right] + \frac{1}{JL} E(A_1 B_1 + y)^2 - \\
&- E(C) - E[\text{S.Q. Tratamentos (A)}] - \\
&- E[\text{S.Q. Tratamentos (B)}] \quad (\text{VII})
\end{aligned}$$

onde:

$A_i B_k$ é o total de todas as sub-subparcelas que compõem cada núcleo $A_i B_k$ onde não houve a perda da observação, e:

$A_1 B_1$ é o total de todas as sub-subparcelas presentes no núcleo $A_1 B_1$ onde houve a perda.

A representação, através do modelo matemático, de cada núcleo $A_i B_k$, onde não houve perda de informação, é a seguinte:

$$\begin{aligned}
A_i B_k &= \sum_{j\ell} x_{ijk\ell} = JL a_i + L \sum_j r_j + L \sum_j (ar)_{ij} + JL b_k + \\
&+ JL (ab)_{ik} + L \sum_j (abr)_{ikj} + J \sum_\ell c_\ell + \\
&+ J \sum_\ell (ac)_{i\ell} + J \sum_\ell (bc)_{k\ell} + J \sum_\ell (abc)_{ik\ell} + \\
&+ \sum_{j\ell} e_{ijk\ell}
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições fica:

$$E(A_i B_k)^2 = J^2 L^2 a_i^2 + J L^2 \sigma_{ar}^2 + J^2 L^2 b_k^2 + J^2 L^2 (ab)_{ik}^2 + J L^2 \sigma_{abr}^2 + J L \sigma^2$$

Desenvolvendo em relação a i e k tem-se:

c) para os núcleos $A_i B_k$ independentes da perda de unidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{JL} \sum_{i=2}^I \sum_k [E(A_i B_k)^2] &= JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1) \sigma_{ar}^2 + JL(I-1) \sum_k b_k^2 + \\ &+ JL \sum_{i=2}^I \sum_k (ab)_{ik}^2 + KL(I-1) \sigma_{abr}^2 + \\ &+ K(I-1) \sigma^2 \end{aligned} \quad (c)$$

d) para os núcleos $A_i B_k$ independentes da perda da informação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{JL} \sum_{k=2}^K [E(A_i B_k)^2] &= JL(K-1) a_1^2 + L(K-1) \sigma_{ar}^2 + JL \sum_{k=2}^K b_k^2 + \\ &+ JL \sum_{k=2}^K (ab)_{1k}^2 + L(K-1) \sigma_{abr}^2 + (K-1) \sigma^2 \end{aligned} \quad (d)$$

Para o núcleo $A B_1$ onde ocorreu a perda tem-

-se:

$$\begin{aligned}
 A B_1 + \gamma = & JL a_1 + L \sum_j r_j + L \sum_j (ar)_{1j} + JL b_1 + JL(ab)_{11} + \\
 & + L \sum_j (abr)_{11j} + J \sum_\ell c_\ell + J \sum_\ell (ac)_{1\ell} + J \sum_\ell (bc)_{1\ell} + \\
 & + J \sum_\ell (abc)_{11\ell} + \sum_{j\ell} e_{1j1\ell} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \\
 & + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)}
 \end{aligned}$$

onde:

$\sum_{j\ell} e_{1j1\ell}$ é a soma dos $(JL-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no núcleo $A B_1$ onde ocorreu a perda. Esses erros podem se decompor em:

$$\sum_{j\ell} e_{1j1\ell} = \sum_{j\ell} e''_{1j1\ell} + \sum_{j=2}^J e_{1j11}$$

e,

$\sum_{j\ell} e''_{1j1\ell}$ é a soma dos $J(L-1)$ erros associados às sub-subparcelas presentes no núcleo $A B_1$ onde ocorreu a perda mas não estão nas unidades presentes relativas ao tratamento C_1 desse núcleo.

Pela substituição desses somatórios e repetindo as operações anteriores chega-se a:

$$E(A_1 B_1 + y)^2 = J^2 L^2 a_1^2 + J L^2 \sigma_{ar}^2 + J^2 L^2 b_1^2 + J^2 L^2 (ab)_{11}^2 + \\ + J L^2 \sigma_{abr}^2 + J (L-1) \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + \frac{J^2}{J-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}$$

e desenvolvendo tem-se:

$$\frac{E(A_1 B_1 + y)}{J L} = J L a_1^2 + L \sigma_{ar}^2 + J L b_1^2 + J L (ab)_{11}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \\ + \left[1 + \frac{I K}{I K (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2 \quad (15)$$

Pela substituição das expressões obtidas de (III), (VI), (6), (c), (d) e (15) em (VII) virá:

$$E(S.Q. Interação AxB) = J L \sum_{ik} (ab)_{ik}^2 + L (I-1) (K-1) \sigma_{abr}^2 + \\ + \left[(I-1) (K-1) + \frac{(I-1) (K-1)}{I K (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$$

e então:

$$E(Q.M. Interação AxB) = \frac{E(S.Q. Interação AxB)}{(I-1) (K-1)}$$

donde resulta:

$$E(Q.M. \text{Interação } A \times B) = \frac{JL}{(I-1)(K-1)} \sum_{ik} (ab)_{ik}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

4.2.8. Subparcelas

$$E(S.Q. \text{Subparcelas}) = \frac{1}{L} E \left[\sum_{ijk} (A_i B_k R_j)^2 \right] + \frac{1}{L} E(A_1 B_1 R_1 + y)^2 - E(C) \quad (VIII)$$

onde:

$A_i B_k R_j$ é o total das sub-subparcelas de cada subparcela onde não houve perda da informação, e:

$A_1 B_1 R_1$ é o total das sub-subparcelas presentes na subparcela onde ocorreu a perda da unidade.

$A_i B_k R_j$ pode ser representado por:

$$\begin{aligned} A_i B_k R_j = \sum_{\ell} x_{ijk\ell} &= L a_i + L r_j + L(ar)_{ij} + L b_k + L(ab)_{ik} + \\ &+ L(abr)_{ikj} + \sum_{\ell} c_{\ell} + \sum_{\ell} (ac)_{i\ell} + \sum_{\ell} (bc)_{k\ell} + \sum_{\ell} (abc)_{ik\ell} + \\ &+ \sum_{\ell} e_{ijk\ell} . \end{aligned}$$

Por procedimentos análogos aos anteriormente aplicados chega-se a:

$$E(A_i B_k R_j)^2 = L^2 a_i^2 + L^2 r_j^2 + L^2 \sigma_{ar}^2 + L^2 b_k^2 + L^2 (ab)_{ik}^2 + \\ + L^2 \sigma_{abr}^2 + L \sigma^2 .$$

Desenvolvendo para as $(IJK - 1)$ combinações tem-se:

e) para as subparcelas $A_i B_k R_j$ independentes de A_1 :

$$\frac{1}{L} \sum_{i=2}^I \sum_{jk} [E(A_i B_k R_j)^2] = JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1) \sum_j r_j^2 + \\ + JKL(I-1) \sigma_{ar}^2 + JL(I-1) \sum_k b_k^2 + \\ + JL \sum_{i=2}^I \sum_k (ab)_{ik}^2 + JKL(I-1) \sigma_{abr}^2 + \\ + JK(I-1) \sigma^2 \quad (e)$$

f) para as subparcelas $A_1 B_k R_j$ independentes de B_1 :

$$\frac{1}{L} \sum_{k=2}^K \sum_j [E(A_1 B_k R_j)^2] = JL(K-1) a_1^2 + L(K-1) \sum_j r_j^2 + JL(K-1) \sigma_{ar}^2 + \\ + JL \sum_{k=2}^K b_k^2 + JL \sum_{k=2}^K (ab)_{1k}^2 + \\ + JL(K-1) \sigma_{abr}^2 + J(K-1) \sigma^2 \quad (f)$$

g) para as subparcelas $A_1 B_1 R_j$, exceto $A_1 B_1 R_1$ onde o correu a perda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{j=2}^J [E(A_1 B_1 R_j)]^2 &= L(J-1)a_1^2 + L \sum_{j=2}^J r_j^2 + L(J-1)\sigma_{ar}^2 + \\ &+ L(J-1)b_1^2 + L(J-1)(ab)_{11}^2 + L(J-1)\sigma_{abr}^2 + \\ &+ (J-1)\sigma^2 \end{aligned} \quad (g)$$

Para a subparcela relativa à perda de observação virá:

$$\begin{aligned} (A_1 B_1 R_1 + y) &= L a_1 + L r_1 + L(ar)_{11} + L b_1 + L(ab)_{11} + \\ &+ L(abr)_{111} + \sum_{\ell} c_{\ell} + \sum_{\ell} (ac)_{1\ell} + \sum_{\ell} (bc)_{1\ell} + \\ &+ \sum_{\ell} (abc)_{11\ell} + \sum_{\ell} e_{111\ell} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \\ &+ \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned} E(A_1 B_1 R_1 + y)^2 &= L^2 a_1^2 + L^2 r_1^2 + L^2 \sigma_{ar}^2 + L^2 b_1^2 + L^2 (ab)_{11}^2 + \\ &+ L^2 \sigma_{abr}^2 + \frac{L^2}{L-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{J-1} + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{E(A_1 B_1 R_1 + y)^2}{L} = L a_1^2 + L r_1^2 + L \sigma_{ar}^2 + L b_1^2 + L (ab)_{11}^2 +$$

$$+ L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{IJK}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (16)$$

Substituindo (6), (e), (f), (g) e (16) em (VIII) tem-se:

$$E(S.Q.Subparcelas) = JKL \sum_i a_i^2 + IKL \sum_j r_j^2 + KL(IJ-1) \sigma_{ar}^2 +$$

$$+ IJL \sum_k b_k^2 + JL \sum_{ik} (ab)_{ik}^2 + L(IJK-1) \sigma_{abr}^2 +$$

$$+ \left[(IJK-1) + \frac{(IJK-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

4.2.9. Resíduo (b)

$$E[S.Q.Resíduo (b)] = E(S.Q.Subparcelas) - E(S.Q.Parcelas) -$$

$$- E[S.Q.Tratamentos (B)] -$$

$$- E(S.Q.Interação AxB) \quad (IX)$$

Substituindo as expressões obtidas de (IV), (VI), (VII) e (VIII) em (IX) obtem-se:

$$E[\text{S.Q.Resíduo (b)}] = IL(J-1)(K-1)\sigma_{abr}^2 + \left[I(J-1)(K-1) + \frac{I(J-1)(K-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e a expressão da $E[\text{Q.M.Resíduo (b)}]$ dada por:

$$E[\text{Q.M.Resíduo (b)}] = L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

4.2.10. Tratamento (C)

$$E[\text{S.Q.Tratamentos (C)}] = \frac{1}{IJK} E \left[\sum_{\ell=2}^L C_{\ell}^2 \right] + \frac{1}{IJK} E(C_1 + y)^2 - E(C) \quad (X)$$

onde:

C_{ℓ} é a soma das sub-subparcelas associadas a cada tratamento C_{ℓ} e que não estão relacionadas com a perda da observação, e:

C_1 é a soma das sub-subparcelas presentes e associadas ao tratamento C_1 onde ocorreu a perda da observação.

Para cada C_ℓ tem-se:

$$\begin{aligned}
 C_\ell = \sum_{ijk} x_{ijk\ell} = & JK \sum_i a_i + IK \sum_j r_j + K \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJ \sum_k b_k + \\
 & + J \sum_{ik} (ab)_{ik} + \sum_{ijk} (abr)_{ijk} + IJK c_\ell + \\
 & + JK \sum_i (ac)_{i\ell} + IJ \sum_k (bc)_{k\ell} + J \sum_{ik} (abc)_{ik\ell} + \\
 & + \sum_{ijk} e_{ijk\ell} .
 \end{aligned}$$

Por procedimentos análogos aos anteriores chega-se à:

$$E(C_\ell^2) = IJK^2 \sigma_{ar}^2 + IJK \sigma_{abr}^2 + I^2 J^2 K^2 c_\ell^2 + IJK \sigma^2$$

e assim:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{IJK} E \left[\sum_{\ell=2}^L C_\ell^2 \right] = & K(L-1) \sigma_{ar}^2 + (L-1) \sigma_{abr}^2 + IJK \sum_{\ell=2}^L c_\ell^2 + \\
 & + (L-1) \sigma^2 \quad (17)
 \end{aligned}$$

Para o tratamento onde ocorreu a perda, o modelo matemático representativo é:

$$\begin{aligned}
C_1 + y = & JK \sum_i a_i + IK \sum_j r_j + K \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJ \sum_k b_k + \\
& + J \sum_{ik} (ab)_{ik} + \sum_{ijk} (abr)_{ijk} + IJK c_1 + JK \sum_i (ac)_{i1} + \\
& + IJ \sum_k (bc)_{k1} + J \sum_{ik} (abc)_{ik1} + \sum_{ijk} e_{ijk1} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \\
& + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

onde:

$\sum_{ijk} e_{ijk1}$ é a soma dos $(IJK-1)$ erros associados às sub-subparcelas relativas ao tratamento C_1 onde ocorreu a perda da observação. Esse componente pode ser desdobrado em:

$$\sum_{ijk} e_{ijk1} = \sum'_{ijk} e_{ijk1} + \sum'_{jk} e_{1jk1} + \sum_j e_{1j11}$$

e ainda:

$\sum'_{ijk} e_{ijk1}$ é a soma dos $JK(I-1)$ erros associados às sub-subparcelas do tratamento C_1 , onde ocorreu a perda, mas não estão no núcleo $A_1 B_1$ correspondente à perda, e:

$\sum_{jk} e_{ijk_1}$ é a soma dos $J(K-1)$ erros associados às sub-subparcelas do tratamento C_1 , onde houve a perda, receberam o tratamento A_1 mas não receberam o tratamento B_1 relativo à perda da informação.

Pela substituição desses somatórios, e por processos análogos aos anteriores tem-se:

$$E(C_1 + y)^2 = IJK^2 \sigma_{ar}^2 + IJK \sigma_{abr}^2 + I^2 J^2 K^2 c_1^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + JK(I-1) \sigma^2 + J(K-1) \sigma^2 + \frac{J^2}{J-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}$$

e assim:

$$\frac{E(C_1 + y)^2}{IJK} = K \sigma_{ar}^2 + \sigma_{abr}^2 + IJK c_1^2 + \left[1 + \frac{L}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (18)$$

Substituindo (6), (17) e (18) em (X) virá:

$$E[S.Q.Tratamentos (C)] = IJK \sum_{\ell} c_{\ell}^2 + \left[(L-1) + \frac{(L-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e a expressão da $E[\text{Q.M.Tratamentos (C)}]$ dada por:

$$E[\text{Q.M.Tratamentos (C)}] = \frac{IJK}{L-1} \sum_{\ell} c_{\ell}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

4.2.11. Interação dos Tratamentos (AxC)

$$\begin{aligned} E(\text{S.Q.Interação AxC}) &= \frac{1}{JK} E \left[\sum_{i\ell} (A_i C_{\ell})^2 \right] + \frac{1}{JK} E(A_1 C_1 + y)^2 - \\ &- E(C) - E[\text{S.Q.Tratamentos (A)}] - \\ &- E[\text{S.Q.Tratamentos (C)}] \quad (\text{XI}) \end{aligned}$$

onde:

$A_i C_{\ell}$ é o total das sub-subparcelas associadas a cada combinação dos tratamentos $A_i C_{\ell}$, que não se refere à perda da observação, e:

$A_1 C_1$ é o total das sub-subparcelas presentes na combinação dos tratamentos $A_1 C_1$ onde ocorreu a perda de sub-subparcela.

Cada total $A_i C_{\ell}$ pode ser representado, segundo o modelo matemático, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
A_i C_\ell = \sum_{jk} x_{ijk\ell} = JK a_i + K \sum_j r_j + K \sum_j (ar)_{ij} + J \sum_k b_k + \\
+ J \sum_k (ab)_{ik} + \sum_{jk} (abr)_{ikj} + JK c_\ell + JK (ac)_{i\ell} + \\
+ J \sum_k (bc)_{k\ell} + J \sum_k (abc)_{ik\ell} + \sum_{jk} e_{ijk\ell}
\end{aligned}$$

cuja expressão da esperança do quadrado é:

$$\begin{aligned}
E(A_i C_\ell)^2 = J^2 K^2 a_i^2 + JK^2 \sigma_{ar}^2 + JK \sigma_{abr}^2 + J^2 K^2 c_\ell^2 + \\
+ J^2 K^2 (ac)_{i\ell}^2 + JK \sigma^2
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o somatório em relação a j e k tem-se:

h) para os totais $A_i C_\ell$ independentes de A_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{JK} \sum_{i=2}^I \sum_{\ell} [E(A_i C_\ell)^2] = JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1) \sigma_{ar}^2 + L(I-1) \sigma_{abr}^2 + \\
+ JK(I-1) \sum_{\ell} c_\ell^2 + JK \sum_{i=2}^I \sum_{\ell} (ac)_{i\ell}^2 + \\
+ L(I-1) \sigma^2 \quad (h)
\end{aligned}$$

m) para os totais $A_1 C_\ell$ independentes de C_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{JK} \sum_{\ell=2}^L [E(A_1 C_\ell)^2] &= JK(L-1)a_1^2 + K(L-1)\sigma_{ar}^2 + (L-1)\sigma_{abr}^2 + \\ &+ JK \sum_{\ell=2}^L c_\ell^2 + JK \sum_{\ell=2}^L (ac)_{1\ell} + (L-1)\sigma^2 \quad (m) \end{aligned}$$

Para o total $A_1 C_1$ relativo à perda de observação tem-se:

$$\begin{aligned} A_1 C_1 + y &= JK a_1 + K \sum_j r_j + K \sum_j (ar)_{1j} + J \sum_k b_k + J \sum_k (ab)_{1k} + \sum_{jk} (abr)_{1kj} + \\ &+ JK c_1 + JK (ac)_{11} + J \sum_k (bc)_{k1} + J \sum_k (abc)_{1k1} + \sum_{jk} e_{1jk1} + \\ &+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{11\ell\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

onde:

$\sum_{jk} e_{1jk1}$ é a soma dos $(JK-1)$ erros associados às sub-subparcelas da combinação dos tratamentos $A_1 C_1$ onde ocorreu a perda da informação. Es se componente pode ser desdobrado em:

$$\sum_{jk} e_{1jk1} = \sum_{jk} e'_{1jk1} + \sum_{j=2}^J e_{1j11} .$$

Substituindo esses somatórios, elevando ao quadrado, aplicando a esperança e impondo as restrições fica:

$$\begin{aligned}
 E(A_{11} C_{11} + y)^2 &= J^2 K^2 a_1^2 + JK^2 \sigma_{ar}^2 + JK \sigma_{abr}^2 + J^2 K^2 c_1^2 + \\
 &+ J^2 K^2 (ac)_{11}^2 + J(K-1) \sigma^2 + \frac{J^2}{J-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + \\
 &+ \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}
 \end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned}
 \frac{E(A_{11} C_{11} + y)^2}{JK} &= JK a_1^2 + K \sigma_{ar}^2 + \sigma_{abr}^2 + JK c_1^2 + JK (ac)_{11}^2 + \\
 &+ \left[1 + \frac{IL}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (19)
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões das esperanças das somas de quadrados, resultantes de (III), (VI), (6), (h), (m) e (19) em (XI) virá:

$$\begin{aligned}
 E(S.Q. \text{Interação } A \times C) &= JK \sum_{il} (ac)_{il}^2 + \\
 &+ \left[(I-1)(L-1) + \frac{(I-1)(L-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2
 \end{aligned}$$

e a correspondente expressão da $E(Q.M. \text{Interação } A \times C)$ dada por:

$$E(Q.M. \text{Interação } A \times C) = \frac{JK \sum_{i\ell} (ac)_{i\ell}^2}{(I-1)(L-1)} + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

4.2.12. Interação dos Tratamentos ($B \times C$)

$$\begin{aligned} E(S.Q. \text{Interação } B \times C) &= \frac{1}{IJ} E \left[\sum_{k\ell} (B_k C_\ell)^2 \right] + \frac{1}{IJ} E(B_1 C_1 + y)^2 - \\ &- E(C) - E[S.Q. \text{Tratamentos } (B)] - \\ &- E[S.Q. \text{Tratamentos } (C)] \quad (XII) \end{aligned}$$

onde:

$B_k C_\ell$ é o total de todas as sub-subparcelas que compõem cada combinação dos tratamentos $B_k C_\ell$, exceto daquela referente à perda da observação, e:

$B_1 C_1$ é o total de todas as sub-subparcelas presentes na combinação dos tratamentos $B_1 C_1$ relativo à perda da informação.

Cada $B_k C_\ell$ pode ser representado por:

$$\begin{aligned}
 B_k C_\ell = \sum_{ij} x_{ijk\ell} = & J \sum_i a_i + I \sum_j r_j + \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJ b_k + \\
 & + J \sum_i (ab)_{ik} + \sum_{ij} (abr)_{ikj} + IJ c_\ell + J \sum_i (ac)_{i\ell} + \\
 & + IJ(bc)_{k\ell} + J \sum_i (abc)_{ik\ell} + \sum_{ij} e_{ijk\ell}
 \end{aligned}$$

e assim:

$$\begin{aligned}
 E(B_k C_\ell)^2 = & IJ \sigma_{ar}^2 + I^2 J^2 b_k^2 + IJ \sigma_{abr}^2 + I^2 J^2 c_\ell^2 + I^2 J^2 (bc)_{k\ell}^2 + \\
 & + IJ \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo e isolando os núcleos pertinentes virá:

n) para os totais $(B_k C_\ell)$ excluindo o da combinação $B_1 C_1$ onde ocorreu a perda:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{IJ} \sum_{k=2}^K \sum_{\ell=2}^L \left[E(B_k C_\ell)^2 \right] = & (K-1)(L-1) \sigma_{ar}^2 + IJ(L-1) \sum_{k=2}^K b_k^2 + \\
 & + (K-1)(L-1) \sigma_{abr}^2 + IJ(K-1) \sum_{\ell=2}^L c_\ell^2 + \\
 & + IJ \sum_{k=2}^K \sum_{\ell=2}^L (bc)_{k\ell}^2 + (K-1)(L-1) \sigma^2 \quad (n)
 \end{aligned}$$

o) para os totais de $(B_1 C_\ell)$ isentos de C_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{IJ} \sum_{\ell=2}^L [E(B_1 C_\ell)^2] &= (L-1)\sigma_{ar}^2 + IJ(L-1)b_1^2 + (L-1)\sigma_{abr}^2 + \\ &+ IJ \sum_{\ell=2}^L c_\ell^2 + IJ \sum_{\ell=2}^L (bc)_{1\ell}^2 + (L-1)\sigma^2 \quad (o) \end{aligned}$$

p) para os totais de $(B_k C_1)$ isentos de B_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{IJ} \sum_{k=2}^K [E(B_k C_1)^2] &= (K-1)\sigma_{ar}^2 + IJ \sum_{k=2}^K b_k^2 + (K-1)\sigma_{abr}^2 + \\ &+ IJ(K-1)c_1^2 + IJ \sum_{k=2}^K (bc)_{k1}^2 + (K-1)\sigma^2 \quad (p) \end{aligned}$$

Para o total $B_1 C_1$ onde ocorreu a perda fi

ca:

$$\begin{aligned} B_1 C_1 + y &= J \sum_i a_i + I \sum_j r_j + \sum_{ij} (ar)_{ij} + IJ b_1 + J \sum_i (ab)_{i1} + \\ &+ \sum_{ij} (abr)_{ij} + IJ c_1 + J \sum_i (ac)_{i1} + IJ (bc)_{11} + \\ &+ J \sum_i (abc)_{i11} + \sum_{ij} e_{ij11} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \\ &+ \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

onde:

$\sum_{ij} e_{ij11}$ é a soma dos $(IJ-1)$ erros associados às sub-subparcelas da combinação dos tratamentos $B_1 C_1$, onde ocorreu a perda da observação, e que pode ser decomposta em:

$$\sum_{ij} e_{ij11} = \sum'_{ij} e_{ij11} + \sum_{j=2}^J e_{1j11}$$

onde, a $\sum'_{ij} e_{ij11}$ estão associados $J(I-1)$ erros provenientes das sub-subparcelas relativas à combinação $B_1 C_1$ mas não receberam o tratamento A_1 relativo à unidade perdida.

Pela substituição dos somatórios e pela aplicação da esperança ao quadrado dessa expressão obtém-se:

$$\begin{aligned} E(B_1 C_1 + y)^2 &= IJ \sigma_{ar}^2 + I^2 J^2 b_1^2 + IJ \sigma_{abr}^2 + I^2 J^2 c_1^2 + \\ &+ I^2 J^2 (bc)_{11}^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + \frac{J^2 \sigma^2}{J-1} + J(I-1) \sigma^2 + \\ &+ \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

e daí:

$$\frac{E(B_1 C_1 + y)^2}{IJ} = \sigma_{ar}^2 + IJ b_1^2 + \sigma_{abr}^2 + IJ c_1^2 + IJ (bc)_{11}^2 +$$

$$+ \left[1 + \frac{KL}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (20)$$

Substituindo em (XII) as expressões das esperanças das somas de quadrados resultantes de (VI) e (X) além das expressões de (6), (n), (o), (p) e (20) resulta:

$$E(S.Q. Interação B \times C) = IJ \sum_{kl} (bc)_{kl}^2 +$$

$$+ \left[(K-1)(L-1) + \frac{(K-1)(L-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e a expressão do quadrado médio correspondente será:

$$E(Q.M. Interação B \times C) = \frac{IJ \sum_{kl} (bc)_{kl}^2}{(K-1)(L-1)} +$$

$$+ \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

4.2.13. Interação dos Tratamentos (AxBxC)

$$\begin{aligned}
 E(\text{S.Q. Interação AxBxC}) &= \frac{1}{J} E \left[\sum_{ikl} (A_i B_k C_l)^2 \right] + \frac{1}{J} E(A_1 B_1 C_1 + y)^2 - E(C) - \\
 &- E[\text{S.Q. Tratamentos (A)}] - E[\text{S.Q. Tratamentos (B)}] - \\
 &- E[\text{S.Q. Tratamentos (C)}] - E(\text{S.Q. Interação AxB}) - \\
 &- E(\text{S.Q. Interação AxC}) - E(\text{S.Q. Interação BxC})
 \end{aligned}$$

(XIII)

onde:

$A_i B_k C_l$ é a soma das sub-subparcelas que compõem cada total da combinação dos tratamentos $A_i B_k C_l$, onde não houve unidade perdida, e:

$A_1 B_1 C_1$ é a soma das sub-subparcelas presentes na associação dos tratamentos $A_1 B_1 C_1$ relativo a perda da observação.

Através do modelo matemático, cada total $A_i B_k C_l$ pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 A_i B_k C_\ell = \sum_j x_{ijkl} = & J a_i + \sum_j r_j + \sum_j (ar)_{ij} + J b_k + J(ab)_{ik} + \\
 & + \sum_j (abr)_{ikj} + J c_\ell + J(ac)_{i\ell} + J(bc)_{k\ell} + \\
 & + J(abc)_{ik\ell} + \sum_j e_{ijkl}
 \end{aligned}$$

Aplicando a esperança ao quadrado dessa expressão e impondo as restrições fica:

$$\begin{aligned}
 E(A_i B_k C_\ell)^2 = & J^2 a_i^2 + J \sigma_{ar}^2 + J^2 b_k^2 + J^2 (ab)_{ik}^2 + J \sigma_{abr}^2 + \\
 & + J^2 c_\ell^2 + J^2 (ac)_{i\ell}^2 + J^2 (bc)_{k\ell}^2 + J^2 (abc)_{ik\ell}^2 + J \sigma^2 .
 \end{aligned}$$

Assim tem-se:

q) para cada total $A_i B_k C_\ell$ excluindo a participação do tratamento A_1 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \sum_{i=2}^I \sum_{k\ell} [E(A_i B_k C_\ell)^2] = & JKL \sum_{i=2}^I a_i^2 + KL(I-1) \sigma_{ar}^2 + JL(I-1) \sum_k b_k^2 + \\
 & + JL \sum_{i=2}^I \sum_k (ab)_{ik}^2 + KL(I-1) \sigma_{abr}^2 + JK(I-1) \sum_\ell c_\ell^2 + \\
 & + JK \sum_{i=2}^I \sum_\ell (ac)_{i\ell}^2 + J(I-1) \sum_{k\ell} (bc)_{k\ell}^2 + \\
 & + J \sum_{i=2}^I \sum_{k\ell} (abc)_{ik\ell}^2 + KL(I-1) \sigma^2 \quad (q)
 \end{aligned}$$

r) para cada total $A_1 B_k C_\ell$ excluindo a participação do tratamento B_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \sum_{k=2}^K \sum_{\ell} [E(A_1 B_k C_\ell)^2] &= JL(K-1)a_1^2 + L(K-1)\sigma_{ar}^2 + JL \sum_{k=2}^K b_k^2 + \\ &+ JL \sum_{k=2}^K (ab)_{1k}^2 + L(K-1)\sigma_{abr}^2 + J(K-1) \sum_{\ell} c_\ell^2 + \\ &+ J(K-1) \sum_{\ell} (ac)_{1\ell}^2 + J \sum_{k=2}^K \sum_{\ell} (bc)_{k\ell}^2 + \\ &+ J \sum_{k=2}^K \sum_{\ell} (abc)_{1k\ell}^2 + L(K-1)\sigma^2 \quad (r) \end{aligned}$$

s) para cada total $A_1 B_1 C_\ell$ excluindo a participação do tratamento C_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \sum_{\ell=2}^L [E(A_1 B_1 C_\ell)^2] &= J(L-1)a_1^2 + (L-1)\sigma_{ar}^2 + J(L-1)b_1^2 + J(L-1)(ab)_{11}^2 + \\ &+ (L-1)\sigma_{abr}^2 + J \sum_{\ell=2}^L c_\ell^2 + J \sum_{\ell=2}^L (ac)_{1\ell}^2 + \\ &+ J \sum_{\ell=2}^L (bc)_{1\ell}^2 + J \sum_{\ell=2}^L (abc)_{11\ell}^2 + (L-1)\sigma^2 \quad (s) \end{aligned}$$

Para a combinação de tratamentos $A_1 B_1 C_1$, incluindo a unidade perdida, virá:

$$\begin{aligned}
A_{11} B_{11} C_{11} + y &= J a_1 + \sum_j r_j + \sum_j (ar)_{1j} + J b_1 + J(ab)_{11} + \sum_j (abr)_{11j} + \\
&+ J c_1 + J(ac)_{11} + J(bc)_{11} + J(abc)_{111} + \sum_j e_{1j11} + \\
&+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{L-1} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Aplicando a esperança ao quadrado dessa expressão e impondo as restrições virã:

$$\begin{aligned}
E(A_{11} B_{11} C_{11} + y)^2 &= J^2 a_1^2 + J \sigma_{ar}^2 + J^2 b_1^2 + J^2 (ab)_{11}^2 + J \sigma_{abr}^2 + \\
&+ J^2 c_1^2 + J^2 (ac)_{11}^2 + J^2 (bc)_{11}^2 + J^2 (abc)_{111}^2 + \\
&+ \frac{J^2}{J-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{L-1} + \frac{\sigma^2}{(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

e daí:

$$\begin{aligned}
\frac{E(A_{11} B_{11} C_{11} + y)^2}{J} &= J a_1^2 + \sigma_{ar}^2 + J b_1^2 + J (ab)_{11}^2 + \sigma_{abr}^2 + J c_1^2 + \\
&+ J (ac)_{11}^2 + J (bc)_{11}^2 + J (abc)_{111}^2 + \\
&+ \left[1 + \frac{IKL}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 \quad (21)
\end{aligned}$$

Pela substituição das expressões das esperanças das somas de quadrados obtidas anteriormente e das expressões (6), (q), (r), (s) e (21) em (XIII) chega-se à:

$$E(S.Q. \text{Interação } A \times B \times C) = J \sum_{ikl} (abc)_{ikl}^2 + \left[(I-1)(K-1)(L-1) + \frac{(I-1)(K-1)(L-1)}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

e ainda:

$$E(Q.M. \text{Interação } A \times B \times C) = \frac{J \sum_{ikl} (abc)_{ikl}^2}{(I-1)(K-1)(L-1)} + \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2$$

4.2.14. Resíduo (c)

$$\begin{aligned} E[S.Q. \text{Resíduo (c)}] &= E(S.Q. \text{Total}) - E(S.Q. \text{Subparcelas}) - \\ &\quad - E[S.Q. \text{Tratamentos (C)}] - E(S.Q. \text{Interação } A \times C) - \\ &\quad - E(S.Q. \text{Interação } B \times C) - E(S.Q. \text{Interação } A \times B \times C) \end{aligned}$$

Como todas essas esperanças foram determinadas anteriormente, pela substituição virá:

$$E[S.Q. \text{Resíduo (c)}] = [IK(J-1)(L-1) - 1] \sigma^2$$

com a expressão da esperança do quadrado médio do resíduo (c) dada por:

$$E[\text{Q.M. Resíduo (c)}] = \sigma^2$$

Conforme se pode observar, apenas a

$$E[\text{Q.M. Resíduo (c)}]$$

permanece inalterada, em decorrência da estimação da unidade perdida, uma vez que sua contribuição para este resíduo é nula.

Em todas as expressões das esperanças dos quadrados médios obtidas, exceto a do Resíduo (c), existe, associado à variância residual (σ^2), a nível de sub-subparcela, um fator

$$g = \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right] \sigma^2 .$$

Uma síntese do que até agora foi apresentado pode ser vista no Quadro II a seguir, onde são mostrados o esquema de análise de variância e as expressões das esperanças das somas de quadrados e dos quadrados médios, para cada componente.

QUADRO II - Componentes de Variância das Somas de Quadrados e Quadrados Médios com uma Observação Perdida.

Causas de Variação	G.L.	Σ [Soma de Quadrados]	Σ [Quadrado Médios]
Alcos	(J-1)	$\sum_j L \tau_j^2 + K L (J-1) \sigma_{ar}^2 + L (J-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(J-1) + \frac{(J-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{L K}{J-1} \tau_j^2 + K L \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Tratamentos (A)	(I-1)	$\sum_k J K L \tau_{ik}^2 + K L (I-1) \sigma_{ar}^2 + L (I-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(I-1) + \frac{(I-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{J K L}{I-1} \tau_{ik}^2 + K L \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Resíduo (a)	(I-1)(J-1)	$K L (I-1) (J-1) \sigma_{ar}^2 + L (I-1) (J-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(I-1) (J-1) + \frac{(I-1) (J-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$K L \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Parcelas	(IJ-1)	$\sum_{jk} J K L \tau_{ijk}^2 + J K L \tau_j^2 + K L (IJ-1) \sigma_{ar}^2 + L (IJ-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(IJ-1) + \frac{(IJ-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	
Tratamentos (B)	(K-1)	$\sum_l L J L \tau_{lk}^2 + L (K-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(K-1) + \frac{(K-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{L J L}{K-1} \tau_{lk}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Interação AB	(I-1)(K-1)	$\sum_{ik} J L \tau_{(ab)}^2 + L (I-1) (K-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(I-1) (K-1) + \frac{(I-1) (K-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{J L}{(I-1) (K-1)} \tau_{(ab)}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Resíduo (b)	I (J-1) (K-1)	$L (J-1) (K-1) \sigma_{abr}^2 + \left[I (J-1) (K-1) + \frac{I (J-1) (K-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$L \sigma_{abr}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Subparcelas	(LJK-1)	$\sum_{jkl} J K L \tau_{ijk}^2 + J K L \tau_j^2 + K L (LJK-1) \sigma_{ar}^2 + L K \tau_k^2 + L J \tau_l^2 + L (LJK-1) \sigma_{abr}^2 + \left[(LJK-1) + \frac{(LJK-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	
Tratamentos (C)	(L-1)	$\sum_l L J K \tau_{lk}^2 + \left[(L-1) + \frac{(L-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{L J K}{L-1} \tau_{lk}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Interação AxC	(I-1)(L-1)	$\sum_{ikl} J K \tau_{(ac)}^2 + \left[(I-1) (L-1) + \frac{(I-1) (L-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{J K}{(I-1) (L-1)} \tau_{(ac)}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Interação BxC	(K-1)(L-1)	$\sum_{kl} L J \tau_{(bc)}^2 + \left[(K-1) (L-1) + \frac{(K-1) (L-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{L J}{(K-1) (L-1)} \tau_{(bc)}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Interação AxBxC	(I-1)(K-1)(L-1)	$\sum_{ikl} J \tau_{(abc)}^2 + \left[(I-1) (K-1) (L-1) + \frac{(I-1) (K-1) (L-1)}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	$\frac{J}{(I-1) (K-1) (L-1)} \tau_{(abc)}^2 + \left[1 + \frac{1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$
Resíduo (c)	[IK (J-1) (L-1) - 1]	$[IK (J-1) (L-1) - 1] \sigma^2$	σ^2
T o t a l	(LJK-2)	$\sum_{jkl} J K L \tau_{ijk}^2 + J K L \tau_j^2 + K L (LJK-1) \sigma_{ar}^2 + L K \tau_k^2 + L J \tau_l^2 + L (LJK-1) \sigma_{abr}^2 + L J K \tau_{(ac)}^2 + L J \tau_{(bc)}^2 + J \tau_{(abc)}^2 + \left[L J K L - 3 + \frac{L J K L - 1}{IK (J-1) (L-1)} \right] \sigma^2$	

Verifica-se pelo Quadro II que os componentes blocos e tratamentos (A) devem ser testados com o quadrado médio do resíduo (a) e os componentes tratamentos (B) e interação AxB com o quadrado médio do resíduo (b). As demais fontes de variação de interesse, a nível de sub-subparcela, de uma forma prática, deverão ser testadas com o quadrado médio do resíduo (c) multiplicado do fator g . Esse procedimento, embora aproximado, introduz um erro máximo de 20% nos resultados do valor do teste F obtido, isto considerando um caso extremo de um experimento instalado em parcelas sub-subdivididas com as seguintes especificações: 2 blocos, 2 tratamentos primários (A), 2 tratamentos secundários (B) e 2 tratamentos terciários (C). Considerando as dimensões do exemplo proposto neste trabalho, esse erro se situa em torno de 1,3% para os componentes testados a nível de sub-subparcela.

4.2.15. Exemplo Ilustrativo

Considerando os dados de "DEW-LAP" de colmos de cana-de-açúcar, foi feita, de acordo com a estrutura proposta, a análise de variância cujos resultados estão apresentados na Tabela I.

TABELA I - Análise de Variância dos Dados de "DEW-LAP" de Colmos de Cana-de-Açúcar.

Causas de Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	3	1.421,74	473,91	
Espaçamentos (E)	3	2.027,58	675,86	5,21*
Resíduo (a)	9	1.167,95	129,77	
Parcelas	(15)	(4.617,27)		
Variedades (V)	2	74.008,01	37.004,01	188,47**
E x V	6	4.765,49	794,25	4,05**
Resíduo (b)	24	4.712,06	196,34	
Subparcelas	(47)	(88.102,83)		
Densidades (D)	2	679,51	339,76	4,11*
E x D	6	834,49	139,08	1,68
V x D	4	567,70	141,93	1,71
E x V x D	12	1.467,63	122,30	1,48
Resíduo (c)	71	5.796,00	81,63	
Total	(142)	(97.448,16)		

* Significativo ao limite de 5% de probabilidade

** Significativo ao limite de 1% de probabilidade

Para efeito de aplicação do teste F, a nível de sub-subparcela, o Q.M.Resíduo (c), foi multiplicado pelo fator $g = 73/72$.

Como se depreende, houve diferenças significativas em todos os efeitos principais e na interação de tratamentos E x V.

4.3. Estimadores de Variâncias de Contrastes de Médias Involvido o Tratamento com a Sub-subparcela Perdi- da

No delineamento em parcelas sub-subdivididas podem ser indentificados um total de 27 casos distintos de contrastes entre médias de tratamentos principais, médias de interações duplas e médias de interações triplas. Desses contrastes foram isolados apenas 12, os de maior interesse, estruturados a seguir.

4.3.1. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A)

Para o tratamento A_1 onde ocorreu a perda da sub-subparcela tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 + y}{JKL} = \bar{A}_1 = & a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{1k}}{K} + \\
& + \frac{\sum_{jk} (abr)_{1kj}}{JK} + \frac{\sum_\ell c_\ell}{L} + \frac{\sum_\ell (ac)_{1\ell}}{L} + \frac{\sum_{k\ell} (bc)_{k\ell}}{KL} + \\
& + \frac{\sum_{k\ell} (abc)_{1k\ell}}{KL} + \frac{\sum_{jkl} e_{1jkl}}{JKL} + \frac{\sum_{\ell=2}^L \sum_{111\ell} e_{111\ell}}{JKL(L-1)} + \\
& + \frac{\sum_{j\ell} e_{1jkl}}{JKL} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{1j11} e_{1j11}}{JKL(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L \sum_{1j1\ell} e_{1j1\ell}}{JKL(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Em relação a qualquer outro tratamento A_i onde não houve a perda, virá:

$$\begin{aligned}
\frac{A_i}{JKL} = \bar{A}_i = & a_i + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{ij}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{ik}}{K} + \\
& + \frac{\sum_{jk} (abr)_{ikj}}{JK} + \frac{\sum_\ell c_\ell}{L} + \frac{\sum_\ell (ac)_{i\ell}}{L} + \frac{\sum_{k\ell} (bc)_{k\ell}}{KL} + \\
& + \frac{\sum_{k\ell} (abc)_{ik\ell}}{KL} + \frac{\sum_{jkl} e_{ijk\ell}}{JKL}
\end{aligned}$$

Assim virá:

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_i = \bar{A}_i - \bar{A}_1 = a_i - a_1 + \frac{1}{J} \sum_j \left[(ar)_{ij} - (ar)_{1j} \right] + \\
 + \frac{1}{JK} \sum_{jk} \left[(abr)_{ikj} - (abr)_{1kj} \right] + \frac{\sum_{jkl} e_{ijk\ell}}{JKL} - \\
 - \frac{\sum_{jkl} e_{1jk\ell}}{JKL} - \frac{L \sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JKL(L-1)} - \frac{\sum_{j\ell} e_{1jk\ell}}{JKL} - \\
 - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JKL(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JKL(J-1)(L-1)}
 \end{aligned}$$

Uma vez que os erros são efeitos aleatórios,
virá:

$$E(\hat{Y}_i) = a_i - a_1 .$$

Por definição

$$V(\hat{Y}_i) = E \left[\hat{Y}_i - E(\hat{Y}_i) \right]^2 ,$$

portanto:

$$V(\hat{Y}_i) = E \left\{ \left[\begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j \left[(ar)_{ij} - (ar)_{1j} \right] + \frac{1}{JK} \sum_{jk} \left[(abr)_{ikj} - (abr)_{1kj} \right] + \\ & + \frac{\sum_{jkl} e_{ijk\ell}}{JKL} - \frac{\sum_{jkl} e_{1jk\ell}}{JKL} - \frac{\sum_{j\ell} e_{1jk\ell}}{JKL} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JKL(J-1)} - \\ & - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JKL(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JKL(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2 \right\}$$

donde se obtém:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_i) = & \frac{2J}{J^2} \sigma_{ar}^2 + \frac{2JK}{J^2 K^2} \sigma_{abr}^2 + \frac{JKL \sigma^2}{J^2 K^2 L^2} + \frac{JK(L-1) \sigma^2}{J^2 K^2 L^2} + \frac{L(J-1) \sigma^2}{J^2 K^2 L^2} + \\ & + \frac{L^2(L-1) \sigma^2}{J^2 K^2 L^2 (L-1)^2} + \frac{(J-1) \sigma^2}{J^2 K^2 L^2 (J-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{J^2 K^2 L^2 (J-1)^2 (L-1)^2} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} \left[KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + \sigma^2 + \frac{I \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

que associada ao Quadro II resulta:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} \left[\text{Q.M.Resíduo (a)} + \frac{(I-2) \text{Q.M.Resíduo (c)}}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

Para facilitar considerar-se-ã:

$$E_a = E[\text{Q.M.Resíduo (a)}]$$

$$E_b = E[\text{Q.M.Resíduo (b)}]$$

$$E_c = E[\text{Q.M.Resíduo (c)}]$$

e:

$$f = \frac{1}{2IK(J-1)(L-1)}$$

Assim, tem-se:

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} [E_a + f(I-2)E_c] .$$

A esse estimador estão associados n'_1 graus de liberdade, que pode ser satisfatoriamente calculado através da fórmula de SATTERTHWAITTE que para esse caso é:

$$n'_1 = \frac{[E_a + f(I-2)E_c]^2}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{f^2(I-2)^2 E_c^2}{n_c}}$$

onde:

n_a = número de graus de liberdade do resíduo (a) , e:

n_c = número de graus de liberdade do resíduo (c) .

4.3.2. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B)

A média do tratamento B_1 onde ocorreu a perda de sub-subparcela é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \frac{B_1 + y}{IJL} = \bar{B}_1 = & \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_1 + \frac{\sum_i (ab)_{i1}}{I} + \frac{\sum_{ij} (abr)_{i1j}}{IJ} + \\ & + \frac{\sum_{\ell} c_{\ell}}{L} + \frac{\sum_{i\ell} (ac)_{i\ell}}{IL} + \frac{\sum_{\ell} (bc)_{1\ell}}{L} + \frac{\sum_{i\ell} (abc)_{i1\ell}}{IL} + \frac{\sum_{ij\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} + \\ & + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJL(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJL(J-1)} + \frac{\sum_{j\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJL(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Para um tratamento B_k qualquer:

$$\begin{aligned} \frac{B_k}{IJL} = \bar{B}_k = & \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_k + \frac{\sum_i (ab)_{ik}}{I} + \frac{\sum_{ij} (abr)_{ikj}}{IJ} + \frac{\sum_{\ell} c_{\ell}}{L} + \\ & + \frac{\sum_{i\ell} (ac)_{i\ell}}{IL} + \frac{\sum_{\ell} (bc)_{k\ell}}{L} + \frac{\sum_{i\ell} (abc)_{ik\ell}}{IL} + \frac{\sum_{ij\ell} e_{ijk\ell}}{IJL} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_k = \bar{B}_k - \bar{B}_1 = b_k - b_1 + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(\text{abr})_{ikj} - (\text{abr})_{i1j}] + \\ + \frac{\sum_{ij\ell} e_{ijk\ell}}{IJL} - \frac{\sum'_{ij\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} - \frac{\sum_{j\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJL(L-1)} - \\ - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJL(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJL(J-1)(L-1)}\end{aligned}$$

e:

$$E(\hat{Y}_k) = b_k - b_1$$

Por definição:

$$V(\hat{Y}_k) = E[\hat{Y}_k - E(\hat{Y}_k)]^2$$

portanto:

$$V(\hat{Y}_k) = E \left\{ \left[\frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(\text{abr})_{ikj} - (\text{abr})_{i1j}] + \frac{\sum_{ij\ell} e_{ijk\ell}}{IJL} - \frac{\sum'_{ij\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} - \frac{\sum_{j\ell} e_{ij1\ell}}{IJL} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJL(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJL(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJL(J-1)(L-1)} \right]^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 v(\hat{Y}_k) = & \frac{2}{I^2 J^2} \sigma_{abr}^2 + \frac{IJL}{I^2 J^2 L^2} \sigma^2 + \frac{JL(I-1)}{I^2 J^2 L^2} \sigma^2 + \frac{J(L-1)}{I^2 J^2 L^2} \sigma^2 + \\
 & + \frac{(L-1)}{I^2 J^2 L^2 (L-1)^2} \sigma^2 + \frac{J^2 (J-1)}{I^2 J^2 L^2 (J-1)^2} \sigma^2 + \frac{(J-1)(L-1)}{I^2 J^2 L^2 (J-1)^2 (L-1)^2} \sigma^2
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$v(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} \left[L \sigma_{abr}^2 + \sigma^2 + \frac{K \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

Seu estimador, de acordo com o Quadro II é:

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} \left[E_b + f(K-2) E_c \right]$$

A esta variância estão associadas n'_2 graus de liberdade que também podem ser obtidos através da fórmula de SATTERTHWAITTE, ou seja:

$$n'_2 = \frac{\left[E_b + f(K-2) E_c \right]^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{f^2 (K-2)^2 E_c^2}{n_c}}$$

onde:

n_b é o número de graus de liberdade do resíduo (b) .

4.3.3. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(C)

Para o tratamento C_1 relativo à sub-subpar-
cela perdida tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{C_1 + y}{IJK} = \bar{C}_1 = & \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_{ik} (ab)_{ik}}{IK} + \\
 & + \frac{\sum_{ijk} (abr)_{ijk}}{IJK} + c_1 + \frac{\sum_i (ac)_{i1}}{I} + \frac{\sum_k (bc)_{k1}}{K} + \\
 & + \frac{\sum_{ik} (abc)_{ik1}}{IK} + \frac{\sum'_{ijk} e_{ijk1}}{IJK} + \frac{\sum'_{jk} e_{1jk1}}{IJK} + \\
 & + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJK (L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJK (J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJK (J-1) (L-1)}
 \end{aligned}$$

Para qualquer outro tratamento C_ℓ fica:

$$\begin{aligned} \frac{c_\ell}{IJK} = \bar{c}_\ell &= \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_{ik} (ab)_{ik}}{IK} + \\ &+ \frac{\sum_{ijk} (abr)_{ijk}}{IJK} + c_\ell + \frac{\sum_i (ac)_{i\ell}}{I} + \frac{\sum_k (bc)_{k\ell}}{K} + \\ &+ \frac{\sum_{ik} (abc)_{ik\ell}}{IK} + \frac{\sum_{ijk} e_{ijk\ell}}{IJK} \end{aligned}$$

Estrutura-se então:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_\ell = \bar{c}_\ell - \bar{c}_1 &= c_\ell - c_1 + \frac{\sum_{ijk} e_{ijk\ell}}{IJK} - \frac{\sum'_{ijk} e_{ijk1}}{IJK} - \frac{\sum_{jk} e_{1jk1}}{IJK} - \\ &- \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJK(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJK(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJK(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Como: $E(\hat{Y}_\ell) = c_\ell - c_1$ e $V(\hat{Y}_\ell) = E[\hat{Y}_\ell - E(\hat{Y}_\ell)]^2$ tem-se:

$$V(\hat{Y}_\ell) = E \left[\begin{aligned} &\frac{\sum_{ijk} e_{ijk\ell}}{IJK} - \frac{\sum'_{ijk} e_{ijk1}}{IJK} - \frac{\sum_{jk} e_{1jk1}}{IJK} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJK(L-1)} - \\ &- \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJK(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJK(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2$$

Desenvolvendo, obtêm-se:

$$V(\hat{Y}_\ell) = \frac{IJK \sigma^2}{I^2 J^2 K^2} + \frac{JK(I-1) \sigma^2}{I^2 J^2 K^2} + \frac{J(K-1) \sigma^2}{I^2 J^2 K^2} + \frac{(L-1) \sigma^2}{I^2 J^2 K^2 (L-1)^2} +$$

$$+ \frac{J^2 (J-1) \sigma^2}{I^2 J^2 K^2 (J-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{I^2 J^2 K^2 (J-1)^2 (L-1)^2}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_\ell) = \frac{2}{IJK} \left[\sigma^2 + \frac{L\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

Seu estimador é:

$$\hat{V}(\hat{Y}_\ell) = \frac{2E_c}{IJK} [1 + f.L]$$

ao qual estão associados n_c graus de liberdade.

4.3.4. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B) Dentro do Tratamento (A_1)

Para a combinação de tratamentos $A_1 B_1$ associada à perda da observação tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 B_1 + y}{JL} &= \overline{A_1 B_1} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + b_1 + (ab)_{11} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{11j}}{J} + \frac{\sum_\ell c_\ell}{L} + \frac{\sum_\ell (ac)_{1\ell}}{L} + \frac{\sum_\ell (bc)_{1\ell}}{L} + \\
&+ \frac{\sum_\ell (abc)_{11\ell}}{L} + \frac{\sum_{j\ell} e_{1j1\ell}}{JL} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JL(L-1)} + \\
&+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JL(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Para qualquer outra combinação de tratamentos $A_1 B_k$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 B_k}{JL} &= \overline{A_1 B_k} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + b_k + (ab)_{1k} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{1kj}}{J} + \frac{\sum_\ell c_\ell}{L} + \frac{\sum_\ell (ac)_{1\ell}}{L} + \frac{\sum_\ell (bc)_{k\ell}}{L} + \\
&+ \frac{\sum_\ell (abc)_{1k\ell}}{L} + \frac{\sum_{j\ell} e_{1jk\ell}}{JL}
\end{aligned}$$

Assim o contraste proposto

$$\hat{Y}_{k/i} = \overline{A_1 B_k} - \overline{A_1 B_1}$$

fica:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k/i} = & b_k - b_1 + (ab)_{1k} - (ab)_{11} + \frac{1}{J} \sum_j \left[(abr)_{1kj} - (abr)_{11j} \right] + \\ & + \frac{\sum_{j\ell} e_{1jk\ell}}{JL} - \frac{\sum_{j\ell} e_{1j1\ell}}{JL} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JL(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JL(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Como:

$$E(\hat{Y}_{k/i}) = b_k - b_1 + (ab)_{1k} - (ab)_{11}$$

e

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = E[\hat{Y}_{k/i} - E(\hat{Y}_{k/i})]^2$$

virá:

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = E \left\{ \left[\begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j \left[(abr)_{1kj} - (abr)_{11j} \right] + \frac{\sum_{\ell} e_{1jk\ell}}{JL} - \\ & - \frac{\sum_{\ell} e_{1j1\ell}}{JL} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JL(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JL(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2 \right\}$$

Desenvolvendo convenientemente virá:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{k/i}) = & \frac{2J}{J^2} \sigma_{abr}^2 + \frac{JL\sigma^2}{J^2L^2} + \frac{J(L-1)\sigma^2}{J^2L^2} + \frac{J^2(J-1)\sigma^2}{J^2L^2(J-1)^2} + \\ & + \frac{(L-1)\sigma^2}{J^2L^2(L-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1)\sigma^2}{J^2L^2(J-1)^2(L-1)^2} \end{aligned}$$

e assim,

$$V(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} \left[L \sigma_{abr}^2 + \sigma^2 + \frac{IK\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

Consequentemente, seu estimador será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} \left[E_b + f.(IK - 2).E_c \right]$$

Também por SATTERTHWAITE chega-se à:

$$n'_3 = \frac{\left[E_b + f(IK-2)E_c \right]^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{f^2(IK-2)^2 E_c^2}{n_c}}$$

graus de liberdade associados à variância anterior.

4.3.5. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(A) Dentro do Tratamento (B_1)

Para a combinação de tratamentos $A_1 B_1$ onde ocorreu a sub-subparcela perdida tem-se, analogamente à 4.3.4:

$$\begin{aligned} \frac{A_1 B_1 + y}{JL} = \overline{A_1 B_1} &= a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + b_1 + (ab)_{11} + \\ &+ \frac{\sum_j (abr)_{11j}}{J} + \frac{\sum_\ell c_\ell}{L} + \frac{\sum_\ell (ac)_{1\ell}}{L} + \frac{\sum_\ell (bc)_{1\ell}}{L} + \\ &+ \frac{\sum_\ell (abc)_{11\ell}}{L} + \frac{\sum_{j\ell}'' e_{1j1\ell}}{JL} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JL(L-1)} + \\ &+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JL(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Para outra combinação de tratamento $A_i B_1$ qualquer, o modelo fica:

$$\begin{aligned} \frac{A_i B_1}{JL} = \overline{A_i B_1} = a_i + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{ij}}{J} + b_1 + (ab)_{i1} + \frac{\sum_j (abr)_{i1j}}{J} + \\ + \frac{\sum_l c_l}{L} + \frac{\sum_l (ac)_{il}}{L} + \frac{\sum_l (bc)_{1l}}{L} + \frac{\sum_l (abc)_{i1l}}{L} + \\ + \frac{\sum_{j,l} e_{ij1l}}{JL} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{i/k} = \overline{A_i B_1} - \overline{A_1 B_1} = a_i - a_1 + \frac{1}{J} \sum_j [(ar)_{ij} - (ar)_{1j}] + (ab)_{i1} - \\ - (ab)_{11} + \frac{1}{J} \sum_j [(abr)_{i1j} - (abr)_{11j}] + \\ + \frac{\sum_{j,l} e_{ij1l}}{JL} - \frac{\sum_{j,l} e_{1j1l}}{JL} - \frac{\sum_{l=2}^L e_{111l}}{JL(L-1)} - \\ - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{l=2}^L e_{1j1l}}{JL(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Como

$$E(\hat{Y}_{i/k}) = a_i - a_1 + (ab)_{i1} - (ab)_{11}$$

e a

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = E[\hat{Y}_{i/k} - E(\hat{Y}_{i/k})]^2,$$

substituindo tem-se:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = E \left\{ \left[\frac{1}{J} \sum_j [(ar)_{ij} - (ar)_{1j}] + \frac{1}{J} \sum_j [(abr)_{i1j} - (abr)_{11j}] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sum_{j \neq 1} e_{ij1\ell}}{JL} - \frac{\sum_{j \neq 1} e_{1j1\ell}}{JL} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JL(L-1)} - \frac{J \sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JL(J-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JL(J-1)(L-1)} \right]^2 \right\}$$

Desenvolvendo o quadrado e aplicando a esperança virá:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2J}{J^2} \sigma_{ar}^2 + \frac{2J}{J^2} \sigma_{abr}^2 + \frac{JL\sigma^2}{J^2L^2} + \frac{J(L-1)\sigma^2}{J^2L^2} + \frac{(L-1)\sigma^2}{J^2L^2(L-1)^2} + \\ + \frac{J^2(J-1)\sigma^2}{J^2L^2(J-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1)\sigma^2}{J^2L^2(J-1)^2(L-1)^2}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} \left[KL \sigma_{ar}^2 + L(K-1) \sigma_{abr}^2 + L \sigma_{abr}^2 + (K-1) \sigma^2 + \sigma^2 + \frac{(IK^2-2) \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} + \frac{\sigma^2}{IK(J-1)(L-1)} \right]$$

cujo estimador é dado por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} \left[E_a + (K-1)E_b + f(IK^2-2K)E_c \right]$$

A essa variância estão associados n'_4 graus de liberdade dado por:

$$n'_4 = \frac{\left[E_a + (K-1)E_b + f(IK^2-2K)E_c \right]^2}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{(K-1)^2 E_b^2}{n_b} + \frac{f^2 (IK^2-2K)^2 E_c^2}{n_c}}$$

determinado através da fórmula de SATTERTHWAITE.

4.3.6. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(C) Dentro do Tratamento (A_1)

A expressão do modelo matemático representativo da média da combinação dos tratamentos $A_1 C_1$, relativa à perda da sub-sub-unidade, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 C_1 + y}{JK} = \overline{A_1 C_1} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{1k}}{K} + \\
+ \frac{\sum_{jk} (abr)_{1kj}}{JK} + c_1 + (ac)_{11} + \frac{\sum_k (bc)_{k1}}{K} + \\
+ \frac{\sum_k (abc)_{1k1}}{K} + \frac{\sum_{jk} e_{1j k 1}}{JK} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} + \\
+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j 11}}{JK(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j 1 \ell}}{JK(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Para outra combinação $A_1 C_\ell$ qualquer, a expressão será:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 C_\ell}{JK} = \overline{A_1 C_\ell} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{1k}}{K} + \frac{\sum_{jk} (abr)_{1kj}}{JK} + \\
+ c_\ell + (ac)_{1\ell} + \frac{\sum_k (bc)_{k\ell}}{K} + \frac{\sum_k (abc)_{1k\ell}}{K} + \\
+ \frac{\sum_{jk} e_{1j k \ell}}{JK}
\end{aligned}$$

O contraste $\hat{Y}_{\ell/i} = \overline{A_1 C_\ell} - \overline{A_1 C_1}$ fica:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\ell/i} = & c_\ell - c_1 + (ac)_{1\ell} - (ac)_{11} + \frac{\sum_{jk} e_{1jk\ell}}{JK} - \\ & - \frac{\sum_{jk} e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JK(J-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JK(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Como:

$$E(\hat{Y}_{\ell/i}) = c_\ell - c_1 + (ac)_{1\ell} - (ac)_{11}$$

e

$$V(\hat{Y}_{\ell/i}) = E[\hat{Y}_{\ell/i} - E(\hat{Y}_{\ell/i})]^2$$

então:

$$V(\hat{Y}_{\ell/i}) = E \left[\begin{aligned} & \frac{\sum_{jk} e_{1jk\ell}}{JK} - \frac{\sum_{jk} e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JK(J-1)} \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JK(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2$$

Desenvolvendo virã:

$$V(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{JK\sigma^2}{J^2K^2} + \frac{J(K-1)\sigma^2}{J^2K^2} + \frac{(L-1)\sigma^2}{J^2K^2(L-1)^2} + \frac{J^2(J-1)\sigma^2}{J^2K^2(J-1)^2} + \\ + \frac{(J-1)(L-1)\sigma^2}{J^2K^2(J-1)^2(L-1)^2}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2}{JK} \left[\sigma^2 + \frac{IL\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

com o estimador dado por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2 E_c}{JK} [1 + f \cdot IL]$$

e com n_c graus de liberdade associados.

4.3.7. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(A) Dentro do Tratamento (C_1)

Analogamente ao caso anterior tem-se para a combinação $A_1 C_1$ onde ocorreu a perda:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 C_1 + y}{JK} = \overline{A_1 C_1} &= a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{1k}}{K} + \\
&+ \frac{\sum_{jk} (abr)_{1kj}}{JK} + c_1 + (ac)_{11} + \frac{\sum_k (bc)_{k1}}{K} + \\
&+ \frac{\sum_k (abc)_{1k1}}{K} + \frac{\sum_{jk} e_{1jk1}}{JK} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} + \\
&+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JK(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j\ell\ell}}{JK(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Para outra média da combinação $A_i C_1$ qual-
quer, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{A_i C_1}{JK} = \overline{A_i C_1} &= a_i + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{ij}}{J} + \frac{\sum_k b_k}{K} + \frac{\sum_k (ab)_{ik}}{K} + \\
&+ \frac{\sum_{jk} (abr)_{ikj}}{JK} + c_1 + (ac)_{i1} + \frac{\sum_k (bc)_{k1}}{K} + \\
&+ \frac{\sum_k (abc)_{ik1}}{K} + \frac{\sum_{jk} e_{ijk1}}{K}
\end{aligned}$$

Assim, o contraste $\hat{\Psi}_{i/\ell} = \overline{A_i C_1} - \overline{A_1 C_1}$ fica:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{i/\ell} = & a_i - a_1 + \frac{1}{J} \sum_j [(\text{ar})_{ij} - (\text{ar})_{1j}] + \frac{1}{JK} \sum_{jk} [(\text{abr})_{ikj} - (\text{abr})_{1kj}] + \\ & + (\text{ac})_{i1} - (\text{ac})_{11} + \frac{\sum e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum' e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} - \\ & - \frac{\sum_{j=2}^J \sum e_{1j11}}{JK(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JK(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Conhecendo a

$$E(\hat{\Psi}_{i/\ell}) = a_i - a_1 + (\text{ac})_{i1} - (\text{ac})_{11}$$

e

$$V(\hat{\Psi}_{i/\ell}) = E[\hat{\Psi}_{i/\ell} - E(\hat{\Psi}_{i/\ell})]^2$$

tem-se:

$$V(\hat{\Psi}_{i/\ell}) = E \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [(\text{ar})_{ij} - (\text{ar})_{1j}] + \frac{1}{JK} \sum_{jk} [(\text{abr})_{ikj} - (\text{abr})_{1kj}] + \\ & + \frac{\sum e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum' e_{1jk1}}{JK} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{JK(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{JK(J-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{JK(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right\}^2$$

Desenvolvendo virã:

$$V(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2J\sigma_{ar}^2}{J^2} + \frac{2JK\sigma_{abr}^2}{J^2K^2} + \frac{JK\sigma^2}{J^2K^2} + \frac{J(K-1)\sigma^2}{J^2K^2} + \frac{(L-1)\sigma^2}{J^2K^2(L-1)^2} + \frac{J^2(J-1)\sigma^2}{J^2K^2(J-1)^2} +$$

$$+ \frac{(J-1)(L-1)\sigma^2}{J^2K^2(J-1)^2(L-1)^2}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2}{JKL} \left[KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + L \sigma^2 + \frac{IL^2\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

O estimador dessa variância é:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2E_a}{JKL} + \frac{2E_c}{JKL} [(L-1) + f(IL^2 - 2)]$$

Pela fórmula de SATTERTHWAITE tem-se:

$$n'_5 = \frac{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{\{E_a + [(L-1) + f(IL^2 - 2)]E_c\}^2}{n_c}}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{[(L-1) + f(IL^2 - 2)]^2 E_c^2}{n_c}}$$

que são os graus de liberdade associados à variância anterior.

4.3.8. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(C) Dentro do Tratamento (B_1)

Para a combinação de tratamentos $B_1 C_1$ onde ocorreu a perda tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{B_1 C_1 + y}{IJ} = \frac{B_1 C_1}{B_1 C_1} &= \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_1 + \frac{\sum_i (ab)_{i1}}{I} + \\
 &+ \frac{\sum_{ij} (abr)_{i1j}}{IJ} + e_1 + \frac{\sum_i (ac)_{i1}}{I} + (bc)_{11} + \\
 &+ \frac{\sum_i (abc)_{i11}}{I} + \frac{\sum_{ij} e_{ij11}}{IJ} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} + \\
 &+ \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)}
 \end{aligned}$$

Para qualquer outra combinação de tratamentos $B_1 C_\ell$ onde não ocorreu a perda, virá:

$$\begin{aligned}
\frac{B_1 C_\ell}{IJ} = \overline{B_1 C_\ell} &= \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_1 + \frac{\sum_i (ab)_{i1}}{I} + \\
&+ \frac{\sum_{ij} (abr)_{ij}}{IJ} + c_\ell + \frac{\sum_i (ac)_{i\ell}}{I} + (bc)_{1\ell} + \\
&+ \frac{\sum_i (abc)_{i1\ell}}{I} + \frac{\sum_{ij} e_{ij1\ell}}{IJ}
\end{aligned}$$

Assim, estrutura-se:

$$\hat{Y}_{\ell/k} = \overline{B_1 C_\ell} - \overline{B_1 C_1}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{\ell/k} &= c_\ell - c_1 + (bc)_{1\ell} - (bc)_{11} + \frac{\sum_{ij} e_{ij1\ell}}{IJ} - \\
&- \frac{\sum_{ij} e_{ij11}}{IJ} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} + \\
&+ \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Sabendo que:

$$E(\hat{Y}_{\ell/k}) = c_\ell - c_1 + (bc)_{1\ell} - (bc)_{11}$$

e ainda:

$$V(\hat{Y}_{\ell/k}) = E[\hat{Y}_{\ell/k} - E(\hat{Y}_{\ell/k})]^2$$

então:

$$V(\hat{Y}_{\ell/k}) = E \left[\begin{aligned} & \frac{\sum_{ij} e_{ij1\ell}}{IJ} - \frac{\sum_{ij} e_{ij11}}{IJ} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} - \\ & - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2$$

Desenvolvendo virá:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{\ell/k}) &= \frac{IJ\sigma^2}{I^2J^2} + \frac{J(I-1)\sigma^2}{I^2J^2} + \frac{(L-1)\sigma^2}{I^2J^2(L-1)^2} + \\ &+ \frac{J^2(J-1)\sigma^2}{I^2J^2(J-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1)\sigma^2}{I^2J^2(J-1)^2(L-1)^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2}{IJ} \left[\sigma^2 + \frac{KL\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

cujo estimador é dado por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2 E_C}{IJ} [1 + f.KL]$$

com n_c graus de liberdade associados.

4.3.9. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos

(B) Dentro do Tratamento (C_1)

A expressão do modelo matemático referente à combinação dos tratamentos $B_k C_\ell$ onde ocorreu a perda, é da da por:

$$\begin{aligned} \frac{B_1 C_1 + y}{IJ} = \frac{B_1 C_1}{I J} = & \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_1 + \frac{\sum_i (ab)_{i1}}{I} + \\ & + \frac{\sum_{ij} (abr)_{i1j}}{IJ} + c_1 + \frac{\sum_i (ac)_{i1}}{I} + (bc)_{11} + \\ & + \frac{\sum_i (abc)_{i11}}{I} + \frac{\sum_{ij} e_{ij11}}{IJ} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Para qualquer outra combinação de tratamentos $B_k C_l$ tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{B_k C_l}{IJ} = \overline{B_k C_l} = & \frac{\sum_i a_i}{I} + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_{ij} (ar)_{ij}}{IJ} + b_k + \frac{\sum_i (ab)_{ik}}{I} + \\ & + \frac{\sum_{ij} (abr)_{ikj}}{IJ} + c_l + \frac{\sum_i (ac)_{il}}{I} + (bc)_{kl} + \\ & + \frac{\sum_i (abc)_{ikl}}{I} + \frac{\sum_{ij} e_{ijk1}}{IJ} \end{aligned}$$

O contraste de interesse

$$\hat{Y}_{k/l} = \overline{B_k C_l} - \overline{B_1 C_l},$$

expresso através do modelo, fica:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{k/l} = & b_k - b_1 + \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(abr)_{ikj} - (abr)_{i1j}] + (bc)_{kl} - \\ & - (bc)_{1l} + \frac{\sum_{ij} e_{ijk1}}{IJ} - \frac{\sum_{ij} e_{ij11}}{IJ} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} - \\ & - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Como,

$$E(\hat{Y}_{k/\ell}) = b_k - b_1 + (bc)_{k1} - (bc)_{11}$$

e

$$V(\hat{Y}_{k/\ell}) = E[\hat{Y}_{k/\ell} - E(\hat{Y}_{k/\ell})]^2$$

então:

$$V(\hat{Y}_{k/\ell}) = E \left[\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{IJ} \sum_{ij} [(abr)_{ikj} - (abr)_{i1j}] + \frac{\sum e_{ijk1}}{IJ} - \\ & - \frac{\sum' e_{ij11}}{IJ} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{IJ(L-1)} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{IJ(J-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{IJ(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right\}^2 \right]$$

Desenvolvendo virã:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{k/\ell}) = & \frac{2IJ \sigma_{abr}^2}{I^2 J^2} + \frac{IJ \sigma^2}{I^2 J^2} + \frac{J(I-1) \sigma^2}{I^2 J^2} + \frac{(L-1) \sigma^2}{I^2 J^2 (L-1)^2} + \\ & + \frac{J^2 (J-1) \sigma^2}{I^2 J^2 (J-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{I^2 J^2 (J-1)^2 (L-1)^2} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_{k/l}) = \frac{2}{IJL} \left[L \sigma_{abr}^2 + L \sigma^2 + \frac{KL^2 \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

A expressão do estimador dessa variância é dada por:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/l}) = \frac{2E_b}{IJL} + \frac{2E_c}{IJL} [(L-1) + f(KL^2-2)]$$

Pelo mesmo processo utilizado anteriormente tem-se:

$$n'_6 = \frac{\{E_b + [(L-1) + f(KL^2-2)]E_c\}^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{[(L-1) + f(KL^2-2)]^2 E_c^2}{n_c}}$$

graus de liberdade.

4.3.10. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (C) Dentro dos Tratamentos (A_1) e (B_1):

Onde ocorreu a perda de sub-subparcela, a média da combinação dos tratamentos $A_1 B_1 C_1$, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 B_1 C_1 + y}{J} &= \frac{A_1 B_1 C_1}{J} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + b_1 + (ab)_{11} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{11j}}{J} + c_1 + (ac)_{11} + (bc)_{11} + \\
&+ (abc)_{111} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{(J-1)} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} - \\
&- \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Para qualquer outra combinação $A_1 B_1 C_\ell$ a expressão do modelo fica:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 B_1 C_\ell}{J} &= \frac{A_1 B_1 C_\ell}{J} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{J} + b_1 + (ab)_{11} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{11j}}{J} + c_\ell + (ac)_{1\ell} + (bc)_{1\ell} + \\
&+ (abc)_{11\ell} + \frac{\sum_j e_{1j1\ell}}{J}
\end{aligned}$$

O contraste $\hat{Y}_{\ell/ik} = \overline{A_1 B_1 C_\ell} - \overline{A_1 B_1 C_1}$, em relação ao modelo matemático, será expresso por:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{\ell/ik} = & c_\ell - c_1 + (ac)_{1\ell} - (ac)_{11} + (bc)_{1\ell} - (bc)_{11} + \\ & + (abc)_{11\ell} - (abc)_{111} + \frac{\sum_j e_{1j1\ell}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \\ & - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{\ell/ik}) = & c_\ell - c_1 + (ac)_{1\ell} - (ac)_{11} + (bc)_{1\ell} - (bc)_{11} + \\ & + (abc)_{11\ell} - (abc)_{111} \end{aligned}$$

e:

$$V(\hat{Y}_{\ell/ik}) = E[\hat{Y}_{\ell/ik} - E(\hat{Y}_{\ell/ik})]^2.$$

Assim, tem-se:

$$V(\hat{Y}_{\ell/ik}) = E \left[\begin{aligned} & \frac{\sum_j e_{1j1\ell}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} + \\ & + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right]^2$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{J \sigma^2}{J^2} + \frac{(J-1) \sigma^2}{(J-1)^2} + \frac{(L-1) \sigma^2}{J^2 (L-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{J^2 (J-1)^2 (L-1)^2}$$

e:

$$V(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2}{J} \left[\sigma^2 + \frac{IKL\sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

ou ainda:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2E_c}{J} [1 + f \cdot IKL]$$

com n_c graus de liberdade associados.

4.3.11. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (B) Dentro dos Tratamentos (A_1) e (C_1)

A média relativa à unidade perdida é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{A \ B \ C}{1 \ 1 \ 1} + y &= \overline{A \ B \ C} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{j} + b_1 + (ab)_{11} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{11j}}{J} + c_1 + (ac)_{11} + (bc)_{11} + \\
&+ (abc)_{111} + \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{(J-1)} + \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} - \\
&- \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Para os tratamentos correspondentes, sem a perda, a média será:

$$\begin{aligned}
\frac{A \ B \ C}{1 \ k \ 1} &= \overline{A \ B \ C} = a_1 + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{1j}}{j} + b_k + (ab)_{1k} + \\
&+ \frac{\sum_j (abr)_{1kj}}{J} + c_1 + (ac)_{11} + (bc)_{k1} + \\
&+ (abc)_{1k1} + \frac{\sum_j e_{1jk1}}{J}
\end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{k/i\ell} &= \overline{A_1 B_k C_1} - \overline{A_1 B_1 C_1} = b_k - b_1 + (ab)_{1k} - (ab)_{11} + \\ &+ \frac{1}{J} \sum_j \left[(abr)_{1kj} - (abr)_{11j} \right] + \\ &+ (bc)_{k1} - (bc)_{11} + (abc)_{1k1} - \\ &- (abc)_{111} + \frac{\sum_j e_{1jk1}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \\ &- \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)}\end{aligned}$$

mas:

$$\begin{aligned}E(\hat{Y}_{k/i\ell}) &= b_k - b_1 + (ab)_{1k} - (ab)_{11} + (bc)_{k1} - (bc)_{11} + \\ &+ (abc)_{1k1} - (abc)_{111}\end{aligned}$$

e:

$$V(\hat{Y}_{k/i\ell}) = E \left[\hat{Y}_{k/i\ell} - E(\hat{Y}_{k/i\ell}) \right]^2 .$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{k/il}) = E \left\{ \left[\frac{1}{J} \sum_j \left[(abr)_{1kj} - (abr)_{11j} \right] + \frac{\sum_j e_{1jk1}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)} \right]^2 \right\}$$

Desenvolvendo virã:

$$V(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2J \sigma_{abr}^2}{J^2} + \frac{J \sigma^2}{J^2} + \frac{(J-1) \sigma^2}{(J-1)^2} + \frac{(L-1) \sigma^2}{J^2 (L-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{J^2 (J-1)^2 (L-1)^2}$$

ou:

$$V(\hat{Y}_{k/il}) = \frac{2}{JL} \left[L \sigma_{abr}^2 + L \sigma^2 + \frac{IKL^2 \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

e a expressão referente a seu estimador será:

$$\hat{V}(Y_{k/il}) = \frac{2 E_b}{JL} + \frac{2 E_c}{JL} [(L-1) + f(IKL^2 - 2)]$$

estando associados n'_7 graus de liberdade, dado por:

$$n'_7 = \frac{\{E_b + [(L-1) + f(IKL^2 - 2)] E_c\}^2}{\frac{E_b^2}{n_b} + \frac{[(L-1) + f(IKL^2 - 2)]^2 E_c^2}{n_c}}$$

4.3.12. Contraste Entre Duas Médias de Tratamentos (A) Dentro dos Tratamentos (B_1) e (C_1)

Para a combinação dos tratamentos $A_{i11} B_{11} C_{11}$ relativa à perda da observação a expressão do modelo é a mesma que foi apresentada nos dois casos anteriores (4.3.10 e 4.3.11). Assim será apresentada apenas a relativa aos demais tratamentos correspondentes à combinação $A_{i11} B_{11} C_{11}$, que é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{A_{i11} B_{11} C_{11}}{J} = \overline{A_{i11} B_{11} C_{11}} = a_i + \frac{\sum_j r_j}{J} + \frac{\sum_j (ar)_{ij}}{J} + b_1 + (ab)_{i1} + \\ + \frac{\sum_j (abr)_{i1j}}{J} + c_1 + (ac)_{i1} + (bc)_{11} + \\ + (abc)_{i11} + \frac{\sum_j e_{ij11}}{J} \end{aligned}$$

Assim, o contraste $\hat{Y}_{i/k\ell} = \overline{A_{i11} B_{11} C_{11}} - \overline{A_{111} B_{11} C_{11}}$, em função do modelo matemático, será expresso por:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{i/k\ell} = & a_i - a_1 + \frac{1}{J} \sum_j \left[(ar)_{ij} - (ar)_{1j} \right] + (ab)_{i1} - (ab)_{11} + \\
& + \frac{1}{J} \sum_j \left[(abr)_{ij} - (abr)_{1j} \right] + (ac)_{i1} - (ac)_{11} + \\
& + (abc)_{i11} - (abc)_{111} + \frac{\sum_j e_{ij11}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \\
& - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{111\ell}}{J(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j1\ell}}{J(J-1)(L-1)}
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_{i/k\ell}) = & a_i - a_1 + (ab)_{i1} - (ab)_{11} + (ac)_{i1} - (ac)_{11} + \\
& + (abc)_{i11} - (abc)_{111}
\end{aligned}$$

e:

$$V(\hat{Y}_{i/k\ell}) = E \left[\hat{Y}_{i/k\ell} - E(\hat{Y}_{i/k\ell}) \right]^2$$

Portanto:

$$V(\hat{Y}_{i/k\ell}) = E \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{J} \sum_j [(\text{ar})_{ij} - (\text{ar})_{1j}] + \frac{1}{J} \sum_j [(\text{abr})_{i1j} - (\text{abr})_{11j}] + \\ & + \frac{\sum_j e_{ij11}}{J} - \frac{\sum_{j=2}^J e_{1j11}}{J-1} - \frac{\sum_{\ell=2}^L e_{11\ell\ell}}{J(L-1)} + \frac{\sum_{j=2}^J \sum_{\ell=2}^L e_{1j\ell\ell}}{J(J-1)(L-1)} \end{aligned} \right\}^2$$

Desenvolvendo virá:

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{i/k\ell}) &= \frac{2J \sigma_{\text{ar}}^2}{J^2} + \frac{2J \sigma_{\text{abr}}^2}{J^2} + \frac{J \sigma^2}{J^2} + \frac{(J-1) \sigma^2}{(J-1)^2} + \\ &+ \frac{(L-1) \sigma^2}{J^2 (L-1)^2} + \frac{(J-1)(L-1) \sigma^2}{J^2 (J-1)^2 (L-1)^2} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$V(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2}{JKL} \left[KL \sigma_{\text{ar}}^2 + KL \sigma_{\text{abr}}^2 + KL \sigma^2 + \frac{IK^2 L^2 \sigma^2}{2IK(J-1)(L-1)} \right]$$

Assim o estimador dessa variância será:

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2(K-1) E_b}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [K(L-1) + f(IK^2 L^2 - 2K)]$$

A essa variância estão associados n'_8 graus de liberdade, que pela fórmula de SATTERTHWAITTE resulta:

$$n'_8 = \frac{\{E_a + (K-1)E_b + [K(L-1) + f(IK^2L^2-2K)]E_c\}^2}{\frac{E_a^2}{n_a} + \frac{(K-1)^2 E_b^2}{n_b} + \frac{[K(L-1) + f(IK^2L^2-2K)]^2 E_c^2}{n_c}}$$

4.3.13. Exemplo Ilustrativo

Em complementação aos resultados obtidos em 4.2.15 são apresentados na Tabela II os valores das estimativas das variâncias das estimativas de contrastes com e sem envolvimento da sub-subparcela perdida, assim como o respectivo número de graus de liberdade associado a cada caso. Verifica-se pela Tabela II a boa concordância existente entre as variâncias e o número de graus de liberdade para os dois casos em apreço.

TABELA II - Resumo dos resultados das estimativas de variâncias de contrastes para os casos com e sem a perda da sub-subparcela, com os respectivos graus de liberdade associados.

CONTRASTES	VARIÂNCIAS			
	SEM A PERDA DA UNIDADE		COM A PERDA DA UNIDADE	
	$\hat{V}(\hat{Y})$	n	$\hat{V}(\hat{Y})$	n
$\hat{Y}_i$	7,2094	9	7,2725	9
$\hat{Y}_k$	8,1808	24	8,2045	24
$\hat{Y}_\ell$	3,4485	71	3,4721	71
$\hat{Y}_{k/i}$	32,7233	24	33,6681	25
$\hat{Y}_{i/k}$	29,0246	33	29,9698	35
$\hat{Y}_{\ell/i}$	13,7940	71	14,7388	71
$\hat{Y}_{i/\ell}$	16,4050	39	17,3502	42
$\hat{Y}_{\ell/k}$	10,3458	71	10,8415	71
$\hat{Y}_{k/\ell}$	15,0777	66	15,5738	68
$\hat{Y}_{\ell/ik}$	41,3819	71	51,0188	71
$\hat{Y}_{k/i\ell}$	59,9337	66	69,9481	76
$\hat{Y}_{i/k\ell}$	56,6133	88	66,2498	99

5. CONCLUSÕES

Do presente trabalho é possível concluir:

a) A estimativa de uma ou mais sub-subparcelas perdidas pode ser obtida, independentemente, em cada núcleo $A_i B_k$.

b) O estimador $y = \frac{J(A_i B_k R_j) + L(A_i B_k C_\ell) - A_i B_k}{(J - 1)(L - 1)}$ é não tendencioso uma vez que não introduz erro adicional a nível de sub-subparcela, que é o nível de ocorrência da perda da observação.

c) Independentemente das correções "U s", que devem ser utilizadas para as somas de quadrados, todas as expressões da esperança dos quadrados médios estão afetadas de um

fator $g = \left[1 + \frac{1}{IK(J-1)(L-1)} \right]$, associado à variância residual (σ^2) a nível de sub-subparcela. Uma única exceção é feita à $E[\text{Q.M.Resíduo (c)}]$ que está corretamente estimada.

d) Observa-se uma identidade nas expressões obtidas para a esperança da correção e da esperança do quadrado médio do resíduo (a), isto é:

$$E[\text{Q.M.Resíduo (a)}] = E(C) = KL \sigma_{ar}^2 + L \sigma_{abr}^2 + g \cdot \sigma^2.$$

e) Para a aplicação do teste F aos componentes de variância, a nível de parcelas e de subparcelas são testados diretamente com os quadrados médios dos resíduos (a) e (b) respectivamente. A nível de sub-subparcelas faz-se necessária a adoção das correções nas somas de quadrados, fato este que dificulta sobremaneira a análise de variância. Sugere-se a utilização do produto $g[\text{Q.M.Resíduo (c)}]$ na estruturação do teste F para os componentes associados a esse nível, como uma forma prática de contornar esse tipo de problema.

f) Os estimadores das variâncias de contrastes envolvendo a unidade perdida, em 12 dos casos possíveis foram:

f.1) Entre duas médias de tratamentos (A):

$$\hat{V}(\hat{Y}_i) = \frac{2}{JKL} \left[E_a + f(I - 2)E_c \right]$$

f.2) Entre duas médias de tratamentos (B):

$$\hat{V}(\hat{Y}_k) = \frac{2}{IJL} \left[E_b + f(K - 2)E_c \right]$$

f.3) Entre duas médias de tratamentos (C):

$$\hat{V}(\hat{Y}_\ell) = \frac{2 E_c}{IJK} (1 + f.L)$$

f.4) Entre duas médias de tratamentos (B) dentro
de um mesmo tratamento (A_i):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i}) = \frac{2}{JL} \left[E_b + f(IK - 2)E_c \right]$$

f.5) Entre duas médias de tratamentos (A) dentro
de um mesmo tratamento (B_k):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k}) = \frac{2}{JKL} \left[E_a + (K - 1)E_b + f(IK^2 - 2K)E_c \right]$$

f.6) Entre duas médias de tratamentos (C) dentro de um mesmo tratamento (A_i):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/i}) = \frac{2 E_C}{JK} (1 + f \cdot IL)$$

f.7) Entre duas médias de tratamentos (A) dentro de um mesmo tratamento (C_ℓ):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2 E_C}{JKL} [(L-1) + f(IL^2 - 2)]$$

f.8) Entre duas médias de tratamentos (C) dentro de um mesmo tratamento (B_k):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/k}) = \frac{2 E_C}{IJ} (1 + f \cdot KL)$$

f.9) Entre duas médias de tratamentos (B) dentro de um mesmo tratamento (C_ℓ):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/\ell}) = \frac{2 E_b}{IJL} + \frac{2 E_C}{IJL} [(L-1) + f(KL^2 - 2)]$$

f.10) Entre duas médias de tratamentos (C) dentro de mesmos níveis de tratamentos (A_i) e (B_k):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{\ell/ik}) = \frac{2 E_C}{J} (1 + f \cdot IKL)$$

f.11) Entre duas médias de tratamentos (B) dentro de
mesmos níveis de tratamentos (A_i) e (C_ℓ):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{k/i\ell}) = \frac{2 E_b}{JL} + \frac{2 E_c}{JL} [(L-1) + f(IKL^2 - 2)]$$

f.12) Entre duas médias de tratamentos (A) dentro de
mesmos níveis de tratamentos (B_k) e (C_ℓ):

$$\hat{V}(\hat{Y}_{i/k\ell}) = \frac{2 E_a}{JKL} + \frac{2(K-1)E_b}{JKL} + \frac{2 E_c}{JKL} [K(L-1) + f(IK^2L^2 - 2K)]$$

onde:

E_a é o quadrado médio do resíduo (a);

E_b é o quadrado médio do resíduo (b);

E_c é o quadrado médio do resíduo (c);

$$f = \frac{1}{2IK(J-1)(L-1)}$$

e ainda:

I = número de tratamentos primários (A);

K = número de tratamentos secundários (B);

L = número de tratamentos terciários (C), e:

J = número de blocos.

g) Nos casos em que não existir perda de unidade experimental o valor de f é zero e, conseqüentemente, as expressões apresentadas correspondem às publicadas por COCHRAN e COX (1957), LITTLE e HILLS (1977) e outros, para a estimativa da variância de contrastes de médias de tratamentos sem perda de informações.

6. LITERATURA CITADA

- ALLAN, F.E. e J. WHISHART, 1930. Method of Estimative the Yield of a Missing Plot in Field Experimental Work. Journal of Agricultural Science. Cambridge, 20: 399-406.
- ANDERSON, R.L., 1946. Missing Plot Techniques. Biometrics. Washington, 2: 41-47.
- CAMPOS, H., 1964. Estudo sobre a Análise de Experimentos com Parcelas Perdidas. Piracicaba, ESALQ/USP, 84 p. (Tese de Doutorado)
- COCHRAN, W.G. e G. COX, 1957. Experimental Designs. 2ª ed. New York, John Wiley & Sons. 611 p.
- HADDAD, M. de L., 1978. Estudo sobre Parcela Perdida em Delineamento de Parcelas Subdivididas. Piracicaba, ESALQ/USP, 53 p. (Dissertação de Mestrado)

- JOHN, J.A. e M.H. QUENOUILLE, 1977. Experiments: Design and Analysis. London, Charles Griffin & Company Ltda. 296 p.
- LITTLE, T.M. e F.J. HILLS, 1977. Agricultural Experimentation. New York, John Wiley & Sons. 350 p.
- PIMENTEL GOMES, F., 1976. Curso de Estatística Experimental. 6ª ed., Piracicaba, ESALQ/USP. 430 p.
- PINHO, S.Z., 1973. Observações Perdidas em Delineamentos em Parcelas Subdivididas e Parcelas Sub-subdivididas. Botu_{catu}, UNESP, 173 p. (Tese de Doutorado)
- PINHO, S.Z., 1975. Estudo dos Componentes de Variância nos Experimentos em Parcelas Subdivididas com Uma Observação Perdida. Piracicaba, ESALQ/USP, 45 p. (Dissertação de mestrado)
- SANCHES, S.F., 1978. Análise de um Experimento em Quadrado Latino com Perda de Parcelas, Linha, Coluna ou Tratamento. Piracicaba, ESALQ/USP, 100 p. (Dissertação de Mestrado)
- SANCHES, S.F., 1980. Análise de Experimentos em Parcelas Subdivididas, em blocos casualizados, com Perda de Uma ou Mais Subparcelas ou parcelas. Piracicaba, ESALQ/USP, 119 p. (Tese de Doutorado)

STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1960. Principles and Procedures of Statistics. New York, McGraw-Hill Book Company Inc. 481 p.

TRUITT, J.T. e H.F. SMITH, 1956. Adjustment by Covariance and Consequent Tests of Significance in Split-plot Experiments. *Biometrics*. Washington, 12: 23-39.

YATES, F., 1933. The Analysis of Replicated Experiments when the Field Results are Incomplete. Empire Journal of Experimental Agriculture. Oxford, 1: 129-142.

A P P E N D I C E

Dados originais de "DEW-LAP"⁽¹⁾ de colmos de cana-de-açúcar, aos 15 meses de idade, de um ensaio sobre "Espaçamentos x Variedades x Densidades" desenvolvido pela seção de Mecanização da Estação Regional Norte do IAA/PLANALSUCAR.

ESPAÇAMENTOS	DENSIDADES VARIEDADES	BLOCOS											
		I			II			III			IV		
		D ₁	D ₂	D ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₁	D ₂	D ₃	D ₁	D ₂	D ₃
E ₁	V ₁	189	211	210	215	224	223	209	215	225	204	207	209
	V ₂	232	231	237	228	216	232	218	224	228	222	217	220
	V ₃	268	288	291	253	275	283	260	282	272	267	289	279
E ₂	V ₁	224	246	220	232	230	232	219	225	221	223	236	227
	V ₂	236	223	224	255	260	242	242	233	230	232	228	236
	V ₃	279	271	290	283	274	281	273	265	285	264	276	282
E ₃	V ₁	240	221	244	Y	224	225	235	228	230	224	257	224
	V ₂	228	226	236	204	234	231	218	224	215	232	217	211
	V ₃	304	302	303	288	274	286	267	293	283	253	271	282
E ₄	V ₁	220	236	228	230	254	248	235	242	225	223	239	236
	V ₂	252	244	259	243	239	223	214	229	236	224	217	210
	V ₃	286	277	247	271	268	256	264	275	249	259	273	284

O valor estimado para y foi 224 cm.

(1) Altura da base do colmo da cana até a última lígula visível.