DELINEAMENTO EM ÂNGULOS

MARIA EUNICE O. C. RODRIGUES

Médica - Veterinária

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO FRANCISCO IEMMA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA

Estado de São Paulo - Brasil

Julho - 1984

Aos meus pais,
Ruy e Circe

Ao meu esposo
Abilio

Ao meu filho
Rodrigo

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Antonio Francisco Iemma, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação segura e de grande valia na realização deste trabalho.

Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agrônômica, pela solicitude e incentivo que sempre nos proporcionou.

Ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, pelo apoio, compreensão e ensinamentos desde o início de nossa caminhada.

Ao Colega Professor Lauro Boechat Batista, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, pelo valioso apoio na realização deste trabalho.

Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos conhecimentos que nos foram transmitidos.

Ao Dr. Jacintho Mendonça Jr. (in memoriam) pela
confiança em nós depositada.

À Universidade Federal Fluminense pela oportunide
dade do Curso.

À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves pelo trabal
ho de datilografia.

A todos aqueles que de um modo ou de outro te-
nham colaborado para a conclusã~o deste trabalho.

Í N D I C E

Página

RESUMO	viii
SUMMARY	x
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DA LITERATURA	3
3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	14
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO	60
5.1. Determinação dos Coeficientes do Polinômio do Segundo Grau	63
5.2. Determinação das Somas de Quadrados	65
5.3. Quadro da Análise de Variância	68

5.4. Determinação das Estimativas das Variâncias das Estimativas dos Coeficientes Polino- miais	69
5.5. Determinação dos Valores de "t" para Testar as Hipóteses de que as Estimativas dos Coeficientes Polinomiais não Diferem de Zero	70
5.6. Determinação da Equação Polinomial	72
5.7. Estudo do Máximo, Mínimo ou Ponto de Sela Através de Congruência de Matrizes	72
5.8. Determinação do Máximo da Função	73
6. CONCLUSÕES	75
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

DELINEAMENTO EM ÂNGULOS

Autora: Maria Eunice O.C. Rodrigues

Orientador: Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma

RESUMO

Foi apresentado um novo tipo de delineamento, denominado Delineamento em Ângulos, que tem por finalidade o ajustamento aos dados, de um polinômio do segundo grau, com duas variáveis. Nesse delineamento, foram considerados oito novos pontos, em relação ao delineamento composto central, escolhidos de modo a ortogonalizar o referido delineamento.

O delineamento é formado por $16 + P$ pontos, onde P refere-se ao número de pontos centrais $(0, 0)$, enquanto que 12 pontos dos demais referem-se a três fatoriais 2×2 nos quais os níveis estão codificados em -1 e $+1$, $\pm \delta \cos 30^\circ$ e $\pm \delta \sin 30^\circ$, $\pm \delta \cos 60^\circ$ e $\pm \delta \sin 60^\circ$ e os quatro restantes estão codificados em $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ e $(0, -\delta)$.

Foram obtidas as fórmulas que permitem a ortogonalização do delineamento e as que determinam as estimativas

dos coeficientes do polinômio do segundo grau com suas respectivas estimativas das variâncias, quando o delineamento é ortogonal, bem como suas respectivas somas de quadrados.

O Delineamento em Ângulos mostrou-se mais preciso que o Fatorial 3^2 e menos preciso do que os Fatoriais 5^2 e 7^2 na estimação dos coeficientes polinomiais.

Levando em conta a mesma área total a ser gasta, o Delineamento em Ângulos é mais preciso quando se usa um ponto central e neste caso ele é mais preciso do que os fatoriais 5^2 e 7^2 na estimação dos coeficientes β_i e β_{12} e menos preciso que o fatorial 3^2 , 5^2 e 7^2 na estimação do coeficiente β_{ii} .

ANGLE DESIGN

Author: Maria Eunice O.C. Rodrigues

Adviser: Antonio Francisco Iemma

SUMMARY

A new design was developed specifically for fitting to data a second-degree polynomial equation with two variable, denominated ANGLE DESIGN. Criteria in constructing the design were: to make it orthogonal when two factors are involved, and nine levels of each of the factors.

There were 16 treatment combinations and P central points. Of the 16 treatment combinations, four from each of three 2^2 factorial designs where the coded levels of the x-variable were -1 and $+1$, $\pm \delta \sin 30^\circ$ and $\pm \delta \cos 30^\circ$, and $\pm \delta \sin 60^\circ$ and $\pm \delta \cos 60^\circ$, plus additional treatment combinations $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ and $(0, -\delta)$.

Formulas to make the design orthogonal, to estimate the polynomial equation coefficients, to estimate the variances of the polynomial regression coefficients, and to

estimate the sums of square of the polynomial equation coefficients, were determined.

The Angle Design was more precise than the 3^2 factorial design and less precise than the 5^2 and 7^2 factorial designs when we consider the estimation of the polynomial equation coefficients.

It was verified that the variances of the polynomial equation coefficients have a minimum when $P = 1$, in the Angle Design, when it was used the same area.

When it was compared the precision of this design with one central point with the factorial designs, it was verified that it is more precise than the 5^2 , and 7^2 factorial designs when it was considered the $\hat{\beta}_1$ and $\hat{\beta}_{12}$ coefficients. On the other hand, it was less precise than the 3^2 , 5^2 , and 7^2 factorial designs, in the case of the $\hat{\beta}_{11}$ coefficient.

1. INTRODUÇÃO

Há quase meio século que os esquemas fatoriais começaram a ser estudados. Através desses esquemas, pode-se ajustar aos dados diversos modelos matemáticos com o intuito de se determinar os pontos críticos da superfície em estudo.

Embora sejam notórias as vantagens dos esquemas fatoriais completos, foram introduzidos os fatoriais fracionários de modo a diminuir o tamanho dos blocos quando há um número grande de tratamentos.

Posteriormente, os compostos centrais foram desenvolvidos com o objetivo de se ajustar aos dados polinômios do segundo grau e esse foi, certamente, um passo decisivo para o estudo de novos delineamentos.

Recentemente, vários delineamentos vem sendo apresentados no estudo de superfícies de resposta, de modo a minimizar o custo de experimentação.

O autor se propõe a apresentar um novo delinea-
mento adequado ao estudo de superfície de resposta, com duas
variáveis, onde existem 3 fatoriais 2^2 acrescidos de pontos
axiais, possibilitando aos pesquisadores a escolha dos valores
de P (pontos centrais) e δ (parâmetro) de modo a estimar os
coeficientes polinomiais com melhor precisão'.

2. REVISÃO DA LITERATURA

YATES (1937) introduziu na Estatística Experimental os esquemas fatoriais, dos quais descreveu inúmeros tipos. Segundo o autor, quando há um número elevado de tratamentos resultantes das combinações entre os níveis dos fatores, há dificuldades na eliminação de diferenças de fertilidaade dentro de uma mesma repetição e, conseqüentemente, o desvio padrão por parcela tende a ser alto em comparação com experimentos simples que envolvam poucos tratamentos, podendo resultar daí uma pequena eficiência relativa dos esquemas fatoriais.

FINNEY (1945) apresentou os fatoriais fracionários com o objetivo de evitar o uso de um número grande de combinações entre os níveis dos fatores por bloco.

Os fatoriais fracionários foram estudados por diversos autores, dentre eles DANIEL (1956), NELDER (1963) e MARGOLIN (1967).

DANIEL (1956) introduziu os conceitos de eficiência dos graus de liberdade e eficiência da variância para um fatorial fracionário.

A eficiência da variância de um fatorial fracionário é obtida pela comparação da média das variâncias das estimativas dos efeitos com a menor variância que poderia ser esperada com os fatores nos níveis ± 1 . E

a eficiência dos graus de liberdade é a razão entre número dos efeitos estimados e o número de graus de liberdade no delineamento. No estudo de eficiência dos graus de liberdade dos fatoriais fracionários, o autor afirmou que as frações 2^{5-1} têm 100% de eficiência de graus de liberdade.

BOX e WILSON (1951) introduziram os delineamentos compostos centrais nos estudos de polinômios do segundo grau ajustados a dados provenientes destes delineamentos, com o intuito de minimizar o número de tratamentos.

O polinômio do segundo grau com k variáveis, utilizados pelos autores, é dado pela expressão:

$$Y_u = \beta_0 + \sum_{i=1}^K \beta_i X_{iu} + \sum_{i=1}^K \beta_{ii} X_{iu}^2 + \sum_{i < j=2}^K \beta_{ij} X_{iu} X_{ju} + e_u$$

Os delineamentos apresentados, chamados delineamentos compostos, são construídos adicionando-se outros tratamentos ao fatorial 2^k .

Os delineamentos compostos são divididos em dois grupos, a saber: delineamentos compostos centrais (mais importantes) e delineamentos compostos não-centrais.

Os delineamentos compostos centrais são obtidos adicionando ao esquema fatorial 2^k onde os níveis das variáveis

veis x estão codificados em -1 e $+1$, as seguintes combinações de tratamentos:

$$\begin{array}{lll}
 (0, 0, \dots, 0) ; & (-\alpha, 0, \dots, 0) ; & (\alpha, 0, \dots, 0) \\
 & (0, -\alpha, \dots, 0) ; & (0, \alpha, \dots, 0) \\
 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 & (0, 0, \dots, -\alpha) ; & (0, 0, \dots, \alpha)
 \end{array}$$

Assim, o número total de tratamentos é dado por $2^k + 2k + 1$, sendo que no caso de $k = 2$ resultam 9 tratamentos, como a seguir:

Delineamento Composto Central, com 2 fatores

O ponto central (0 ,0) pode ser repetido P vezes e nesse caso o delineamento fica constituído de $2^k + 2k + P$.

O valor de α pode ser escolhido para fazer os coeficientes do polinômio do segundo grau ortogonais uns aos outros, ou para minimizar os erros que são originados se a verdadeira forma da superfície de resposta não é quadrática ou ainda para dar ao delineamento a propriedade de ser rotacional.

BOX e HUNTER (1957) propuseram o critério de rotacionalidade nos delineamentos compostos centrais, através do qual a variância da estimativa da resposta do polinômio de segundo grau é a mesma para todos os pontos equidistantes do ponto central. Os autores utilizaram o mesmo polinômio que BOX e WILSON (1951). No caso de dois fatores, o valor de α para que o composto central seja rotacional, é $\sqrt{2}$.

TRAMEL (1957) , ROJAS (1963 ,1972) , STAVROU e CADY (1967) e VOSS e PESEK (1967) estudaram o assunto referente a superfície de resposta tendo sugerido diversos novos delineamentos.

TRAMEL (1957) sugeriu o delineamento "triplo cubo", para três fatores, num total de 31 pontos, com nove níveis para cada fator, enquanto que STAVROU e CADY (1967) propuseram uma modificação no delineamento de TRAMEL (1957), colocando em dois blocos os tratamentos de cada cubo e repetindo

os pontos axiais em cada bloco, com o objetivo de diminuir o erro experimental sem modificar a estimação dos parâmetros.

VOSS e PESEK (1967) propuseram um delineamento composto central aumentado, com 19 pontos. Os 4 tratamentos adicionais correspondem a meio cubo nos níveis ± 2 .

ROJAS (1963) propôs o delineamento "San Cristóbal", delineamento este, originado do delineamento composto, onde foi incluído um tratamento testemunha. Em 1972, ROJAS propôs o delineamento "San Cristóbal Ortogonalizado".

No Brasil, os estudos mais aprofundados com relação a superfície de resposta começaram com CAMPOS (1967), que comparando o delineamento composto central rotativo para três fatores com um só ponto central e o fatorial 3^3 , concluiu que para ajustamento de superfície de resposta o fatorial é mais preciso do que o delineamento composto central rotativo.

Para chegar a esta conclusão, o autor se baseia nas variâncias das estimativas dos parâmetros, depois de reduzi-las à mesma unidade, obtendo:

Tabela 1. Variâncias das estimativas dos parâmetros nos Delineamentos Composto Central Rotativo e Fatorial 3^3 .

PARÂMETROS	Delineamento Composto Central Rotativo	Fatorial 3^3
Quadráticos	0,7804	0,1667
Interação	0,6250	0,0833
Lineares	0,1190	0,0555

PIMENTEL GOMES (1969) apresentou um estudo de determinação de ponto de máximo, ponto de mínimo ou ponto de sela nas superfícies de resposta, usando o critério de congruência de matrizes. Naquele trabalho, o autor informou que CAMPOS (1967) encontrou 84% de casos de pontos de sela quando aplicou congruência de matrizes em 50 ensaios fatoriais de 3^3 , bem conduzidos, de adubação de milho com N, P e K.

PIMENTEL GOMES (1969) trabalhou com o mesmo modelo polinomial utilizado por BOX e WILSON (1951).

MORAES (1969), estudou, através de cálculos computacionais, a superfície polinomial de um ensaio fatorial de adubação N, P, K, na Venezuela, em blocos casualizados, onde as doses foram não equidistantes.

PENTEADO e BATISTA (1971) estudaram a eficiência do delineamento composto central em comparação com os fatoriais completos de dois fatores e chegaram a conclusão de que o delineamento composto central é menos eficiente do que o fatorial 5×5 .

PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972) propuseram correções de modo que os intervalos de comprimento fossem iguais quando estudaram a eficiência do delineamento composto central rotativo, com um ponto central, em relação ao fatorial 3^3 . Naquele trabalho, onde o intervalo entre os pontos $(-\sqrt{3}, 0, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0, 0)$ é igual a $2\sqrt{3}$, os autores propuseram correções de modo que o intervalo fosse igual ao do fatorial 3^3 de comprimento 2. Para tanto, os autores multiplicaram as coordenadas dos pontos no delineamento composto central rotativo por $1/\sqrt{3}$, obtendo as seguintes variâncias:

Tabela 2. Variâncias das estimativas dos parâmetros nos Delineamentos Composto Central Rotativo e Fatorial 3^3 .

Parâmetros	Delineamento Composto	
	Central Rotativo	Fatorial 3^3
Quadráticos	21,07 σ^2	4,50 σ^2
Interação	16,88 σ^2	2,25 σ^2
Lineares	3,21 σ^2	1,50 σ^2

BATISTA (1976) estudou a ortogonalização no delineamento composto central, com um máximo de quatro fatores e, determinou as fórmulas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, com somente um ponto central. Nesse trabalho, o autor apresentou a seguinte tabela que torna ortogonal o delineamento composto central:

Tabela 3. Valores de α que ortogonalizam o delineamento composto central, para k variáveis.

Valor de k	2	3	4
Valor de α	1,000000	1,215412	1,414214

PENTEADO e BATISTA (1971), PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), BATISTA (1976) e BATISTA e SILVA (1978) em seus estudos usaram o mesmo modelo matemático que traduzia a equação polinomial utilizada por BOX e WILSON (1951).

BATISTA e SILVA (1978) estudaram também a ortogonalização do delineamento composto central, usando diversos pontos centrais, concluindo que quando são usados oito pontos centrais, a precisão da estimativa do coeficiente quadrático

β_{ii} é praticamente igual a precisão da estimativa do coeficiente linear β_i .

BATISTA (1978) apresentou um novo tipo de delineamento, denominado "em círculos", que tem por base, na formulação, os princípios de utilização de maior número de níveis para cada fator, menor número de combinações entre eles e independência na estimação dos coeficientes. Consta de dois conjuntos de oito pontos com distâncias $\sqrt{2}$ e $\alpha \sqrt{2}$ do centro, e mais P pontos centrais, que abrangem nove níveis diferentes de cada fator. Nesse trabalho o autor utilizou o modelo matemático:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \beta_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \\ + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u$$

que é semelhante ao proposto por BOX e WILSON (1951), onde comparando os dois modelos verifica-se que $\beta_0 = \bar{Y} - \beta_{11} \bar{X}_1^2 - \beta_{22} \bar{X}_2^2$ como vemos:

$$a) Y_u = \beta_0 + \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} X_{1u}^2 + \beta_{22} X_{2u}^2 + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u$$

$$b) Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \beta_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \\ + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u$$

Igualando-se a $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$ tem-se:

$$\beta_0 = \bar{Y} - \beta_{11} \bar{X}_1^2 - \beta_{22} \bar{X}_2^2$$

CONAGIN (1979) estudou os delineamentos compostos centrais duplos que constam de dois conjuntos fatoriais, completos ou fracionários, nos níveis ± 1 e $\pm B$, de um número duplo de pontos axiais (nos níveis $\pm \alpha$ e $\pm i\alpha$ para cada um dos fatores) e por um certo número de pontos centrais. Os valores 1 e B representam os níveis da parte fatorial, enquanto que α e $i\alpha$ representam os níveis da parte axial. Tais delineamentos apresentam maior flexibilidade do que os compostos centrais pois permitem o estudo de k fatores em vários níveis (5 ou mais) e a partição ortogonal em blocos.

JORGE (1980) estudou o Delineamento Guadalupe para três fatores, analisado através de modelo de regressão

polinomial quadrática e concluiu que para ensaios de adubação, o Delineamento Guadalupe é menos eficiente que o fatorial 3^3 e mais eficiente que o composto central original.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Suponha-se que se tenha uma idéia do ponto de máximo (ou de mínimo) da resposta do polinômio do segundo grau. Próximo deste ponto, fixa-se um ponto com coordenadas $(0, 0)$, o qual poderá ser repetido P vezes. Em relação a este ponto, adiciona-se um fatorial 2×2 no qual os níveis estão codificados em -1 e $+1$. A seguir são acrescentados mais dois fatoriais 2×2 , sendo que no primeiro os níveis estão codificados em $\pm \delta \cos 30^\circ$ e $\pm \delta \sin 30^\circ$ e no segundo os níveis estão codificados em $\pm \delta \cos 60^\circ$ e $\pm \delta \sin 60^\circ$. Finalmente adiciona-se os pontos codificados $(\delta, 0)$, $(-\delta, 0)$, $(0, \delta)$ e $(0, -\delta)$. Assim, passa-se a ter um novo delineamento que será denominado Delineamento em Ângulos (figura 1).

Este novo delineamento poderá ter um máximo de 9 níveis para cada variável pois se, por exemplo, $\delta = 1$, cada variável terá 7 níveis devido a coincidência dos níveis -1 e $+1$ do fatorial 2^2 com os pontos axiais. O to

Figura 1. Delineamento em Ângulos.

15

tal de números de combinações entre os níveis das variáveis será de $16 + P$.

O valor de δ poderá ser escolhido de modo a ortogonalizar o Delineamento em Ângulos. Para tanto, é necessário que a matriz $X'X$ obtida do modelo matemático seja diagonal.

3.1. Modelo Matemático

O modelo matemático de um polinômio do segundo grau que estima os coeficientes polinomiais neste delineamento é dado por:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \beta_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \\ + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u$$

A utilização desse modelo em detrimento do modelo usado por BOX e WILSON (1951), tem como objetivo a facilidade de cálculos, já que ambos os modelos são semelhantes. Este modelo foi adotado pois simplifica a diagonalização da matriz $X'X$.

Do modelo matemático, temos em forma matricial, o seguinte sistema de equações:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \text{ onde}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ \dots \\ y_{16+P} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-A & 1-A & 1 \\ 1 & -1 & 1-A & 1-A & -1 \\ -1 & 1 & 1-A & 1-A & -1 \\ -1 & -1 & 1-A & 1-A & 1 \\ 0,5\delta & b\delta & 0,25\delta^2-A & 0,75\delta^2-A & 0,5b\delta^2 \\ 0,5\delta & -b\delta & 0,25\delta^2-A & 0,75\delta^2-A & -0,5b\delta^2 \\ -0,5\delta & b\delta & 0,25\delta^2-A & 0,75\delta^2-A & -0,5b\delta^2 \\ -0,5\delta & -b\delta & 0,25\delta^2-A & 0,75\delta^2-A & 0,5b\delta^2 \\ b\delta & 0,5\delta & 0,75\delta^2-A & 0,25\delta^2-A & 0,5b\delta^2 \\ b\delta & -0,5\delta & 0,75\delta^2-A & 0,25\delta^2-A & -0,5b\delta^2 \\ -b\delta & 0,5\delta & 0,75\delta^2-A & 0,25\delta^2-A & -0,5b\delta^2 \\ -b\delta & -0,5\delta & 0,75\delta^2-A & 0,25\delta^2-A & 0,5b\delta^2 \\ \delta & 0 & \delta^2-A & 0-A & 0 \\ -\delta & 0 & \delta^2-A & 0-A & 0 \\ 0 & \delta & 0-A & \delta^2-A & 0 \\ 0 & -\delta & 0-A & \delta^2-A & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0-A & 0-A & 0 \end{bmatrix}$$

Onde: $y_u = Y_u - \bar{Y}$

$u = 1, 2, \dots, 16 + P$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{16} \\ \dots \\ e_{16+P} \end{bmatrix}$$

Sendo na matriz X: $0,5 = \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$$b = \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0,8660254$$

$$b^2 = 0,75$$

$$A = \overline{X_1^2} = \overline{X_2^2}, \quad \text{logo}$$

$$A = \frac{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (0,5\delta)^2 + (0,5\delta)^2 + (-0,5\delta)^2 + (-0,5\delta)^2 + (b\delta)^2 + (b\delta)^2 + (-b\delta)^2 +$$

$$16 + P$$

$$\frac{+ (-b\delta)^2 + (\delta)^2 + (-\delta)^2 + 0^2 + \dots + 0^2}{16 + P}$$

$$A = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 0,25\delta^2 + 0,25\delta^2 + 0,25\delta^2 + 0,25\delta^2 + 0,75\delta^2 + 0,75\delta^2 +$$

$$16 + P$$

$$\frac{+ 0,75\delta^2 + 0,75\delta^2 + \delta^2 + \delta^2 + 0 + \dots + 0}{16 + P}$$

$$A = \frac{4 + 4\delta^2 + 2\delta^2}{16 + P} \quad \dots \quad A = \frac{4 + 6\delta^2}{16 + P}$$

3.2. Equações Normais

Através do método dos quadrados mínimos, que consiste em minimizar a soma dos quadrados dos erros, obtem-se as equações normais, como se segue:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = Y - X\beta$$

$$\varepsilon' = (Y' - \beta'X')$$

$$z = \varepsilon'\varepsilon = (Y' - \beta'X')(Y - X\beta)$$

$$z = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

Mas $\beta'X'Y = Y'X\beta$, pois ambas são escalares

Assim,

$$z = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

$$dz = \Phi - 2(d\beta')X'Y + \beta'X'X(d\beta) + (d\beta')X'X\beta$$

Como $\beta'X'X(d\beta) = (d\beta')X'X\beta$, pois ambas tem dimensão 1×1 , vem :

$$dz = \Phi - 2(d\beta')X'Y + 2(d\beta')X'X\beta$$

$$dz = 2d\beta' [X'X\beta - X'Y]$$

As equações normais são obtidas quando iguala-se dz a Φ . Portanto, vem:

$$2(d\hat{\beta}') [X'X\hat{\beta} - X'Y] = \Phi$$

Assim, como $d\hat{\beta}'$ é sabidamente diferente de Φ pois é uma matriz de acréscimos, tem-se:

$$X'X\hat{\beta} - X'Y = \Phi$$

$X'X\hat{\beta} = X'Y$, que é o sistema de equações normais.

Assim, facilmente pode-se obter a matriz $X'X$, conforme descrito à seguir:

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & M & 0 \\ 0 & 0 & M & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 + (3/2)\delta^4 \end{bmatrix}$$

onde

$$D = 4 + 9/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16 + P}$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16 + P}$$

De fato, para D, tem-se:

$$D = 4(1-A)^2 + 4(1/4\delta^2 - A)^2 + 4(3/4\delta^2 - A)^2 + 2(\delta^2 - A)^2 + (P+2)(0-A)^2$$

$$D = (4+4A^2-8A) + (1/4\delta^4 + 4A^2 - 2A\delta^2) + (9/4\delta^4 + 4A^2 - 6A\delta^2) + (2\delta^4 + 2A^2 - 4A\delta^2) + (P+2)A^2$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 + (P + 16)A^2 - A(8 + 12\delta^2)$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 + [(P + 16)A - (8 + 12\delta^2)]A$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 + [(P + 16) \frac{(4 + 6\delta^2)}{P + 16} - (8 + 12\delta^2)]A$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 + [4 + 6\delta^2 - 8 - 12\delta^2]A$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 + [-4 - 6\delta^2]A$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 - [4 + 6\delta^2]A$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 - [4 + 6\delta^2] \frac{[4 + 6\delta^2]}{16+P}$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16+P}$$

De modo análogo, para M, vem:

$$M = 4(1-A)^2 + 8(1/4\delta^2 - A)(3/4\delta^2 - A) + 4(\delta^2 - A)(0 - A) + P(0 - A)^2$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 + A^2(P + 16) - A(8 + 12\delta^2)$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 + A[(P + 16)A - (8 + 12\delta^2)]$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 + A[(P + 16) \frac{(4 + 6\delta^2)}{16+P} - (8 + 12\delta^2)]$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 + A[4 + 6\delta^2 - 8 - 12\delta^2]$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 + A(-4 - 6\delta^2)$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 - A(4 + 6\delta^2)$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)}{16+P} (4 + 6\delta^2)$$

$$M = 4 + 3/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16 + P}$$

E a matriz $X'Y$ é dada por:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_u X_{1u} y_u \\ \sum_u X_{2u} y_u \\ \sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \\ \sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \\ \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema de equações normais tem a for-

ma:

$$\begin{bmatrix} 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & M & 0 \\ 0 & 0 & M & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 + (3/2\delta^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_{11} \\ \hat{\beta}_{22} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_u X_{1u} y_u \\ \sum_u X_{2u} y_u \\ \sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \\ \sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \\ \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u \end{bmatrix}$$

onde:

$$M = 4 + 3/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16 + P}$$

$$D = 4 + 9/2\delta^4 - \frac{(4 + 6\delta^2)^2}{16 + P}$$

3.3. Solução do Sistema

Das equações normais $X'X\hat{\beta} = X'Y$, obtem-se a solução do sistema através da matriz inversa $(X'X)^{-1}$, pois a matriz $X'X$ é não singular. Portanto, vem:

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$I\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(4 + 6\delta^2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1/(4 + 3/2\delta^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_u X_{1u} y_u \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $\hat{\beta}_1$ e fazendo $M = 0$, vem:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{4 + 6\delta^2} \cdot \sum_u X_{1u} y_u$$

e de modo análogo para os demais coeficientes polinomiais.

3.4. Soma de Quadrados

A soma dos quadrados devido aos erros é dada por:

$$SQ \text{ erro} = \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$$

$$SQ \text{ erro} = (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta})$$

$$SQ \text{ erro} = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Como $X'X\hat{\beta} = X'Y$, vem:

$$SQ \text{ erro} = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'Y$$

$$SQ \text{ erro} = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \Phi$$

Como $Y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'Y$, pois $Y'X\hat{\beta}$ é uma matriz 1×1 , vem:

$$SQ \text{ erro} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

Assim, a soma dos quadrados devido aos parâmetros é dada por:

$$SQ \text{ Par} = \hat{\beta}'X'Y, \text{ onde}$$

$$\hat{\beta}' = [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \hat{\beta}_{11} \quad \hat{\beta}_{22} \quad \hat{\beta}_{12}] \quad e$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_u X_{1u} y_u \\ \sum_u X_{2u} y_u \\ \sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2)}{16 + P} \sum_u y_u \\ \sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2)}{16 + P} \sum_u y_u \\ \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u \end{bmatrix}$$

3.5. Variâncias das estimativas

As variâncias das estimativas dos coeficientes polinomiais serão dadas através da matriz de dispersão (matriz de variâncias e covariâncias) que é obtida, segundo SEARLE (1971), dentre outros, por:

$$V(\hat{\beta}) = E[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]'$$

$$V(\hat{\beta}) = E\{(X'X)^{-1}X'Y - E[(X'X)^{-1}X'Y]\}\{(X'X)^{-1}X'Y - E[(X'X)^{-1}X'Y]\}'$$

$$V(\hat{\beta}) = E(X'X)^{-1}X'[Y - E(Y)][Y' - E(Y')]'X(X'X)^{-1}$$

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'E(\epsilon\epsilon')X(X'X)^{-1}$$

Mas $E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2$, logo:

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}I\sigma^2$$

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$$

3.6. Testes de significância

O valor de "t" para testar a hipótese $H_0: \beta_i = 0$, é dado por:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{V(\hat{\beta}_i)}}, \text{ onde } V(\hat{\beta}_i) \text{ é obtida como em 3.5.}$$

3.7. Estudo do máximo, mínimo ou ponto de sela através de congruência de matrizes

Se a matriz $B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\beta}_{12} & \hat{\beta}_{22} \end{bmatrix}$ for definida positiv

va então haverá ponto de mínimo e se for definida negativa então haverá ponto de máximo.

O método consiste em transformar a matriz B numa matriz diagonal por meio de operações de congruência conforme descrito em PIMENTEL GOMES (1969), entre outros. Se na matriz diagonal os termos da diagonal principal forem maiores do que zero a matriz será definida positiva; enquanto que se os termos forem menores do que zero a matriz será definida negativa. Se, no entanto, houver termos positivos e negativos, ela será não definida.

Assim, por exemplo, para a matriz B dada a seguir.

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = 5 L_2 + 2 L_1$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = 5 C_2 + 2 C_1$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -80 \end{bmatrix}$$

onde L e C são linhas e colunas.

Como a matriz B é definida negativa, então a função atinge ponto de máximo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Procurando ajustar aos dados do Delineamento em Ângulos o modelo matemático dado por:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \beta_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \beta_{12} X_{1u} X_{2u} + e_u \quad (e.1)$$

ter-se-á, primeiramente, em forma matricial a matriz X .

As estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau (e.1) serão independentes, se a matriz $X'X$ for diagonal. Assim, para tornar ortogonal o Delineamento em Ângulos deve-se diagonalizar $X'X$, isto é, deve-se igualar M a zero ($M = 0$). Portanto vem:

$$4 + 3/2 \delta^4 - \frac{(4 + 6 \delta^2)^2}{16 + P} = 0 \quad (e.2)$$

Desenvolvendo, tem-se:

$$(3/2P - 12) \delta^4 - 48 \delta^2 + 4(12 + P) = 0 \quad (e.3)$$

Analizando a expressão 3 :

a) Se $P = 8$, então

$$\begin{aligned} (3/2 \cdot 8 - 12) \delta^4 - 48 \delta^2 + 4(12 + 8) &= 0 \\ - 48 \delta^2 + 80 &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta^2 = 5/3 \text{ e, portanto, } \delta = 1,290994 \quad (e.4)$$

b) Se $1 \leq P < 8$, neste caso tem-se:

$$(3/2P - 12) \delta^4 - 48 \delta^2 + 4(12 + P) = 0$$

Como $1 \leq P < 8$, implica dizer que $(3/2P - 12)$ é negativo. Portanto, para se resolver a equação deve-se multiplicar por (-1) , fazendo;

$$(12 - 3/2P) \delta^4 + 48 \delta^2 - 4(12 + P) = 0$$

e assim obtem-se:

$$\delta^2 = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 4(12 - 3/2P)(12 + P)4}}{2(12 - 3/2P)}$$

$$\delta^2 = \frac{-24 \pm \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{(12 - 3/2P)}$$

$$\delta = \left(\frac{-24 \pm \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{(12 - 3/2P)} \right)^{1/2} \quad (e.5)$$

c) Se $8 < P \leq 12$, então:

$$(3/2P - 12) \delta^4 - 48 \delta^2 + 4(12 + P) = 0$$

Resolvendo, tem-se:

$$\delta^2 = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4(3/2P - 12)(12 + P)4}}{2(3/2P - 12)}$$

$$\delta^2 = \frac{24 \pm \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{(3/2P - 12)}$$

$$\delta = \left(\frac{24 \pm \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{(3/2P - 12)} \right)^{1/2} \quad (e.6)$$

Na expressão 6 pode-se facilmente verificar que o máximo valor assumido por P é 12, caso contrário haveria raiz quadrada de um número negativo.

Pode-se notar pelas três fórmulas de δ , que tornam ortogonal o Delineamento em Ângulos, que existem dois valores de δ para cada valor de P, quando P está compreendido no intervalo de 9 a 11, pois neste caso, como se vê na expressão 6 há duas raízes positivas que satisfazem a condição de ortogonalização.

Atribuindo valores a P de 1 à 12, obtem-se uma tabela na qual estão os valores de δ que tornam ortogonal o Delineamento em Ângulos com P pontos centrais (tabela 1).

Por exemplo, quando há somente um ponto central (P = 1) , o valor de δ que torna ortogonal o Delineamento em Ângulos será:

$$\delta = \left(\frac{-24 \pm \sqrt{1152 - 24 - 6}}{(12 - 3/2)} \right)^{1/2}$$

$$\delta = 0,9510029$$

A outra raiz é de número negativo e não interessa.

Pode-se verificar pela Tabela 4 e Figura 2 que quando se usam 1 ou 2 pontos centrais, os quatro pontos extremos do Delineamento em Ângulos são os correspondentes ao Fatorial 2 x 2, no qual os níveis estão codificados em -1 e +1, pois δ , nesses casos, é menor do que 1.

Tabela 4. Valores de δ que tornam ortogonal
o Delineamento em Ângulos, obtidos
através das expressões 4, 5 e 6.

Valor de P	Valor de δ
1	0,951003
2	0,992380
3	1,034810
4	1,078878
5	1,125313
6	1,175088
7	1,229594
8	1,290994
9	1,363035
9	5,490185
10	1,453327
10	3,726639
11	1,582690
11	2,856880
12	2,000000

Figura 2. Delineamento em Ângulos, com $P \leq 2$.

Quando iguala-se M a zero ($M=0$), a matriz $X'X$ do sistema de equações $X'X \hat{\beta} = X'Y$ torna-se diagonal:

$$X'X = \begin{bmatrix} 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + 6\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\delta^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\delta^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 + 3/2\delta^4 \end{bmatrix}$$

Assim sua inversa é facilmente obtida.

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4 + 6\delta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4 + 6\delta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\delta^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3\delta^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4 + 3/2\delta^4} \end{bmatrix}$$

Entretanto, os cálculos foram efetuados para uma repetição e para $\underline{r}$ repetições os elementos da matriz $X'X$ ficarão multiplicados por $\underline{r}$ e , conseqüentemente, os elementos da inversa da matriz diagonal $X'X$ ficarão divididos por $\underline{r}$:

$$\frac{1}{\underline{r}}(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r(4+6\delta^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(4+6\delta^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3r\delta^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3r\delta^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r(4+3/2\delta^4)} \end{bmatrix}$$

Pode-se assim notar que os elementos correspondentes aos coeficientes $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$ e $\hat{\beta}_{12}$ são respectivamente:

$$\frac{1}{r(4 + 6\delta^2)} \quad , \quad \frac{1}{3r\delta^4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r(4 + 3/2\delta^4)}$$

Então, segundo o item 3.5, tem-se:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{r(4 + 6\delta^2)} \cdot \hat{\sigma}^2, \quad \hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{1}{3r\delta^4} \cdot \hat{\sigma}^2 \quad e$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{12}) = \frac{1}{r(4 + 3/2\delta^4)} \cdot \hat{\sigma}^2$$

Nota-se pelas fórmulas, que à medida que o valor de δ aumenta as estimativas das variâncias diminuem.

Atribuindo valores a P de 1 a 12, tem-se a tabela das estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, com duas variáveis, no Delineamento em Ângulos (Tabela 5).

Tabela 5. As estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio de segundo grau, com dois fatores, quando o Delineamento em Ângulos é ortogonal. Os valores desta tabela devem ser multiplicados pela fração $\hat{\sigma}^2 / r$.

Valor de P	Valor de δ	Estimativas das Variâncias		
		$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{\beta}_{12}$
1	0,951003	0,106085	0,407522	0,191317
2	0,992380	0,100919	0,343690	0,183325
3	1,034810	0,095923	0,290694	0,174825
4	1,078878	0,091043	0,246031	0,165775
5	1,125313	0,086222	0,207867	0,156119
6	1,175088	0,081400	0,174822	0,145772
7	1,229594	0,076503	0,145825	0,134612
8	1,290994	0,071429	0,120000	0,122449
9	1,363035	0,066019	0,096572	0,108962
9	5,490185	0,005410	0,000367	0,000732
10	1,453327	0,059977	0,074718	0,093529
10	3,726639	0,011451	0,001728	0,003409
11	1,582690	0,052550	0,053125	0,074561
11	2,856880	0,018878	0,005004	0,009623
12	2,000000	0,035714	0,020833	0,035714

Analisando a Tabela 5, pode-se ver:

- 1) $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) > \hat{V}(\hat{\beta}_{12}) > \hat{V}(\hat{\beta}_i)$ para valores de P compreendidos no intervalo de 1 a 7, mostrando que os termos quadráticos são estimados com menor precisão do que os demais, nesse intervalo.
- 2) $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) < \hat{V}(\hat{\beta}_{12})$ para valores de P compreendidos no intervalo de 8 a 12, mostrando que nesse intervalo os termos quadráticos são estimados com maior precisão do que a interação.
- 3) Quando $P \geq 9$, $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) < \hat{V}(\hat{\beta}_i)$ conforme os valores de δ escolhidos, mostrando que os termos quadráticos podem ser estimados com maior precisão do que os termos lineares.
- 4) Quando $P = 11$ ou 12 , os termos quadráticos são estimados com maior precisão do que os termos lineares, exceto quando $\delta = 1,582690$ e, neste caso, pode-se considerar praticamente igual à precisão destes termos.
- 5) Para $P = 9$, $\delta = 5,490185$ e $r = 1$, as estimativas são mais precisas.

As considerações efetuadas a respeito das estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau na Tabela 5 não levaram em conta a

técnica preconizada por PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972) , os quais mostraram que ao se fazer comparações de eficiências deve-se igualar os comprimentos dos intervalos. Assim, para utilizar essa técnica no presente estudo, é necessário multiplicar as coordenadas dos pontos do delineamento por $1/\delta$, exceto quando δ é menor do que 1. Consequentemente, cada estimativa da variância da estimativa do coeficiente do polinômio do segundo grau (Tabela 5) ficará multiplicada por δ^2 , δ^4 e δ^4 correspondentes a $\hat{V}(\hat{\beta}_i)$, $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii})$ e $\hat{V}(\hat{\beta}_{12})$, respectivamente (Tabela 6).

Assim, obtem-se as seguintes fórmulas das estimativas dos coeficientes polinomiais, para $P > 2$:

$$\hat{V}(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{r(\frac{4}{\delta^2} + 6)} \cdot \hat{\sigma}^2 \quad ; \quad \hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{1}{3r} \hat{\sigma}^2 \quad ; \quad \hat{V}(\hat{\beta}_{12}) = \frac{1}{r(\frac{4}{\delta^4} + \frac{3}{2})} \hat{\sigma}^2 .$$

Nota-se que quando aumenta-se o valor de δ , as estimativas das variâncias $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\beta}_{12}$ aumentam, enquanto que a $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii})$ permanece constante.

Pode-se notar pela Tabela 5 que as estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau tornam-se menores à medida que o valor de δ aumenta, levando a crer, à primeira vista, que a precisão das estimativas é melhor para um alto valor de δ . Entretanto, utilizando a técnica de PIMENTEL GOMES e CAMPOS (1972), pode-se verificar

na Tabela 6 que a precisão das estimativas dos coeficientes de β_i e β_{12} é melhor quando $P = 2$, enquanto que no caso da precisão da estimativa do coeficiente de β_{ii} é melhor quando P é maior do que 2.

Para que se possa comparar a eficiência deste delineamento com os esquemas fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 , onde os níveis de dois fatores estão codificados em -1, 0, +1, -1, -1/2, 0, +1/2, +1 e -1, -2/3, -1/3, 0, +1/3, +2/3 e +1, respectivamente, é necessário ajustar aos dados provenientes destes esquemas fatoriais o seguinte modelo matemático:

$$Y_u - \bar{Y} = \beta_1 X_{1u} + \beta_2 X_{2u} + \beta_{11}(X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \beta_{22}(X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \beta_{12}X_{1u}X_{2u} + e_u$$

Conforme foi estudado por BATISTA (1976), no caso de duas variáveis, o esquema fatorial 3^2 é igual ao composto central ortogonal com duas variáveis. Assim sendo, quando se compara este Delineamento em Ângulos com o fatorial 3^2 automaticamente compara-se este delineamento com o composto central ortogonal de duas variáveis.

Portanto, obtém-se facilmente as matrizes $X'X$.

Assim, para o fatorial 3^2 , vem:

Tabela 6. Comparação entre as estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, considerando o mesmo intervalo de comprimento, no Delineamento em Ângulos. Os valores desta tabela devem ser multiplicados pela fração $\hat{\sigma}^2 / r$.

Valor de P	Valor de δ	Estimativas das Variâncias		
		$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{\beta}_{12}$
1	0,951003	0,106085	0,407522	0,191317
2	0,992380	0,100919	0,343690	0,183325
3	1,034810	0,102717	0,333333	0,200468
4	1,078878	0,105972	0,333333	0,224599
5	1,125313	0,109185	0,333333	0,250351
6	1,175088	0,112400	0,333333	0,277943
7	1,229594	0,115665	0,333333	0,307702
8	1,290994	0,119048	0,333333	0,340136
9	1,363035	0,122654	0,333333	0,376100
9	5,490185	0,163069	0,333333	0,665057
10	1,453327	0,126681	0,333333	0,417253
10	3,726639	0,159030	0,333333	0,657501
11	1,582690	0,131633	0,333333	0,467838
11	2,856880	0,154078	0,333333	0,641030
12	2,000000	0,142856	0,333333	0,571424

Matriz X do Fatorial 3^2

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ -1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz $X'X$ do fatorial 3^2

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para o esquema fatorial 5^2 vem :

Matriz X do fatorial 5^2

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & -1/4 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & -1/4 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & -1/4 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 & -1/4 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matríz $X'X$ do fatorial 5^2

$$X'X = \begin{bmatrix} 25/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25/4 \end{bmatrix}$$

No esquema fatorial 7^2 tem-se :

Matriz X do fatorial 7^2

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5/9 & 5/9 & 1 \\ 1 & 2/3 & 5/9 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & 5/9 & -3/9 & 1/3 \\ 1 & 0 & 5/9 & -4/9 & 0 \\ 1 & -1/3 & 5/9 & -3/9 & -1/3 \\ 1 & -2/3 & 5/9 & 0 & -2/3 \\ 1 & -1 & 5/9 & 5/9 & -1 \\ 2/3 & 1 & 0 & 5/9 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 & 4/9 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & -3/9 & 2/9 \\ 2/3 & 0 & 0 & -4/9 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & -3/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/3 & 0 & 0 & -4/9 \\ 2/3 & -1 & 0 & 5/9 & -2/3 \\ 1/3 & 1 & -3/9 & 5/9 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -3/9 & 0 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & -3/9 & -3/9 & 1/9 \\ 1/3 & 0 & -3/9 & -4/9 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -3/9 & -3/9 & -1/9 \\ 1/3 & -2/3 & -3/9 & 0 & -2/9 \\ 1/3 & -1 & -3/9 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1 & -4/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 2/3 & -4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/9 & -3/9 & 0 \\ 0 & 0 & -4/9 & -4/9 & 0 \\ 0 & -1/3 & -4/9 & -3/9 & 0 \\ 0 & -2/3 & -4/9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4/9 & 5/9 & 0 \\ -1/3 & 1 & -3/9 & 5/9 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -3/9 & 0 & -2/9 \\ -1/3 & 1/3 & -3/9 & -3/9 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & -3/9 & -4/9 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -3/9 & -3/9 & 1/9 \\ -1/3 & -2/3 & -3/9 & 0 & 2/9 \\ -1/3 & -1 & -3/9 & 5/9 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & 0 & 5/9 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 0 & -4/9 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & -3/9 & -2/9 \\ -2/3 & 0 & 0 & -4/9 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 & -3/9 & 2/9 \\ -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 4/9 \\ -2/3 & -1 & 0 & 5/9 & 2/3 \\ -1 & 1 & 5/9 & 5/9 & -1 \\ -1 & 2/3 & 5/9 & 0 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 5/9 & -3/9 & -1/3 \\ -1 & 0 & 5/9 & -4/9 & 0 \\ -1 & -1/3 & 5/9 & -3/9 & 1/3 \\ -1 & -2/3 & 5/9 & 0 & 2/3 \\ -1 & -1 & 5/9 & 5/9 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz $X'X$ do fatorial 7^2

$$X'X = \begin{bmatrix} 196/9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 196/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 588/81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 588/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 784/81 \end{bmatrix}$$

Consequentemente, as variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, nos três esquemas fatoriais, são dadas pelas seguintes expressões.

Tabela 7 - Variâncias das estimativas dos coeficientes polinômiais nos esquemas Fatoriais 3^2 , 5^2 e 7^2 .

Fatorial	$V(\hat{\beta}_i)$	$V(\hat{\beta}_{ii})$	$V(\hat{\beta}_{12})$
3^2	$\frac{1}{6r} \cdot \sigma^2$	$\frac{1}{2r} \cdot \sigma^2$	$\frac{1}{4r} \cdot \sigma^2$
5^2	$\frac{2}{25r} \cdot \sigma^2$	$\frac{8}{35r} \cdot \sigma^2$	$\frac{4}{25r} \cdot \sigma^2$
7^2	$\frac{9}{196r} \cdot \sigma^2$	$\frac{81}{588r} \cdot \sigma^2$	$\frac{81}{784r} \cdot \sigma^2$

Comparando-se estas variâncias com as variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau ajustadas para o mesmo intervalo de comprimento (Tabela 6), verifica-se:

- 1) O Delineamento em Ângulos é mais preciso do que o Fatorial 3^2 e menos preciso do que os Fatoriais 5^2 e 7^2 quando se considera a estimativa de β_1 .
- 2) O Delineamento em Ângulos é mais preciso do que o Fatorial 3^2 e menos preciso do que os Fatoriais 5^2 e 7^2 na estimativa de β_{ii} .
- 3) Na estimativa de β_{12} , o Delineamento em Ângulos somente é mais preciso do que o Fatorial 3^2 quando se utiliza até um máximo de quatro pontos centrais. Comparado com os Fatoriais 5^2 e 7^2 , o Delineamento em Ângulos é menos preciso na estimação do coeficiente β_{12} .

Nas comparações anteriores não se levou em consideração que na experimentação a ser efetuada se deve ter o mesmo custo em termos da área total do experimento. Assim, para tornar a comparação equitativa, igualou-se o número de parcelas em todos os delineamentos considerados.

Para tanto, tomou-se como referência o fatorial 7x7 com 49 parcelas, por ser este o número máximo de parcelas envolvido nas comparações aqui efetivadas. No entanto poderia se ter escolhido como base qualquer outro dos delineamentos em estudo.

Assim, tem-se que repetir os esquemas fatoriais tantas vezes quantos forem os resultados das razões 49/9; 49/25 e 49/49, respectivamente, aos esquemas fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 (Tabela 8). Quanto ao presente delineamento, as repetições serão dadas pelas razões 49/(16+P) (Tabela 9).

Tabela 8 - Variâncias das estimativas dos coeficientes polinomiais nos esquemas fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 , considerando a mesma área total.

FATORIAL	$V(\hat{\beta}_i)$	$V(\hat{\beta}_{ii})$	$V(\hat{\beta})$
3^2	0,030612 σ^2	0,091837 σ^2	0,045918 σ^2
5^2	0,040816 σ^2	0,116618 σ^2	0,081633 σ^2
7^2	0,045918 σ^2	0,137755 σ^2	0,103316 σ^2

Tabela 9 - Variâncias das estimativas dos coeficientes polinomiais no Delineamento em Ângulos, considerando-se o mesmo intervalo de comprimento e a mesma área total utilizada. Os valores desta tabela devem ser multiplicados por σ^2 .

VALOR DE P	VALOR DE δ	VARIÂNCIAS		
		$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{\beta}_{12}$
1	0,951003	0,036805	0,141385	0,066375
2	0,992380	0,037072	0,126253	0,067344
3	1,034810	0,039829	0,129252	0,077732
4	1,078878	0,043254	0,136054	0,091673
5	1,125313	0,046794	0,142857	0,107293
6	1,175088	0,050465	0,149660	0,124791
7	1,229594	0,054292	0,156462	0,144432
8	1,290994	0,058309	0,163265	0,166597
9	1,363035	0,062579	0,170068	0,191888
9	5,490185	0,083198	0,170068	0,339315
10	1,453327	0,067218	0,176871	0,221400
10	3,726639	0,084383	0,176871	0,348878
11	1,582690	0,072532	0,183673	0,257788
11	2,856880	0,084900	0,183673	0,353221
12	2,000000	0,081632	0,190476	0,326528

Estudando a Tabela 9, verifica-se que quanto aos coeficientes $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\beta}_{12}$, a precisão máxima é atingida com um ponto central. Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_{ii}$, a precisão máxima é obtida quando são usados dois pontos centrais. No entanto, com um ponto central, a precisão de $\hat{\beta}_{ii}$ está bem próxima daquela obtida com dois pontos centrais. Assim, considerando-se os parâmetros $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$ e $\hat{\beta}_{12}$, verifica-se que o delineamento é mais preciso quando se usa somente um ponto central.

Comparando-se o Delineamento em Ângulos com um ponto central (Tabela 9) com os esquemas Fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 (Tabela 8), notou-se que:

1. Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_i$, o delineamento em questão é tão preciso quanto o esquema fatorial 3^2 e mais preciso do que os fatoriais 5^2 e 7^2 .
2. Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_{ii}$, o delineamento em ângulos com um ponto central é menos preciso do que os fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 .
3. Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_{12}$, o delineamento em ângulos com um ponto central é menos preciso do que o fatorial 3^2 e mais preciso do que os fatoriais de 5^2 e 7^2 .

As estimativas dos coeficientes β_i , β_{ii} e β_{12} são determinadas matricialmente por:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y .$$

Como $(X'X)^{-1}$ é diagonal, facilmente se determinam as fórmulas que permitem calcular as estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, no presente delineamento ortogonal. Assim, temos:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_u X_{iu} y_u}{r(4 + 6\delta^2)} \quad \hat{\beta}_{ii} = \frac{\sum_u X_{iu}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P}}{3 r \delta^4}$$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum_u X_{1u} X_{2u} \bar{y}_u}{r(4 + 3/2\delta^4)}$$

onde X_{iu} , X_{iu}^2 e $X_{1u}X_{2u}$ são os valores encontrados nas colunas da matriz X .

Comparando o modelo matemático:

$$\hat{y}_u = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1u} + \hat{\beta}_2 X_{2u} + \hat{\beta}_{11} X_{1u}^2 + \hat{\beta}_{22} X_{2u}^2 + \hat{\beta}_{12} X_{1u} X_{2u} \quad (e.7)$$

com o modelo matemático adotado:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_u - \bar{Y} &= \hat{\beta}_1 X_{1u} + \hat{\beta}_2 X_{2u} + \hat{\beta}_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \hat{\beta}_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \\ &+ \hat{\beta}_{12} X_{1u} X_{2u} \quad (e.8)\end{aligned}$$

Pode-se facilmente obter $\hat{\beta}_0$, pois da expressão 8 tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_u &= \bar{Y} + \hat{\beta}_1 X_{1u} + \hat{\beta}_2 X_{2u} + \hat{\beta}_{11} (X_{1u}^2 - \bar{X}_1^2) + \hat{\beta}_{22} (X_{2u}^2 - \bar{X}_2^2) + \\ &+ \hat{\beta}_{12} X_{1u} X_{2u} \quad (e.9)\end{aligned}$$

Assim, igualando a expressão 7 à 9, vem:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_{11} \bar{X}_1^2 - \hat{\beta}_{22} \bar{X}_2^2$$

$$\text{Mas como } \bar{X}_1^2 = \bar{X}_2^2 = \frac{4 + 6\delta^2}{16 + P}, \quad \text{logo:}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \frac{4 + 6\delta^2}{16 + P} (\hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22})$$

A soma de quadrados devida à regressão é dada por $\hat{\beta}'X'Y$. Assim, as somas dos quadrados referentes aos coeficientes são dadas por:

$$SQ(\hat{\beta}_i) = \hat{\beta}_i \sum_u x_{iu} y_u$$

$$SQ(\hat{\beta}_{ii}) = \hat{\beta}_{ii} \left[\sum_u x_{iu}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$$

$$SQ(\hat{\beta}_{12}) = \hat{\beta}_{12} \sum_u x_u x_u y_u$$

Quando se desejar repetir os tratamentos é recomendado por BATISTA (1978) utilizar somente um ponto central, pois torna-se mais simples o quadro de análise de variância. Se assim for feito e se, por exemplo, for adotado o delineamento em blocos ao acaso, obter-se-a a decomposição para a análise de variância com um ponto central, conforme consta da Tabela 10.

Quando se desejar repetir somente o ponto central, recomenda-se, devido às técnicas experimentais, utilizar 11 ou 12 pontos centrais, pois assim, haverá no mínimo 10 graus de liberdade para o resíduo. Nesse caso, a decomposição resulta como na Tabela 11. A Tabela 12 mostra a decomposição para análise de variância quando se desejar repetir pontos centrais e tratamentos.

Tabela 10. Quadro da Análise de Variância, com um ponto central e r repetições.

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.
Total	17r - 1	$\sum_u y_u^2$
Blocos	r - 1	$1/n \sum_j B_j^2$
$\hat{\beta}_1$	1	$\hat{\beta}_1 \cdot \sum_u X_{1u} y_u$
$\hat{\beta}_2$	1	$\hat{\beta}_2 \cdot \sum_u X_{2u} y_u$
$\hat{\beta}_{11}$	1	$\hat{\beta}_{11} \cdot \left[\sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + p} \right]$
$\hat{\beta}_{22}$	1	$\hat{\beta}_{22} \cdot \left[\sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + p} \right]$
$\hat{\beta}_{12}$	1	$\hat{\beta}_{12} \cdot \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u$
Falta de ajuste	11	$SQ \text{ Trata} / - SQ \hat{\beta}_1 - SQ \hat{\beta}_2 - SQ \hat{\beta}_{11} - SQ \hat{\beta}_{22} - SQ \hat{\beta}_{12}$
Erro	16(r - 1)	$SQ \text{ Total} - SQ \text{ Blocos} - SQ \text{ Trata} /$

NOTA: $SQ \text{ Trata} / = \frac{1}{r} \sum_i T_i^2$

Tabela 11. Análise de Variância, com 16 + P tratamentos e r = 1 .

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.
Total	16+P-1	$\sum_u \bar{y}_u^2$
$\hat{\beta}_1$	1	$\hat{\beta}_1 \cdot \sum_u X_{1u} y_u$
$\hat{\beta}_2$	1	$\hat{\beta}_2 \cdot \sum_u X_{2u} y_u$
$\hat{\beta}_{11}$	1	$\hat{\beta}_{11} \cdot \left[\sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$
$\hat{\beta}_{22}$	1	$\hat{\beta}_{22} \cdot \left[\sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$
$\hat{\beta}_{12}$	1	$\hat{\beta}_{12} \cdot \sum_u X_{2u} X_{1u} y_u$
Falta de ajuste	11	$SQ_{Total} - SQ\hat{\beta}_1 - SQ\hat{\beta}_2 - SQ\hat{\beta}_{11} - SQ\hat{\beta}_{22} - SQ\hat{\beta}_{12} - SQ_{Erro}$
Erro	P - 1	$\sum_p y_p^2$

Onde os y_p são os valores de y_u referentes ao ponto (0, 0)

$$y_p = (y_p - \bar{y})$$

Tabela 12 - Análise de variância com P pontos centrais e v repetições.

Fontes de Variação	G.L.	S.Q.
Total	$(16+P)r-1$	$\sum_u y_u^2$
Blocos	$r-1$	$1/n \cdot \sum_j B_j^2$
$\hat{\beta}_1$	1	$\hat{\beta}_1 \cdot \sum_u x_{1u} y_u$
$\hat{\beta}_2$	1	$\hat{\beta}_2 \cdot \sum_u x_{2u} y_u$
$\hat{\beta}_{11}$	1	$\hat{\beta}_{11} \cdot \left[\frac{\sum_u x_{1u}^2 y_u}{16 + P} - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$
$\hat{\beta}_{22}$	1	$\hat{\beta}_{22} \cdot \left[\frac{\sum_u x_{2u}^2 y_u}{16 + P} - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$
$\hat{\beta}_{12}$	1	$\hat{\beta}_{12} \cdot \sum_u x_{1u} x_{2u} y_u$
Falta de ajuste	11	$SQ \text{ Trata/} - SQ \hat{\beta}_1 - SQ \hat{\beta}_2 - SQ \hat{\beta}_{11} - SQ \hat{\beta}_{22} - SQ \hat{\beta}_{12}$
Erro	$r(16+P-1)-16$	$SQ \text{ Total} - SQ \text{ Blocos} - SQ \text{ Trata/}$

NOTA: $\sum_{i=1}^{16} \frac{T_i^2}{r} + \frac{T_{pc}^2}{r_{pc}} - C$, onde T_{pc} = total de pontos centrais;
 r_{pc} = nº de repetições do ponto central.

Após ajustada a equação do polinômio do segundo grau aos dados obtidos, pode-se aplicar a técnica de congruência de matrizes para verificar se a função tem máximo ou mínimo ou ponto de sela (PIMENTEL GOMES, 1969).

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para exemplificar a aplicação da metodologia da superfície de resposta polinomial a dados provenientes de experimentos com o delineamento em ângulos, foi simulado um ensaio com dois fatores em blocos ao acaso.

Os dados foram obtidos a partir da equação fundamental, de segundo grau (Tabela 6). Aos valores esperados, a partir dessa equação, foram adicionados erros provenientes de distribuição normal.

Tabela 13. Dados de um Delineamento em Ângulos, em blocos ao acaso, com um ponto central e quatro repetições.

Tratamentos		B L O C O S				Total
Codificados		I	II	III	IV	
1	1	29,22	29,41	29,04	29,59	117,26
1	-1	24,57	24,72	24,96	24,19	98,44
-1	1	23,95	23,72	23,39	23,34	94,40
-1	-1	20,84	20,03	20,17	20,16	81,20
0,5δ	bδ	27,71	27,86	28,11	28,56	112,24
0,5δ	-bδ	24,57	24,57	24,20	24,40	97,74
-0,5δ	bδ	25,07	25,52	25,27	25,55	101,41
-0,5δ	-bδ	22,14	22,59	22,53	22,22	89,48
bδ	0,5δ	28,40	28,45	28,20	28,45	113,50
bδ	-0,5δ	26,00	26,38	26,30	25,99	104,67
-bδ	0,5δ	24,22	24,12	23,42	23,97	95,73
-bδ	-0,5δ	21,92	22,51	22,46	22,28	89,17
δ	0	27,21	27,42	27,49	27,97	110,09
δ	0	23,10	22,72	22,42	23,01	91,25
0	δ	27,22	26,60	26,73	26,95	107,50
0	-δ	22,93	23,43	23,28	23,10	92,74
0	0	25,52	26,14	25,74	25,66	103,06
TOTAL		424,59	426,19	423,71	425,39	1699,88

$$C = 42494,000212$$

$$r = 4$$

$$\text{sen } 30^{\circ} = \cos 60^{\circ} = 0,500000$$

$$b = \cos 30^{\circ} = \text{sen } 60^{\circ} = 0,$$

$$\delta = 0,951003$$

Figura 3. Delineamento em Ângulos, com $P = 1$.

Nota: $0,951003 = \delta$

$(0,475502; 0,823593) = (\delta \cos 60^\circ; \delta \sin 60^\circ)$

demais pontos como na figura 2.

5.1. Determinação dos coeficientes do polinômio do segundo grau

5.1.1. $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_u X_{1u} y_u}{r(4 + 6\delta^2)} = \frac{94,495138}{37,705761} = 2,506119$$

5.1.2. $\hat{\beta}_2$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_u X_{2u} y_u}{r(4 + 6\delta^2)} = \frac{75,142319}{37,705761} = 1,992860$$

5.1.3. $\hat{\beta}_{11}$

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{\sum_u X_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P}}{3 r \delta^4}$$

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{937,434742 - 942,577484}{9,815418} = \frac{-5,142742}{9,815418} = -0,523945$$

5.1.4. $\hat{\beta}_{22}$

$$\hat{\beta}_{22} = \frac{\sum_u X_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2) \sum_u y_u}{16 + P}}{3 r \delta^4}$$

$$\hat{\beta}_{22} = \frac{935,445085 - 942,577484}{9,815418} = \frac{-7,132399}{9,815418} = -0,726653$$

5.1.5. $\hat{\beta}_{12}$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum_u X_{1u} X_{2u} y_u}{r(4 + 1,5\delta^4)} = \frac{7,515438}{20,907709} = 0,359458$$

5.1.6. $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}_u - \frac{4 + 6\delta^2}{16 + P} (\hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22})$$

$$\hat{\beta}_0 = 24,998235 - 0,554496(-0,523945 - 0,726653)$$

$$\hat{\beta}_0 = 24,998235 + (0,554496 \times 1,250598) = 25,691687$$

5.2. Determinação das somas de quadrados

5.2.1. SQ Total

$$SQ \text{ Total} = \sum_u y_u^2 = \sum_j y_{ij}^2 - C$$

$$SQ \text{ Total} = 42895,121400 - 42494,000212$$

$$SQ \text{ Total} = 401,121188$$

5.2.2. SQ Blocos

$$SQ \text{ Blocos} = \frac{1}{n} \sum_j B_j^2 - C = 42494,200024 - 42494,000212 = 0,199812$$

5.2.3. SQ Tratamentos

$$SQ \text{ Tratamentos} = \frac{1}{r} \sum_i T_i^2 - C$$

$$SQ \text{ Tratamentos} = 42891,249350 - 42494,000212 = 397,249138$$

$$5.2.4. \quad \text{SQ } \hat{\beta}_1$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 \cdot \sum_u x_{1u} y_u = 2,506119 \times 94,495138 = 236,816061$$

$$5.2.5. \quad \text{SQ } \hat{\beta}_2$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2 \cdot \sum_u x_{2u} y_u = 1,992860 \times 75,142319 = 149,748122$$

$$5.2.6. \quad \text{SQ } \hat{\beta}_{11}$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_{11} = \hat{\beta}_{11} \cdot \left[\sum_u x_{1u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_{11} = -0,523945 \cdot \left[937,434742 - 942,577484 \right]$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_{11} = -0,523945 \times (-5,142742) = 2,694514$$

$$5.2.7. \quad \text{SQ } \hat{\beta}_{22}$$

$$\text{SQ } \hat{\beta}_{22} = \hat{\beta}_{22} \cdot \left[\sum_u x_{2u}^2 y_u - \frac{(4 + 6 \delta^2) \sum_u y_u}{16 + P} \right]$$

$$SQ \hat{\beta}_{22} = -0,726653 \cdot \left[935,445085 - 942,577484 \right]$$

$$SQ \hat{\beta}_{22} = -0,726653 \times (-7,132399) = 5,182779$$

$$5.2.8. \quad SQ \hat{\beta}_{12}$$

$$SQ \hat{\beta}_{12} = \hat{\beta}_{12} \sum_u x_{1u} x_{2u} y_u = 0,359458 \cdot 7,515438 = 2,701484$$

$$5.2.9. \quad SQ \text{ Falta de ajuste}$$

$$SQ \text{ Falta de ajuste} = SQ \text{ Tratamentos} - SQ \hat{\beta}_1 - SQ \hat{\beta}_2 - SQ \hat{\beta}_{11} - SQ \hat{\beta}_{22} - SQ \hat{\beta}_{12}$$

$$SQ \text{ Falta de ajuste} = 397,249138 - 236,816061 - 149,748122 - 2,694514 - \\ - 5,182779 - 2,701484$$

$$SQ \text{ Falta de ajuste} = 0,106178$$

$$5.2.10. \quad SQ \text{ Erro}$$

$$SQ \text{ Erro} = SQ \text{ Total} - SQ \text{ Blocos} - SQ \text{ Tratamentos}$$

$$SQ \text{ Erro} = 401,121188 - 0,199812 - 397,249138$$

$$SQ \text{ Erro} = 3,672238$$

5.3. Quadro da Análise de Variância

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Total	67	401,121188		
Blocos	3	0,199812	0,066604	---
$\hat{\beta}_1$	1	236,816061	236,816061	3095,43**
$\hat{\beta}_2$	1	149,748122	149,748122	1957,36**
$\hat{\beta}_{11}$	1	2,694514	2,694514	35,22**
$\hat{\beta}_{22}$	1	5,182779	5,182779	67,74**
$\hat{\beta}_{12}$	1	2,701484	2,701484	35,31**
Falta de ajuste	11	0,106178	0,009653	---
Erro	48	3,672238	0,076505	

5.4. Determinação das estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes polinomiais

5.4.1. $\hat{V}(\hat{\beta}_i)$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{r(4 + 6 \delta^2)} \cdot \hat{\sigma}^2$$

$$\delta = 0,951003 \text{ (Tabela 1)}$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_i) = \frac{0,076505}{37,705761} = 0,002029$$

5.4.2. $\hat{V}(\hat{\beta}_{ii})$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{1}{3r \delta^4} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{0,076505}{3 \times 4 \times 0,951003^4} = 0,007794$$

5.4.3. $\hat{V}(\hat{\beta}_{12})$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{12}) = \frac{1}{r(4 + 1,5 \delta^4)} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{0,076505}{20,907709} = 0,003659$$

5.5. Determinação dos valores de "t" para testar as hipóteses de que as estimativas dos coeficientes polinomiais não diferem de zero

5.5.1. Valor de "t" para testar $H_0^{(1)} : \beta_1 = 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{2,506119}{\sqrt{0,002029}} = 55,64$$

Note que, de acordo com 5.3 , $F = t^2$, isto é,

$$t = \sqrt{F} = \sqrt{3095,43} = 55,64$$

5.5.2. Valor de "t" para testar $H_0^{(2)} : \beta_2 = 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{1,992860}{\sqrt{0,002029}} = 44,24$$

Note que, de acordo com 5.3 , $F = t^2$, isto é,

$$t = \sqrt{F} = \sqrt{1957,36} = 44,24$$

5.5.3. Valor de "t" para testar $H_0^{(3)} : \beta_{11} = 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_{11}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_{11})}} = \frac{-0,523945}{\sqrt{0,007794}} = -5,93$$

Note que $t = -\sqrt{35,22} = -5,93$, de acordo com o item 5.3.

5.5.4. Valor de "t" para testar $H_0^{(4)} : \beta_{22} = 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_{22}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_{22})}} = \frac{-0,726653}{\sqrt{0,007794}} = -8,23$$

Note que, de acordo com 5,3, $t = -\sqrt{67,74} = -8,23$

5.5.5. Valor de "t" para testar $H_0^{(5)} : \beta_{12} = 0$

$$t = \frac{\hat{\beta}_{12}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_{12})}} = \frac{0,359458}{\sqrt{0,003659}} = 5,94$$

Note que $t = \sqrt{35,31} = 5,94$, de acordo com 5.3.

5.6. Determinação da equação polinomial

$$\begin{aligned}\hat{Y}_u = & 25,691687 + 2,506119 X_{1u} + 1,992860 X_{2u} - \\ & - 0,523945 X_{1u}^2 - 0,726653 X_{2u}^2 + 0,359458 X_{1u} X_{2u}\end{aligned}$$

5.7. Estudo do máximo, mínimo ou ponto de sela através de congruência de matrizes

De acordo com o método descrito em 3.7 , tem-se:

$$B = \begin{bmatrix} -0,523945 & 0,359458 \\ 0,359458 & -0,726653 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = 0,523945 L_2 + 0,359458 L_1$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,523945 & 0,359458 \\ 0 & -0,251516 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = 0,523945 C_2 + 0,359458 C_1$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,523945 & 0 \\ 0 & -0,131781 \end{bmatrix}$$

Como a matriz B é definida negativa então a função atinge ponto de máximo.

5.8. Determinação do máximo da função

$$\hat{Y} = 25,691687 + 2,506119 X_{1u} + 1,992860 X_{2u} - \\ - 0,523945 X_{1u}^2 - 0,726653 X_{2u}^2 + 0,359458 X_{1u} X_{2u}$$

$$\frac{d \hat{Y}_u}{d X_{1u}} = 2,506119 - 1,047890 X_{1u} + 0,359458 X_{2u}$$

$$\frac{d \hat{Y}_u}{d X_{2u}} = 1,992860 - 1,453306 X_{2u} + 0,359458 X_{1u}$$

Fazendo $\frac{d \hat{Y}_u}{d X_{1u}} = \frac{d \hat{Y}_u}{d X_{2u}} = 0$, vem

$$\begin{cases} 1,047890 X_{1u}^0 - 0,359458 X_{2u}^0 = 2,506119 \\ -0,359458 X_{1u}^0 + 1,453306 X_{2u}^0 = 1,992860 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\begin{bmatrix} 1,047890 & -0,359458 \\ -0,359458 & 1,453306 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1u}^0 \\ X_{2u}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,506119 \\ 1,992860 \end{bmatrix}$$

Sendo o determinante:

$$\Delta = 1,393695, \text{ tem-se:}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1u}^o \\ x_{2u}^o \end{bmatrix} = \frac{1}{1,393695} \begin{bmatrix} 1,453306 & 0,359458 \\ 0,359458 & 1,047890 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,506119 \\ 1,992860 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1u}^o \\ x_{2u}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,127401 \\ 2,144760 \end{bmatrix}$$

Valores de x_{1u} e x_{2u} onde $\hat{Y}_u$ atinge o ponto de máximo.

6. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos neste estudo, concluiu-se que:

6.1. Os valores de δ que tornam ortogonal o delineamento em ângulos são dados por:

$$\delta = \left(\frac{-24 + \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{12 - 1,5 P} \right)^{1/2} \quad \text{se } 1 < P < 8$$

$$\delta^2 = 5/3 \text{ e portanto } \delta = 1,290994 \quad \text{se } P = 8$$

$$\delta = \left(\frac{24 \pm \sqrt{1152 - 24P - 6P^2}}{1,5 P - 12} \right)^{1/2} \quad \text{se } 8 < P \leq 12$$

6.2. Quando o delineamento em ângulos é ortogonal, usando-se um ou dois pontos centrais, os quatro pontos extremos são os correspondentes ao Fatorial 2x2 no qual os níveis estão codificados em -1 e +1.

6.3. Existem dois valores para δ que tornam ortogonal o delineamento em ângulos, para cada valor de P , quando $9 \leq P \leq 11$.

6.4. Os valores das estimativas das variâncias das estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, quando o delineamento é ortogonal, são dados pelas expressões:

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_i) = \frac{1}{r(4 + 6\delta^2)} \cdot \hat{\sigma}^2, \quad \widehat{V}(\hat{\beta}_{12}) = \frac{1}{r(4 + 1,5\delta^4)} \cdot \hat{\sigma}^2$$

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_{ii}) = \frac{1}{3r\delta^4} \cdot \hat{\sigma}^2.$$

6.5. As estimativas dos coeficientes do polinômio do segundo grau, quando o delineamento é ortogonal, são dadas por:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_u X_{iu} y_u}{r(4 + 6\delta^2)}, \quad \hat{\beta}_{ii} = \frac{\sum_u X_{iu}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2)}{16+P} \sum_u y_u}{3 r \delta^4}$$

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{\sum_u X_{1u} X_{2u} y_u}{r(4 + 1,5\delta^4)}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y}_u - \frac{4 + 6\delta^2}{16 + P} (\hat{\beta}_{11} + \hat{\beta}_{22})$$

6.6. As somas dos quadrados referentes aos coeficientes, quando o delineamento é ortogonal, são dadas pelas expressões

$$SQ(\hat{\beta}_i) = \hat{\beta}_i \sum_u X_{iu} y_u$$

$$SQ(\hat{\beta}_{ii}) = \hat{\beta}_{ii} \left[\sum_u X_{iu}^2 y_u - \frac{(4 + 6\delta^2)}{16 + P} \sum_u y_u \right]$$

$$SQ(\hat{\beta}_{12}) = \hat{\beta}_{12} \sum_u X_{1u} X_{2u} y_u$$

- 6.7 - Na estimação de β_i e β_{ii} , o Delineamento em Ângulos mostrou-se mais preciso do que o Fatorial 3^2 e menos preciso do que os Fatoriais 5^2 e 7^2 .
- 6.8 - Na estimação de β_{12} , o Delineamento em Ângulos é mais preciso do que o Fatorial 3^2 quando são usados até quatro pontos centrais e menos preciso do que os Fatoriais 5^2 e 7^2 .
- 6.9 - Levando-se em consideração a mesma área total a ser gasta, conclui-se que o Delineamento em Ângulos é mais preciso quando se usa um ponto central.
- 6.10 - Comparando-se o Delineamento em Ângulos com um ponto central com os Fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 , quando se utiliza a mesma área total do experimento, conclui-se:
- 6.9.1 - Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_i$, o delineamento em questão é tão preciso quanto o Fatorial 3^2 e mais preciso do que os Fatoriais de 5^2 e 7^2 .
- 6.9.2 - Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_{ii}$, o Delineamento em Ângulos com um ponto central é menos preciso do que os Fatoriais de 3^2 , 5^2 e 7^2 .
- 6.9.3 - Quanto ao coeficiente $\hat{\beta}_{12}$, o Delineamento em Ângulos com um ponto central é menos preciso do que o Fatorial 3^2 e mais preciso do que os Fatoriais de 5^2 e 7^2 .

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATISTA, L.B., 1976. Determinação de α para Tornar Ortogonal o Delineamento Composto Central (Box). Piracicaba. ESALQ/USP, 26 pp. (Dissertação de Mestrado).

BATISTA, L.B., 1978. Delineamento em Círculos. Pesq. Agropec. Bras., 13(4):9-15.

BATISTA, L.B. e S.C. e SILVA, 1978. Determinação de Fórmulas no Delineamento Composto Central (Box). Pesq. Agropec. Bras., 13(2):39-47.

BOX, G.E.P. e J.S. HUNTER, 1957. Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surface. Ann. Math. Stat., 28:195-241.

BOX, G.E.P. e K.B. WILSON, 1951. On the Experimental Attainment of Optimum Conditions. Journal of the Royal Statistical Society, série B, 13:1-45.

CAMPOS, H., 1967. Aspectos da Aplicação das Superfícies de Resposta a Ensaios Fatoriais 3^3 de Adubação. Piracicaba. ESALQ/USP (Tese).

CONAGIM, A., 1979. Double Central Composite Designs. Resumos da 10a. Conferência Internacional de Biometria, 3 - 4 , Guarujá, SP.

DANIEL, C., 1956. Fractional Replication in Industrial Research. Proc. In: JOHN, P.W.M., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Co., New York, Cap. 8: 151-157.

FINNEY, D.J., 1945. The Fractional Replication of Factorial Arrangements. In: JOHN, P.W.M., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Co., New York, Cap. 8:148-150.

- JORGE, J. de P.N., 1980. Delineamento Guadalupe para Três Fatores, Analisado Através de Modelo de Regressão Polinomial Quadrática. Piracicaba. ESALQ/USP, 56 pp. (Dissertação de Mestrado).
- MARGOLIN, B.H., 1967. Systematic Methods of Analyzing $2^m 3^n$ Factorial Experiments with Applications. In: JOHN, P.W.M., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Co., New York, Cap. 8:158-160.
- MORAES, R.S., 1969. Superfície Polinomial de Resposta Num Ensaio de Adubação com Níveis Não Equidistantes. Piracicaba. ESALQ/USP (Tese).
- NELDER, J.A., 1963. Identification of Contrasts in Factorial Replication of 2^n Experiments. In: JOHN, P.W.M., 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments. The Macmillan Co., New York, Cap. 8:158-160.
- PENTEADO, A.F. e L.B. BATISTA, 1971. Eficiência do Ensaio Composto Central (Box) em Comparação com os Fatoriais Completos de Dois Fatores. XIII Congresso Brasileiro de Ciência do Solo. Vitória, E.S.

PIMENTEL GOMES, F., 1969. Novos Aspectos de Estudo Econômico de Ensaio de Adubação. Fertilidade, 34:3-9.

PIMENTEL GOMES, F. e H. CAMPOS, 1972. The Efficiency of Factorial 3^3 Designs as Compared to a Central Composite Rotatable Designs. Potash Review, Fevereiro.

ROJAS, B.A., 1963. The San Cristóbal Designs for Fertilizer Experiments. In: JORGE, J. de P.N., 1980. Delineamento Guadalupe para Três Fatores, Analisado Através de Modelo de Regressão Polinomial Quadrática. Piracicaba. ESALQ /USP, 56 pp. (Dissertação de Mestrado).

ROJAS, B.A., 1972. The Orthogonalized San Cristóbal Design. In: JORGE, J. de P.N., 1980. Delineamento Guadalupe para Três Fatores, Analisado Através de Modelo de Regressão Polinomial Quadrática. Piracicaba. ESALQ/USP, 56 pp. (Dissertação de Mestrado).

SEARLE, S.R., 1971. Linear Models. Nova York. John Wiley & Sons. 532 p.

- STAVROU, J. e F.B. CADY, 1967. Counfounding the Triple Cube Response Surface Design to Reduce Block Size. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Madison, 31:126-128.
- TRAMEL, T.E., 1957. A Suggested Procedure for Agronomic-economic Fertilizer Experiments. In: JORGE, J. de P.N., 1980. De-
lineamento Guadalupe para Três Fatores, Analisado Através de
Modelo de Regressão Polinomial Quadrática. Piracicaba.
ESALQ / USP, 56 pp. (Dissertação de Mestrado).
- VOSS, R. e J. PESEK, 1967. Yield of Corn Grain as Affected by
Fertilizer Rates and Environmental Factors. Agron. J.,
Madison, 59:567-572.
- YATES, F., 1937. The Design and Analysis of Factorial Experiments.
Tech. Commun. Bur. Soil Sci. Harpenden, 35 : 77 pp.