ESTUDO DAS PRECIPITAÇÕES PLUVIAIS MENSAIS NO MUNICÍPIO DE BANANEIRAS - PB, ATRAVÉS DE REGRESSÃO PERIÓDICA

JOSÉ WELLINGTON DOS SANTOS

Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. CLÓVIS POMPÍLIO DE ABREU

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA

Estado de São Paulo - Brasil

Junho - 1984

Aos meus pais

DEDICO

Aos meus irmãos

OFEREÇO

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha existência.

Ao Dr. Clóvis Pompílio de Abreu, professor do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação e amizade.

Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, pelo incentivo e sabedoria.

Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, pela versão do texto para inglês.

Ao Professor Lourival Ferreira Cavalcante do CCA/UFPB e ao Engº Agrº Erasmo Rocha Lucena, pelo estímulo sempre demonstrado.

Ao Dr. Hermano Vaz de Arruda, pelas sugestões dadas para realização deste trabalho.

Ao Dr. Humberto de Campos, Professor e Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos e apoio recebido durante a realização deste curso.

Ao Dr. Dêcio Barbin, Professor do Curso de Estatística e Experimentação Agronômica, pelos ensinamentos e amizade durante o curso.

Ao Professor João José de Oliveira Filho, Chefe do Departamento de Ciências Fundamentais e Sociais do CCA / UFPB, pelo incentivo e apoio para realização deste curso.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da ESALQ,
pelos ensinamentos e dedicação.

À coordenadoria de Aperfeiçoamento de pessoal de nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudo concedida.

À srta. Maria Izalina Ferreira Alves e família, pelo apoio e assistência.

Aos colegas do curso de pós-graduação, pelo espírito de solidariedade e companheirismo.

A todos aqueles, que de uma forma ou de outra souberam me inspirar, incentivar, ajudar e compreender, para que este trabalho pudesse ser realizado.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	3
3. MATERIAL E MÉTODOS	7
3.1. Material	7
3.2. Método	8
3.2.1. Desenvolvimento teórico	8
3.2.2. Modelo matemático	12
3.2.3. Estimativas dos parâmetros, suas va- riâncias e covariâncias	18
3.2.4. Transformação dos dados	27
3.2.5. Análise de variância	29
3.2.5.1. Teste de normalidade	29
3.2.5.2. Quadros de análise de variân- cia	32
3.2.6. Intervalos de confiança para os parâme- tros estimados	38
3.2.7. Equação de regressão	38
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	40

4.1. Estimativas das Precipitações Mensais para o Período Anual (Janeiro a Dezembro)	40
4.1.1. Modelo matemático	41
4.1.2. Estimativa dos parâmetros	42
4.1.3. Análise de variância	43
4.1.3.1. Teste de normalidade	43
4.1.3.2. Quadros de análise de variância	44
4.1.4. Variância dos parâmetros estimados ...	47
4.1.5. Intervalos de confiança	47
4.1.6. Equação de regressão	48
4.1.7. Representação gráfica	50
5. CONCLUSÕES	55
6. BIBLIOGRAFIA	56
7. APÊNDICES	59

ESTUDO DAS PRECIPITAÇÕES PLUVIAIS MENSAIS NO
MUNICÍPIO DE BANANEIRAS - PB, ATRAVÉS DE
REGRESSÃO PERIÓDICA

Autor: José Wellington dos Santos

Orientador: Dr. Clóvis Pompílio de Abreu

RESUMO

Neste trabalho aplicou-se a regressão periódica aos valores mensais de chuvas, referentes ao município de Bananeiras - PB, perfazendo um total de 47 anos, durante o período de 1912 a 1958.

Tendo em vista as exigências do modelo matemático, os dados originais, em milímetros, foram ajustados para meses de 30 dias e, posteriormente foi aplicada a transformação $x^{0,325}$, visando à uniformização das variâncias.

As análises estatísticas foram feitas no computador eletrônico, IBM-1130, do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ/USP.

Na análise de variância foi verificada a estabilidade de cada componente harmônico referentes aos contrastes lineares $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$. Foi feita a análise conjunta das amplitudes $\hat{a}_k$ e verificou-se que $\hat{a}_1$ ou seja, a onda anual é responsável por 96,29% da variação total.

Determinou-se intervalos de confiança para os

contrastes (p_j e q_j) e para as amplitudes a_j , referentes aos componentes harmônicos que fazem parte da equação de regressão.

São apresentados os gráficos das ondas senoidais significativas, da síntese dessas ondas e da equação de regressão obtida.

A partir dos dados transformados com uma série de 47 anos foi obtida a seguinte equação de regressão:

$$\hat{y}_t = 3,8348 + 1,5034 \sin(30t + 297,6635)^0 + 0,2593 \sin(60t + 358,2369)^0$$

Aproximadamente 99,15% da variação das precipitações pluviais mensais no município de Bananeiras - PB, é explicada pelo modelo.

A STUDY ON THE MONTHLY RAINFALL MEASUREMENTS IN
BANANEIRAS (PARAIBA COUNTY), THROUGH
PERIODIC REGRESSION

Author: José Wellington dos Santos

Adviser: Dr. Clóvis Pompílio de Abreu

SUMMARY

In this work the periodic regression was applied on the monthly rainfall measurements in Bananeiras - PB, county, in a period of 47 years, from 1912 to 1958.

In view of the requirements of the mathematical model, the original data in milimeters were adjusted to 30 day month and, afterwards, the $x^{0,325}$ transformation was applied to get variance homogeneity

The statistical analyses were elaborated in the IBM-1130 Eletronic Computer belonging to the Department of Mathematics and Statistics of ESALQ/USP.

In the analysis of variance the stability of each on of the harmonic component was verified with respect to the linear contrasts $\hat{p}_j$ and $\hat{q}_j$. The pooled analysis of the range $\hat{a}_k$ was made and $\hat{a}_1$, the annual wave, was responsible for 96,29% of the total variation.

Confidence interval were determined for the

contrasts (p_j and q_j) and for the range a_j , with respect to the harmonic components belonging to the regression equation.

The Graphs of the significant annual waves, of the sinthesis of these waves abd of the regression equation were obtained.

Considering the transformed data the with a sucession of 47 years following regression equation was obtained:

$$\hat{y}_t = 3,8348 + 1,5034 \text{ sen}(30t + 297,6635)^0 + 0,2593 \text{ sen}(60t + 358,2369)^0$$

Approximately 99,15% of the variation in the monthly rainfall in Bananeiras - PB, county was explained by the model.

1. INTRODUÇÃO

Um dos principais fatores responsáveis pelas baixas produtividades agrícolas é sem dúvida, a instabilidade pluviométrica, especialmente na região Nordeste onde é registrada a ocorrência de secas que prejudicam sobremaneira a agricultura ali desenvolvida. Sabe-se que as produções agrícolas são elementos probabilísticos no sentido de que elas dependem entre outros fatores, das variáveis climáticas, tais como quantidade total de chuva, distribuição pluviométrica, temperatura e umidade relativa do ar.

Não obstante, a exploração de determinadas culturas é mais dependente do curso anual de precipitação que do volume de água caído anualmente. Portanto, com o estudo da distribuição da precipitação é possível delimitar-se o período crítico predominante na região e, tem-se condições de fornecer elementos informativos que visem reduzir as consequências causadas pela seca, quer pelo emprego da irrigação ou pe

lo estabelecimento de culturas mais adaptadas ao regime pluviométrico.

Assim, é de grande valia uma estimativa das quantidades mensais de chuvas, baseada em dados de anos anteriores. Desta forma, o homem sentiu a necessidade de estudar o problema, fazendo simulações matemáticas que descrevem parâmetros do tempo, com a finalidade de prever o comportamento das distribuições probabilísticas dos elementos climáticos, especialmente a precipitação.

No município de Bananeiras (PB), embora as alturas pluviométricas diárias venham sendo tomadas desde 1912, não existe nenhum estudo feito a seu respeito.

O presente trabalho visa, através de um estudo das precipitações mensais naquele município, a auxiliar os técnicos em planejamento agrícola e engenharia rural, no sentido de se obter um aproveitamento mais racional da água na agricultura.

Admitindo-se a precipitação mensal um fenômeno cíclico, aconselha-se o emprego da regressão periódica também conhecida por análise harmônica em seu estudo. Desta forma, pretende-se a obtenção de uma equação interpretativa do fenômeno.

2. REVISÃO DE LITERATURA

CONRAD e POLLAK (1950) utilizaram a análise harmônica na interpretação de fenômenos climatológicos, exemplificando o método em dois casos, onde o primeiro foi considerado o curso anual, e o segundo o diário, determinando as equações de regressão que representaram o fenômeno em questão.

BROOKS e CARRUTHERS (1953) afirmaram que certos eventos no universo, principalmente aqueles em conexão com os movimentos dos corpos celestes, se repetem sistematicamente após um período de tempo fixo e assim sua ocorrência pode ser prevista precisamente.

BLISS (1958) apresentou um excelente trabalho sobre análise harmônica aplicada à biologia e climatologia, no qual justificou o método, relatando que muitas vezes os dados não se adaptam a uma regressão polinomial, devido ao fato de seguirem uma tendência periódica. Disse ainda, que se os dados mudam simetricamente durante o ciclo estudado a curva do seno:

$Y_j = a_0 + a_1 \cos (c.j) + b_1 \sin (c.j)$, representa bem o fenômeno em estudo, em caso contrário, mais termos harmônicos são adicionados, até que o ajuste desejado seja encontrado.

AMARAL (1968) fez um estudo bem detalhado a respeito de análise harmônica, exemplificou aplicando a dados pluviométricos (precipitações mensais em Pelotas (RS), 1900 a 1951) e em Morro Velho (MG), 1855 a 1951). No 1º caso os três primeiros componentes harmônicos (ondas anual, semestral e quadrimestral) foram significativos enquanto que no 2º caso apenas o 1º componente harmônico (onda anual) foi significativo.

ANDERSON (1971) apresentou a teoria sobre funções periódicas. Demonstrou como calcular os componentes de regressão e como efetuar os testes de significância e coeficiente de correlação para os componentes harmônicos, fornecendo a base para um estudo completo sobre análise harmônica.

DUARTE e BARBIN (1975) estudaram através da análise harmônica os dados de infecção de ferrugem alaranjada do cafeeiro na zona da mata (MG) aplicaram as transformações preconizadas por Blis e Van Der Plank, concluíram que para ambas as transformações a curva do seno representa bem o fenômeno e, que o mínimo de infecção ocorre em junho e o máximo em dezembro.

THIEBAUT (1976) estudou através da análise harmônica, as precipitações pluviais mensais num período

de 50 anos no município de Viçosa (MG). Considerou três períodos, seco, chuvoso e anual, chegou a conclusão que Viçosa possui um período seco e um chuvoso bem definidos e, também que o período chuvoso é responsável por 86,02% das quantidades de chuvas anuais.

PEREIRA (1978) fez uma aplicação de regressão periódica a dados pluviométricos mensais no município de Grajaú (M.A.). Determinou uma equação de regressão que mostra a ocorrência de um máximo de chuvas no mês de março e um mínimo em julho.

FELTRIN (1980) utilizou a análise harmônica, aplicada a valores mensais, de chuvas referentes ao município de Bandeirante (PR) num total de 48 anos (1930 a 1977). Trabalhou com três períodos (anual, seco e chuvoso), concluiu que Bandeirante apresenta um período seco (abril a setembro) e um período chuvoso (outubro a março) bem definidos, sendo o último responsável por 69,40% da precipitação anual e, para o período chuvoso, a equação de regressão estimada explica 100% das variações devidas a meses e estima-se um máximo de chuvas durante o mês de janeiro.

COELHO (1980) utilizando a análise harmônica a dados de produção de citrus no município de Limeira (SP) no período de 1970 a 1978, verificou que as ondas de 2,25 e 3 anos são as de maior importância.

DUARTE (1981) aplicou a análise harmônica a dados de percentagens de incidência da ferrugem alaranjada do

cafeeiro no Estado de Minas Gerais. Concluiu que o máximo de infestação da ferrugem se dá predominantemente no mês de junho e o mínimo em dezembro. Deduziu as somas de quadrados e os componentes de variância de um modelo matemático para a realização da análise harmônica conjunta.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. Material

Os dados de precipitação pluvial, foram obtidos do mapa pluviométrico do Nordeste, publicado pelo Departamento Nacional de Obras Contra as Secas (BRASIL, 1969).

As observações referem-se às precipitações mensais do município de Bananeiras - PB, localizado a 522 m de altitude, latitude de $6^{\circ}45'11''$ S e longitude $35^{\circ}37'42''$ W.G., durante 47 anos, no período de 1912 a 1958, tomadas em milímetros e ajustadas para meses de 30 dias. De acordo com AMARAL (1968) este procedimento consiste na multiplicação da precipitação mensal pelo fator 30/31 nos meses de 31 dias, por 30/29 nos meses de fevereiro dos anos bissextos e 30/28 nos meses de fevereiro nos anos não bissextos.

Para as análises estatísticas dos dados, utilizou-se o computador IBM-1130, do Departamento de Matemática e

Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo.

3.2. Métodos

A metodologia usada baseia-se aproximadamente no trabalho de FELTRIN (1980), e para maior facilidade é apresentada a seguir.

3.2.1. Desenvolvimento teórico

Uma função $f(t)$ é periódica de período $T \neq 0$, se para todo t , ocorrer:

$$f(t) \equiv f(t \pm T), \quad -\infty < t < \infty, \text{ ou ainda}$$

$$f(t) \equiv f(t \pm nT), \text{ com } -\infty < t < \infty \text{ e } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

As funções trigonométricas $\sin t$ e $\cos t$ são funções periódicas de períodos 2π , ou seja:

$$\sin(t \pm n2\pi) = \sin t, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos(t \pm n2\pi) = \cos t, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

A função representada pela série trigonométrica de Fourier,

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin(j\omega t + A_j) \quad (1)$$

é periódica de período T , onde $\theta = 2\pi/T$, sendo θ chamado velocidade angular.

Desenvolvendo-se (1), tem-se:

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin(\theta t + A_1) + a_2 \sin(2\theta t + A_2) + \dots + a_j \sin(j\theta t + A_j) + \dots \quad (2)$$

O componente harmônico senoidal com frequência angular $\theta_j = j\theta$ é o j -ésimo harmônico da função periódica. O primeiro harmônico, também é chamado onda fundamental, e tem o mesmo período e a mesma frequência que a função.

Os coeficientes a_j ($a_j > 0$) e A_j ($0 < A_j < 2\pi$) são denominados respectivamente, amplitude harmônica e ângulo fase.

Desenvolvendo o seno da soma para cada um dos harmônicos em (2), tem-se:

$$f(t) = a_0 + a_1 (\sin\theta t \cos A_1 + \sin A_1 \cos\theta t) + a_2 (\sin 2\theta t \cos A_2 + \sin A_2 \cos 2\theta t) + \dots + a_j (\sin j\theta t \cos A_j + \sin A_j \cos j\theta t) + \dots \quad (3)$$

fazendo

$$a_1 \sin A_1 = P_1$$

$$a_1 \cos A_1 = q_1$$

$$a_2 \sin A_2 = P_2$$

$$a_2 \cos A_2 = q_2$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots$$

$$a_j \sin A_j = P_j$$

$$a_j \cos A_j = q_j$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots$$

e substituindo-se estes valores em (3), tem-se:

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + q_1 \sin \theta t + p_1 \cos \theta t + \\ & + q_2 \sin 2t + p_2 \cos 2t + \dots + \\ & + q_j \sin j\theta t + p_j \cos j\theta t + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Para o j -ésimo harmônico, tem-se:

$$p_j = a_j \sin A_j \quad \text{e} \quad q_j = a_j \cos A_j$$

Portanto;

$$a_j^2 = p_j^2 + q_j^2 \quad (5)$$

$$\text{Tg} A_j = \frac{p_j}{q_j} \quad (6)$$

ou ainda:

$$a_j = \sqrt{p_j^2 + q_j^2} \quad (7)$$

$$A_j = \text{arc tg} \left(\frac{p_j}{q_j} \right) \quad (8)$$

Os parâmetros p_j , q_j , a_j e A_j são representados graficamente na figura 1.

Figura 1 - Parâmetros de j -ésimo harmônico.

onde:

a_j = amplitude das ondas superpostas;

A_j = ângulos fases medidas em graus ou radianos.

O diagrama da Figura 2 adaptado por CONRAD e POLLAK (1950) mostra como determinar os ângulos fases. As combinações dos sinais de p_k e q_k pelas quais os ângulos fases podem ser determinados são:

- a) +q +p;
- b) +q -p;
- c) -q -p;
- d) -q +p.

Através das combinações tem-se os seguintes ângulos fases:

- a) $A_{++} = A$ A , no I quadrante;
 b) $A_{+-} = 180^\circ - A$ A , no II quadrante;
 c) $A_{--} = 180^\circ + A$ A , no III quadrante;
 d) $A_{-+} = 360^\circ - A$ A , no IV quadrante;

Figura 2 - Diagrama para determinação de ângulo fase.

3.2.2. Modelo matemático

Seja Y_t a precipitação mensal observada para $t = 1, 2, \dots, T$, onde t representa os meses em que foram tomadas as medidas, e T é o comprimento do período a ser estudado.

O modelo a ser utilizado, proveniente da série de Fourier, é o seguinte:

$$Y_t = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \sin(j\omega t + A_j) + e_t \quad (9)$$

onde:

a_0 = média geral $\bar{Y}$;

k = maior inteiro que não supera $T/2$;

a_j = amplitude do j -ésimo componente harmônico;

A_j = ângulo fase do j -ésimo componente harmônico;

e_t = efeito residual referente a t -ésima observação

$$e_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Desenvolvendo o seno da soma em (9), obtém-se:

$$Y_t = a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \sin A_j \cos j\omega t + a_j \cos A_j \sin j\omega t) + e_t \quad (10)$$

fazendo em (10),

$$p_j = a_j \sin A_j \quad (11)$$

$$q_j = a_j \cos A_j \quad (12)$$

$$y_t = Y_t - a_0 \quad (13)$$

de tal modo que:

$$a_j = \sqrt{p_j^2 + q_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, (K - 1) \quad (14)$$

$$a_k = \left| \sqrt{p_k^2 + q_k^2} \right| \quad (15)$$

Para o caso de T ímpar e,

$$a_k = \left| \sqrt{p_k^2} \right| = p_k \quad (16)$$

Para o caso de T par,

$$A_j = \arctg \left(\frac{p_j}{q_j} \right) \quad (17)$$

O modelo matemático passa a ser apresentado sob a forma,

$$y_t = \sum_{j=1}^k (p_j \cos j\theta t + q_j \sin j\theta t) + e_t \quad (18)$$

Para o caso de T ímpar, e

$$y_t = \sum_{j=1}^{k-1} (p_j \cos j\theta t + q_j \sin j\theta t) + p_k \cos k\theta t + e_t \quad (19)$$

para o caso de T par.

Desenvolvendo-se (18) e (19), tem-se respectivamente:

$$y_t = p_1 \cos \theta t + p_2 \cos 2\theta t + \dots + p_k \cos k\theta t + q_1 \sin \theta t + q_2 \sin 2\theta t + \dots + q_k \sin k\theta t + e_t \quad (20)$$

para o caso T ímpar, e

$$\begin{aligned}
 y_t = & p_1 \cos \theta t + p_2 \cos 2\theta t + \dots + p_{(k-1)} \cos (k-1)\theta t + \\
 & + p_k \cos k\theta t + q_1 \sin \theta t + q_2 \sin 2\theta t + \\
 & + \dots + q_{(k-1)} \sin (k-1)\theta t + e_t
 \end{aligned} \tag{21}$$

para o caso T par.

O sistema de equações pode ser representado matricialmente por:

$$y = X\beta + \epsilon$$

onde:

$\underset{T \times 1}{Y}$ = vetor das observações y_t ;

$\underset{T \times 1}{X}$ = matriz dos coeficientes;

$\underset{T-1 \times 1}{\beta}$ = vetor dos parâmetros p_j e q_j ;

$\underset{T \times 1}{\epsilon}$ = vetor dos erros aleatórios.

Assim, tem-se:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & \dots & \cos k\theta & \sin\theta & \dots & \sin k\theta \\ \cos 2\theta & \dots & \cos 2k\theta & \sin 2\theta & \dots & \sin 2k\theta \\ \cos 3\theta & \dots & \cos 3k\theta & \sin 3\theta & \dots & \sin 3k\theta \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos T\theta & \dots & \cos Tk\theta & \sin T\theta & \dots & \sin Tk\theta \end{bmatrix}$$

quando T é ímpar, e,

$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & \dots & \cos k\theta & \sin\theta & \dots & \sin(k-1)\theta \\ \cos 2\theta & \dots & \cos 2k\theta & \sin 2\theta & \dots & \sin 2(k-1)\theta \\ \cos 3\theta & \dots & \cos 3k\theta & \sin 3\theta & \dots & \sin 3(k-1)\theta \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos T\theta & \dots & \cos Tk\theta & \sin T\theta & \dots & \sin T(k-1)\theta \end{bmatrix}$$

quando T é par.

$$\beta = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_k \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} \quad \text{quando } T \text{ é ímpar}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_k \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{quando } T \text{ é par:}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_2 \\ \vdots \\ e_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix}$$

3.2.3. Estimativas dos parâmetros, suas variâncias e covariâncias

Pelo método dos quadrados mínimos chega-se à solução do sistema de equações normais,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \cos^2 \theta t & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin(k-1)\theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos 2\theta t & \sum_{t=1}^T \cos^2 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \cos k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin(k-1)\theta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \cos k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos^2 k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin(k-1)\theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin \theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \sin^2 \theta t & \sum_{t=1}^T \sin \theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin \theta t \sin(k-1)\theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin 2\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin 2\theta t & \sum_{t=1}^T \sin 2\theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \sin^2 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin 2\theta t \sin(k-1)\theta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin(k-1)\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin(k-1)\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin(k-1)\theta t & \sum_{t=1}^T \sin(k-1)\theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \sin(k-1)\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin(k-1)\theta t \sin(k-1)\theta t \end{bmatrix}$$

quando T é par;

$$X'X = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \cos^2 \theta t & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin k\theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos 2\theta t & \sum_{t=1}^T \cos^2 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \cos k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin k\theta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \cos k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \cos k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos^2 k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin k\theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin \theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin \theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin \theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin^2 \theta t \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin 2\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin 2\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin 2\theta t \sin k\theta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^T \cos \theta t \sin k\theta t & \sum_{t=1}^T \cos 2\theta t \sin k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \cos k\theta t \sin k\theta t & \dots & \sum_{t=1}^T \sin^2 k\theta t \end{bmatrix}$$

$X'X =$

quando T é ímpar, e

Conforme ANDERSON (1971) através das fórmulas de Euler,

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta});$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \text{ e}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Comprova-se que:

$$\sum_{t=1}^T \cos^2 j\theta t = \frac{T}{2} \quad , \text{ para } j = 1, 2, \dots, (k-1),$$

$$\sum_{t=1}^T \cos^2 k\theta t = \frac{T}{2} \quad , \text{ quando } T \text{ é ímpar e}$$

$$\sum_{t=1}^T \cos^2 k\theta t = T \quad , \text{ quando } T \text{ é par}$$

$$\sum_{t=1}^T \sin^2 j\theta t = \frac{T}{2} \quad , \text{ para } j = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{t=1}^T \cos j\theta t \sin i\theta t = 0, \quad \text{para } \begin{cases} j = 1, 2, \dots, k \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^T \cos j\theta t \cos i\theta t = 0, \quad \text{para } j \neq i \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, k \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^T \sin j\theta t \sin i\theta t = 0, \quad \text{para } j \neq i \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, k \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

Então a matriz $X'X$ pode ser escrita:

$$X'X = \begin{bmatrix} T/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T/2 \end{bmatrix}$$

quando T é par, e

$$X'X = \begin{bmatrix} T/2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & T/2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & T/2 \end{bmatrix}$$

quando T é ímpar.

A matriz $X'Y$ fica:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T y_t \cos \theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \cos 2\theta t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T y_t \cos k\theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin \theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin 2\theta t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin (k-1)\theta t \end{bmatrix}$$

quando T é par e,

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T y_t \cos \theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \cos 2\theta t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T y_t \cos k\theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin \theta t \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin 2\theta t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^T y_t \sin k\theta t \end{bmatrix}$$

quando T é ímpar.

As estimativas dos parâmetros p_j e q_j , através da matriz $\hat{\beta}$, são:

$$\bar{p}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cos \theta t$$

$$\bar{p}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cos 2\theta t$$

$$\vdots$$

$$\bar{p}_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cos k\theta t, \text{ quando } T \text{ é ímpar, e}$$

$$\bar{p}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cos k\theta t, \text{ quando } T \text{ é par.}$$

$$\hat{q}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sin \theta t$$

$$\hat{q}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sin 2\theta t$$

$$\vdots$$

$$\hat{q}_{(k-1)} = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sin (k-1)\theta t$$

$$\hat{q}_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \sin k\theta t$$

As variâncias e covariâncias dos parâmetros es
timados são obtidos na matriz de dispersão $D = (X'X)^{-1} \sigma^2$, sen
do:

$$V(\hat{p}_j) = 2\sigma^2/T \quad , \text{ para } j = 1, 2, \dots, (k-1) \quad (22)$$

$$V(\hat{p}_k) = 2\sigma^2/T \quad , \text{ quando } T \text{ é impar, e} \quad (23)$$

$$V(\hat{p}_k) = \sigma^2/T \quad , \text{ quando } T \text{ é par} \quad (24)$$

$$V(\hat{q}_j) = 2\sigma^2/T \quad , \text{ para } j = 1, 2, \dots, k \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{cov}(\hat{p}_j, \hat{p}_i) &= 0 \\ \text{cov}(\hat{q}_j, \hat{q}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ para } j \neq i \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{cov}(\hat{p}_j, \hat{p}_i) &= 0 \\ \text{cov}(\hat{q}_j, \hat{q}_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ para } j \neq i \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{cov}(\hat{p}_j, \hat{q}_i) = 0 \quad , \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (28)$$

pode-se observar que as covariâncias são todas nulas, e com isso conclui-se que os parâmetros estimados são independentes.

Há interesse em determinar as variâncias das estimativas das amplitudes dos componentes harmônicos (a_j). De acordo com FELTRIN (1980), utiliza-se o processo de diferenciação, para a obtenção de seus valores aproximados.

Se $\hat{a}_j = \sqrt{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2}$, e conhecendo-se as variâncias e covariâncias de $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, equações (22) a (28),

$$d(\hat{a}_j) = \frac{\hat{p}_j}{\sqrt{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2}} d\hat{p}_j + \frac{\hat{q}_j}{\sqrt{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2}} d\hat{q}_j$$

$$[d(\hat{a}_j)]^2 = \frac{\hat{p}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} (d \hat{p}_j)^2 + \frac{\hat{q}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} (d \hat{q}_j)^2 +$$

$$+ \frac{2 \hat{p}_j \hat{q}_j}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} (d \hat{p}_j) (d \hat{q}_j)$$

$$v(\hat{a}_j) = \frac{\hat{p}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} v(\hat{p}_j) + \frac{\hat{q}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} v(\hat{q}_j) + \frac{2 \hat{p}_j \hat{q}_j}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} \text{cov}(\hat{p}_j, \hat{q}_j),$$

de acordo com (28), fica:

$$v(\hat{a}_j) \approx \frac{\hat{p}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} v(\hat{p}_j) + \frac{\hat{q}_j^2}{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} v(\hat{q}_j), \quad (29)$$

pelas equações (22) a (25), tem-se:

$$v(\hat{p}_j) = v(\hat{q}_j) = \frac{2\sigma^2}{T}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, (k-1)$$

$$v(\hat{p}_k) = v(\hat{q}_k) = \frac{2\sigma^2}{T}, \quad \text{quando } T \text{ é ímpar e,}$$

$$v(\hat{p}_k) = \frac{\sigma^2}{T}, \quad \text{quando } T \text{ é par.}$$

pela equação (29), chega-se:

$$v(\hat{a}_j) \approx \frac{2\sigma^2}{T}, \quad j = 1, 2, \dots, (k-1) \quad (30)$$

$$V(\hat{a}_k) \approx \frac{2\sigma^2}{T}, \text{ quando } T \text{ é ímpar, e} \quad (31)$$

$$V(\hat{a}_k) \approx \frac{\sigma^2}{T}, \text{ quando } T \text{ é par} \quad (32)$$

3.2.4. Transformação dos dados

Uma das condições básicas para a correta aplicação dos testes de significância é que os erros aleatórios tenham distribuição normal.

Quando isso não ocorre, há necessidade de se fazer a aproximação normal através de transformação dos dados.

Conforme GOMES et alii (1975) as transformações utilizadas para dados pluviométricos a fim de se obter uma distribuição aproximadamente normal, têm sido encontradas frequentemente por processos de tentativas ou baseados em informações de literatura referentes a trabalhos efetuados em outros locais. Uma transformação muito usada para dados pluviométricos é a logarítma, expressa pelo logaritmo natural ou decimal dos dados quando não ocorrem zeros, ou, caso contrário, pelo logaritmo dos dados acrescidos de uma constante. Neste caso a escolha do valor da constante fica dependendo de posterior verificação de seu ajustamento aos dados para que a transformação seja considerada satisfatória.

AMARAL e MOTA (1956) citados por GODOY et alii (1961) sugerem uma transformação do tipo $y = \log (x + b/a)$, onde a e b são os coeficientes da equação de regressão linear do tipo $\sigma_x = ax + b$, onde σ_x é o desvio padrão relativo aos meses considerados e x é a média das precipitações mensais.

AMARAL (1968) desaconselha o uso da transformação $\sigma_x = ax + b$, pois lhe parece que para dados de precipitações mensais o desvio padrão não seja função linear da média, parecendo-lhe preferível exprimir o desvio padrão na forma,

$$\sigma_x = \beta x^a ,$$

onde os valores a e β podem ser determinados para cada grupo de observações, sendo x a média de precipitação mensal num período de N anos e σ_x o desvio padrão das observações utilizadas para o cálculo desta média. Determinado o valor de "a" sugere a transformação do tipo,

$$Z = x^{(1-a)}.$$

Silva (1977) citado por FELTRIN (1980) sugere a padronização da transformação para dados pluviométricos, através da fórmula:

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

No presente trabalho, utilizando-se a trans-

formação do tipo $Z = x^{(1-a)}$ para uma série de 47 anos obte
ve-se $Z = x^{(0,325)}$.

3.2.5. Análise da variância

Para testar a estabilidade dos componentes harmônicos foi usada a análise de variância.

3.2.5.1. Teste de normalidade

Visando uma aplicação mais correta do teste F, usou-se o critério de Fischer de 1941, citado por AMARAL (1968), aos contrastes $\hat{p}_k$ e $\hat{q}_k$ da regressão periódica. De acordo com o autor o critério de Fischer consiste em testar os coeficientes de assimetria e curtose de uma amostra para verificar sua aproximação ã normalidade. No presente trabalho a amostra ê constituída pelo conjunto de contrastes $\hat{p}_k$ e $\hat{q}_k$, que se encon
tram no apêndice 7.

AMARAL (1968) afirma que quando se dispõe de dados de um número suficientemente grande de anos, o melhor teste de normalidade consiste em comparar as medidas de assi-metria (g_1) e curtose (g_2) dos contrastes, com as respecti-

vas medidas de assimetria ($g_1 = 0$) e curtose ($g_2 = 0$) da distribuição normal através do teste t.

As fórmulas usadas para o cálculo das estimativas de assimetria e curtose são dadas a seguir:

Coeficiente de assimetria:

$$g_1 = \frac{k_3}{\sqrt{k_2^3}} \quad (33)$$

Coeficiente de curtose:

$$g_2 = \frac{k_4}{k_2^2} \quad (34)$$

onde por exemplo, para o contraste $\hat{p}_1$, tem-se:

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^2}{N - 1} \quad (35)$$

$$k_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^3}{(N-1)(N-2)} \quad (36)$$

$$k_4 = \frac{N}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left\{ (N+1) \sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^4 - 3 \frac{N-1}{N} \left[\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^2 \right]^2 \right\} \quad (37)$$

Segundo o autor, para grandes amostras g_1 e g_2 distribuem-se normalmente com médias iguais a zero e desvios padrão dados por:

$$s(\hat{g}_1) = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}} \quad (38)$$

$$s(\hat{g}_2) = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}} \quad (39)$$

As hipóteses a ser testadas são:

$$H_0: g_1 = 0$$

$$H_0: g_2 = 0$$

$$H_1: g_1 \neq 0$$

$$H_1: g_2 \neq 0$$

Essas hipóteses são testadas através do teste t , a um nível α de probabilidade, com $N-1$ graus de liberdade.

Assim tem-se:

$$t_1 = \frac{\hat{g}_1 - 0}{s(\hat{g}_1)}$$

$$t_2 = \frac{\hat{g}_2 - 0}{s(\hat{g}_2)}$$

3.2.5.2. Quadros de análise de variância

De acordo com BLISS (1958), AMARAL (1968), PEREIRA (1978) e FELTRIN (1980), a análise para este caso, assemelha-se ao modelo empregado para blocos ao acaso. Assim, para cada componente harmônico será usado, uma variância residual (interação anos x componentes harmônicos), relativa a variação apresentada no decorrer dos anos. Os quadros de variância são dados a seguir:

Tabela 1 - Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, para o caso de T ímpar.

Causa de Variação	G.L.	S.Q.
Contraste $\hat{p}_1$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{1i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{p}_1^2 = \hat{p}_1$
Contraste $\hat{q}_1$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{1i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{q}_1^2 = \hat{q}_1$
...	...	...
Contraste $\hat{p}_k$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{ki} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{p}_k^2 = \hat{p}_k$
Contraste $\hat{q}_k$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{ki} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{q}_k^2 = \hat{q}_k$
Regressão	$T-1=2k$	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^k (\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2) = \sum_{j=1}^k (\hat{P}_j + \hat{Q}_j) \right]$
Anos	$N-1$	$\frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T y_{ti} \right)^2 \right]$
Anos x $\hat{p}_1$	$N-1$	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{1i}^2 \right) - \hat{p}_1$
Anos x $\hat{q}_1$	$N-1$	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{1i}^2 \right) - \hat{q}_1$
...	...	...
Anos x $\hat{p}_k$	$N-1$	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{ki}^2 \right) - \hat{p}_k$
Anos x $\hat{q}_k$	$N-1$	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{ki}^2 \right) - \hat{q}_k$
Total	$NT-1$	$\frac{T}{\sum_{t=1}^T} \frac{N}{\sum_{i=1}^N} y_{ti}^2$

Tabela 2 - Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, para o caso de T par.

Causa de Variação	G.L.	S.Q.
Contraste $\hat{p}_1$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{1i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{p}_1^2 = \hat{p}_1$
Contraste $\hat{q}_1$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{1i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{q}_1^2 = \hat{q}_1$
...	...	...
Contraste $\hat{p}_{k-1}$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{(k-1)i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{p}_{(k-1)}^2 = \hat{p}_{k-1}$
Contraste $\hat{q}_{k-1}$	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{(k-1)i} \right)^2}{N} \right] = \frac{T}{2} \hat{q}_{(k-1)}^2 = \hat{q}_{(k-1)}$
Contraste $\hat{p}_k$	1	$T \frac{\left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{ki} \right)^2}{N} = T \hat{p}_k^2 = \hat{p}_k$
Regressão	T-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^{k-1} (\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2) \right] + T \hat{p}_k^2 = \sum_{j=1}^{k-1} (\hat{p}_k + \hat{q}_j) + \hat{p}_k$
Anos	N-1	$\frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T y_{ti} \right)^2 \right]$
Anos x $\hat{p}_1$	N-1	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{p}_{1i}^2 \right) - \hat{p}_1$
Anos x $\hat{q}_1$	N-1	$\frac{T}{2} \left(\sum_{i=1}^N \hat{q}_{1i}^2 \right) - \hat{q}_1$
...	...	...
Anos x $\hat{p}_{k-1}$	N-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{i=1}^N \hat{p}_{(k-1)i}^2 \right] - \hat{p}_{k-1}$
Anos x $\hat{q}_{k-1}$	N-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{i=1}^N \hat{q}_{(k-1)i}^2 \right] - \hat{q}_{k-1}$
Anos x $\hat{p}_k$	N-1	$T \sum_{i=1}^N \hat{p}_{ki}^2 - \hat{p}_k$
Total	NT-1	$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{ti}^2$

Conforme AMARAL (1968) deve-se aplicar a análise de variância, não apenas aos contrastes, mas também à cada amplitude dos componentes harmônicos, desde que as variâncias referentes aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$ sejam homogêneas e que $\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2 = \hat{a}_j^2$, pode-se juntá-las para obter o teste de significância da amplitude correspondente, conforme esquemas de análises de variância a seguir.

Tabela 3 - Análise de variância das amplitudes $\hat{a}_j$, para o caso de T ím-

Causa de Variação	G.L.	S.Q.
Amplitude $\hat{a}_1$	2	$\hat{p}_1 + \hat{q}_1$
Amplitude $\hat{a}_2$	2	$\hat{p}_2 + \hat{q}_2$
...	...	...
Amplitude $\hat{a}_k$	2	$\hat{p}_k + \hat{q}_k$
Regressão	$T-1=2k$	$\sum_{j=1}^k (\hat{p}_j + \hat{q}_j)$
Anos	$N-1$	$\frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T y_{ti} \right)^2 \right]$
Anos x $\hat{a}_1$	$2(N-1)$	$\frac{T}{2} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i}^2 + \hat{q}_{1i}^2) - (\hat{p}_1 + \hat{q}_1)$
...	...	...
Anos x $\hat{a}_k$	$2(N-1)$	$\frac{T}{2} \sum_{i=1}^N (\hat{p}_{ki}^2 + \hat{q}_{ki}^2) - (\hat{p}_k + \hat{q}_k)$
Total	$NT-1$	$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{ti}^2$

Tabela 4 - Análise de variância das amplitudes $\hat{a}_j$, para o caso de T par.

Causa de Variação	G.L.	S.Q.
Amplitude $\hat{a}_1$	2	$\hat{p}_1 + \hat{q}_1$
...	...	...
Amplitude $\hat{a}_{(k-1)}$	2	$\hat{p}_{(k-1)} + \hat{q}_{(k-1)}$
Amplitude $\hat{a}_k$	1	$\hat{p}_k$
Regressão	T-1	$\left[\sum_{j=1}^{k-1} (\hat{p}_j + \hat{q}_j) \right] + \hat{p}_k$
Anos	N-1	$\frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^T y_{ti} \right)^2 \right]$
Anos x $\hat{a}_1$	2(N-1)	$\left[\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i}^2 + \hat{q}_{1i}^2) \right] - (\hat{p}_1 + \hat{q}_1)$
...	...	...
Anos x $\hat{a}_{k-1}$	2(N-1)	$\frac{T}{2} \sum_{i=1}^N \left[\hat{p}_{(k-1)i}^2 + \hat{q}_{(k-1)i}^2 \right] - \left[\hat{p}_{(k-1)} + \hat{q}_{(k-1)} \right]$
Anos x $\hat{a}_k$	N-1	$T \sum_{i=1}^N \hat{p}_{ki}^2 - \hat{p}_k$
Total	NT-1	$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T y_{ti}^2$

3.2.6. Intervalo de confiança para os parâmetros estimados

Tendo-se obtido as estimativas $\hat{p}_j$, $\hat{q}_j$ e $\hat{a}_j$, e os quadrados médios das suas respectivas interações com anos, pode-se determinar os intervalos de confiança para os parâmetros.

Para p_j e q_j , tem-se:

$$\hat{p}_j - t.s(\hat{p}_j) \leq p_j \leq \hat{p}_j + t.s(\hat{p}_j) \quad (40)$$

$$\hat{q}_j - t.s(\hat{q}_j) \leq q_j \leq \hat{q}_j + t.s(\hat{q}_j) \quad (41)$$

sendo t obtido na tabela de t , bilateral com $N-1$ graus de liberdade; a um nível α de significância.

Para a_j ,

$$\hat{a}_j - t.s(\hat{a}_j) \leq a_j \leq \hat{a}_j + t.s(\hat{a}_j) \quad (42)$$

sendo t obtido na tabela de t , bilateral com $2(N-1)$ graus de liberdade, exceto no caso de a_k para T par; nesse caso o número de graus de liberdade é $N-1$, a um determinado nível α de significância.

3.2.7. Equação de regressão

Selecionados os componentes harmônicos significativos, através da análise de variância, pode-se estabelecer

a equação de regressão para os dados observados.

No entanto, foram considerados os componentes harmônicos, até o último significativo.

Fez-se, ainda a representação gráfica de cada componente harmônico, bem como da síntese de todas as ondas significativas.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a metodologia descrita procurou-se estimar as precipitações mensais para o período anual, de janeiro a dezembro.

Os dados originais de precipitação mensais, em milímetros, são encontrados no apêndice 1, e após o ajuste para mês de 30 dias, visando a uma homogeneização das variâncias, foi efetuada a transformação $x^{0,325}$, conforme 3.2.4.

4.1. Estimativa das Precipitações Mensais para o Período Anual (janeiro a dezembro)

Para o período estudado calculou-se a média dos 564 dados, após a transformação $x^{0,325}$ obtendo-se o valor 3,8348. Em seguida, obteve-se os desvios dos dados em relação à média, cujos resultados são apresentados no apêndice 4.

O período anual pode ser dividido em seis ondas senoidais com períodos mínimos de 12, 6, 4, 3, 12/5, e 2 meses, respectivamente, com as frequências $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ e $\frac{1}{2}$.

4.1.1. Modelo matemático

Para o período anual, ou seja, para $T = 12$, o modelo matemático de acordo com (21) em 3.2.2. é o seguinte:

$$\begin{aligned}
 y_t = & p_1 \cos \theta t + p_2 \cos 2\theta t + p_3 \cos 3\theta t + \\
 & + p_4 \cos 4\theta t + p_5 \cos 5\theta t + \\
 & + p_6 \cos 6\theta t + q_1 \sin \theta t + \\
 & + q_2 \sin 2\theta t + q_3 \sin 3\theta t + \\
 & + q_4 \sin 4\theta t + q_5 \sin 5\theta t + e_t
 \end{aligned} \quad (43)$$

considerando-se θ em graus, tem-se:

$$\theta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$t = 1, 2, \dots, 12.$$

Como para cada mês têm-se 47 repetições, correspondentes aos 47 anos no período estudado o modelo fica:

$$\begin{aligned}
 y_{ti} = & p_{1i} \cos \theta t + p_{2i} \cos 2\theta t + p_{3i} \cos 3\theta t + \\
 & + p_{4i} \cos 4\theta t + p_{5i} \cos 5\theta t + \\
 & + p_{6i} \cos 6\theta t + q_{1i} \sin \theta t + \\
 & + q_{2i} \sin 2\theta t + q_{3i} \sin 3\theta t + \\
 & + q_{4i} \sin 4\theta t + q_{5i} \sin 5\theta t + e_{ti}
 \end{aligned} \quad (44)$$

Pode-se observar que a matriz Y terá dimensões $T \times N$, ou seja, 12×47 , sendo encontrada no apêndice 4, na forma Y' .

4.1.2. Estimativa dos parâmetros

De acordo com a metodologia exposta em 3.2.3., a solução do sistema de equações, calculado com auxílio do computador, apresentou os seguintes valores médios para os parâmetros referentes ao período de 47 anos:

$$\begin{array}{ll} \hat{p}_1 = -1,33157 & \hat{q}_1 = 0,69801 \\ \hat{p}_2 = -0,00798 & \hat{q}_2 = 0,25925 \\ \hat{p}_3 = 0,07966 & \hat{q}_3 = -0,03857 \\ \hat{p}_4 = 0,07515 & \hat{q}_4 = -0,03003 \\ \hat{p}_5 = -0,04925 & \hat{q}_5 = 0,02370 \\ \hat{p}_6 = -0,03486 & \end{array}$$

A partir desses valores pode-se determinar os valores das amplitudes correspondentes aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, desde que:

$$\hat{a}_j = \left| \sqrt{\hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2} \right| \quad \text{e também,}$$

$$\text{tg} \hat{A}_j = \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j}. \text{ Onde } \hat{A}_j = \text{arc tg} \left(\frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j} \right), \text{ desta forma;}$$

tem-se:

$$\begin{array}{ll} \hat{a}_1 = 1,5034 & \hat{a}_4 = 0,08092 \\ \hat{a}_2 = 0,2593 & \hat{a}_5 = 0,05465 \\ \hat{a}_3 = 0,0885 & \hat{a}_6 = 0,03486 \end{array}$$

e os respectivos ângulos fases:

$$\begin{array}{ll} \hat{A}_1 = 297,6635^\circ & \hat{A}_4 = 111,7816^\circ \\ \hat{A}_2 = 358,2369^\circ & \hat{A}_5 = 295,6977^\circ \\ \hat{A}_3 = 115,8354^\circ & \hat{A}_6 = 270^\circ \end{array}$$

Os apêndices 5, 6 e 7 apresentam respectivamente, as matrizes X , $(X'X)^{-1}$ e $\hat{\beta}'$.

4.1.3. Análise de variância

4.1.3.1. Teste de normalidade

Visando atender às exigências do teste F, foi aplicado um teste de normalidade aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$ obtidos para os 47 anos, conforme descrito em 3.2.5.1. Os cálculos foram obtidos pelo computador, e são apresentados na tabela 5.

Os desvios padrão de $\hat{g}_1$ e $\hat{g}_2$, para aplicação do "teste t" apresentaram os seguintes valores:

$$\begin{array}{l} s(\hat{g}_1) = 0,3465 , \\ s(\hat{g}_2) = 0,6809 \end{array}$$

Tabela 5 - Valores dos coeficientes de assimetria (g_1) e curtose (g_2) e os respectivos valores de t calculados para os contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, de interesse.

Contraste	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	t_1	t_2
$\hat{p}_1$	0,6164	0,3737	1,7789	0,5488
$\hat{q}_1$	0,6909	0,0965	1,9939	0,1417
$\hat{p}_2$	0,5124	1,2961	1,4787	1,9035
$\hat{q}_2$	0,0434	-1,0326	0,1252	-1,5165

Os valores de t calculados, mostraram-se não significativos, e assim pode-se aceitar que os contrastes lineares são normalmente distribuídos.

4.1.3.2. Quadros de análise de variância

A tabela 6 apresenta os resultados obtidos na análise de variância aplicada aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, até o segundo harmônico.

Observa-se pelo teste F , que houve significância para os contrastes referentes às ondas: anual e semestral.

Tabela 6 - Análise de variância referente aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$ das precipitações mensais em Bananeiras - (PB), isolando apenas os contrastes referentes aos componentes harmônicos, que farão parte da equação de regressão.

causa de variação	gl	SQ	QM	F
contraste $\hat{p}_1$	1		500,0118	241,48**
contraste $\hat{q}_1$	1		137,3970	79,39**
contraste $\hat{p}_2$	1		0,0179	0,01
contraste $\hat{q}_2$	1		18,9537	13,52**
Desvios de Regressão	7	5,5846	0,7978	0,74
Anos	46	144,5044	3,1414	
Anos x $\hat{p}_1$	46	95,2495	2,0706	
Anos x $\hat{q}_1$	46	79,6078	1,7306	
Anos x $\hat{p}_2$	46	83,2566	1,8099	
Anos x $\hat{q}_2$	46	64,4739	1,4016	
Anos x Desvios	322	347,0841	1,0779	
Total	563	1476,1413		

Conforme AMARAL (1968) se as variâncias referentes aos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$ forem homogêneas e, desde que $\hat{a}_j^2 = \hat{p}_j^2 + \hat{q}_j^2$, pode-se juntá-las para obter o teste de signifi

cância para a amplitude correspondente, conforme esquema a seguir:

Tabela 7 - Análise de variância referente às amplitudes $\hat{a}_j$ das precipitações mensais em Bananeiras (PB), isolando apenas os componentes harmônicos que farão parte da equação de regressão.

Causa de Variação	gl	SQ	QM	F
Amplitude $\hat{a}_1$	2	637,4088	318,7044	167,68**
Amplitude $\hat{a}_2$	2	18,9716	9,4858	5,90**
Desvios de regressão	7	5,5846	0,7978	0,79
Anos	46	144,5044	3,1414	
Anos x $\hat{a}_1$	92	174,8574	1,9006	
Anos x $\hat{a}_2$	92	147,7304	1,6057	
Anos x Desvios	322	347,0841	0,9988	
Total	563	1476,1413		

Pelos resultados obtidos pode-se verificar pelo "teste F" que foram significativas as ondas anual e semestral sendo que o anual é responsável por 96,29% das variações pluviométricas no município de Bananeiras-PB, e a onda semestral apenas 2,86%.

De acordo com AMARAL (1975) em um clima tropical continental com regime de chuvas convectivas e seca de inverno, quase toda a variação das precipitações pluviais ao longo do ano corre à conta da onda anual.

4.1.4. Variâncias dos parâmetros estimados

De acordo com 3.2.3. equações (22) a (28), foram estimadas as variâncias dos contrastes $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$, e das amplitudes $\hat{a}_j$, conforme (29), para os componentes harmônicos considerados na equação de regressão:

$$\hat{V}(\hat{p}_1) = 0,3451$$

$$\hat{V}(\hat{q}_1) = 0,2884$$

$$\hat{V}(\hat{p}_2) = 0,3016$$

$$\hat{V}(\hat{q}_2) = 0,2336$$

$$\hat{V}(\hat{a}_1) \approx 0,3167$$

$$\hat{V}(\hat{a}_2) \approx 0,2676$$

As covariâncias $\hat{p}_j$ e $\hat{q}_j$ são todas nulas, indicando então que os parâmetros não são correlacionados.

4.1.5. Intervalos de confiança

Tendo-se obtido as estimativas $\hat{p}_j$, $\hat{q}_j$ e $\hat{a}_j$, e suas variâncias, calculou-se os seus respectivos intervalos de confiança, com o t tabelado obtido de 46 graus de liberdade e um $\alpha = 0,05$, conforme tabela a seguir:

Tabela 8 - Intervalos de confiança para os parâmetros $\hat{p}_j$, $\hat{q}_j$ e $\hat{a}_j$, que farão parte da equação de regressão.

$-2,5123 \leq p_1 \leq -0,1507$
$-0,3814 \leq q_1 \leq 1,7774$
$0,3857 \leq a_1 \leq 2,6210$
$-1,1118 \leq p_2 \leq 1,0958$
$-0,7122 \leq q_2 \leq 1,2307$
$-0,7680 \leq a_2 \leq 1,2866$

4.1.6. Equação de regressão

A partir das ondas significativas, foi estabelecida a equação de regressão para estimar as precipitações mensais em milímetros para o município de Bananeira (PB).

$$\hat{y}_t = 3,8348 + 1,5034 \sin(30t + 297,6635)^0 + 0,2593 \sin(60t + 358,2369)^0$$

onde:

$\hat{y}_t$ = estimativa da potência $x^{0,325}$ do valor observado para o mês t .

A equação de regressão acima explica 99,15% da variação das precipitações pluviiais mensais no município de Bananeira - PB.

A Tabela 9 contém os resultados das estimativas da potência $x^{0,325}$, obtidas através da equação de regressão:

Tabela 9 - Estimativa de potência ($\chi^{0,325}$) das precipitações mensais no município de Bananeiras - PB.

Meses	$\bar{y}$	A	B	Síntese das ondas	
				A + B	$\hat{y}_t$
JAN	3,8348	-0,8041	0,2204	-0,5837	3,3
FEV	3,8348	-0,0613	0,2284	0,1671	4,0
MAR	3,8348	0,6980	0,0079	0,7058	4,5
ABR	3,8348	1,2702	-0,2204	1,0498	4,8
MAI	3,8348	1,5021	-0,2284	1,2737	5,1
JUN	3,8348	1,3315	-0,0079	1,3236	5,2
JUL	3,8348	0,8041	0,2204	1,0245	4,8
AGO	3,8348	0,0613	0,2284	0,2897	4,1
SET	3,8348	-0,6980	0,0079	-0,6900	3,1
OUT	3,8348	-1,2702	-0,2204	-1,1409	2,3
NOV	3,8348	-1,5021	-0,2284	-1,7305	2,1
DEZ	3,8348	-1,3315	-0,0079	-1,3394	2,3

onde: $A = \hat{a}_1 \sin(\alpha) = 1,5034 \sin(30t + 297,6635)^\circ$

$B = \hat{a}_2 \sin(\beta) = 0,2593 \sin(60t + 358,2369)^\circ$

$\bar{y}$ = média geral

A e B são os componentes harmônicos anual e semestral respectivamente.

$t = 1, 2, \dots, 12$

4.1.7. Representação gráfica

Com os resultados obtidos na tabela 9, construiu-se os gráficos das ondas significativas, de cada componente harmônico considerado na equação de regressão e da síntese das duas ondas, sendo apresentados nas figuras 1, 2 e 3.

A figura 4, representa a equação de regressão, obtida a partir dos valores estimados.

Figura 1 - Variação anual da potência ($X^{0,325}$) das precipitações mensais no município de Bananeiras-PB, 1912/1958.

Figura 2 - Variação anual da potência ($X^{0,325}$) das precipitações mensais no município de Bananeiras-PB, 1912/1958.

Figura 3 - Variação anual da potência ($X^{0,325}$) das precipitações mensais de Município de Bananeiras (PB), 1912/1958.

Figura 4 - Variação anual da potência ($\chi^{0,325}$) das precipitações mensais do município de Bananeiras(PB), 1912/1958.

5. CONCLUSÕES

A partir das análises efetuadas no presente trabalho pode-se chegar às seguintes conclusões:

1. A equação de regressão estimada a partir da transformação $x^{0.325}$, para uma série de 47 anos foi:

$$\hat{y}_t = 3,8348 + 1,5023 \sin(30t + 297,6635) + 0,2593 \sin(60t + 358,2369)$$

$\hat{y}_t = \hat{p}_i$, onde $\hat{p}_i$ representa precipitação mensal em mm.

2. A onda anual é responsável por 96,29% da variação total anual das precipitações.
3. Bananeiras apresenta um período chuvoso de março a agosto, responsável por 62,65% da precipitação.
4. O modelo explica 99,15% da variação das precipitações pluviiais mensais no município de Bananeiras.

6. BIBLIOGRAFIA

AMARAL, E., 1968. Análise Harmônica. Pes. Agr. Br., 3: 7-43.

AMARAL, E., 1975. Análise Harmônica e Previsão a longo prazo. Anais da reunião Internacional de Biometria. Piracicaba - SP, p. 232-271.

ANDERSON, T.W., 1971. The statistical analysis of time series. New York, John Wiley and Sons, 704 p.p.

BLISS, C.I., 1958. Periodic regression in Biology and Climatology. New Haven. Connections Agr. Exp. Station. 55 p.p. (Bol. 615).

BRASIL, Ministério do Interior, DNOCS, 1969. Observações pluviométricas do Nordeste do Brasil. Fortaleza, 176 p.p.

BROOKS, C.E. e N. CARRUTHERS, 1953. Handbook of Statistical methods in meteorology. London, Her majesty's stationery office. 412 p.p.

- COELHO, H., 1980. Emprego da análise harmônica a dados de produção de citrus (*Citrus sinensis* L. Osbeck). Piracicaba - SP. 124 p.p. (Dissertação de Mestrado), ESALQ/USP.
- CONRAD, V. e L.W. POLLAK, 1950. Methods in climatology. Massachusetts. Harvard University Press. 459 p.p.
- DUARTE, G.S., 1981. O emprego da análise harmônica no estudo da incidência da ferrugem alaranjada do cafeeiro (*Hemileia vastatrix* Berk et Br) no Estado de Minas Gerais. Piracicaba - SP. 72 p.p. (Tese de Doutorado), ESALQ/USP.
- DUARTE, G.S. e D. BARBIN, 1975. Curva epidemiológica da Ferrugem alaranjada do cafeeiro na Zona da Mata (M.G.). Anais da reunião Internacional de Biometria, Piracicaba - SP. p. 167-184.
- FELTRIN, M.A.V., 1980. A análise harmônica no estudo das precipitações pluviais no município de Bandeirantes, PR, Piracicaba - SP. 102 p.p. (Dissertação de Mestrado), ESALQ/USP.
- GODOY, H.F.; PIMENTEL GOMES e I.R. NOGUEIRA, 1961. Análise estatística de dados pluviométricos de Campinas. Bragantia. Campinas, 20(6): 357-371.
- GOMES, M.C.G.; CURI, P.R. e KROLL, L.B., 1975. Transformações aplicáveis a dados pluviométricos. Anais da reunião Internacional de Biometria, Piracicaba - SP. p. 339-345.
- PEREIRA, N.S.C., 1978. Regressão periódica aplicada a dados pluviométricos mensais do município de Grajaú - M.A. Piracicaba - SP. 66 p.p. (Dissertação de Mestrado), ESALQ/USP.

SPIEGEL, M.R., 1976. Análise de Fourier. São Paulo. McGraw-Hill do Brasil, 249 p.p. (coleção Schawn).

THIEBAUT, J.T., 1976. O emprego da análise harmônica no estudo das precipitações mensais do município de Viçosa (M.G.). Piracicaba - SP. 92 p.p. (Dissertação de Mestrado). ESALQ/USP.

7. APENDICES

Apêndice 1 - Valores originais das precipitações pluviométricas mensais (em mm) no município de Bananeiras (Pb), durante o período de 1912-1958.

ANOS	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1912	85,5	204,3	143,1	128,3	273,6	157,5	85,5	147,0	93,4	24,3	94,7	12,5
1913	24,8	291,5	176,1	122,5	120,3	148,1	261,7	153,9	37,3	32,3	0,0	28,9
1914	126,4	26,9	182,9	151,3	170,9	371,8	238,2	429,5	31,6	15,1	11,8	27,1
1915	52,7	11,4	33,2	58,8	139,4	183,7	134,5	140,7	21,8	0,4	11,4	42,3
1916	18,7	55,5	217,4	176,6	181,8	147,2	53,2	21,7	2,3	9,1	4,0	20,7
1917	132,2	301,2	346,0	64,2	133,6	134,8	131,6	39,2	71,6	3,3	33,9	23,5
1918	91,4	106,2	36,4	110,4	147,5	116,7	32,7	41,9	18,5	4,8	1,6	3,0
1919	12,6	17,1	13,1	39,5	18,5	49,6	164,6	179,5	154,5	46,2	11,8	60,0
1920	47,9	6,4	198,8	123,4	103,7	191,9	259,6	12,6	21,7	65,2	11,7	118,1
1921	162,1	97,2	204,7	149,8	225,3	144,3	201,6	103,0	88,8	11,6	42,3	43,0
1922	70,0	30,8	52,2	247,2	214,4	238,8	257,9	235,2	18,1	3,3	50,1	0,1
1923	46,8	123,1	29,6	97,4	51,2	214,5	179,4	50,6	36,6	10,3	44,9	10,3
1924	21,6	198,0	258,5	449,7	333,1	242,4	119,5	125,9	46,4	27,6	27,5	15,2
1925	56,6	50,9	131,5	234,3	147,2	144,2	114,2	95,2	122,4	10,5	9,1	15,0
1926	46,2	232,8	198,2	152,7	92,6	143,3	70,6	52,6	43,0	6,0	7,5	12,5
1927	33,5	183,3	105,5	154,9	125,2	72,5	251,8	49,2	30,5	5,5	0,6	13,2
1928	84,3	13,9	185,4	173,8	140,8	122,3	124,7	43,3	93,8	14,6	10,7	10,4
1929	31,2	142,1	285,8	101,4	120,1	131,3	149,9	92,6	45,7	14,1	11,6	77,7
1930	57,7	35,1	63,3	0,0	0,0	174,8	182,4	17,8	4,6	15,7	10,2	0,6
1931	56,5	237,7	135,0	217,1	226,0	455,8	158,7	252,2	159,6	33,8	16,3	52,2
1932	174,2	34,3	81,9	105,4	139,4	183,8	163,5	15,6	108,3	16,4	6,0	2,0
1933	161,3	83,0	25,8	273,2	100,0	78,1	63,1	13,3	22,2	7,0	7,5	30,1
1934	3,2	107,8	285,5	62,7	249,6	54,7	18,8	58,4	15,1	30,6	12,5	61,0
1935	14,4	110,9	230,6	275,4	194,7	170,6	157,2	84,6	9,5	17,3	57,4	5,8
1936	18,8	239,0	79,4	52,5	254,1	288,8	139,2	18,1	18,6	29,6	0,0	0,0
1937	2,0	23,0	57,0	300,4	141,9	76,5	68,1	67,2	7,9	15,1	6,6	13,8
1938	27,1	6,5	178,0	122,3	146,7	62,4	36,6	146,3	60,6	18,6	35,7	34,0
1939	15,6	169,6	140,0	54,8	77,6	14,5	189,6	295,1	37,2	95,1	93,1	28,9
1940	113,2	232,6	232,5	275,6	374,3	232,2	184,1	130,7	78,3	10,3	5,6	46,0
1941	0,0	28,9	284,0	299,1	111,7	99,9	132,8	132,1	32,2	44,0	37,5	55,5
1942	3,2	104,2	108,5	160,3	286,5	55,5	95,6	120,3	20,0	30,7	3,2	21,9
1943	72,9	18,0	100,6	50,9	138,8	99,6	215,2	68,1	47,8	0,0	16,7	13,4
1944	73,2	17,9	66,5	165,7	202,7	160,6	149,5	88,1	97,1	36,0	29,2	6,4
1945	54,6	191,6	72,9	80,1	295,7	263,8	170,4	131,6	62,4	33,4	51,0	17,6
1946	219,2	46,0	190,4	121,3	156,8	108,8	66,9	55,8	19,3	9,6	11,8	96,3
1947	100,1	72,5	254,0	98,3	213,0	226,1	147,1	54,2	42,7	7,0	83,8	98,5
1948	24,1	14,6	162,2	115,3	210,0	195,6	304,8	121,7	85,1	16,6	46,5	19,7
1949	38,2	8,5	56,6	209,4	251,2	201,1	73,8	144,9	70,6	49,1	68,8	11,1
1950	49,8	53,0	227,7	335,0	188,9	123,8	156,5	159,0	45,8	0,0	0,0	80,3
1951	22,2	43,5	48,8	77,0	125,3	647,1	92,2	23,0	0,0	0,0	66,6	83,1
1952	24,6	0,0	114,5	92,8	97,0	238,3	35,0	135,7	42,3	0,0	12,5	40,2
1953	47,8	0,0	43,1	154,3	152,5	304,4	211,3	123,4	0,0	0,0	12,0	0,0
1954	0,0	5,0	59,3	47,1	418,6	210,3	101,5	26,2	23,3	0,0	0,0	6,0
1955	0,0	167,2	254,9	166,4	175,8	137,2	82,7	59,7	86,0	89,9	0,0	0,0
1956	32,5	115,2	236,9	250,8	119,4	214,0	165,3	214,6	46,3	19,5	0,0	14,5
1957	68,1	7,1	182,0	327,1	37,4	89,5	81,1	63,5	6,7	88,0	0,0	194,2
1958	24,5	17,7	7,0	24,0	313,3	134,8	278,8	84,1	28,2	0,0	0,0	0,0

Apêndice 2 - Valores das precipitações pluviiais mensais em Bananeiras-Pb, reduzidos para meses de 30 dias, para o período de 1912-1958.

ANOS	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1912	82,7	211,3	138,5	128,3	264,7	167,5	82,7	142,2	93,4	25,3	94,7	12,1
1913	24,0	312,3	170,4	122,5	116,4	148,1	253,2	148,9	37,3	31,2	6,0	27,9
1914	122,3	28,8	177,0	151,3	165,4	371,8	230,5	415,6	31,6	14,6	11,8	26,2
1915	51,0	12,2	32,1	55,8	134,9	183,7	130,2	136,1	21,8	0,3	11,4	40,1
1916	18,1	57,4	210,3	176,6	175,9	147,2	51,4	20,9	2,3	8,8	4,0	20,0
1917	127,9	332,7	334,8	64,2	129,3	134,8	127,3	37,9	71,6	3,2	33,9	22,7
1918	58,4	113,8	35,2	110,4	142,7	116,7	31,6	40,5	18,5	4,6	1,6	2,9
1919	12,2	18,3	12,6	39,5	17,9	49,6	159,2	173,7	154,5	44,7	11,8	58,1
1920	46,3	6,6	192,4	123,4	100,3	191,9	251,2	12,2	21,7	63,1	11,7	114,3
1921	156,8	104,1	198,1	149,8	210,0	144,3	195,1	99,6	88,8	10,6	42,3	41,6
1922	67,7	33,0	50,5	247,2	207,4	238,8	249,5	227,6	18,1	3,2	50,1	0,1
1923	45,3	131,9	28,6	97,4	49,5	214,5	173,6	48,9	36,6	9,9	44,9	9,9
1924	20,1	194,5	250,2	449,7	322,3	242,4	115,6	121,8	46,4	26,7	27,5	14,7
1925	54,7	54,5	127,2	234,3	142,4	144,0	110,5	92,1	122,4	10,2	9,1	17,4
1926	44,7	249,4	191,8	152,7	89,6	143,3	68,3	50,9	43,0	5,8	7,5	17,8
1927	32,4	196,4	102,1	154,9	121,2	72,5	243,6	47,6	30,5	5,3	0,6	12,7
1928	61,6	14,4	179,4	173,9	136,2	122,3	120,6	41,9	93,8	14,1	10,7	10,1
1929	30,2	152,1	276,5	101,4	116,2	131,3	145,1	89,6	45,7	13,6	11,6	75,2
1930	55,8	37,6	61,2	0,0	0,0	174,8	176,5	17,2	4,6	18,1	10,2	0,5
1931	54,7	254,7	130,6	217,1	218,7	455,8	153,5	244,1	159,6	32,7	16,3	50,5
1932	168,6	33,5	79,2	105,4	134,9	183,8	158,2	15,1	108,3	15,8	6,0	1,9
1933	156,1	88,9	24,9	273,2	96,7	78,1	61,1	12,8	22,2	6,7	7,5	29,1
1934	3,1	115,5	276,3	62,7	241,5	54,7	18,2	56,5	15,1	29,6	12,5	59,0
1935	13,9	118,8	223,2	275,4	188,4	170,6	152,1	81,8	9,5	16,7	57,4	5,6
1936	18,2	247,2	76,8	52,5	245,9	288,9	134,7	17,5	18,6	28,6	0,0	0,0
1937	1,9	24,6	55,1	300,5	137,3	76,5	65,9	65,0	7,9	14,6	6,6	18,2
1938	26,2	6,9	172,2	122,3	141,9	62,4	35,4	141,5	60,6	17,9	35,7	32,9
1939	15,1	181,7	135,4	54,8	75,1	14,5	183,4	285,5	37,2	92,0	93,1	27,9
1940	109,5	240,6	225,0	275,6	362,2	232,2	178,1	126,4	78,3	9,9	5,6	44,5
1941	0,0	30,9	274,8	299,1	107,9	99,9	128,5	127,8	32,2	42,5	37,5	53,7
1942	3,1	111,6	105,0	160,3	277,2	55,5	92,5	116,4	20,0	29,7	3,2	21,2
1943	70,5	19,3	97,3	50,9	134,2	99,5	208,2	65,9	47,8	0,0	16,7	12,9
1944	70,8	18,5	64,3	165,7	196,2	160,6	144,6	85,2	97,1	34,8	29,2	6,2
1945	52,8	205,3	70,5	80,1	286,2	263,8	164,9	127,3	62,4	32,3	51,0	17,0
1946	212,1	49,3	184,2	121,3	151,7	108,8	64,7	53,9	19,3	9,2	11,8	93,1
1947	96,8	77,6	245,8	98,3	206,1	226,1	142,3	52,4	42,7	6,7	83,8	95,3
1948	23,2	15,1	156,9	115,3	203,2	195,6	294,9	117,7	85,1	16,1	46,5	19,1
1949	36,9	9,1	54,7	209,4	243,1	201,1	71,4	140,2	70,6	47,5	68,8	10,7
1950	48,2	56,7	220,3	335,0	182,8	123,8	151,4	153,8	45,8	0,0	0,0	77,7
1951	21,5	46,6	47,2	77,0	121,2	647,1	89,2	22,2	0,0	0,0	66,0	80,4
1952	23,8	0,0	110,8	92,8	93,8	238,3	33,8	131,3	42,3	0,0	12,5	38,9
1953	46,2	0,0	41,7	154,3	147,5	304,4	204,4	119,4	0,0	0,0	12,0	0,0
1954	0,0	5,3	57,3	47,1	405,1	210,3	98,2	25,3	23,3	0,0	0,0	0,0
1955	0,0	179,1	246,6	166,4	170,1	137,2	89,0	57,7	86,0	86,9	0,0	0,0
1956	31,4	119,2	229,2	250,8	115,5	214,0	159,9	207,6	45,3	18,8	0,0	14,0
1957	65,9	7,6	176,1	327,1	36,2	89,5	78,4	61,4	6,7	8,5	0,0	187,9
1958	23,7	18,9	6,7	24,0	303,2	134,8	269,8	81,4	28,2	0,0	0,0	0,0

Apêndice 3 - Valores das potências ($Z=X^{0,325}$) das precipitações pluviais mensais (em mm) reduzidas a meses de 30 dias no município de Bananeiras (Pb) durante o período de 1912-1958.

Anos	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
1912	4,199	5,693	4,965	4,843	6,129	5,282	4,199	5,008	4,368	2,789	4,388	2,246
1913	2,809	6,467	5,311	4,771	4,692	5,074	6,041	5,083	3,251	3,059	0,000	2,949
1914	4,765	2,980	5,377	5,110	5,260	6,844	5,859	7,096	3,071	2,390	2,230	2,890
1915	3,588	2,254	3,087	3,695	4,923	5,442	4,866	4,937	2,722	0,676	2,205	3,319
1916	2,562	3,729	5,687	5,373	5,366	5,064	3,598	2,685	1,310	2,027	1,569	2,647
1917	4,838	6,536	6,615	3,867	4,855	4,922	4,831	3,258	4,607	1,459	3,142	2,756
1918	4,291	4,658	3,181	4,612	5,014	4,696	3,071	3,329	2,581	1,642	1,165	1,413
1919	2,254	2,572	2,278	3,302	2,553	3,556	5,195	5,344	5,145	3,430	2,230	3,744
1920	3,477	1,846	5,525	4,782	4,471	5,520	6,025	2,254	2,716	3,846	2,224	4,665
1921	5,169	4,525	5,578	5,093	5,684	5,032	5,550	4,461	4,297	2,153	3,377	3,358
1922	3,934	3,115	3,577	5,994	5,661	5,927	6,012	5,835	2,562	1,459	3,568	6,473
1923	3,453	4,887	2,973	4,428	3,554	5,724	5,343	3,540	3,222	2,106	3,443	2,106
1924	2,651	5,544	6,017	7,281	6,534	5,956	4,682	4,762	3,480	2,908	2,936	2,595
1925	3,671	3,667	4,830	5,890	5,010	5,028	4,614	4,348	4,770	2,127	2,049	2,530
1926	3,438	6,011	5,519	5,125	4,310	5,020	3,940	3,580	3,395	1,770	1,924	2,549
1927	3,096	5,562	4,497	5,149	4,754	4,023	5,965	3,509	3,036	1,719	0,847	2,864
1928	4,181	2,379	5,401	5,346	4,938	4,768	4,747	3,366	4,374	2,363	2,160	2,120
1929	3,026	5,119	6,216	4,487	4,690	4,880	5,641	4,310	3,463	2,335	2,217	4,071
1930	3,695	3,250	3,807	0,000	0,000	5,355	5,372	2,520	1,642	2,562	2,127	6,798
1931	3,671	6,052	4,871	5,746	5,760	7,313	5,134	4,969	5,195	3,106	2,477	3,577
1932	5,293	3,190	4,140	4,543	4,923	5,443	5,184	2,416	4,584	2,452	1,790	1,231
1933	5,162	4,299	2,842	6,192	4,418	4,122	3,805	2,290	2,730	1,855	1,924	2,990
1934	1,444	1,681	6,215	3,838	5,949	3,671	2,567	3,710	2,416	3,007	2,272	3,762
1935	2,352	4,724	5,798	6,208	5,487	5,313	5,119	4,184	2,078	2,496	3,729	1,750
1936	2,567	6,199	4,099	3,622	5,984	6,205	4,920	2,585	2,973	2,939	0,000	0,000
1937	1,231	2,831	3,680	6,386	4,951	4,094	3,900	3,883	1,947	2,390	1,846	2,567
1938	2,890	1,873	5,329	4,768	5,004	3,832	3,187	5,000	3,795	2,553	3,196	3,112
1939	2,416	5,423	4,929	3,673	4,069	2,384	5,440	6,281	3,239	4,347	4,364	2,949
1940	4,600	5,941	5,813	6,209	6,786	5,873	5,388	4,820	4,125	2,106	1,750	1,444
1941	0,000	3,049	6,204	6,377	4,578	4,465	4,846	4,837	3,090	3,382	3,247	3,649
1942	1,444	4,629	4,538	5,207	6,221	3,688	4,355	4,692	2,647	3,010	1,459	2,698
1943	3,987	2,617	4,427	3,586	4,914	4,461	5,668	3,900	3,514	0,000	2,496	2,295
1944	3,992	2,581	3,869	5,263	5,560	5,210	5,035	4,200	4,424	3,169	2,993	1,809
1945	3,629	5,643	3,987	4,156	6,286	6,122	5,255	4,831	3,832	3,093	3,588	2,511
1946	5,703	3,549	5,447	4,756	5,114	4,590	3,877	3,653	2,617	2,056	2,230	4,364
1947	4,419	4,113	5,983	4,442	5,650	5,823	5,009	3,620	3,387	1,855	4,217	4,397
1948	2,778	2,416	5,171	4,678	5,624	5,555	6,348	4,709	4,238	2,467	3,482	2,608
1949	3,230	2,049	3,671	5,679	5,961	5,605	4,003	4,985	3,908	3,506	3,955	2,160
1950	3,523	3,714	5,774	6,616	5,434	4,487	5,111	5,137	3,465	0,000	0,000	4,115
1951	2,710	3,485	3,499	4,103	4,754	8,195	4,303	2,733	0,000	0,000	3,902	4,161
1952	2,801	0,000	4,618	4,359	4,374	5,923	3,139	4,880	3,377	0,000	2,272	3,286
1953	3,475	0,000	3,361	5,143	5,068	6,413	5,635	4,731	0,000	0,000	2,242	0,000
1954	0,000	1,719	3,727	3,497	7,038	5,687	4,440	2,857	2,782	0,000	0,000	0,000
1955	0,000	5,398	5,989	5,270	5,308	4,950	4,154	3,375	4,253	4,267	0,000	0,000
1956	3,065	4,729	5,848	6,022	4,681	5,719	5,202	5,663	3,477	2,594	0,000	2,357
1957	3,900	1,933	5,368	6,565	3,210	4,308	4,127	3,812	1,855	2,034	0,000	5,483
1958	2,797	2,529	1,855	2,809	6,405	4,922	6,167	4,177	2,960	0,000	0,000	0,000

Apêndice 4 - Matriz dos desvios em relação à média (Y').

0,3646	1,8614	1,1307	1,0088	2,2942	1,4472	0,3646	1,1735	0,5339	-0,9771	-0,5536	-1,5562
-1,0256	2,6326	1,4768	0,9365	0,8580	1,2401	2,2064	1,2490	-0,5928	-0,7756	-3,3342	-0,6648
0,9340	-0,8542	1,5428	1,2755	1,4256	3,0098	2,0247	3,2621	-0,7629	-1,4447	-1,0046	-0,9444
-0,2459	-1,5802	-0,7472	-0,1394	1,0884	1,6081	1,0320	1,1026	-1,1121	-3,1586	-1,6293	-0,5156
-1,2718	-0,1053	1,8527	1,5388	1,5319	1,2300	-0,2367	-1,1491	-2,5239	-1,8073	-2,2656	-1,1673
1,0039	2,7019	2,7805	0,0328	1,0210	1,0872	0,9965	-0,5760	0,1724	-2,3754	-0,6926	-1,0760
0,4565	0,8236	-0,6533	0,7779	1,1792	0,8319	-0,7229	-0,5049	-1,2535	-2,1927	-2,6697	-2,4213
-1,5502	-1,2626	-1,5564	-0,5319	-1,2810	-0,2782	1,3607	1,5100	1,3103	-0,3964	-1,6045	-0,6936
-0,3569	-1,9882	1,6906	0,9479	0,6363	1,6859	2,1908	-1,5802	-1,1161	0,0111	-1,6106	0,8303
1,3351	0,6907	1,7433	1,2589	1,8507	1,1974	1,7157	0,6262	0,4628	-1,6809	-0,4575	-0,4758
0,1691	-0,7193	-0,2573	2,1595	1,8270	2,0925	2,1775	2,0007	-1,2718	-2,3754	-0,2666	-3,3616
-0,3815	1,0526	-0,8609	0,5939	-0,2805	1,8893	1,5090	-0,2946	-0,6127	-1,7282	-0,3914	-1,7262
-1,1230	1,7101	2,1830	3,4463	2,6992	2,1214	0,8475	0,9276	-0,3544	-0,9266	-0,8936	-1,4394
-0,1632	-0,1676	0,9953	2,0560	1,1758	1,1940	0,7793	0,5141	0,9363	-1,7076	-1,7851	-1,3644
-0,3964	2,1768	1,6850	1,2908	0,4754	1,1860	0,1114	-0,2482	-0,4395	-2,0642	-1,9099	-1,2637
-0,7379	1,7277	0,6622	1,3147	0,9200	0,1887	2,1310	-0,3274	-0,7981	-2,1153	-2,9577	-1,5506
0,3463	-1,4554	1,5664	1,5120	1,1038	0,9340	0,9123	-0,4679	0,5406	-1,4716	-1,7743	-1,7144
-0,6272	1,2842	2,3817	0,6522	0,8553	1,0453	1,2064	0,4754	-0,3716	-1,4992	-1,6168	0,2368
-5,1334	-0,5844	-0,0268	-3,8348	-3,8348	1,5210	1,5378	-1,3139	-2,1927	-1,2718	-1,7276	-3,6386
-0,1632	2,2180	1,0369	1,9118	1,9255	3,4782	1,2995	2,1349	1,3649	-0,7283	-1,3576	-0,2573
1,4555	-0,6445	0,3060	0,7090	1,0884	1,6091	1,3501	-1,4184	0,7492	-1,3626	-2,5446	-2,6018
1,3276	0,4644	-0,9918	2,3575	0,5835	0,2872	-0,0288	-1,5447	-0,0959	-1,5792	-1,9099	-0,8443
-2,3983	0,8461	2,3803	0,0032	2,1142	-0,1632	-1,2672	-0,1244	-1,4184	-0,8275	-1,5623	-0,8718
-1,4225	0,8892	1,9638	2,3737	1,6530	1,4788	1,2842	0,3497	-1,7562	-1,3380	-0,1053	-2,0843
-1,2672	2,1595	0,2647	-0,2119	2,1492	2,4703	1,0860	-1,2997	-1,2490	-0,8609	-3,8348	-3,8348
-2,6028	-1,0030	-0,1545	2,5515	1,1167	0,2595	0,0658	0,0484	-1,8771	-1,4447	-1,9682	-1,2672
-0,9444	-1,9614	1,4949	0,9340	1,1700	-0,0027	-0,6474	1,1654	-0,0390	-1,2810	-0,7387	-0,7224
-1,4184	1,5888	1,0943	-0,1611	0,2350	-1,4500	1,6052	2,4468	-0,5956	0,5126	0,5294	-0,8848
0,7657	2,1070	1,9789	2,3751	2,9518	2,0388	1,5536	0,9854	0,2906	-1,7282	-2,8843	-0,4014
-3,8348	-0,7852	2,3693	2,5425	0,7437	0,6305	1,0113	1,0027	-0,7441	-0,4523	-0,5872	-0,1862
-2,3903	0,7942	0,7034	1,3723	2,3868	-0,1459	0,5202	0,8580	-1,1873	-0,8242	-2,3754	-1,1367
0,1523	-1,2177	0,5924	-0,2482	1,0801	0,6262	1,8341	0,0658	-0,3207	-3,8348	-1,3366	-1,8359
0,1578	-1,2537	0,0348	1,4287	1,7258	1,3755	1,2008	0,4054	0,5895	-0,6651	-0,2408	-2,0254
-0,2052	1,8084	0,1523	0,3212	2,4518	2,2874	1,4204	0,9965	-0,0027	-0,7410	-0,2459	-1,3235
1,8684	-0,2852	1,6129	0,9213	1,2798	0,7561	0,0426	-0,1808	-1,2177	-1,7778	-1,6045	0,5294
0,5850	0,2786	2,1484	0,6072	1,8155	1,9882	1,1746	-0,2141	-0,4472	-1,9792	0,3826	0,5626
-0,0564	-1,4184	1,3362	0,8435	1,7895	1,7203	2,5132	0,8749	0,4035	-1,3675	-0,3620	-1,2266
-0,6042	-1,7851	-0,1632	1,8437	2,1270	1,7706	0,1688	1,1505	0,1541	-0,3278	0,1208	-1,6743
-0,3111	-0,1201	1,9392	2,7818	1,5994	0,9529	1,2776	1,3027	-0,3691	-3,8348	-3,8348	0,2803
-1,1243	-0,3496	-0,3651	0,2682	0,9200	4,3605	0,4691	-1,0959	-3,8348	-3,8348	0,6677	0,3662
-1,0333	-3,8348	0,7834	0,5248	0,5400	2,0885	-0,7950	1,0453	-0,4575	-3,8348	-1,5623	-0,5483
-0,3593	-3,8348	-0,4732	1,3082	1,2334	2,5790	1,8003	0,8969	-3,8348	-3,8348	-1,5923	-3,8348
-3,8348	-2,1153	-0,1074	-0,3375	3,2033	1,8527	0,6057	-0,9771	-1,0525	-3,8348	-3,8348	-3,8348
-3,8348	1,5634	2,1547	1,4359	1,4737	1,1155	0,3195	-0,0990	0,4183	0,4327	-3,8348	-3,8348
-0,7693	0,8984	2,0140	2,1877	0,8461	1,8850	1,3681	1,8288	-0,3569	-1,2400	-3,8348	-1,4770
0,0658	-1,9016	1,5339	2,7307	-0,6242	0,4738	0,2923	-0,0227	-1,9792	-1,8300	-3,8348	1,6482
-1,0371	-1,2355	-1,9792	-1,0256	2,5708	1,0872	2,3323	0,3430	-0,8745	-3,8348	-3,8348	-3,8348

Apêndice 5 – Matriz X

0,8660	0,5000	0,0000	-0,4999	-0,8660	-1,0000	0,4999	0,8660	1,0000	0,8660	0,5000
0,5000	-0,4999	-1,0000	-0,5000	0,4999	1,0000	0,8660	0,8660	0,0000	-0,8660	-0,8660
0,0000	-1,0000	-0,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	-1,0000	-0,0000	1,0000
-0,4999	-0,5000	1,0000	-0,4999	-0,5000	1,0000	0,8660	-0,8660	-0,0000	0,8660	0,8660
-0,8660	0,4999	-0,0000	-0,5000	0,8660	-1,0000	0,5000	-0,8660	1,0000	-0,8660	0,4999
-1,0000	1,0000	-1,0000	1,0000	-1,0000	1,0000	0,0000	-0,0000	0,0000	0,0000	-0,0000
-0,8660	0,5000	-0,0000	-0,4999	0,8660	-1,0000	-0,4999	0,8660	-1,0000	0,8660	-5,0000
-5,0000	-0,4999	1,0000	-0,5000	-0,4999	1,0000	-0,8660	0,8660	-0,0000	-0,8660	0,8660
-0,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	-0,0000	-1,0000	-1,0000	0,0000	1,0000	-0,0000	-1,0000
0,4999	-0,5000	-1,0000	-0,4999	0,5000	1,0000	-0,8660	-0,8660	0,0000	0,8660	0,8660
0,8660	0,5000	-0,0000	-0,4999	-0,4999	-0,8660	-1,0000	-0,4999	-1,0000	-0,8660	-0,4999
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0000

Apêndice 7 - Matriz $\hat{\beta}'$

-0,0612	-0,2560	-0,2892	-0,2993	-0,3625	-0,1928	0,6304	0,1276	0,1906	-0,7392	-0,1414
-1,5254	-0,5746	-0,2993	0,0193	0,7623	0,4425	0,9135	1,1371	-0,1014	0,0630	0,0198
-1,8236	0,2593	0,4803	0,0559	-0,6139	0,0620	0,3444	0,8248	-0,0610	0,0809	0,7474
-1,4058	0,8270	0,5963	0,1663	-0,2524	-0,0890	0,2293	0,5986	0,1971	-0,2155	0,1322
-1,2922	0,0590	-0,0191	0,2090	0,1027	0,1194	-0,5932	-0,2541	-0,2690	0,0304	0,3260
-0,5342	-0,2781	-0,5055	0,3179	-0,0418	-0,4573	1,3987	0,8862	-0,1479	-0,4037	-0,2426
-1,0635	-0,0004	-0,2735	-0,3366	-0,3045	0,0873	1,1429	0,4211	0,7447	-0,0792	-0,0981
-0,1596	-0,2224	0,4708	0,2130	0,2886	0,1917	-1,1156	0,5545	0,0415	0,2151	-0,2761
-0,9467	0,6127	0,0815	0,6609	0,4374	-0,1272	0,5190	-0,2481	-0,5179	1,0584	0,3664
-0,9065	0,0482	0,2003	0,0430	-0,1304	-0,4194	0,8076	0,4903	0,1077	-0,0116	-0,0596
-2,1156	0,2744	0,3001	-0,8750	-0,9115	-0,2093	0,4323	0,3196	-0,1663	-0,1125	-0,0915
-0,9730	0,3417	-0,4404	-0,2253	-0,3952	0,0669	0,3399	0,5328	-0,2552	-0,0133	-0,7193
-1,7050	-0,4987	0,0049	-0,1334	-0,0802	0,2121	1,2976	-0,2912	-0,1617	-0,3253	-0,1905
-1,3503	-0,3975	0,3244	0,2448	-0,2234	-0,1127	0,6230	0,1766	0,3263	0,1771	0,2666
-0,9070	-0,4637	-0,2569	0,2380	-0,0718	0,1274	1,3448	0,5559	-0,0411	-0,2240	-0,3237
-1,3827	-0,3106	-0,0604	-0,2435	0,5735	0,0041	1,1214	0,8174	-0,0702	0,1815	-0,4614
-1,2550	-0,2668	0,2204	0,3205	-0,2896	-0,4548	0,6435	-0,0194	0,1976	0,5471	0,0672
-0,8342	-0,2276	0,0890	0,5028	0,4009	0,0456	0,9243	0,5436	-0,3825	-0,2987	0,0697
-0,4209	0,3557	-1,3083	0,3055	-0,5601	-0,1797	-0,2206	1,4649	-0,9950	0,5387	0,3085
-1,5207	-0,1828	-0,1963	0,3337	-0,1507	0,3875	0,4901	0,5395	0,3580	-0,3754	-0,2960
-1,2483	0,0409	-0,4823	0,0839	-0,3752	-0,5531	0,6093	0,3428	0,6141	0,7439	-0,2173
-0,5466	0,3113	0,1993	-0,3799	-0,2184	0,0713	1,2541	0,1683	0,6243	0,5894	-0,5777
-0,6658	-0,4497	-0,0080	0,3484	0,7195	0,1505	1,1059	-0,3844	-0,2075	-0,8307	0,5858
-1,5111	-0,2126	-0,0651	-0,3683	-0,2050	0,0093	1,1495	-0,2226	-0,7880	-0,2813	-0,5776
-2,0200	-0,2211	-1,5192	-0,2181	0,3867	0,1061	1,1478	0,4961	0,3528	-0,0618	-0,0381
-1,5081	-0,1260	0,5868	-0,2352	0,1582	0,3820	0,7484	-0,5379	-0,2143	0,0571	-0,1015
-0,8690	-0,3566	0,7703	0,3054	-0,2611	-0,1886	0,2500	-0,3712	-0,0036	-0,2416	0,5132
-0,3150	-0,7585	0,1249	-0,7509	0,4727	0,0501	-0,2159	0,4483	-0,8346	-0,6151	0,2262
1,4958	-0,1514	0,0902	0,0739	0,1854	-0,0066	1,3895	0,5625	0,4266	-0,1434	-0,1187
1,1261	-0,6111	0,6611	0,3750	0,3570	0,3162	-0,4001	-1,7004	-0,1047	0,1595	0,5517
-1,4609	-0,4713	0,2116	-0,3228	0,7539	0,2716	0,7727	-0,1122	-0,0065	-0,4309	0,1615
-1,3585	0,3828	0,4508	0,1853	-0,1749	-0,6790	0,5459	0,7470	-0,0294	-0,0991	-0,1188
-1,4005	-0,0183	0,0586	-0,1841	-0,3585	-0,3002	0,0972	-0,1642	0,3463	0,3009	-0,0282
-1,2467	0,2220	-0,5601	-0,2982	0,0013	-0,0184	0,3856	0,3224	0,1528	-0,6084	-0,1553
-0,4242	0,3808	0,4294	0,2581	-0,1186	-0,1682	1,2388	0,3790	0,3132	0,2663	0,4297
-0,7039	0,5804	0,1113	0,4878	-0,1201	-0,3679	0,9473	0,1440	-0,2920	-0,2706	0,0584
-1,6909	0,1224	0,2595	0,2200	-0,0421	-0,4340	0,0245	-0,0000	-0,3934	5,0055	0,0482
-1,4009	0,0950	0,2772	-0,2100	-0,5987	-0,0687	-0,0602	-0,6978	0,2584	-0,0767	0,1592
-1,7955	-0,1727	1,2278	0,5622	0,2314	0,0885	1,4549	0,7846	0,2563	0,1393	-0,0443
-1,3051	1,9215	-0,1129	0,4761	-0,5990	0,2926	1,2214	0,0689	-0,7068	-0,5432	-0,1784
-1,5617	0,4814	1,1005	1,0485	-0,8571	-0,1778	0,2787	-0,0267	0,0871	-0,1770	0,4289
-2,6114	1,0542	0,5768	-0,5621	-0,1722	-0,2911	0,6751	0,2004	-0,4492	0,3191	0,5564
-2,9910	0,1466	-0,1753	0,4034	0,3225	-0,3521	0,7144	-0,2190	0,2754	-0,5307	0,0334
2,1359	-1,6495	-0,9349	0,1875	0,5957	0,3264	0,7703	-0,2249	-0,0970	-0,1082	0,0008
-1,9080	-0,7132	0,1666	0,2374	0,0602	0,4009	0,9670	0,7740	0,0287	0,2615	0,2472
-0,8369	0,1714	1,2690	0,7065	0,1551	0,4702	1,2213	0,2875	-0,0881	1,1030	0,4470
-2,5069	-0,4997	-0,0890	-0,4567	0,2249	-0,4731	0,2464	0,9431	0,6901	-0,2033	-0,1087