ANÁLISE DE SEQUÊNCIAS EQUILIBRADAS EM SÉRIE, DE TIPO I

GENEBALDO CORREIA FIGUEIRÊDO

Orientador: Dr. Izaías Rangel Nogueira

**Dissertação apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade
de São Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Experimentação e Estatística.**

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Outubro, 1978

*À Olga, minha esposa,
e aos meus filhos Lícia e
Genebaldo,*

D E D I C O .

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela orientação geral do trabalho.

Ao Dr. Bikas Kumar Sinha, Professor do Departamento de Estatística, do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, pela sugestão do tema e pela excelente assistência científica nos misteres que conduziram à realização desta pesquisa.

Ao Governo do Estado da Bahia, pela oportunidade oferecida para a realização do curso.

Ao Dr. Frederico Pimentel Gomes, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pela maneira sábia e amiga com que dirige o curso, como também pelas valiosas sugestões apresentadas.

Ao Dr. Raymundo Costa e Souza, Chefe do Departamento de Estatística, do Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia, pelas importantes sugestões dadas.

Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Professor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela elaboração do Summary.

Ao Dr. Irundi Sampaio Edelweiss, Diretor Superintendente do Centro de Pesquisas e Desenvolvimento (CEPED), do Estado da Bahia, pelo apoio dado para a realização do curso.

Ao CEPED e ao CNPq, pelo auxílio financeiro prestado.

Ao Corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos conhecimentos transmitidos, os quais concorreram, eficazmente, para a elaboração deste trabalho.

À Maria Izalina Ferreira Alves, Secretária do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela amizade e espírito de solidariedade.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela dedicação e atenção dispensada.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pelo companheirismo.

A todos que concorreram para a realização do curso e deste trabalho.

ÍNDICE

	Pág.
1. RESUMO	1
2. INTRODUÇÃO	3
3. REVISÃO DE LITERATURA	7
4. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	15
4.1 - Análise de Variância	16
4.1.1 - Modelo matemático	16
4.1.2 - Sistema de equações normais	17
4.1.3 - Estimadores dos parâmetros	19
4.1.4 - Esquema de análise de variância	22
4.2 - Variâncias das Estimativas da Diferença Entre Dois Efeitos	24
4.2.1 - Variância da estimativa da diferença entre dois efeitos diretos de tratamentos	24
4.2.2 - Variância da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais de tratamentos	24
4.2.3 - Variância média da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais de tratamentos	33
4.3 - Caso Particular	45
5. CONCLUSÕES	49
6. SUMMARY	51
7. LITERATURA CITADA	53

1. RESUMO

As Sequências Equilibradas em Série permitem estudar os efeitos diretos e residuais dos tratamentos aplicados, em períodos sucessivos, a uma unidade experimental.

A fim de se obterem resultados, através dos quais se possa analisar a classe das sequências especificadas neste trabalho, considera-se o modelo matemático

$$y_{hij} = \mu + \beta_{hi} + \tau_j + \rho_{l(h,i,j)} + \epsilon_{hij} ,$$

onde: y_{hij} é a observação referente ao tratamento j no bloco hi , μ é a média geral, β_{hi} é o efeito do bloco hi , τ_j o efeito direto do tratamento j , $\rho_{l(h,i,j)}$ o efeito residual do tratamento anterior ao tratamento j que aparece no bloco hi , e os valores de ϵ_{hij} são erros aleatórios independentes, com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

Usando os métodos para o estudo de modelos lineares, determinam-se:

- 1 - o sistema de equações normais;
- 2 - os estimadores dos parâmetros;
- 3 - o esquema de análise de variância;
- 4 - a variância da estimativa da diferença entre dois efeitos diretos de tratamentos;
- 5 - a matriz de variâncias e covariâncias dos efeitos residuais;
- 6 - a variância média da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais.

Convém ressaltar que não havendo efeitos de blocos, os resultados simplificam-se bastante e assemelham-se aos do delineamento em blocos ao acaso, aparecendo efeitos residuais em lugar de blocos.

2. INTRODUÇÃO

No campo experimental, pode ser necessário usar somente uma unidade experimental, na qual diversos tratamentos são aplicados, em períodos sucessivos; como consequência, uma observação, referente a um certo período, pode ter não só um efeito direto do tratamento aplicado no período como também um efeito residual do tratamento aplicado no período anterior.

Tal situação pode ser estudada através das Sequências Equilibradas em Série, introduzidas por FINNEY e OUTHWAITE (1955), nas quais os tratamentos são dispostos em uma série de blocos completos, de modo que o efeito residual de qualquer tratamento ocorra o mesmo número de vezes junto com o efeito direto de cada tratamento, incluindo ele mesmo (sequências de tipo I), ou de cada outro tratamento (sequências de tipo II).

As Sequências Equilibradas em Série são definidas adequadamente por SAMPFORD (1957), como se segue:

Uma Sequência de Tipo I de ordem t e índice k é uma cadeia fechada de letras, tal que:

- 1) cada uma das t diferentes letras ocorre kt vezes na sequência;
- 2) a sequência aparece em kt blocos, cada um com as t diferentes letras, uma vez cada;
- 3) os possíveis t^2 diferentes pares de letras ocorrem k vezes cada um entre os kt^2 pares de letras consecutivas na sequência.

Uma Sequência de Tipo II é semelhantemente definida, com a diferença de que a cadeia de letras contém somente $k(t-1)$ blocos e que os $t(t-1)$ possíveis pares de diferentes letras ocorrem k vezes cada um, e uma letra não é seguida por ela mesma.

Exemplos de Sequências de Tipo I:

1º) $t = 6$ e $k = 1$

(.	.	.	.	.	A)
A	F	B	E	C	D
D	F	C	E	A	B
B	A	C	F	D	E
E	B	F	A	D	C
C	B	D	A	E	F
F	E	D	B	C	A

2º) $t = 4$ e $k = 2$

(.	.	.	A)
A	D	B	C
C	D	A	B
B	A	C	D
D	B	C	A
A	C	B	D
D	C	A	B
B	A	D	C
C	B	D	A

Exemplos de Sequências de Tipo II:

1º) $t = 4$ e $k = 1$

(.	.	.	A)
B	C	D	A
C	B	A	D
B	D	C	A

2º) $t = 3$ e $k = 3$

(.	.	C)
A	B	C
B	C	A
C	A	B
A	C	B
C	B	A
B	A	C

Na utilização das Sequências Equilibradas em Série, como delineamentos experimentais, as linhas de uma sequência repre-

sentam blocos completos. Se os tratamentos forem distribuídos em pe ríodos sucessivos de acordo com as letras da sequência, o efeito di reto de qualquer tratamento ocorre simultaneamente k vezes com o efeito residual de cada tratamento (tipo I), ou com o efeito resi- dual de cada um dos outros tratamentos (tipo II); exceto que o efei- to direto do primeiro tratamento na sequência completa ocorre somen- te (k-1) vezes com o efeito residual do último. Para corrigir isto, o último tratamento é também aplicado no começo da sequência como um tratamento preliminar, omitindo-se da análise qualquer observação feita nessa ocasião (SAMPFORD, 1957).

Este trabalho pretende apresentar o método geral de análise para a classe de Sequências Equilibradas em Série, de Tipo I, consideradas por SINHA (1971), visando a preencher lacunas existentes na literatura pertinente, tais como fórmulas e deduções matemáticas.

3. REVISÃO DE LITERATURA

As Sequências Equilibradas em Série foram introduzidas por FINNEY e OUTHWAITE (1955 e 1956). Os autores abordaram as características, construção e aplicação de tais sequências, e ainda, discutiram aspectos relacionados à análise das Sequências Equilibradas em Série, de Tipo II. Entre os exemplos dados por eles, encontra-se a sequência de tipo I, com $t = 2$ e $k = 1$,

(. A)

A B

B A

SAMPFORD (1957), além de definir, adequadamente, as Sequências Equilibradas em Série e discutir suas propriedades gerais, descreveu, com detalhes, métodos para a construção de certas classes de sequências. Apresentou tabelas contendo as seguintes se-

quências de tipo I:

$$t = 3 \quad e \quad k = 2$$

(. . . A)

A B C

C A B

B C A

A C B

B A C

C B A ,

$$t = 4 \quad e \quad k = 2$$

(. . . . A)

A B D C

C A D B

B C A D

D C B A

A B C D

D A C B

B D A C

C D B A ,

t = 5 e k = 2

(. . . . A)
 A B E C D
 D E C A B
 B C A D E
 E A D B C
 C D B E A
 A E B D C
 C B D A E
 E D A C B
 B A C E D
 D C E B A ,

t = 6 e k = 1

(. A)
 A F B E C D
 D F C E A B
 B A C F D E
 E B F A D C
 C B D A E F
 F E D B C A ,

t = 7 e k = 1

(. A)
 A G B D E F C
 C A B F D G E
 E B A C D F G
 G F E A D C B
 B G C F A E D
 D B C E G A F
 F B E C G D A ,

t = 8 e k = 1

(. A)
 A H B G C F D E
 E C G D F H A B
 B A C H D G E F
 F B E G A D H C
 C B D A E H F G
 G B H E A F C D
 D C E B F A G H
 H G F E D B C A ,

t = 9 e k = 1

(. A)
 A I E D F C H G B
 B G F H D E I A C
 C I F E G H B A D
 D H F G I B C A E
 E H I G C B D A F
 F I H C D B E A G
 G D I C E B F A H
 H E F D C G A B I
 I D G E C F B H A e

$$t = 10 \text{ e } k = 1$$

(.	.	.	.	.	.	.	.	.	A)
A	J	B	I	C	H	D	G	E	F
F	J	C	I	D	H	E	G	A	B
B	A	C	J	D	I	E	H	F	G
G	D	B	J	E	I	A	F	H	C
C	B	D	A	E	J	F	I	G	H
H	J	G	I	F	B	E	C	A	D
D	C	E	B	F	A	G	J	H	I
I	B	C	D	J	A	H	G	F	E
E	D	F	C	G	B	H	A	I	J
J	I	H	B	G	C	F	D	E	A

Segundo o citado autor, não existem sequências de ti po I para $t = 3, 4$ e 5 , no caso de $k = 1$, concordando com FINNEY e OUTHWAITE (1956). Isto pode ser verificado através da enumeração de todos os casos possíveis.

Quanto à análise estatística das sequências de tipo I, o autor parte do modelo correspondente às sequências com $k = 1$,

$$y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \rho_k + \varepsilon_{ij} ,$$

onde: y_{ij} é a observação referente ao tratamento j no bloco i;

μ é a média geral;

β_i é o efeito do bloco i;

τ_j é o efeito do tratamento j;

ρ_k é o efeito residual do tratamento anterior ao tratamento j

que aparece no bloco i;

ϵ_{ij} são os desvios não correlacionados, com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

Admitindo as hipóteses $\sum_i \hat{\beta}_i = \sum_j \hat{\tau}_j = \sum_j \hat{\rho}_j = 0$ ($i, j = 1, \dots, t$), ele estabelece as equações normais e indica, de maneira sucinta, um método de análise para este tipo de sequência.

Para estimar os efeitos residuais, é necessário inverter a matriz circulante e simétrica

$$\begin{bmatrix} t^2-2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t^2-2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t^2-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t^2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t^2-2 \end{bmatrix}$$

de ordem $t \times t$. O autor apresenta um método de inversão bastante simples, com base nas propriedades da referida matriz, e, também, tabelas com a 1.^a linha da inversa, para alguns casos.

O mesmo autor, sem deduzir, apresenta as equações para efeitos residuais com efeitos de blocos eliminados, no caso de $k = 2$, e uma expressão para calcular a variância média da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais para o caso de $k = 1$ ou $k = 2$. Ademais, a análise das sequências de tipo II foi também

discutida brevemente.

SINHA (1971), ao pesquisar as propriedades das Sequências Equilibradas em Série, de Tipo I, considerou que os kt blocos da sequência são divididos em k conjuntos de t blocos cada um. Indicando por $j_1, j_2, \dots, j_t$ os t blocos do j -ésimo conjunto, ele admitiu que $\forall j, 1 \leq j \leq k$, os blocos $j_1, j_2, \dots, j_t$ seguem uma das estruturas seguintes:

a) Estrutura S_1

		1
1	...	2
2	...	3
...	...	...
t	...	1

Os blocos $j_1, j_2, \dots, j_t$ começam com os tratamentos 1, 2, ..., t e terminam com 2, 3, ..., t, 1, respectivamente. Assim, no bloco j_i , o efeito residual do tratamento i ocorre duas vezes, o do tratamento $i+1$ não ocorre e o efeito residual de cada um dos demais tratamentos ocorre somente uma vez.

b) Estrutura S_2

		1
1	...	t
t	...	t-1
...	...	...
3	...	2
2	...	1

Os blocos $j_1, j_2, \dots, j_t$ começam com os tratamentos 1, t, t-1, ..., 3, 2 e terminam com t, t-1, ..., 2, 1, respectivamente. Assim, no bloco j_i o efeito residual do tratamento $t-i+2 \pmod{t}$ ocorre duas vezes, o do tratamento $t-i+1 \pmod{t}$ não ocorre e o efeito residual de cada um dos demais tratamentos ocorre somente uma vez.

Observa-se que os exemplos de Sequências Equilibradas em Série, de Tipo I, encontrados na literatura pesquisada, estão de acordo com as estruturas, consideradas por SINHA (1971). Além disso, a utilização dessas estruturas permite estabelecer uma terminologia simples, fato observado superficialmente por SAMPFORD (1957) e mais apropriadamente por SINHA (1971).

4. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

A teoria será desenvolvida para a classe de Sequências Equilibradas em Série, de Tipo I, abordadas por SINHA (1971), na qual se podem considerar os kt blocos da sequência, divididos em k conjuntos de t blocos cada um e, ainda, que o h -ésimo conjunto ($\forall h, 1 \leq h \leq k$) apresenta uma das seguintes estruturas:

Estrutura S_1

Blocos	Tratamentos		
			1
h_1	1	...	2
h_2	2	...	3
...	...	...	...
$h(t-1)$	$t-1$	...	t
h_t	t	...	1

Estrutura S_2

Blocos	Tratamentos		
			1
h1	1	...	t
h2	t	...	t-1
...	...	...	...
h(t-1)	3	...	2
ht	2	...	1

Neste estudo, aparecem índices do tipo $\underline{t+c-i}$, onde $\underline{c}$ e $\underline{i}$ são inteiros, $c \geq 0$ e $i \leq t$. Se $t+c-i > t$, devem ser entendidos como $t+c-i \pmod{t}$, isto é, o valor da expressão $t+c-i$ é substituído pelo resto da sua divisão por $\underline{t}$.

Os resultados obtidos neste trabalho supõem $kt > 2$.

4.1 - Análise de Variância

4.1.1 - Modelo matemático

Considerando o modelo matemático apresentado por SAMPFORD (1957), para o caso de $k = 1$, conclui-se para o caso geral(qualquer $\underline{k}$):

$$y_{hij} = \mu + \beta_{hi} + \tau_j + \rho_{\ell(h,i,j)} + \epsilon_{hij} \quad \dots\dots (4.1.1.a),$$

com $i, j = 1, \dots, t$;

$h = 1, \dots, k$;

onde: y_{hij} = observação referente ao tratamento $\underline{j}$ no bloco $\underline{hi}$;
 μ = média geral;
 β_{hi} = efeito do bloco $\underline{hi}$;
 τ_j = efeito direto do tratamento $\underline{j}$;
 $\rho_{l(h,i,j)}$ = efeito residual do tratamento anterior ao tratamento $\underline{j}$
 que aparece no bloco $\underline{hi}$;
 ϵ_{hij} = erros aleatórios independentes, com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

4.1.2 - Sistema de equações normais

Utilizando o método dos quadrados mínimos, chega-se facilmente ao sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{h,i,j} y_{hij} = \sum_{h,i,j} \hat{\mu} + \sum_{h,i,j} \hat{\beta}_{hi} + \sum_{h,i,j} \hat{\tau}_j + \sum_{h,i,j} \hat{\rho}_{l(h,i,j)} \\ \sum_j y_{hij} = \sum_j \hat{\mu} + \sum_j \hat{\beta}_{hi} + \sum_j \hat{\tau}_j + \sum_j \hat{\rho}_{l(h,i,j)} \\ \sum_{h,i} y_{hij} = \sum_{h,i} \hat{\mu} + \sum_{h,i} \hat{\beta}_{hi} + \sum_{h,i} \hat{\tau}_j + \sum_{h,i} \hat{\rho}_{l(h,i,j)} \\ \sum_{h,i,j/l} y_{hij} = \sum_{h,i,j/l} \hat{\mu} + \sum_{h,i,j/l} \hat{\beta}_{hi} + \sum_{h,i,j/l} \hat{\tau}_j + \sum_{h,i,j/l} \hat{\rho}_{l(h,i,j)} \end{array} \right.$$

onde $\sum_{h,i,j/l}$ indica a soma das observações que incluem o efeito residual do tratamento $\underline{l}$.

Admitindo as restrições $\sum_{h,i} \hat{\beta}_{hi} = \sum_j \hat{\tau}_j = \sum_j \hat{\rho}_j = 0$ e

considerando que:

B_{hi} é o total das t observações do bloco hi ;

T_j é o total das kt observações do tratamento j ;

R_i é o total das kt observações seguintes ao tratamento i ;

G é o total das kt^2 observações;

tem-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} G = kt^2\hat{\mu} & \dots (4.1.2.a); \\ B_{hi} = \begin{cases} t\hat{\mu} + t\hat{\beta}_{hi} + \hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i+1} & \dots (4.1.2.b), \text{ se o bloco } hi \text{ está na estrutura } S_1; \\ t\hat{\mu} + t\hat{\beta}_{hi} + \hat{\rho}_{t+2-i} + \hat{\rho}_{t+1-i} & \dots (4.1.2.c), \text{ se o bloco } hi \text{ está na estrutura } S_2; \end{cases} \\ T_j = kt\hat{\mu} + kt\hat{\tau}_j & \dots (4.1.2.d); \\ R_i = kt\hat{\mu} + \sum_{h \in S_1} \left[\hat{\beta}_{hi} - \hat{\beta}_{h(i-1)} \right] + \sum_{h \in S_2} \left[\hat{\beta}_{h(t+2-i)} - \hat{\beta}_{h(t+1-i)} \right] + kt\hat{\rho}_i & \dots (4.1.2.e). \end{array} \right.$$

4.1.3 - Estimadores dos parâmetros

Da expressão (4.1.2.a), obtém-se

$$\hat{\mu} = \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.1.3.a).$$

Da expressão (4.1.2.d), obtém-se

$$\hat{\tau}_j = \frac{T_j}{kt} - \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.1.3.b).$$

Das expressões (4.1.2.b) e (4.1.2.c), obtém-se

$$\hat{\beta}_{hi} = \frac{B_{hi}}{t} - \frac{G}{kt^2} - \frac{1}{t} (\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i+1}) \quad \dots \quad (4.1.3.c), \text{ se o bloco } \underline{hi} \text{ está na estrutura } S_1;$$

$$\hat{\beta}_{hi} = \frac{B_{hi}}{t} - \frac{G}{kt^2} - \frac{1}{t} (\hat{\rho}_{t+2-i} - \hat{\rho}_{t+1-i}) \quad \dots \quad (4.1.3.d), \text{ se o bloco } \underline{hi} \text{ está na estrutura } S_2.$$

Substituindo as expressões de $\hat{\beta}_{hi}$ e $\hat{\mu}$ em (4.1.2.e),

tem-se:

$$R_i = kt \frac{G}{kt^2} + \sum_{h \in S_1} \left[\frac{B_{hi}}{t} - \frac{G}{kt^2} - \frac{1}{t} (\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i+1}) - \frac{B_{h(i-1)}}{t} + \frac{G}{kt^2} + \frac{1}{t} (\hat{\rho}_{i-1} - \hat{\rho}_i) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h \in S_2} \left[\frac{B_{t+2-i}}{t} - \frac{G}{kt^2} - \frac{1}{t} (\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i-1}) - \frac{B_{t+1-i}}{t} + \frac{G}{kt^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{t} (\hat{\rho}_{i+1} - \hat{\rho}_i) \right] + kt\hat{\rho}_i \\
R_i &= \frac{G}{t} + \sum_{h \in S_1} \left[\frac{B_{hi} - B_{h(i-1)}}{t} - \frac{1}{t} (2\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i+1} - \hat{\rho}_{i-1}) \right] + \\
& + \sum_{h \in S_2} \left[\frac{B_{h(t+2-i)} - B_{h(t+1-i)}}{t} - \frac{1}{t} (2\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i+1} - \hat{\rho}_{i-1}) \right] + \\
& + kt\hat{\rho}_i \quad \dots \quad (4.1.3.e)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
k \left[\hat{\rho}_{i-1} + (t^2 - 2) \hat{\rho}_i + \hat{\rho}_{i+1} \right] &= tR_i - G - \sum_{h \in S_1} [B_{hi} - B_{h(i-1)}] - \\
& - \sum_{h \in S_2} [B_{h(t+2-i)} - B_{h(t+1-i)}]
\end{aligned}$$

Indicando o segundo membro da igualdade acima por Q_i ,

vem

$$k \left[\hat{\rho}_{i-1} + (t^2 - 2) \hat{\rho}_i + \hat{\rho}_{i+1} \right] = Q_i \quad \dots \quad (4.1.3.f)$$

Portanto, as estimativas dos efeitos residuais são obtidas através da resolução do sistema de equações para efeitos residuais

duais com efeitos de blocos eliminados, dado por (4.1.3.f).

Na forma matricial, a expressão (4.1.3.f) fica

$$L \hat{\rho} = Q \quad \dots \quad (4.1.3.g)$$

onde:

$$L = k \begin{bmatrix} t^2-2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & t^2-2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t^2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & t^2-2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_t \end{bmatrix} \quad e \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_t \end{bmatrix}$$

L é uma matriz circulante e simétrica; será simbolizada por $k((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 0, 1))$. A notação $((a_1, a_2, \dots, a_t))$, onde $a_1, a_2, \dots, a_t$ são os elementos da primeira linha da matriz, será adotada para indicar matriz circulante.

Como $\hat{\rho} = L^{-1} Q$, é necessário determinar L^{-1} , Isto pode ser feito pelo método apresentado por SAMPFORD (1957), ou pelo método mais complexo apresentado por GOOD (1950).

Para estimar os parâmetros, leva-se em conta que

$$\hat{\beta}_{h_0} \equiv \hat{\beta}_{ht} \quad , \quad \hat{\rho}_{t+1} \equiv \hat{\rho}_1 \quad \text{e} \quad \hat{\rho}_0 \equiv \hat{\rho}_t \quad ,$$

devido às características do delineamento, como foi observado por SAMPFORD (1957).

4.1.4 - Esquema de análise de variância

Com o procedimento usual para determinar Somas de Quadrados, obtêm-se:

a) Soma de Quadrados de Tratamentos

$$SQT = \sum_{j=1}^t \hat{\tau}_j T_j = \sum_{j=1}^t \frac{T_j^2}{kt} - \frac{G^2}{kt^2} \quad \dots \quad (4.1.4.a).$$

b) Soma de Quadrados Total

$$SQ \text{ Total} = \sum_{h,i,j} y_{hij}^2 - \frac{G^2}{kt^2} \quad \dots \quad (4.1.4.b).$$

c) Soma de Quadrados de Blocos mais Efeitos Residuais

$$SQ (B + ER) = \sum_i \hat{\rho}_i R_i + \sum_{h,i} \hat{\beta}_{hi} B_{hi} \quad \dots \quad (4.1.4.c).$$

d) Soma de Quadrados de Blocos, ignorando os Efeitos Residuais

$$SQB \text{ não aj.} = \sum_{h,i} \frac{B_{hi}^2}{t} - \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.1.4.d).$$

e) Soma de Quadrados de Efeitos Residuais ajustados

$$SQERaj. = SQ(B + ER) - SQ B \text{ não aj.} \quad \dots \quad (4.1.4.e).$$

f) Soma de Quadrados dos Erros

$$SQE = SQ \text{ Total} - SQ(B + ER) - SQT \quad \dots \quad (4.1.4.f).$$

Portanto, o esquema de análise de variância é:

Causa da Variação	G.L.	Q.M.	F
Blocos não aj.	kt-1	$QMB \text{ não aj.} = \frac{SQB \text{ não aj.}}{kt-1}$	
Tratamentos	t-1	$QMT = \frac{SQT}{t-1}$	$\frac{QMT}{QME}$
Efeitos Residuais aj.	t-1	$QMER = \frac{SQER \text{ aj.}}{t-1}$	$\frac{QMER}{QME}$
Erro	(t-1)(kt-2)	$QME = \frac{SQE}{(t-1)(kt-2)}$	
T o t a l	kt ² -1		

para kt > 2.

4.2 - Variâncias das Estimativas da Diferença Entre Dois Efeitos

4.2.1 - Variância da estimativa da diferença entre dois efeitos diretos de tratamentos

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\tau}_j - \hat{\tau}_{j'}) &= V\left(\frac{T_j}{kt} - \frac{G}{kt^2} - \frac{T_{j'}}{kt} + \frac{G}{kt^2}\right) \\
 &= \frac{1}{k^2 t^2} V(T_j - T_{j'}) \\
 &= \frac{2\sigma^2}{kt} \quad \dots \quad (4.2.1.a)
 \end{aligned}$$

4.2.2 - Variância da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais de tratamentos

Geralmente, a variância da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais depende das posições dos tratamentos envolvidos. Daí, não ser possível estabelecer uma fórmula geral.

Para um caso particular, pode-se utilizar a expressão

$$V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'}) = V(\hat{\rho}_i) + V(\hat{\rho}_{i'}) - 2\text{COV}(\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_{i'}) ,$$

sendo $V(\hat{\rho}_i)$, $V(\hat{\rho}_{i'})$ e $\text{COV}(\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_{i'})$ obtidas na matriz de dispersão

$$D(\hat{\rho}) = \begin{bmatrix} V(\hat{\rho}_1) & \text{COV}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) & \dots & \text{COV}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_t) \\ \text{COV}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) & V(\hat{\rho}_2) & \dots & \text{COV}(\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{COV}(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_t) & \text{COV}(\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_t) & \dots & V(\hat{\rho}_t) \end{bmatrix}$$

Determinação de $D(\hat{\rho})$

Por definição,

$$D(\hat{\rho}) = E \{ [\hat{\rho} - E(\hat{\rho})] [\hat{\rho} - E(\hat{\rho})]' \}.$$

Em virtude de $\hat{\rho} = L^{-1}Q$, tem-se

$$\begin{aligned} D(\hat{\rho}) &= E \{ [L^{-1}Q - E(L^{-1}Q)] [L^{-1}Q - E(L^{-1}Q)]' \} \\ &= E \{ L^{-1} [Q - E(Q)] [Q - E(Q)]' (L^{-1})' \} \\ &= L^{-1} D(Q) (L^{-1})'. \end{aligned}$$

Como L^{-1} é simétrica, pois L é simétrica, tem-se $(L^{-1})' = L^{-1}$. Daí, vem

$$D(\hat{\rho}) = L^{-1} D(Q) L^{-1} \quad \dots \quad (4.2.2.a)$$

Portanto, a determinação de $D(\hat{\rho})$ depende também da determinação de $D(Q)$, o que será feito a seguir:

$$D(Q) = \begin{bmatrix} V(Q_1) & \text{COV}(Q_1, Q_2) & \dots & \text{COV}(Q_1, Q_t) \\ \text{COV}(Q_1, Q_2) & V(Q_2) & \dots & \text{COV}(Q_2, Q_t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{COV}(Q_1, Q_t) & \text{COV}(Q_2, Q_t) & \dots & V(Q_t) \end{bmatrix}$$

Obtenção de $V(Q_i)$, $\text{COV}(Q_i, Q_{i-1})$ e $\text{COV}(Q_i, Q_{i+1})$, com $|i-i'| > 1$

$$V(Q_i) = V \left[\begin{aligned} & tR_i - G - \sum_{h \in S_1} B_{hi} - \sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)} + \sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)} + \\ & + \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)} \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned} &= t^2 V(R_i) + V(G) + V\left(\sum_{h \in S_1} B_{hi}\right) + V\left[\sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)}\right] + \\ &+ V\left[\sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)}\right] + V\left[\sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)}\right] - \\ &- 2t \text{COV}(R_i, G) - 2t \text{COV}\left[R_i, \sum_{h \in S_1} B_{hi}\right] - \\ &- 2t \text{COV}\left[R_i, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)}\right] + \\ &+ 2t \text{COV}\left[R_i, \sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)}\right] + 2t \text{COV}\left[R_i, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)}\right] + \\ &+ 2\text{COV}\left(G, \sum_{h \in S_1} B_{hi}\right) + 2\text{COV}\left[G, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)}\right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\text{COV} \left[G, \sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)} \right] - 2\text{COV} \left[G, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)} \right] + \\
& + 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_1} B_{hi}, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)} \right] - \\
& - 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_1} B_{hi}, \sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)} \right] - \\
& - 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_1} B_{hi}, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)} \right] - \\
& - 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)}, \sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)} \right] - \\
& - 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_2} B_{h(t+2-i)}, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)} \right] + \\
& + 2\text{COV} \left[\sum_{h \in S_1} B_{h(i-1)}, \sum_{h \in S_2} B_{h(t+1-i)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Q_i) = & kt^3 \sigma^2 + kt^2 \sigma^2 + f_1 t \sigma^2 + f_2 t \sigma^2 + f_1 t \sigma^2 + f_2 t \sigma^2 - \\
& - 2kt^2 \sigma^2 - 4f_1 t \sigma^2 - 4f_2 t \sigma^2 + 2f_1 t \sigma^2 + \\
& + 2f_2 t \sigma^2 - 2f_1 t \sigma^2 - 2f_2 t \sigma^2,
\end{aligned}$$

onde f_1 e f_2 são as frequências das estruturas S_1 e S_2 , respectivamente.

Como $f_1 + f_2 = k$, resulta

$$V(Q_i) = kt(t-2)(t+1) \sigma^2 \quad \dots \quad (4.2.2.b)$$

Para obter $\text{COV}(Q_i, Q_{i-1})$, observa-se que:

$$\begin{aligned}
V(Q_i - Q_{i-1}) &= V \left\{ \left[\begin{aligned} &tR_i - G - \sum_{hES_1} B_{hi} - \sum_{hES_2} B_{h(t+2-i)} + \\ &+ \sum_{hES_1} B_{h(i-1)} + \sum_{hES_2} B_{h(t+1-i)} \end{aligned} \right] - \left[\begin{aligned} &tR_{i-1} - G - \sum_{hES_1} B_{h(i-1)} - \sum_{hES_2} B_{h(t+3-i)} + \\ &+ \sum_{hES_1} B_{h(i-2)} + \sum_{hES_2} B_{h(t+2-i)} \end{aligned} \right] \right\} = \\
&= V \left\{ \begin{aligned} &t(R_i - R_{i-1}) + \sum_{hES_1} [B_{h(i-1)} - B_{hi}] + \sum_{hES_2} [B_{h(t+3-i)} - B_{h(t+2-i)}] + \\ &+ \sum_{hES_1} [B_{h(i-1)} - B_{h(i-2)}] + \\ &+ \sum_{hES_2} [B_{h(t+1-i)} - B_{h(t+2-i)}] \end{aligned} \right\} \\
&= V \left\{ \begin{aligned} &t(R_i - R_{i-1}) + \sum_{hES_1} [2B_{h(i-1)} - B_{hi} - B_{h(i-2)}] + \\ &+ \sum_{hES_2} [B_{h(t+1-i)} + B_{h(t+3-i)} - 2B_{h(t+2-i)}] \end{aligned} \right\} \\
&= V [t(R_i - R_{i-1})] + V \left\{ \sum_{hES_1} [2B_{h(i-1)} - B_{hi} - B_{h(i-2)}] \right\} + \\
&\quad + V \left\{ \sum_{hES_2} [B_{h(t+1-i)} + B_{h(t+3-i)} - 2B_{h(t+2-i)}] \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2t \operatorname{COV} \left\{ (R_i - R_{i-1}), \sum_{h \in S_1} \left[2B_{h(i-1)} - B_{hi} - B_{h(i-2)} \right] \right\} + \\
& + 2t \operatorname{COV} \left\{ (R_i - R_{i-1}), \sum_{h \in S_2} \left[\begin{array}{c} B_{h(t+1-i)} + B_{h(t+3-i)} \\ - 2B_{h(t+2-i)} \end{array} \right] \right\} + \\
& + 2 \operatorname{COV} \left\{ \begin{array}{c} \sum_{h \in S_1} \left[2B_{h(i-1)} - B_{hi} - B_{h(i-2)} \right], \\ \sum_{h \in S_2} \left[B_{h(t+1-i)} + B_{h(t+3-i)} - 2B_{h(t+2-i)} \right] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$V(Q_i - Q_{i-1}) = 2kt^3 \sigma^2 + 6f_1 t \sigma^2 + 6f_2 t \sigma^2 - 12f_1 t \sigma^2 - 12f_2 t \sigma^2,$$

Como $f_1 + f_2 = k$, resulta

$$V(Q_i - Q_{i-1}) = 2kt(t^2 - 3) \sigma^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{COV}(Q_i, Q_{i-1}) &= \frac{1}{2} \left[V(Q_i) + V(Q_{i-1}) - V(Q_i - Q_{i-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[2kt(t-2)(t+1) - 2kt(t^2 - 3) \right] \sigma^2 \\
&= -kt(t-1) \sigma^2 \quad \dots \quad (4.2.2.c).
\end{aligned}$$

Para obter $\operatorname{COV}(Q_i, Q_{i'})$, com $|i-i'| > 1$, observa-se

que:

$$V(Q_i - Q_{i'}) = V \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & tR_i - G - \sum_{hES_1} B_{hi} - \sum_{hES_2} B_{h(t+2-i)} + \\ & + \sum_{hES_1} B_{h(i-1)} + \sum_{hES_2} B_{h(t+1-i)} \end{aligned} \right] - \\ & - \left[\begin{aligned} & tR_{i'} - G - \sum_{hES_1} B_{hi'} - \sum_{hES_2} B_{h(t+2-i')} + \\ & + \sum_{hES_1} B_{h(i'-1)} + \sum_{hES_2} B_{h(t+1-i')} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} =$$

$$= V \left\{ \begin{aligned} & t(R_i - R_{i'}) + \sum_{hES_1} (B_{hi'} - B_{hi}) + \sum_{hES_2} [B_{h(t+2-i')} - B_{h(t+2-i)}] + \\ & + \sum_{hES_1} [B_{h(i-1)} - B_{h(i'-1)}] + \\ & + \sum_{hES_2} [B_{h(t+1-i)} - B_{h(t+1-i')}] \end{aligned} \right\}$$

$$= V \left\{ \begin{aligned} & t(R_i - R_{i'}) + \sum_{hES_1} [B_{hi'} - B_{h(i'-1)} - B_{hi} + B_{h(i-1)}] + \\ & + \sum_{hES_2} \left[\begin{aligned} & B_{h(t+2-i')} - B_{h(t+1-i')} - B_{h(t+2-i)} + \\ & + B_{h(t+1-i)} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
V(Q_i - Q_{i'}) &= V \left[t(R_i - R_{i'}) \right] + V \left\{ \sum_{h \in S_1} \left[B_{hi'} - B_{h(i'-1)} - B_{hi} + B_{h(i-1)} \right] \right\} + \\
&\quad + V \left\{ \sum_{h \in S_2} \left[\begin{array}{l} B_{h(t+2-i')} - B_{h(t+1-i')} - B_{h(t+2-i)} + \\ + B_{h(t+1-i)} \end{array} \right] \right\} + \\
&\quad + 2t \text{ COV} \left\{ (R_i - R_{i'}), \sum_{h \in S_1} \left[\begin{array}{l} B_{hi'} - B_{h(i'-1)} - B_{hi} + \\ + B_{h(i-1)} \end{array} \right] \right\} + \\
&\quad + 2t \text{ COV} \left\{ (R_i - R_{i'}), \sum_{h \in S_2} \left[\begin{array}{l} B_{h(t+2-i')} - B_{h(t+1-i')} - \\ - B_{h(t+2-i)} + \\ + B_{h(t+1-i)} \end{array} \right] \right\} + \\
&\quad + 2 \text{ COV} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h \in S_1} \left[B_{hi'} - B_{h(i'-1)} - B_{hi} + B_{h(i-1)} \right] , \\ \sum_{h \in S_2} \left[\begin{array}{l} B_{h(t+2-i')} - B_{h(t+1-i')} - B_{h(t+2-i)} + \\ + B_{h(t+1-i)} \end{array} \right] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

$$V(Q_1 - Q_1,) = 2kt^3 \sigma^2 + 4f_1 t \sigma^2 + 4f_2 t \sigma^2 - 8f_1 t \sigma^2 - 8f_2 t \sigma^2 .$$

Como $f_1 + f_2 = k$, resulta

$$V(Q_1 - Q_1,) = 2kt(t^2 - 2) \sigma^2 .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{COV}(Q_1, Q_1,) &= \frac{1}{2} \left[V(Q_1) + V(Q_1,) - V(Q_1 - Q_1,) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[2kt(t - 2)(t + 1) - 2kt(t^2 - 2) \right] \sigma^2 \\ &= -kt^2 \sigma^2 \quad \dots \quad (4.2.2.d). \end{aligned}$$

Assim sendo, vem

$$\begin{aligned} D(Q) &= kt \sigma^2 \begin{bmatrix} (t-2)(t+1) & -(t-1) & -t & \dots & -t & -(t-1) \\ -(t-1) & (t-2)(t+1) & -(t-1) & \dots & -t & -t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(t-1) & -t & -t & \dots & -(t-1) & (t-2)(t+1) \end{bmatrix} \\ &= kt \sigma^2 ((t^2 - t - 2, -t + 1, -t, -t, \dots, -t, -t + 1)) \quad \dots \quad (4.2.2.e). \end{aligned}$$

Substituindo (4.2.2.e) na expressão (4.2.2.a), tem-se

$$D(\hat{p}) = kt \sigma^2 L^{-1} ((t^2 - t - 2, -t + 1, -t, \dots, -t, -t + 1)) L^{-1} \dots \quad (4.2.2.f).$$

Daí, determinada a matriz L^{-1} para um caso particular, obtém-se facilmente $D(\hat{\rho})$.

4.2.3 - Variância média da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais de tratamentos

Pode-se tomar, para comparar dois efeitos residuais, a variância média da estimativa da diferença entre dois efeitos residuais, $\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},)$, em lugar de $V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},)$.

Por definição, tem-se:

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{\sum_{\substack{i, i' \\ i \neq i'}} V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},)}{t(t-1)} \quad \dots \quad (4.2.3.a).$$

$$\text{Lema 1: } V(\hat{\rho}_i) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i \neq i'}}^t \text{COV}(\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_{i'},) = 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, t .$$

Demonstração:

Sabe-se que

$$L \hat{\rho} = Q \quad ,$$

isto é:

$$k((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1)) \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_t \end{bmatrix} .$$

Por propriedade de matrizes, tem-se

$$E_{1 \times t} k((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1)) \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_t \end{bmatrix} = E_{1 \times t} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_t \end{bmatrix} ,$$

onde $E_{1 \times t} = [1, 1, \dots, 1]$.

Então,

$$kt^2 E_{1 \times t} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \dots \\ \hat{\rho}_t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^t Q_i ,$$

ou

$$kt^2 \sum_{i=1}^t \hat{\rho}_i = \sum_{i=1}^t Q_i .$$

Como

$$\sum_{i=1}^t Q_i = \sum_{i=1}^t \left\{ tR_i - G - \sum_{h \in S_1} [B_{hi} - B_{h(i-1)}] - \sum_{h \in S_2} [B_{h(t+2-i)} - B_{h(t+1-i)}] \right\}$$

$$\sum_i^t Q_i = tG - tG - G + G = 0 \quad ,$$

tem-se

$$kt^2 \sum_{i=1}^t \hat{\rho}_i = 0 \quad ,$$

logo,

$$\sum_{i=1}^t \hat{\rho}_i = 0 \quad .$$

Portanto,

$$\text{COV}(\hat{\rho}_i, \sum_{i'=1}^t \hat{\rho}_{i'}) = \text{COV}(\hat{\rho}_i, 0) = 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, t \quad (4.2.3.b).$$

Por outro lado,

$$\text{COV}(\hat{\rho}_i, \sum_{i'=1}^t \hat{\rho}_{i'}) = V(\hat{\rho}_i) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i \neq i'}}^t \text{COV}(\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_{i'}) \quad \dots \quad (4.2.3.c).$$

Comparando (4.2.3.b) com (4.2.3.c), verifica-se que

$$V(\hat{\rho}_i) + \sum_{\substack{i'=1 \\ i \neq i'}}^t \text{COV}(\hat{\rho}_i, \hat{\rho}_{i'}) = 0 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, t \quad (4.2.3.d),$$

c.q.d.

Lema 2: $\sum_{\substack{i,i' \\ i \neq i'}} V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'}) = 2t \sum_{i=1}^t \sigma_{ii}$, onde $\sigma_{ii} = V(\hat{\rho}_i)$.

Demonstração:

Seja

$$D(\hat{\rho}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1t} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{t1} & \sigma_{t2} & \dots & \sigma_{tt} \end{bmatrix}$$

Pelo lema 1, tem-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} + \dots + \sigma_{1t} \\ \sigma_{21} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{2t} \\ \dots \\ \sigma_{t1} + \sigma_{t2} + \dots + \sigma_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sejam

$$\sum_{\substack{i' > 1 \\ i' \neq 1}}^t V(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_{i'}) = N_1, \quad \sum_{\substack{i' = 1 \\ i' \neq 2}}^t V(\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_{i'}) = N_2, \quad \dots,$$

$$\sum_{j=1}^{t-1} V(\hat{\rho}_t - \hat{\rho}_{i'}) = N_t.$$

Substituindo as expressões de $N_1, N_2, \dots, N_t$ em (4.2.3.e), resulta

$$\sum_{\substack{i,i' \\ i \neq i'}} V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = 2t \sum_{i=1}^t \sigma_{ii} \dots \quad (4.2.3.f),$$

c.q.d.

Aplicando o lema 2 na expressão (4.2.3.a), tem-se

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2 \sum_{i=1}^t \sigma_{ii}}{t-1}.$$

Utilizando a definição de traço de matriz, segue-se que

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2 \text{tr } D(\hat{\rho})}{t-1}.$$

Considerando (4.2.2.a), pode-se escrever

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2}{t-1} \text{tr} [L^{-1} D(Q) L^{-1}].$$

Por propriedade de traço de matriz, vem

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2}{t-1} \text{tr} [L^{-1} L^{-1} D(Q)].$$

Como $L^{-1} = (L^{-1})'$, pois L^{-1} é simétrica, segue-se que

$$\bar{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2}{t-1} \text{tr} [L^{-1} (L^{-1})' D(Q)].$$

Por propriedade de matriz inversa, vem

$$\bar{V}(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1,) = \frac{2}{t-1} \text{tr} [(L'L)^{-1} D(Q)] \quad \dots \quad (4.2.3.g).$$

Desde que L e L' são matrizes circulantes e simétricas, também são $L'L$ e $(L'L)^{-1}$, vide GODD (1950). Daf, seja

$$(L'L)^{-1} = C = (c_1, c_2, \dots, c_t) \quad .$$

Como

$$D(Q) = kt \sigma^2((t^2-t-2, -t+1, -t, \dots, -t, -t+1)) \quad ,$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \text{tr} [(L'L)^{-1} D(Q)] &= kt^2 \sigma^2 \begin{bmatrix} c_1(t^2-t-2) - c_2(t-1) - c_3t - \dots - \\ - c_{t-1}t - c_t(t-1) \end{bmatrix} \\ &= kt^2 \sigma^2 \left[c_1(t^2-2) + (c_2+c_t) - t \sum_{i=1}^t c_i \right] \end{aligned}$$

Assim sendo, tem-se

$$\bar{V}(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1,) = \frac{2kt^2 \sigma^2 \left[c_1(t^2-2) + (c_2+c_t) - t \sum_{i=1}^t c_i \right]}{t-1} \quad (4.2.3.h).$$

$$\text{Lema 3: } \sum_{i=1}^t c_i = \frac{1}{k^2 t^4} \quad .$$

Demonstração:

Sabe-se que

$$L = k((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1)) \quad .$$

Então,

$$L' L E_{tx1} = L' (k t^2 E_{tx1}) = k t^2 L' E_{tx1} = k^2 t^4 E_{tx1} \quad .$$

Portanto,

$$(L' L)^{-1} (L' L) E_{tx1} = (L' L)^{-1} k^2 t^4 E_{tx1} \quad ,$$

ou ainda,

$$I E_{tx1} = k^2 t^4 (L' L)^{-1} E_{tx1} \quad ,$$

logo,

$$(L' L)^{-1} E_{tx1} = \frac{1}{k^2 t^4} E_{tx1} \quad .$$

Como

$$(L' L)^{-1} E_{tx1} = \sum_i c_i E_{tx1} \quad ,$$

concluiu-se que

$$\sum_{i=1} c_i = \frac{1}{k^2 t^4} \quad \dots \quad (4.2.3.i),$$

c.q.d.

Aplicando o lema 3 na expressão (4.2.3.h), vem

$$\overline{V}(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_1,) = \frac{2kt^2}{t-1} \left[c_1(t^2-2) + c_2 + c_t - \frac{1}{k^2 t^3} \right] \sigma^2 \quad (4.2.3.j).$$

Lema 4: Se v_1 é o elemento da diagonal da matriz

$$((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1))^{-1},$$

então

$$c_1(t^2-2) + c_2 + c_t = \frac{v_1}{k^2}.$$

Demonstração:

Seja

$$L^{-1} = \frac{1}{k} ((v_1, v_2, \dots, v_t)).$$

Como

$$(L' L)^{-1} = L^{-1} (L')^{-1} = L^{-1} (L^{-1})',$$

tem-se

$$(L' L)^{-1} = \frac{1}{k^2} ((v_1, v_2, \dots, v_t))((v_1, v_2, \dots, v_t))'.$$

Daf,

$$c_1 = \frac{1}{k^2} [v_1, v_2, \dots, v_t] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_t \end{bmatrix},$$

$$c_2 = \frac{1}{k^2} [v_1, v_2, \dots, v_t] \begin{bmatrix} v_t \\ v_1 \\ \dots \\ v_{t-1} \end{bmatrix} \quad e$$

$$c_t = \frac{1}{k^2} [v_1, v_2, \dots, v_t] \begin{bmatrix} v_2 \\ \dots \\ v_t \\ v_{t-1} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$c_1(t^2-2) + c_2 + c_t = \frac{1}{k^2} \left[v_1, v_2, \dots, v_t \right] \left[\begin{array}{c} (t^2-2) \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_t \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{c} v_t \\ v_1 \\ \dots \\ v_{t-1} \end{array} \right] + \\ + \left[\begin{array}{c} v_2 \\ \dots \\ v_t \\ v_{t-1} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (4.2.3.k).$$

Visto que

$$L(L^{-1})' = I$$

(pois, $L L^{-1} = I$ e $(L^{-1})' = L^{-1}$), ou seja,

$$k((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1)) \frac{1}{k} ((v_1, v_2, \dots, v_t))' = I,$$

a expressão seguinte resulta da multiplicação da matriz L pela primeira coluna da $(L^{-1})'$:

$$\begin{bmatrix} (t^2-2) v_1 + v_2 + v_t \\ v_1 + (t^2-2) v_2 + v_3 \\ v_2 + (t^2-2) v_3 + v_4 \\ \dots \\ v_1 + v_{t-1} + (t^2-2) v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$(t^2-2) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t \\ v_1 \\ \dots \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_2 \\ \dots \\ v_t \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.3.l).$$

Substituindo (4.2.3.l) em (4.2.3.k), resulta

$$\begin{aligned} c_1(t^2-2) + c_2 + c_t &= \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{v_1}{k^2} \dots \quad (4.2.3.m), \\ &\quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Aplicando o lema 4 na expressão (4.2.3.j), vem final_{mente}

$$\overline{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_i,) = \frac{2kt^2}{t-1} \left[\frac{v_1}{k^2} - \frac{1}{k^2 t^3} \right] \sigma^2 \quad ,$$

ou

$$\overline{V}(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_i,) = \frac{2t^2}{t-1} \left[\frac{v_1}{k} - \frac{1}{kt^3} \right] \dots \quad (4.2.3.n).$$

4.3 - Caso Particular

No caso de não se considerarem efeitos de blocos, tem-se o modelo matemático

$$y_{hij} = \mu + \tau_j + \rho_i + \epsilon_{hij} \quad \dots \quad (4.3.a),$$

com $h = 1, \dots, k;$

$i, j = 1, \dots, t;$

onde, y_{hij} = h-ésima observação referente ao efeito direto do tratamento j com o efeito residual do tratamento i;

μ = média geral;

τ_j = efeito direto do tratamento j;

ρ_i = efeito residual do tratamento anterior ao tratamento j;

ϵ_{hij} = erros aleatórios independentes, com distribuição normal de média zero e variância σ^2 .

Considerando o modelo (4.3.a), facilmente obtêm-se:

1) Sistema de Equações Normais

$$\left\{ \begin{array}{lll} G = kt^2 \hat{\mu} & \dots & (4.3.b) ; \\ T_j = kt \hat{\mu} + kt \hat{\tau}_j & \dots & (4.3.c) ; \\ R_i = kt \hat{\mu} + kt \hat{\rho}_i & \dots & (4.3.d) . \end{array} \right.$$

2) Estimadores dos Parâmetros

$$\hat{\mu} = \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.3.e) ;$$

$$\hat{\tau}_j = \frac{T_j}{kt} - \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.3.f) ;$$

$$\hat{\rho}_i = \frac{R_i}{kt} - \frac{G}{kt^2} \quad \dots \quad (4.3.g) .$$

3) Esquema de Análise de Variância

Causa da Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Tratamentos	t-1	SQT	QMT	$\frac{QMT}{QME}$
Efeitos Residuais	t-1	SQER	QMER	$\frac{QMER}{QME}$
Erro	(kt-2)t+1	SQE	QME	
T o t a l	kt ² -1	SQ Total		

onde,

$$SQT = \frac{1}{kt} \sum_j T_j^2 - \frac{G^2}{kt^2} ,$$

$$SQER = \frac{1}{kt} \sum_i R_i^2 - \frac{G^2}{kt^2} ,$$

$$SQE = SQ \text{ Total} - SQT - SQER ,$$

$$SQ \text{ Total} = \sum_{h,i,j} y_{hij}^2 - \frac{G^2}{kt^2} ,$$

$$QMT = \frac{SQT}{t-1} ,$$

$$QMER = \frac{SQER}{t-1} e$$

$$QME = \frac{SQE}{(kt-2)t+1} .$$

- 4) Variância da Estimativa da Diferença entre Dois Efeitos Diretos de Tratamentos

$$V(\hat{\tau}_j - \hat{\tau}_{j'},) = \frac{2\sigma^2}{kt} \dots (4.3.h).$$

- 5) Variância da Estimativa da Diferença entre Dois Efeitos Residuais de Tratamentos

$$V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_{i'},) = \frac{2\sigma^2}{kt} \dots (4.3.i).$$

- 6) Variância Média da Estimativa da Diferença entre Dois Efeitos Residuais de Tratamentos

$$V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_i,) = \frac{2\sigma^2}{kt} \quad \dots \quad (4.3.j).$$

Nota-se que estes resultados são semelhantes aos do delineamento em blocos ao acaso.

5. CONCLUSÕES

As conclusões deste estudo são para as Sequências Equilibradas em Série, de Tipo I, com $kt > 2$, nas quais o bloco h_i começa com o tratamento i (ou $t+2-i$) e termina com o tratamento $i+1$ (ou $t+1-i$), $\forall h$ ($h=1, \dots, k$) e $\forall i$ ($i=1, \dots, t$).

5.1 - Sendo $k=1$, pode-se admitir sempre que a estrutura é do tipo S_1 . Para isto, cada tratamento receberá o número do bloco no qual ele é o primeiro tratamento.

5.2 - Os parâmetros podem ser estimados através das expressões das na seção (4.1.3).

5.3 - A análise de variância pode ser feita como indica a seção (4.1.4).

5.4 - A variância da estimativa da diferença entre os tratamen-

tos τ_j e τ_j , é dada por

$$V(\hat{\tau}_j - \hat{\tau}_j,) = \frac{2\sigma^2}{kt} .$$

5.5 - A matriz de variâncias e covariâncias do vetor aleatório $\hat{\rho}$ pode ser obtida através de

$$D(\hat{\rho}) = kt \sigma^2 L^{-1}((t^2-t-2, -t+1, -t, \dots, -t, -t+1)) L^{-1} ,$$

onde $((t^2-t-2, -t+1, -t, \dots, -t, -t+1))$ é uma matriz circunlante.

5.6 - A variância média da estimativa da diferença entre os efeitos residuais $\hat{\rho}_i$ e $\hat{\rho}_i$, pode ser calculada pela fórmula

$$V(\hat{\rho}_i - \hat{\rho}_i,) = \frac{2t^2}{t-1} \left[\frac{v_1}{k} - \frac{1}{kt^3} \right] \sigma^2 ,$$

onde v_1 é o elemento da diagonal da matriz

$$((t^2-2, 1, 0, \dots, 0, 1))^{-1} .$$

Essa expressão corresponde àquela apresentada por SAMPFORD (1957), para $k=1$ ou 2 .

5.7 - Admitindo-se que não há efeitos de blocos, a análise torna-se bastante simples e os resultados são análogos aos do delineamento em blocos ao acaso, aparecendo efeitos residuais em lugar de efeitos de blocos.

6. SUMMARY

From Serially Balanced Sequences, direct and residual treatment effects can be studied by a single experimental unit.

We consider the following model

$$y_{hij} = \mu + \beta_{hi} + \tau_j + \rho_{\ell(h,i,j)} + \varepsilon_{hij} \quad ,$$

where y_{hij} is the observation due to treatment j in block hi , τ_j is the j direct treatment effect; $\rho_{\ell(h,i,j)}$ the preceding residual treatment effect over treatment j appearing in block hi , and ε_{hij} is identical and independently normal error with mean 0 and variance σ^2 .

Following classical developments we found:

1. Normal equations.
2. Parameters estimators.
3. Decomposition of Total Sum of Squares.

4. Variance of the difference of two means.
5. Covariance matrix of residual treatment effects.
6. Mean Variance of the estimate of the difference between two residual effects.

When block effects are absent, the analysis is rather simplified, and we can analyse as if we had randomized block design, with residual effects sum of squares in place of block sum of squares.

7. LITERATURA CITADA

FINNEY, D.J. e A.D. OUTHWAITE, 1955. Serially Balanced Sequences. Nature. Londres, 176: 748.

FINNEY, D.J. e A.D. OUTHWAITE, 1956. Serially Balanced Sequences in Bioassay. Proceedings of the Royal Society, Série B. Londres, 145: 493-507.

GOOD, I.J., 1950. On the Inversion of Circulant Matrices. Biometrika. Londres, 37: 185-186.

SAMPFORD, M.R., 1957. Methods of Construction and Analysis of Serially Balanced Sequences. Journal of the Royal Statistical Society, Série B. Londres, 19: 286-304.

SINHA, B.K., 1971. Contribution to Comparison of Experiments: Optimum Experiments for Linear Inference. Calcutta, India, Universidade de Calcutta, 204 p. (Tese).