**PLANEJAMENTO E ANÁLISE DE ENSAIOS EM BLOCOS
INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS COM
DUAS CLASSES DE ASSOCIADOS - PBIB ⁽²⁾**

GERALDO VERÍSSIMO DE SOUZA BARBOSA
Engenheiro-Agrônomo

Orientador: Dr. DÉCIO BARBIN

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Setembro - 1986

Ao meu Pai José Correia Barbosa (in memoriam)

À minha Mãe Laura de Souza Barbosa

DEDICO

Aos meus irmãos e sobrinhos

OFEREÇO

A G R A D E C I M E N T O S

- Ao Professor Dr. Décio Barbin, pela valiosa orientação no decorrer do Curso de Pós-Graduação e na elaboração do presente trabalho.
- Ao Programa Nacional de Melhoramento da Cana-de-Açúcar, PLA
NALSUCAR, pela oportunidade concedida para a realização do curso.
- Ao Professor Dr. Humberto de Campos, pelo apoio e incentivo antes e durante a realização do curso.
- Ao Colega Norberto Antônio Lavoretti, pelo sacrifício do aumento de suas atividades durante a minha ausência no PLA-NALSUCAR.
- Aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Estatística e Ex
perimentação Agrônômica da ESALQ/USP, pelos ensinamentos prestados.
- Aos Colegas do Curso de Pós-Graduação, pelo espírito de solida
riedade e companheirismo.
- Aos Colegas João Gil de Luna, Lusbi Antonio Herrera Sandoval e Rubens Leite do Canto Braga Júnior, pelos constantes estímulos.
- Ao Amigo Manoel Antônio da Silva, pela revisão do texto.
- À Colega Josenita Ramos de Luna (Lili), pela convivência ami
ga e valiosa colaboração.
- À Srta. Rosa Maria Alves, pelo trabalho de datilografia.

Í N D I C E

Pág.

RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	05
2.1. Ensaio em Blocos Incompletos Balanceados	05
2.1.1. Definição	05
2.1.2. Classificação	07
2.1.3. Análise de Variância intrablocos	12
2.1.4. Eficiência dos ensaios em BIB	22
2.2. Ensaio em Blocos Incompletos Parcialmente Balanceados com Duas Classes de Associados - PBIB ₍₂₎	23
2.2.1. Definição e Relação entre seus Parâmetros	23
2.2.2. Classificação dos Delineamentos em PBIB ₍₂₎	28
2.2.2.1. Grupo Divisível (G.D.)	28
2.2.2.2. Simples (S)	30
2.2.2.3. Triangular (T)	30
2.2.2.4. Tipo Quadrado Latino (L _i) ..	32
2.2.2.5. Cíclicos (C)	33

Continuação.

Pág.

2.2.3.	Construção dos Delineamentos	
	em $PBIB_{(2)}$	34
2.2.3.1.	Construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ através de confi- gurações geométricas	36
2.2.3.2.	Construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ através da duali- zação de um BIB	41
2.2.3.3.	Outros métodos de constru- ção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$	47
	2.2.3.3.1. Grupo divisí- vel (G.D.)....	48
	2.2.3.3.2. Triangular (T).	54
	2.2.3.3.3. Quadrado La- tino (L_i).....	60
2.2.4.	Estimativa dos Parâmetros	73
2.2.5.	Estimabilidade	76
2.2.6.	Análise de Variância Intrablocos	78
2.2.7.	Eficiência do $PBIB_{(2)}$	78
3.	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	80
3.1.	Introdução	80
3.2.	Sistema de Equações Normais (S.E.N.)	82

Continuação.

Pág.

3.3.	Estimativa dos Efeitos de Tratamentos	
	Ajustados para Blocos	87
3.3.1.	Quando $n_1 < n_2$	90
3.3.2.	Quando $n_2 < n_1$	94
3.4.	Variância da Estimativa de Contrastes	
	entre Médias Ajustadas de Tratamentos.	96
3.4.1.	Quando $n_1 < n_2$	96
3.4.2.	Quando $n_2 < n_1$	98
3.5.	Eficiência do PBIB ₍₂₎	98
3.6.	Análise de Variância Intrablocos	99
	3.6.1. Somas de Quadrados	99
	3.6.2. Quadro da Análise de Variância	100
4.	ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO	102
5.	CONCLUSÕES	112
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114

PLANEJAMENTO E ANÁLISE DE ENSAIOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE BALANCEADOS COM DUAS CLASSES DE ASSOCIADOS-PBIB₍₂₎.

AUTOR : Geraldo Veríssimo de Souza Barbosa

ORIENTADOR : Décio Barbin

RESUMO

O presente trabalho tem por fim estudar os delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados - PBIB₍₂₎.

Inicialmente, é feita uma breve revisão dos delineamentos em blocos incompletos balanceados - BIB , tentando, assim, contribuir para uma melhor compreensão do PBIB₍₂₎.

Na revisão bibliográfica dos ensaios em PBIB₍₂₎ são apresentados, com maior enfoque, as definições , classificação desses delineamentos com seus esquemas de associação e métodos de construção dos principais tipos. Nos métodos de construção, procurou-se dar maior relevância aos aspectos práticos do que aos teóricos, com o fim de facilitar sua imediata aplicação pelo pesquisador quando no planejamen

to experimental.

Os parâmetros desses delineamentos foram definidos como:

- v: número de tratamentos ;
- b: número de blocos ;
- r: número de repetições para cada tratamento ;
- k: número de tratamentos por bloco ;

e ainda , $\lambda_1, \lambda_2, n_1, n_2, p_{jj'}^i, (i, j, j' = 1, 2)$, segundo notação de BOSE e NAIR (1939).

No desenvolvimento teórico, são encontradas as soluções dos efeitos de tratamentos ajustados para efeitos de blocos, onde se expõem fórmulas de uso prático para duas situações : $n_1 < n_2$ e $n_2 < n_1$. São apresentadas ainda : variância de estimativas de contrastes entre médias de tratamentos ajustados, análise de variância intrablocos e eficiência do delineamento em relação aos blocos completos.

Apresenta-se, também, um exemplo numérico para ilustrar o método.

PLANNING AND ANALYSIS OF THE PARTIALLY BALANCED INCOMPLETE
BLOCK DESIGN WITH TWO ASSOCIATED CLASSES - $PBIB_{(2)}$.

AUTHOR : Geraldo Veríssimo de Souza Barbosa

ADVISER: Décio Barbin

SUMMARY

In this work it is aimed to study the partially balanced incomplete block design with two associated classes - $PBIB_{(2)}$.

Initially, a brief revision is made in balanced incomplete block design - BIB , thus trying to contribute for a better understanding of the $PBIB_{(2)}$.

In the bibliography revision of the $PBIB_{(2)}$ design, enhanced were presented the definitions, classifications of these designs with their association schemes and the construction methods of the main types. In the construction methods, the practical aspects were given more relevance than the theoretical ones, in order to render easier their immediate application by the researcher when

planning the experiments.

These design parameters were defined as:

- v: number of treatments ;
- b: number of block ;
- r: number of repetitions for each treatment ;
- k: number of treatments per block ,

and still , $\lambda_1, \lambda_2, n_1, n_2, p_{jj}^i, (i, j, j' = 1, 2)$, according to the symbol notes of BOSE and NAIR (1939).

In the theoretical development the estimator of the adjusted treatment effects per block effects were found, in which formulas are presented for practical use in two situations: $n_1 < n_2$ and $n_2 < n_1$. Furthermore are presented: contrast estimate variances among the adjusted treatment averages, intrablock variance analysis and design efficiency related to the complete block designs.

Also, a numerical example is presented in order to illustrate the method.

1. INTRODUÇÃO

Um dos maiores problemas no planejamento de experimentos agrícolas está na escolha do delineamento que melhor se adapte às condições experimentais, principalmente no que se refere ao controle de um maior número de variáveis envolvidas.

Quando o ambiente experimental é bem homogêneo, como ocorre na maioria dos ensaios em laboratórios, viveiros, casas de vegetação, etc., devem-se preferir os delineamentos inteiramente casualizados, onde são levados em consideração apenas os princípios da repetição e da casualização. Quando existir uma certa heterogeneidade, como acontece na maioria dos ensaios agrícolas realizados no campo, é preferível usar os delineamentos em blocos ao acaso, onde, além da repetição e casualização, há formação de blocos, de forma

que a homogeneidade passa a ser exigida apenas dentro de cada bloco.

Os delineamentos em blocos ao acaso são os mais usados na pesquisa agropecuária. No entanto, seu uso só é adequado nos ensaios onde o número de tratamentos não é elevado, de modo que a formação de blocos possa garantir uma homogeneidade dentro dos blocos. Não muito raro, existem situações em que se pretende testar um grande número de tratamentos e, na maioria das vezes, esse número excede ao que se poderia acomodar em blocos disponíveis e homogêneos. Eliminar do experimento alguns tratamentos nem sempre é desejável, e uma alternativa para resolver o problema é usar blocos incompletos, isto é, aqueles que não incluam todos os tratamentos.

Os delineamentos em blocos incompletos têm sido amplamente utilizados na pesquisa agropecuária. Foram introduzidos por YATES (1936) e diferentes tipos foram desenvolvidos por diversos autores. Eles são divididos em duas categorias: delineamentos em blocos incompletos balanceados, abreviadamente chamados de BIB ("Balanced Incomplete Block Design") por diversos autores, e delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, abreviadamente chamados de PBIB ("Partially Balanced Incomplete Block Design"). Dentro dessas categorias existem os reticulados quadrados ("square lattices") que podem ser balanceados ou não.

Os delineamentos em BIB se caracterizam pelo fato de que neles cada tratamento aparece junto com um outro, em um mesmo bloco, o mesmo número de vezes. Sua grande vantagem é que, em qualquer contraste de médias entre dois tratamentos, as estimativas são feitas com a mesma precisão, isto é, $V(\hat{m}_j - \hat{m}_{j'})$ tem o mesmo valor para todos os pares j e j' de tratamentos. Além disso, há simplificações nos cálculos e obtenção de regras gerais. Entretanto, dadas as exigências para que haja balanceamento, o planejamento com certos números de tratamentos torna-se inexecutável para todas as combinações dos parâmetros envolvidos. Por exemplo, com 8 tratamentos distribuídos em blocos contendo 3 tratamentos cada um, esse arranjo só é possível com, no mínimo, 21 repetições por tratamento, havendo, portanto, muitas parcelas no experimento. A fim de contornar esse problema, BOSE e NAIR (1939) iniciaram os estudos dos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados (PBIB).

Nos delineamentos em PBIB, uma das características é que cada tratamento aparece junto com um outro, em um mesmo bloco, λ_i vezes ($i = 1, 2, \dots, m$), onde m é o número de classes de associados. Na prática, os de maior importância são os delineamentos $PBIB_{(2)}$, isto é, $m=2$. Nesses, cada tratamento terá um grupo de tratamentos que são seus primeiros associados e outro que são seus segundos associados.

Outra característica é que $V(\hat{m}_j - \hat{m}_j)$ assume valores distintos, para cada tipo de associados.

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar os delineamentos em $PBIB_{(2)}$, sendo que é de maior interesse apresentar, de forma detalhada, aspectos que possam ser utilizados pelos pesquisadores quando no planejamento e análise desses delineamentos, tais como:

i) Definir os principais tipos de $PBIB_{(2)}$ com seus esquemas de associação.

ii) Apresentar alguns métodos de construção e planos experimentais dos principais tipos de $PBIB_{(2)}$.

iii) Apresentar regras gerais sobre: estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados; variância de estimativas de contrastes entre médias de tratamentos; análise de variância intrabloco; eficiência desses delineamentos em relação aos blocos completos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Ensaios em Blocos Incompletos Balanceados (BIB)

2.1.1. Definição

YATES (1936) foi quem primeiro apresentou técnicas para análise de experimentos em blocos incompletos, dando grande contribuição à estatística experimental quando definiu os delineamentos em blocos incompletos balanceados (BIB).

O autor definiu que um arranjo de v tratamentos em b blocos de k ($k < v$) unidades experimentais cada um é chamado de BIB se ele satisfaz as três condições a seguir:

- i) Cada bloco contém k diferentes tratamentos.
- ii) Cada tratamento ocorre em r blocos.

iii) Quaisquer dois tratamentos ocorrem juntos em exatamente λ blocos.

Como ilustração, seja um BIB com o seguinte plano experimental, onde as letras se referem aos tratamentos:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	a	a	a	b	b	b	c	c
b	b	c	d	e	c	d	e	d	d
c	d	e	f	f	f	e	f	e	f

Os parâmetros são: $v = 6$, $b = 10$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda = 2$.

Os parâmetros dos delineamentos em BIB não são independentes. As relações de dependência desses parâmetros, que são conhecidas como condições de balanceamento do BIB, são as seguintes:

$$bk = vr \quad \text{e} \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

É óbvio que para os ensaios em blocos completos ao acaso, $k = v$ e $\lambda = r = b$.

Segundo JOHN (1971), com quaisquer pares de inteiros v , k ($k < v$), pode-se obter um BIB tomando-se combinações desses parâmetros para se obterem os valores dos parâmetros b , r e λ . O autor define que:

$$b = \binom{v}{k}, \quad r = \binom{v-1}{k-1}, \quad \lambda = \binom{v-2}{k-2}$$

2.1.2 Classificação

COCHRAN e COX (1957) classificam os ensaios em BIB em cinco tipos:

i) TIPO I: quando os blocos podem ser arranjados em repetições de tratamentos.

Um esquema experimental desse tipo, para $v = 9$, $b = 12$, $k = 3$, $r = 4$, $\lambda = 1$, poderá ser o seguinte:

B1.	REP. 1	B1.	REP. 2	B1.	REP. 3	B1.	REP. 4
1	a b c	4	a d g	7	a e i	10	c e g
2	d e f	5	b e h	8	b f g	11	a f h
3	g h i	6	c f i	9	c d h	12	b d i

Os autores afirmam ainda que só é possível obter um BIB desse tipo se v for múltiplo de k .

Uma classe importante de BIB desse tipo surge quando o número de tratamentos for um quadrado perfeito, e o número de tratamentos por blocos for a raiz quadrada do número de tratamentos, ou seja, $v = k^2$. Têm-se, então, os delineamentos chamados de reticulados quadrados equilibrados ("balanced lattices"), onde se verifica sempre que $\lambda = 1$ e, pa-

ra que ocorra a condição de balanceamento $\lambda(v-1) = r(k-1)$, é necessário haver $k+1$ repetições. Aqui, é necessário que k seja um número primo ou potência de número primo. Nesses de lineamentos, os parâmetros são: $v = k^2$, $b = k(k+1)$, $r = k+1$, k , $\lambda = 1$.

Para a obtenção dos planos experimentais dos reticulados quadrados equilibrados, seguem-se os seguintes passos, considerando um reticulado 3×3 . Como $k = 3$ é um número primo, pode-se formar $k+1 = 4$ repetições ortogonais, que são:

1ª repetição: colocam-se as letras correspondentes aos tratamentos numa seqüência natural, nas linhas:

Blocos	1ª repetição		
1	a	b	c
2	d	e	f
3	g	h	i

2ª repetição: tomam-se as colunas da 1ª repetição como linhas da 2ª ;

Blocos	2ª repetição		
4	a	d	g
5	b	e	h
6	c	f	i

Nas 3ª e 4ª repetições, os blocos são organizados com o auxílio dos quadrados latinos ortogonais 3x3:

1	2	3	1	2	3
2	3	1	3	1	2
3	1	2	2	3	1

Superpondo-se a 1ª repetição nos dois quadrados latinos, encontra-se:

a ₁	b ₂	c ₃	a ₁	b ₂	c ₃
d ₂	e ₃	f ₁	d ₃	e ₁	f ₂
g ₃	h ₁	i ₂	g ₂	h ₃	i ₁

Assim, os demais blocos são formados pelos tratamentos (letras) que possuem o mesmo índice na matriz original. Verifica-se que as 3ª e 4ª repetições coincidem com as diagonais da 1ª repetição.

10.

Blocos	3ª Repetição	Blocos	4ª Repetição
7	a f h	10	a e i
8	b d i	11	b f g
9	c e g	12	c d h

Nesses ensaios, observa-se que os tratamentos de um bloco em uma repetição se distribuem por todos os blocos de quaisquer das outras repetições. Repetições como essas são ditas "ortogonais".

ii) TIPO II: quando os blocos não podem ser arranjados em repetições de tratamentos, mas podem ser arranjados em grupos de repetições.

Um esquema experimental para esse tipo, considerando $v = 5$, $b = 10$, $k = 2$, $r = 4$, $\lambda = 1$, poderá ser o seguinte:

Blocos	Grupo 1	Blocos	Grupo 2
1	a b	6	a d
2	c d	7	b c
3	b e	8	c e
4	a c	9	a e
5	d e	10	b d

iii) TIPO III: quando os blocos não podem ser arran
jados nem em repetições nem em grupos de repetições de tratamen
mentos.

Um esquema experimental para esse tipo, para $v = 6$, $b = 10$, $k = 3$, $r = 5$, $\lambda = 2$, poderá ser o seguinte:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	a	a	a	b	b	b	c	d
b	b	c	c	d	c	c	d	e	e
e	f	d	f	e	d	e	f	f	f

iv) TIPO IV : quando o número de tratamentos é igual
ao número de blocos.

Esse tipo é também conhecido como BIB simétrico.

v) TIPO V: quando o número de parcelas do experimento e pequeno.

Na realidade, os dois últimos tipos são enquadráveis nos três primeiros. A maioria dos autores consideram apenas os três primeiros.

Vários planos experimentais de delineamentos em BIB têm sido preparados para ajudar ao pesquisador na escolha do tipo mais adequado para o seu ensaio. COCHRAN e COX (1957) e FISHER e YATES (1953) apresentam extensas listas de tais delineamentos.

Na instalação do experimento em campo, os autores advertem para que as unidades experimentais dentro de cada bloco incompleto tenham a máxima homogeneidade possível. Com relação à casualização, deve-se proceder da seguinte maneira: fazer o sorteio dos blocos; fazer a enumeração dos tratamentos; fazer o sorteio dos tratamentos dentro de cada bloco.

2.1.3. Análise de variância intrablocos

Há dois tipos bem diferentes de análise dos experimentos em blocos incompletos:

i) Análise intrablocos, em que só comparações entre parcelas do mesmo bloco são usadas nas estimativas dos efeitos de tratamentos.

ii) Análise com recuperação de informação interblocos, onde as comparações entre blocos são também aproveitadas nas estimativas dos efeitos de tratamentos.

A análise desses experimentos é bem mais difícil do que a dos experimentos tradicionalmente usados na

experimentação agronômica. PIMENTEL GOMES (1973) afirma que esta maior dificuldade, como também a maior perda de graus de liberdade no resíduo, são freqüentemente compensadas por uma redução grande no desvio padrão residual, de sorte que, não raro, obtêm-se ensaios mais precisos.

O autor comenta ainda que a análise intra-blocos pode ser usada para qualquer tipo de experimento em blocos incompletos e se baseia em métodos estatísticos exatos. Já a análise com recuperação de informação interblocos permite aproveitar melhor os dados, mas usa métodos estatísticos apenas aproximados e só deve ser usada para experimentos com número de graus de liberdade relativamente elevados para blocos e para o resíduo.

COCHRAN e COX (1957) salientam que a recuperação de informação interblocos pode ser dispensada se o número de blocos for pequeno e, nos ensaios do tipo reticulados quadrados, esta não deve ser usada, a menos que o número de blocos seja maior que 10.

Rao, citado por FEDERER (1955), recomenda que, quando o Q.M.Blocos $\leq$ Q.M. Resíduo, o experimento seja analisado como um delineamento em blocos ao acaso. Quando menos que 12 graus de liberdade estão associados ao Q.M.Blocos e quando Q.M.Blocos $>$ Q.M.Resíduo, o autor sugere que se faça apenas a análise de variância intrablocos.

Para estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos, BOSE e NAIR (1939); RAO (1947); NAIR (1952); SHAH (1959); CHAKRABARTI (1962); PIMENTEL GOMES (1968); JOHN (1971); OGAWA (1974) e IEMMA (1985), dentre outros, apresentam o sistema de equações normais reduzidas (S.E.N.R.):

$$C \underline{\tau}^0 = \underline{Q}$$

onde C é uma matriz singular, de dimensões $v \times v$ e "rank" $v-1$, com os elementos:

$$c_{jj'} = \begin{cases} r(k-1)/k, & \text{se } j = j' \\ -\lambda/k, & \text{se } j \neq j' \end{cases} \quad \text{e } j = 1, 2, \dots, v$$

$\underline{\tau}^0$ é o vetor dos efeitos de tratamentos, de dimensões $v \times 1$, com os elementos:

$$\underline{\tau}^0 = [t_1^0 \quad t_2^0 \quad \dots \quad t_v^0]$$

$\underline{Q}$ é o vetor dos totais ajustados de tratamentos, de dimensões $v \times 1$, composto com os elementos Q_j , onde:

$$Q_j = T_j - \frac{1}{k} B^{(j)}, \quad \text{sendo que:}$$

T_j é o total do tratamento j .

$B^{(j)}$ é a soma dos totais das observações dos blocos que contêm o tratamento j .

IEMMA (1985) generaliza uma solução para o S.E.N.R., impondo a restrição nas soluções $\sum_j \hat{t}_j = 0$.

O autor apresenta um novo sistema, $M\hat{\underline{t}} = \underline{Q}$, onde:

$M = \{m_{jj'}\}$, em que:

$$m_{jj'} = \begin{cases} \lambda v/k & , \text{ se } j=j' \\ 0 & , \text{ se } j \neq j' \end{cases}$$

Como a matriz M é de "rank" completo, a solução do sistema fica:

$$\hat{\underline{t}} = M^{-1}\underline{Q} = \frac{k}{\lambda v} \underline{Q}$$

Então:

$$\hat{t}_j = \frac{k}{\lambda v} Q_j = \frac{k}{\lambda v} \left[T_j - \frac{1}{k} B^{(j)} \right]$$

As médias ajustadas de tratamentos são da das por: $\hat{m}_j = \hat{m} + \hat{t}_j$, onde $\hat{m}$ é a estimativa da média ge ral.

Na experimentação agronômica, é de grande importância estimar os contrastes entre médias de tratamen tos. Nos ensaios em blocos incompletos, têm-se os contrastes entre médias ajustadas de tratamentos.

Considerando o contraste $\hat{y} = \hat{m}_j - \hat{m}_{j'}$, ele é equivalente ao contraste $\hat{y} = \hat{t}_j - \hat{t}_{j'}$, dado que $\hat{m}_j = \hat{m} + \hat{t}_j$ e $\hat{m}_{j'} = \hat{m} + \hat{t}_{j'}$, onde $\hat{m}$ é a estimativa da média geral.

O problema está em saber se os contrastes entre médias ajustadas de tratamentos são funções estimáveis. Para esse entendimento, é necessário apresentar alguns conceitos sobre delineamentos conexos.

Segundo RAGHAVARAO (1971), um delineamento em blocos é definido ser conexo se, dados quaisquer dois tratamentos j e j' , é possível construir uma cadeia de tratamentos $j = j_0, j_1, j_2, \dots, j_n = j'$, tais que todos os pares consecutivos de tratamentos na cadeia ocorram juntos em um bloco.

Uma regra prática para se verificar esse conceito é apresentada por SEARLE (1971). É a seguinte:

i) Forma-se uma tabela de dupla entrada, representando os blocos e os tratamentos.

ii) Nos pontos correspondentes ao encontro do bloco i com o tratamento j , coloca-se um X se o tratamento j ocorre no bloco i .

iii) Partindo-se de qualquer X e em qualquer sentido unem-se os X's por linhas horizontais ou verticais.

iv) Procedendo-se assim, se todos os X's forem unidos sem interrupção, diz-se que o delineamento é conexo. Caso contrário, ele não será conexo.

Uma ilustração de um delineamento conexo:

Tratamentos	Blocos			
	1	2	3	4
1	X	X	X	
2	X		X	X
3	X	X		X
4		X	X	X

Uma ilustração de um delineamento não conexo:

Tratamentos	Blocos			
	1	2	3	4
1	X	X		
2	X	X		
3			X	X
4			X	X

CHAKRABARTI (1962) e RAGHAVARAO (1971) afirmam que um delineamento em blocos com v tratamentos será conexo se e somente se o "rank" da matriz C do S.E.N.R. for $v-1$. Por conseguinte, qualquer BIB é conexo.

OGAWA (1974) mostra que, se o delineamento for conexo, todos os contrastes entre médias ajustadas de tratamentos são estimáveis.

Pelo teorema de Gauss-Markov, citado por IEMMA (1985), sabe-se que, se $\underline{\ell}'\underline{\tau}$ é uma função paramétrica estimável, então seu "blue" ("best linear unbiased estimator") é dado por $\widehat{\underline{\ell}'\underline{\tau}} = \underline{\ell}'\underline{\hat{\tau}}$.

Para a estimativa de contraste $\hat{\bar{y}} = \underline{\ell}'\underline{\hat{\tau}}$, onde $\underline{\ell}' = [\ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_v]$, o autor mostra que

$$V(\hat{\bar{y}}) = \underline{\ell}' M^{-1} \underline{\ell} \sigma^2,$$

onde a matriz M^{-1} , de dimensões $v \times v$, contém os elementos:

$$m_{jj'}^* = \begin{cases} k/\lambda v, & \text{se } j=j' \\ 0, & \text{se } j \neq j' \end{cases}$$

Generalizando, encontra-se:

$$V(\hat{\bar{y}}) = (k/\lambda v) \sum_j \ell_j^2 \sigma^2.$$

As estimativas de contrastes entre duas médias ajustadas de tratamentos são de particular interesse. Nesse caso, tem-se que $V(\hat{m}_j - \hat{m}_{j'}) = (2k/\lambda v) \sigma^2$.

A soma de quadrados para tratamentos ajustada é dada por:

$$SQ_{\text{Trat}}(aj) = \underline{\hat{\tau}}' \underline{Q} = (k/\lambda v) \sum_j Q_j^2.$$

Para os ensaios em BIB do tipo III, considera-se o modelo matemático $y_{ij} = m + b_i + t_j + e_{ij}$, com $i = 1, 2, \dots, b$, $j = 1, 2, \dots, v$, onde: m , b_i , t_j são os efeitos da média geral, de blocos e de tratamentos, respectivamente, e e_{ij} é o erro experimental, suposto normal e independentemente distribuído, com média zero e variância σ^2 .

Nesse modelo, as somas de quadrados para o total e para blocos são obtidas de forma usual, ou seja:

$$S.Q.Total = \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_0 \quad \text{e} \quad C_0 = \frac{(\sum_{ij} y_{ij})^2}{bk}$$

$$S.Q.Blocos = \frac{1}{k} \sum_i B_i^2 - C_0,$$

onde B_i é o total do bloco i .

O esquema da análise de variância fica:

C. Variação	G.L.
Blocos	$b-1$
Tratamentos _(aj)	$v-1$
Resíduo	$bk-b-v+1$
Total	$bk-1$

Para os ensaios em BIB do tipo I, considere-se o modelo matemático $y_{ij} = m + r_s + (b/r)_{is} + t_j + e_{ij}$, onde

r_s , com $s = 1, 2, \dots, r$ é o efeito da repetição s .

$(b/r)_{is}$ é o efeito do bloco i dentro da repetição s .

As somas de quadrados para repetições e blocos dentro de repetições são obtidas por:

$$S.Q.Rep. = \frac{1}{v} \sum_s R_s^2 - C_0$$

onde R_s é o total da repetição s .

$$S.Q.Blocos\ d.\ Rep. = S.Q.Blocos - S.Q.Rep.$$

O esquema da análise de variância fica:

C. Variação	G.L.
Repetições	$r-1$
Blocos d. Repetições	$b-r$
Tratamentos _(aj)	$v-1$
Resíduo	$bk-b-v+1$
Total	$bk-1$

Nota-se que o n° de g.l. de Blocos foi partido em n° de g.l. de repetições e Blocos d. repetições.

Nos ensaios em BIB do tipo II, considera-se o modelo matemático $y_{ij} = m + g_s + (b/g)_{is} + t_j + e_{ij}$, onde

g_s , com $s = 1, 2, \dots, g$, é o efeito do grupo s ;

$(b/g)_{is}$ é o efeito do bloco i dentro do grupo s .

As somas de quadrados para grupos e para blocos dentro de grupos são obtidas por:

$$S.Q.\text{Grupos} = \left(\frac{g}{rv}\right) \sum_s G_s^2 - C_0, \quad \text{onde}$$

G_s é o total do grupo s ,

$$S.Q.\text{Blocos d. Grupos} = S.Q.\text{Blocos} - S.Q.\text{Grupos}.$$

O esquema da análise de variância fica:

C. Variação	G.L.
Grupos	$g-1$
Blocos d. Grupos	$b-g$
Tratamentos _(aj)	$v-1$
Resíduo	$bk-b-v+1$
Total	$bk-1$

Nota-se que o n.º de g.l. de Blocos foi partido em n.º de g.l. de Grupos e Blocos d. Grupos.

SCHEFFÉ (1959) apresenta as esperanças dos quadrados médios de interesse para esses delineamentos:

$$E(Q.M.Trat_{(aj)}) = \sigma^2 + \frac{\lambda v}{k} \sum_j t_j^2$$

$$E(Q.M.Res) = \sigma^2$$

Assim, para a hipótese:

$$H_0 : t_1 = t_2 = \dots = t_v = 0$$

$$H_1 : \text{Não } H_0$$

o teste F para $Trat_{(aj)}$ fica:

$$F = \frac{Q.M.Trat_{(aj)}}{Q.M.Res} \sim F_{[v-1, bk-b-v+1]}$$

sob H_0 .

2.1.4. Eficiência dos ensaios em BIB

YATES (1936) introduziu o conceito de eficiência de um BIB em relação aos blocos completos ao acaso, com v tratamentos repetidos r vezes.

Nos blocos completos $V(\hat{m}_j - \hat{m}_j,)$ vale $\frac{2}{r} \sigma^2$.

Nos ensaios em BIB $V(\hat{m}_j - \hat{m}_j,)$ vale $2 \frac{k}{\lambda v} \sigma^2$.

A relação entre essas duas variâncias foi definida pelo autor como a eficiência do BIB (E).

$$E = \frac{\frac{2}{r} \sigma^2}{2 \frac{k}{\lambda v} \sigma^2} = \frac{\lambda v}{rk} = \frac{v(k-1)}{k(v-1)}, \quad 0 < E < 1.$$

Verifica-se que, entre dois delineamentos em BIB com o mesmo número de tratamentos, o mais eficiente é aquele que tem o maior valor para k . No planejamento experimental, quando na escolha dos parâmetros do BIB, devem-se preferir as combinações que apresentem valor de E mais próximo de 1.

2.2. Ensaios em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados - PBIB₍₂₎

2.2.1. Definição e relação entre seus parâmetros

BOSE e NAIR (1939) iniciaram os estudos dos delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados, apresentando, de forma compreensiva, conceitos e propriedades desses delineamentos, tornando sua análise menos trabalhosa. Definiram que um delineamento se caracteriza como um PBIB₍₂₎ se satisfaz as seguintes condições:

i) O material experimental é dividido em b blocos de k tratamentos cada bloco.

ii) Existem $v(v < k)$ tratamentos e cada um ocorre em r blocos.

iii) Fixando-se qualquer tratamento, os demais podem ser divididos em dois grupos: um grupo de n_1 tratamentos que são seus primeiros associados, dado que ocorrem juntos com ele em λ_1 blocos; outro grupo de n_2 tratamentos que são seus segundos associados, dado que ocorrem juntos com ele em λ_2 blocos. Os parâmetros n_1, n_2, λ_1 e λ_2 independem do tratamento fixado.

iv) Dados quaisquer dois tratamentos que são i -ésimos associados, o número de tratamentos que são j -ésimos associados do primeiro e j' -ésimos associados do segundo é $p_{jj'}^i$, sendo independente do par de tratamentos escolhido ($i, j, j' = 1, 2$).

Esses parâmetros podem ser exibidos como os elementos de duas matrizes simétricas $P_i = \{p_{jj'}^i\}$, ($i=1,2$), onde $p_{jj'}^i$ é o (j, j') -ésimo termo da matriz P_i . Assim,

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros $v, b, r, k, n_1, n_2, \lambda_1$ e λ_2 foram denominados pelos autores de parâmetros de primeira espécie e $p_{jj'}^i$, ($i, j, j' = 1, 2$) de parâmetros de segunda espécie.

Como ilustração, seja o seguinte plano experimental de um $PBIB_{(2)}$:

Blocos				
1	2	3	4	5
a	a	b	c	d
b	e	e	f	g
c	f	h	h	i
d	g	i	j	j

De imediato, verifica-se que $v = 10, b = 5, k = 4$ e $r = 2$. Considerando o tratamento a, vê-se que ele o corre junto uma única vez num mesmo bloco com os tratamentos b, c, d, e, f, g, que são seus primeiros associados. Daí, $\lambda_1 = 1$ e $n_1 = 6$; vê-se também que ele não ocorre junto em nenhum bloco com os tratamentos h, i, j, que são seus segundos associados. Daí, $\lambda_2 = 0$ e $n_2 = 3$. Foi fixado o tratamento a para encontrar os parâmetros, mas esses independem do tratamento escolhido.

Para entender os valores de p_{jj}^i , seja a seguinte tabela:

Tratamentos	Primeiros Associados	Segundos Associados
a	b c d e f g	h i j
b	a c d e h i	f g j
c	a b d f h j	e g i
d	a b c g i j	e f h
e	a f g b h i	c d j
f	a e g c h j	b d i
g	a e f d i j	b c h
h	b e i c f j	a d g
i	b e h d g j	a c f
j	c f h d g i	a b e

Considerando-se o par de tratamentos (a,b), eles são primeiros associados. Os tratamentos c, d, e são, ao mesmo tempo primeiros associados dos dois, logo $p_{11}^1 = 3$; os tratamentos h, i são segundos associados de a e primeiros associados de b, logo $p_{21}^1 = 2$; os tratamentos f, g são primeiros associados de a e segundos associados de b, logo $p_{12}^1 = 2$; o tratamento j é segundo associado de a e de b, logo $p_{22}^1 = 1$. Forma-se, então, a matriz:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escolhendo-se dois tratamentos que são segundos associados e seguindo-se o mesmo raciocínio, encontra-se a matriz:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se que as matrizes P_1 e P_2 são simétricas, ou seja, $p_{12}^i = p_{21}^i$. Logo, daqui por diante será usado o valor p_{12}^i quando aparecer p_{21}^i .

Os valores de p_{jj}^i , independem do par de i -ésimos associados escolhido.

BOSE e NAIR (1939) definiram as várias relações existentes entre os parâmetros dos ensaios em $PBIB_{(2)}$. Tais relações são:

$$i) \quad bk = vr$$

$$ii) \quad n_1 + n_2 = v-1$$

$$iii) \quad n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 = r(k-1)$$

$$iv) \quad p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1, \quad p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$$

$$p_{12}^1 + p_{22}^1 = n_2, \quad p_{12}^2 + p_{22}^2 = n_2 - 1$$

$$v) \quad n_1 p_{12}^1 = n_2 p_{11}^2, \quad n_1 p_{12}^1 = n_2 p_{12}^2$$

2.2.2. Classificação dos delineamentos em $PBIP_{(2)}$

BOSE e SHIMAMOTO (1952) introduziram o conceito de esquema de associação de um delineamento em $PBIP_{(2)}$ e a partir daí foi possível definir uma classificação desses delineamentos em função desses conceitos. Os parâmetros v , n_i e p_{jj}^i , foram considerados como os parâmetros do esquema de associação. Os autores, ao estabelecerem essas regras de associação entre os tratamentos de um delineamento em $PBIB_{(2)}$, contribuíram para a simplificação dos cálculos na análise do ensaio, pois, tendo um esquema de associação definido, alguns parâmetros ficam determinados de imediato.

Os delineamentos em $PBIB_{(2)}$ são classificados em: 1 - Grupo Divisível (G.D.); 2 - Simples (S); 3- Triangular (T); 4 - Tipo Quadrado Latino (L_1); 5 - Cíclicos (C).

2.2.2.1. Grupo Divisível (G.D.)

Nesse tipo, os v tratamentos são divididos em m grupos de n tratamentos cada um. Os tratamentos em um mesmo grupo são considerados primeiros associados; caso contrário, são segundos associados.

O esquema de associação desse tipo é o seguinte:

Grupos	Tratamentos		
1	1	2	n
2	n+1	n+2	2n
...	...	...	...
m	(m-1)n+1	(m-1)n+2	m.n

Nesse esquema, os parâmetros são:

$$v = m.n , \quad n_1 = n-1 , \quad n_2 = n(m-1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}$$

Como ilustração, considerando-se $v = 8$,
 $m = 4$ e $n = 2$, denotando os tratamentos por a, b, ..., h,
o esquema de associação pode ser exibido como:

a	b
c	d
e	f
g	h

Nesse caso, os parâmetros são $v = 8$, $m = 4$,
 $n = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 6$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

BOSE e CONNOR (1952) subdividiram esse tipo em 3 subtipos:

- i) Singular (S) , se $r = \lambda_1$.
- ii) Semi-Regular (S.R.) , se $r > \lambda_1$ e $rk = \lambda_2 v$.
- iii) Regular (R) , se $r > \lambda_1$ e $rk > \lambda_2 v$.

2.2.2.2. Simples (S)

Esse tipo ocorre quando $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1 = 0$. Admitindo-se que sempre ocorra $\lambda_1 > \lambda_2$, o delineamento fica com a forma padrão: $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$. Assim, quaisquer dois tratamentos que ocorrem juntos em um ou mais blocos são considerados primeiros associados; caso contrário, são segundos associados.

2.2.2.3. Triangular (T)

Nesse, existem $v = n(n-1)/2$ tratamentos. O esquema de associação é obtido através de um arranjo de um quadrado de n linhas e n colunas, com as seguintes propriedades:

i) As posições da diagonal principal são deixadas em branco.

ii) As $n(n-1)/2$ posições acima da diagonal principal são preenchidas pelos números 1, 2, ..., $n(n-1)/2$, correspondentes aos tratamentos.

iii) As demais posições abaixo da diagonal são preenchidas de forma que o arranjo fique simétrico em relação à diagonal principal.

Assim, para $n = 5$, forma-se o seguinte esquema, onde no lugar de números serão usadas letras para designar os tratamentos:

*	a	b	c	d
a	*	e	f	g
b	e	*	h	i
c	f	h	*	j
d	g	i	j	*

iv) Quaisquer dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem em uma mesma linha ou mesma coluna; caso contrário, são segundos associados.

Nesse esquema, tem-se:

$$n_1 = 2n-4 \quad , \quad n_2 = (n-2)(n-3)/2 \quad ,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2n-8 \\ 2n-8 & (n-4)(n-5)/2 \end{bmatrix}$$

2.2.2.4. Tipo Quadrado Latino (L_i)

Nesse tipo, existem $v = s^2$ tratamentos. O esquema de associação é obtido através de um arranjo de um quadrado de s linhas e s colunas e todas as posições são preenchidas pelos tratamentos $1, 2, \dots, s^2$. Esse tipo representa os conhecidos reticulados quadrados parcialmente balanceados (Látices). Para o esquema L_2 têm-se os látices simples ou também chamados látices duplos, e então dois tratamentos são primeiros associados se eles aparecem juntos em uma mesma linha ou mesma coluna, e são segundos associados, caso contrário. Para o esquema L_i , tal que $2 \leq i \leq s+1$, toma-se um conjunto de $(i-2)$ quadrados latinos mutuamente ortogonais, e, assim, dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem numa mesma linha ou mesma coluna, ou se eles ocupam a posição da mesma letra de quadrados latinos superpostos; caso contrário, são segundos associados.

BOSE e NAIR (1939) mostraram que os látices simples e látices triplos são casos especiais de delineamentos em $PBIB_{(2)}$, concordando então com essa definição. Já

NAIR e RAO (1942) salientaram que os látices cúbicos são casos especiais de delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com 3 classes de associados - $PBIB_{(3)}$.

Segundo KAGEYAMA (1982), quando $i = s + 1$, o delineamento será um BIB (látice balanceado) e quando $i = s$, o delineamento será do tipo Grupo Divisível com $p_{12}^2 = 0$. Assim, o autor define que a condição necessária e suficiente para se obter um esquema do tipo L_i é que $2 \leq i \leq s-1$.

Nesse esquema, os parâmetros são:

$$n_1 = i(s-1) \quad ; \quad n_2 = (s-1)(s-i+1)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} i^2 - 3i + s & (i-1)(s-i+1) \\ (i-1)(s-i+1) & (s-i)(s-i+1) \end{bmatrix} ,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(s-i) \\ i(s-i) & (s-i)^2 + i - 2 \end{bmatrix} .$$

2.2.2.5. Cíclicos (C)

Nesses, os tratamentos são denotados por $0, 1, 2, \dots, v-1$. Os primeiros associados do tratamento i são $i+d_1, i+d_2, \dots, i+d_{n_1}$, (módulo v), onde $d_1, d_2, \dots, d_{n_1}$ são inteiros, satisfazendo as seguintes condições:

i) Os d_j são todos diferentes e $0 < d_j < v$ para cada j .

ii) Entre as $n_1(n_1-1)$ diferenças $d_j-d_{j'}$, (mod v), cada um dos inteiros $d_1, \dots, d_{n_1}$ ocorre g vezes, e cada um dos outros n_2 inteiros positivos menores que v ocorre h vezes. Assim,

$$n_1 g + n_2 h = n_1(n_1-1)$$

$$g = p_{11}^1 \quad \text{e} \quad h = p_{11}^2$$

Com base nesses conceitos, JOHN (1971) a apresenta as seguintes matrizes:

$$P_1 = \begin{bmatrix} g & n_1-g-1 \\ n_1-g-1 & n_2-n_1+g+1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} h & n_1-h \\ n_1-h & n_2-n_1+h-1 \end{bmatrix}$$

Como ilustração, o autor apresenta o seguinte esquema, com $v=5$:

$$0 \ 1 \ 2, \ 1 \ 2 \ 3, \ 2 \ 3 \ 4, \ 3 \ 4 \ 0, \ 4 \ 0 \ 1.$$

Aqui, $n_1 = n_2 = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $d_1 = 1$ e $d_2 = 4$. Os primeiros associados do tratamento 2 são $2+1 \equiv 3$ e $2+4 \equiv 1 \pmod{5}$.

2.2.3. Construção dos delineamentos em $PBIB_{(2)}$

Na literatura existe um grande número de artigos apresentando diferentes métodos de construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$, desde a forma simples de eliminação de tra

tamentos de um plano experimental de um BIB conhecido, a outros mais complexos, tais como: dualização de delineamentos em BIB, configurações geométricas, geometria finita, diferença, matrizes auxiliares, etc. BOSE e NAIR (1939); BOSE e SHIMAMOTO (1952); BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954); SPROTT (1955); FREEMAN (1957); CHAKRABARTI (1962); JOHN (1966); JOHN (1971); RAGHAVARAO (1971); RAMOS (1975); BOSE e SHRIKHANDE (1979); JUNGnickel (1979); AGRAWAL e PRASAD (1984); CHENG, CONSTANTINE e HEDAYAT (1984); KAGEYAMA e MOHAN (1984), dentre outros, apresentam métodos de construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$.

A organização dos planos experimentais desses delineamentos é variada, de acordo com o esquema de associação, onde se obtêm os arranjos dos v tratamentos em b blocos de tamanho k ($k < v$). BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954) trazem tabelada uma valiosa relação de 376 planos desses delineamentos, seguindo a classificação já apresentada anteriormente, para $r < 10$ e $3 < k < 10$. JOHN (1966) traz tabelados vários planos experimentais de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ do tipo Cíclico, para $r < 10$ e $5 < v < 15$.

Já foi comentado anteriormente que os delineamentos em $PBIB_{(2)}$ foram introduzidos por BOSE e NAIR (1939), dadas as restrições na existência de delineamentos em BIB, exigindo um valor elevado para r , aumentando demasiadamente o número de

parcelas do ensaio. Na prática, essa situação torna-se quase inviável à instalação do ensaio no campo, tanto pela demanda de maior material experimental, como pelo aumento do custo da pesquisa. Já nos delineamentos em $PBIB_{(2)}$ não há essa limitação, o que favorece a construção de um maior número de planos experimentais. No entanto, segundo KEMPTHORNE (1975), de todos os delineamentos em blocos incompletos com parâmetros (v, b, r, k) , o BIB, se existe, é o mais eficiente. Sendo assim, o pesquisador, nesses casos, não deverá escolher o $PBIB_{(2)}$ em detrimento do BIB.

Serão apresentados, a seguir, alguns métodos elementares de construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$. Caso o pesquisador não desejar trabalhar através desse caminho, ele poderá encontrar os planos experimentais adequados a seu interesse usando as tabelas reunidas por BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954), e por JOHN (1966).

2.2.3.1. Construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ através de configurações geométricas

Alguns planejamentos experimentais interessantes de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ podem ser obtidos através de algumas configurações geométricas simples, como mostram BOSE e NAIR (1939):

i) Considerando-se a configuração de Pappus, de nove linhas e nove pontos, ilustrada pela figura:

Considerando-se as linhas como os blocos e os pontos como tratamentos, encontra-se o seguinte plano experimental:

Blocos								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	d	g	a	b	a	b	c	c
b	e	h	g	i	h	g	i	h
c	f	i	e	f	f	d	e	d

Os parâmetros são $v = 9$, $b = 9$, $r = 3$, $k = 3$,
 $\lambda_1 = 1$, $n_1 = 6$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 2$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Considerando-se a configuração de Desargues de dez pontos e dez linhas, dada pela figura:

Considerando-se as linhas como os blocos e os pontos como tratamentos, obtêm-se o plano experimental:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	b	c	b	e	f	i	g
d	e	f	c	a	a	f	d	d	i
j	j	j	g	h	i	g	h	e	h

Os parâmetros são $v = 10$, $b = 10$, $r = 3$, $k = 3$,
 $\lambda_1 = 1$, $n_1 = 6$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 3$,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

iii) Considerando-se o octaedro:

Considerando-se as faces como os blocos e os vértices como os tratamentos, obtém-se o plano experimental:

Blocos							
1	2	3	4	5	6	7	8
a	d	a	d	a	d	a	d
b	e	c	f	e	b	f	c
c	f	e	b	f	c	b	e

Os parâmetros são $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$,
 $\lambda_1 = 2$, $n_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 1$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iv) Considerando-se o icosaedro:

Considerando-se as faces como blocos e os
vértices como tratamentos, obtém-se o plano experimental:

Blocos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	a	a	a	b	c	d	e	f
b	c	d	e	f	c	d	e	f	b
c	d	e	f	b	j	l	g	h	i

Blocos

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	d	e	f	g	h	i	j	l
i	j	l	g	h	h	i	j	l	g
j	l	g	h	i	m	m	m	m	m

Os parâmetros são $v = 12$, $b = 20$, $r = 5$,
 $k = 3$, $\lambda_1 = 2$, $n_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$, $n_2 = 6$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.3.2. Construção de delineamentos em PBIB₍₂₎ através da dualização de um BIB

Entende-se por matriz de incidência de um delineamento em blocos incompletos a matriz N com elementos n_{ij} , tal que:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } j \text{ aparece no bloco } i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segundo RAGHAVARAO (1971), se N é a matriz de incidência de um delineamento D , então o delineamento D^* com matriz de incidência N' é chamado de delineamento dual de D .

Obviamente, trocando-se os blocos pelos tratamentos em D , obtém-se D^* .

Como ilustração, seja um BIB com parâmetros $v^* = 4$, $b^* = 6$, $r^* = 3$, $k^* = 2$, $\lambda^* = 1$, e com o plano experimental:

Blocos					
1	2	3	4	5	6
a	a	a	b	b	c
b	c	d	c	d	d

No dual desse delineamento, consideram-se os tratamentos A, B, C, D, E, F correspondentes aos 6 blocos originais. O enunciado: "o tratamento a aparece nos blocos 1, 2 e 3", passa a ser: "o bloco 1 contém os tratamentos A, B e C", letras essas correspondentes aos números 1, 2 e 3, respectivamente. Dessa forma, encontra-se um novo delineamento com parâmetros $v = b^* = 6$, $b = v^* = 4$, $k = r^* = 3$, $r = k^* = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, e com o plano experimental:

Blocos			
1	2	3	4
A	A	B	C
B	D	D	E
C	E	F	F

Esse delineamento é um PBIB₍₂₎ do tipo triangular com esquema de associação dado por:

*	A	B	C
A	*	D	E
B	D	*	F
C	E	F	*

Vale ressaltar que nem sempre o dual de um BIB resulta em um PBIB₍₂₎. SHRIKHANDE (1952) apresenta os dois casos em que é possível. São os seguintes:

i) BIB com parâmetros $v^* = rk - k + 1$, $r^* = k$, $k^* = r$, $\lambda^* = 1$. O PBIB₍₂₎, que é dual desse BIB, tem os parâmetros $v = k(kr - k + 1)/r$, $b = rk - k + 1$, r , k , $n_1 = r(k-1)$, $n_2 = (k-r)(r-1)(k-1)/r$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} (k-2) + (k-1)^2 & (r-1)(k-r) \\ (r-1)(k-r) & (r-1)(k-r)(k-r-1)/r \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} r^2 & r(k-r-1) \\ r(k-r-1) & n_2 - r(k-r-1) - 1 \end{bmatrix}$$

JOHN (1971) afirma que esse esquema de associação foi chamado por Bose de "singly linked block" (SLB), visto cada par de blocos ter um único tratamento em comum.

Como ilustração, seja um BIB com parâmetros $v^* = 9$, $b^* = 12$, $r^* = 4$, $k^* = 3$, $\lambda^* = 1$, e com o plano experimental:

Blocos											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	d	g	a	b	c	a	b	c	a	b	c
b	e	h	d	e	f	e	f	d	f	d	e
c	f	i	g	h	i	i	g	h	h	i	g

O tratamento a aparece nos blocos 1, 4, 7 e 10. Para se formar o dual desse BIB, considera-se que o bloco 1 é formado pelos tratamentos A, D, G, J, letras correspondentes aos números 1, 4, 7 e 10, respectivamente. O novo delineamento em $PBIB_{(2)}$ tem os parâmetros $v = 12$, $b = 9$, $k = 4$, $r = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e o plano experimental:

Blocos								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	B	B	B	C	C	C
D	E	F	D	E	F	D	E	F
G	H	I	I	G	H	H	I	G
J	K	L	K	L	J	L	J	K

Um caso particular desse tipo de dualização de BIB é, segundo JOHN (1971), quando o BIB não simétrico tem os parâmetros $v^* = n$, $b^* = n(n-1)/2$, $r^* = n-1$, $k^* = 2$,

$\lambda^* = 1$. Seu dual será um delineamento em $\text{PBIB}_{(2)}$ do tipo triangular, com parâmetros $v = n(n-1)/2$, $b = n$, $r = 2$, $k = n-1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

Como ilustração, seja o BIB com parâmetros $v^* = 5$, $b^* = 10$, $k^* = 2$, $r^* = 4$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	a	a	b	b	b	c	c	d
b	c	d	e	c	d	e	d	e	e

Procedendo-se de forma análoga aos exemplos apresentados anteriormente, encontra-se o dual desse BIB, que é um $\text{PBIB}_{(2)}$ com parâmetros $v = 10$, $b = 5$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e o plano experimental:

Blocos				
1	2	3	4	5
A	A	B	C	D
B	E	E	F	G
C	F	H	H	I
D	G	I	J	J

Aqui, o esquema de associação é:

*	A	B	C	D
A	*	E	F	G
B	E	*	H	I
C	F	H	*	J
D	G	I	J	*

Nesse tipo, cada bloco corresponde a uma linha do arranjo no esquema de associação.

ii) BIB com parâmetros $v^* = \binom{n-1}{2}$, $b^* = \binom{n}{2}$, $r^* = n$, $k^* = n-2$, $\lambda^* = 2$.

O dual desse BIB será um PBIB₍₂₎ do tipo triangular com parâmetros $v = \binom{n}{2}$, $b = \binom{n-1}{2}$, $k = n$, $r = n-2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Como ilustração, seja $n = 5$, logo, o BIB terá os parâmetros $v^* = 6$, $b^* = 10$, $r^* = 5$, $k^* = 3$, $\lambda^* = 2$. Seja também o plano experimental:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	C	C	B	A	A	A	B
B	D	E	D	E	D	D	C	B	C
C	E	F	F	F	F	E	D	F	E

Seguindo-se o processo de dualização, encontra-se o $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 10$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, e o plano experimental:

Blocos					
1	2	3	4	5	6
A	A	A	B	B	C
C	B	D	D	C	D
G	F	E	F	E	E
H	I	H	G	G	F
I	J	J	H	J	I

Aqui, o $PBIB_{(2)}$ é do tipo triangular com esquema de associação igual ao apresentado no exemplo anterior. Nesse caso $\lambda_1 < \lambda_2$, mas a interpretação do esquema de associação não se altera.

2.2.3.3. Outros métodos de construção de delineamentos em $PBIB_{(2)}$

A fim de tornar dirigida a construção desses delineamentos quanto à sua classificação, serão mostrados a seguir alguns métodos de construção, muitos deles associados a teoremas sobre a existência desses delineamentos, que possibilita obter-se uma série desses para os tipos Grupo Divisível (G.D.), Triangular (T) e Quadrado Latino (L_i).

2.2.3.3.1. Grupo Divisível (G.D.)

Segundo RAMOS (1975), um delineamento em $PBIB_{(2)}$ trivial, baseado no esquema de associação G.D., pode ser obtido tomando-se para blocos as combinações das linhas do esquema duas a duas.

Como ilustração, seja o esquema de associação G.D. para $v = 8$, $m = 4$ e $n = 2$:

a e
b f
c g
d h

Aplicando-se o método, obtém-se um $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 8$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 4$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, e o plano experimental:

Blocos					
1	2	3	4	5	6
a	a	a	b	b	c
e	e	e	f	f	g
b	c	d	c	d	d
f	g	h	g	h	h

Com os seguintes teoremas, obtêm-se outros delineamentos em $PBIB_{(2)}$ do tipo G.D.

TEOREMA 1 [RAGHAVARAO (1971)]:

Eliminando-se todos os blocos em que um determinado tratamento θ ocorre em um BIB com parâmetros v^* , b^* , r^* , k^* , $\lambda^* = 1$, obtêm-se um G.D. com parâmetros $v = v^* - 1$, $b = b^* - r^*$, $r = r^* - 1$, $k = k^*$, $m = r^*$, $n = k^* - 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Como ilustração, seja o BIB com parâmetros $v^* = 7$, $k^* = 3$, $r^* = 3$, $b^* = 7$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos						
1	2	3	4	5	6	7
a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
d	e	f	g	a	b	c

Eliminando-se todos os blocos que contêm o tratamento g, obtêm-se um $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 6$, $b = 4$, $k = 3$, $r = 2$, $m = 3$, $n = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, e o plano experimental:

Blocos			
1	2	3	4
a	b	c	e
b	c	d	f
d	e	f	a

Nesse, o esquema de associação é:

a	c
b	f
d	e

Segundo JOHN (1971), se o BIB for simétrico, o PBIB₍₂₎ será do tipo G.D. semi-regular; caso contrário, será do tipo G.D. regular.

COROLÁRIO 1 [RAGHAVARAO (1971)]:

Se s é um número primo ou potência de um número primo, sempre existe a série de G.D. com parâmetros $v = b = s^2 - 1$, $r = k = s$, $m = s + 1$, $n = s - 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Para se obter esse delineamento, deve-se tomar um látice balanceado que tem parâmetros $v^* = s^2$, $b^* = s(s + 1)$, $r^* = s + 1$, $k^* = s$, $\lambda^* = 1$ e eliminar todos os blocos que contêm um determinado tratamento θ .

Como ilustração, considerando $s = 3$, o látice terá os parâmetros $v^* = 9$, $b^* = 12$, $r^* = 4$, $k^* = 3$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	d	g	a	b	c	a	b	c	a	b	c
b	e	h	d	e	f	f	d	e	e	f	d
c	f	i	g	h	i	h	i	g	i	g	h

Eliminando-se os blocos que contêm o tratamento i, encontra-se um G.D. com parâmetros $v = 8$, $b = 8$, $r = 3$, $k = 3$, $m = 4$, $n = 2$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, e o plano experimental:

Blocos							
1	2	3	4	5	6	7	8
a	d	a	b	a	c	b	c
b	e	d	e	f	e	f	d
c	f	g	h	h	g	g	h

Nesse G.D., o esquema de associação é:

a	e
b	d
c	f
g	h

TEOREMA 2 [BOSE e CONNOR (1952)]:

Se em um BIB com parâmetros v^* , b^* , r^* , k^* , λ^* , cada tratamento for substituído por um grupo de n tratamentos, obtém-se um PBIB₍₂₎ do tipo G.D. singular, com parâmetros $v = nv^*$, $b = b^*$, $r = r^*$, $k = nk^*$, $\lambda_1 = r^*$, $\lambda_2 = \lambda^*$, $m = v^*$, $n = n$.

Como ilustração, seja o BIB com parâmetros $v^* = b^* = 7$, $r^* = k^* = 3$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos						
1	2	3	4	5	6	7
a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
d	e	f	g	a	b	c

Considerando-se $n = 2$, então pode-se substituir o tratamento $\underline{a}$ por $\underline{a}_1$ e $\underline{a}_2$, e assim para os demais tratamentos. Obtém-se um G.D. singular com parâmetros $v = 14$, $b = 7$, $r = 3$, $k = 6$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $m = 7$, $n = 2$, e o plano experimental:

Blocos						
1	2	3	4	5	6	7
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1
a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2
b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1
b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2	a_2
d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	b_1	c_1
d_2	e_2	f_2	g_2	a_2	b_2	c_2

Aqui, o esquema de associação é:

a_1	a_2
b_1	b_2
c_1	c_2
d_1	d_2
e_1	e_2
f_1	f_2
g_1	g_2

Zelen, citado por JOHN (1971), mostra que esse método pode ser usado para se obter um delineamento $PBIB_{(m+1)}$ a partir de um $PBIB_{(m)}$, onde m representa o número de classes de associados.

TEOREMA 3 [RAGHAVARAO (1971)]:

Se s é um número primo ou potência de número primo, sempre existe a série de G.D. com parâmetros $v = s(s+1)$, $m = s+1$, $n = s$, $b = s^2$, $r = s$, $k = s+1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

Para se obter esse delineamento em $PBIB_{(2)}$, deve-se considerar o dual de um látice balanceado, como foi usado em 2.2.3.2. i). O esquema de associação para aquele exemplo é:

A	B	C
D	E	F
G	H	I
J	K	L

Nota-se que, para esse delineamento se enquadrar como G.D., foi necessário considerar $\lambda_1 < \lambda_2$.

2.2.3.3.2. Triangular (T)

TEOREMA 4 [RAGHAVARAO (1971)]:

Um delineamento $PBIB_{(2)}$ do tipo triangular com parâmetros $v = n(n-1)/2$, $b = n$, $r = 2$, $k = n-1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, pode sempre ser construído.

Para se obter esse delineamento, basta considerar as linhas do esquema de associação triangular como blocos.

Como ilustração, considerando $n = 4$, o esquema de associação é:

*	a	b	c	(Bloco 1)
a	*	d	e	(Bloco 2)
b	d	*	f	(Bloco 3)
c	e	f	*	(Bloco 4)

Obtém-se, então, um delineamento $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 6, b = 4, r = 2, k = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$.

TEOREMA 5 [RAGHAVARAO (1971)]:

Esse teorema é de autoria de Shrikhande. Eliminando-se todos os blocos que contêm um determinado tratamento θ de um BIB com parâmetros $v^* = b^* = n(n-1)/2 + 1, r^* = k^* = n, \lambda^* = 2$, obtém-se um delineamento em esquema trian-gular com parâmetros $v = n(n-1)/2, b = (n-1)(n-2)/2, r = n-2, k = n, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Como ilustração, seja $n = 4$, e o BIB com parâmetros $v^* = b^* = 7, r^* = k^* = 4, \lambda^* = 2$, e o plano experimental:

Blocos						
1	2	3	4	5	6	7
c	a	a	a	b	a	b
e	d	b	b	c	c	d
f	f	e	c	d	d	e
g	g	g	f	g	e	f

Eliminando-se os blocos que contêm o tratamento g, encontra-se um PBIB₍₂₎ triangular com parâmetros $v = 6$, $b = 3$, $r = 2$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, e o plano experimental dado pelos blocos 4, 6 e 7, com o esquema de associação:

*	a	b	d
a	*	e	f
b	e	*	c
d	f	c	*

TEOREMA 6 [RAGHAVARAO (1971)]:

Esse teorema é devido a Chang, Liu e Liu (1965). Se existe um BIB com parâmetros $v^* = n-1$, b^* , r^* , k^* , λ^* , então pode-se construir um PBIB₍₂₎ triangular com parâmetros $v = n(n-1)/2$, $b = nb^*$, $r = 2r^*$, $k = k^*$, $\lambda_1 = \lambda^*$, $\lambda_2 = 0$.

Para se obter o plano experimental desse $PBIB_{(2)}$, deve-se obedecer aos seguintes passos:

i) Em cada uma das linhas do esquema de associação triangular existem $n-1$ tratamentos que são primeiros associados. Constrói-se, então, um delineamento em BIB com esses tratamentos.

ii) Procede-se de forma análoga para as demais linhas do esquema, preservando-se os mesmos parâmetros para os delineamentos em BIB formados.

Como ilustração, seja $n = 5$, que pode ter o seguinte esquema de associação:

*	a	b	c	d
a	*	e	f	g
b	e	*	h	i
c	f	h	*	j
d	g	i	j	*

Tomando-se os tratamentos a, b, c, d da primeira linha do esquema, pode-se formar um BIB com os parâmetros $v^* = 4$, $b^* = 4$, $k^* = 3$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos			
1	2	3	4
a	a	a	b
b	b	c	c
c	d	d	d

Procedendo-se da mesma forma para as demais linhas, obtém-se um PBIB₍₂₎ triangular, com esquema de associação dado anteriormente, e com parâmetros $v=10$, $b=20$, $r=6$, $k=3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e os demais blocos do plano experimental dados a seguir:

Blocos															
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	a	a	e	b	b	b	e	c	c	c	f	d	d	d	g
e	e	f	f	e	e	h	h	f	f	h	h	g	g	i	i
f	g	g	g	h	i	i	i	h	j	j	j	i	j	j	j

JOHN (1971) apresenta um método interessante de se construir um PBIB₍₂₎ triangular, de autoria de Clatworthy, usado quando $k=3$ e para se obterem delineamentos com $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$. Deve-se obedecer aos seguintes passos:

i) Toma-se um par de tratamentos que aparece em u ma mesma linha do esquema de associação triangular.

ii) Nota-se que o primeiro tratamento aparece novamente em uma outra linha; na intersecção dessa linha com a coluna onde está o segundo tratamento, encontra-se o terceiro que irá compor o bloco.

Como ilustração, seja $n = 5$, e o esquema de associação:

*	a	b	c	d
a	*	e	f	g
b	e	*	h	i
c	f	h	*	j
d	g	i	j	*

Seguindo-se o método, encontra-se o $PBIB_{(2)}$ com os parâmetros $v = 10$, $b = 10$, $r = 3$, $k = 3$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e o plano experimental:

Blocos									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	a	b	b	c	e	e	f	h
b	c	d	c	d	d	f	g	g	i
e	f	g	h	i	j	h	i	j	j

O autor afirma que esse método fornece um $PBIB_{(2)}$ com os parâmetros $v = n(n-1)/2$, $b = n(n-1)(n-2)/6$, $k = 3$, $r = n-2$.

2.2.3.3.3. Quadrado Latino (L_i)

RAMOS (1975) apresenta uma classe trivial de delineamentos em $PBIB_{(2)}$ no esquema quadrado latino, onde se tomam para blocos as linhas e colunas do esquema de associação e, em cada um dos $(i-2)$ quadrados latinos mutuamente ortogonais, tomam-se os tratamentos correspondentes ao mesmo símbolo em quadrados latinos superpostos ao esquema original.

Como ilustração, seja $i = 4$, ou seja, o esquema L_4 , e os arranjos:

esquema quadrado	(L_1)				(L_2)			
a b c d	1	2	3	4	1	2	3	4
e f g h	2	1	4	3	3	4	1	2
i j k l	3	4	1	2	4	3	2	1
m n o p	4	3	2	1	2	1	4	3

Pode-se construir um $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 16$, $r = 4$, $k = 4$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e com plano experimental formado pelos blocos dados nos seguintes passos:

i) Linhas e colunas do esquema quadrado:

Blocos							
1	2	3	4	5	6	7	8
a	e	i	m	a	b	c	d
b	f	j	n	e	f	g	h
c	g	k	o	i	j	k	l
d	h	l	p	m	n	o	p

ii) Tratamentos que, no esquema quadrado, correspondem ao mesmo símbolo em (L_1):

Blocos			
9	10	11	12
a	b	c	d
f	e	h	g
k	l	i	j
p	o	n	m

iii) Tratamentos que, no esquema quadrado, correspondem ao mesmo símbolo em (L_2):

Blocos			
13	14	15	16
a	b	c	d
g	h	e	f
l	k	j	i
n	m	p	o

Outros métodos de obtenção de $PBIB_{(2)}$ do tipo L_1 podem ser entendidos pelos seguintes teoremas:

TEOREMA 7 [RAGHAVARAO (1971)]:

Um $PBIB_{(2)}$ do tipo L_2 com parâmetros $v = s^2$, $b = s(s-1)$, $r = s-1$, $k = s$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ sempre existe se s é primo ou potência de primo.

Para se obter esse delineamento, será apresentado um exemplo, considerando-se $s = 3$. O esquema de associação é:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Existem 2 quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem 3, que são:

(L_1)			(L_2)		
1	2	3	1	2	3
2	3	1	3	1	2
3	1	2	2	3	1

Superpondo-se (L_1) no esquema quadrado, encontram-se os blocos formados pelos tratamentos correspondentes ao mesmo símbolo:

Blocos		
1	2	3
a	b	c
f	d	e
h	i	g

Superpondo-se (L_2) no esquema quadrado, encontram-se os demais blocos formados pelos tratamentos correspondentes ao mesmo símbolo:

Blocos		
4	5	6
a	b	c
e	f	d
i	g	h

Esse $PBIB_{(2)}$ tem parâmetros $v = 9$, $b = 6$,
 $r = 2$, $k = 3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

TEOREMA 8 [RAGHAVARAO (1971)]:

O autor desse teorema é Clatworthy (1967).
 Para qualquer valor de s , pode-se sempre construir um $PBIB_{(2)}$
 do tipo L_2 com parâmetros $v = b = s^2$, $r = k = 2s-1$, $\lambda_1 = s$,
 $\lambda_2 = 2$.

Esse tipo de delineamento é obtido escrevendo-se qualquer tratamento do esquema de associação com seus primeiros associados.

Como ilustração, seja $s = 3$, logo o $PBIB_{(2)}$ terá os parâmetros $v = b = 9$, $r = k = 5$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. O esquema de associação é:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

O bloco 1 será formado pelo tratamento a e seus primeiros associados, que são os tratamentos b, c, d, g. Com raciocínio análogo formam-se os demais blocos do planejamento experimental, que é:

Blocos								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	b	c	d	e	f	g	h	i
b	a	a	e	d	d	h	g	g
c	c	b	f	f	e	i	i	h
d	e	f	a	b	c	a	b	c
g	h	i	g	h	i	d	e	f

TEOREMA 9 [RAGHAVARAO (1971)]:

O autor desse teorema é Clatworthy (1967). Para qualquer s , pode-se sempre construir um $PBIB_{(2)}$ no esquema L_2 com parâmetros $v = s^2$, $b = s(s-1)$, $r = 2(s-1)$, $k = 2s$, $\lambda_1 = s$, $\lambda_2 = 2$.

Esse tipo de $PBIB_{(2)}$ é obtido combinando-se todos os possíveis pares de linhas e todos os possíveis pares de colunas do esquema de associação.

Como ilustração, seja $s = 3$, logo o $PBIB_{(2)}$ terá os parâmetros $v = 9$, $b = 6$, $r = 4$, $k = 6$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. O esquema de associação é:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Seguindo-se o processo, encontra-se o pla
no experimental:

Blocos					
1	2	3	4	5	6
a	a	d	a	a	b
b	b	e	d	d	e
c	c	f	g	g	h
d	g	g	b	c	c
e	h	h	e	f	f
f	i	i	h	i	i

Segundo JOHN (1971), se forem usadas i res
trições ortogonais, encontra-se um $PBIB_{(2)}$ do tipo L_i com
parâmetros $b = is(s-1)/2$, $r = i(s-1)$, $k = 2s$, $\lambda_1 = s+i-2$,
 $\lambda_2 = i$.

TEOREMA 10 [RAGHAVARAO (1971)]:

Se existe um BIB com parâmetros $v^* = s$, b^* ,
 r^* , k^* , λ^* , então pode-se sempre construir um $PBIB_{(2)}$ do ti
po L_2 com parâmetros $v = s^2$, $b = 2sb^*$, $r = 2r^*$, $k = k^*$,
 $\lambda_1 = \lambda^*$, $\lambda_2 = 0$.

Para se obter esse $PBIB_{(2)}$ deve-se obedecer
aos seguintes passos:

i) Numa linha do esquema de associação quadrado latino existem s tratamentos que são primeiros associados; constrói-se um delineamento em BIB com esses tratamentos.

ii) Procede-se de mesma forma para as demais linhas e colunas do esquema, preservando-se os mesmos parâmetros para os delineamentos em BIB formados.

Como ilustração, seja $s = 3$, logo o esquema de associação é:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Tomando-se os tratamentos a, b, c, da primeira linha, pode-se formar o BIB com parâmetros $v^* = 3$, $b^* = 3$, $r^* = 2$, $k^* = 2$, $\lambda^* = 1$, e com o plano experimental:

Blocos		
1	2	3
a	a	b
b	c	c

Procedendo-se de modo semelhante para todas as linhas e todas as colunas, encontra-se um $PBIB_{(2)}$ com parâmetros $v = 9$, $b = 18$, $r = 4$, $k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e os demais blocos para formar o plano experimental:

Blocos														
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d	d	e	g	g	h	a	a	d	b	b	e	c	c	f
e	f	f	h	i	i	d	g	g	e	h	h	f	i	i

JOHN (1971) afirma que, se esse procedimento for repetido para cada um dos $(i-2)$ quadrados latinos mutuamente ortogonais, considerando-se apenas as linhas, encontra-se um delineamento em $PBIB_{(2)}$ do tipo L_i com parâmetros $v = s^2$, $b = isb^*$, $r = ir^*$, k , λ_1 , $\lambda_2 = 0$, $(i > 2)$.

O autor afirma ainda que, se o BIB é não simétrico onde $b = \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$, o $PBIB_{(2)}$ terá os parâmetros $b = is \begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \begin{pmatrix} s-2 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 0$.

TEOREMA 11 [RAGHAVARAO (1971)]:

Se existe um BIB com parâmetros $v^* = s$, b^* , r^* , k^* , λ^* , então pode-se sempre construir um $PBIB_{(2)}$ do tipo L_2 com parâmetros $v = s^2$, $b = 2b^*$, $r = 2r^*$, $k = sk^*$, $\lambda_1 = r^* + \lambda^*$, $\lambda_2 = 2\lambda^*$.

Para se obter esse delineamento, deve-se obedecer aos seguintes passos:

i) Considera-se que o i -ésimo tratamento do BIB represente a i -ésima linha do esquema de associação ($i = 1, 2, \dots, s$).

ii) Em cada bloco do plano experimental do BIB substitui-se cada tratamento pela linha correspondente do esquema de associação.

iii) Procede-se do mesmo modo considerando-se as colunas do esquema de associação.

Como ilustração, seja o BIB com os parâmetros $v^* = b^* = 3$, $k^* = r^* = 2$, $\lambda^* = 1$, e o plano experimental:

Blocos		
1	2	3
a	a	b
b	c	c

Como $s = v^* = 3$, o esquema de associação do $PBIB_{(2)}$ a ser obtido é:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

O bloco 1 no BIB é formado pelos tratamentos a, b, que corresponderão à primeira e segunda linhas do esquema, respectivamente. O bloco 1 do PBIB₍₂₎ será então formado pelos tratamentos a, b, c, d, e, f. Procedendo-se de forma semelhante para os demais blocos e considerando-se ainda as colunas do esquema, encontra-se o PBIB₍₂₎ do tipo L_2 com os parâmetros $v = 9$, $b = 6$, $r = 4$, $k = 6$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e com o plano experimental:

Blocos					
1	2	3	4	5	6
a	a	d	a	a	b
b	b	e	d	d	e
c	c	f	g	g	h
d	g	g	b	c	c
e	h	h	e	f	f
f	i	i	h	i	i

Nesse exemplo verifica-se que o plano obtido ficou semelhante ao do exemplo dado no TEOREMA 9. Essa coincidência só ocorre se $k^* = 2$.

Um outro método de obtenção de delineamentos em PBIB₍₂₎ do tipo L_1 que desperta curiosidade é, segundo KIRK (1968), o gerado pelos confundimentos de delineamentos fatoriais com 2 fatores, ou seja, fatoriais s^2 onde s representa o número de níveis por fator. Para descrever esse método, será considerado o caso de um fatorial 2^2 , considerando-se os fatores A e B e os níveis 0 e 1. Assim, têm-se os tratamentos representados pelas combinações:

$$A_0 B_0, A_0 B_1, A_1 B_0, A_1 B_1.$$

Considerando-se as repetições usando-se todos os possíveis confundimentos (A , B e $A \times B$), encontra-se o esquema:

Repetição 1		
Bloco 1	$A_0 B_0$	$A_0 B_1$
Bloco 2	$A_1 B_0$	$A_1 B_1$

A confundido com blocos

Repetição 2		
Bloco 1	$A_0 B_0$	$A_1 B_0$
Bloco 2	$A_0 B_1$	$A_1 B_1$

B confundido com blocos

Repetição 3		
Bloco 1	$A_0 B_0$	$A_1 B_1$
Bloco 2	$A_0 B_1$	$A_1 B_0$

$A \times B$ confundida com blocos

A seguinte correspondência pode ser estabelecida entre as combinações do fatorial e os tratamentos de um delineamento do tipo L_1 :

$$t_1 = A_0 B_0, \quad t_2 = A_0 B_1, \quad t_3 = A_1 B_0, \quad t_4 = A_1 B_1$$

Fazendo-se as substituições no esquema apresentado, encontra-se um delineamento do tipo L_1 com plano experimental:

Repetição 1		
Bloco 1	t_1	t_2
Bloco 2	t_3	t_4

Repetição 2		
Bloco 3	t_1	t_3
Bloco 4	t_2	t_4

Repetição 3		
Bloco 5	t_1	t_4
Bloco 6	t_2	t_3

Aqui, foi encontrado um látice balanceado, pois foram usadas $s+1$ repetições. Os parâmetros são $v = 4$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 2$, $\lambda = 1$. Se só forem utilizadas 2 repetições, tem-se um $PBIB_{(2)}$ do tipo L_2 (látice simples) com parâmetros $v = 4$, $b = 4$, $r = 2$, $k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, e nes-

se caso também pode ser considerado um $PBIB_{(2)}$ do tipo G.D., pois, como já foi citado, segundo KAGEYAMA (1982), quando $i = s = \sqrt{v}$ o delineamento será do tipo G.D.

De um modo geral, usando-se esse método e considerando-se $2 \leq i \leq s-1$, obtêm-se delineamentos em $PBIB_{(2)}$ do tipo L_i .

KEMPTHORNE (1975) sugere que, seguindo-se esse método e usando-se o confundimento de A para uma repetição e de B para outra, obtêm-se um látice simples; usando-se essas repetições e a do confundimento $A \times B$, obtêm-se um látice triplo; se forem usadas as repetições correspondentes aos confundimentos de A, B, $A \times B$, $A \times B^2$, $A \times B^{s-1}$ obtêm-se um látice balanceado.

2.2.4. Estimativa dos parâmetros

Nos delineamentos em $PBIB_{(2)}$, para a estimação dos efeitos de tratamentos ajustados para blocos, o sistema de equações normais reduzidas é apresentado por vários autores da forma como foi mostrado para os delineamentos em BIB, mudando apenas a estrutura da matriz C. O S.E.N.R. é:

$$C\tau^0 = Q$$

onde C é uma matriz singular, de dimensões $v \times v$ e "rank" $v-1$, com elementos:

$$c_{jj'} = \begin{cases} r(k-1)/k & , \text{ se } j=j' \\ -\lambda_{jj'}/k & , \text{ se } j \neq j' \end{cases}$$

onde $\lambda_{jj'}$ é o número de vezes que o tratamento j aparece junto com o tratamento j' . Aqui, eles são λ_1 e λ_2 .

Os vetores τ^0 e Ω têm as mesmas estruturas dadas para o BIB.

O maior problema na estimativa dos efeitos de tratamentos ajustados de um PBIB₍₂₎ está em apresentar regras gerais que facilitem a análise. Alguns autores preferem resolver o S.E.N.R. com o uso de uma inversa generalizada para C , dado que o "rank" dessa matriz é $v-1$. No entanto, quando o número de tratamentos é elevado, a inversão da matriz C só é viável através do uso de computadores potentes, e, além disso, não fornece fórmulas de uso prático que possibilitem uma familiarização da análise pelo pesquisador.

Para contornar esse problema, faz-se o uso de uma restrição não estimável nas soluções, de modo que se complete o "rank" da matriz C . Existem vários métodos de se encontrarem as estimativas dos efeitos de tratamentos ajustados, como os dados por BOSE e NAIR (1939), RAO (1947); BOSE e SHIMAMOTO (1952); CHAKRABARTI (1962), OGAWA (1974). A solução dada por BOSE e NAIR (1939) é:

$$\hat{t}_\alpha = \frac{k}{\Delta} [B_{22} Q_\alpha - B_{12} S_1(Q_\alpha)] ,$$

onde,

$$\Delta = A_{12} B_{22} - A_{22} B_{12} ,$$

$$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2 , \quad A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2$$

$$B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 , \quad B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{11}^2)$$

$S_1(Q_\alpha)$ é a soma dos Q 's dos tratamentos que são primeiros associados de α .

A solução dada por BOSE e SHIMAMOTO (1952)

é:

$$\hat{t}_\alpha = \frac{1}{r(k-1)} [(k - c_2) Q_\alpha + (c_1 - c_2) S_1(Q_\alpha)] ,$$

onde as constantes c_1 e c_2 são obtidas por:

$$c_1 = \frac{1}{k\theta} \left[\lambda_1 (rk-r+\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2) \right] ,$$

$$c_2 = \frac{1}{k\theta} \left[\lambda_2 (rk-r+\lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 p_{12}^1 - \lambda_1 p_{12}^2) \right] ,$$

e,

$$\theta = \frac{1}{k^2} - \left\langle \left((rk-r+\lambda_1) (rk-r+\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \left[r(k-1) (p_{12}^1 - p_{12}^2) + p_{12}^1 - p_{12}^2 \right] \right) \right\rangle$$

Nos dois casos, os autores impuseram a restrição $\sum_j t_j = 0$.

No geral, não há interesse prático na solução para blocos. Mas, segundo IEMMA (1985), ela pode ser obtida por:

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{k} (B_i - t^{(i)}) ,$$

onde, $\hat{\beta}_i$ é a estimativa do efeito do bloco i ; B_i é o total do bloco i ; $t^{(i)}$ é a soma das estimativas dos efeitos dos tratamentos que estão no bloco i .

$$\text{Aqui, } \sum_i \hat{\beta}_i \neq 0.$$

2.2.5. Estimabilidade

Já foi discutido o problema de estimabilidade nos delineamentos em blocos incompletos para o caso do BIB. Aqui, todas as afirmações continuam válidas. Mais ainda, KAGEYAMA (1982) apresenta uma regra prática para verificar se o PBIB₍₂₎ é conexo. É a seguinte: As condições necessárias e suficientes para que um PBIB₍₂₎ seja conexo são: i) se $\lambda_1 > \lambda_2$, λ_2 e p_{11}^2 não devem ser ao mesmo tempo nulos; ii) se $\lambda_1 < \lambda_2$, λ_1 e p_{22}^1 não devem ser ao mesmo tempo nulos.

Com base nessas condições, o autor apresenta todos os casos em que o PBIB₍₂₎ é conexo e, portanto, os contrastes entre médias ajustadas de tratamentos são estimáveis. São os seguintes: os delineamentos do tipo Triangular, Quadrado Latino e Cíclicos são sempre conexos; os delineamentos do tipo Grupo Divisível com $\lambda_1 < \lambda_2$ são sempre conexos, e, no caso de $\lambda_1 > \lambda_2$, serão conexos se e somente se $\lambda_2 \neq 0$.

Vale ressaltar que, nos delineamentos do tipo G.D. aqui obtidos por vários métodos, assim como os apresentados nas tabelas de BOSE, CLATWORTHY e SHRIKHANDE (1954), todos eles são conexos.

Com base na solução de BOSE e NAIR (1939), a variância de uma estimativa de contraste entre duas médias ajustadas de tratamentos vale:

$$V(\hat{m}_j - \hat{m}_{j'}) = \begin{cases} \frac{2k}{\Delta} [B_{22} + B_{12}] \sigma^2 & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados} \\ \frac{2k}{\Delta} B_{22} \sigma^2 & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

Na solução dada por BOSE e SHIMAMOTO (1952), ela vale:

$$V(\hat{m}_j - \hat{m}_{j'}) = \begin{cases} \frac{2}{r} \left(\frac{k-c_1}{k-1} \right) \sigma^2 & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados} \\ \frac{2}{r} \left(\frac{k-c_2}{k-1} \right) \sigma^2 & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

2.2.6. Análise de variância intrablocos

A mesma discussão sobre análise de variância intrablocos e com recuperação de informação interblocos feita para BIB pode ser considerada aqui. Mais ainda, as fórmulas para somas de quadrados são as mesmas que as usadas para o BIB.

Ressalta-se, no entanto, que um delineamento em PBIB₍₂₎ também pode ter seus blocos agrupados em repetições ou em grupos de repetições e, nesses casos, procede-se à análise como nos ensaios em BIB dos tipos I ou II, respectivamente. Em não ocorrendo tais situações, far-se-á a análise como nos ensaios em BIB do tipo III. A diferença está apenas nas soluções dos efeitos de tratamentos ajustados. OLIVEIRA (1985), apresenta a seguinte expressão na forma matricial para $E(Q.M.Trat_{(aj)})$: $\sigma^2 + \tau' C \tau$.

2.2.7. Eficiência do PBIB₍₂₎

Nos delineamentos em PBIB₍₂₎, considerando-se um contraste entre duas médias ajustadas de tratamentos, podem-se obter expressões para variâncias entre primei

ros e entre segundos associados. Além disso, pode-se encontrar também uma variância média, indistintamente se os tratamentos em contrastes são primeiros ou segundos associados. Considerando assim, os autores que estudaram os delineamentos em PBIB₍₂₎ apresentam três tipos de eficiência: entre primeiros associados; entre segundos associados; e eficiência média, cujas expressões são apresentadas no item 3.5.

3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1. Introdução

Consideram-se delineamentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com duas classes de associados - PBIB₍₂₎ aqueles caracterizados pelos parâmetros $v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, n_1, n_2, p_{jj'}^i$ ($i, j, j' = 1, 2$), segundo notação de BOSE e NAIR (1939), em que cada observação é representada pelo modelo linear;

$$y_{ij} = \mu + b_i + t_j + e_{ij} \quad ,$$

onde, para $i = 1, 2, \dots, b$; $j = 1, 2, \dots, v$;

y_{ij} = valor observado na parcela do bloco i , que recebeu o tratamento j ;

μ = constante inerente a todas as observações;

b_i = efeito do bloco i ;
 t_j = efeito do tratamento j ;
 e_{ij} = erro experimental, aleatório, normal e independentemente distribuído, com média zero e variância σ^2 : $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.

Será adotado o modelo de Gauss-Markov (G. M.), na forma matricial:

$$\underline{y} = X\underline{\theta} + \underline{e},$$

onde:

$\underline{y}_{n \times 1}$ = vetor dos valores observados

$$\underline{y}' = [y_{11} \dots y_{1v} \quad y_{21} \dots y_{2v} \quad \dots \quad y_{b1} \dots y_{bv}]$$

$X_{bv \times 1+b+v}$ = matriz conhecida do delineamento, de "rank" $b+v-1$.

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mu & & \beta_1 & \dots & \beta_b & & t_1 & \dots & t_v \end{array} \\ \begin{array}{r} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0(1) \end{array} \right] \end{array} \\ \begin{array}{cc} bv & 1+b+v \end{array} \end{array}$$

$\underline{\theta}_{1+b+v \times 1}$ = vetor de parâmetros desconhecidos

$$\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_b \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_v \end{bmatrix}$$

$n\tilde{e}_1$ = vetor dos erros, tal que $\tilde{e} \sim N(\phi, I\sigma^2)$.

3.2. Sistema de Equações Normais (S.E.N.)

Seguindo o método dos mínimos quadrados, chega-se ao S.E.N.:

$$X'X\tilde{\theta}^0 = X'y$$

Como o único interesse é estimar os efeitos de tratamentos, pois os blocos servem apenas como restrição na casualização, será adotada a técnica das equações normais reduzidas, seguindo o critério utilizado por IEMMA (1985).

Uma vez que, na matriz X , a coluna da média é dependente das demais, então, aqui ela será suprimida. Fazendo-se a partição de X , que agora tem dimensões n por $b+v$, em:

$$X = [X_1 \quad X_2], \quad \text{onde}$$

$n[X_1]_b$ é a matriz dos coeficientes dos blocos.

$n[X_2]_v$ é a matriz dos coeficientes dos tratamentos.

Considerando-se assim, o modelo fica parti
do em:

$$\underline{y} = X_1 \underline{\beta} + X_2 \underline{\tau} + \underline{e}$$

Substituindo-se a nova matriz X no S.E.N.,
tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}^0 \\ \underline{\tau}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} \underline{y}$$

$$X_1' X_1 \underline{\beta}^0 + X_1' X_2 \underline{\tau}^0 = X_1' \underline{y} \quad [3.2.a]$$

$$X_2' X_1 \underline{\beta}^0 + X_2' X_2 \underline{\tau}^0 = X_2' \underline{y} \quad [3.2.b]$$

As matrizes desse sistema são nomeadas de:

$X_1' X_1 = K$ é a matriz diagonal dos "tamanhos" dos blocos.

$X_2' X_2 = R$ é a matriz diagonal das repetições dos tratamentos.

$X_1' X_2 = N'$ é a matriz de incidência dos tratamentos nos blocos, isto é,

$N' = \{n_{ij}\}$, onde:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o tratamento } j \text{ está no bloco } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pré-multiplicando-se [3.2.a] por $X_2'X_1^{'+}$, onde $X_1^{'+}$ é a matriz inversa de Moore-Penrose de X_1' , vem:

$$X_2'X_1^{'+}X_1'X_1\beta^0 + X_2'X_1^{'+}X_1'X_2\tau^0 = X_2'X_1^{'+}X_1'y$$

$$\therefore X_2'(X_1X_1^+)'X_1\beta^0 + X_2'(X_1X_1^+)'X_2\tau^0 = X_2'(X_1X_1^+)'y$$

Mas $X_1X_1^+ = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = P_1$, que é o projetor ortogonal de y nas colunas de X_1 , é simétrico e idempotente, e $X_1X_1^+X_1 = X_1$. Assim, obtém-se:

$$X_2'X_1\beta^0 + X_2'P_1X_2\tau^0 = X_2'P_1y \quad [3.2.c]$$

Subtraindo-se [3.2.c] de [3.2.b], encontra-se:

$$X_2'(I-P_1)X_2\tau^0 = X_2'(I-P_1)y \quad [3.2.d]$$

Este é o sistema de equações normais reduzidas para efeitos de tratamentos, eliminados os efeitos de blocos e da média (S.E.N.R.).

Fazendo-se:

$$X_2'(I-P_1)X_2 = C \quad \text{e} \quad X_2'(I-P_1)y = Q,$$

o S.E.N.R. fica da forma $C\tau^0 = Q$, que é a notação usual da maioria dos autores.

Desenvolvendo-se C , encontra-se:

$$\begin{aligned}
 C &= X_2'(I - P_1)X_2 = X_2'X_2 - X_2'P_1X_2 \\
 &= R - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 \\
 &= R - N K^{-1} N' \\
 &= R - \frac{1}{k} NN'
 \end{aligned}$$

Mas, NN' é sempre da forma:

$$NN' = \begin{bmatrix} r & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1v} \\ \lambda_{21} & r & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2v} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & r & \dots & \lambda_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{v1} & \lambda_{v2} & \lambda_{v3} & \dots & r \end{bmatrix}$$

Assim, $C = \{c_{jj'}\}$ onde:

$$c_{jj'} = \begin{cases} r(k-1)/k, & \text{se } j=j' \\ -\lambda_{jj'}/k, & \text{se } j \neq j' \end{cases}$$

e $\lambda_{jj'}$ é o número de vezes que os tratamentos j e j' aparecem juntos em um mesmo bloco. Aqui eles são λ_1 e λ_2 , para primeiros e segundos associados, respectivamente.

Desenvolvendo-se $\underline{Q}$, encontra-se:

$$\begin{aligned}\underline{Q} &= \underline{X}'_2 (\underline{I} - \underline{P}_1) \underline{y} = \underline{X}'_2 \underline{y} - \underline{X}'_2 \underline{P}_1 \underline{y} \\ &= \underline{X}'_2 \underline{y} - \underline{X}'_2 \underline{X}_1 (\underline{X}'_1 \underline{X}_1)^{-1} \underline{X}'_1 \underline{y} \\ &= \underline{X}'_2 \underline{y} - N K^{-1} \underline{X}'_1 \underline{y} \\ &= \underline{X}'_2 \underline{y} - \frac{1}{k} N \underline{X}'_1 \underline{y}\end{aligned}$$

Mas,

$$\underline{X}'_2 \underline{y} = \underline{T} = \text{vetor dos totais dos tratamentos}$$

$$\underline{T}' = [\underline{T}_1 \quad \underline{T}_2 \quad \dots \quad \underline{T}_v]$$

$$\underline{X}'_1 \underline{y} = \underline{B} = \text{vetor dos totais dos blocos}$$

$$\underline{B}' = [\underline{B}_1 \quad \underline{B}_2 \quad \dots \quad \underline{B}_b]$$

Efetuada-se o produto $\underline{NB}$, verifica-se que ele fornece:

$$\underline{NB} = \underline{B}^* = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ \dots \\ B^{(j)} \end{bmatrix},$$

em que $B^{(j)}$ é a soma dos totais das observações dos blocos que contêm o tratamento j .

Assim, encontra-se:

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{T}} - \frac{1}{k} \underline{\underline{B}}^*$$

Portanto, o vetor $\underline{\underline{Q}}$ tem os elementos Q_j ,
onde:

$$Q_j = T_j - \frac{1}{k} B^{(j)}$$

que são designados de totais de tratamentos ajustados para totais de blocos.

3.3. Estimativa dos Efeitos de Tratamentos Ajustados para Blocos

Substituindo-se os elementos correspondentes nas matrizes do S.E.N.R. $C_{\tau}^0 = \underline{\underline{Q}}$, encontra-se:

$$\begin{aligned} r(k-1)t_1^0 - \lambda_{12}t_2^0 - \lambda_{13}t_3^0 - \dots - \lambda_{1v}t_v^0 &= k Q_1 \\ - \lambda_{21}t_1^0 + r(k-1)t_2^0 - \lambda_{23}t_3^0 - \dots - \lambda_{2v}t_v^0 &= k Q_2 \\ - \lambda_{31}t_1^0 - \lambda_{32}t_2^0 + r(k-1)t_3^0 - \dots - \lambda_{3v}t_v^0 &= k Q_3 \\ \dots &\dots \\ - \lambda_{\alpha 1}t_1^0 - \lambda_{\alpha 2}t_2^0 - \lambda_{\alpha 3}t_3^0 - \dots + r(k-1)t_{\alpha}^0 - \dots - \lambda_{\alpha v}t_v^0 &= k Q_{\alpha} \\ \dots &\dots \\ - \lambda_{v1}t_1^0 - \lambda_{v2}t_2^0 - \lambda_{v3}t_3^0 - \dots + r(k-1)t_v^0 &= k Q_v \end{aligned}$$

Fixando-se o tratamento α , então sejam $S_1(t_\alpha^0)$ e $S_2(t_\alpha^0)$ as somas dos efeitos dos tratamentos que são primeiros e segundos associados de α , respectivamente. Sejam também $S_1(Q_\alpha)$ e $S_2(Q_\alpha)$ as somas dos Q 's dos tratamentos que são primeiros e segundos associados de α , respectivamente.

Dessa forma, chega-se à seguinte equação:

$$r(k-1)t_\alpha^0 - \lambda_1 S_1(t_\alpha^0) - \lambda_2 S_2(t_\alpha^0) = k Q_\alpha \quad [3.3.a]$$

Somando-se as n_1 equações correspondentes aos tratamentos que são primeiros associados de α , tem-se:

$$S_1[r(k-1)t_\alpha^0 - \lambda_1 S_1(t_\alpha^0) - \lambda_2 S_2(t_\alpha^0)] = S_1[k Q_\alpha]$$

$$\therefore r(k-1)S_1(t_\alpha^0) - \lambda_1 S_1[S_1(t_\alpha^0)] - \lambda_2 S_1[S_2(t_\alpha^0)] = k S_1(Q_\alpha) \quad [3.3.b]$$

Sabe-se por Chakrabarti, citado por OLIVEIRA (1985) que, se um conjunto de tratamentos obedece à estrutura de um delineamento em PBIB₍₂₎, as seguintes igualdades se verificam:

$$S_j[S_i(t_\alpha^0)] = \begin{cases} p_{j,i}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{j,i}^2 S_2(t_\alpha^0), & \text{se } j' \neq i \\ n_i t_\alpha^0 + p_{ii}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{ii}^2 S_2(t_\alpha^0), & \text{se } j' = i \end{cases} \quad [3.3.c]$$

onde os parâmetros n_i e $p_{j,i}^j$ ($i,j,j' = 1, 2$) são definidos conforme BOSE e NAIR (1939).

Usando-se [3.3.c] em [3.3.b], chega-se a:

$$\begin{aligned} r(k-1)S_1(t_\alpha^0) - \lambda_1 [n_1 t_\alpha^0 + p_{11}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{11}^2 S_2(t_\alpha^0)] - \\ - \lambda_2 [p_{12}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{12}^2 S_2(t_\alpha^0)] = k S_1(Q_\alpha) \end{aligned} \quad [3.3.d]$$

Somando-se as n_2 equações correspondentes aos tratamentos que são segundos associados de α , tem-se:

$$\begin{aligned} S_2[r(k-1)t_\alpha^0 - \lambda_1 S_1(t_\alpha^0) - \lambda_2 S_2(t_\alpha^0)] &= S_2[k Q_\alpha] \\ \therefore r(k-1)S_2(t_\alpha^0) - \lambda_1 S_2[S_1(t_\alpha^0)] - \lambda_2 S_2[S_2(t_\alpha^0)] &= \\ &= k S_2[Q_\alpha] \end{aligned} \quad [3.3.e]$$

Usando-se [3.3.c] em [3.3.e], encontra-se:

$$\begin{aligned} r(k-1)S_2(t_\alpha^0) - \lambda_1 [p_{12}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{12}^2 S_2(t_\alpha^0)] - \\ - \lambda_2 [n_2 t_\alpha^0 + p_{22}^1 S_1(t_\alpha^0) + p_{22}^2 S_2(t_\alpha^0)] = k S_2(Q_\alpha) \end{aligned} \quad [3.3.f]$$

Existem vários métodos para continuar a análise. Aqui será adotada a solução de BOSE e NAIR (1939).

Para se encontrar a estimativa dos efeitos de tratamentos ajustados, será utilizado o sistema de equações formado por [3.3.a], [3.3.d] e [3.3.f]. Existem duas alternativas para resolver o sistema: usando as equações [3.3.a] e [3.3.d] com o fim de se eliminar $S_2(t_\alpha^0)$, que se torna mais conveniente para os cálculos da análise quando $n_1 < n_2$; usando as equações [3.3.a] e [3.3.f] com o fim de se eliminar $S_1(t_\alpha^0)$, que é mais conveniente quando $n_2 < n_1$.

Nos dois casos, será imposta a restrição:

$$\sum_j \hat{t}_j = [\hat{t}_\alpha + S_1(\hat{t}_\alpha) + S_2(\hat{t}_\alpha)] = 0$$

3.3.1. Quando $n_1 < n_2$

Impondo a restrição $\sum_j \hat{t}_j = 0$ na equação [3.3.a], tem-se:

$$r(k-1)\hat{t}_\alpha - \lambda_1 S_1(\hat{t}_\alpha) - \lambda_2 [\hat{t}_\alpha + S_1(\hat{t}_\alpha) + S_2(\hat{t}_\alpha)] + \\ + \lambda_2 \hat{t}_\alpha + \lambda_2 S_1(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha$$

$$\therefore [r(k-1) + \lambda_2] \hat{t}_\alpha + (\lambda_2 - \lambda_1) S_1(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha \quad [3.3.1.a]$$

A equação [3.3.d] pode também ser apresentada na forma:

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1 n_1 \bar{t}_\alpha + [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1] S_1(\bar{t}_\alpha) + \\
& + [-\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2] S_2(\bar{t}_\alpha) = k S_1(Q_\alpha)
\end{aligned}$$

Impondo a restrição $\sum_j \bar{t}_j = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
& -\lambda_1 n_1 \bar{t}_\alpha + [r(k-1) - \lambda_1 p_{11}^1 - \lambda_2 p_{12}^1] S_1(\bar{t}_\alpha) + \\
& + [-\lambda_1 p_{11}^2 - \lambda_2 p_{12}^2] [\bar{t}_\alpha + S_1(\bar{t}_\alpha) + S_2(\bar{t}_\alpha)] + \\
& + [\lambda_1 p_{11}^2 + \lambda_2 p_{12}^2] [\bar{t}_\alpha + S_1(\bar{t}_\alpha)] = k S_1(Q_\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore & [\lambda_1 (p_{11}^2 - n_1) + \lambda_2 p_{12}^2] \bar{t}_\alpha + \\
& + [r(k-1) + \lambda_1 (p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2 (p_{12}^2 - p_{12}^1)] S_1(\bar{t}_\alpha) = k S_1(Q_\alpha)
\end{aligned}$$

Usando-se a relação $p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$, o coeficiente de $\bar{t}_\alpha$ fica:

$$\lambda_1 (-p_{12}^2) + \lambda_2 p_{12}^2 = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2$$

Usando-se as relações $p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1$ e $p_{11}^1 + p_{12}^1 = n_1 - 1$, o coeficiente de $S_1(\bar{t}_\alpha)$ fica:

$$\begin{aligned}
& r(k-1) + \lambda_1 (p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2 [n_1 - p_{11}^2 - (n_1 - 1 - p_{11}^1)] \\
& = r(k-1) + \lambda_1 (p_{11}^2 - p_{11}^1) + \lambda_2 + \lambda_2 (p_{11}^1 - p_{11}^2) \\
& = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{11}^2)
\end{aligned}$$

Encontra-se, assim:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 \hat{t}_\alpha + [r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{11}^2)] S_1(\hat{t}_\alpha) \\
 = k S_1(Q_\alpha) \quad [3.3.1.b]
 \end{aligned}$$

Com [3.3.1.a] e [3.3.1.b] forma-se um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$[r(k-1) + \lambda_2] \hat{t}_\alpha + (\lambda_2 - \lambda_1) S_1(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 \hat{t}_\alpha + [r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{12}^2)] S_1(Q_\alpha) \\
 = k S_1(Q_\alpha)
 \end{aligned}$$

Fazendo-se:

$$r(k-1) + \lambda_2 = A_{12}, \quad (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 = A_{22}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) = B_{12}, \quad r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{12}^2) = B_{22}$$

Fica, então:

$$A_{12} \hat{t}_\alpha + B_{12} S_1(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha$$

$$A_{22} \hat{t}_\alpha + B_{22} S_1(\hat{t}_\alpha) = k S_1(Q_\alpha)$$

Dessa forma, a solução é:

$$\hat{t}_\alpha = \frac{k}{\Delta_1} [B_{22} Q_\alpha - B_{12} S_1(Q_\alpha)] ,$$

onde

$$\Delta_1 = A_{12} B_{22} - A_{22} B_{12} .$$

Pela solução encontrada, pode-se fazer uma generalização na forma matricial:

$$\hat{\underline{t}} = M^{-1} \underline{Q} ,$$

onde $M^{-1} = \{m_{jj'}^*\}$, em que:

$$m_{jj'}^* = \begin{cases} \frac{k}{\Delta_1} B_{22} , & \text{se } j=j' \\ -\frac{k}{\Delta_1} B_{12} , & \text{se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados} \\ 0 , & \text{se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

3.3.2. Quando $n_2 < n_1$

Utilizando-se o mesmo critério adotado pa
ra $n_1 < n_2$, chega-se ao sistema:

$$[r(k-1) + \lambda_1] \hat{t}_\alpha + (\lambda_1 - \lambda_2) S_2(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 \hat{t}_\alpha + [r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(p_{22}^2 - p_{22}^1)] S_2(\hat{t}_\alpha) \\ = k S_2(Q_\alpha) \end{aligned}$$

Fazendo-se:

$$r(k-1) + \lambda_1 = A_{11}, \quad (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 = A_{21}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = B_{11}, \quad r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(p_{22}^2 - p_{22}^1) = B_{21}$$

Fica, então:

$$A_{11} \hat{t}_\alpha + B_{11} S_2(\hat{t}_\alpha) = k Q_\alpha$$

$$A_{21} \hat{t}_\alpha + B_{21} S_2(\hat{t}_\alpha) = k S_2(Q_\alpha)$$

Dessa forma, a solução é:

$$\hat{t}_\alpha = \frac{k}{\Delta_2} [B_{21} Q_\alpha - B_{11} S_2(Q_\alpha)],$$

onde

$$\Delta_2 = A_{11} B_{21} - A_{21} B_{11}.$$

Uma generalização na forma matricial para essa solução é:

$$\hat{\tau} = M^{-1}Q$$

onde $M^{-1} = \{m_{jj'}^*\}$, em que:

$$m_{jj'}^* = \begin{cases} \frac{k}{\Delta_2} B_{21} & , \text{ se } j=j' \\ -\frac{k}{\Delta_2} B_{11} & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados} \\ 0 & , \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados} \end{cases}$$

Como já foi salientado, o maior problema com respeito à análise dos ensaios em PBIB₍₂₎ é quanto à generalização de fórmulas para a estimação dos efeitos de tratamentos ajustados. Afora isso, a análise intrablocos é feita de forma semelhante à dos demais blocos incompletos. Por conseguinte, aqueles que tiverem interesse nas deduções de: variância de contraste entre médias de tratamentos ajustados, somas de quadrados, esperanças das somas de quadrados, e distribuição e independência das formas quadráticas, podem encontrá-las em JOHN (1971); OGAWA (1974); IEMMA (1985); OLIVEIRA (1985), dentre outros autores.

3.4. Variância da Estimativa de Contrastes entre Médias Ajustadas de Tratamentos.

Dada a estimativa do contraste $\hat{Y} = \underline{l}' \hat{\underline{t}}$,
onde:

$$\underline{l}' = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_v] ,$$

ou ainda $\hat{Y} = l_1 \hat{t}_1 + l_2 \hat{t}_2 + \dots + l_v \hat{t}_v$, a variância de $\hat{Y}$ é dada por:

$$V(\hat{Y}) = \underline{l}' M^{-1} \underline{l} \sigma^2 = \left[\sum_{j=j'} l_j^2 m_{jj'}^* + \sum_{j \neq j'} l_j l_{j'} m_{jj'}^* \right] \sigma^2$$

Assim, com base nos dois casos encontrados anteriormente, podem-se estabelecer fórmulas para a variância de $\hat{Y}$, como se segue:

3.4.1. Quando $n_1 < n_2$

Os contrastes entre duas médias ajustadas de tratamentos são de maior interesse, assim para a estimativa de contraste:

$$\hat{m}_j - \hat{m}_{j'} = \hat{t}_j - \hat{t}_{j'} ,$$

$$V_1(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{2k}{\Delta_1} [B_{22} + B_{12}] \sigma^2, \quad \text{se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados}$$

$$V_2(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{2k}{\Delta_1} B_{22} \sigma^2, \quad \text{se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados}$$

Quando a análise do trabalho não exigir maior precisão, pode-se também encontrar uma variância média, indistintamente se os tratamentos em contrastes são primeiros ou segundos associados. Para qualquer tratamento j existem $v-1$ estimativas de contrastes do tipo $\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}$ ($j \neq j' = 1, 2, \dots, v$). Dessas, n_1 são estimadas com V_1 e n_2 são estimadas com V_2 . Assim,

$$\bar{V}(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{n_1 V_1 + n_2 V_2}{v - 1} = \frac{2k}{\Delta_1} \left[\frac{(v-1)B_{22} + n_1 B_{12}}{v - 1} \right] \sigma^2$$

De um modo geral, considerando-se a estimativa de contraste: $\hat{Y} = l_1 \bar{t}_1 + \dots + l_v \bar{t}_v$

$$V(\hat{Y}) = \frac{k}{\Delta_1} \left[B_{22} \sum_{j=j'} l_j^2 - 2B_{12} \sum_{j \neq j'} l_j l_{j'} \right] \sigma^2,$$

onde os tratamentos j e j' são primeiros associados.

3.4.2. Quando $n_2 < n_1$

$$V(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{2k}{\Delta_2} B_{21} \sigma^2, \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são primeiros associados.}$$

$$V_2(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{2k}{\Delta_2} [B_{21} + B_{11}] \sigma^2, \text{ se } j \text{ e } j' \text{ são segundos associados}$$

$$\bar{V}(\bar{t}_j - \bar{t}_{j'}) = \frac{2k}{\Delta_2} \left[\frac{(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}}{v-1} \right] \sigma^2$$

Para a estimativa de contraste: $\hat{Y} = \ell_1 \bar{t}_1 + \dots + \ell_v \bar{t}_v$

$$V(\hat{Y}) = \frac{k}{\Delta_2} \left[B_{21} \sum_{j=j'} \ell_j^2 - 2B_{11} \sum_{j \neq j'} \ell_j \ell_{j'} \right] \sigma^2,$$

onde os tratamentos j e j' são segundos associados.

3.5. Eficiência do PBIB₍₂₎

A eficiência de um delineamento em PBIB₍₂₎ pode ser determinada em relação aos blocos completos com v tratamentos repetidos r vezes. Nesses, a variância do contraste entre duas médias é $2\sigma^2/r$.

Estabelecendo-se a razão entre essa variância e a variância entre duas médias de tratamentos ajustados de um PBIB₍₂₎ encontra-se a eficiência. Nesse caso, é possível ter as eficiências relativas aos primeiros associados (E_1), aos segundos associados (E_2), e a eficiência média ($\bar{E}$), que são apresentadas a seguir:

	$n_1 < n_2$		$n_2 < n_1$
E_1	$\frac{\Delta_1}{\text{rk}[B_{22} + B_{12}]}$	ou	$\frac{\Delta_2}{\text{rk } B_{21}}$
E_2	$\frac{\Delta_1}{\text{rk } B_{22}}$	ou	$\frac{\Delta_2}{\text{rk}[B_{21} + B_{11}]}$
$\bar{E}$	$\frac{(v-1)\Delta_1}{\text{rk}[(v-1)B_{22} + n_1 B_{12}]}$	ou	$\frac{(v-1)\Delta_2}{\text{rk}[(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}]}$

3.6. Análise de Variância Intrablocos

3.6.1. Somas de quadrados

Sabe-se que:

$$S.Q.Res. = \underline{\underline{y}}'\underline{\underline{y}} - \underline{\underline{\hat{t}}}'\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{y}} = S.Q.Total - S.Q.Parâmetros$$

Mas,

$$S.Q.Parâmetros = \frac{1}{k} \underline{\underline{B}}'\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{\hat{t}}}'\underline{\underline{Q}},$$

onde $\frac{1}{k} \mathbf{B}'\mathbf{B}$ é a S.Q.Blocos contendo a S.Q.Média (Correção),
e $\hat{\tau}'\mathbf{Q}$ é a S.Q.Tratamentos ajustada para efeitos de blocos.

Assim,

$$\text{Correção} = C_0 = \frac{1}{bk} \left(\sum_{ij} y_{ij} \right)^2$$

$$\text{S.Q.Total} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - C_0 = \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_0$$

$$\text{S.Q.Blocos} = \frac{1}{k} \sum_i B_i^2 - C_0$$

$$\text{S.Q.Trat}_{(aj)} = \hat{\tau}'\mathbf{Q} = \sum_j \hat{\tau}_j Q_j$$

3.6.2. Quadro da análise de variância

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	E(Q.M.)
Blocos	b-1	S.Q.B.	$\frac{\text{S.Q.B.}}{b-1}$	
Tratamentos _(aj)	v-1	S.Q.Trat _(aj)	$\frac{\text{S.Q.Trat}_{(aj)}}{v-1}$	$\sigma^2 + \tau' C \tau$
Resíduo	bk-b-v+1	S.Q.Res.	$\frac{\text{S.Q.Res.}}{bk-b-v+1}$	σ^2
Total	bk-1			

Admitindo-se satisfeitas as condições quanto à distribuição e independência das formas quadráticas, e ainda que os erros sejam não correlacionados, podem-se testar as hipóteses:

$$H_0 : t_1 = t_2 = \dots = t_v = 0$$

$$H_1 : \text{não } H_0$$

$$F_T = \frac{Q.M.Trat(a_j)}{Q.M.Res.} \sim F[(v-1); (bk-b-v+1)]$$

sob H_0 .

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b$$

$$H_1 : \text{Não } H_0$$

$$F_B = \frac{Q.M.Blocos}{Q.M.Res.} \sim F[(b-1); (bk-b-v+1)]$$

sob H_0 .

4. UM EXEMPLO ILUSTRATIVO

Os dados que se seguem referem-se a valores fictícios de t/ha de colmos de cana-de-açúcar, onde os tratamentos eram variedades da cultura em competição.

Blocos	TRATAMENTOS								Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	80,2	91,4			87,1	85,0			343,7
2			96,6	69,0			90,5	71,7	327,8
3	84,0		89,9		89,2		94,4		357,5
4		94,1		60,0		80,0		65,2	299,3
5	88,0			63,2	83,4			64,8	299,4
6		90,0	87,0			79,0	95,0		351,0
Total	252,2	275,5	273,5	192,2	259,7	244,0	279,9	201,7	1978,7

O delineamento usado é, então, um PBIB₍₂₎ do tipo Grupo Divisível Singular com $m = 4$ grupos e $n = 2$ tratamentos por grupo e com esquema de associação

1	5
2	6
3	7
4	8

Assim, dois tratamentos são primeiros associados se eles ocorrem em um mesmo grupo (linha), caso contrário, são segundos associados.

Nesse esquema, os parâmetros são:

$$v = 8, b = 6, r = 3, k = 4, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1,$$

$$n_1 = n-1 = 2-1 = 1, n_2 = n(m-1) = 2(4-1) = 6,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A análise de variância intrablocos pode ser desenvolvida com o auxílio da seguinte tabela:

Trat.	T_j	$B^{(j)}$	O_j	Primeiros Associados	$S_1(O_j)$	Segundos Associados	$S_2(O_j)$	t_j	$\hat{m}_j$
1	252,2	1000,6	2,050	5	9,550	2,3,4,6,7,8	-11,600	1,6500	84,0
2	275,5	994,0	27,000	6	-4,500	1,3,4,5,7,8	-22,500	10,8750	93,3
3	273,5	1036,3	14,425	7	20,825	1,2,4,5,6,8	-35,250	7,7458	90,1
4	192,2	926,5	-39,425	8	-29,925	1,2,3,5,6,7	69,350	-18,9208	63,5
5	259,7	1000,6	9,550	1	2,050	2,3,4,6,7,8	-11,600	4,1500	86,5
6	244,0	994,0	-4,500	2	27,000	1,3,4,5,7,8	-22,500	0,3750	82,8
7	279,9	1036,3	20,825	3	14,425	1,2,4,5,6,8	-35,250	9,8792	92,3
8	201,7	926,5	-29,925	4	-39,425	1,2,3,5,6,7	69,350	-15,7542	66,6
Total	1978,7	7914,8	0,000		0,000		0,000	0,0000	
	= G	= kG							

Os valores t_j foram encontrados de acordo com o seguinte desenvolvimento:

$$A_{12} = r(k-1) + \lambda_2 = 10$$

$$A_{22} = (\lambda_2 - \lambda_1) p_{12}^2 = -2$$

$$B_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 = -2$$

$$B_{22} = r(k-1) + \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1) (p_{11}^1 - p_{11}^2) = 10$$

$$\Delta_1 = A_{12} B_{22} - A_{22} B_{12} = 96$$

$$t_\alpha = \frac{K}{\Delta_1} [B_{22} Q_\alpha - B_{12} S_1(Q_\alpha)] = \frac{5}{12} Q_\alpha + \frac{1}{12} S_1(Q_\alpha)$$

ou

$$A_{11} = r(k-1) + \lambda_1 = 12$$

$$A_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2) p_{12}^1 = 0$$

$$B_{11} = (\lambda_1 - \lambda_2) = 2$$

$$B_{21} = r(k-1) + \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) (p_{22}^2 - p_{22}^1) = 8$$

$$\Delta_2 = A_{11} B_{21} - A_{21} B_{11} = 96$$

$$t_\alpha = \frac{K}{\Delta_2} [B_{21} Q_\alpha - B_{11} S_2(Q_\alpha)] = \frac{1}{3} Q_\alpha - \frac{1}{12} S_2(Q_\alpha)$$

"cheque"

Com qualquer uma das duas fórmulas encontram-se os valores de t_j . Como $n_1 < n_2$, é mais conveniente, no sentido de se fazer menos cálculos, usar a primeira fórmula.

As somas de quadrados são obtidas da seguinte forma:

$$G = \sum_{ij} y_{ij} = 1978,7 \quad , \quad \sum_{ij} y_{ij}^2 = 165960,81$$

$$C_0 = \frac{G^2}{bk} = 163135,5704$$

$$S.Q.Total = \sum_{ij} y_{ij}^2 - C_0 = 2825,2396$$

$$S.Q.Trat_{(aj)} = \sum_j t_{jQ_j}^2 = 1869,8170$$

$$S.Q.Blocos = \frac{1}{k} \sum_i B_i^2 - C_0$$

$$= \frac{1}{4} [(343,7)^2 + \dots + (351,0)^2] - C_0$$

$$= 817,0871$$

A S.Q.Blocos pode ser desdobrada em S.Q.Repetições e S.Q.Blocos d. Repetições, onde cada repetição é constituída dos seguintes blocos:

REPETIÇÃO 1		REPETIÇÃO 2		REPETIÇÃO 3	
Bloco ₁	343,7	Bloco ₃	357,5	Bloco ₅	299,4
Bloco ₂	327,8	Bloco ₄	299,3	Bloco ₆	351,0
	<hr/>		<hr/>		<hr/>
	671,5		656,8		650,4

$$S.Q.Rep. = \frac{1}{8} [(671,5)^2 + (656,8)^2 + (650,4)^2] - C_0 = 29,2608$$

$$\begin{aligned}
 S.Q.Blocos \text{ d. Rep.} &= \frac{1}{4} [(343,7)^2 + (327,8)^2] - \frac{1}{8} (671,5)^2 + \\
 &+ \frac{1}{4} [(357,5)^2 + (299,3)^2] - \\
 &- \frac{1}{8} (656,8)^2 + \frac{1}{4} [(299,4)^2 + (351,0)^2] - \\
 &- \frac{1}{8} (650,4)^2 = 787,8263
 \end{aligned}$$

$$S.Q.Res. = S.Q.Total - S.Q.Blocos - S.Q.Trat_{(aj)} = 138,3355$$

C. Variação	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Blocos	5	817,0871	163,4174	
Repetições	2	29,2608	14,6304	
Bloc. d. Rep.	3	787,8263	262,6088	
Tratamentos _(aj)	7	1869,8170	267,1167	21,2**
Resíduo	11	138,3355	12,5760	
Total	23	2825,2390		

** Significativo ao nível de 1% de probabilidade.

As médias ajustadas $\hat{m}_j$ foram obtidas por:

$$\hat{m}_j = \hat{m} + \hat{t}_j ,$$

onde $\hat{m}$ = média geral = 82,4 .

Para a estimativa de contraste

$$\hat{y} = \hat{m}_j - \hat{m}_{j'} = \hat{t}_j - \hat{t}_{j'} ,$$

as estimativas das variâncias são:

i) Entre primeiros associados:

$$\begin{aligned} \hat{V}_1(\hat{y}) &= \frac{2k}{\Delta_1} [B_{22} + B_{12}] \text{Q.M.Pes.} = \frac{2k}{\Delta_2} B_{21} \text{Q.M.Res} \\ &= 8,3840 \end{aligned}$$

ii) Entre segundos associados:

$$\begin{aligned} \hat{V}_2(\hat{y}) &= \frac{2k}{\Delta_1} B_{22} \text{Q.M.Res.} = \frac{2k}{\Delta_2} [B_{21} + B_{11}] \text{Q.M.Res} \\ &= 10,48 \end{aligned}$$

iii) Variância média:

$$\bar{V}(\hat{Y}) = \frac{2k}{\Delta_1} \left[\frac{(v-1)B_{22} + n_1 B_{12}}{v-1} \right] \text{Q.M.Res.}$$

$$= \frac{2k}{\Delta_2} \left[\frac{(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}}{v-1} \right] \text{Q.M.Res.}$$

$$= 10,1806$$

Para uma estimativa da variância de uma es
timativa de um contraste qualquer, seja, por exemplo:

$$\hat{Y} = \hat{m}_2 + \hat{m}_3 - \hat{m}_4 - \hat{m}_6 + \hat{m}_7 - \hat{m}_8$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = \frac{k}{\Delta_1} \left[B_{22} \sum_{j=j'} l_j^2 - 2B_{12} \sum_{j \neq j'} l_j l_{j'} \right] \text{Q.M.Res.},$$

onde os tratamentos j e j' são primeiros associados, que nes
se contraste são: (2, 6); (3, 7); (4, 8).

$$\sum_{j=j'} l_j^2 = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$$

$$\sum_{j \neq j'} l_j l_{j'} = 1(-1) + 1.1 + (-1).(-1) = 1$$

$$\hat{V}(\hat{Y}) = 33,536$$

Alternativamente, encontra-se:

$$\hat{V}(\hat{y}) = \frac{k}{\Delta_2} \left[B_{21} \sum_{j=j'} \ell_j^2 - 2B_{11} \sum_{j \neq j'} \ell_j \ell_{j'} \right] \text{Q.M.Res.},$$

onde os tratamentos j e j' são segundos associados, que nesse contraste são:

(2, 3); (2, 4); (2, 7);

(2, 8); (3, 4); (3, 6);

(3, 8); (4, 6); (4, 7);

(6, 7); (6, 8); (7, 8).

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq j'} \ell_j \ell_{j'} &= 1.1 + 1(-1) + 1.1 + 1(-1) + 1(-1) + 1(-1) + \\ &+ 1(-1) + (-1)(-1) + (-1)(1) + (-1)(1) + \\ &+ (-1)(-1) + (1)(-1) = -4 \end{aligned}$$

$$\hat{V}(\hat{y}) = 33,536$$

A eficiência do ensaio pode ser medida por:

$$E_1 = \frac{\Delta_1}{\text{rk}[B_{22} + B_{12}]} = \frac{\Delta_2}{\text{rk } B_{21}} = 1$$

$$E_2 = \frac{\Delta_1}{\text{rk } B_{22}} \frac{\Delta_2}{\text{rk}[B_{21} + B_{11}]} = 0,80$$

$$\bar{E} = \frac{(v-1)\Delta_1}{\text{rk}[(v-1)B_{22} + n_1 B_{12}]} = \frac{(v-1)\Delta_2}{\text{rk}[(v-1)B_{21} + n_2 B_{11}]} = 0,82$$

Os resultados obtidos para as eficiências mostram que o delineamento usado permite maior precisão nas comparações entre tratamentos que são primeiros associados . Isso se verifica em vista de tais tratamentos ocorrerem juntos em r blocos.

5. CONCLUSÕES

Diante do que foi exposto sobre os delineamentos em $PBIB_{(2)}$, pode-se concluir que :

i) Os delineamentos em $PBIB_{(2)}$ são modelos alternativos aos delineamentos em BIB, e só devem ser usados quando estes não existirem, ou quando a combinação dos parâmetros do BIB resultar em um número elevado de parcelas, inviabilizando a instalação do ensaio em campo.

ii) A classificação dos delineamentos em $PBIB_{(2)}$ em tipos distintos, formando um esquema de associação entre os tratamentos, facilita o planejamento e a análise desses delineamentos.

iii) Vários métodos de construção de delineamentos em PBIB₍₂₎ estão disponíveis na literatura. No entanto, a maioria deles exige do pesquisador da área agrônoma um conhecimento aprimorado de álgebra. Já os métodos aqui apresentados são de fácil compreensão, permitindo, assim, sua imediata aplicação.

iv) A estimação dos efeitos de tratamentos pelo método apresentado, tanto facilita na computação dos dados, como familiariza o pesquisador com a análise, ao contrário do método geral, que exige a inversão de matrizes de grandes dimensões.

v) Quando na pesquisa houver maior interesse em algumas comparações entre dois tratamentos, pode-se fazer com que esses tratamentos ocorram juntos em um maior número de blocos, de modo que haja maior eficiência nessas comparações.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRAWAL, H.L. e J. PRASAD, 1984. Construction of partially balanced incomplete block designs with nested row and columns. Biometrics , Raleigh , 8 : 883-891.
- BOSE, R.C. e K.R. NAIR, 1939. Partially balanced incomplete block designs. Sankhvā , Calcutā , 4 : 337-372.
- BOSE, R.C. e M.S. SHRIKHANDE, , 1979. On a class of partially balanced incomplete block designs. Journal of Statistical Planning and Inference , Amsterdam , 3 : 91-99.
- BOSE, R.C. e T. SHIMAMOTO, 1952. Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Journal of the American Statistical Association , Washington , 47 : 151-184.

- BOSE, R.C.; W.H. CLATWORTHY e S.S. SHRIKANDÉ, 1954. Tables of partially balanced designs with two associate classes. Tech. Bul. Nº 107 , North Carolina Agricultural Experimental Station. Raleigh. 255 p.
- BOSE, R.C. e W.S. CONNOR, 1952. Combinatorial of group-divisible incomplete block designs. Ann. Math. Statist., Baltimore , 23 : 367-383.
- CHAKRABARTI, M.C., 1962. Mathematics of Design and Analysis of Experiments . Asia Publishing House , Londres. 120 p.
- CHENG, C.S.; G.M. CONSTANTINE e A.S. HEDAYAT, 1984. A unified method for constructing PBIB design based on triangular and L_2 schemes. Journal of the Royal Statistical Society , Londres , B 46 : 31-37.
- COCHRAN, W.G. e K.M. COX, 1957. Experimental Designs. 2^a ed., John Wiley , Nova York . 611 p.
- FEDERER, W.T. , 1955. Experimental Designs. Theory and Application. Macmillian , Nova York. 544 p.
- FISHER, R.A. e F. YATES, 1953. Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research. 4^a ed. Oliver and Boyd , Edinburgh.
- FREEMAN, G.H. , 1957. Some further methods of constructing regular group-divisible incomplete block designs. Ann. Mat. Statist., Baltimore , 28 : 479-487.
- IEMMA, A.F. , 1985. Modelos Lineares: Uma Introdução para Profissionais de Pesquisa Agropecuária. ESALQ/USP, Piracicaba , 142 p. (1º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agrônômica).

- JOHN, J.A. , 1966. Cyclic incomplete block designs. J. Roy. Statist. Soc. , Londres , B 28 : 345-360.
- JOHN, P.W.M. , 1971. Statistical Design and Analysis of Experiments . Macmillian , Nova York . 356 p.
- JUNGNICKEL, D. , 1979. A construction of group-divisible designs. Journal of Statistical Planning and Inference, Amsterdam , 3 : 273-278.
- KAGEYAMA, S. , 1982. Connectedness of two-associates PBIB designs. Journal of Statistical Planning and Inference , Amsterdam , 7 : 77-82.
- KAGEYAMA, S. e R.N. MOHAN , 1984. Three methods of constructing PBIB designs. Commun Stat. Theor. Meth., Nova York, 13(25) : 3185-3189.
- KEMPTHORNE, O. , 1975. The Design and Analysis of Experiments . 2^a ed. , Robert E. Krieger Publishing Company, Nova York. 631 p.
- KIRK, R.E. , 1968. Experimental Designs : Procedures for Behavioral Sciences . Wadsworth , Belmont. 577 p.
- NAIR, R. , 1952. Analysis of partially balanced incomplete block designs illustrated on the simple square and rectangular lattices. Biometrics , Washington , 8 : 122-125.

- NAIR, R. e C.R. RAO , 1942. A note on partially balanced in complete block designs. Science and Culture , Calcutá , 7 : 568-569.
- OGAWA J. , 1974. Statistical Theory of The Analysis of Experimental Designs. Marcel Dekker , Nova York. 465 p.
- OLIVEIRA, A.C. , 1985. Análise intrablocos de experimentos em blocos incompletos parcialmente balanceados com alguns tratamentos comuns adicionados em cada bloco. Piracicaba ESALQ/USP , 153 p. (Tese de Doutorado).
- PIMENTEL GOMES, F. , 1968. The solution of normal equations of experiments in incomplete blocks. Ciência e Cultura , São Paulo , 20(4) : 733-746.
- PIMENTEL GOMES, F. , 1973. Curso de Estatística Experimental . 5.^a ed. , Livraria Nobel , Piracicaba , 430 p.
- RAGHAVARAO , D., 1971. Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments . John Wiley , Nova York. 386 p.
- RAMOS, P.C.F. , 1975. Contribuição ao estudo dos planejamentos por blocos incompletos. São Paulo , USP , 150 p. (Dissertação de Mestrado).
- RAO, C.R. , 1947. General methods of analysis for incomplete block designs. Journal of The American Stat. Assoc. , Washington , 42 : 541-561.
- SCHEFFÉ, H., 1959. The Analysis of Variance. John Wiley, Nova York, 477 p.
- SEARLE, S.R. , 1971. Linear Models . Wiley , Nova York . 531 p.

- SHAH, B.V. , 1959. A generalization of partially balanced incomplete block designs. Ann. Math. Statist. , Baltimore , 30 : 1041-1071.
- SHRIKHANDE, S.S. , 1952. On the dual of some balanced incomplete block designs. Biometrics , Raleigh , 8 : 66-72.
- SPROTT, D.A. , 1955. Some series of partially balanced incomplete blocks. Canad. J. Math. , Toronto , 7 : 369-381.
- YATES, F. , 1936. Incomplete randomized blocks. Ann. Eugenics , Londres , 7 : 121-140.