ANÁLISE HARMÔNICA APLICADA À DADOS DE TEMPERATURAS MÉDIAS MENSAIS DE CAMPINAS, SP

INÊS FUMIKO UBUKATA YADA

Orientador: Prof. Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de concentração: "Estatística e Experimentação Agronômica".

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Maio - 1986

À meus pais (in memoriam)
meus irmãos e cunhadas
Ofereço

Ao meu esposo
George,
Dedico

AGRADECIMENTOS

- Ao Dr. Izaias Rangel Nogueira, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela valiosa orientação e incentivos durante o curso e na elaboração do trabalho.

- Ao Dr. F. Pimentel Gomes, Professor Catedrátido do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pela acolhida e ensinamentos prestados durante o curso.

- Ao Dr. Humberto de Campos, Dr. Débio Barbin, Professores Titulares do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelo apoio e estímulo.

- Ao corpo Docente do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos transmitidos.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelas bolsas concedidas, durante o curso.

- Ao Dr. João Baptista da Silva, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Pelotas, RS, pelas valiosas sugestões, incentivos e colaboração na execução do trabalho.

- Ao Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelas sugestões na elaboração final do trabalho.

- A Profª Vanderci Aguilera da Universidade Estadual de Londrina, pela revisão do português.

- Aos colegas da área de Biometria e Processamento de Dados do IAPAR pelo espírito de colaboração, bem como aos colegas Antonio Fernando Megumi Tazima e Jaime Geraldo da Silva, pela execução dos programas.

- À Srta. Maria Izalina Ferreira Alves, Rosa Maria Alves e família pelo companheirismo, incentivos e amizade.

- Ao meu esposo, George Mitsuo Yada, pelo apoio e incentivos.

- Aos colegas do curso de Pós-graduação, pelo excelente convívio.

- A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a execução deste trabalho.

ÍNDICE

	<u>página</u>
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DA LITERATURA	4
3. MATERIAL	14
4. MÉTODOS	16
4.1. Desenvolvimento teórico	16
4.2. Modelo matemático	20
4.3. Estimativas dos parâmetros, suas variâncias e covariâncias	23
4.4. Intervalo de confiança	34
4.5. Transformação dos dados	35
4.6. Análise da variância	39
4.6.1. Teste de homogeneidade de variâncias.	40
4.6.2. Teste de normalidade	41
4.6.3. Teste de aditividade de Tukey	43
4.7. Quadros de análise de variância	46
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	51
5.1. Transformação dos dados	51
5.2. Análise harmônica	53
5.3. Análise de variância	106
5.4. Variância dos parâmetros estimados	120
5.5. Intervalo de confiança	120

6. CONCLUSÕES	122
7. BIBLIOGRAFIA	124
APÊNDICE	130

ANÁLISE HARMÔNICA APLICADA À DADOS DE TEMPERATURAS MÉDIAS MENSAIS DE CAMPINAS, SP

Autor: INÊS FUMIKO UBUKATA YADA

Orientador: Prof. Dr. Izaias Rangel Nogueira

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar as temperaturas médias mensais de Campinas, SP, através de seus componentes harmônicos e sintetizar aqueles componentes que se mostrarem significativos.

Aos dados de temperaturas médias mensais aplicou-se a análise harmônica para cada ano e para o conjunto total dos anos, ajustados a um ano médio referentes ao Município de Campinas, SP, num período de 91 anos (1890 a 1980).

Como os dados originais de temperaturas médias não apresentaram as pressuposições da análise de variância, estudou-se uma transformação conveniente aos dados e verificou-se que $Y = X^{1,84216}$ satisfaz estas condições.

A estabilidade dos componentes harmônicos das temperaturas médias mensais foi testada pelo método da análise

se de variância, revelando-se significativas as ondas com período anual, semestral e trimestral.

A equação de regressão obtida pelos resultados da análise harmônica do total dos 91 anos foi ajustada a um ano médio e é apresentada por:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t = & 257,5209 + 67,3803 \operatorname{sen}(30^\circ t + 93,1827^\circ) + \\ & + 16,0434 \operatorname{sen}(60^\circ t + 331,5798^\circ) + \\ & + 2,4962 \operatorname{sen}(120^\circ t + 209,0092^\circ).\end{aligned}$$

A equação ora determinada explica 99,8% das variações devidas a meses. Somente a onda anual explicou praticamente 94,5%. Estimou-se um máximo durante o mês de fevereiro ($\hat{Y}_1 = 321,03$) equivalente à temperatura de $\hat{Y}_1 = 22,94^\circ$ e um mínimo durante o mês de julho ($\hat{Y}_6 = 181,40$), equivalente à temperatura de $\hat{Y}_6 = 16,83^\circ$.

HARMONIC ANALYSIS APPLIED TO MONTHLY MEAN TEMPERATURES DATE OF CAMPINAS, SP

Author: INÊS FUMIKO UBUKATA YADA

Adviser: Prof. Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

SUMMARY

The purpose of the present paper was to study the monthly mean temperatures of Campinas Municipality (SP) through their harmonic components and to synthesize those components which showed significance.

It was applied the harmonic analysis to the monthly mean temperatures of each year and to the total of 91 years adjusted to one average studied (1890 to 1980).

As the original data of mean temperatures didn't showed the presuppositions of the analyses of variance, a convenient transformation was calculated and it was found that $Y = X^{1.84216}$ satisfied these conditions.

The stability of the harmonic components of the monthly mean temperatures was tested through the method of analysis of variance showing significant those waves with periods of three, six and twelve months.

The regression equation obtained by the results of the harmonic analysis from the total of 91 years studied was adjusted to one year average and is presented:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t = & 257.5209 + 67.3803 \operatorname{sen}(30^\circ t + 93.1827^\circ) + \\ & + 16.0434 \operatorname{sen}(60^\circ t + 331,5798^\circ) + \\ & + 2.4962 \operatorname{sen}(120^\circ t + 209.0092^\circ).\end{aligned}$$

The model here determinate explains 99.8% of the monthly variations. The one year period wave explained itself 94.5% of those variations. During february it was estimated a maximum of $\hat{Y}_1 = 321.03$ equivalent to the temperature $\hat{Y}_1 = 22.94^\circ$ and during july a minimum of $\hat{Y}_6 = 181.40$, equivalent to the temperature $\hat{Y}_6 = 16.83^\circ$.

1. INTRODUÇÃO

Todos sabemos que a temperatura é de suma importância no controle do crescimento das plantas, bem como de sua distribuição sobre o planeta.

Muitos fenômenos fisiológicos ocorrem entre 0 a 40°C, portanto, existe uma ampla faixa de temperaturas que cada espécie requer para o seu desenvolvimento. Estudos e pesquisas sobre melhoramento genético têm proporcionado boa ampliação desta faixa nas últimas décadas.

Em quase todas as partes do globo ocorrem temperaturas médias de períodos longos de variação anual e diurna, possibilitando assim atender às necessidades em temperaturas requeridas por uma certa cultura. Existem recursos tecnológicos que possibilitam variar a temperatura conveniente, tais como, casa de vegetação, coberturas plásticas, etc., mas

esses recursos só podem ser aplicados quando o retorno de capital for compensador, pois tais instalações normalmente exigem grandes investimentos.

A importância desse trabalho prende-se ao fato de que não se tem conhecimento de estudos de análise harmônica aplicados aos dados de temperatura, - o que se considera de importância relevante para a agricultura, - bem como tem a finalidade de informar aos agricultores sobre esse fenômeno, para que este possa se orientar em relação às atividades agrícolas, e para que possa melhor planejar a época e local do plantio, visando assim a um maior rendimento econômico.

O presente trabalho tem como objetivo estudar as temperaturas médias de Campinas, SP, em seus componentes harmônicos e sintetizar aqueles componentes que se mostrarem significativos, após testar a estabilidade dos componentes harmônicos pelo método da análise de variação para selecionar as ondas mais importantes para o modelo.

Devemos salientar que a análise harmônica é aplicada a dados provenientes de fenômenos periódicos ou quase periódicos. Entende-se por fenômeno periódico aquele que se repete em intervalos de tempos iguais, como por exemplo, a altura do sol acima do horizonte ao meio dia em uma dada latitude e a hora do nascer e do pôr do sol, também em uma dada latitude.

Segundo AMARAL (1968), muitos fenômenos meteorológicos, astronômicos e geofísicos, tais como fenômeno de marés, o número de manchas solares, o curso diurno e anual de elementos climáticos da temperatura, por exemplo, são fenômenos quase periódicos.

Por fenômenos quase periódicos entendem-se, com BROOKS e CARRUTHERS (1953), aqueles em que o valor do elemento estudado não se reproduz exatamente em certos intervalos de tempo, como se a um processo estritamente periódico se superpusessem influências modificadoras de caráter aleatório.

2. REVISÃO DE LITERATURA

CONRAD e POLLAK (1950) descreveram o método de análise harmônica no estudo de fenômenos climatológicos que apresentam tendências periódicas. Exemplificaram o método pela análise harmônica de 12 valores equidistantes, que geralmente representam o curso anual de um elemento, e pela análise de 24 valores equidistantes, que representam o curso diário de um elemento, apresentando assim a síntese das ondas que compõem aquele fenômeno.

BLISS (1958) utilizou a regressão periódica no estudo de fenômenos biológicos e climatológicos que apresentam tendências cíclicas, concluiu que, se os dados observados mudam simetricamente durante o ciclo, a curva do seno representa bem o fenômeno, porém, se a curva não é simétrica, poderão ser adicionados mais termos à equação, até que o ajuste desejado seja encontrado.

GODOY *et alii* (1959) estudaram as temperaturas médias de Campinas, SP, no período de 67 anos (1890 a 1956) e aplicaram o método dos polinômios ortogonais às temperaturas médias de janeiro, abril, julho, outubro e médias anuais. Concluíram que, em quase todos os casos estudados, houve regressão significativa de primeiro ou segundo grau, demonstrando assim tendência secular de modificação das temperaturas médias.

AMARAL (1968) apresentou um trabalho sobre análise harmônica, exemplificando sua aplicação com dados de precipitações pluviométricas mensais de Pelotas, RS, para um período de 52 anos (1900 a 1951). Testou a estabilidade dos componentes harmônicos pelo método da análise de variância e concluiu serem significativas as ondas anual, semestral e quadrimestral. O teste de completicidade indicou que 91,2% da variação das precipitações médias mensais corre por conta dessas três ondas.

Em outro exemplo, utilizando dados das precipitações pluviométricas mensais de Morro Velho, MG, no período de 1855 a 1951, o autor submeteu os dados à transformação $z = X^{0,351}$ e concluiu ser a onda anual responsável por 99,3% da variação entre médias mensais.

ANDERSON (1971) apresentou toda teoria sobre funções com tendência cíclica. Descreveu um estudo matricial

detalhado da análise harmônica, para calcular os componentes da regressão e coeficientes de correlação para os componentes harmônicos.

DECICO e CRUZ (1974) apresentaram um trabalho sobre as vantagens e facilidades do emprego da série de Fourier no estudo e interpretação dos fenômenos periódicos. Exemplificaram com as precipitações mensais da região de Piracicaba, SP, no período de 1917 a 1970, e determinaram um valor mínimo de seleção de amplitudes.

DUARTE (1974) aplicou a análise harmônica para determinar a curva epidemiológica da ferrugem alaranjada do cafeeiro da Zona da Mata, MG, utilizando duas transformações nos dados originais; a primeira indicada por BLISS (1958) : $y = \log(FP+1)$, onde FP é porcentagem de infecção; a segunda recomendada por VAN DER PLANK: $Y = \log \frac{X}{1-X}$, onde $X = \frac{FP}{100}$.

Concluiu que em ambas as transformações a curva do seno representa bem o fenômeno, sendo que o máximo de infecção se verifica em junho e o mínimo se verifica em dezembro.

Para a primeira transformação obteve-se a seguinte equação de regressão: $\hat{Y}_i = 1,1917 + 0,2893U_{1i} + 0,3678V_{1i}$, onde $U_{1i} = \cos(c.i)$, $V_{1i} = \sin(c.i)$, $c = \frac{2\pi}{i}$, $i = 0, 1, \dots, 11$ (meses), com coeficiente de variação de 18,63% e coeficiente de determinação de 94,11%; com a segunda obteve-se $\hat{Y}_i = -0,7267 + 0,4137U_{1i} - 0,5371V_{1i}$, com coeficiente de varia-

ção de 11,81% e coeficiente de determinação de 95,77%.

PIMENTEL GOMES e NOGUEIRA (1975), utilizaram as temperaturas médias anuais de 67 anos de observação, relativas à cidade de Campinas, SP, no período de 1890 a 1956, aplicando a regressão polinomial nos primeiros 22 anos, obteve-se uma equação de regressão de 1º grau e concluíram que a equação relativa aos primeiros 22 anos não continua para $X > 22$ e os valores observados se afastam cada vez mais dos calculados. No mesmo trabalho fizeram também um estudo dos dados no período de $X = 23$ a $X = 44$ (1912 a 1933) obteve-se uma equação de regressão do 3º grau e concluíram que é excelente a concordância das temperaturas observadas com as calculadas, mas que para $X < 23$ e para $X > 44$ as discrepâncias são enormes; concluindo assim que a usada equação de regressão para extrapolação é extremamente perigosa e pode levar a resultados completamente fora da realidade.

Amaral *et alii* (1975), citado por BAPTISTA DA SILVA (1979), publicaram em 1975, no Boletim Técnico nº 9 do Departamento Nacional de Meteorologia, tabelas de probabilidades de temperatura mínima em Pelotas, RS.

As tabelas de probabilidade da temperatura mínima (média das mínimas e mínima absoluta em cada uma das 73 pântadas do ano), calculadas com as observações feitas na cidade de Pelotas, no período de 1900-1951 (Posto Meteorológico da Faculdade de Agronomia Eliseu Maciel) são precedidas, no

trabalho, de instruções para o uso de testes. Os referidos testes foram efetuados com as observações na Estação Meteorológica - Agrária do Instituto de Pesquisas e Experimentação Agropecuária do Sul (IPEAS), a cerca de 15 quilômetros da cidade de Pelotas, no período de setembro de 1950 a agosto de 1971 (21 anos).

O método adotado na elaboração das tabelas consistiu na transformação dos dados com vistas a homogeneizar as variâncias e a normalizar a distribuição. As transformações adotadas foram:

$$Z = (1 + X/273)^{13,355}$$

para a média das mínimas, e

$$W = (1 + X/273)^{6,553}$$

para a mínima absoluta da pântada.

Os testes a que foram submetidas as tabelas de probabilidades indicaram que a concordância entre os valores observados e os calculados com o auxílio das tabelas foi bastante satisfatória, donde os autores concluíram que as séries de observações na cidade de Pelotas, de 1900 a 1951, e no IPEAS, de 1950 a 1971, são homogêneas, permitindo, portanto, o uso das tabelas para toda uma região em torno de Pelotas.

THIEBAUT (1976) estudou, através da análise harmônica, as precipitações mensais de Viçosa, MG, no período de 1924 a 1973. Obteve a equação de regressão para os seguintes períodos: período chuvoso (outubro a março); período seco (abril a setembro) e período anual (janeiro a dezembro). Concluiu que existem dois períodos bem definidos: período seco, sendo o mês de julho o mais seco e período chuvoso, sendo o mês de dezembro o mais chuvoso. Da variação total devido a meses, a onda semestral é responsável por 91,96% no período chuvoso e 82,58% no período seco, enquanto que, para o período anual, a onda anual foi responsável por 95,02% da variação total devido a meses.

BAPTISTA DA SILVA (1977) estimou as precipitações pluviométricas pentadais de Pelotas, RS, através da análise harmônica no período de 1900 a 1951. Utilizou a transformação $Z = \sqrt[3]{X}$ aos dados a fim de homogeneizá-los e submeteu os contrastes lineares p_j e q_j das ondas senoidais a um teste de estabilidade, verificando que as ondas semestral, quadrimestral e a 35ª harmônica são significativas. Daí afirmou que aproximadamente 40,9% da variação entre as precipitações pluviais pentadais é explicada pelo modelo.

A alta variabilidade das precipitações pentadais em Pelotas parece ser a principal responsável pela baixa representatividade do modelo.

PEREIRA (1978) aplicou a análise harmônica a dados pluviométricos mensais do município de Grajaú, MA, num período de 45 anos (1914 a 1958). Ajustou os dados originais para meses de 30 dias e empregou a transformação $Z = \log (X + 35)$, visando à uniformização das variâncias. Submeteu os contrastes lineares p_k e q_k a um teste de estabilidade e verificou que as ondas anual, semestral e quadrimestral revelaram-se significativas, com predominância da onda anual.

A equação de regressão obtida foi:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t = & 2,0367 + 0,4336 \cos(30 t - 47,9165)^0 + \\ & + 0,0868 \cos(60 t - 226,0739)^0 + \\ & + 0,0402 \cos(90 t - 300,1334)^0\end{aligned}$$

Concluiu ainda que aproximadamente 99,75% da variação das precipitações mensais de chuva é explicada pelo modelo, com um máximo de chuvas em março e um mínimo em julho.

DUARTE (1980) aplicou a regressão periódica a dados de porcentagem de infecção de ferrugem no cafeeiro, na região de Jaú, SP (1973/74). Utilizou a transformação $Y = \log \frac{X}{1 - X} + 3$ e determinou a seguinte equação de regressão:

$$\hat{Y}_t = 2,4336 + 1,0591 \cos(0,5236 t - 5,7634)$$

e estimou que o máximo de infecção ocorre no mês de junho e o mínimo ocorre em dezembro.

Aplicou também a esses mesmos dados o método da regressão polinomial e obteve a equação de regressão:

$$\hat{Y}_i = 3,3389 - 0,6628 X_i + 0,0650 X_i^2, \quad \text{onde}$$

X_i = tempo (meses), estimando um mínimo de infecção também em dezembro.

Salientou ainda sobre as desvantagens deste segundo método, pois este não indica, geralmente, o mês de máxima infecção e, em casos de extrapolação, esta técnica se ria muito perigosa.

FELTRIN (1980) estudou as precipitações pluviais referentes ao município de Bandeirantes, PR, através da análise harmônica, num período de 48 anos (1930 a 1977). Ajustou os dados a meses de trinta dias e submeteu os dados originais à transformação $Y = \sqrt{X}$.

Determinou os componentes harmônicos para três casos distintos: período anual (janeiro a dezembro), pe ríodo seco (abril a setembro) e período chuvoso (outubro a março). Concluiu que, da variação total devida a meses, a equação estimada explicou 99,54% para o período seco, com um mínimo de chuvas para o mês de agosto; 100% para o período chuvoso, com um máximo de chuvas durante o mês de janeiro; 98,02% para o período anual, com um máximo de chuvas durante o mês de janeiro e um mínimo durante o mês de agosto.

COELHO (1980) aplicou a regressão periódica a

dados de produção de citrus das variedades Valência e Hanlim num período de 9 anos (1970 a 1978). Utilizou a transformação $W = \sqrt{X}$ aos dados a fim de satisfazer as exigências do modelo matemático.

Pela análise da variância verificou-se a variação de cada componente harmônico dos contrastes lineares $\hat{p}_k$ e $\hat{q}_k$ e concluiu que as ondas de 2,25 anos e de 3,0 anos são as de maior importância, não só por serem significativas na maioria das variedades de porta-enxertos estudadas, mas por serem as maiores responsáveis pela variação total. A onda de 4,5 anos contribuiu com maior parte para a variação total que a onda de 9 anos.

DUARTE (1981) empregou a análise harmônica no estudo da incidência da ferrugem alaranjada do cafeeiro (*Hemileia vastatrix* Berk et Br) no Estado de Minas Gerais.

Utilizou dados de porcentagem de infecção de experimentos realizados em nove localidades do Estado de Minas Gerais: Ponte Nova, Alfenas, Jacutinga, São Gotardo, Santo Antonio do Amparo, Três Pontas, São Sebastião do Paraíso, Machado e Nepomuceno, durante 3 anos, e nas três primeiras localidades os estudos se prolongaram por mais 3 anos.

Aplicou-se a análise harmônica para cada local e se verificou que, em seis localidades, o primeiro componente harmônico (onda anual) foi significativo; em duas ou

tras localidades, o terceiro componente harmônico (onda quadrimestral) foi significativa e no restante, o segundo componente harmônico (onda semestral) foi significativo.

Para os locais onde se prolongaram as observações por mais 3 anos, verificou-se que apenas o primeiro componente harmônico foi significativo.

Realizou-se ainda a análise conjunta para locais estudados durante 3 anos e se verificou que os três primeiros componentes harmônicos foram significativos, sendo a equação:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_j = & 18,4646 + 1,8853 \cos(30j) - 13,6027 \sin(30j) - \\ & - 0,0899 \cos(60j) + 0,7681 \sin(60j) + \\ & + 2,0922 \cos(90j) + 1,4086 \sin(90j) \\ & \text{onde } j = 0, 1, 2, \dots, 11 \text{ meses.}\end{aligned}$$

Porém, na análise conjunta para locais onde as observações se prolongaram por mais 3 anos, apenas o primeiro componente harmônico foi significativo, sendo a equação:

$$\hat{Y}_j = 11,7232 - 0,5821 \cos(30j) - 11,2523 \sin(30j)$$

Verificou-se ainda que o primeiro componente harmônico (onda anual) é o principal responsável pela variação na incidência de ferrugem do cafeeiro e também que o máximo desta incidência ocorre nos meses de maio e junho e o mínimo em novembro e dezembro.

3. MATERIAL

Os dados de temperaturas foram fornecidos pelo Posto Meteorológico do Instituto Agronômico de Campinas, referentes à cidade de Campinas, SP.

De 1890 a 1956 as observações foram feitas no mesmo local do Instituto Agronômico de Campinas - Sede. De 1957 até a presente data, as observações foram feitas no Instituto Agronômico de Campinas - Centro Experimental, cujas coordenadas geográficas são:

- IAC - SEDE

- Latitude: $22^{\circ} 53'S$
- Longitude: $47^{\circ} 05'W$
- Altitude: 663 m

- IAC - CENTRO EXPERIMENTAL

- Latitude: 22° 54'S
- Longitude: 47° 05'W
- Altitude: 669 m

As observações são tomadas em abrigo meteorológico padrão, segundo a Organização Meteorológica Mundial (OMM), com termômetros de mercúrio (R. Fues) de fabricação alemã, com graduação de dois em dois décimos de graus centígrados localizados a 1,70 metros de altura do solo.

As temperaturas médias diárias, que deram origem às temperaturas médias mensais, foram obtidas através da seguinte equação:

$$T_{MED} = \frac{T_7 + T_{14} + 2T_{21}}{4}, \quad \text{onde,}$$

T_7 , T_{14} e T_{21} representam respectivamente as temperaturas do ar obtidas às 7, 14 e 21 horas locais, nas quais são consideradas as leituras principais.

4. MÉTODOS

A metodologia usada na análise harmônica é baseada nas funções trigonométricas periódicas seno e coseno.

4.1. Desenvolvimento teórico

Uma função $f(t)$, onde t é uma variável independente, é dita periódica de período T , se, para todo t , ocorrer

$$f(t \pm T) = f(t)$$

onde T é uma constante positiva.

As funções trigonométricas $\sin t$ e $\cos t$ são funções periódicas de período $T = 2\pi$, isto é,

$$\text{sen } (t + 2\pi) = \text{sen } t$$

$$\text{cos } (t + 2\pi) = \text{cos } t$$

na seqüência tem-se:

$$\text{sen } (t + 2\pi k) = \text{sen } t$$

$$\text{cos } (t + 2\pi k) = \text{cos } t$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A função representada pela série trigonométrica de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h \text{sen } (h\phi t + A_h) \quad [1]$$

é periódica, de período T , onde $\phi = \frac{2\pi}{T}$, sendo ϕ chamado frequência angular.

Os coeficientes a_h e os ângulos A_h , sendo ($a_h > 0$) e A_h ($0 < A_h < 2\pi$), são denominados, respectivamente, amplitude harmônica e ângulo-fase.

Desenvolvendo-se [1], tem-se:

$$f(t) = a_0 + a_1 \text{sen } (\phi t + A_1) + a_2 \text{sen } (2\phi t + A_2) + \dots + a_h \text{sen } (h\phi t + A_h) + \dots \quad [2]$$

Desenvolvendo o seno da soma para cada um dos harmônicos em [2], aplicando-se a propriedade:

$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \text{cos } b + \text{sen } b \text{cos } a$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 f(t) = & a_0 + a_1 (\sin \phi t \cos A_1 + \sin A_1 \cos \phi t) + \\
 & + a_2 (\sin 2\phi t \cos A_2 + \sin A_2 \cos 2\phi t) + \dots + \\
 & + a_h (\sin h\phi t \cos A_h + \sin A_h \cos h\phi t) + \dots \quad [3]
 \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{array}{ll}
 p_1 = a_1 \sin A_1 & q_1 = a_1 \cos A_1 \\
 p_2 = a_2 \sin A_2 & q_2 = a_2 \cos A_2 \\
 \dots & \dots \\
 p_h = a_h \sin A_h & q_h = a_h \cos A_h \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

e substituindo em [3], tem-se

$$\begin{aligned}
 f(t) = & a_0 + q_1 \sin \phi t + p_1 \cos \phi t + \\
 & + q_2 \sin 2\phi t + p_2 \cos 2\phi t + \dots + \\
 & + q_h \sin h\phi t + p_h \cos h\phi t + \dots \quad [4]
 \end{aligned}$$

Considerando o h-ésimo harmônico, onde:

$$p_h = a_h \sin A_h \quad \text{e} \quad q_h = a_h \cos A_h$$

tem-se,

$$p_h^2 + q_h^2 = a_h^2 \sin^2 A_h + a_h^2 \cos^2 A_h$$

e, fazendo

$$a_h^2 = p_h^2 + q_h^2$$

$$a_h = \left| \sqrt{p_h^2 + q_h^2} \right|$$

$$\frac{p_h}{q_h} = \frac{a_h \operatorname{sen} A_h}{a_h \cos A_h} = \operatorname{tg} A_h$$

$$A_h = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{p_h}{q_h} \right)$$

Representação gráfica dos parâmetros p_h , q_h ,
 a_h e A_h .

Segundo Conrad e Pollak (1950), o quadrante ao qual pertence o arco A_h é determinado pelos sinais dos parâmetros p_h e q_h , assim tem-se:

Sinal do parâmetro p_h	Sinal do parâmetro q_h	Ângulos fases (A_h)	Quadrante a que pertence o arco A_h
+	+	$A_h = A_{++}$	1º
+	-	$A_h = 180 - A_{+-}$	2º
-	-	$A_h = 180 + A_{--}$	3º
-	+	$A_h = 360 - A_{-+}$	4º

4.2. Modelo matemático

Se Y_t é a temperatura média mensal observada para $t = 0, 1, \dots (T-1)$, onde t representa os meses e T o comprimento do período a ser estudado, o modelo matemático será:

$$Y_t = a_0 + \sum_{h=1}^k a_h \sin (h\phi t + A_h) + e_t \quad [5]$$

onde

Y_t = valores observados, no caso, temperaturas médias mensais;

a_0 = média aritmética dos valores observados;

a_h = amplitude do h -ésimo componente harmônico;

A_h = ângulo-fase do h -ésimo componente harmônico;

e_t = efeito residual da t -ésima observação, onde $e_t \sim N(0, \sigma^2)$;

k = maior inteiro que não supera $(\frac{T}{2})$ quando T é par e
 $(\frac{T-1}{2})$ quando T é ímpar;
 $\phi = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular.

Desenvolvendo o seno da soma em [5], obtêm-se

$$Y_t = a_o + \sum_{h=1}^k (a_h \text{ sen } A_h \cos h\phi t + a_h \cos A_h \text{ sen } h\phi t) + e_t \quad [6]$$

Fazendo:

$$p_o = a_o$$

$$p_h = a_h \text{ sen } A_h$$

$$q_h = a_h \cos A_h$$

temos o seguinte modelo matemático para o caso T par:

$$Y_t = p_o + p_1 \cos \phi t + p_2 \cos 2\phi t + \dots + p_{(k-1)} \cos (k-1)\phi t + p_k \cos k\phi t + q_1 \text{ sen } \phi t + q_2 \text{ sen } 2\phi t + \dots + q_{(k-1)} \text{ sen } (k-1)\phi t + e_t \quad [7]$$

O sistema de equações pode ser representado matricialmente por:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

onde:

Y = vetor das observações

X = matriz dos coeficientes

β = vetor dos parâmetros p_h e q_h

ε = vetor dos erros aleatórios, $\sim N(\phi, I\sigma^2)$

sendo

$$Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{(T-1)} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0^\circ & \dots & \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & \dots & \sin 0^\circ \\ 1 & \cos \phi & \dots & \cos k\phi & \sin \phi & \dots & \sin(k-1)\phi \\ 1 & \cos 2\phi & \dots & \cos 2k\phi & \sin 2\phi & \dots & \sin 2(k-1)\phi \\ 1 & \cos 3\phi & \dots & \cos 3k\phi & \sin 3\phi & \dots & \sin 3(k-1)\phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(T-1)\phi & \dots & \cos k(T-1)\phi & \sin(T-1)\phi & \dots & \sin(T-1)(k-1)\phi \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_k \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{(T-1)} \end{bmatrix}$$

4.3. Estimativas dos parâmetros, suas variâncias e covariâncias

O modelo matemático pode ser representado matricialmente por:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Através do método dos quadrados mínimos, obtém-se a solução do sistema de equações normais

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

onde S é uma matriz não singular.

Tem-se

$$\hat{\beta} = S^{-1}X'Y$$

onde

T	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos \phi t \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos 2 \phi t \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \cos k \phi t \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin^2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin \phi t \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin^2 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin 2 \phi t \sin(k-1) \phi t$
$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t \cos \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t \cos 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t \cos k \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t \sin \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin(k-1) \phi t \sin 2 \phi t$	$\sum_{t=0}^{T-1} \sin^2(k-1) \phi t$

S =

quando T é par

A matriz $X'Y$ será:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} y_t & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos \phi t & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2\phi t & \\ \vdots & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos k\phi t & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin \phi t & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin 2\phi t & \\ \vdots & \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin (k-1)\phi t & \end{bmatrix}$$

Através da matriz $\hat{\beta}$, têm-se a estimativa dos parâmetros p_h e q_h .

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t$$

$$\hat{p}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos \phi t$$

$$\hat{p}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2\phi t$$

$$\vdots$$

$$\hat{p}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos k\phi t$$

$$\hat{q}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin \phi t$$

$$\hat{q}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin 2\phi t$$

$$\vdots$$

$$q_{k-1} = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin(k-1) \phi t$$

Para o caso de T ímpar tem-se o seguinte modelo matemático:

$$Y_t = p_0 + p_1 \cos \phi t + p_2 \cos 2\phi t + \dots + p_k \cos k\phi t + \\ + q_1 \sin \phi t + q_2 \sin 2\phi t + \dots + q_k \sin k\phi t + e_t$$

O sistema de equações pode ser representado matricialmente por:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0^\circ & \dots & \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & \dots & \sin 0^\circ \\ 1 & \cos \phi & \dots & \cos k\phi & \sin \phi & \dots & \sin k\phi \\ 1 & \cos 2\phi & \dots & \cos 2k\phi & \sin 2\phi & \dots & \sin 2k\phi \\ 1 & \cos 3\phi & \dots & \cos 3k\phi & \sin 3\phi & \dots & \sin 3k\phi \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(T-1)\phi & \dots & \cos(T-1)k\phi & \sin(T-1)\phi & \dots & \sin(T-1)k\phi \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

Através do métodos dos mínimos quadrados, ob-
tém-se:

$$\hat{\beta} = S^{-1} X'Y$$

A matriz S pode ser escrita, da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} T & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & T/2 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & T/2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & T/2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & T/2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & T/2 \end{bmatrix}$$

e conseqüentemente, tem-se a matriz inversa

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/T & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 2/T & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 2/T & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2/T & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 2/T & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2/T \end{bmatrix}$$

A matriz $X'Y$ será:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos \phi t \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2\phi t \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos k\phi t \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen \phi t \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen 2\phi t \\ \vdots \\ \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sen k\phi t \end{bmatrix}$$

Através da matriz $\hat{\beta}$, tem-se as estimativas dos parâmetros p_h e q_h

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t$$

$$\hat{p}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos \phi t$$

$$\hat{p}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos 2\phi t$$

.

.

.

$$\hat{p}_k = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \cos k\phi t$$

$$\hat{q}_1 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin \phi t$$

$$\hat{q}_2 = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin 2\phi t$$

.

.

.

$$\hat{q}_k = \frac{2}{T} \sum_{t=0}^{T-1} y_t \sin k\phi t$$

ANDERSON (1971) através das fórmulas de Euler

$$\cos \phi = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$

$$\sin \phi = \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi})$$

e

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

comprova que:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 h\phi t = \frac{T}{2} \quad \text{para } h = 1, 2, \dots, (k-1)$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 k\phi t = T \quad \text{quando } T \text{ é par}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 k\phi t = \frac{T}{2} \quad \text{quando } T \text{ é ímpar}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sin^2 h\phi t = \frac{T}{2} \quad \text{para } h = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos h\phi t \sin j\phi t = 0 \quad \text{para } h = 1, \dots, k$$

$$j = 1, \dots, k$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \cos j\phi t \cos h\phi t = 0 \quad \text{para } j \neq h$$

$$j = 1, \dots, k$$

$$h = 1, \dots, k$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sin j\phi t \sin h\phi t = 0 \quad \text{para } j \neq h$$

$$j = 1, \dots, k$$

$$h = 1, \dots, k$$

No apêndice 2, apresenta-se esta demonstração.

As variâncias e covariâncias dos parâmetros estimados são obtidos através da matriz de dispersão:

$$D = S^{-1} \sigma^2$$

$$V(\hat{p}_h) = \frac{2\sigma^2}{T} \text{ para } h = 1, 2, \dots, (k-1)$$

$$V(\hat{p}_k) = \frac{2\sigma^2}{T} \text{ quando } T \text{ é impar.}$$

$$V(\hat{p}_k) = \frac{\sigma^2}{T} \text{ quando } T \text{ é par.}$$

$$V(\hat{q}_h) = \frac{2\sigma^2}{T} \text{ quando } h = 1, 2, \dots, k.$$

Como as covariâncias são todas nulas, conclui-se que os parâmetros estimados não são correlacionados.

4.4. Intervalo de confiança

Determinadas as estimativas dos parâmetros $\hat{p}_h$ e $\hat{q}_h$ e sendo o quadrado médio residual, obtido pela análise de variância para cada contraste, o intervalo de confiança é dado por:

$$\hat{p}_h - t.s(\hat{p}_h) \leq p_h \leq \hat{p}_h + t.s(\hat{p}_h)$$

$$\hat{q}_h - t.s(\hat{q}_h) \leq q_h \leq \hat{q}_h + t.s(\hat{q}_h)$$

onde t é obtido pela tabela de t , para o teste bilateral com $N-1$ graus de liberdade, a um determinado nível de significância.

4.5. Transformação dos dados

Para se realizar uma análise de variância, é necessário verificar se as pressuposições básicas da análise são satisfeitas, caso contrário, deve-se recorrer ao estudo de transformações que visam à homogeneidade, à aditividade e à normalidade da distribuição o que tem sido feito, há muito tempo, por diversos autores.

Segundo BAPTISTA DA SILVA (1977), Bliss (1958) salienta a necessidade de fazer preceder à análise harmônica uma transformação conveniente dos dados, de modo a obter aditividade, homogeneidade das variâncias e normalidade da distribuição.

AMARAL (1968) recomenda uma transformação baseada na fórmula $\sigma_x = \beta x^a$, onde a e β podem ser determinados para cada grupo de observações, sendo x a média de precipitação mensal num período de N anos e σ_x o desvio padrão das observações utilizadas para o cálculo da média, determinado o valor de a aconselha-se a transformação $Y = x^{(1-a)}$.

Neste mesmo trabalho, foram ainda estudadas as precipitações mensais de Morro Velho (MG), extraídas de uma publicação de J.M.P. Memória, onde obteve a transformação $Z = x^{1-0,649}$ ou seja $Z = x^{0,351}$ o que homogeneizou as variâncias, normalizando, possivelmente, a distribuição.

AMARAL e MOTA (1956), analisando dados relativos às precipitações mensais em Pelotas e Ponta Grossa, utilizaram a transformação $Z = \log \left(x + \frac{b}{a} \right)$ onde a e b são coeficientes da equação de regressão do desvio padrão em relação à média.

$$\sigma_x = ax + b \text{ para homogeneizar a variância.}$$

AMARAL e BAPTISTA DA SILVA (1970) estudaram as precipitações pluviométricas pentadais em Pelotas, RS, e concluíram que a transformação $Z = x^{0,2395}$ homogeneizou a variância.

O método utilizado na transformação dos dados no presente trabalho foi descrito por AMARAL *et alii* (1975), onde se cita que: "Se se dispõe de um conjunto de amostras, de cada uma das quais se possa calcular a média $\bar{x}$, e o desvio padrão s_x , representa-se os pares de valores $(\bar{x}, s_x)$ em um sistema cartesiano ortogonal. Se os pontos assim obtidos se dispuserem, aproximadamente, ao longo de uma reta paralela ao eixo das abcissas, pode-se admitir a independência do desvio padrão em relação à média. Se tal não for o caso, a relação de dependência entre o desvio padrão e a média poderá traduzir-se numa expressão analítica,

$$s_x = f(\bar{x})$$

Trata-se, então, de determinar uma função

$$Z = Z(x)$$

cuja variância seja independente de x e, portanto, de Z . Espera-se que essa transformação, homogeneizando a variância, normalize também a distribuição.

$$\text{De } Z = Z(x)$$

tem-se

$$\Delta Z \cong Z'(x) \Delta x$$

elevando ao quadrado e determinando as expectâncias de ambos membros da equação, tem-se:

$$E[(\Delta Z)^2] \cong [Z'(x)]^2 E[(\Delta x)^2]$$

$$\sigma_Z^2 = [Z'(x)]^2 \sigma_x^2,$$

$$\sigma_Z = Z'(x) \sigma_x$$

Pretende-se determinar $Z = Z(x)$, de modo que σ_Z seja constante, isto é,

$$\sigma_Z = Z'(x) \sigma_x = K \quad (\text{constante})$$

Deve-se ter, portanto,

$$Z'(x) \cong \frac{K}{\sigma_x}$$

o que nos leva a

$$Z(x) \cong \int \frac{K}{\sigma_x} dx \quad [8]$$

admitida que a relação entre o desvio padrão e a média é da forma

$$\sigma_x = Bx^a$$

onde x e σ_x são respectivamente a média e o desvio padrão das temperaturas Mensais, deduz-se

$$\log \sigma_x = \log B + a \log x$$

ou

$$Y = b + aX$$

onde

$$Y = \log \sigma_x, \quad b = \log B$$

e

$$X = \log x$$

Determinam-se a seguir os parâmetros a e b pela regressão linear.

Voltando em [8], temos:

$$Z(x) \cong \int \frac{K}{\sigma_x} dx, \text{ substituindo } \sigma_x$$

$$Z(x) = \int \frac{K}{Bx^a} dx \quad \text{e se}$$

$a \neq 1$

$$Z(x) = \frac{K}{B} \int x^{-a} dx$$

$$Z(x) = \frac{K}{B} \cdot \frac{x^{1-a}}{1-a} + c$$

e fazendo,

$$c = 0, k = \frac{K}{B(1-a)}$$

obtêm-se

$$Z(x) = k x^{1-a}$$

k é escolhido de modo a tornar os valores transformados da mesma grandeza dos valores originais, a transformação usada no presente trabalho foi $Z = x^{1,84216}$ e utilizou-se $k = 1$.

4.6. Análise da variância

A análise de variância foi usada com o objetivo de testar a estabilidade dos componentes harmônicos, considerando observações mensais durante N anos.

De acordo com AMARAL (1968), para um conjunto de observações de N anos, têm-se N+1 análises harmônicas, uma para cada ano e uma análise conjunta dos anos. Aplica-se a análise de variância aos contrastes p e q e se as variâncias residuais destes contrastes forem homogêneas, podemos juntá-las em uma única análise da variância da amplitude da onda.

4.6.1. Teste de homogeneidade de variâncias

Uma das pressuposições básicas para se efetuar uma análise de variância é a homogeneidade de variância, o que se pode verificar por meio do teste de Bartlett.

Dadas K estimativas de variâncias, desejamos testar a hipótese H_0 de que:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_K^2$$

H_a : pelo menos uma variância difere das outras.

Segundo BARTLETT (1937), o método para testar se as estimativas de variância com (n-1) graus de liberdade, de K populações distribuídas normalmente, é dado por:

$$M = 2,3026 (n-1) \left[K \log \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^K \log s_i^2 \right]$$

onde

s_i^2 = estimativa da variância para cada amostra

$\bar{s}^2$ = estimativa da variância média.

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^K s_i^2}{K}$$

Sob a hipótese de nulidade que cada s_i^2 é uma estimativa da mesma σ^2 , a razão $\frac{M}{C}$ tem distribuição aproximada de χ^2 com (K-1) graus de liberdade, onde

C é um fator de correção, dado por:

$$C = 1 + \frac{K+1}{3K(n-1)}$$

4.6.2. Teste de Normalidade

Para se verificar a normalidade dos dados foi utilizado o teste normalidade para grandes amostras, apresentado por FISHER (1941), onde se comparam as medidas de assimetria (g_1) e curtose (g_2) dos contrastes, com as respectivas medidas de assimetria ($g_1 = 0$) e curtose ($g_2 = 0$) da distribuição normal, através do teste t.

As estatísticas g_1 e g_2 são estimadas através de:

$$\hat{g}_1 = \sqrt{\frac{K_3^2}{K_2^3}}$$

onde

$$K_3 = \frac{N \sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^3}{(N-1)(N-2)}$$

$$K_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^2}{N - 1}$$

onde N é o número de anos de observação.

$$\hat{g}_2 = \frac{K_4}{K_2^2}$$

onde

$$K_4 = \frac{N}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left\{ (N+1) \sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^4 - \frac{3(N-1)}{N} \left[\sum_{i=1}^N (\hat{p}_{1i} - \bar{p}_1)^2 \right]^2 \right\}$$

Segundo FISHER (1941), se as amostras são grandes, g_1 e g_2 têm distribuição normal com médias zero e variâncias dadas por:

$$\hat{V}(\hat{g}_1) = \frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}$$

$$\hat{V}(\hat{g}_2) = \frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}$$

Para testar g_1 e g_2 têm-se as seguintes hipóteses

$$H_0 : g_1 = 0$$

$$H_0 : g_2 = 0$$

$$H_1 : g_1 \neq 0$$

$$H_1 : g_2 \neq 0$$

$$t_1 = \frac{\hat{g}_1}{\sqrt{\hat{V}(\hat{g}_1)}}$$

$$t_2 = \frac{\hat{g}_2}{\sqrt{\hat{V}(\hat{g}_2)}}$$

A distribuição de cada contraste será considerada aproximadamente normal se ao nível α de significância os valores de t não superarem os da tabela com $(N-1)$ graus de liberdade.

4.6.3. Teste de aditividade de Tukey

Este teste é aplicado para saber se uma transformação é necessária ou para sugerir uma transformação adequada ou para estudar se uma transformação tem procedimento aditivo.

GROSH e SHARMA (1963) compararam o poder do teste de Tukey para não-aditividade com o poder do teste F não central e comprovaram que geralmente o teste de Tukey é mais poderoso, sendo que o teste F é ligeiramente e mais poderoso para valores pequenos de $\sum \frac{\alpha_i^2}{\sigma^2} = \sum \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}$.

TUKEY (1949) mostra como isolar um grau de liberdade do resíduo, quando os dados estão dispostos na forma de uma tabela de dupla entrada (linhas x colunas).

O modelo matemático para o caso dos efeitos aditivos é dado por:

$$x_{ij} = m + l_i + c_j + e_{ij}$$

onde

x_{ij} é o valor relativo a linha i e coluna j

l_i = efeito da linha i

c_j = efeito da coluna j

e_{ij} = erro relativo ao valor x_{ij} .

Considerando o modelo matemático onde os efeitos não são aditivos, tem-se:

$$x_{ij} = m + l_i + c_j + \lambda l_i c_j + e_{ij}$$

O teste de aditividade verifica as hipóteses:

$$H_0 : \lambda = 0 \text{ (modelo aditivo)}$$

$$H_a : \lambda \neq 0 \text{ (modelo não-aditivo)}$$

Na análise de variância a interação linhas x colunas será resíduo se tivermos $\lambda = 0$. Se $\lambda \neq 0$, essa interação não é a medida adequada da variação casual.

Se a soma de quadrados não-aditividade for significativo, indica que a diferença entre linhas não é constante para as diversas colunas, como deveria ser se os efeitos fossem aditivos.

A soma de quadrados não-aditividade é dado por:

$$\text{S.Q. Não-aditiv.} = \frac{[\sum_{i,j} x_{ij} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})]^2}{\sum_{i,j} (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2}$$

onde

$\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}$ = estimativa do efeito da linha i

$\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}$ = estimativa do efeito da coluna j

Análise de variância

Causas de variação	GL	SQ
Linhas (L)	I-1	SQ L
Colunas (C)	J-1	SQ C
[res. (inter LxC)]	[(I-1)(J-1)]	SQ res.
Não-aditividade	1	SQ Não-adit.
Novo resíduo	(I-1)(J-1)-1	SQ Novo res.
Total	IJ-1	SQ Total

Onde:

SQ Novo Resíduo = SQ res. - SQ não-aditividade

SQ resíduo = SQ Total - SQ L - SQ C

A não aditividade pode ser testada pelo teste

F.

$$F = \frac{\text{QM Não-aditividade}}{\text{QM Novo resíduo}}$$

com 1 e (IJ - I - J) graus de liberdade, ou

$$t = \sqrt{\frac{\text{QM Não-aditividade}}{\text{QM Novo resíduo}}}$$

com (IJ - I - J) graus de liberdade.

Se a não-aditividade for significativa, rejeita-se a hipótese de nulidade a um nível α de probabilidade. O modelo apropriado não é aditivo. Se essa não-aditividade for devida à interação dos efeitos principais, deve-se fazer um estudo de transformação dos dados.

4.7. Quadros de análise de variância

Segundo AMARAL (1968) temos o seguinte quadro de análise de variância:

TABELA 1. Análise de variância do contraste $\hat{p}_1$.

Causa de variação	GL	SQ
Contraste p_1	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j} \right)^2}{N} \right] = \hat{P}_{11}$
Variação do contraste entre anos	$N-1$	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j} \right)^2}{N} \right] = \hat{P}_{12}$
Variação total	N	$\frac{T}{2} \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{1j}^2 \right)$

TABELA 2. Análise de variância do contraste $\hat{q}_1$.

Causa de variação	GL	SQ
Contraste q_1	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j})^2}{N} \right] = \hat{Q}_{11}$
Variação do <u>con</u> traste entre <u>anos</u>	N-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j}^2 - \frac{(\sum \hat{q}_{1j})^2}{N} \right] = \hat{Q}_{12}$
Variação total	N	$\frac{T}{2} (\sum_{j=1}^N \hat{q}_{1j}^2)$

TABELA 3. Análise de variância da amplitude $\hat{a}_1$.

Causa de variação	GL	SQ
Amplitude a_1	2	$\hat{P}_{11} + \hat{Q}_{11}$
Variação da amplitude entre anos	2(N-1)	$\hat{P}_{12} + \hat{Q}_{12}$
Variação total	2N	$\hat{P}_{11} + \hat{P}_{12} + \hat{Q}_{11} + \hat{Q}_{12}$

De maneira análoga para análise da variância

dos contrastes $\hat{p}_2, \hat{p}_3, \dots, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \dots$

TABELA 4. Análise de variância do contraste $\hat{p}_k$, para o caso
T ímpar.

Causa de variação	GL	SQ
Contraste p_k	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj} \right)^2}{N} \right] = \hat{p}_{k1}$
Variação do con- traste entre anos	N-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj} \right)^2}{N} \right] = \hat{p}_{k2}$
Variação total	N	$\frac{T}{2} \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj}^2 \right)$

TABELA 5. Análise de variância do contraste $\hat{q}_k$, para o caso T-ímpar.

Causa de variação	GL	SQ
Contraste q_k	1	$\frac{T}{2} \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{kj} \right)^2}{N} \right] = \hat{Q}_{k1}$
Variação do contraste entre anos	N-1	$\frac{T}{2} \left[\sum_{j=1}^N \hat{q}_{kj}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{kj} \right)^2}{N} \right] = \hat{Q}_{k2}$
Variação total	N	$\frac{T}{2} \left(\sum_{j=1}^N \hat{q}_{kj}^2 \right)$

TABELA 6. Análise de variância da amplitude $\hat{a}_k$ para o caso T ímpar.

Causa de variação	GL	SQ
Amplitude a_k	2	$\hat{P}_{k1} + \hat{Q}_{k1}$
Variação do contraste entre anos	2(N-1)	$\hat{P}_{k2} + \hat{Q}_{k2}$
Variação total	2N	$\hat{P}_{k1} + \hat{P}_{k2} + \hat{Q}_{k1} + \hat{Q}_{k2}$

TABELA 7. Análise de variância do contraste $\hat{p}_k$, para o caso de T par.

Causa de variação	GL	SQ
Contraste p_k	1	$T \left[\frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj} \right)^2}{N} \right]$
Variação do contraste entre anos	N-1	$T \left[\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj} \right)^2}{N} \right]$
Variação total	N	$T \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_{kj}^2 \right)$

Determinados os componentes harmônicos significativos, através da análise de variância, podemos estabelecer a equação de regressão.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados originais das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, num período de 91 anos (1890 a 1980), utilizados na análise harmônica, são encontrados no apêndice 1.

5.1. Transformação dos dados

Com a finalidade de atender às exigências do modelo matemático, foram realizados os testes de homogeneidade, aditividade e normalidade.

O teste de homogeneidade de variância de Bartlett, aplicado aos dados originais (série de 91 anos), apresentou um valor de qui-quadrado ($\chi^2 = 39.4064$), significativo ao nível de 1% de probabilidade ($\chi^2_{0,01,11} = 24.7000$) o que

indica heterogeneidade de variâncias, isto é, houve necessidade de transformação dos dados originais, conforme se verifica na Tabela 8.

A transformação dos dados que melhor se ajustou foi $Y = X^{1,84216}$, sobre o qual o teste de Bartlett revelou um valor de $(\chi^2 = 22,7539)$, não significativo ao nível de 1% de probabilidade ($\chi^2_{0,01,11} = 24.700$), o que indicou homogeneidade de variâncias. Os resultados são apresentados na Tabela 9.

Nas Tabelas 10 e 11 apresenta-se o teste de aditividade de Tukey aplicado aos dados originais e transformados, em que se verificou para os dados originais um valor de $F = 12,3976$, significativo ao nível de 5% de probabilidade e, para os dados transformados $F = 0,9752$, não significativo ao nível de 5% de probabilidade.

Com relação à normalidade dos dados, realizamos o teste de normalidade apresentado por FISHER (1941), baseado nas estatísticas g_1 e g_2 , medidas de assimetria e curtose.

Através do teste t, foram testadas a significância dos desvios de normalidade de g_1 e g_2 ao nível de 5% de probabilidade, para os dados originais e para os dados transformados.

Os desvios da normalidade dos dados originais foram significativos nos meses de janeiro, novembro e dezembro. Para os dados transformados, o teste mostrou-se significativo nos meses de janeiro e dezembro, conforme se verifica nas Tabelas 12 e 13.

Assim sendo, pode-se concluir que a transformação utilizada, além de homogeneizar as variâncias, conseguiu aditividade dos efeitos entre meses e anos e conseguiu normalizar parcialmente os dados.

5.2. Análise harmônica

A análise harmônica permite decompor uma variação periódica de período T em ondas senoidais de período T , $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, etc..

Considerando os dados de temperaturas médias mensais com período $T = 12$ meses, e cada mês como unidade de tempo, a variação anual pode decompor-se em seis ondas senoidais de período 12, 6, 4, 3, $2\frac{2}{5}$ e 2 meses.

TABELA 8. Médias de temperaturas ($^{\circ}\text{C}$), coeficiente de variação, variância e log. das variâncias para o teste de homogeneidade de variância de Bartlett

Meses	Média	CV(%)	variância	log da variância
Janeiro	22,758	4,075	0,860	-0,065
Fevereiro	22,802	3,920	0,799	-0,097
Março	22,426	3,709	0,692	-0,159
Abril	20,514	5,082	1,087	0,036
Maió	18,172	6,499	1,395	0,145
Junho	16,908	6,800	1,322	0,121
Julho	16,720	6,993	1,367	0,136
Agosto	18,294	6,741	1,521	0,182
Setembro	19,695	6,759	1,772	0,249
Outubro	20,728	5,663	1,378	0,139
Novembro	21,501	4,478	0,927	-0,033
Dezembro	22,290	5,121	1,303	0,115
Total			14,423	0,769

Média das variâncias = 1,202.

Log. da média das variâncias = 0,080

Qui-quadrado (corrigido) = 39,406**

Valor qui-quadrado (11 GL, 1%) = 24.700

** significativo ao nível de 1% de probabilidade.

TABELA 9. Teste de homogeneidade de variâncias de Bartlett aplicado aos dados transformados.

Meses	variância	Log da variância
Janeiro	575,967	2,760
Fevereiro	529,439	2,724
Março	443,564	2,647
Abril	607,517	2,784
Maio	615,566	2,789
Junho	516,389	2,713
Julho	531,816	2,726
Agosto	690,075	2,839
Setembro	928,652	2,968
Outubro	776,520	2,890
Novembro	542,891	2,735
Dezembro	778,541	2,891
Total	7536,937	33,466

Média das variâncias = 628,078

Log da média das variâncias = 2,798

Qui-quadrado (corrigido) = 22,754 ns

Valor qui-quadrado(11 GL, 1%) = 24,700

ns = não significativo ao nível de 1% de probabilidade.

TABELA 10. Teste de aditividade de Tukey aplicado aos dados originais.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Meses	11	5114,2500	464,9318	
Anos	90	492,0000	5,4667	
Resíduo (Interação M x A)	990	787,5000	0,7954	
Não-aditividade	1	9,7495	9,7495	12,40*
Novo-resíduo	989	777,7505	0,7864	
Total	1091	6393,7500		

* significativo ao nível de 5% de probabilidade.

TABELA 11. Teste de aditividade de Tukey aplicado aos dados transformados.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Meses	11	2640304,00	240027,64	
Anos	90	243328,00	2703,64	
Resíduo (Interação M x A)	990	428704,00	433,03	
Não-aditividade	1	422,29	422,29	0,9752 ns
Novo-resíduo	989	428281,70	433,04	
Total	1091	3741039,99		

ns = não significativo

TABELA 12. Teste de normalidade de Fisher aplicado aos dados originais.

Meses	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	t_1	t_2
Janeiro	0,604	0,838	2,39*	1,67
Fevereiro	0,204	-0,716	0,81	1,43
Março	0,044	-0,218	0,18	0,44
Abril	0,335	0,825	1,32	1,65
Maió	-0,324	-0,097	1,28	0,19
Junho	-0,329	0,065	1,30	0,13
Julho	-0,060	-0,353	0,24	0,70
Agosto	-0,028	-0,073	0,11	0,15
Setembro	0,325	0,820	1,28	1,64
Outubro	0,119	-0,248	0,47	0,49
Novembro	-0,477	1,110	1,89	2,22*
Dezembro	-1,419	8,060	5,60*	16,09*

$$s(\hat{g}_1) = 0,253$$

$$s(\hat{g}_2) = 0,501$$

* significativo ao nível de 5% de probabilidade.

TABELA 13. Teste de normalidade de Fisher aplicado aos dados transformados.

Meses	$\hat{g}_1$	$\hat{g}_2$	t_1	t_2
Janeiro	0,728	1,141	2,87*	2,28*
Fevereiro	0,265	-0,672	1,05	1,34
Março	0,126	-0,211	0,50	0,42
Abril	0,501	0,857	1,98	1,71
Maio	-0,180	-0,247	0,71	0,49
Junho	-0,163	-0,044	0,64	0,09
Julho	0,083	-0,329	0,33	0,66
Agosto	0,133	-0,052	0,53	0,10
Setembro	0,548	1,025	2,16	2,05
Outubro	0,241	-0,161	0,95	0,32
Novembro	-0,319	0,843	1,26	1,68
Dezembro	-0,924	5,469	3,65*	10,92*

$$s(\hat{g}_1) = 0,253$$

$$s(\hat{g}_2) = 0,501$$

* significativo ao nível de 5% de probabilidade.

O modelo matemático para análise será:

$$Y_t = p_0 + p_1 \cos \phi t + p_2 \cos 2\phi t + p_3 \cos 3\phi t + p_4 \cos 4\phi t + \\ + p_5 \cos 5\phi t + p_6 \cos 6\phi t + q_1 \sin \phi t + q_2 \sin 2\phi t + \\ + q_3 \sin 3\phi t + q_4 \sin 4\phi t + q_5 \sin 5\phi t$$

$$\text{onde } \phi = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, 11.$$

Nas Tabelas 1A a 92A apresenta-se a análise harmônica, para cada ano e no total dos 91 anos, das temperaturas médias mensais transformadas ($Y = X^{1,84216}$) no período de 1890 a 1980. Através da solução do sistema de equações, determinam-se as estimativas dos parâmetros, os componentes harmônicos p_j e q_j e conseqüentemente, a amplitude a_j e o ângulo-fase A_j de cada onda senoidal.

TABELA 1A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1890.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
249,7001	0,0		
82,1329	-8,3782	82,5591	95,8246
-2,9815	20,1192	20,3389	351,5706
-2,8142	-8,3808	8,8406	198,5617
-4,2016	-3,6436	5,5614	229,0685
-6,5034	-3,3950	7,3362	242,4339
7,1599	0,0	7,1599	90,0000

TABELA 2A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1891.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
256,9780	0,0		
72,4438	-6,6642	72,7497	95,2561
-10,3417	14,9900	18,2113	325,3977
-1,1269	5,3678	5,4848	348,1438
-0,9416	-10,8665	10,9072	184,9522
0,8774	-0,9935	1,3254	138,5516
-0,5449	0,0	0,5449	270,0000

TABELA 3A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais
de Campinas, SP - 1892.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
245,6106	0,0		
71,0025	7,5162	71,3992	83,9572
-2,1116	22,7739	22,8716	354,7026
-1,7119	0,8923	1,9305	297,5295
7,5317	2,5765	7,9603	71,1145
11,9150	3,9043	12,5383	71,8569
-4,5599	0,0	4,5599	270,0000

TABELA 4A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais
de Campinas, SP - 1893.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
233,8901	0,0		
76,6073	4,0452	76,7140	86,9773
9,7776	3,3513	10,3360	71,0809
-7,4985	-6,8280	10,1414	227,6794
0,3151	-5,9501	5,9584	176,9689
1,1932	-8,6636	8,7454	172,1585
-4,5891	0,0	4,5891	270,0000

TABELA 5A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais
de Campinas, SP - 1894.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
251,0364	0,0		
93,5116	-13,9679	94,5490	98,4956
-8,3566	20,8957	22,5047	338,2026
5,5752	2,0740	5,9485	69,5944
11,1915	7,6396	13,5504	55,6816
5,9659	-6,4566	8,7909	137,2624
3,3726	0,0	3,3726	90,0000

TABELA 6A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais
de Campinas, SP - 1895.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
259,7449	0,0		
78,9797	-12,8763	80,0224	99,2597
-5,6879	1,5936	5,9070	285,6516
-10,2160	-18,1703	20,8453	209,3462
-11,2866	-7,4662	13,5326	236,5151
-0,0289	-17,0151	17,0151	180,0973
-6,8607	0,0	6,8607	270,0000

TABELA 7A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1896.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
264,8367	0,0		
76,4167	-20,6336	79,1534	105,1104
-4,9316	8,3812	9,7244	329,5266
-2,0306	-6,0630	6,3940	198,5168
-9,7810	-6,2687	11,6174	237,3436
1,3508	2,8010	3,1097	25,7455
-3,3691	0,0	3,3691	270,0000

TABELA 8A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1897.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
260,6179	0,0		
77,6223	3,9475	77,7226	87,0886
-16,9692	-5,6889	17,8974	251,4662
3,5017	-17,6843	18,0276	168,7998
-0,2830	2,3757	2,3925	353,2065
0,5334	-6,9890	7,0094	175,6356
-7,6781	0,0	7,6781	270,0000

TABELA 9A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1898.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
253,6018	0,0		
78,7728	9,7654	79,3757	82,9331
5,7022	13,4656	14,6232	22,9511
-11,7099	-9,9608	15,3733	229,6145
-3,2796	-7,1559	7,8716	204,6221
5,7524	4,4333	7,2625	52,3793
-6,3475	0,0	6,3475	270,0000

TABELA 10A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1899.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
268,9421	0,0		
62,0057	-0,5435	62,0081	90,5022
-22,0555	24,6946	33,1099	318,2310
-11,0946	-8,7065	14,1030	231,8771
1,4502	9,3671	9,4787	8,8003
-4,8051	-10,6122	11,6494	204,3605
5,1861	0,0	5,1861	90,0000

TABELA 11A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1900

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
235,8427	0,0		
45,7135	2,8095	45,7998	86,4830
-17,9828	29,5432	34,5858	328,6711
-5,5742	22,2690	22,9561	345,9468
7,5842	13,7002	15,6593	28,9683
15,0294	5,7993	16,1095	68,9000
16,5217	0,0	16,5217	90,0000

TABELA 12A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1901.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
240,9885	0,0		
63,5764	-15,7499	65,4982	103,9140
-12,7840	15,5749	20,1497	320,6204
-6,5375	3,5704	7,4489	298,6409
9,6690	6,5709	11,6905	55,8007
-1,1100	-5,3442	5,4583	191,7334
0,8500	0,0	0,8500	90,0000

TABELA 13A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1902.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
262,4011	0,0		
65,2886	-4,0100	65,4117	93,5147
-7,1303	-3,8209	8,0895	241,8147
-5,3199	0,8420	5,3861	278,9939
-2,6154	0,4637	2,6562	280,0530
-7,5591	10,7016	13,1021	324,7644
7,1698	0,0	7,1698	90,0000

TABELA 14A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1903.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
248,9491	0,0		
65,6487	1,1620	65,6590	88,9859
-5,0930	17,3159	18,0494	343,6101
-10,3621	-0,2830	10,3660	268,4353
-12,4959	-8,7606	15,2609	234,9666
5,2938	-0,3133	5,3031	93,3866
0,2373	0,0	0,2373	90,0000

TABELA 15A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1904.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
233,9950	0,0		
67,5862	-7,6786	68,0209	96,4818
-11,4286	22,7120	25,4253	333,2883
-13,1029	-7,9061	15,3034	238,8937
1,1477	-9,0176	9,0904	172,7470
2,6689	-0,2269	2,6785	94,8602
6,3930	0,0	6,3930	90,0000

TABELA 16A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1905.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
247,5454	0,0		
68,4937	-10,8179	69,3427	98,9752
-9,0691	7,9320	12,0485	311,1736
7,3120	2,0410	7,5915	74,4037
1,1901	2,4328	2,7083	26,0670
-2,3205	-1,1488	2,5893	243,6616
-0,9163	0,0	0,9163	270,0000

TABELA 17A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1906.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
251,5461	0,0		
43,9144	-10,3146	45,1095	103,2181
-12,0417	2,1701	12,2356	280,2158
1,2597	-1,5327	1,9839	140,5844
-1,9377	2,2207	2,9472	318,8936
0,1947	-8,9801	8,9822	178,7582
-5,3984	0,0	5,3984	270,0000

TABELA 18A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1907.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
235,4075	0,0		
82,5225	-10,1440	83,1436	97,0079
-11,1742	5,8417	12,6091	297,5996
-3,8634	-6,4321	7,5032	210,9908
-7,7764	-21,8048	23,1500	199,6281
-3,0838	4,8485	5,7461	327,5427
-4,7716	0,0	4,7716	270,0000

TABELA 19A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1908.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
241,8013	0,0		
68,4026	-4,0901	68,5248	93,4220
0,8338	5,2898	5,3552	8,9572
-6,4821	-7,6048	9,9926	220,4434
2,8091	-7,6847	8,1820	159,9202
-4,2546	3,3163	5,3944	307,9351
-0,9794	0,0	0,9794	270,0000

TABELA 20A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1909.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
229,2733	0,0		
72,2827	-7,5926	72,6803	95,9964
6,8308	18,4299	19,6551	20,3364
-7,2579	4,8887	8,7508	303,9629
-2,9865	9,6805	10,1307	342,8545
1,2038	13,5644	13,6177	5,0716
0,2826	0,0	0,2826	90,0000

TABELA 21A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1910.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
237,3022	0,0		
77,8028	7,7247	78,1853	84,3299
0,3513	22,3540	22,3567	0,9004
-0,8446	-9,9274	9,9633	184,8627
1,2471	-4,3822	4,5562	164,1149
17,9520	10,7453	20,9222	59,0969
-6,1346	0,0	6,1346	270,0000

TABELA 22A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1911.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
235,7388	0,0		
89,9675	-4,4276	90,0764	92,8175
-6,4250	8,6702	10,7913	323,4597
-0,1205	-3,3210	3,3232	182,0784
-7,3799	6,4397	9,7945	311,1082
-0,5088	7,7629	7,7796	356,2502
3,5132	0,0	3,5132	90,0000

TABELA 23A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1912.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
241,1112	0,0		
70,7833	12,5785	71,8923	79,9235
-3,1259	-2,6821	4,1188	229,3697
-7,5679	0,2944	7,5736	272,2275
-13,0482	13,6590	18,8898	316,3101
10,5034	-2,3224	10,7571	102,4680
0,9723	0,0	0,9723	90,0000

TABELA 24A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1913.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
240,8944	0,0		
65,9832	-0,2799	65,9838	90,2432
-12,7593	12,9294	18,1651	315,3794
-8,9703	-2,2885	9,2576	255,6880
1,9367	0,2903	1,9583	81,4750
-5,2379	-3,1680	6,1214	238,8336
0,5328	0,0	0,5328	90,0000

TABELA 25A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1914.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
260,5825	0,0		
59,4352	-12,7568	60,7888	102,1139
-8,2474	4,9457	9,6167	300,9497
-5,3186	12,5704	13,6493	337,0662
13,6357	-14,8626	20,1700	137,4651
9,4177	-0,1437	9,4188	90,8744
0,7772	0,0	0,7772	90,0000

TABELA 26A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1915.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
258,7561	0,0		
76,3077	14,6345	77,6983	79,1434
-0,5594	16,2976	16,3072	358,0339
16,7908	-7,3781	18,3403	113,7215
6,6886	5,2082	8,4772	52,0928
-10,1487	-2,8726	10,5474	254,1955
-7,0307	0,0	7,0307	270,0000

TABELA 27A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1916.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
242,4485	0,0		
48,4749	-6,0595	48,8521	97,1253
-3,7421	15,9810	16,4133	346,8210
10,2891	-6,8871	12,3813	123,7970
-6,9100	-3,6498	7,8146	242,1571
6,1057	8,0471	10,1013	37,1894
7,9760	0,0	7,9759	90,0000

TABELA 28A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1917.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
218,6522	0,0		
69,8537	-7,7051	70,2774	96,2945
-8,2223	25,5211	26,8129	342,1421
-2,2619	-1,2928	2,6053	240,2497
6,8774	-8,3020	10,7806	140,3614
-0,3664	1,9565	1,9906	349,3926
0,2821	0,0	0,2821	90,0000

TABELA 29A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1918.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
234,4126	0,0		
69,8897	8,9847	70,4648	82,6745
-11,5727	13,5574	17,8250	319,5156
15,4191	7,5663	17,1755	63,8622
8,6900	-6,2442	10,7007	125,6990
-6,9089	-9,5721	11,8050	215,8209
-2,7652	0,0	2,7652	270,0000

TABELA 30A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1919.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
239,5643	0,0		
58,5855	-3,5051	58,6902	93,4240
0,6702	7,8665	7,8950	4,8697
9,1558	17,8467	20,0582	27,1589
-3,9490	-17,2563	17,7024	192,8897
-16,5075	-20,9754	26,6920	218,2024
-0,2593	0,0	0,2593	270,0000

TABELA 31A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1920.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
242,8811	0,0		
71,4092	3,0377	71,4737	87,5640
-5,7043	1,4815	5,8936	284,5593
-4,5397	6,4695	7,9033	324,9424
12,9346	-5,4488	14,0355	112,8438
-2,6055	5,7673	6,3285	335,6882
2,9680	0,0	2,9680	90,0000

TABELA 32A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1921.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
243,4253	0,0		
70,2781	3,7178	70,3763	86,9717
-5,0069	18,5408	19,2049	344,8877
1,7738	-7,0512	7,2709	165,8797
-14,8313	2,6031	15,0580	279,9548
5,8267	-8,5208	10,3225	145,6351
-4,3296	0,0	4,3296	270,0000

TABELA 33A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1922.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
245,3374	0,0		
59,5012	10,3754	60,3990	80,1085
-13,5462	9,9167	16,7881	306,2065
9,8645	-14,5478	17,5769	145,8597
0,0173	-2,8770	2,8770	179,6564
5,3494	6,5286	8,4403	39,3301
0,6405	0,0	0,6405	90,0000

TABELA 34A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1923.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
241,1141	0,0		
66,3847	-3,7862	66,4925	93,2644
-8,4920	-7,1152	11,0788	230,0411
0,7673	-16,4671	16,4849	177,3322
-8,1798	-6,8622	10,6771	230,0059
2,1350	0,0811	2,1366	87,8253
-13,7750	0,0	13,7750	270,0000

TABELA 35A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1924.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
237,1011	0,0		
57,6299	22,3446	61,8101	68,8074
-14,0637	11,4902	18,1607	309,2490
-3,0955	-6,0553	6,8006	207,0768
-8,3490	-10,1032	13,1065	219,5695
-4,1370	2,0070	4,5981	295,8796
2,8806	0,0	2,8806	90,0000

TABELA 36A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1925.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
251,2635	0,0		
81,5850	-3,7677	81,6719	92,6442
-21,2740	17,2789	27,4070	309,0837
4,6206	-21,3499	21,8442	167,7881
-6,5300	6,3846	9,1326	314,3552
-4,3453	2,8761	5,2109	303,5000
-10,6668	0,0	10,6668	270,0000

TABELA 37A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1926.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
267,0601	0,0		
64,0146	-12,8308	65,2878	101,3339
-12,3612	14,8210	19,2993	320,1707
4,7437	7,1143	8,5508	33,6944
-10,3850	-14,2789	17,6561	216,0282
10,8042	10,4143	15,0063	46,0525
-1,3834	0,0	1,3834	270,0000

TABELA 38A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1927.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
258,3660	0,0		
67,8374	2,3290	67,8774	88,0336
-20,9775	1,0689	21,0047	272,9167
-2,3896	-14,9831	15,1725	189,0617
0,5527	-5,6846	5,7114	174,4472
8,0375	3,2275	8,6613	68,1214
0,8093	0,0	0,8093	90,0000

TABELA 39A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1928.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
283,8884	0,0		
77,2046	2,2543	77,2374	88,3274
-22,6761	10,0160	24,7897	293,8311
-2,9575	-3,9308	4,9191	216,9578
7,2321	-4,3957	8,4632	121,2915
-6,0102	9,1425	10,9411	326,6794
-1,1561	0,0	1,1561	270,0000

TABELA 40A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1929.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
253,7212	0,0		
73,8377	-6,9046	74,1598	95,3423
2,4580	23,3432	23,4722	6,0110
-0,6257	1,4083	1,5410	336,0432
-0,8723	-14,8124	14,8381	183,3701
-2,0698	-5,5208	5,8961	200,5512
-1,3694	0,0	1,3694	270,0000

TABELA 41A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1930.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
259,6204	0,0		
44,4851	6,5657	44,9670	81,6040
-7,1100	2,2257	7,4502	287,3823
-0,0061	-2,4792	2,4792	180,1401
-5,1942	-6,2934	8,1600	219,5344
11,9359	-1,9531	12,0946	99,2934
-4,1022	0,0	4,1022	270,0000

TABELA 42A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1931.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
256,4048	0,0		
72,0227	-9,9686	72,7093	97,8803
-0,7021	5,5290	5,5734	352,7625
-8,9125	-11,4719	14,5271	217,8437
12,4488	0,8494	12,4777	86,0967
5,1264	-11,0338	12,1666	155,0800
-0,8626	0,0	0,8626	270,0000

TABELA 43A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1932.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
263,6567	0,0		
63,6260	-2,4094	63,6716	92,1687
-25,2814	16,1765	30,0138	302,6135
-10,7027	1,7860	10,8507	279,4739
5,0288	-3,4863	6,1191	124,7326
-16,8100	12,8874	21,1816	307,4756
-1,9809	0,0	1,9809	270,0000

TABELA 44A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1933.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
247,6083	0,0		
72,9548	-4,2712	73,0797	93,3507
-6,8150	21,9580	22,9913	342,7573
5,7638	1,5419	5,9665	75,0235
-2,4832	2,3046	3,3878	312,8647
-6,5035	0,0372	6,5036	270,3279
-0,8304	0,0	0,8304	270,0000

TABELA 45A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1934.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
260,1550	0,0		
65,6439	3,6591	65,7458	86,8094
-12,5556	10,2423	16,2033	309,2058
-6,0740	0,2748	6,0802	272,5903
-7,9458	3,7001	8,7650	294,9700
5,0178	7,2743	8,8370	34,5977
-2,1107	0,0	2,1107	270,0000

TABELA 46A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1935.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
256,3032	0,0		
72,2437	-7,6665	72,6493	96,0577
6,4661	6,1643	8,9336	46,3688
-14,2813	-2,4574	14,4912	260,2363
-3,1661	-14,3809	14,7253	192,4162
0,1460	-1,6495	1,6560	174,9420
-0,3668	0,0	0,3668	270,0000

TABELA 47A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1936.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
263,4812	0,0		
64,6760	10,1924	65,4741	81,0442
-4,3095	-15,4477	16,0376	195,5877
11,1347	8,1550	13,8017	53,7813
6,5319	-2,4648	6,9815	110,6736
1,8276	-5,6183	5,9081	161,9812
2,7779	0,0	2,7779	90,0000

TABELA 48A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1937.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
249,3254	0,0		
56,6535	0,4036	56,6549	89,5918
-3,6905	27,7055	27,9502	352,4124
-12,1518	1,0218	12,1947	274,8064
-5,8647	-0,4628	5,8830	265,4878
0,2477	2,9149	2,9254	4,8577
-2,1397	0,0	2,1397	270,0000

TABELA 49A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1938.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
280,0083	0,0		
76,0040	9,6598	76,6153	82,7567
-2,1158	18,2862	18,4082	353,3999
-3,9609	0,6781	4,0185	279,7144
1,7354	-3,9846	4,3461	156,4656
12,9838	3,0289	13,3324	76,8687
8,6128	0,0	8,6128	90,0000

TABELA 50A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1939.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
266,0757	0,0		
72,9205	1,8435	72,9438	88,5517
-23,1027	17,4906	28,9768	307,1284
0,5664	2,7294	2,7876	11,7234
-5,6432	5,5790	7,9354	314,6719
7,8100	-11,3627	13,7879	145,4978
-3,8408	0,0	3,8408	270,0000

TABELA 51A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1940.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
281,1216	0,0		
58,7368	0,0888	58,7369	89,9133
-4,1511	0,9020	4,2479	282,2588
-1,1271	-24,3608	24,3869	182,6489
0,7716	-15,6078	15,6269	177,1696
-3,6856	-9,7499	10,4233	200,7074
-1,3827	0,0	1,3827	270,0000

TABELA 52A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1941.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
267,5632	0,0		
70,3189	26,8589	75,2738	69,0951
-3,3733	10,9409	11,4491	342,8645
-0,9917	-11,1942	11,2381	185,0628
6,5481	25,7997	26,6178	14,2413
14,3181	-3,8910	14,8374	105,2033
-8,2633	0,0	8,2633	270,0000

TABELA 53A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1942.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
255,2059	0,0		
74,7610	-3,1931	74,8291	92,4457
-14,7362	19,1476	24,1616	322,4177
5,6639	3,7026	6,7667	56,8261
-2,9357	6,8368	7,4404	336,7615
17,0969	3,3289	17,4180	78,9819
-2,1565	0,0	2,1565	270,0000

TABELA 54A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1943.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
249,4976	0,0		
60,9346	6,9829	61,3334	83,4625
-6,1995	5,4360	8,2452	311,2458
-8,7240	12,3716	15,1382	324,8098
-3,3217	1,1592	3,5182	289,2378
2,1822	-6,0428	6,4248	160,1442
5,2596	0,0	5,2596	90,0000

TABELA 55A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1944.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
265,8762	0,0		
66,7509	-21,2350	70,0472	107,6471
-17,3724	23,8985	29,5456	323,9856
11,4494	6,1979	13,0193	61,5720
5,1394	-13,4313	14,3810	159,0609
6,5653	-19,4695	20,5466	161,3654
-5,5084	0,0	5,5084	270,0000

TABELA 56A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1945.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
253,2485	0,0		
63,8553	-13,5000	65,2667	101,9375
-8,4730	30,5285	31,6825	344,4883
-5,9300	-4,8584	7,6661	230,6721
3,1870	11,6513	12,0793	15,2979
7,9180	-4,5426	9,1285	119,8430
-9,1629	0,0	9,1629	270,0000

TABELA 57A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1946.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
265,9631	0,0		
69,4874	-15,9907	71,3035	102,9596
-11,4864	15,5204	19,3085	323,4954
9,7495	3,7008	10,4283	69,2138
-12,1958	10,3947	16,0246	310,4414
-1,9126	-5,0742	5,4227	200,6530
0,3086	0,0	0,3086	90,0000

TABELA 58A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1947.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
249,5901	0,0		
62,7647	14,6614	64,4543	76,8517
-1,7285	10,1000	10,2468	350,2886
11,8632	5,4244	13,0445	65,4277
-12,7735	2,6328	13,0420	281,6465
-3,0461	11,0795	11,4906	344,6274
-2,0270	0,0	2,0270	270,0000

TABELA 59A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1948.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
264,8586	0,0		
65,0903	-4,1138	65,2202	93,6164
-0,6245	6,6494	6,6787	354,6348
4,6170	0,6720	4,6656	81,7183
5,9301	-1,7624	6,1864	106,5521
-7,5243	7,1501	10,3798	313,5393
5,8124	0,0	5,8124	90,0000

TABELA 60A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1949.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
261,1567	0,0		
66,5731	-6,4566	66,8855	95,5396
-2,8232	17,8724	18,0940	351,0234
-9,9551	-1,8874	10,1324	259,2646
-8,0977	-17,1154	18,9343	205,3199
10,2197	-1,1825	10,2879	96,6005
5,4175	0,0	5,4175	90,0000

TABELA 61A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1950.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
267,1938	0,0		
51,1034	-1,3815	51,1221	91,5486
-5,5962	15,7419	16,7071	340,4297
7,5153	-7,3016	10,4782	134,1739
-5,4350	-0,8641	5,5032	260,9663
6,9298	-4,7304	8,3904	124,3183
-1,7974	0,0	1,7974	270,0000

TABELA 62A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1951.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
258,5493	0,0		
68,1664	-31,1895	74,9629	114,5865
-21,8470	17,4284	27,9471	308,5808
0,4034	11,2661	11,2733	2,0509
-17,8496	-0,4485	17,8553	268,5603
1,4239	-2,9684	3,2923	154,3738
3,3320	0,0	3,3320	90,0000

TABELA 63A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1952.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
286,8655	0,0		
65,5276	-14,0911	67,0255	102,1362
6,3206	5,9225	8,6618	46,8626
0,5655	-10,1473	10,1631	176,8104
-8,0614	6,0055	10,0525	306,6848
9,5223	-12,6681	15,8478	143,0688
4,2848	0,0	4,2848	90,0000

TABELA 64A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1953.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
290,6560	0,0		
71,5991	-10,8176	72,4117	98,5916
-7,5491	24,1305	25,2837	342,6279
11,0818	2,7674	11,4221	75,9787
-8,8272	-2,8920	9,2888	251,8601
7,4357	-4,8240	8,8634	122,9740
0,6278	0,0	0,6278	90,0000

TABELA 65A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1954.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
278,5081	0,0		
67,3016	-10,3052	68,0860	98,7056
-2,7032	19,4164	19,6037	352,0740
1,3864	4,9735	5,1631	15,5765
-2,7379	-0,1703	2,7432	266,4402
6,7882	3,3174	7,5555	63,9555
5,6236	0,0	5,6236	90,0000

TABELA 66A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1955.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
269,1584	0,0		
67,8596	0,4886	67,8614	89,5874
-1,2161	25,7645	25,7932	357,2976
2,1917	-2,8518	3,5967	142,4571
-4,1671	-8,8360	9,7693	205,2487
-8,3311	4,9834	9,7078	300,8865
-3,0033	0,0	3,0033	270,0000

TABELA 67A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1956.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
260,3101	0,0		
94,0243	-4,5702	94,1353	92,7829
2,1938	23,7163	23,8176	5,2848
16,1336	-1,3306	16,1884	94,7148
18,9391	-13,9687	23,5332	126,4110
3,5158	3,2405	4,7814	47,3328
9,0918	0,0	9,0918	90,0000

TABELA 68A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1957.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
257,4690	0,0		
69,6174	-16,0550	71,4447	102,9864
-12,0448	5,6364	13,2983	295,0774
-2,4827	-0,9364	2,6534	249,3342
6,1728	-4,6510	7,7288	126,9966
8,6020	-11,5125	14,3712	143,2334
-4,8411	0,0	4,8411	270,0000

TABELA 69A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1958.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
269,8855	0,0		
73,9567	-20,0649	76,6302	105,1794
10,4114	10,5286	14,8071	44,6793
-3,7564	-7,1591	8,0847	207,6862
-0,7808	9,3315	9,3641	355,2168
2,5890	-0,0139	2,5891	90,3080
-3,5123	0,0	3,5123	270,0000

TABELA 70A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1959.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
278,8540	0,0		
62,3877	-4,3798	62,5413	94,0158
-17,1143	16,9453	24,0841	314,7158
7,3020	-4,6966	8,6820	122,7491
14,6617	1,1518	14,7069	85,5079
-17,9546	8,5417	19,8828	295,4421
2,1464	0,0	2,1464	90,0000

TABELA 71A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1960.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
255,6825	0,0		
60,6594	-25,9331	65,9703	113,1477
-10,2902	25,9801	27,9438	338,3923
-2,4518	-0,4532	2,4933	259,5261
3,6511	-7,3116	8,1725	153,4644
6,5128	-5,4940	8,5206	130,1501
-1,5287	0,0	1,5287	270,0000

TABELA 72A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1961.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
274,1770	0,0		
52,2708	-37,4502	64,3020	125,6203
-26,4266	20,6164	33,5172	307,9590
8,0649	6,9579	10,6515	49,2146
1,5484	-4,6045	4,8579	161,4135
4,9376	8,2662	9,6286	30,8511
2,7726	0,0	2,7726	90,0000

TABELA 73A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1962.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
247,7821	0,0		
75,4851	-5,3002	75,6709	94,0165
-8,7056	22,1661	23,8143	338,5579
0,7911	-10,5098	10,5395	175,6955
-7,6732	-1,6590	7,8505	257,7996
3,1785	8,4515	9,0295	20,6105
3,9272	0,0	3,9272	90,0000

TABELA 74A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1963.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
288,1599	0,0		
64,4874	-31,3683	71,7119	115,9395
-23,6711	27,8430	36,5452	319,6299
-2,6333	-3,9822	4,7741	213,4753
-2,6746	-11,7359	12,0368	192,8382
-3,8442	3,6158	5,2775	313,2458
7,8522	0,0	7,8522	90,0000

TABELA 75A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1964.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
258,5667	0,0		
59,8856	0,1386	59,8857	89,8674
-18,1679	27,0160	32,5567	326,0796
8,9859	-17,2608	19,4597	152,4987
0,2632	-4,5450	4,5526	176,6859
10,3456	10,2779	14,5831	45,1883
0,0346	0,0	0,0346	90,0000

TABELA 76A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1965.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
265,3259	0,0		
43,8330	-23,3460	49,6626	118,0404
-13,8466	9,9007	17,0221	305,5659
8,1215	-4,6140	9,3407	119,6019
-6,6144	-8,5198	10,7860	217,8240
-5,7883	17,5294	18,4603	341,7266
-3,7719	0,0	3,7719	270,0000

TABELA 77A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1966.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
274,2544	0,0		
65,8743	4,5085	66,0284	86,0846
4,9094	10,7335	11,8029	24,5789
-1,5623	4,2739	4,5505	339,9202
5,8105	0,9145	5,8821	81,0553
-7,5416	-1,4420	7,6782	259,1753
-3,5855	0,0	3,5855	270,0000

TABELA 78A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1967.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
266,9204	0,0		
44,1824	-6,0164	44,5902	97,7544
-19,1155	25,5762	31,9303	323,2256
6,1590	2,6586	6,7083	66,6520
2,6489	9,6727	10,0289	15,3153
7,5716	-8,6069	11,4633	138,6615
-3,7244	0,0	3,7244	270,0000

TABELA 79A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1968.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
252,0181	0,0		
75,5613	-28,0734	80,6079	110,3817
-7,8923	1,9253	8,1238	283,7092
-17,5346	-1,5582	17,6037	264,9216
-7,4679	-11,0928	13,3724	213,9493
2,3732	1,2599	2,6869	62,0373
2,5714	0,0	2,5714	90,0000

TABELA 80A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1969.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
274,6575	0,0		
60,8775	6,2760	61,2001	84,1139
1,1827	29,3782	29,4020	2,3054
7,5658	4,9977	9,0674	56,5526
-11,4020	-0,8010	11,4301	256,9812
4,0532	11,4305	12,1279	19,5242
9,1852	0,0	9,1852	90,0000

TABELA 81A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1970.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
265,5769	0,0		
62,3066	12,9065	63,6293	78,2969
-4,6777	0,0995	4,6787	271,2192
2,2672	-3,9632	4,5658	150,2279
-4,5789	-14,6277	15,3277	197,3817
-2,6029	-10,9237	11,2295	193,4026
-3,5051	0,0	3,5051	270,0000

TABELA 82A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1971.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
263,6489	0,0		
75,3681	8,1117	75,8033	83,8569
5,8376	31,9482	32,4771	10,3550
4,3935	-0,3960	4,4113	95,1504
1,9837	-1,6981	2,6113	130,5655
3,2498	-2,6820	4,2136	129,5315
2,3841	0,0	2,3841	90,0000

TABELA 83A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1972.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
264,4714	0,0		
59,8134	-5,8573	60,0995	95,5930
-8,2064	3,7698	9,0308	294,6726
-2,8344	2,4475	3,7448	310,8103
-10,8482	-9,7252	14,5693	228,1243
5,7392	-11,4983	12,8510	153,4747
4,1002	0,0	4,1002	90,0000

TABELA 84A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1973.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
273,7935	0,0		
69,5429	21,1823	72,6974	73,0596
-1,3336	13,6703	13,7352	354,4280
1,8601	-1,7235	2,5358	132,8158
10,0811	-0,9139	10,1224	95,1800
-1,2818	12,9608	13,0240	354,3518
-9,2051	0,0	9,2051	270,0000

TABELA 85A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1974.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
263,2961	0,0		
64,4275	-2,4276	64,4731	92,1580
-6,2662	30,2204	30,8632	348,2856
-4,2531	6,7890	8,0112	327,9338
-5,2703	3,9919	6,6114	307,1418
-7,9820	9,2173	12,1931	319,1079
5,7433	0,0	5,7433	90,0000

TABELA 86A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1975.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
267,6785	0,0		
59,6297	-14,1802	61,2925	103,3768
-8,0009	32,4163	33,3890	346,1355
3,3535	-10,2142	10,7506	161,8240
-21,1661	-7,1212	22,3319	251,4049
8,2813	-6,6050	10,5928	128,5752
-7,6444	0,0	7,6444	270,0000

TABELA 87A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1976.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
248,4448	0,0		
70,9901	-0,4010	70,9912	90,3237
-4,8914	7,5680	9,0111	327,1243
-5,1971	-10,8716	12,0499	205,5499
-0,1348	-0,5281	0,5451	194,3237
13,1602	-2,4168	13,3803	100,4062
2,7071	0,0	2,7071	90,0000

TABELA 88A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1977.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
282,9104	0,0		
53,3775	-6,2046	53,7370	96,6304
-3,1204	30,3034	30,4637	354,1206
-13,1702	17,3988	21,8213	322,8757
2,8475	5,5676	6,2535	27,0869
-0,3417	-2,2690	2,2946	188,5645
-2,5897	0,0	2,5897	270,0000

TABELA 89A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1978.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
272,8850	0,0		
74,9756	-1,9846	75,0018	91,5164
-3,9270	19,7298	20,1168	348,7432
-5,5980	9,0599	10,6498	328,2886
12,8858	-4,6140	13,6870	109,7007
0,8088	-8,5533	8,5914	174,5982
2,1361	0,0	2,1361	90,0000

TABELA 90A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1979.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
260,3518	0,0		
63,9225	-11,7375	64,9912	100,4048
-13,6893	13,9458	19,5418	315,5317
-3,2600	2,2231	3,9458	304,2910
-8,4780	6,6613	10,7819	308,1570
-4,0183	-10,1539	10,9201	201,5907
-12,4484	0,0	12,4484	270,0000

TABELA 91A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - 1980.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
273,6597	0,0		
62,9226	5,2350	63,1400	85,2440
-12,9386	10,7892	16,8468	309,8240
-15,4917	-9,6424	18,2474	238,1007
0,1334	3,6363	3,6387	2,1014
-1,8188	-16,0994	16,2018	186,4454
0,6978	0,0	0,6978	90,0000

TABELA 92A. Análise harmônica das temperaturas médias mensais de Campinas, SP - médias.

Coeficiente P	Coeficiente Q	Amplitude	Ângulo-Fase
257,5209	0		
67,2764	-3,7408	67,3803	93,1827
-7,6356	14,1099	16,0434	331,5798
-0,6419	-1,8029	1,9138	199,5975
-1,2105	-2,1830	2,4962	209,0092
1,7476	-0,6546	1,8661	110,5337
-0,3827		0,3827	270,0000

5.3. Análise de variância

Os resultados da análise de variância dos contrastes p_h e q_h e da amplitude A_h são apresentados nas Tabelas 93A a 98A.

Segundo AMARAL (1968) a análise de variância da amplitude das ondas senoidais é obtida pela soma das análises dos contrastes que a compõem, desde que as variâncias residuais destes contrastes se mostrem homogêneas.

Pelo teste F, verificou-se que as ondas semestral, trimestral e anual foram significativas ao nível de 5% de probabilidade; logo, o modelo final (equação de regressão) pode ser representado pelas ondas significativas, ajustado a um ano médio.

$$\hat{Y}_t = 257,5209 + 67,3803 \text{ sen}(30t + 93,1827)^{\circ} + \\ + 16,0434 \text{ sen}(60t + 331,5798)^{\circ} + \\ + 2,4962 \text{ sen}(120t + 209,0092)^{\circ}$$

Verificou-se também que aproximadamente 99,8% da variação das temperaturas médias mensais transformadas é explicada pelo modelo. E, considerando somente a onda anual, esta é responsável por 94,5% da variação total entre os 12 meses de 1 ano.

Na Tabela 99A apresentam-se os resultados das estimativas e componentes harmônicos dos valores transforma-

dos das temperaturas médias mensais de Campinas, SP (1890 a 1980).

A partir dos dados da Tabela 99A, foram construídos os gráficos das ondas senoidais significativas. Nas Figuras 1, 2, 3, 4 são representadas as ondas anual, semestral e trimestral, síntese das três ondas. A Figura 5 representa a equação de regressão, obtida a partir dos valores estimados, e os pequenos círculos (●), representam os valores observados.

Por meio da transformação inversa

$\hat{x}_t = 10^{\frac{\log y_t}{1,84216}}$, podemos voltar aos dados originais, a partir dos valores transformados.

TABELA 93A. Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_1$, $\hat{q}_1$ e da amplitude $\hat{a}_1$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_1)	1	411865,3125	411865,3125	4198,6016**
Variação do contraste entre anos	90	8828,6250	98,0958	
Variação total	91	420693,9375		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (q_1)	1	1273,5583	1273,5583	9,2770**
Variação do contraste entre anos	90	12355,3555	137,2817	
Variação total	91	13628,9141		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Amplitude (a_1)	2	413138,8125	206569,3750	1755,2156**
Variação da amplitude	180	21184,0000	117,6889	
Variação total	182	434322,8125		

TABELA 94A. Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_2$, $\hat{q}_2$ e da amplitude $\hat{a}_2$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_2)	1	5305,3789	5305,3789	79,1429**
Variação do contraste entre anos	90	6033,1914	67,0354	
Variação total	91	11338,5703		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (q_2)	1	18116,8984	18116,8984	181,9203**
Variação do contraste entre anos	90	8962,8320	99,5870	
Variação total	91	27079,7305		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Amplitude (a_2)	2	23422,2773	11711,1367	140,5709**
Variação da amplitude	180	14996,0234	83,3112	
Variação total	182	38418,3008		

TABELA 95A. Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_3$, $\hat{q}_3$ e da amplitude $\hat{a}_3$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_3)	1	37,4957	37,4957	0,6557ns
Variação do contraste entre anos	90	5146,9531	57,1884	
Variação total	91	5184,4492		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (q_3)	1	295,8098	295,8098	4,1180*
Variação do contraste entre anos	90	6465,0430	71,8338	
Variação total	91	6760,8555		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Amplitude (a_3)	2	333,3054	166,6527	2,5833ns
Variação da amplitude	180	11611,9961	64,5111	
Variação total	182	11945,3047		

TABELA 96A. Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_4$ e $\hat{q}_4$ e da amplitude $\hat{a}_4$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_4)	1	133,3525	133,3525	2,2091ns
Variação do contraste entre anos	90	5432,8594	60,3651	
Variação total	91	5566,2148		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (q_4)	1	433,6140	433,6140	6,3454*
Variação do contraste entre anos	90	6150,1563	68,3351	
Variação total	91	6583,7734		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Amplitude (a_4)	2	566,9663	283,4832	4,4053*
Variação da amplitude	180	11583,0195	64,3501	
Variação total	182	12149,9883		

TABELA 97A. Análise de variância dos contrastes $\hat{p}_5$ e $\hat{q}_5$ e da amplitude $\hat{a}_5$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_5)	1	277,8999	277,8999	5,3014*
Variação do contraste entre anos	90	4717,8164	52,4202	
Variação total	91	4995,7188		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (q_5)	1	38,9652	38,9652	0,6034ns
Variação do contraste entre anos	90	5811,6367	64,5737	
Variação total	91	5850,6055		

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Amplitude (a_5)	2	316,8650	158,4325	2,7084ns
Variação da amplitude	180	10529,4570	58,4970	
Variação total	182	10846,3242		

TABELA 98A. Análise de variância do contraste $\hat{p}_6$ das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Causa de variação	GL	SQ	QM	F
Contraste (p_6)	1	13,3423	13,3423	0,4948ns
Variação do contraste entre anos	90	2426,9792	26,9664	
Variação total	91	2440,3218		

TABELA 99A. Estimativas e componentes harmônicos das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Meses	i	$\bar{Y}$	A	B	C	D	$\hat{Y}$
Jan.	0	257,5209	67,2764	-7,6356	-1,2105	58,4303	315,9512
Fev.	1	257,5209	56,3926	8,4017	-1,2853	63,5090	321,0299
Mar.	2	257,5209	30,3984	16,0373	2,4958	48,9315	306,4524
Abr.	3	257,5209	-3,7409	7,6356	-1,2105	2,6842	260,2051
Mai.	4	257,5209	-36,8779	-8,4017	-1,2853	-46,5649	210,9560
Jun.	5	257,5209	-60,1335	-16,0373	2,4958	-73,6750	183,8459
Jul.	6	257,5209	-67,2763	-7,6356	-1,2105	-76,1224	181,3985
Ago.	7	257,5209	-56,3926	8,4017	-1,2853	-49,2762	208,2447
Set.	8	257,5209	-30,3984	16,0373	2,4958	-11,8653	245,6556
Out.	9	257,5209	3,7409	7,6356	-1,2105	10,1660	267,6869
Nov.	10	257,5209	36,8779	-8,4017	-1,2853	27,1909	284,7118
Dez.	11	257,5209	60,1335	-16,0373	2,4958	46,5920	304,1129

onde:

$\bar{Y}$ = média geral

A = componente harmônico anual

B = componente harmônico semestral

C = componente harmônico trimestral

D = síntese das ondas; $D = A + B + C$

$\hat{Y} = \bar{Y} + D$

Fig. 1 - Variação anual de $x_{1,84216}$ das temperaturas médias mensais de Campinas - SP, 1890 - 1980.

ONDA ANUAL $A_T = 67,3803 \quad \text{sen } (30t + 93,1827)^\circ$

Fig. 2 - Variação anual de $x_{1,84216}$ das temperaturas médias mensais de Campinas - SP, 1890 - 1980.

ONDA SEMESTRAL $S_t = 16,0434 \operatorname{sen} (60t + 331,5798)^\circ$

Fig. 3 - Variação anual de $x_{1,84216}$ das temperaturas médias mensais de Campinas - SP, 1890 - 1980.

ONDA TRIMESTRAL $T_t = 2,4962 \text{ sen } (120 t + 209,0092)^\circ$

Fig. 4 - Variação anual de $x^{1,84216}$ das temperaturas médias mensais de Campinas - SP, 1890 - 1980.

SINTESE DAS ONDAS

$$SO_t = 67,3803 \quad \text{sen} (30t + 93,1827)^\circ + 16,0434 \quad \text{sen} (60t + 331,5798)^\circ + 2,4962 \quad \text{sen} (120t + 209,0092)^\circ$$

Fig. 5 - Variação anual de $x_{1,84216}$ das temperaturas médias mensais de Campinas - SP, 1890 - 1980.

EQUAÇÃO DE REGRESSÃO
 $\hat{y}_1 = 257,5209 + 67,3803 \text{ sen } (30t + 93,1827)^\circ + 16,0434 \text{ sen } (60t + 331,5798)^\circ + 2,4962 \text{ sen } (120t + 209,0092)^\circ$

5.4. Variâncias dos parâmetros estimados

As estimativas da variância dos contrastes $\hat{p}_h$ e $\hat{q}_h$, referentes aos componentes harmônicos são:

$v(\hat{p}_1) = 16,3493$	$v(\hat{q}_1) = 22,8803$
$v(\hat{p}_2) = 11,1726$	$v(\hat{q}_2) = 16,5978$
$v(\hat{p}_3) = 9,5314$	$v(\hat{q}_3) = 11,9723$
$v(\hat{p}_4) = 10,0608$	$v(\hat{q}_4) = 11,3892$
$v(\hat{p}_5) = 8,7367$	$v(\hat{q}_5) = 10,7623$
$v(\hat{p}_6) = 2,2472$	

5.5. Intervalo de confiança

Obtidas as estimativas $\hat{p}_h$ e $\hat{q}_h$ e suas respectivas variâncias, pode-se calcular o intervalo de confiança para $\alpha = 0,05$ (média dos 91 anos).

59,2462	$\leq$	$\hat{p}_1$	$\leq$	75,3066
-14,2739	$\leq$	$\hat{p}_2$	$\leq$	-0,9973
-6,7733	$\leq$	$\hat{p}_3$	$\leq$	5,4895
-7,5098	$\leq$	$\hat{p}_4$	$\leq$	5,0888
-4,1226	$\leq$	$\hat{p}_5$	$\leq$	7,6178
-3,3598	$\leq$	$\hat{p}_6$	$\leq$	2,5944
-13,2405	$\leq$	$\hat{q}_1$	$\leq$	5,7589
6,0189	$\leq$	$\hat{q}_2$	$\leq$	22,2009

$$-8,6747 \leq \hat{q}_3 \leq 5,0689$$

$$-8,8853 \leq \hat{q}_4 \leq 4,5193$$

$$-7,1699 \leq \hat{q}_5 \leq 5,8607$$

6. CONCLUSÕES

Das análises realizadas, podemos concluir que:

1. Os dados originais das temperaturas médias mensais de Cam
pinas, SP, num período de 91 anos (1890 a 1980) não apresentaram homogeneidade das variâncias, nem aditividade dos efeitos e nem normalidade da distribuição.
2. No estudo de uma transformação que homogeneizasse as variâncias obteve-se $Y = X^{1,84216}$, que além disso, apresentou aditividade dos efeitos e melhorou a normalidade.
3. Pelos resultados da análise harmônica do total dos 91 anos, ajustados a um ano médio, obtivemos a seguinte equação de regressão:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_t = & 257,5209 + 67,3803 \operatorname{sen}(30t + 93,1827)^\circ + \\ & + 16,0434 \operatorname{sen}(60t + 331,5798)^\circ + \\ & + 2,4962 \operatorname{sen}(120t + 209,0092)\end{aligned}$$

onde $t = 0, 1, 2, \dots, 11$; $\hat{Y}_t$ = a estimativa de $Y = X^{1,84216}$ valor transformado, da temperatura média referente ao mês t .

4. A equação de regressão estimada, composta pelas ondas anual, semestral e trimestral, explicou 99,8% das variações devidas a meses. Somente o componente anual é responsável por 94,5% das variações devidas a meses.
5. Pela equação obtida estimou-se a ocorrência de um máximo durante o mês de fevereiro ($\hat{Y}_1 = 321,03$) equivalente à temperatura de $\hat{Y}_1 = 22,94^\circ$ e um mínimo durante o mês de julho ($\hat{Y}_6 = 181,40$) equivalente à temperatura de $\hat{Y}_6 = 16,83^\circ$.

7. BIBLIOGRAFIA

AMARAL, E. e F.S. MOTA, 1956. *Normais e variabilidade relativa das precipitações mensais*. Pelotas, Boletim Técnico nº 13, Instituto Agronômico do Sul, 19 p.

AMARAL, E., 1967. Transformação dos dados - Curso de Estatística Experimental, fascículo 12, IPEAS, Pelotas, RS.

AMARAL, E., 1968. Análise harmônica. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 3: 7-43.

AMARAL, E. e J. BAPTISTA DA SILVA, 1970. *Tabela de Probabilidades das precipitações pluviométricas em Pelotas, RS*. Pelotas, Circular nº 44, Instituto de Pesquisas e Experimentação Agropecuária do Sul, 27 p.

AMARAL, E., 1975. Análise harmônica e Previsão a longo prazo. Apresentado na Reunião Comemorativa do 20º Aniversário da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria. Piracicaba, 34 p. *Anais*

AMARAL, E., J. BAPTISTA DA SILVA, e M. BASSOLS, 1975. *Tabelas de probabilidades da temperatura mínima em Pelotas, RS. (média das mínimas e mínima absoluta)*. Brasília, Boletim Técnico nº 9, Departamento Nacional de Meteorologia, 61 p.

ANDERSON, T.W., 1971. *The Statistical Analysis of Time Series*. Nova York, John Wiley and Sons, 704 p.

ARRUDA, H.V. e H.S. PINTO, 1977. *An attempt to establish a new model for rainfall analysis*. Campinas, Seminário Internacional sobre Climatologia do hemisfério sul.

BAPTISTA DA SILVA, J., 1977. Análise harmônica das precipitações pluviométricas pentadais. Pelotas, RS, 1900/51. 216 p. (Tese de Livre-docência).

BAPTISTA DA SILVA, J., 1979. Tabela de probabilidade das precipitações pluviométricas máximas pentadais em Pelotas, RS. Pelotas, UFPel. 144 p. (Tese de Professor Titular).

BARTLETT, M.S., 1937. Properties of sufficiency and statistical test, Proc. Royal Soc., A160:268-282.

- BLISS, C.I., 1958. Periodic regression in biology and climatology. New Haven, *Connecticut Agr. Exp. Station*, 55 p. (Bol. 615).
- BLOOMFIELD, P., 1946. *Fourier analysis of time series: An introduction*. 1ª edição, Nova York, John Wiley and Sons, 258 p.
- BROOKS, C.E.P. e N. CARRUTHERS, 1953. Handbook of statistical methods in meteorology. *Her Majesty's Stationery Office London*, 412 p.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1978. *Diseños Experimentales*. 1ª edição, 5ª reimpressão, México, Ed. Trillas, 661 p.
- COELHO, H., 1980. Emprego da análise harmônica a dados da produção de citros (*Citrus sinensis* L. Osbeck). Piracicaba, ESALQ/USP, 65 p. (Dissertação de Mestrado).
- CONRAD, V. e L.W. POLLAK, 1950. *Methods in Climatology*. Massachusetts. Harvard University Press, 459 p.
- DECICO, A. e V.F. CRUZ, 1974. Estudo de fenômenos periódicos. IV Jornada Científica da Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu, 15 p. (Anexo 19).
- DRAPPER, N.R. e H. SMITH, 1966. *Applied Regression Analysis*. Nova York, John Willey, 407 p.

- DUARTE, G.S., 1974. Curva epidemiológica da ferrugem alaranjada do cafeeiro na Zona da Mata - MG. Piracicaba, ESALQ/USP, 65 p. (Dissertação de Mestrado).
- DUARTE, G.S., 1980. Uso da regressão periódica na experimentação agronômica. Piracicaba, ESALQ/USP. Seminário apresentado no curso de Estatística e Experimentação Agronômica, 11 p. (mimeog.).
- DUARTE, G.S., 1981. O emprego da análise harmônica no estudo de incidência da ferrugem alaranjada do cafeeiro (*Hemileia vastatrix* Berk et Br) no estado de Minas Gerais. Piracicaba, ESALQ/USP, 72 p. (Tese de Doutorado).
- FELTRIN, M.A.V., 1980. A análise harmônica no estudo das precipitações pluviais no município de Bandeirantes, PR. Piracicaba, ESALQ/USP, 92 p. (Dissertação de Mestrado).
- FISHER, R.A., Sc.D.; F.R.S., 1941. *Statistical Methods for Research Workers*. 8ª Edição, London, Oliver and Boyd, 354 p.
- GODOY, H., I.R. NOGUEIRA e F. PIMENTEL GOMES, 1959. Estudo sobre as temperaturas médias em Campinas. *Anais E.S.A. "Luiz de Queiroz"*, Piracicaba, 16: 277-287.
- GROSH, M.N. e D. SHARMA, 1963. Power of Tukey's test for non-additivity. *Journal of the Royal Statistical Society*. Londres, 25: 213-219.

- PEREIRA, N.S.C., 1978. Regressão periódica aplicada a dados pluviométricos mensais do município de Grajaú, MA. Piracicaba, ESALQ/USP, 66 p. (Dissertação de Mestrado).
- PIMENTEL GOMES, F. e I.R. NOGUEIRA, 1975. Extrapolação ou projeção: uma técnica difícil e perigosa. *Anais da Reunião Internacional de Biometria*. Piracicaba, p. 272-279.
- PIMENTEL GOMES, F., 1978. *Curso de Estatística Experimental*. 8ª edição, Piracicaba, ESALQ, 430 p.
- SNEDECOR, G.W. e W.G. COCHRAN, 1976. *Statistical Methods*. 6ª edição, Iowa, The State University Press, 593 p.
- SOUZA, B.B., 1977. Uso de transformações que visam a homocedasticidade. Tese defendida na Universidade de Brasília. 63 p.
- SPIEGEL, M.R., 1976. *Análise de Fourier*. São Paulo, McGraw Hill do Brasil, 249 p. Coleção Schawn.
- TAYLOR, L.R., 1961. Agregation, variance and the mean. *Nature*, 189, 732-735.
- THIEBAUT, J.T.L., 1976. O emprego da análise harmônica no estudo das precipitações mensais do município de Viçosa, MG. Piracicaba, ESALQ/USP, 92 p. (Dissertação de Mestrado).

TUKEY, J.W., 1949. One degrees of freedrom for non-
-additivity. *Biometrics*. Raleigh, 5:232-242.

WINER, B.Y., 1971. *Statistical Principles in Experimental
Design*. 2ª edição. Kogakusha, Ltda., 907 p.

APÊNDICE

APÊNDICE 1. Dados originais das temperaturas médias mensais de Campinas, SP, no período de 1890 a 1980.

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
1890	23,0	22,9	22,8	19,5	17,5	14,5	16,6	17,5	19,8	19,8	21,5	22,9
1891	22,8	22,9	22,8	20,2	17,6	17,2	16,4	17,4	20,1	21,3	21,4	22,5
1892	23,2	23,1	22,2	20,9	16,8	16,7	16,0	18,2	18,2	20,0	20,5	20,8
1893	22,5	22,0	21,7	19,2	16,8	16,3	16,2	17,0	16,5	19,0	20,1	22,9
1894	24,5	23,3	22,2	19,8	17,3	14,0	15,3	17,5	19,0	21,7	21,8	22,0
1895	22,3	22,1	23,0	20,0	18,1	16,4	16,1	19,1	18,5	21,0	22,1	25,0
1896	23,0	23,0	22,2	20,1	17,5	17,2	16,3	18,8	20,5	21,1	22,8	24,0
1897	22,8	22,3	22,1	22,1	19,7	16,6	15,4	18,2	18,2	20,9	21,9	24,0
1898	23,0	23,3	23,0	21,1	16,7	17,4	16,6	18,2	18,0	19,0	21,2	23,1
1899	22,1	23,1	23,9	21,5	19,6	15,2	18,1	19,5	20,0	21,7	22,2	21,9
1900	22,0	22,0	22,3	19,2	18,0	16,2	17,1	17,3	19,5	20,4	21,4	16,2
1901	21,9	22,0	21,3	19,5	17,2	15,0	16,9	17,7	18,8	21,6	21,4	21,0
1902	22,6	22,8	21,8	20,7	19,2	17,6	18,1	16,9	20,0	20,2	23,1	22,7
1903	21,8	22,6	23,2	19,7	17,3	17,4	16,3	18,1	19,3	19,6	21,3	22,0
1904	21,6	21,2	22,7	19,6	15,9	14,7	16,4	17,2	19,2	19,6	21,0	21,2
1905	22,6	22,5	21,0	19,8	18,3	16,2	16,0	17,5	19,5	21,0	21,3	22,1
1906	21,2	21,4	21,0	20,0	19,2	17,7	17,1	19,1	19,3	21,5	21,1	22,0
1907	21,6	21,7	21,9	19,8	15,7	16,2	14,4	15,7	19,3	19,7	21,0	23,5
1908	22,2	21,9	21,4	20,1	16,9	16,4	17,1	17,0	18,6	19,5	21,0	22,7
1909	22,1	23,2	20,5	18,7	15,6	15,5	16,1	17,2	18,2	18,6	21,4	20,6
1910	23,2	22,5	22,1	21,0	15,5	16,5	14,5	18,1	18,1	18,5	20,4	21,3
1911	22,7	23,0	21,4	19,5	17,2	14,6	14,4	16,2	18,4	18,9	22,1	22,1
1912	22,1	22,6	22,0	19,6	19,1	17,2	15,3	17,6	16,5	18,7	22,1	21,4
1913	21,4	22,2	22,1	20,2	17,7	15,5	16,7	17,1	18,5	20,3	21,0	21,6
1914	23,3	21,7	22,3	20,3	17,3	18,7	17,9	17,3	19,9	22,4	21,8	21,9
1915	23,7	24,2	21,7	21,8	19,5	16,1	16,5	18,1	19,0	20,2	19,6	22,9
1916	22,3	21,2	21,2	19,6	18,2	16,9	16,5	18,5	20,8	18,8	20,8	20,8
1917	21,5	21,4	21,2	19,1	14,9	14,1	15,2	16,2	18,7	19,5	19,4	20,5
1918	22,4	22,4	21,4	20,0	18,5	15,8	15,2	15,7	18,6	20,7	18,5	21,3
1919	21,6	22,3	21,7	17,4	18,8	17,3	17,0	15,9	19,4	21,2	18,5	22,5
1920	22,8	22,2	21,5	20,5	17,5	16,8	17,2	15,3	18,3	20,3	21,2	21,6
1921	22,0	22,8	22,5	19,6	18,2	16,2	14,7	18,9	18,5	19,4	20,5	22,1
1922	22,4	21,5	21,7	21,7	18,8	16,7	15,6	17,9	19,5	19,0	20,5	21,5
1923	21,3	21,3	20,7	20,8	17,7	17,4	14,7	18,0	18,0	19,7	21,0	23,7
1924	20,8	21,8	22,8	20,9	18,7	16,9	16,1	16,4	18,8	18,2	19,8	21,2
1925	21,9	23,2	21,8	22,0	18,0	14,5	14,1	18,8	19,4	20,3	21,5	23,3
1926	23,0	22,9	22,7	20,5	17,7	19,0	15,9	18,5	21,7	21,3	22,3	22,4
1927	22,6	21,4	22,7	22,1	18,8	17,1	16,0	17,9	19,4	20,4	22,3	22,7
1928	23,5	24,0	23,5	23,3	19,3	17,5	17,7	17,8	20,9	22,1	23,0	23,5
1929	23,1	23,1	22,9	19,5	16,8	16,7	16,9	17,9	20,0	20,7	20,3	22,9
1930	22,1	21,6	22,3	21,0	19,3	19,5	17,1	19,2	19,3	20,4	21,1	21,9
1931	23,5	21,8	22,2	20,5	17,7	16,0	17,7	18,7	18,0	21,3	21,8	23,1
1932	21,2	23,6	22,5	22,3	18,1	16,6	18,0	17,0	20,8	21,6	22,2	22,2
1933	22,5	23,5	21,8	19,9	17,9	15,5	16,0	17,7	19,8	20,4	20,7	21,9
1934	22,2	23,3	22,6	21,2	18,6	17,8	16,4	18,4	19,4	20,3	22,4	21,9
1935	22,8	22,5	22,8	19,6	16,8	17,7	17,8	17,7	19,0	20,2	21,8	23,6

- continua -

APÊNDICE 2. (continuação)

Ano	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
1936	23,9	22,3	21,7	20,8	20,8	19,0	17,3	16,5	18,6	21,2	21,5	22,7
1937	21,4	23,2	22,7	20,1	17,0	16,9	17,4	18,9	19,5	19,9	20,9	21,1
1938	24,9	23,8	24,5	21,6	19,0	18,2	17,9	18,7	20,2	20,6	22,6	22,3
1939	22,7	23,5	23,6	21,1	19,5	16,9	15,3	19,0	19,4	22,1	21,9	22,1
1940	23,3	21,8	23,4	22,2	19,9	18,2	18,8	19,7	20,4	21,0	21,6	25,0
1941	23,9	24,1	22,7	22,9	20,2	17,3	16,7	20,2	16,5	20,1	21,6	21,6
1942	23,4	23,2	22,4	20,7	18,0	16,9	14,5	18,7	19,5	21,0	22,0	21,1
1943	22,1	22,6	22,7	19,4	19,0	17,7	17,3	17,0	18,3	20,4	21,5	21,1
1944	23,4	22,4	23,0	19,9	18,1	17,0	15,9	19,2	21,1	23,7	20,5	22,8
1945	22,3	23,2	22,0	20,5	16,8	15,6	16,4	20,4	19,1	21,6	21,3	21,4
1946	22,9	23,8	22,0	19,6	19,6	16,5	16,0	19,3	20,8	21,7	22,4	22,6
1947	22,3	23,8	21,4	20,5	19,3	18,1	15,8	17,4	19,6	18,7	20,6	21,5
1948	23,6	23,1	21,7	20,8	19,0	17,3	18,4	17,5	20,5	20,6	21,9	22,6
1949	23,0	22,2	23,9	19,8	17,2	17,9	17,2	18,5	20,4	20,3	21,9	22,6
1950	22,9	22,5	22,5	20,9	19,5	18,1	17,2	20,2	20,5	20,8	21,1	22,3
1951	21,8	22,9	22,4	18,4	18,1	16,5	15,3	18,5	21,6	22,3	23,1	22,2
1952	24,6	23,1	23,2	20,1	20,2	18,1	18,4	21,1	20,3	21,5	23,3	24,1
1953	24,6	24,4	23,9	20,9	19,7	18,3	17,0	20,4	22,1	22,4	22,5	23,4
1954	24,2	23,8	23,2	20,5	18,8	18,0	17,9	19,4	21,3	21,5	22,8	22,4
1955	23,0	24,2	23,0	21,2	18,1	17,4	17,7	18,8	21,1	20,5	20,9	23,1
1956	26,0	23,2	22,8	20,8	17,1	15,4	16,6	16,5	20,7	20,8	20,7	22,7
1957	23,0	21,8	22,2	20,2	17,8	17,0	16,3	18,5	19,0	22,4	21,8	22,9
1958	24,0	23,7	21,6	20,0	17,8	16,9	17,9	20,1	19,5	21,1	22,9	23,7
1959	23,3	23,8	22,1	22,8	19,7	16,4	19,0	18,2	21,8	22,1	21,9	22,8
1960	22,6	22,0	22,3	19,6	16,5	16,3	16,9	19,4	20,8	22,2	21,4	22,0
1961	22,8	22,3	21,8	20,6	18,1	17,5	17,1	19,5	23,3	23,5	23,2	21,8
1962	22,7	22,7	22,4	20,4	17,2	15,4	15,5	18,1	20,2	19,2	21,7	22,0
1963	23,2	23,1	23,9	21,2	18,3	16,7	18,3	19,7	23,7	23,1	23,6	23,4
1964	22,9	22,1	22,6	22,3	18,0	16,5	15,8	19,5	21,2	20,0	21,1	21,5
1965	21,6	22,2	20,6	21,1	18,2	18,4	17,5	19,2	22,6	21,2	22,2	22,7
1966	23,6	24,3	22,5	21,2	19,2	18,2	18,9	18,6	19,5	21,3	21,4	23,1
1967	22,3	22,8	22,4	21,1	19,6	17,4	17,2	20,6	20,6	22,5	21,1	20,7
1968	22,1	21,7	22,3	18,9	16,2	16,7	16,7	17,4	19,7	21,1	23,4	23,5
1969	23,9	24,4	23,5	20,7	19,3	18,3	17,8	19,3	21,9	19,6	21,8	21,4
1970	22,7	22,5	23,2	21,1	19,9	18,8	17,3	17,9	19,2	20,6	20,5	23,7
1971	24,3	24,2	23,5	20,6	18,1	16,6	17,3	18,9	19,9	20,1	20,4	22,0
1972	22,6	22,0	23,3	19,5	19,4	18,4	17,1	18,5	20,0	21,2	22,0	22,9
1973	23,8	24,6	22,6	23,3	18,8	18,7	17,9	18,3	19,3	20,4	21,0	22,6
1974	22,5	24,4	22,9	20,4	18,2	16,5	18,0	18,4	21,1	20,4	21,9	21,3
1975	22,2	23,2	23,4	20,1	17,9	17,5	15,7	21,3	21,5	21,0	21,2	23,1
1976	23,1	21,6	22,5	20,4	17,8	16,5	16,1	18,3	18,3	19,7	21,8	22,1
1977	22,9	24,9	23,6	20,7	18,5	18,6	19,6	20,2	20,7	22,8	22,2	21,5
1978	24,2	23,8	23,7	20,8	18,3	17,2	18,4	18,1	19,7	22,4	21,6	22,5
1979	21,4	23,6	22,0	20,2	18,6	17,0	16,2	19,5	19,3	22,2	21,6	22,9
1980	22,4	22,9	24,1	21,5	19,9	16,9	18,5	19,5	18,8	21,6	22,2	23,1

APÊNDICE 2. Demonstração para o caso de:

$$S = \sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 k\phi t = \frac{T}{2}$$

$$S = 1 + \cos^2 k\phi + \cos^2 2k\phi + \dots + \cos^2 (T-1)k\phi$$

sabendo-se que $\cos(k\phi, t) = \frac{e^{ik\phi t} + e^{-ik\phi t}}{2}$

e aplicando no somatório, tem-se:

$$S = 1 + \left(\frac{e^{ik\phi} + e^{-ik\phi}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{2ik\phi} + e^{-2ik\phi}}{2} \right)^2 + \dots +$$

$$+ \left(\frac{e^{(T-1)ik\phi} + e^{-(T-1)ik\phi}}{2} \right)^2$$

$$S = 1 + \frac{1}{4} \left[e^{2ik\phi} + e^{-2ik\phi} + e^{4ik\phi} + e^{-4ik\phi} + \dots + e^{2(T-1)ik\phi} + e^{-2(T-1)ik\phi} + \right.$$

$$\left. + 2(T-1) \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[e^{2ik\phi} + e^{4ik\phi} + \dots + e^{2(T-1)ik\phi} + e^{-2ik\phi} + e^{-4ik\phi} + \dots + \right.$$

$$\left. + e^{-2(T-1)ik\phi} \right]$$

Aplicando a fórmula da soma de termos da progressão geométrica obtém-se:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2(T-1)ik\phi} \cdot e^{2ik\phi} - e^{2ik\phi}}{e^{2ik\phi} - 1} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-2(T-1)ik\phi} \cdot e^{-2ik\phi} - e^{-2ik\phi}}{e^{-2ik\phi} - 1} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2ik\phi}(e^{2(T-1)ik\phi} - 1)}{e^{2ik\phi} - 1} + \frac{e^{-2ik\phi}(e^{-2(T-1)ik\phi} - 1)}{e^{-2ik\phi} - 1} \right]$$

Multiplicando o primeiro termo do colchete o numerador e o denominador por $e^{-ik\phi} e^{-(T-1)ik\phi}$ e multiplicando o numerador e o denominador do segundo termo do colchete por $e^{ik\phi} e^{(T-1)ik\phi}$ tem-se:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2ik\phi} e^{-ik\phi} e^{-(T-1)ik\phi} (e^{2(T-1)ik\phi} - 1)}{e^{-(T-1)ik\phi} e^{-ik\phi} (e^{2ik\phi} - 1)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-2ik\phi} e^{ik\phi} e^{(T-1)ik\phi} (e^{-2(T-1)ik\phi} - 1)}{e^{(T-1)ik\phi} e^{ik\phi} (e^{-2ik\phi} - 1)} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{e^{ik\phi} (e^{(T-1)ik\phi} - e^{-(T-1)ik\phi})}{e^{-(T-1)ik\phi} (e^{ik\phi} - e^{-ik\phi})} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-ik\phi} (e^{-(T-1)ik\phi} - e^{(T-1)ik\phi})}{e^{(T-1)ik\phi} (e^{-ik\phi} - e^{ik\phi})} \right]$$

Dividindo-se por 2i tem-se

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[e^{ik\phi} e^{(T-1)ik\phi} \frac{(e^{(T-1)ik\phi} - e^{-(T-1)ik\phi})}{2i} \frac{2i}{(e^{ik\phi} - e^{-ik\phi})} + \right. \\ \left. + e^{-ik\phi} \cdot e^{-(T-1)ik\phi} \frac{(e^{(T-1)ik\phi} - e^{-(T-1)ik\phi})}{2i} \frac{2i}{(e^{ik\phi} - e^{-ik\phi})} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{4} \left[e^{Tik\phi} \frac{\text{sen}(T-1)k\phi}{\text{sen}k\phi} + e^{-Tik\phi} \frac{\text{sen}(T-1)k\phi}{\text{sen}k\phi} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{Tik\phi} + e^{-Tik\phi}}{2} \cdot \frac{\text{sen}(T-1)k\phi}{\text{sen}k\phi} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \cos Tk\phi \cdot \left(\frac{\text{sen}(T-1)k\phi}{2 \text{sen}k\phi} \right)$$

No caso T impar, tem-se

$$\phi = \frac{2\Pi}{T} \quad k = \frac{(T-1)}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \left(\frac{\text{sen}(T-1) \frac{(T-1)}{2} \cdot \frac{2\Pi}{T}}{2 \text{sen} \frac{(T-1)}{2} \cdot \frac{2\Pi}{T}} \cdot \cos T \frac{(T-1)}{2} \cdot \frac{2\Pi}{T} \right)$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \left(\frac{\text{sen}(T-1) \frac{(T-1)}{T} \Pi}{2 \text{sen} \frac{(T-1)}{T} \cdot \Pi} \cdot \cos (T-1) \cdot \Pi \right)$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{\text{sen}[(T-2)\Pi + \frac{\Pi}{T}]}{2 \text{ sen}(\Pi - \frac{\Pi}{T})}$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{\text{sen}(T-2)\Pi \cos \frac{\Pi}{T} + \text{sen} \frac{\Pi}{T} \cdot \cos(T-2)\Pi}{2 (\text{sen}\Pi \cdot \cos \frac{\Pi}{T} - \cos\Pi \cdot \text{sen} \frac{\Pi}{T})}$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{T}{2} + \frac{-\text{sen} \frac{\Pi}{T}}{2 \text{ sen} \frac{\Pi}{T}}$$

$$S = \frac{T}{2}$$

No caso de T par, tem-se

$$k = \frac{T}{2} \quad \phi = \frac{2\Pi}{T}$$

$$S = \sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 k\phi t$$

$$S = \sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 \frac{T}{2} \cdot \frac{2\Pi}{T} t$$

$$S = \sum_{t=0}^{T-1} \cos^2 \Pi t$$

$$S = \cos^2 0\Pi + \cos^2 \Pi + \cos^2 2\Pi + \dots + \cos^2 (T-1)\Pi$$

$$S = T$$

De maneira análoga para os demais somatórios.