ANÁLISE MULTIVARIADA PARA DADOS ONDE A CARACTERÍSTICA OBSERVADA É SUBDIVIDIDA EM K CLASSES

HENRI STUKER
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia. Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Setembro - 1986

A Deus,
Ao meu pai,
À minha mãe,
Aos meus irmãos,

AGRADEÇO.

À minha esposa Guilhermina,
Aos meus filhos Moisés e João Davi.

OFEREÇO.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, pela orientação valiosa na realização deste trabalho.

À Empresa Catarinense de Pesquisas Agropecuária pela oportunidade oferecida para realização do curso.

Aos Professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP, pelos ensinamentos e constante disponibilidade.

Ao colega Renato Cesar Dittrich pelo constante incentivo.

À EMBRAPA, pelo auxílio financeiro prestado.

Aos colegas do curso, pela amizade e troca de idéias.

Aos funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelas atenções dispensadas.

A todos que contribuíram para a realização do curso e deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	vi
SUMMARY	viii
1. INTRODUÇÃO	01
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	04
3. MATERIAL	28
4. MÉTODOS	32
4.1. Introdução	32
4.2. Análise univariada em parcelas subdivididas.	36
4.2.1. Teste de homogeneidade para as matrizes de covariâncias	36
4.2.2. Teste de uniformidade da matriz <u>co</u> mum de covariâncias	39
4.2.3. Análise da variância	40
4.2.3.1. Natureza do erro experimental	41
4.2.3.2. Teste de hipóteses e quadros de análise	42
4.2.3.3. Comparações múltiplas	44
4.3. Análise multivariada em blocos casualizados.	47
4.3.1. Modelo matemático	48
4.3.2. Equações normais e estimadores dos <u>pa</u> râmetros	51
4.3.3. Somas de quadrados e somas de produtos	55
4.3.4. Teste de hipótese e quadro da <u>análi</u> se da variância	58
4.3.5. Comparações múltiplas (intervalos de confiança)	64

	Página
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO	68
5.1. Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias.....	68
5.2. Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias	69
5.3. Análises de variância e teste de hipótese .	70
5.3.1. Análise univariada	70
5.3.2. Análise multivariada	71
5.4. Comparações múltiplas	76
6. CONCLUSÕES	80
6. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	82
APÊNDICE : Estimativas S_i das matrizes de covariâncias Σ_i . Estimativa A da matriz comum de covariâncias	90

ANÁLISE MULTIVARIADA PARA DADOS ONDE A CARACTERÍSTICA OBSERVADA É SUBDIVIDIDA EM K CLASSES

Autor: HENRI STUKER

Orientador: Prof. Dr. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

RESUMO

Neste trabalho, foi feito um estudo dos experimentos onde cada parcela é subdividida em K classes, segundo um critério pré-estabelecido. Estudou-se o comportamento dos experimentos através do método univariado, onde consideraram-se as classes como uma subdivisão das parcelas, e através do método multivariado onde as classes foram consideradas como um conjunto de mensurações observadas numa mesma parcela.

As pressuposições do modelo univariado, em parcelas subdivididas, foram verificadas testando-se as hipóteses de:

- Homogeneidade das matrizes de covariâncias para tratamentos;
- Uniformidade da matriz comum de covariâncias.

Consideraram-se, para fins de ilustração, as produções, em kg por parcela, de um experimento com batata (*Solanum tuberosum* L.), onde a produção de cada parcela foi dividida em 3 classes.

As pressuposições do modelo em parcelas subdivididas não foram satisfeitas, invalidando assim a parte da análise referente a subparcelas (classes) e interação.

A análise multivariada apresentou um menor número de diferenças significativas entre médias de tratamentos quando comparado com as análises individuais de cada classe. Isso ocorre porque no caso do modelo multivariado, o critério de rejeição de H_0 é mais rigoroso, por levar em consideração um nível de significância conjunto.

MULTIVARIATE ANALYSIS FOR DATA WHERE THE OBSERVED CHARACTERISTIC IS SUBDIVIDED INTO "K" CLASSES

Author: HENRI STUKER

Adviser: Prof. Dr. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

SUMMARY

A trial study was carried out where each observation is subdivided into "k" classes, according to a predetermined criterion. Trial's behaviour was studied by means of a univariate method, where classes were considered as a plot subdivision, and also by means of a multivariate method, where classes were considered as a set of variables observed in a same plot.

The assumptions of the univariate model (split-plot), were verified testing the following hypothesis:

homogeneity of the covariance matrixes for treatments

. uniformity of the common matrix of variances.

Plot yields (kg/plot) of a potato (*Solanum tuberosum* L.), trial, where plot yield was divided into three classes, were considered.

The assumptions of the univariate model, were

not satisfied and so the part of the analysis related to subplots (classes) and interaction was invalidated.

The multivariate analysis presented less significant differences between the treatment's means when compared to the analysis of each classe. This occurs because, in the case of the multivariate model, the criterion of rejection of H_0 is more rigorous, since it considers a set level of significance.

1. INTRODUÇÃO

Muitos são os campos de pesquisa, onde se efetuam várias observações sobre uma mesma unidade experimental.

Em experimentos agrícolas, como é o caso com hortaliças e frutíferas, é comum verificarem-se os efeitos de tratamentos medindo-se a produção total sobre cada unidade experimental, sendo esta posteriormente classificada em K classes, conforme a qualidade e/ou tamanho do produto, segundo critérios pré-estabelecidos. Classe é um fator em tais experimentos, e uma questão importante que se deve considerar é a possível existência de correlação entre classes sobre uma mesma unidade experimental.

Na cultura da batata (*Solanum tuberosum* L.) a produtividade é altamente dependente das condições edafo-climáticas da região de cultivo. Assim, visando maior produção, são feitos experimentos estudando-se o comportamento de cultivares em diferentes regiões avaliando-se o desempenho de cada cultivar quanto a: produtividade, resistência à doen-

ças e pragas, adaptação a diferentes condições de cultivo, qualidade dos tubérculos e preferência do consumidor. Dentre estes fatores, sem dúvida, a produtividade é um dos mais relevantes.

De posse dos dados desses experimentos, são feitas análises estatísticas, segundo o delineamento adotado, para cada classe individualmente, ou para a soma de algumas classes ou ainda para os dados transformados em dinheiro por meio de uma função conveniente. São obtidas conclusões sobre o comportamento das cultivares para cada uma das classes ou conjunto de classes e, então, uma conclusão conjunta é tirada, sem se levar em consideração um nível conjunto de significância.

Outro método de análise é considerar as classes, sobre uma mesma unidade experimental, como se fossem subparcelas, e o delineamento em parcelas subdivididas pode ser empregado. No entanto, para a aplicação do modelo de parcelas subdivididas pressupõe-se que as classes de uma mesma unidade experimental têm variância comum (σ^2) e são igualmente correlacionadas, adotando uma matriz de variâncias e covariâncias "uniforme", comum para todas as unidades experimentais.

A análise multivariada adota pressuposições completamente gerais, determinada pelos dados, sobre a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias de classes sobre uma mesma unidade experimental. Fornece, ainda, resultados baseados na análise conjunta de todas as classes utilizadas, podendo levar, portanto, a conclusões com um nível de confiança conhecido.

O objetivo deste trabalho é indicar entre as técnicas da análise de variância multivariada em experimentos em blocos casualizados e análise de variância para experimentos em parcelas subdivididas, qual é a mais adequada quando a característica observada é subdividida em K classes.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A presente revisão restringirá considerações à análise de experimentos em que se aplica um único tratamento a cada unidade experimental e se anotam várias observações, sobre uma mesma característica, na mesma unidade experimental.

Dois enfoques têm sido discutidos na literatura para análise de medidas repetidas sobre unidades experimentais. Um que adota procedimentos univariados, considerando as observações como subdivisão das parcelas, ou seja em subparcelas. O outro método utiliza procedimento multivariado, que considera as observações sobre cada unidade experimental como um vetor de observações.

O procedimento de parcelas subdivididas tem sido frequentemente empregado. Na literatura, segundo LEONARD e CLARK (1939), os ensaios em parcelas subdivididas tiveram seu início com Yates, por volta de 1933.

SNEDECOR e HABER (1946), utilizaram o modelo

em parcelas subdivididas para a análise conjunta de um experimento com aspargo com 10 anos de duração. Consideraram cortes como subparcelas, nada mencionando sobre a correlação entre cortes. Ainda, com o objetivo de previsão de produção, calcularam para cada bloco, os componentes linear e quadrático.

STEVENS (1949), discute a análise dos dados de um experimento de variedades de café, anotados em 10 anos sucessivos. Inicialmente analisa a produção total obtida em cada parcela. Então, analisa a diferença de produção entre os anos pares e ímpares com objetivo de investigar o grau de variação bienal. Finalmente agrupa anos sucessivos aos pares, para eliminar o efeito bienal através do contraste linear,

$$-2(P_1+P_2) - (P_3+P_4) + 0(P_5+P_6) + (P_7+P_8) + 2(P_9+P_{10}).$$

Desse modo, ele estuda importantes efeitos associados com o tempo, sem que para isto sejam feitas pressuposições dúbias sobre a homogeneidade dos erros.

BOX (1950), discute o problema de observações sucessivas na mesma parcela de um esquema fatorial $2 \times 2 \times 3$ que havia sido arranjado em delineamento completamente casualizado, com duas repetições. Ele acha válida uma análise simples, em parcelas subdivididas, se se puder supor que as observações têm as mesmas variâncias e as mesmas covariâncias para todas parcelas. Assim, para verificar a validade da análise, deve-se testar a hipótese de que a matriz de covariâncias seja a mesma, para todos os tratamentos e a hipótese

de que a matriz de covariâncias das observações repetidas sobre uma mesma unidade experimental tenha a forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a & b & . & . & . & b \\ b & a & . & . & . & b \\ . & . & . & . & . & . \\ b & b & . & . & . & a \end{bmatrix}$$

designada "uniforme" por GEISSER (1963).

No entanto, se as condições exigidas para a análise univariada não forem satisfeitas propõe uma extensão multivariada de testes de significância, adotando uma matriz de covariâncias de estrutura mais geral, como um procedimento alternativo. BOX (1950), utiliza o critério de Wilks (1932) e as distribuições aproximadas deste critério, dadas por Bartlett (1938) e Box (1949), para testar as diversas hipóteses de interesse.

STEEL (1955), tomando as produções acumuladas para cada ano em um ensaio com 25 cultivares de alfafa, em dois anos, compara as análises univariada e multivariada, mostrando que ambas apresentam os mesmos resultados.

Hughes e Danford (1958), citado por CORRÊA DA SILVA (1979), em experimentos biológicos onde se deseja estudar o efeito de várias drogas ou outros tratamentos sobre indivíduos extraídos de uma população específica em períodos sucessivos de tempo, a correlação entre medidas repetidas so-

bre o mesmo indivíduo $\bar{e}$ que diferencia esta situação dos delineamentos e análises usuais.

HUGHES e DANFORD (1958) e DANFORD et alii (1960), tomando N indivíduos e g tratamentos, tal que n_i indivíduos recebem o i-ésimo tratamento, mediram uma certa característica periodicamente, em p momentos após a aplicação dos tratamentos. Consideraram como modelo adequado o modelo misto, com dois efeitos fixos (tratamentos e momentos) e um aleatório (indivíduos).

Apresentam o modelo matemático para cada observação como sendo,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \gamma_k + \delta_{ik} + e_{jk(i)}$$

onde: y_{ijk} - é a observação no k-ésimo momento, no j - ési-
mo indivíduo, que recebeu o i-ésimo tratamento;

μ - efeito médio geral;

α_i - efeito do i-ésimo tratamento;

$\beta_{j(i)}$ - efeito do j-ésimo indivíduo que recebe o i-é-
si mo tratamento;

γ_k - efeito do k-ésimo momento;

δ_{ik} - efeito da interação do i-ésimo tratamento e
k-ésimo momento;

$e_{jk(i)}$ - efeito da interação do j-ésimo indivíduo e k-
ésimo momento, dentro do i-ésimo tratamento,

Ainda, .
 $i = 1, 2, \dots, g$
 $j = 1, 2, \dots, n_i$
 $k = 1, 2, \dots, p.$

Observam que, sob hipótese de iguais variâncias e covariâncias para os K momentos (ocasiões), tem-se:

$$\text{Cov}(y_{ijk}, y_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma^2, & i=i', j=j', k=k' \\ \rho\sigma^2, & i=i', j=j', k \neq k' \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e com a análise univariada segundo o delineamento completamente casualizado com parcelas subdivididas, com tratamentos nas parcelas e momentos nas subparcelas, obtém-se testes válidos para as hipóteses de nulidade referentes a efeitos de tratamentos de momentos e interação tratamentos x momentos. Citam ainda que, sob as hipóteses usuais de normalidade dos componentes aleatórios, as somas de quadrados têm distribuição de χ^2 e são mutuamente independentes. Fornecem os valores dos quadrados médios, bem como seus valores esperados. Neste caso, as estatísticas F_1 , F_2 e F_3 podem ser utilizadas para testar as três hipóteses básicas de um experimento em parcelas subdivididas, cujo esquema de análise de variância com as esperanças dos quadrados médios estão no Quadro 1.

Quadro 1. Análise de variância para um experimento completamente casualizado, com medidas repetidas.

Fonte	G.L.	Q.M.	E(QM)*	F
Tratamentos	$g - 1$	Q_1	$A + \phi_1(\alpha_i)$	$F_1 = Q_1/Q_2$
Indivíduos (dentro de Trat.)	$N - g$	Q_2	A	
momentos	$p - 1$	Q_3	$B + \phi_2(\gamma_k)$	$F_2 = Q_3/Q_5$
Trat. x momentos	$(g-1)(p-1)$	Q_4	$B + \phi_3(\delta_{ik})$	$F_3 = Q_4/Q_5$
Ind. x momentos (dentro de Trat.)	$(p-1)(N-g)$	Q_5	B	
Total	$Np - 1$			

$$* A = \sigma^2 [1 + (p-1)\rho]$$

$$B = \sigma^2 (1 - \rho)$$

$\phi(.)$ = função não-negativa de efeitos fixos.

GEISSER e GREENHOUSE (1958), fazem uma extensão dos resultados obtidos por Box (1954a, 1954b), considerando g grupos, onde o α -ésimo grupo possui n_α indivíduos, $\alpha = 1, 2, \dots, g$, mostram que cada uma das três estatísticas F_1 , F_2 e F_3 é uma razão de dois quadrados médios independentes, com mesmo valor esperado sob a hipótese de nulidade. Estabelecem que, sob as correspondentes hipóteses de nulidade, F_1 é exatamente distribuído como $F_{(g-1, N-g)}$, F_2 é aproximadamente distribuído como $F_{[(p-1)\epsilon, (p-1)(N-g)\epsilon]}$ e F_3 é aproximadamente distribuído como $F_{[(g-1)(p-1)\epsilon, (p-1)(N-g)\epsilon]}$,

onde

$$\epsilon = \frac{p^2 (\bar{\sigma}_{kk} - \bar{\sigma}_{..})^2}{(p-1) \left(\sum_k \sum_{k'} \sigma_{kk'}^2 - 2p \sum_k \bar{\sigma}_k^2 + p^2 \bar{\sigma}_{..}^2 \right)},$$

é uma função dos elementos da matriz de covariâncias genérica Σ , e

$\bar{\sigma}_{kk}$ - é a média dos p termos da diagonal;

$\bar{\sigma}_k$ - é a média da k -ésima linha (ou coluna);

$\bar{\sigma}_{..}$ - é a média geral dos elementos da matriz Σ .

Como ϵ é função da matriz de variâncias e covariâncias, e esta geralmente não é conhecida, os autores determinaram o limite inferior de ϵ , ($\epsilon \geq (p-1)^{-1}$), e usam um teste conservador. Então os testes conservadores comparam as estatísticas F_2 e F_3 com os valores tabelados da distribuição F para $(1, N-g)$ graus de liberdade e para $(g-1, N-g)$ graus de liberdade, respectivamente.

GREENHOUSE e GEISSER (1959), em trabalho sobre métodos de análise de dados de perfil, também salientam que as razões de quadrados médios obtidos nesta análise de variância para o modelo misto, só terão distribuição F exata se as observações no tempo forem normalmente distribuídas, com igual variância e mutuamente independentes ou quando muito, igualmente correlacionadas. Consideram essas pressuposições muito restritivas e que é mais adequado considerar as observações no tempo como um vetor de amostras de uma distribuição normal multivariada com matriz de covariâncias arbitrária. Estu

dam também, o uso da análise de variância univariada sob pressuposições gerais a respeito da matriz de covariâncias de observações no tempo.

Eles pressupõem que o perfil de cada indivíduo é um vetor aleatório proveniente de uma distribuição normal conjunta de p variáveis com uma matriz de covariâncias arbitrária, comum para todos indivíduos, e que as observações em diferentes indivíduos não são correlacionadas.

Utilizam os resultados obtidos por GEISSER e GREENHOUSE (1958), e sugerem que, se se decide utilizar o critério estatístico F na análise de experimentos com medidas repetidas, deve-se, após obter a tabela usual de análise de variância, efetuar primeiro os testes de significância comparando os valores observados de F com os valores tabelados para os correspondentes graus de liberdade não reduzidos. Se F observado for menor que F tabelado a um nível de significância escolhido α , encerra-se a análise, já que a hipótese de nulidade não será rejeitada com a ulterior manipulação dos graus de liberdade. Entretanto se F observado for significativo, aplica-se o teste conservador onde os graus de liberdade são reduzidos pelo fator $\epsilon = (p-1)^{-1}$. Se este teste conduz à significância no nível α , rejeita-se a hipótese de nulidade. Entretanto, se o teste conservador não for significativo, sugerem que se estime ϵ a partir da matriz de variâncias e covariâncias e se efetue o teste aproximado.

Recomendam o teste preliminar da hipótese de que a matriz de covariâncias é a mesma para todos os tratamentos, aplicando-se o teste dado por Box (1949, 1950), que é

uma extensão multivariada do teste de homogeneidade de variâncias de Bartlett (1937). Sugerem, também, que a condição de uniformidade da matriz de covariâncias para a aplicabilidade da análise univariada de parcelas subdivididas, seja testada pelo critério de Box (1949, 1950).

Mencionam que, como alternativa para os testes de significância aproximados e conservadores que eles mesmos propõem para a análise univariada, há procedimentos exatos de análise de variância multivariada para testar as hipóteses de interesse. Desenvolvem um procedimento para o caso de dois tratamentos, que leva a estatística T^2 generalizada de Hotelling e sumarizam a extensão para mais de dois tratamentos. Citam ainda, que são encontrados na literatura três critérios estatísticos para testes de significância, razão de verossimilhança de Wilks, traço ou soma de raízes características de Hotelling e maior raiz característica de Roy.

DANFORD et alii (1960), concordam com GREENHOUSE e GEISSER (1959) quanto a realização do teste preliminar da hipótese de que a matriz de covariâncias é a mesma para todos os tratamentos. Sugerem, também, que a condição de uniformidade da matriz de covariâncias seja testada.

Observaram que o procedimento de análise univariada fornece testes válidos referentes a efeitos de tratamentos e que para os testes multivariados para efeitos de ocasiões e de interação tratamentos x ocasiões se pode empregar o critério de razão de verossimilhança ou o critério T^2 de Hotelling.

Dizem ainda que, sob o ponto de vista de trabalho e de interpretação dos resultados, as análises univariadas são preferidas em relação a procedimentos multivariados. Acrescentam ainda que para medidas tomadas no tempo, as mais próximas são mais correlacionadas do que as mais afastadas, e devem ser analisadas através de um modelo de correlação serial.

SMITH et alii (1962), discutem, com mais detalhe, a técnica multivariada para testar os efeitos principais de tratamentos, de tempo e da interação tratamentos x tempo. Como critério para teste de hipótese multivariada, citam o de Roy, o de Wilks e o de Lawley-Hotelling. Para o estabelecimento de intervalos de confiança, no caso de comparações múltiplas, utilizam o método de Roy e Bose (1953).

COLE e GRIZZLE (1966) concordam com GREENHOUSE e GEISSER (1959) e DANFORD et alii (1960), afirmando que a aplicação da análise univariada a dados com medidas repetidas, só tem validade sob a pressuposição de uniformidade da matriz de covariâncias. Citam que, esta pressuposição, é feita, em muitas situações, sem qualquer verificação de sua validade, porque o analista sente-se pressionado a usar a técnica poderosa da análise de variância.

Salientam que o objetivo de experimentos com medidas repetidas é estudar os efeitos de tratamentos sobre o vetor inteiro de respostas ou alguma característica particu-

lar dele. Entretanto, todas as observações no vetor são essencialmente similares, diferindo apenas no que se refere ao tempo ou local de medição, tendo portanto, esses dados, aparência nitidamente univariada.

Quando a estrutura da matriz de covariâncias para os vetores torna a análise de variância univariada inapropriada, é possível usar uma variedade de procedimentos para certas análises particulares, dos dados, mas o problema é grandemente simplificado quando se pode utilizar a técnica de análise de variância multivariada.

Utilizam o procedimento de análise de variância multivariada, segundo a formulação de Smith et alii (1962) e comentam a sua versatilidade para a construção de testes de hipóteses específicas de interesse, que podem ser obtidos como casos particulares do procedimento de teste de hipótese linear geral multivariada. Referem que tais hipóteses podem ser testadas através de três critérios alternativos, todos eles dependentes de raízes características de funções da "matriz devida a hipótese" e da "matriz devida ao erro": critério da raiz característica máxima, critério do produto das raízes (critério da razão de verossimilhança) e critério da soma das raízes.

Ilustram a aplicação da análise de variância multivariada a experimentos de medidas repetidas, e mostram que as informações que se desejam obter destes experimentos podem ser formuladas em termos das seguintes hipóteses de nulidade:

- a) não há efeitos principais de "condições de medidas" (ocasiões);
- b) não há efeitos principais de tratamentos;
- c) não há interação entre tratamentos e ocasiões.

Dizem ainda, que se pode mostrar que estas hipóteses são equivalentes às respectivas hipóteses de nulidade usualmente testadas pelo procedimento univariado, e ilustram o procedimento de teste destas hipóteses para ambas as análises: univariada e multivariada.

Através de um exemplo mostram que a análise de variância multivariada é um instrumento prático, flexível e poderoso para analisar esse tipo de dados. Salientam, entretanto, que a análise univariada deve ser adotada quando a hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias não for rejeitada.

KOCK (1969) discute a utilização de modelo multivariado na análise de experimentos inteiramente casualizados em parcelas subdivididas. Primeiramente discutem aspectos de análise paramétrica em linha similar a Smith et alii (1962), sendo que os testes de hipótese são aqueles já discutidos por Danford et alii (1960), Greenhouse e Geisser (1959) e Cole e Grizzle (1966); entretanto, atenção especial é dada ao desenvolvimento de procedimentos não-paramétrico.

HUYNH e FELDT (1970), investigam condições sob as quais as razões dos quadrados médios $F_2 = Q_3/Q_5$ e $F_3 = Q_4/Q_5$, discutidas

por Hughes e Danford (1958) nos delineamentos com medidas repetidas têm distribuição F exata. Mostram que as condições de igualdade da matriz de covariâncias para todos os tratamentos e de uniformidade da matriz de covariâncias de observações tomadas sob uma mesma unidade experimental, são suficientes, mas não necessárias, para que as estatísticas F_2 e F_3 , sob a hipótese de nulidade, tenham distribuição F exata. Estabelecem que F_2 e F_3 têm distribuição F exata, sob hipótese de nulidade, se e somente se a matriz de covariâncias Σ_k satisfaz a condição

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{2} - \lambda, \text{ para } i \neq j$$

onde Σ_k , com $k = 1, 2, \dots, K$, é a matriz de covariâncias, sob uma mesma unidade experimental com o k-ésimo tratamento e λ é uma constante comum para todos os tratamentos.

Esta relação entre variâncias e covariâncias garante que o fator de correção ϵ , para os graus de liberdade, proposto por Geisser e Greenhouse (1958) seja igual a 1. Estabelecem também, um teste para a condição necessária e suficiente para que F_2 e F_3 tenham distribuição F exata.

WINER (1971) diz que, ao se analisarem os efeitos de tratamentos para variáveis $X_1, X_2, \dots, X_p$, observadas na mesma unidade experimental, através de análises univariadas, não são levadas em consideração as correlações existentes entre elas. Cita ainda que as respostas simultâneas das unida-

des experimentais para todas as variáveis, consideradas como uma única resposta, geralmente contém mais informação sobre o efeito total de tratamentos do que uma série de respostas consideradas separadamente; na realidade isto é o que ocorre quando se tratam dados multivariados como uma série de dados univariados independentes.

Apresenta três critérios para teste multivariado de tratamentos, que são os mesmos apresentados por Greenhouse e Geisser (1958) e Smith et alii (1962); razão de verossimilhança de Wilks, traço de Hotelling-Lawley e princípio da união-intersecção de Roy, sendo que para $K = 1$, todos eles reduzem-se ao teste F usual da análise univariada.

MARTINEZ (1972) apresenta um método de análise, para experimentos onde o rendimento de campo de cada unidade experimental é subdividido em várias categorias, que considera o fator econômico para diferenciar entre tratamentos. Considera os preços de venda, para cada classe, do produto, obtendo assim um valor em dinheiro para cada unidade experimental, sobre as quais procede-se a análise de variância normal, segundo o delineamento adotado.

Cita como método alternativo de análise, considerar os rendimentos observados por categoria como uma divisão da parcela experimental, considerando o modelo de parcelas subdivididas como modelo básico para a análise. Não faz, entretanto, nenhum comentário de possível existência de correlação entre categorias em uma mesma unidade experimental.

BONILLA (1974), apresenta um estudo comparativo entre o método de análise de parcelas subdivididas e procedimento multivariado de análise de perfil, aplicados a experimentos com medidas repetidas em delineamento completamente casualizado, onde o objetivo maior da investigação é determinar em que situação é mais conveniente o uso de um ou de outro procedimento de análise, em função dos objetivos da pesquisa.

Após especificar as hipóteses de interesse na análise de perfil e na análise de parcelas subdivididas, ela procura estudar a equivalência entre as mesmas, para o caso particular em que $\Sigma = \sigma^2 I$.

As hipóteses de interesse são:

- a) paralelismo dos perfis de tratamentos e inexistência de interação tratamentos x medidas no tempo;
- b) igualdade de níveis de tratamentos e nulidade de efeitos de tratamentos;
- c) igualdade de médias de medidas no tempo e nulidade de efeitos de ocasiões.

Conclui que o critério F para os testes das hipóteses formuladas em a) e c) diferem de um método de análise para o outro, mesmo quando $\Sigma = \sigma^2 I$.

Para a hipótese b), ela usa o critério t de Student, mostrando que, quando aplicado aos dois métodos de análise, este critério difere na estimativa da variância, sendo os numeradores idênticos.

ROWELL e WALTERS (1976) discutem métodos para analisar dados de experimentos onde várias observações são feitas sobre uma mesma unidade experimental. Sugerem em primeiro lugar, fazer a análise dos dados separadamente para cada tempo; em seguida fazer a análise segundo o modelo em parcelas subdivididas, desde que as pressuposições do modelo forem satisfeitas.

Outro método citado pelos autores é o estudo de contrastes ortogonais ou não, sobre a variável tempo.

Citam, também, que dados dessa natureza podem ser analisados por métodos multivariados.

SCHWERTMAN (1978) menciona que, em experimentos com medidas repetidas, se os vetores observados em cada unidade experimental têm uma distribuição multinormal com matriz de dispersão com a estrutura

$$\Sigma = \sigma^2 (I + aJ + \underline{\alpha}\underline{j}'_v + \underline{j}_v\underline{\alpha}'),$$

onde:

I = matriz identidade $K \times K$;

J = matriz $K \times K$, com todos elementos iguais a 1;

$\underline{j}_v$ = vetor $K \times 1$, com todos elementos iguais a 1;

$\underline{\alpha}$ = vetor $K \times 1$, tal que $\underline{\alpha}'\underline{j}_v = 0$;

σ^2, a = escalares;

então a correção de Geisser e Greenhouse (1958) é desnecessária, ou seja, $\epsilon = 1$. Ele demonstra que a correção continuades

necessária mesmo no caso de dados incompletos, isto é, quando o número de medidas repetidas não é o mesmo para todas as unidades experimentais.

EVANS e ROBERTS (1979) defendem, que experimentos com animais em pastejo e plantas perenes fornecem uma longa sequência de observações em cada unidade experimental. Afir^umam que dados dessa natureza são analisados, frequentemente, com um experimento em parcelas subdivididas no tempo, embora Cole e Grizzle (1966) acham mais válida uma análise multivariada porque a matriz de covariâncias torna-se heterogênea no decorrer do tempo.

Outro método defendido pelos autores é o ajuste de curvas polinomiais, sendo este método pouco aceito na pesquisa agrícola, provavelmente, devido a difícil interpretação dos coeficientes de ordem elevada.

LEAL (1979) faz uma exposição sobre os métodos de análise de parcelas subdivididas e análise de perfil, de dados de experimentos em que se tomam medidas repetidas em ocasiões sucessivas sobre uma mesma unidade experimental, salientando as restrições a aplicação de cada um destes métodos.

Como ilustração, Leal aplica os dois métodos de análise, univariado e multivariado, aos dados apresentados por Danford et alii (1960). Os resultados das análises realizadas levaram às mesmas conclusões, embora a rejeição da hipótese de uniformidade da matriz de covariâncias deixe

dúvidas quanto a validade das inferências feitas através da análise univariada.

Ressalta, ainda, a conveniência do desenvolvimento de métodos alternativos de análise que levem em conta estrutura de correlação mais adequada.

CORREIA DA SILVA (1979) explora a aplicação de procedimento de análise de séries de tempo (análise no domínio da frequência) em dados com medidas repetidas no tempo. Propõe um método, que pode ser considerado como uma extensão do procedimento usual de análise de variância à situação em que a cada etapa do experimento se anotam observações de uma variável real. Este procedimento converte o problema do domínio do tempo para o domínio da frequência, tornando as observações aproximadamente não correlacionadas, permitindo assim a possibilidade da utilização da técnica usual da análise de variância e de inferências nela baseadas com os dados transformados.

Diz, também, que o método apropriado de análise, de dados de experimentos com medidas repetidas, depende fundamentalmente dos objetivos da pesquisa, resultando, desse fato, que não há um procedimento único de análise, geralmente recomendável, para todas as situações. Como método mais simples tem-se o de parcelas subdivididas, seguindo-se, na ordem, o método de análise multivariada de perfil e os procedimentos que utilizam técnicas de séries de tempo.

Exemplifica utilizando os dados apresentados por

Danford et alii (1960), chegando aos mesmos resultados obtidos por Danford que aplicou procedimentos de análise univariada e multivariada.

GARCIA BEN e YOHAÏ (1980) citam que a análise de variância multivariada padrão supõe igualdade para as matrizes de covariâncias dos erros. Eles propõem um teste que é válido, para comparar os efeitos principais de diferentes níveis de um fator, mesmo quando as matrizes de covariâncias não são iguais. O teste proposto é uma generalização daquele proposto por Scheffé (1943), que foi extendido para várias amostras por Anderson (1963).

DINIZ (1980) tomando as produções de laranja durante os anos de 1970 a 1978 fez as seguintes análises de variância:

- a) com as produções dos anos pares;
- b) com as produções dos anos 1970 a 1976.

Com a primeira análise mostrou a adequabilidade do modelo em parcelas subdivididas, sendo anos as subparcelas.

Com a segunda análise mostrou que o modelo de parcelas subdivididas somente é adequado para a análise referente as parcelas. Com relação a análise das subparcelas, mostrou que cada contraste entre anos deverá ser testado com seu resíduo próprio.

ANDERSEN (1981) discute a análise de variância com erros correlacionados, citando o modelo estudado por

Box (1954b) onde assume que os erros entre linhas constituem um processo Gaussiano estacionário. Ele deriva distribuições aproximadas para o teste estatístico de não efeito de linhas e colunas. O comportamento das aproximações é estudado, por simulação, pelo processo de médias móveis de primeira ordem e pelo processo auto-regressivo de primeira ordem. A distribuição empírica de valores simulados dão uma excelente aproximação com as aproximações propostas para todos os casos considerados.

MORRISON (1981) faz uma exposição da aplicação da análise de variância multivariada a dados de medidas ao longo do tempo, que em psicologia e outras áreas tem recebido a denominação de análise de perfil.

Ele diz que estudos de perfil sugerem três importantes questões:

- a. são os perfis médios de tratamentos semelhantes, no sentido de que segmentos adjacentes são paralelos?
- b. se os perfis de tratamentos são paralelos, estão eles também no mesmo nível?
- c. ainda pressupondo paralelismo, são as médias de momentos diferentes?

Ele salienta que estas questões podem ser expressas sob a forma de hipóteses completamente equivalentes àquelas da análise univariada, ou seja, "a" corresponde a hipótese de ausência de interação tratamentos x momentos; "b" cor

responde a hipótese de igualdade de tratamentos; "c" corresponde a hipótese de igualdade de efeitos de momentos.

Apresenta o critério de união-intersecção de Roy (1953), para testar cada uma das três hipóteses, refere, também, os critérios de Wilks (1932) e de Hotelling (1951), que permitem testes aproximados.

Se a hipótese de nulidade referente a paralelismo (interação tratamentos x momentos) é rejeitada, os testes das hipóteses de igualdade de efeitos de tratamentos e de igualdade de efeitos de momentos pode ser um tanto irrelevantes. Diz ainda, que quando isso ocorre, faz-se necessário testar a igualdade dos efeitos de tratamentos separadamente para cada momento, através de análises de variância univariada. Semelhantemente, a hipótese de igualdade de efeitos de momentos deve ser testada dentro de cada tratamento através da estatística T^2 , utilizando a distribuição F.

Expõe, também, o procedimento geral para a construção de intervalos de confiança simultâneos para funções paramétricas dos modelos lineares multivariados, que pode ser utilizado, por exemplo, para testes de comparações múltiplos de tratamentos, de momentos e de combinações de tratamentos e momentos, particularmente para determinar que tratamentos podem estar contribuindo para a rejeição da hipótese de paralelismo. O procedimento baseia-se no critério de união-intersecção de Roy (1953). Refere-se, também, ao uso do procedimento de comparações múltiplas de Tukey (1953) para tes-

tes de significância de diferenças entre tratamentos, do procedimento de Scheffé (1953) para testar efeitos de contrastes gerais de tratamentos, e da estatística T^2 para comparações múltiplas de componentes lineares de efeitos de momentos.

Segundo DAGNELIE (1982), a análise multivariada, em sentido amplo, pode ser considerada como formada por um conjunto de métodos estatísticos, que têm por objetivo o estudo das relações existentes entre várias variáveis dependentes ou interdependentes, e que a análise da variância multivariada tem por objetivo comparar as médias de mais de duas populações.

O autor apresenta a hipótese multivariada:

$$H_0: \underline{m}_1 = \underline{m}_2 = \dots = \underline{m}_K$$

onde, $\underline{m}_g$ é o vetor de médias das p variáveis, associado ao tratamento $g(g=1,2,\dots, K)$, e como critérios de teste de H_0 cita o de Wilks, o de Roy e o de Lawley-Hotelling. Para comparações múltiplas, utiliza o princípio da união-intersecção de Roy.

Quanto as pressuposições do modelo, cita Maradia (1971), que estudou o efeito da não-normalidade, e Ito e Schull (1964) e Korin (1972), mostrando que os resultados dos testes não são grandemente afetados por heterogeneidade das matrizes de variâncias e covariâncias, quando o número de repetições é grande e o mesmo para todos os tratamentos.

PIMENTEL GOMES (1984) diz que em experimentos

onde a produção de cada parcela é dividida em várias classes, uma transformação em dinheiro, por meio de uma função conveniente, é razoável, mas o método geral de análise, nesses casos, é a análise da variância multivariada.

MONLEZUN et alii (1984) discutem exemplos para delineamentos específicos de medidas repetidas (parcelas subdivididas), apresentando um modelo matemático para cinco casos, bem como o teste F apropriado para cada modelo. Fazem, também, um breve comentário relativo a eficiência de cada delineamento, conforme o modelo matemático estabelecido,

Consideram, para todos os casos, os efeitos dos fatores A e B como sendo fixos e os demais como aleatórios e IID $N(0, \sigma^2)$.

Argumentam ainda que se qualquer propriedade não for satisfeita outros procedimentos podem ser aplicados como alternativa; por exemplo, análise multivariada (Cole e Grizzle, 1966), métodos não paramétricos (Koch, 1969).

ELASHOFF (1984) comentando o trabalho de MONLEZUN et alii (1984) diz que se os modelos por eles apresentados não forem razoáveis o analista pode usar um teste F conservador, estimando os graus de liberdade, ou usar testes multivariados.

Diz ainda que, o modelo matemático apropriado para um delineamento particular depende de um estudo detalhado da natureza da unidade experimental, da resposta medida e da origem da correlação entre médias.

GILL (1984), em seu comentário, diz que os autores fizeram uma boa discussão de delineamentos experimentais alternativos, comentando que não se pode generalizar, porque numerosos projetos podem ser executados em que os fatores são repetidos no espaço e não no tempo. Salienta, que trabalhos dessa natureza podem tornar-se complexos provendo um grande desafio para quem desejar investigar técnicas univariadas robustas ou extensões de procedimentos multivariados.

DEMETRIO (1985), faz um estudo comparativo entre métodos de análise univariada e multivariada, comentando os resultados da análise dos dados de fibra %, brix %, pol % e produtividade de um experimento com 22 variedades de cana-de-açúcar, conduzido em blocos casualizados em 4 locais e três cortes sucessivos. Ela verifica que no caso do modelo multivariado o número de diferenças significativas entre médias de tratamentos é menor que no caso univariado, isso porque no caso do modelo multivariado o critério de rejeição é mais rigoroso por levar em consideração um nível de significância conjunto, enquanto que no modelo univariado o nível de significância é tomado isoladamente por análise.

3. MATERIAL

Os dados utilizados, para a exemplificação, neste trabalho estão apresentados no Quadro 2, e refem-se a produção, em kg por parcelas, de um experimento com a cultura de batatinha (*Solanum tuberosum* L.), fornecidos pela Empresa Catarinense de Pesquisa agropecuária S.A. (EMPASC) - Itajaí, SC (1981).

Os tubérculos colhidos foram classificados segundo a classificação utilizada pela EMBRAPA nos Ensaio Nacionais de Cultivares de Batata.

O experimento tinha as seguintes características:

Delineamento: Blocos Casualizados

Número de Repetições: 4

Número de Cultivares: 15

Número de classes: 3

Classes: C₁ : Graúdo, tubérculos com o menor diâmetro superior a 45 mm;

Classes

C_2 : Médio, tubérculos com o menor diâmetro entre 35 mm e 45 mm;

C_3 : Miúdo, tubérculos com o menor diâmetro inferior a 35 mm;

Unidade experimental: 5,6 m², com 20 plantas úteis.

As cultivares utilizadas no experimento, bem como as suas origens, turgescência e brotação dos tubérculos, por ocasião do plantio, estão descritos no Quadro 3.

Quadro 2. Produções, em kg por parcela, de um ensaio de competição de cultivares de batatinha, no plantio de primavera, na safra 1981/82.

Blocos		1			2			3			4		
Classes													
Cult.	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C3
1	14,85	1,33	0,31	15,06	1,18	0,38	15,84	0,98	0,23	14,36	1,56	0,41	
2	13,69	2,03	0,55	9,13	2,82	0,43	10,56	1,56	0,54	10,35	1,46	0,39	
3	17,16	1,27	0,13	17,34	1,30	0,29	14,79	0,95	0,12	14,69	1,19	0,73	
4	12,08	4,35	1,04	10,54	6,57	0,73	10,89	4,55	0,83	10,11	3,96	0,76	
5	15,22	2,93	0,52	13,47	3,23	0,66	15,00	2,80	0,62	15,89	2,64	0,43	
6	16,47	4,23	0,62	18,12	2,67	0,52	12,44	7,26	0,74	16,86	3,33	0,55	
7	14,51	4,06	0,31	11,32	6,40	0,38	13,19	4,02	0,60	14,64	4,41	0,68	
8	10,26	8,00	1,39	8,52	8,98	1,52	6,88	9,71	1,95	11,75	5,80	0,90	
9	13,28	6,01	0,68	13,16	8,17	0,59	14,92	6,03	0,48	14,18	6,06	0,73	
10	15,15	3,34	0,35	16,29	2,78	0,22	15,10	2,40	0,41	17,82	2,50	0,45	
11	11,09	4,63	1,00	13,56	5,16	0,65	13,71	3,84	0,78	13,74	2,70	0,76	
12	15,51	3,34	0,64	13,80	3,28	0,57	13,38	3,01	0,48	15,12	2,25	0,53	
13	18,62	2,26	0,38	16,22	2,41	0,34	19,15	1,52	0,53	15,62	2,16	0,40	
14	20,28	0,69	0,23	17,19	0,83	0,14	15,84	1,01	0,16	18,42	0,41	0,28	
15	15,57	2,00	0,52	17,68	1,60	0,34	17,58	1,45	0,19	14,82	1,21	0,61	

Quadro 3. Cultivares utilizadas no experimento, suas origens, turgescência e brotação dos tubérculos, por ocasião do plantio.

Cultivares	Procedência	Turgescência	Brotação
1. Anosta	Holanda	Completa	Média
2. Aracy	Brasil	Completa	Média
3. Baronesa	Brasil	Regular	Excessiva
4. Bintje	Holanda	Completa	Média
5. Edzina	Holanda	Completa	Média
6. Elvira	Holanda	Completa	Boa
7. Gelda	Alemanha	Completa	Boa
8. Linda	Alemanha	Completa	Boa
9. Nicola	Holanda	Completa	Boa
10. Nordstern	Alemanha	Regular	Excessiva
11. Porta	Alemanha	Boa	Ótima
12. Recent	Holanda	Boa	Boa
13. Santo Amor	Brasil	Boa	Excessiva
14. Univita	Alemanha	Regular	Excessiva
15. Vittorini	Holanda	Completa	Boa

4. MÉTODOS

4.1. Introdução

Considerando-se um experimento delineado em blocos casualizados, com I tratamentos e J blocos, onde cada observação y_{ij} é repartida em K categorias, segundo um critério pré-estabelecido, então y_{ijk} é a observação, classificada na k-ésima categoria, efetuada na j-ésima unidade experimental submetida ao i-ésimo tratamento, com:

$$i = 1, 2, \dots, I ;$$

$$j = 1, 2, \dots, J ;$$

$$k = 1, 2, \dots, K .$$

Os dados de tal experimento, podem ser arranjados como no Quadro 4.

Assim, os dados, associados a cada unidade experimental constituem um vetor de K elementos,

$$\underline{y}_{ij} = (y_{ij1}, y_{ij2}, \dots, y_{ijK}).$$

Quadro 4. Dados de medidas repetidas em uma parcela, segundo o delineamento em blocos casualizados.

Trata- mentos	Cate- gorias	Blocos				Soma
		1	2	...	J	
1	1	y_{111}	y_{121}	...	y_{1j1}	$y_{1.1}$
	2	y_{112}	y_{122}	...	y_{1j2}	$y_{1.2}$
	...	...	...	...	...	...
	K	y_{11K}	y_{12K}	...	y_{1jK}	$y_{1.K}$
	Soma	$y_{11.}$	$y_{12.}$	...	$y_{1j.}$	$y_{1..}$
...	...	...	...	...	...	...
I	1	y_{I11}	y_{I21}	...	y_{IJ1}	$y_{I.1}$
	2	y_{I12}	y_{I22}	...	y_{IJ2}	$y_{I.2}$
	...	...	...	...	...	...
	K	y_{I1K}	y_{I2K}	...	y_{IJK}	$y_{I.K}$
	Soma	$y_{I1.}$	$y_{I2.}$	...	$y_{IJ.}$	$y_{I..}$

O modelo geral, a ser considerado para uma observação é dado por:

$$y_{ijk} = \mu + t_i + b_j + (tb)_{ij} + t'_k + (tt')_{ik} + e_{ijk}$$

onde:

- μ : efeito médio geral;
 t_i : efeito do i-ésimo tratamento (parcela);
 b_j : efeito do j-ésimo bloco;
 $(tb)_{ij}$: efeito da interação do i-ésimo tratamento com o j-ésimo bloco, ou efeito residual de parcelas;
 t'_k : efeito da k-ésima categoria (subparcela);
 $(tt')_{ik}$: efeito da interação do i-ésimo tratamento com a k-ésima categoria;
 e_{ijk} : desvio aleatório de cada observação ou efeito residual das subparcelas, normalmente distribuído.

Assumiu-se ainda, que o modelo adotado inclui as seguintes restrições:

$$\sum_i t_i = \sum_j b_j = \sum_k t'_k = \sum_i (tt')_{ik} = \sum_k (tt')_{ik} = \sum_i (tb)_{ij} = \sum_j (tb)_{ij} = 0;$$

$$E(e_{ijk}) = 0;$$

$$E(e_{ijk}, e_{i'j'k'}) = \begin{cases} \sigma_k^2, & \text{para } i = i', j = j', k = k' \\ \sigma_{kk'}, & \text{para } i = i', j = j', k \neq k' \\ 0, & \text{demais casos,} \end{cases}$$

É importante observar que ao impor-se a última restrição em e_{ijk} , pressupõe-se que a estrutura das variâncias e covariâncias entre categorias distintas, sobre a mesma unidade experimental é comum a todos os tratamentos. Esta pressuposição de homogeneidade é a base do modelo adotado, e somente sob tal condição serão válidas as inferências sobre os efeitos de tratamentos, categorias e interação.

Estas restrições são muito gerais, permitindo flexibilidade quanto à estrutura de variâncias e covariâncias dos erros, que na análise de dados dessa natureza torna-se importante, pois, segundo as pressuposições feitas sobre esta estrutura, têm-se métodos alternativos de análise.

Considerando-se a estrutura da matriz de variâncias e covariâncias Σ , discutiremos dois métodos de análise, um que considera uma estrutura geral correspondente àquela requerida pelo método de análise multivariada, ou seja:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1K} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{K1} & \sigma_{K2} & \cdots & \sigma_{KK} \end{bmatrix}$$

Por outro lado, o método de análise em parcelas subdivididas, só é válido sob pressuposições mais restritivas de que as medidas tomadas dentro de cada unidade experimental, têm variâncias homogêneas e são igualmente correlacionadas aos pares, isto é, quando

$$\sigma_{kk'} = \begin{cases} \sigma^2, & k = k' \\ \rho\sigma^2, & k \neq k', \end{cases}$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre quaisquer duas categorias de uma mesma unidade experimental. Então Σ torna-

-se "uniforme":

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

4.2. Análise Univariada em Parcelas Subdivididas

De acordo com LEAL (1979) e DINIZ (1980), dentre outros, a adequação do modelo em parcelas subdivididas, a dados experimentais dessa natureza está diretamente associada a pressuposição de que as medidas tomadas sobre uma mesma unidade experimental têm variâncias comuns a todos os tratamentos e matriz de covariâncias do tipo uniforme.

4.2.1. Teste de homogeneidade para as matrizes de covariâncias

Este teste tem por objetivo verificar se a matriz de covariâncias é comum a todos os tratamentos.

O critério estatístico, a ser utilizado neste estudo, será o proposto por BOX (1950), descrito por DANFORD et alii (1960), entre outros.

A hipótese a ser testada é:

$$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots \Sigma_I = \Sigma_0,$$

onde Σ_i é a matriz de covariâncias comum aos vetores de observações nas unidades experimentais com o tratamento t_i ($i = 1, 2, \dots, I$), e um estimador não tendencioso de Σ_i é dado por S_i .

O critério do teste é:

$$M_1 = G \ln |A| - \sum_i [(J-1) \ln |S_i|],$$

onde:

G : número de graus de liberdade do resíduo (a);

$A = [a_{kk'}]$: estimador da matriz de covariâncias comum, Σ , baseado em G graus de liberdade;

$S_i = [s_{kk'}^{(i)}]$: estimador não tendencioso de Σ_i , baseado em $(J-1)$ graus de liberdade,

sendo,

$$a_{kk'} = G^{-1} \sum_i \sum_j (y_{ijk} - \bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{..k})(y_{ijk'} - \bar{y}_{i.k'} - \bar{y}_{.jk'} + \bar{y}_{..k'})$$

$$s_{kk'}^{(i)} = (J-1)^{-1} \sum_j (y_{ijk} - \bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{..k})(y_{ijk'} - \bar{y}_{i.k'} - \bar{y}_{.jk'} + \bar{y}_{..k'}),$$

A estatística M_1 quando multiplicada por $(1-A_1)$ é aproximadamente distribuída como χ^2 com f_1 graus de liberdade, onde,

$$A_1 = \frac{2K^2 + 3K - 1}{6(K+1)(I-1)} \left[\frac{I}{(J-1)} - \frac{1}{G} \right]$$

$$f_1 = \frac{(I-1) K(K+1)}{2}$$

Então, se $(1-A_1)M_1 < \chi^2_{\alpha, f_1}$, não se rejeita H_0 , caso contrário conclui-se pela existência de ao menos um par $\Sigma_i \neq \Sigma_{i'}$, para algum $i \neq i'$.

Se os valores dos determinantes são próximos de zero, GILL (1978) citado por IEMMA (1981) recomenda que sejam usados logaritmos na base 10 e que se multiplique M_1 por 2,3026.

Esta aproximação é considerada adequada (MORRISON, 1981), se $I < 5$, $K < 5$ e $(J-1) \geq 20$, caso contrário pode-se realizar um teste F com maior aproximação (BOX, 1950), calculando-se:

$$A_1^* = \frac{(K-1)(K+2)}{6(I-1)} \left[\frac{I}{(J-1)^2} - \frac{1}{G^2} \right]$$

$$f_1^* = \frac{f_1 + 2}{A_1^* - A_1^2},$$

$$b = \frac{f_1}{1 - A_1 - f_1/f_1^*}$$

e compara-se M_1/b com o valor de F tabelado, com f_1 e f_1^* graus de liberdade.

4.2.2. Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias A

A pressuposição da uniformidade da matriz comum de covariâncias, pode ser testada através do critério de WILKS (1946), modificado por BOX (1949).

A hipótese de nulidade a ser testada é

$$H_0: \Sigma = \Sigma^*,$$

onde Σ^* é uma matriz uniforme.

O critério do teste é dado por,

$$\Lambda = \frac{|A|}{|\bar{A}|},$$

onde, $\bar{A}$ é uma matriz com a mesma dimensão de A , com todos elementos da diagonal iguais e igual a média aritmética dos elementos da diagonal de A ; os elementos fora da diagonal são iguais e igual a média aritmética dos elementos fora da diagonal de A .

Determina-se, então, a estatística M_2 que quando multiplicada por $(1-A_2)$ é aproximadamente distribuída como χ^2 com f_2 graus de liberdade, onde:

$$M_2 = -G \ln \Lambda,$$

$$A_2 = \frac{K(K+1)^2 (2K-3)}{6G(K-1)(K^2+K-4)},$$

$$f_2 = \frac{K^2 + K - 4}{2}.$$

Então, se $(1-A_2)M_2 < \chi^2_{\alpha, f_2}$, não se rejeita H_0 .

Se K é grande e/ou G é pequeno (BOX, 1950) propõe um teste F aproximado, calculando-se:

$$A_2^* = \frac{(K-1) K(K+1) (K+2)}{6 G^2(K^2 + K - 1)},$$

$$f_2^* = \frac{f_2 + 2}{A_2^* + A_2^2},$$

$$b = \frac{f_2}{1-A_2-f_2/f_2^*},$$

e compara-se M_2/b com valor de F tabelado, com f_2 e f_2^* graus de liberdade.

4.2.3. Análise da variância

Se as pressuposições de homogeneidade para as matrizes de covariâncias para tratamentos e uniformidade, para a matriz de covariância comum, forem satisfeitas, procede-se a análise da variância em parcelas subdivididas e aplica-se o teste F usual, para testar as hipóteses de igualdade de tratamentos, subtratamentos e interação.

Para a aplicação do método de mínimos quadrados, visando a obtenção do sistema de equações normais, estimadores dos parâmetros, a partição da soma de quadrado total e o número de graus de liberdade associado a cada fonte de variação, de acordo com o modelo matemático adotado, supõe-se apenas o erro e_{ijk} como aleatório. Sob tal suposição, o procedimento a ser adotado é o mesmo usualmente encontrado na literatura para ensaios em parcelas subdivididas, cujas demonstrações serão omitidas por não serem objetivo principal desse estudo.

4.2.3.1. Natureza do erro experimental

Conforme citado anteriormente, na análise estatística dos experimentos em parcelas subdivididas, deve-se considerar o fato de que as observações das diferentes subparcelas de uma mesma parcela podem estar correlacionadas com uma correlação comum ρ .

Tem-se, então que,

$$E(e_{ijk}) = 0$$

$$\text{Var}(e_{ijk}) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(e_{ijk}, e_{i'j'k'}) = \begin{cases} \rho\sigma^2, & \text{se } i=i', j=j', k \neq k' \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases}$$

Neste estudo, tem-se os tratamentos aplicados em parcela e categorias são consideradas como subdivisões das parcelas, desse modo a variância de uma parcela é,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_k e_{ijk}\right)^2 &= K\sigma^2 + 2 C_2^K \rho\sigma^2 \\ &= K\sigma^2 [1 + (K-1)\rho]. \end{aligned}$$

Por outro lado, a variância de uma parcela reduzida a uma observação ($K=1$) é σ^2 ; para $K > 2$ a variância para tratamento principal é do tipo

$$\sigma^2 [1 + (K-1)\rho].$$

A variância referente a uma categoria, dentro de uma parcela, é obtida da diferença entre as subparcelas de uma parcela. Para duas subparcelas por parcela, tem-se:

$$E(e_{ijk} - e_{ijk'})^2 = 2\sigma^2[1-\rho], \text{ com } k \neq k'.$$

Desse modo, a variância por subparcela é $\sigma^2(1-\rho)$. Esta expressão permanece constante para qualquer número K de subparcelas por parcela.

4.2.3.2. Testes de hipóteses e quadros de análise

Nos ensaios em parcelas subdivididas, existe, geralmente, interesse em se testar as três hipóteses básicas:

$$\begin{aligned} H_0(1) : t_i &= 0 ; i = 1, 2, \dots, I \\ H_0(2) : t'_k &= 0 ; k = 1, 2, \dots, K \\ H_0(3) : tt'_{ik} &= 0 ; \end{aligned}$$

que são, respectivamente, as hipóteses de nulidade para efeitos de tratamentos principais, de tratamentos secundários e da interação.

Os resíduos adequados para os testes das hipóteses básicas, ficam evidentes quando se observam as esperanças dos quadrados médios, apresentadas no Quadro 5, visto que as esperanças do numerador e denominador das estatísticas F devem diferir somente na função positiva do efeito fixo que se deseja testar.

Quadro 5. Esquema da análise de variância para ensaios em parcelas subdivididas no delineamento em blocos casualizados e esperança dos quadrados médios.

Causas de variação	Graus de liberdade	Esperança dos quadrados médios
Blocos	J-1	$A + IK/(J-1) \sum_j b_j^2$
Tratamentos (T)	I-1	$A + JK/(I-1) \sum_i t_i^2$
Resíduo (a)	(J-1)(I-1)	A
<hr/>		
Parcelas	IJ-1	
<hr/>		
Tratamentos (T')	K-1	$B + IJ/(K-1) \sum_k t'_k{}^2$
T x T'	(I-1)(K-1)	$B + J/(I-1)(K-1) \sum_{i,k} (tt')_{ik}^2$
Resíduo (b)	I(J-1)(K-1)	B
<hr/>		
TOTAL	IJK - 1	

onde,

$$A = \sigma^2 [1 + (K-1)\rho]$$

$$B = \sigma^2 [1 - \rho]$$

Assim ficaram determinados os critérios para os respectivos testes, conforme está apresentado no Quadro 6.

Quadro 6. Testes para as três hipóteses básicas.

Hipóteses	G.L.	F (observado)
$H_0 (1)$	$(I-1); (I-1)(J-1)$	QM Trat. T/QMR (a)
$H_0 (2)$	$(K-1); I(J-1)(K-1)$	QM Trat. T'/QMR (b)
$H_0 (3)$	$(I-1)(K-1); I(J-1)(K-1)$	QM TxT'/QMR (b)

Por outro lado, segundo LEAL (1979), PIMENTEL GOMES (1982) e CAMPOS (1984), dentre outros, quando a interação TxT' é significativa, o esquema da análise de variância deve ser modificado, pois esse fato pode ser um indício de que os tratamentos secundários comportam-se de modo diferente em relação aos tratamentos principais. Assim, recomendam que seja estudado o efeito dos tratamentos secundários dentro de cada tratamento principal, e/ou o efeito dos tratamentos principais dentro de cada tratamento secundário, conforme interesse do pesquisador.

4.2.3.3. Comparações múltiplas

Considerando a possibilidade de rejeição de,

ao menos uma das hipóteses de nulidade, conclui-se que há pelo menos um contraste significativo entre efeitos dos parâmetros envolvidos.

Pode-se, utilizar quaisquer dos métodos usuais para comparações múltiplas. Neste estudo, optou-se pelo método de SCHEFFÉ por ser um caso particular, como será demonstrado, do princípio de união intersecção de ROY. Segundo PIMENTEL GOMES (1982) tem-se quatro casos clássicos de comparações de médias, que são os mais importantes.

Para a aplicação do método de SCHEFFÉ no caso de comparações pareadas e de $r_1 = r_2 = \dots = J$, tem-se que,

$$D.M.S. = S\sqrt{\widehat{Var}(\bar{Y})}, \quad e$$

$$S = \sqrt{m \times F_{\alpha, m, n}}$$

sendo,

m : graus de liberdade da fonte de variação;

n : graus de liberdade da $\widehat{Var}(\bar{Y})$.

1º caso

Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais.

Para o contraste

$$\bar{Y} = \bar{t}_i - \bar{t}_{i'}, \quad \text{com } i \neq i', \text{ obtém-se}$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{2}{JK} \sigma^2 [1 + (K-1)\rho]$$

Logo,

$$D.M.S. = \sqrt{2m \frac{QMRes(a)}{JK} F_{\alpha, m, n}},$$

$$m = (I-1); \quad n = (I-1)(J-1).$$

2º caso

Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários.

Para o contraste

$$\bar{Y} = \bar{t}_{\cdot k} - \bar{t}_{\cdot k'}, \text{ com } k \neq k', \text{ obtêm-se}$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{2}{IJ} \sigma^2 (1-\rho)$$

Logo,

$$D.M.S. = \sqrt{2m \frac{QMRes(b)}{IJ} F_{\alpha, m, n}},$$

$$m = (K-1); \quad n = I(J-1)(K-1).$$

3º caso

Comparação entre efeitos estimados de tratamentos secundários, dentro do i-ésimo tratamento principal.

Para o contraste

$$\bar{Y} = (\bar{t}t')_{ik} - (\bar{t}t')_{ik'}, \text{ com } k \neq k', \text{ obtêm-se}$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{2}{J} \sigma^2 (1-\rho)$$

Logo,

$$D.M.S. = \sqrt{2m \frac{QMRes(b)}{J} F_{\alpha, m, n}},$$

$$m = (K-1); \quad n = I(J-1)(K-1).$$

4º caso

Comparação entre efeitos estimados de tratamentos principais, dentro do k-ésimo tratamento secundário.

Para o contraste

$$\bar{Y} = (\bar{t}\bar{t}')_{ik} - (\bar{t}\bar{t}')_{i'k}, \text{ com } i \neq i', \text{ obtêm-se}$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{2}{JK} \left[\sigma^2 \{1 + (K-1)\rho\} + (K-1) \sigma^2 (1-\rho) \right]$$

Logo,

$$\text{D.M.S.} = \sqrt{\frac{2m}{JK} \frac{[\text{QMR}(a) + (K-1)\text{QMR}(b)]}{F_{\alpha, m, n}}},$$

$$m = (I-1); \quad n = n'.$$

O número de graus de liberdade n' , associado a $V(\bar{Y})$, é derivado da fórmula de SATTERTHWAITTE, onde:

$$n' = \frac{[\text{QMR}(a) + (K-1) \text{QMR}(b)]^2}{\frac{[\text{QMR}(a)]^2}{(I-1)(J-1)} + \frac{[(K-1) \text{QMR}(b)]^2}{I(J-1)(K-1)}}$$

4.3. Análise Multivariada em Blocos Casualizados

A análise de variância multivariada é um método alternativo mais geral, uma vez que não faz qualquer restrição quanto a estrutura de variâncias e covariâncias de medidas tomadas sobre a mesma unidade experimental.

Uma restrição a aplicação da análise de variância multivariada é que o número de unidades experimentais menos o número de tratamentos deve ser maior que o número de ob

servações realizadas em cada unidade experimental, pois, em caso contrário, a matriz "devida ao erro" requerida para os testes, é singular.

4.3.1. Modelo matemático

Considerando-se o delineamento em blocos casualizados multivariado, com I tratamentos, J blocos e K categorias, cada observação y_{ijk} pode ser escrita supondo o seguinte modelo matemático:

$$y_{ijk} = \mu_k + t_{ik} + b_{jk} + e_{ijk},$$

onde, para $i = 1, 2, \dots, I;$

$j = 1, 2, \dots, J;$

$k = 1, 2, \dots, K;$

y_{ijk} é o valor a ser observado na k-ésima categoria, sob o i-ésimo tratamento no j-ésimo bloco;

μ_k é a média geral da k-ésima categoria;

t_{ik} é o efeito do i-ésimo tratamento na k-ésima categoria;

b_{jk} é o efeito do j-ésimo bloco na k-ésima categoria;

e_{ijk} são os erros aleatórios, elementos dos vetores $\underline{e}_{ij}$, onde $\underline{e}_{ij} = (e_{ij1}, e_{ij2}, \dots, e_{ijK}) \sim N_K(\underline{\phi}, \Sigma)$ onde $\underline{\phi}$ é o vetor nulo de médias e Σ_K é a matriz de covariâncias comum a todas combinações de i e j. Os $\underline{e}_{ij}$ correspondentes a diferentes uni

dades experimentais em cada bloco são independentemente distribuídos.

Na forma matricial tem-se,

$$Y = XB + \epsilon,$$

onde,

Y_{IJK}	é a matriz das observações;
$X_{IJ(1+I+J)}$	é a matriz de incidência;
$B_{(1+I+J)K}$	é a matriz dos parâmetros;
ϵ_{IJK}	é a matriz dos componentes aleatórios das observações.

Mais detalhadamente tem-se,

$$Y = \begin{bmatrix} y_{111} & y_{112} & \dots & y_{11K} \\ y_{121} & y_{122} & \dots & y_{12K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1J1} & y_{1J2} & \dots & y_{1JK} \\ \hline y_{211} & y_{212} & \dots & y_{21K} \\ y_{221} & y_{222} & \dots & y_{22K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2J1} & y_{2J2} & \dots & y_{2JK} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{I11} & y_{I12} & \dots & y_{I1K} \\ y_{I21} & y_{I22} & \dots & y_{I2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{IJ1} & y_{IJ2} & \dots & y_{IJK} \end{bmatrix} = [y_1, y_2, \dots, y_K]$$

IJ x K

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$IJ \times (1+I+J)$

$$B = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_K \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1K} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{I1} & t_{I2} & \dots & t_{IK} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1K} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{J1} & b_{J2} & \dots & b_{JK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_K \end{bmatrix}$$

$(1+I+J) \times K$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} e_{111} & e_{112} & \dots & e_{11K} \\ e_{121} & e_{122} & \dots & e_{12K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{1J1} & e_{1J2} & \dots & e_{1JK} \\ \hline e_{211} & e_{212} & \dots & e_{21K} \\ e_{221} & e_{222} & \dots & e_{22K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{2J1} & e_{2J2} & \dots & e_{2JK} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline e_{I11} & e_{I12} & \dots & e_{I1K} \\ e_{I21} & e_{I22} & \dots & e_{I2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{IJ1} & e_{IJ2} & \dots & e_{IJK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}'_{11} \\ \underline{e}'_{12} \\ \dots \\ \underline{e}'_{1J} \\ \hline \underline{e}'_{21} \\ \underline{e}'_{22} \\ \dots \\ \underline{e}'_{2J} \\ \hline \dots \\ \hline \underline{e}'_{I1} \\ \underline{e}'_{I2} \\ \dots \\ \underline{e}'_{IJ} \end{bmatrix} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_K]$$

Logo,

$$Y = [\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_K] = [X\underline{\beta}_1, X\underline{\beta}_2, \dots, X\underline{\beta}_K] + [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_K]$$

e, portanto, para cada variável k , ($k = 1, 2, \dots, K$) tem-se:

$$\underline{y}_k = X\underline{\beta}_k + \underline{e}_k$$

4.3.2. Equações normais e estimadores dos parâmetros

Tomando-se o modelo linear multivariado na forma matricial

$$Y = XB + \varepsilon,$$

e usando o método de mínimos quadrados, obtem-se o sistema de equações normais

$$X'XB^0 = X'Y.$$

Como o sistema de equações normais é sempre consistente, então há sentido falar-se em solução das equações normais, ou seja

$$B^0 = (X'X)^{-1}X'Y,$$

ou ainda

$$B^0 = [\underline{\beta}_1^0, \underline{\beta}_2^0, \dots, \underline{\beta}_K^0] = [(X'X)^{-1}X'y_1, \dots, (X'X)^{-1}X'y_K].$$

Como $\text{posto}(X) = I+J-1$ o sistema de equações normais é indeterminado, admitindo mais de uma solução.

Se estamos interessados apenas na obtenção das somas de quadrados, e somas de produtos, podemos utilizar o modelo irrestrito, uma vez que o produto XB^0 é invariante para qualquer B^0 solução do sistema de equações normais.

Para contornar o problema do uso de inversas generalizadas e visando a obtenção de solução única é comum usarem-se restrições não estimáveis nas soluções. Em geral procura-se "completar" o $\text{posto}(X)$. As restrições,

$$\sum_i t_{ik}^0 = 0 \quad \text{e} \quad \sum_j b_{jk}^0 = 0, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, K$$

são extremamente convenientes, pois além de fornecerem uma so

lução adequada para a média, permite-nos estudar os efeitos de tratamentos em torno da média.

Desse modo, tomando-se uma matriz A de restrições, tal que torne $\text{posto}(X)$ completo, obtém-se solução única para o sistema.

$$(X'X + A'A)\beta = X'Y,$$

dada por

$$\beta = (X'X + A'A)^{-1} X'Y$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times (1+I+J)$;

$(X'X + A'A)^{-1}$ é a mesma matriz do modelo em blocos casualizados univariado, e uma forma fácil de obter essa matriz inversa é encontrada em DEMÉTRIO (1985).

$$(X'X + A'A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I^2 + I^2 + J^2}{I^2 J^2} & -\frac{1}{I^2} & -\frac{1}{I^2} & \dots & -\frac{1}{I^2} & -\frac{1}{J^2} & -\frac{1}{J^2} & \dots & -\frac{1}{J^2} \\ -\frac{1}{I^2} & \frac{I^2 + J - I}{I^2 J} & \frac{J - I}{I^2 J} & \dots & \frac{J - I}{I^2 J} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{I^2} & \frac{J - I}{I^2 J} & \frac{I^2 + J - I}{I^2 J} & \dots & \frac{J - I}{I^2 J} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{I^2} & \frac{J - I}{I^2 J} & \frac{J - I}{I^2 J} & \dots & \frac{I^2 + J - I}{I^2 J} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{J^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{J^2 + I - J}{J^2 I} & \frac{I - J}{J^2 I} & \dots & \frac{I - J}{J^2 I} \\ -\frac{1}{J^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{I - J}{J^2 I} & \frac{J^2 + I - J}{J^2 I} & \dots & \frac{I - J}{J^2 I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{J^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{I - J}{J^2 I} & \frac{I - J}{J^2 I} & \dots & \frac{J^2 + I - J}{J^2 I} \end{bmatrix}$$

e,

$$X'Y = [X'y_1, X'y_2, \dots, X'y_k],$$

onde $X'y_k$ é igual ao vetor do modelo univariado considerando-se apenas a variável k , então

$$X'Y = \begin{bmatrix} y_{..1} & y_{..2} & \dots & y_{..K} \\ y_{1.1} & y_{1.2} & \dots & y_{1.K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{I.1} & y_{I.2} & \dots & y_{I.K} \\ y_{.11} & y_{.12} & \dots & y_{.1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{.J1} & y_{.J2} & \dots & y_{.JK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_K \\ T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{I1} & T_{I2} & \dots & T_{IK} \\ B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{J1} & B_{J2} & \dots & B_{JK} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 T_{ik} &= \sum_j y_{ijk} , \\
 B_{jk} &= \sum_i y_{ijk} , \\
 G_k &= \sum_j B_{jk} = \sum_i T_{ik} = \sum_{ij} y_{ijk} .
 \end{aligned}$$

Então, como no modelo univariado, todos os parâmetros tornam-se estimáveis e, portanto,

$$B = \left[\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \dots, \underline{\beta}_K \right] ,$$

onde

$$\underline{\beta}'_k = \left[\hat{\mu}_k, \beta_{1k}, \dots, \beta_{Jk}, \tau_{1k}, \dots, \tau_{Ik} \right] ,$$

com

$$\hat{\mu}_k = \frac{G_k}{IJ} , \quad \tau_{ik} = \frac{T_{ik}}{J} - \hat{\mu}_k \text{ e } \beta_{jk} = \frac{B_{jk}}{I} - \hat{\mu}_k$$

é o melhor estimador imparcial de B .

4.3.3. Somas de quadrados e somas de produtos

De $Y = XB + \varepsilon$, obtém-se, pelo método de mínimos quadrados, que

$$\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = Y'Y - B^0'X'Y ,$$

onde: $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ é a matriz de somas de quadrados e de produtos do resíduo;

$Y'Y$ é a matriz de somas de quadrados e de produtos do total;

$B^0 X'Y$ é a matriz de soma de quadrados e de produtos dos parâmetros.

Mas, tomando-se, por conveniência, uma inversa condicional diagonal, para $X'X$,

$$(X'X)^{-} = \text{diag} \left[\begin{array}{c|c} \frac{-1}{IJ} & \frac{1}{J}, \dots, \frac{1}{J} \\ \hline & \frac{1}{I}, \dots, \frac{1}{I} \end{array} \right] \begin{matrix} (1+J+I) \\ (1+I+J) \end{matrix}$$

então

$$B^0 = (X'X)^{-} X'Y = \begin{bmatrix} \frac{-y_{..1}}{IJ} & \frac{-y_{..2}}{IJ} & \dots & \frac{-y_{..K}}{IJ} \\ \hline \frac{y_{1.1}}{J} & \frac{y_{1.2}}{J} & \dots & \frac{y_{1.K}}{J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{I.1}}{J} & \frac{y_{I.2}}{J} & \dots & \frac{y_{I.K}}{J} \\ \hline \frac{y_{.11}}{I} & \frac{y_{.12}}{I} & \dots & \frac{y_{.1K}}{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{.J1}}{I} & \frac{y_{.J2}}{I} & \dots & \frac{y_{.JK}}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-G_1}{IJ} & \frac{-G_2}{IJ} & \dots & \frac{-G_K}{IJ} \\ \hline \frac{T_{11}}{J} & \frac{T_{12}}{J} & \dots & \frac{T_{1K}}{J} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{T_{I1}}{J} & \frac{T_{I2}}{J} & \dots & \frac{T_{IK}}{J} \\ \hline \frac{B_{11}}{I} & \frac{B_{12}}{I} & \dots & \frac{B_{1K}}{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{B_{J1}}{I} & \frac{B_{J2}}{I} & \dots & \frac{B_{JK}}{I} \end{bmatrix},$$

donde,

$$B\alpha_{X'Y} = \begin{bmatrix} -\frac{G_1^2}{IJ} + \frac{1}{J} \sum_i T_{i1}^2 + \frac{1}{I} \sum_j B_{j1}^2 & \dots & -\frac{G_1 G_K}{IJ} + \frac{1}{J} \sum_i T_{i1} T_{iK} + \frac{1}{I} \sum_j B_{j1} B_{jK} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{G_K G_1}{IJ} + \frac{1}{J} \sum_i T_{iK} T_{i1} + \frac{1}{I} \sum_j B_{jK} B_{j1} & \dots & -\frac{G_K^2}{IJ} + \frac{1}{J} \sum_i T_{iK}^2 + \frac{1}{I} \sum_j B_{jK}^2 \end{bmatrix}$$

$$Y'Y = \begin{bmatrix} \sum_i \sum_j y_{ij1}^2 & \dots & \sum_i \sum_j y_{ij1} y_{ijk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_i \sum_j y_{ijk} y_{ij1} & \dots & \sum_i \sum_j y_{ijk}^2 \end{bmatrix}$$

obtem-se, então que,

$$SQTratamentos_k = \frac{1}{J} \sum_i T_{ik}^2 - \frac{1}{IJ} G_k^2$$

$$SPTratamentos_{k,k'} = \frac{1}{J} \sum_i T_{ik} T_{ik'} - \frac{1}{IJ} G_k G_{k'}$$

$$SQBlocos_k = \frac{1}{I} \sum_j B_{jk}^2 - \frac{1}{IJ} G_k^2$$

$$SPBlocos_{k,k'} = \frac{1}{I} \sum_j B_{jk} B_{jk'} - \frac{1}{IJ} G_k G_{k'}$$

$$SQTotal_k = \sum_i \sum_j y_{ijk}^2 - \frac{1}{IJ} G_k^2$$

$$SPTotal_{k,k'} = \sum_i \sum_j y_{ijk} y_{ijk'} - \frac{1}{IJ} G_k G_{k'}$$

e,

$$SQRes\acute{d}uo_k = SQTotal_k - SQTratamentos_k - SQBlocos_k$$

$$SPRes\acute{d}uo_{k,k'} = SPTotal_{k,k'} - SPTratamentos_{k,k'} - SPBlocos_{k,k'}$$

para $k, k' = 1, 2, \dots, K$ e $k \neq k'$.

Logo, $T = H + B + R$,

onde,

${}_K T_K$ = Matriz de soma de quadrados e produtos referente a totais;

${}_K H_K$ = Matriz de soma de quadrados e produtos referente a tratamentos;

${}_K B_K$ = Matriz de soma de quadrados e produtos referente a blocos;

${}_K R_K$ = Matriz de soma de quadrados e produtos referente ao resíduo.

4.3.4. Teste de hipótese e quadro da análise da variância

A hipótese, de interesse, a ser testada, em geral, é a de que não existem efeitos de tratamentos, ou seja,

$$H_0 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ \dots \\ t_{1K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ \dots \\ t_{2K} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} t_{I1} \\ t_{I2} \\ \dots \\ t_{IK} \end{bmatrix},$$

Ou ainda,

$$H_0 : C'BW = \emptyset ,$$

onde

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(I-1)x(1+I+J)

com posto (I-1) ;

e, W é uma matriz de dimensões K x w, de posto w ≤ K, que identifica as variáveis que estão sendo testadas por H₀.

GODOI (1985), apresenta e discute quatro critérios para teste de hipótese linear geral da forma

$$H_0 : C'BW = \emptyset ,$$

todos baseados em c_i's, que são os auto-valores de (W'RW)⁻¹W'HW, onde

$$H = (C'B^0)' [C'(X'X)^{-1}C]^{-1} (C'B^0)$$

$$R = Y'Y - B^0'X'Y$$

Se W = I_(K), isto é, posto (W)=K, obtemos o caso particular,

$$H_0 : C'B = \emptyset ,$$

neste caso todas variáveis estão contidas no teste da hipótese H_0 .

A matriz H é usualmente designada como a matriz de somas de quadrados e de produtos da hipótese H_0 testada, e R , como a matriz de somas de quadrados e de produtos do resíduo.

Os quatro critérios estatísticos referidos anteriormente são:

$$T_0^2 = \text{tr}(R^{-1}H) = \sum_{i=1}^s c_i,$$

$$V = \text{tr} \left[H(H+R)^{-1} \right] = \sum_{i=1}^s \theta_i = \sum_{i=1}^s \frac{c_i}{1+c_i},$$

$$\Lambda = \frac{|R|}{|H+R|} = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1+c_i} = \prod_{i=1}^s (1 - \theta_i),$$

$$\theta_1 = \frac{c_1}{1+c_1} \quad \text{ou} \quad c_1 = \frac{\theta_1}{1 - \theta_1}$$

onde

c_1 = maior auto-valor de $R^{-1}H$; e
 θ_1 = maior auto-valor de $H(H+R)^{-1}$ e
 s = número de raízes características não nulas de $R^{-1}H$.

O critério T_0^2 foi proposto por Hotelling-Lawley e é conhecido como o critério do traço ou da soma dos auto-valores.

$$\text{Sob } H_0, \quad \frac{2(s n' + 1)}{s^2(2m' + s + 1)} T_0^2 \quad \bar{e}$$

aproximadamente distribuído como

$$F_{s(2m'+s+1), 2(sn'+1)}.$$

O segundo critério, V , é o critério do Traço de Pillai, que sob H_0 ,

$$\frac{2n' + s + 1}{2m' + s + 1} \frac{V}{s - V}, \text{ é aproximadamente}$$

distribuído como

$$F_{s(2m' + s + 1), s(2n' + s + 1)}.$$

O terceiro critério, Λ , é o critério da razão de verossimilhança, devido a Wilks, onde

$$\chi^2 = - \left[n_e - \frac{1}{2} (p - q + 1) \right] \log_e \Lambda_{p,q,n_e}, \text{ tem}$$

distribuição exata de $\chi^2_{pq,\alpha}$.

Rejeita-se H_0 se,

$$\chi^2 > C \chi^2_{pq,\alpha}$$

onde C é encontrado na tabela de Schatzoff (1966).

Casos particulares em que temos distribuição exata de F ,

$$q = 1, \forall p$$

$$\frac{1 - \Lambda}{\Lambda} \frac{(n_e - p + 1)}{p} \sim F_{p, n_e - p + 1}$$

$$q = 2, \quad \forall p$$

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{n_e - p + 1}{p} \sim F_{2p, 2(n_e - p + 1)}$$

$$p = 1, \quad \forall q$$

$$\frac{1 - \Lambda}{\Lambda} - \frac{n_e}{q} \sim F_{q, n_e} \text{ (unidimensional)}$$

$$p = 2, \quad \forall q$$

$$\frac{1 - \sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{n_e - 1}{q} \sim F_{2q, 2(n_e - 1)}$$

Temos ainda que para $p \geq 3$ e $q \geq 3$,

como, $\frac{m's - 2\lambda}{pq} - \frac{1 - \Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}}$, é aproximadamente distribuído

$$F_{pq, \llbracket m's - 2\lambda \rrbracket};$$

onde $\llbracket m's - 2\lambda \rrbracket$ indica o maior inteiro que não supera $m's - 2\lambda$, e

$$m' = n_e - \frac{1}{2}(p + q + 1),$$

$$\lambda = \frac{pq - 2}{4},$$

$$s = \sqrt{\frac{p^2 q^2 - 4}{p^2 + q^2 - 5}}.$$

O último critério, θ_1 , foi desenvolvido por Roy e é conhecido como o critério do maior auto-valor de Roy. Baseado neste critério, não se rejeita a hipótese H_0 a um nível α de significância, se

$$\theta_1 \leq \chi_{\alpha, s, m', n'} \quad \text{ou} \quad c_1 \leq \frac{\chi_{\alpha, s, m', n'}}{1 - \chi_{\alpha, s, m', n'}}$$

$\chi_{\alpha, s, m', n'}$ pode ser encontrado em abacos (MORRISON, 1981).

Para o primeiro, segundo e último critério tem-se que,

$$s = \min(q, p) ;$$

$$m' = \frac{1}{2}(|p-q|-1) ;$$

$$n' = \frac{1}{2}(n_e - p - 1)$$

e para ambos os critérios,

$$q = \text{posto}(C') = I-1$$

$$p = \text{número de variáveis} = K$$

$$n_e = n - \text{posto}(X) = (I-1)(J-1)$$

Pode-se agora, de posse das matrizes de somas de quadrados e de produtos, montar o seguinte quadro de análise da variância,

Causas de variação	Graus de liberdade	Matrizes de somas de quadrados e de produtos
Blocos	$J - 1$	B
Tratamentos	$I - 1$	H
Resíduo	$(I-1)(J-1)$	R
Total	$IJ - 1$	T

e testar a hipótese H_0 com um ou mais critérios descritos anteriormente.

4.3.5. Comparações múltiplas (Intervalos de Confiança)

Ao rejeitar-se a hipótese de nulidade $H_0: C'B=\phi$, não sabemos quais tratamentos ou combinações de tratamentos diferem entre si, pode-se, então, efetuar comparações múltiplas entre os tratamentos ou combinações destes a fim de definir quais os efeitos de tratamentos que diferem entre si, contribuindo para a rejeição de H_0 .

Segundo MORRISON (1981), o princípio de união-intersecção de Roy é o mais adequado pois permite calcular os limites de confiança simultâneos para todas combinações lineares dos elementos da matriz $C'BW$, com uma probabilidade conjunta $(1-\alpha)$.

Conforme MARDIA (1979) tem-se os intervalos de confiança simultâneos

$$P \left(\frac{(\underline{c}'\underline{B}^0\underline{\ell} - \underline{c}'\underline{B}\underline{\ell})^2}{\underline{\ell}'\underline{R}\underline{\ell}\underline{c}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{c}} \leq \frac{\chi_{\alpha}}{1-\chi_{\alpha}}, \forall \underline{\ell}, \forall \underline{c}/\underline{c} = \underline{c}_d \right) = 1 - \alpha$$

então,

$$\underline{c}'\underline{B}^0\underline{\ell} \pm \left[\frac{\chi_{\alpha}}{1-\chi_{\alpha}} \underline{\ell}'\underline{R}\underline{\ell}\underline{c}'(\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{c} \right]^{\frac{1}{2}}$$

são os intervalos de confiança para $\underline{c}'\underline{B}\underline{\ell}$.

onde,

$\underline{c}'$ é um vetor de dimensões $1 \times (I+J+1)$ arbitrário, que possui os coeficientes das combinações de tratamentos;

$\underline{\ell}$ é um vetor de dimensões $K \times 1$, arbitrário, que seleciona uma variável ou uma combinação de variáveis,

e χ_{α} é o valor crítico de Roy ao nível α de probabilidade, podendo ser encontrado em abacos (MORRISON, 1981), com parâmetros:

$$s = \min(I-1, K)$$

$$m' = \frac{|I-K-1| - 1}{2}$$

$$n' = \frac{I(J-1) - J-K}{2}$$

No caso de $\underline{c}$ e $\underline{\ell}$ serem fixados a "priori" os limites de confiança podem ser obtidos trocando-se

$$\frac{\chi_{\alpha}}{1 - \chi_{\alpha}} \text{ por } \frac{1}{(I-1)(J-1)} F_{1, (I-1)(J-1); \alpha}$$

Para $\underline{c}$ fixado a "priori" e todo $\underline{\ell}$ fixado a "posteriori" troca-se

$$\frac{\chi_{\alpha}}{1 - \chi_{\alpha}} \text{ por } \frac{K}{(I-1)(J-1)-K+1} F_{K, (I-1)(J-1)-K+1; \alpha}$$

Para o caso de $K=1$, tem-se:

$$s = \min(I-1, K) = 1,$$

$$\text{troca-se } \frac{\chi_{\alpha}}{1 - \chi_{\alpha}} \text{ por } \frac{I-1}{(I-1)(J-1)} F_{(I-1), (I-1)(J-1); \alpha}$$

$$\underline{\ell}' R \underline{\ell} = \text{SQRes}, \quad \text{pois } \underline{\ell}' = [1].$$

Então se $\underline{c}$ não for estabelecido a "priori" o intervalo adequado será

$$P \left\{ |\underline{c}' \underline{\beta}^0 - \underline{c}' \underline{\beta}| \leq \left[\underline{c}' (X'X)^{-1} \underline{c} \text{ SQRes} \frac{(I-1)}{(I-1)(J-1)} F_{(I-1), (I-1)(J-1); \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

logo, os limites de confiança ficam

$$\underline{c}' \underline{\beta}^0 \pm \left[\underline{c}' (X'X)^{-1} \underline{c} \text{ QMRes} \cdot (I-1) F_{(I-1), (I-1)(J-1); \alpha} \right]^{\frac{1}{2}},$$

que é a expressão obtida por SCHEFFÉ (1953).

Para ambos os casos discutidos anteriormente, rejeita-se $H_0: c'B\ell = 0$, ao nível α de significância se o intervalo de confiança ao nível $1-\alpha$ não contiver a origem.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente verificou-se a validade da análise univariada em parcelas subdivididas, buscando-se informações sobre o cumprimento das exigências do modelo, através dos testes de homogeneidade das matrizes de covariâncias e de uniformidade da matriz comum de covariâncias.

5.1. Teste de homogeneidade das matrizes de covariâncias

As fórmulas utilizadas são as indicadas em 4.2.1 e os resultados obtidos foram

$$M_1 = 193,8797$$

$$A_1 = 0,3851$$

$$F_1 = 84$$

$$\therefore (1-A_1)M_1 = \chi^2_{obs} = 119,22.$$

Como $\chi^2_{\text{obs}} = 119,22 > \chi^2_{.05;84} = 106,38$, rejeita-se a hipótese $H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_{15} = \Sigma_0$.

As estimativas S_i das matrizes de covariâncias Σ_i , com $i = 1, 2, \dots, 15$ e a estimativa A da matriz comum de covariâncias Σ podem ser vistas no Apêndice.

5.2. Teste de uniformidade da matriz comum de covariâncias

Para o teste em questão, utilizaram-se as fórmulas indicadas em 4.2.2 e os resultados obtidos foram,

$$M_2 = 142,2113$$

$$A_2 = 0,0357$$

$$F_2 = 4$$

$$\therefore (1-A_2)M_2 = 137,13$$

Como $\chi^2_{\text{obs}} = 137,13 > \chi^2_{.05;4} = 9,49$, rejeita-se a hipótese $H_0: \Sigma = \Sigma^*$.

A estimativa da matriz uniforme Σ^* , também, pode ser vista no Apêndice.

Tem-se, então, que não se pode adotar uma matriz comum de covariâncias Σ , para representar as covariâncias entre classes dentro de cada tratamento, nem uma matriz uniforme de covariâncias Σ^* para todos os tratamentos.

Então, a análise univariada em parcelas subdivididas só é válida para testes de efeitos de tratamentos, não sendo válida para efeitos de classes e interação tratamentos x classes.

5.3. Análises de variância e teste de hipótese

Mesmo não verificadas as exigências do modelo univariado adotado fez-se a análise da variância em parcelas subdivididas. Realizou-se também a análise da variância para cada classe separadamente e a análise multivariada, segundo o delineamento em blocos casualizados.

5.3.1. Análise univariada

Com os dados do Quadro 2, obteve-se o resultado da análise de variância em parcelas subdivididas, que está apresentado no Quadro 7.

Quanto às análises univariadas para cada classe, os valores para o teste F, para coeficiente de variação e quadrado médio do resíduo, são encontrados no Quadro 9.

O teste F foi significativo para todas as classes. Não fica, porém, garantido um nível conjunto de significância englobando as três classes.

Quadro 7. Análise de variância em parcelas subdivididas em blocos casualizados dos dados do Quadro 2.

Causas da Variação	Graus de liberdade	Somas de quadrados	Quadrados médios	F
Blocos	3	3,089	1,029	
Tratamentos (T)	14	66,193	4,728	10,65**
Resíduo (a)	42	18,632	0,444	
<hr/>				
Parcelas	(59)	(87,914)		
<hr/>				
Classes (C)	2	6409,066	3204,533	2342,89
T x C	28	535,068	19,109	13,97
Resíduo (b)	90	123,099	1,368	
<hr/>				
TOTAL	179	7155,146		

** Significativo ao nível de 1% de probabilidade

(*) Testes não válidos

C.V. para parcelas = 10,93%

C.V. para subparcelas = 19,19%.

5.3.2. Análise multivariada

Os resultados da análise de variância multivariada podem ser vistos no Quadro 8.

Os testes para a hipótese $H_0: C'BW = \phi$, com $W = I(k)$, são apresentados na sequência.

- Teste de Hotelling-Lawley

Os parâmetros da distribuição são:

$$s = \min(14, 3) = 3$$

$$m' = \frac{(|3-14| - 1)}{2} = 5$$

$$n' = \frac{42 - 3 - 1}{2} = 19$$

$$\text{Como } \frac{2(sn' + 1)}{s^2 (2m' + s + 1)} \quad T_0^2 = 11,9690$$

e escolhendo $\alpha = 0,05$ têm-se $F_{.05;42,116} = 1,4990$, ou para $\alpha = 0,01$ tem-se $F_{.01;42,116} = 1,7620$, então a hipótese H_0 foi rejeitada ao nível de 1% de probabilidade.

- Teste de Pillai .

Tem-se, também, os parâmetros

$$s = 3$$

$$m' = 5$$

$$n' = 19$$

$$\text{Como } \frac{2n' + s + 1}{2m' + s + 1} \quad \frac{V}{s-V} = 7,0027 ,$$

e para $\alpha = 0,05$ têm-se $F_{.05;42,126} = 1,4900$, ou para $\alpha = 0,01$ têm-se $F_{.01;42,126} = 1,7500$, rejeita-se a hipótese H_0 ao nível de 1% de probabilidade.

- Teste de Wilks

Os parâmetros da distribuição são:

$$m' = 42 - \frac{(3+14+1)}{2} = 33$$

$$\lambda = \frac{14 \times 3 - 1}{4} = 10$$

$$s = \sqrt{\frac{3^2 \times 14^2 - 4}{3^2 + 14^2 - 5}} = \sqrt{8,8}$$

$$\text{Como } \frac{m's - 2\lambda}{pq} \frac{1 - \Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}} = 6,1023 ,$$

e para $\alpha = 0,05$ têm-se $F_{.05;42,77} = 1,5580$, ou para $\alpha = 0,01$ têm-se $F_{.01;42,77} = 1,8790$, rejeita-se H_0 ao nível de 1% de probabilidade.

- Teste de Roy

Os parâmetros, para este teste, são

$$s = 3$$

$$m' = 5$$

$$n' = 19$$

$$\text{Como } \theta_1 = \frac{c_1}{1+c_1} = 0,8997, \text{ e}$$

escolhendo $\alpha = 0,05$, pelo Ábaco 11 encontrado em MORRISON (1981), têm-se $\chi_{.05;3,5,19} = 0,505$, ou para $\alpha = 0,01$ e pelo Ábaco 12, tem-se $\chi_{.01;3,5,19} = 0,560$, rejeita-se, também, H_0 ao nível de 1% de probabilidade.

Verifica-se, então que a hipótese H_0 foi rejeitada ao nível de 1% de probabilidade, para todos os testes aplicados.

Quadro 8. Análise de variância multivariada e testes de hipótese, para os dados do Quadro 2.

Causas da Variação	Graus de liberdade	Matrizes de somas de quadrados e de produtos
Blocos	3	$\begin{bmatrix} 8,7737 & -3,8188 & 0,2398 \\ -3,8188 & 8,3786 & -0,3814 \\ 0,2398 & -0,3814 & 0,0351 \end{bmatrix}$
Tratamentos	14	$\begin{bmatrix} 347,5754 & -198,4728 & -33,0561 \\ -198,4728 & 248,6988 & 30,1882 \\ -33,0561 & 30,1882 & 4,9865 \end{bmatrix}$
Resíduo	42	$\begin{bmatrix} 95,0455 & -34,1092 & -4,4190 \\ -34,1092 & 31,2865 & 2,6599 \\ -4,4190 & 2,6599 & 1,3007 \end{bmatrix}$
Total	59	$\begin{bmatrix} 451,3946 & -236,4008 & -37,2353 \\ -236,4008 & 288,3639 & 32,4667 \\ 37,2353 & 32,4667 & 6,3223 \end{bmatrix}$

Teste de Hotelling-Lawley : $F_1 = 11,9690^{**}$

Teste de Pillai : $F_1 = 7,0027^{**}$

Teste de Wilks : $F_1 = 6,1023^{**}$

Teste de Roy : $\theta_1 = 0,8997^{**}$

Temos ainda que, $c_1 = 8,96996$

$c_2 = 3,26008$

$c_3 = 0,77078$

são os auto-valores de $R^{-1}H$.

Quadro 9. Médias de tratamentos e resumo da análise univariada para as 3 classes.

Médias de Tratamentos	Classes		
	1	2	3
$\hat{m}_1$	15,0275	1,2625	0,3325
$\hat{m}_2$	10,9325	1,9675	0,4900
$\hat{m}_3$	15,9950	1,1775	0,3175
$\hat{m}_4$	10,9050	4,8575	0,8400
$\hat{m}_5$	14,8950	2,9000	0,5575
$\hat{m}_6$	15,9725	4,3725	0,6075
$\hat{m}_7$	13,4150	4,7225	0,4925
$\hat{m}_8$	9,3525	8,1225	1,4400
$\hat{m}_9$	13,8850	6,5675	0,6200
$\hat{m}_{10}$	16,0900	2,7550	0,3575
$\hat{m}_{11}$	13,0250	4,0825	0,7975
$\hat{m}_{12}$	14,4525	2,9700	0,5550
$\hat{m}_{13}$	17,4025	2,0875	0,4125
$\hat{m}_{14}$	17,9325	0,7350	0,2025
$\hat{m}_{15}$	16,4125	1,5650	0,4150
Q.M.Res.	2,2631	0,7450	0,0309
F	10,97**	23,85**	11,50**
C.V.	10,46%	25,82%	31,28%

5.4. Comparações múltiplas

Como as exigências do modelo em parcelas subdivididas não foram satisfeitas, deixou-se de fazer quaisquer comentários quanto a comparações múltiplas, referente a esta análise.

Para o modelo univariado, considerando cada classe separadamente, e para o modelo multivariado os resultados obtidos para as comparações múltiplas, podem ser encontrados nos Quadros 10 a 12.

Verifica-se que o número de diferenças significativas na análise univariada, considerando cada classe separadamente, é maior do que na análise multivariada.

Isso ocorre, pelo fato de que na análise multivariada o critério de rejeição de H_0 é mais rigoroso por levar em consideração um nível conjunto de significância, $\alpha = 0,05$, considerando-se todas variáveis (classes), e mesmo possíveis combinações destas. Já na análise univariada o nível de significância, $\alpha = 0,05$, é por variável e, portanto, se o interesse é obter conclusões considerando mais de uma variável conjuntamente, o nível de significância conjunto será desconhecido e será tanto maior quanto maior for o número de variáveis envolvidas.

Quadro 10. Resultados obtidos para as comparações múltiplas de acordo com o modelo univariado (acima da diagonal) e multivariado (abaixo da diagonal), para os dados da classe 1.

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}
-	4,095	0,968	4,123	0,133	0,945	1,613	5,675*	1,143	1,063	2,003	0,575	2,375	2,905	1,385
4,095	-	5,063	0,028	3,962	5,040	2,483	1,580	2,953	5,158	2,093	3,520	6,470*	7,000*	5,480
0,968	5,063	-	5,090	1,100	0,023	2,580	6,643*	2,110	0,095	2,970	1,543	1,408	1,938	0,418
4,123	0,028	5,090	-	3,990	5,068	2,510	1,553	2,980	5,185	2,120	3,548	6,498*	7,028*	5,508
0,133	3,963	1,100	3,990	-	1,078	1,480	5,543	1,010	1,195	1,870	0,443	2,508	3,038	1,518
0,945	5,040	0,023	5,068	1,078	-	2,558	6,620*	2,088	0,118	2,948	1,520	1,430	1,960	0,440
1,613	2,483	2,580	2,510	1,480	2,558	-	4,063	0,470	2,675	0,390	1,038	3,988	4,518	2,998
5,675	1,580	6,643	1,553	5,543	6,620	4,063	-	4,533	6,738*	3,673	5,100	8,050*	8,580*	7,060*
1,143	2,953	2,110	2,980	1,010	2,088	0,470	4,533	-	2,205	0,860	0,568	3,518	4,048	2,528
1,063	5,158	0,095	5,185	1,195	0,118	2,675	6,738	2,205	-	3,065	1,638	1,313	1,843	0,323
2,003	2,093	2,970	2,120	1,870	2,948	0,390	3,673	0,860	3,065	-	1,428	4,378	4,908	3,385
0,575	3,520	1,543	3,548	0,443	1,520	1,038	5,100	0,568	1,638	1,428	-	2,950	3,480	1,960
2,375	6,470	1,408	6,498	2,508	1,430	3,988	8,050*	3,518	1,313	4,378	2,950	-	0,530	0,990
2,905	7,000*	1,930	7,028*	3,038	1,960	4,518	8,580*	4,048	1,843	4,908	3,480	0,530	-	1,520
1,385	5,480	0,418	5,508	1,518	0,440	2,998	7,060*	2,528	0,323	3,389	1,960	0,990	1,520	-

D.M.S. = 5,545, para o teste de Scheffé, a um nível de significância de $\alpha = 0,05$ (modelo univariado).

D.M.S. = 6,963, para o teste de Roy, a um nível de significância conjunto $\alpha = 0,05$ (modelo multivariado).

Obs.: * Significância ao nível de 5% de probabilidade.

Quadro 11. Resultados obtidos para as comparações múltiplas de acordo com o modelo univariado (acima da diagonal) e multivariado (abaixo da diagonal), para os dados da classe 2.

$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{m}_4$	$\hat{m}_5$	$\hat{m}_6$	$\hat{m}_7$	$\hat{m}_8$	$\hat{m}_9$	$\hat{m}_{10}$	$\hat{m}_{11}$	$\hat{m}_{12}$	$\hat{m}_{13}$	$\hat{m}_{14}$	$\hat{m}_{15}$
-	0,705	0,085	3,595*	1,638	3,110	3,460*	6,860*	5,305*	1,493	2,820	1,708	0,825	0,528	0,303
0,705	-	0,790	2,890	0,933	2,405	2,755	6,155*	4,600*	0,788	2,115	1,003	0,120	1,233	0,403
0,085	0,790	-	3,680*	1,723	3,195*	3,545*	6,945*	5,390*	1,578	2,905	1,793	0,910	0,443	0,388
3,596	2,890	3,680	-	1,958	0,485	0,135	3,265*	1,710	2,103	0,775	1,883	2,770	4,123*	3,293*
1,638	0,933	1,723	1,958	-	1,473	1,823	5,223*	3,668*	0,145	1,183	0,070	0,813	2,165	1,335
3,110	2,405	3,195	0,485	1,473	-	0,350	3,750*	2,195	1,618	0,290	1,403	2,285	3,638*	2,808
3,460	2,755	3,545	0,135	1,823	0,350	-	3,400*	1,845	1,968	0,640	1,753	2,635	3,988*	3,158
6,860*	6,155*	6,945*	3,265	5,223*	3,750	3,400	-	1,555	5,368*	4,040*	5,153*	6,035*	7,388*	6,558*
5,305*	4,600*	5,390*	1,710	3,668	2,195	1,845	1,555	-	3,813*	2,485	3,598*	4,480*	5,833*	5,003*
1,493	0,788	1,578	2,103	0,145	1,618	1,968	5,368*	3,813	-	1,328	0,215	0,668	2,020	1,190
2,820	2,115	2,905	0,775	1,183	0,290	0,640	4,040*	2,485	1,328	-	1,113	1,995	3,348*	2,518
1,708	1,003	1,793	1,888	0,070	1,403	1,753	5,153*	3,598	0,215	1,113	-	0,883	2,235	1,405
0,825	0,120	0,910	2,770	0,813	2,285	2,635	6,035*	4,480*	0,668	1,995	0,883	-	1,353	0,523
0,520	1,233	0,443	4,123*	2,165	3,638	3,988	7,388*	5,833*	2,020	3,348	2,235	1,353	-	0,830
0,303	0,403	0,388	3,293	1,335	2,808	3,158	6,558*	5,003*	1,190	2,518	1,405	0,523	0,830	-

D.M.S. = 3,181

D.M.S. = 3,995

QUADRO 12. Resultados obtidos para as comparações múltiplas de acordo com o modelo univariado (acima da diagonal) e multivariado (abaixo da diagonal), para os dados da classe 3.

$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{m}_4$	$\hat{m}_5$	$\hat{m}_6$	$\hat{m}_7$	$\hat{m}_8$	$\hat{m}_9$	$\hat{m}_{10}$	$\hat{m}_{11}$	$\hat{m}_{12}$	$\hat{m}_{13}$	$\hat{m}_{14}$	$\hat{m}_{15}$
-	0,158	0,015	0,508	0,225	0,275	0,160	1,108*	0,288	0,025	0,465	0,223	0,080	0,130	0,083
0,158	-	0,173	0,350	0,068	0,118	0,003	0,950*	0,130	0,133	0,308	0,065	0,078	0,288	0,075
0,015	0,173	-	0,523	0,558	0,290	0,175	1,123*	0,303	0,040	0,480	0,238	0,095	0,115	0,098
0,508	0,350	0,523	-	0,283	0,233	0,348	0,600	0,220	0,483	0,043	0,285	0,428	0,638	0,425
0,225	0,068	0,558	0,283	-	0,050	0,065	0,883*	0,063	0,200	0,240	0,03	0,145	0,355	0,143
0,275	0,178	0,290	0,233	0,050	-	0,115	0,833*	0,013	0,250	0,190	0,053	0,195	0,405	0,193
0,160	0,003	0,175	0,348	0,065	0,115	-	0,948*	0,128	0,135	0,305	0,063	0,080	0,290	0,078
1,108*	0,950*	1,123*	0,600	0,883*	0,833*	0,948*	-	0,820*	1,083*	0,798*	0,885*	1,028*	1,238*	1,025*
0,288	0,130	0,303	0,220	0,063	0,013	0,128	0,820*	-	0,263	0,178	0,065	0,208	0,418	0,205
0,025	0,133	0,040	0,483	0,200	0,250	0,135	1,083*	0,263	-	0,440	0,198	0,055	0,155	0,058
0,465	0,308	0,480	0,043	0,240	0,190	0,305	0,798	0,178	0,440	-	0,243	0,385	0,595	0,383
0,223	0,065	0,238	0,285	0,003	0,053	0,063	0,885*	0,065	0,198	0,243	-	0,143	0,353	0,140
0,080	0,078	0,095	0,428	0,145	0,195	0,080	1,028*	0,209	0,055	0,385	0,143	-	0,210	0,003
0,130	0,288	0,115	0,638	0,355	0,405	0,290	1,238*	0,418	0,155	0,595	0,353	0,210	-	0,213
0,083	0,075	0,098	0,425	0,143	0,193	0,078	1,025*	0,205	0,383	0,383	0,140	0,003	0,213	-

D.M.S. = 0,649

D.M.S. = 0,815

6. CONCLUSÕES

Com relação à análise, onde se consideraram as classes como subparcelas, verificou-se o seguinte:

1. As exigências do modelo em parcelas subdivididas não foram satisfeitas, ou seja, as matrizes de covariâncias Σ_i estimadas pelas matrizes S_i não são iguais e a matriz comum de covariâncias Σ estimada pela matriz A não pode ser aceita como uma matriz uniforme de covariâncias.
2. A análise de variância em parcelas subdivididas é válida para a parte referente às parcelas que independe da correlação entre subparcelas. A parte da análise referente às subparcelas e interação não é válido.

Com relação a análise multivariada, onde se considera

ram as classes como um vetor de observações, verificou-se o seguinte:

- 1) A hipótese $H_0: C'BW = \emptyset$ foi rejeitada pelos quatro critérios utilizados.
- 2) O número de diferenças significativas foi menor quando comparado com as análises univariadas para cada classe, isso devido o critério de rejeição ser mais rigoroso no modelo multivariado, por levar em consideração um nível conjunto de significância.

Se o pesquisador estiver interessado, por exemplo, em determinar quais as cultivares que produzem mais numa determinada classe, uma análise univariada é suficiente. Entretanto, se o interesse é uma conclusão conjunta de todas as classes a análise multivariada deve ser preferida, pois além de todas as conclusões serem realizadas ao nível de significância pré-estabelecido, toda a informação de variação (correlação) é considerada.

7. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

- ANDERSEN, A.H.; E.B. JENSEN e G. SCHOU, 1981. Two-way Analysis of Variance with Correlated Errors. International Statistical Review. Great Britain, 49: 153-167.
- ANDERSON, T.W., 1963. A test for equality of means when covariance matrices are unequal. Annals of Mathematical Statistics, 34: 671-672.
- BARTLETT, M.S., 1937. Some Examples of Statistical Methods of Research in Agriculture and Applied Biology. Journal of the Royal Statistical Society, Suppl. Londres, 4: 137-183.
- BARTLETT, M.S., 1938. Further Aspects of the Theory of Multiple Regression. Proceedings of the Cambridge Physiological Society, 34: 33-40.
- BONILLA, F.H., 1974. Comparacion entre el analisis de parcelas divididas y el metodo de analisis de perfil. Chapingo. Escuela Nacional de Agricultura. 46p. (Dissertação de Mestrado).
- BOX, G.E.P., 1949. A general distribution theory for a class of likelihood criteria. Biometrika. Londres, 36: 317-346.
- BOX, G.E.P., 1950. Problems in the Analysis of Growth and Weer Curves. Biometrics. Carolina do Norte, 6: 362-389.

- BOX, G.E.P., 1954a. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems: I - Effect of Inequality of Variance in the One-way Classification. The Annals of the Mathematical Statistics. Baltimore, 25: 290-302.
- BOX, G.E.P., 1954b. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems: II - Effects of Inequality of Variance and of Correlation Between Errors in the Two-way Classification. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 25: 484-498.
- CAMPOS, H., 1984. Estatística Aplicada à Experimentação com Cana-de-açúcar. Piracicaba, FEALQ. 291p.
- COLE, J.W.L. e J.E. GRIZZLE, 1966. Applications of Multivariate Analysis of Variance to Repeated Measurements Experiments. Biometrics. Carolina do Norte, 22: 810-828.
- CORREIA DA SILVA, J.G., 1979. Análise de Realizações Simultâneas de Séries de Tempo Dispostas Segundo um Delineamento Experimental. Pelotas, UFP. 67p. (Tese para provimento de cargo de Professor Titular).
- DAGNELIE, P., 1982. Analyse Statistique à Plusieurs Variables. 2ª Reimpressão, Gembloux, Presses Agronomiques. 362p.
- DANFORD, M.B.; H.M. HUGHES e R.C. McNEE, 1960. On the Analysis of Repeated Measurements Experiments. Biometrics. Carolina do Norte, 16: 547-565.
- DEMÉTRIO, C.G.B., 1985. Análise Multidimensional para dados de Cana-de-açúcar. Piracicaba, ESALQ/USP. 144p. (Tese de Doutorado)

DINIZ, U.D., 1980. Análise de experimentos com Parcelas Medidas Sucessivamente no Tempo. Piracicaba, ESALQ/USP. 104p. (Tese de Doutorado).

ELASHOFF, J.O., 1984. Contrasting Split Plot and Repeated Measures Experiments and Analysis - Comment. The American Statistician. Louisiana, 38(1): 21-29.

EVANS, J.C. e E.A. ROBERTS, 1979. Analysis of Sequential Observations with Applications to Experiments on Grazing Animals and Perennial Plants. Biometrics. Carolina do Norte, 35: 687-693.

GARCIA BEN, M.S. e V.J. YOHAI, 1980. Multivariate Analysis of Variance in a Randomized Blocks Design when Covariance Matrices are Unequal. Biometrics. Carolina do Norte, 36: 127-133.

GEISSER, S. e S.W. GREENHOUSE, 1958. An Extension of Box's Results on the Use of the F Distribution in Multivariate Analysis. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 29: 885-891.

GEISSER, S., 1963. Multivariate Analysis of Variance for a Special Covariance Case. Journal of the American Statistical Association. Washington, 58: 660-669.

GIL, L.G., 1978. Design and Analysis of Experiments in the Animal and Medical Sciences. Ames, The Iowa State University Press. 882p.

GIL, J.L., 1984. Contrasting Split Plot and Repeated Measures Experiments and Analysis - Comment. The American Statistician. Louisiana, 38(1): 21-29.

- GODOI, C.R.M., 1985. Análise Estatística Multidimensional. 10
Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronô-
mica. Piracicaba, ESALQ/USP. 187p.
- GREENHOUSE, S.W. e S. GEISSER, 1959. On Methods in the Ana-
 lysis of Profile Data. Psychometrika, 24(2): 95-112.
- HOTELLING, H., 1951. A Generalized T Test and Measure of
 Multivariate Dispersion. Proceedings of the Second Ber-
keley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.
 Berkeley, The University of California Press. 23-41.
- HUGHES, H.M. e M.B. DANFORD, 1958. Repeated Measurement De-
 signs. Assuming Equal Variances and Covariances. Texas,
School of Aviation Medicine, USAF (Report 59-40).
- HUYNH, H. e L.S. FELDT, 1970. Conditions Under which Mean
 Square Ratios in Repeated Measurements Designs Have Exact
 F - Distributions. Journal of the American Statistical As-
sociation. Washington, 65(332): 1582-1589.
- IEMA, A.F., 1981. Análise de Experimentos em Parcelas Subdivi-
didas com Tratamentos Principais Dispostos em Blocos Incom-
pletos Balanceados. Piracicaba, ESALQ/USP. 145p. (Tese de
 Doutorado).
- ITO, K. e W.J. SCHULL, 1964. On the Robustness of the T_0^2 test
 in Multivariate Analysis of Variance when Variance - Cova-
 riance Matrices are Not Equal. Biometrika. Cambridge, 51:
 71-82.
- KOCK, G.G., 1969. Some Aspects of the Statistical Analysis of
 "Split Plot" Experiments in Completely Randomized Layouts.
American Statistical Association Journal. Carolina do Nor-
 te, 23: 485-505.

- KORIN, B.P., 1972. Some Comments on the Homocedasticity Criterion M and the Multivariate Analysis of Variance Tests T^2 , W and R. Biometrika. Cambridge, 59: 215-216.
- LEAL, M.L.S., 1979. Análise de Dados de Experimentos com Medidas Repetidas. Brasília, UnB. 99p. (Dissertação de Mestrado).
- LEONARD, W.H. e A.G. CLARK, 1939. Field Plot Technique. Minneapolis, Burgess, 288p.
- MARDIA, K.V., 1971. The Effect of Non-Normality on Some Multivariate Tests and Robustness to Non-Normality in the Linear Model. Biometrika. Cambridge, 58(1): 105-121.
- MARTINEZ, A.G., 1972. Aspectos Econômicos del Diseño y Analisis de Experimentos. Chapingo, Escuela Nacional de Agricultura, 104p.
- NONLEZUN, C.J.; D.C. BLOUIN e L.C. MALONE, 1984. Contrasting Split Plot and Repeated Measures Experiments and Analyses. The American Statistician. Louisiana, 38(1): 21-29.
- MORRISON, O.F., 1981. Multivariate Statistical Methods. 2ª edição, 3ª reimpressão, Tokyo, McGraw-Hill, Inc. 415p.
- PIMENTEL GOMES, F., 1982. Curso de Estatística Experimental. 10ª Edição. Piracicaba, Livraria Nobel. 430p.
- PIMENTEL GOMES, F., 1984. A Estatística Moderna na Pesquisa Agropecuária. Piracicaba, POTAFOS. 160p.
- ROWELL, J.G. e D.E. WALTERS, 1976. Analysing Data with Repeated Observations on Each Experimental Unit. Journal of Agricultural Science. Cambridge, 87: 423-432.

- ROY, S.N. e R.C. BOSE, 1953. Simultaneous Confidence Interval Estimation. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 24: 513-536.
- SCHATZOFF, M., 1966. Exact Distributions of Wilks Likelihood-Ratio Criterion. Biometrika. Cambridge, 53: 347-358.
- SCHEFFÉ, H., 1953. A Method for Judging All Contrasts in the Analysis of Variance. Biometrika. Cambridge, 40: 87-104.
- SCHWERTMAN, N.C., 1978. A Note on the Geisser-Greenhouse Correction for Incomplete Data Split-Plot Analysis. Journal of the American Statistical Association. Washington, 73 (362): 393-396.
- SMITH, H.; R. GANANADESIKAN e J.B. HUGHES, 1962. Multivariate Analysis of Variance (MANOVA). Biometrics. Raleigh, 18 (1): 22-41.
- SNEDECOR, G.W. e E.S. HABER, 1946. Statistical Methods for an Incomplete Experiment on a Perennial Crop. Biometrics. Carolina do Norte, 2: 61-67.
- STEEL, R.G.D., 1955. An Analysis of Perennial Crop Data. Biometrics. Carolina do Norte, 11: 201-212.
- STEVENS, W.L., 1949. Análise Estatística do Ensaio de Variedades de Café. Bragantia. Campinas, 9: 103-123.
- TUKEY, J.W., 1953. The Problem of Multiple Comparisons. Princeton, Princeton University (Mimeographed Manuscript).

WILKS, S.S., 1932. Certain Generalizations in the Analysis of Variance. Biometrics. Raleigh, 24: 471-494.

WILKS, S.S., 1946. Sample Criteria for Testing Equality of Means, Equality of Variances, and Equality of Covariances in a Normal Multivariate Distribution. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 17: 257-281.

WINER, B.J., 1971. Statistical Principles in Experimental Design. 2ª Edição. New York, McGraw-Hill Book Co. 907p.

A P E N D I C E

APENDICE 1

Estimativas S_i das matrizes de covariâncias Σ_i ($i = 1, 2, \dots, 15$).

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0,95544 & -0,45758 & -0,04860 \\ -0,45758 & 0,39595 & 0,01513 \\ -0,04860 & 0,01513 & 0,00918 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 2,60477 & -0,18069 & 0,04579 \\ -0,18069 & 0,12120 & -0,00319 \\ 0,04579 & -0,00319 & 0,00555 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1,95332 & -0,39215 & -0,17805 \\ -0,39215 & 0,18490 & 0,09151 \\ -0,17805 & 0,09151 & 0,08243 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0,51077 & -0,08873 & 0,06733 \\ -0,08873 & 0,67994 & -0,04735 \\ 0,06733 & -0,04735 & 0,01589 \end{bmatrix}$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 0,76420 & 0,11182 & -0,08041 \\ 0,11182 & 0,04803 & -0,02429 \\ -0,08041 & -0,02429 & 0,01508 \end{bmatrix}$$

$$S_6 = \begin{bmatrix} 5,35461 & -4,80535 & -0,17507 \\ -4,80535 & 4,33478 & 0,15514 \\ -0,17507 & 0,15514 & 0,00690 \end{bmatrix}$$

$$S_7 = \begin{bmatrix} 1,57341 & -0,81105 & 0,07342 \\ -0,81105 & 0,84909 & 0,00828 \\ 0,07342 & 0,00828 & 0,02792 \end{bmatrix}$$

$$S_8 = \begin{bmatrix} 3,17979 & -2,42349 & -0,77564 \\ -2,42349 & 1,85580 & 0,59273 \\ -0,77564 & 0,59273 & 0,18949 \end{bmatrix}$$

$$S_9 = \begin{bmatrix} 1,21667 & -0,23405 & -0,09035 \\ -0,23405 & 0,65145 & 0,02877 \\ -0,09035 & 0,02877 & 0,01193 \end{bmatrix}$$

$$S_{10} = \begin{bmatrix} 1,71307 & -0,11173 & 0,03065 \\ -0,11173 & 0,26619 & 0,01344 \\ 0,03065 & 0,01344 & 0,00588 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 2,76986 & -0,52948 & -0,20374 \\ -0,52948 & 0,46303 & 0,02842 \\ -0,20374 & 0,02842 & 0,01653 \end{bmatrix}$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0,35331 & 0,06154 & 0,01847 \\ 0,06154 & 0,05832 & 0,00735 \\ 0,01847 & 0,00735 & 0,00582 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 3,28207 & -0,79328 & 0,08841 \\ -0,79328 & 0,28493 & -0,02747 \\ 0,08841 & -0,02747 & 0,00478 \end{bmatrix}$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} 2,11781 & -0,07401 & 0,04899 \\ -0,07401 & 0,08599 & 0,00367 \\ 0,04899 & 0,00367 & 0,00274 \end{bmatrix}$$

$$S_{15} = \begin{bmatrix} 3,33270 & -0,64149 & -0,29421 \\ -0,64149 & 0,14919 & 0,0447 \\ -0,29421 & 0,04447 & 0,03343 \end{bmatrix}$$

Estimativa A da matriz comum de covariância Σ

$$A = \begin{bmatrix} 2,26299 & -0,81212 & -0,10521 \\ -0,81212 & 0,74491 & 0,06333 \\ -0,10521 & 0,06333 & 0,03097 \end{bmatrix}$$

Estimativa $\bar{A}$ da matriz uniforme de covariância Σ^*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1,01296 & -0,28467 & -0,28467 \\ -0,28467 & 1,01296 & -0,28467 \\ -0,28467 & -0,28467 & 1,01296 \end{bmatrix}$$