A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL APLICADA A TESTES DE VIDA

JOSEFA ALVAREZ ALVAREZ
Física

Orientador: Prof. Dr. IZAIAS RANGEL NOGUEIRA

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Dezembro, 1981

Aos meus irmãos, Lorenzo e
Marcos pela constante
dedicação,

Ao Prof. Victor, pela amizade
e incentivo.

A meu pai, *in memoriam*,
à minha mãe,

D E D I C O.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Izaías Rangel Nogueira, Professor Titular do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" pela orientação segura, o qual, mais do que orientador, foi amigo.

Ao Professor Catedrático Dr. Frederico Pimentel Gomes, Chefe do Departamento de Matemática e Estatística da "ESALQ", pelo seu valor humano e amizade.

Ao Professor Victor Mirshawka, pelos ensinamentos recebidos, constantes incentivos e ajudas prestadas.

Ao Dr. Humberto de Campos, Coordenador do Curso de Pós-Graduação de Estatística e Experimentação Agronômica da "ESALQ", pela amizade.

Aos demais Professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" pelos ensinamentos recebidos e proveitosos diálogos.

Aos amigos da Fundação Armando Álvares Penteado, da Universidade Mackenzie, e da Faculdade de Engenharia São Paulo em especial, aos colegas das disciplinas de Estatística-Pesquisa Operacional e Cálculo Numérico-Ciência da Computação.

À Fundação Armando Álvares Penteado, que tornou possível a realização do Curso de Pós-Graduação.

Ao Sr. Toshiro Iqueda e a Srta. Mara De Salvo pela execução dos trabalhos datilográficos e, principalmente pela amizade.

Às Srtas. Maria Izalina Ferreira Alves e Rosa Maria Alves, pelo companheirismo e amizade.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação pelo excelente convívio durante o curso.

Aos amigos da Livraria Nobel.

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização desse trabalho.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMO	vii
SUMMARY	ix
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1 - Estimação para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica	4
2.2 - Estimação para a Distribuição Exponencial Biparamétrica.	8
2.3 - Testes de Hipóteses	10
2.3.1 - Distribuição Exponencial Monoparamétrica	10
2.3.2 - Distribuição Exponencial Biparamétrica	11
3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	19
3.1 - Propriedades Estatísticas da Distribuição Exponencial ..	19
3.2 - Estimação para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica	25
3.2.1 - Censura Tipo II. Amostragem sem reposição	25
3.2.2 - Censura Tipo II. Amostragem com reposição	31
3.2.3 - Censura Tipo I. Amostragem sem reposição	33
3.2.4 - Censura Tipo I. Amostragem com reposição	37
3.3 - Estimação da Função de Confiabilidade para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica	41
3.4 - Estimação para a Distribuição Exponencial Biparamétrica.	43

3.5 - Testes de Hipóteses	49
3.5.1 - Censura Tipo II	53
3.5.2 - Censura Tipo I	62
3.5.3 - Tamanho da Amostra	67
3.6 - Análise de Dados	71
3.6.1 - Teste qui-quadrado	71
3.6.2 - Teste para verificar se a taxa de falhas permanece constante	72
3.6.3 - Técnicas Gráficas	73
4. EXEMPLOS NUMÉRICOS	76
4.1 - Distribuição Exponencial Monoparamétrica	76
4.1.1 - Censura Tipo II. Amostragem sem reposição	76
4.1.2 - Censura Tipo II. Amostragem com reposição	79
4.1.3 - Censura Tipo I. Amostragem com reposição	81
4.1.4 - Censura Tipo I. Amostragem sem reposição	82
4.2 - Distribuição Exponencial Biparamétrica	83
4.3 - Análise de Dados	85
4.3.1 - Teste qui-quadrado	85
4.3.2 - Teste para verificar se a taxa de falhas permanece constante	86
4.3.3 - Técnica Gráfica	87
5. CONCLUSÕES	89
6. LITERATURA CITADA	92
APÊNDICE	96

Candidata: JOSEFA ALVAREZ ALVAREZ
Orientador: Dr. Izaias Rangel Nogueira

R E S U M O

O presente trabalho teve como objetivo fornecer uma análise mais cuidadosa da Inferência Estatística, quando se utiliza a distribuição exponencial como um modelo para falhas.

Tal distribuição é bastante útil na área da confiabilidade e testes de vida. É um conceito relevante que surge neste âmbito, é o de Amostra Censurada.

Foram considerados para a distribuição exponencial mono-paramétrica quatro casos: censura tipo II, amostragem sem reposição e com reposição; censura tipo I, amostragem sem reposição e com reposição. Para cada situação, determinaram-se os estimadores e os respectivos intervalos de confiança para os parâmetros, e a confiabilidade.

Fez-se também a análise da distribuição exponencial biparamétrica, encontrando-se os estimadores para os parâmetros, vida média e vida mínima, bem como os intervalos de confiança.

Quanto aos testes de hipótese, foram eles desenvolvidos, supondo-se que a distribuição é exponencial e que houve censura tipo I ou tipo II, encontrando-se para cada situação a estatística teste e as regiões críticas.

Além disso, técnicas gráficas e analíticas foram aplicadas às amostras para verificar-se a validade do modelo exponencial.

Candidate: JOSEFA ALVAREZ ALVAREZ

Adviser: Dr. Izaias Rangel Nogueira

S U M M A R Y

This paper had the objective to furnish a more careful Inference Statistic, when we use the exponential distribution as a model for failure.

Such distribution is very practical in the reliability area and life tests and a relevant concept that arises in this circuit, is the one of Censored Samples.

Four cases were considered for one-parameter exponential distribution: type II censure, sampling without and with replacement, type I censure, sampling without and with replacement. For each situation, the estimators was determined and the respective confidence intervals for the parameter and the reliability.

We also made the bi-parameter exponential distribution analysis, finding the estimators for the parameters mean and minimum life, as well as the confidence intervals.

As to the life statistic tests these were developed, supposing that the distribution is exponential and there was type I or type II censure, finding for each situation a statistic test and critic regions.

Despite of this, graphical and analytic technics were applied to the samples to verify the validity of the exponential model.

1. INTRODUÇÃO

Um teste de vida para um equipamento é o processo de colocar uma unidade sobre um específico conjunto de testes, medindo-se o tempo até que este falhe. Quanto a estas falhas, podem ser elas classificadas em três modalidades: as de mortalidade infantil, as aleatórias e as devido ao desgaste.

As falhas de mortalidade precoce são devidas à deficiência do projeto, da fabricação e da inspeção.

A classe de falhas aleatórias é devida ao esforço repentino, condição extrema e assim por diante. A outra classe de falhas representa as falhas por desgaste, isto é devido à deterioração do equipamento.

A distribuição exponencial é utilizada durante o período em que as falhas ocorrem aleatoriamente. Durante este período não existe um mecanismo de falha predominantemente responsável.

Admite-se que pode haver mais de uma causa contribuindo

para uma falha particular e que em certos casos pode não haver uma distinção totalmente clara entre algumas das causas. De modo que, em grupo de unidades aparentemente iguais por exemplo, se as lâmpadas incandescentes forem colocadas em teste, os instantes em que ocorrem as falhas irão variar.

Pode-se descobrir as causas que contribuem para essa variação. Assim é possível, talvez, que algumas dessas lâmpadas tenham se encontrado em um ambiente onde havia determinada vibração. Então é provável que essas lâmpadas tenham vida menor que aquelas que não sofreram vibração. É verdade também que, se nenhuma causa assinalável for encontrada, ainda assim as lâmpadas terão tempos de vida distintos. Em qualquer caso, o tempo de vida das lâmpadas será uma variável aleatória.

Obviamente existirá grande vantagem em se determinar a função de densidade que descreve precisamente o comportamento da variável aleatória; contudo, isto poderá ser bem mais difícil, quando existem uma ou mais causas assinaláveis de variação.

Mas é natural que, se os tempos de vida de alguns componentes, sob um conjunto dado de condições, forem adequadamente descritos por uma distribuição de probabilidades, então um benefício considerável será obtido.

Para tanto, dados devem ser utilizados a fim de se estimarem os parâmetros de uma determinada distribuição de probabilidades e suas características. Essas estimativas podem ser utilizadas para fazer previsões, determinar configurações dos componentes no sistema, determinar um procedimento para reposição, especificar períodos de garantia e assim por diante.

Porém, a natureza dos dados observados em testes de vida são freqüentemente diferentes dos dados estatísticos usuais.

Assim, se estamos interessados na vida útil de um certo tipo de componente, colocam-se n unidades em teste e marcam-se os tempos de falhas, de modo que resulte uma amostra ordenada.

Devido a limitações de tempo ou a limitações econômicas, o experimento pode terminar antes que todas as unidades tenham falhado; diz-se, então, que a amostragem foi censurada.

Portanto, uma amostragem pode ser censurada para um particular tempo, ou quando um número particular de falhas ocorrem. Se o experimento termina para um determinado tempo representado por t^* , antes que todas as n unidades tenham falhado, diz-se que se realizou uma amostragem com censura tipo I. Já a amostragem com censura tipo II ocorre quando o experimento termina para um particular número de falhas ou seja após a r -ésima falha.

No primeiro caso, o número de falhas é uma variável aleatória; no segundo caso, a duração do experimento é uma variável aleatória.

Neste trabalho será apresentada uma metodologia que pode ser aplicada a dados resultantes de testes de vida, quando a distribuição é exponencial. Mostram-se as técnicas de Estimação e os Testes de Hipótese relativos aos parâmetros desta distribuição.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1 - Estimação para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica

Inicialmente discute-se os problemas de estimação quando o tempo de vida, T , pode ser descrito por

$$f(t; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[\theta, \infty)}(t); \quad \theta > 0$$

São de uso comum duas classes de estimação denominadas estimação pontual e por intervalo.

No caso da estimação pontual, considera-se o método da máxima verossimilhança. Sua forma geral, para propósitos da Estatística foi proposta por FISHER (1922) numa conceituação considerada de máxima importância no desenvolvimento da teoria Estatística moderna.

A teoria moderna e a terminologia de intervalos de confiança foram desenvolvidas por NEYMAN (1935).

Baseando-se no trabalho de JACOBSON (1947), EPSTEIN e SOBEL (1953) analisaram o caso da distribuição exponencial e obtiveram o estimador de máxima verossimilhança para a vida média:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n}}{r} ; \quad r > 0 ,$$

onde os primeiros tempos de falhas observados em uma amostra de tamanho n são: $t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n}$. Mostraram também que a distribuição de $\hat{\theta}$ é qui-quadrado e que depende de r e não de n . O estimador de θ é imparcial.

EPSTEIN (1960) discute quatro processos de estimação pontual e por intervalo para dados de teste de vida. Os dois primeiros processos podem ser aplicados, quando a distribuição é exponencial; o terceiro e quarto processos são não paramétricos.

Caso I: O estimador do parâmetro $\hat{\theta}$ é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{T_{r,n}}{r} ; \quad r > 0 ,$$

se o experimento termina após a r -ésima falha e a amostragem é sem reposição, $T_{r,n}$ é dado por:

$$T_{r,n} = \sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n} ,$$

quando a amostragem é com reposição, $T_{r,n}$ é dado por:

$$T_{r,n} = nt_{r,n} .$$

Como $\frac{2r\hat{\theta}}{\theta} = \frac{2T_{r,n}}{\theta}$ possui distribuição de qui-quadrado com $2r$ graus de liberdade, pode-se obter o intervalo de confiança para o parâmetro θ que é dado por:

$$\frac{2T_{r,n}}{\chi^2_{2r,\alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2T_{r,n}}{\chi^2_{2r,1-\alpha/2}}$$

Caso II: Quando a duração do experimento $\tilde{e}$ fixada, as unidades que falham podem ou não ser repostas. O estimador da vida média, quando as unidades são repostas, $\tilde{e}$ dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} ; \quad r > 0 ,$$

onde $T = nt^*$; t^* $\tilde{e}$ o tempo de duração do experimento. O intervalo de confiança $\tilde{e}$:

$$\frac{2T}{\chi^2_{2r+2,\alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2T}{\chi^2_{2r,1-\alpha/2}}$$

Caso III: Se $\underline{n}$ unidades são colocadas em um teste de duração $\underline{t}^*$, e as que falharem não forem repostas, pode-se representar por X o número de unidades que falham durante o teste e ter-se-á, então a probabilidade de obter $\underline{r}$ falhas:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} ; \quad I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(r) , \quad q = 1-p ,$$

Da relação da distribuição binomial com a distribuição F tem-se:

$$P(X \leq r) = P(F_{v_1, v_2, \alpha} \leq \frac{n-r}{r+1} \frac{p}{1-p}) ,$$

onde $v_1 = 2r+2$ e $v_2 = 2n-2r$. Neste caso, pode-se fazer a seguinte afirmação não paramétrica com uma confiança $\gamma (0 < \gamma < 1)$ de que ao menos $\underline{q}$ da população sobrevive à duração de tempo $\underline{t}^*$. O valor de $\underline{q}$ $\tilde{e}$ dado por:

$$q = \left[1 + \left(\frac{r+1}{n-r} \right) F_{v_1, v_2, \alpha} \right]^{-1},$$

sendo $v_1 = 2r + 2$ e $v_2 = 2n - 2r$.

Em particular, quando a distribuição é exponencial, o limite inferior do parâmetro $\underline{\theta}$ é obtido de $q = \exp\left(\frac{-t^*}{\underline{\theta}}\right)$, assim tem-se:

$$\hat{\theta}_I > t^* \left\{ \ln \left[1 + \left(\frac{r+1}{n-r} \right) F_{v_1, v_2, \alpha} \right] \right\}^{-1}.$$

Caso IV: As unidades são retiradas aleatoriamente de alguma população e testadas, uma por vez, durante o tempo $\underline{t}^*$. Entende-se que ocorreu uma falha se a unidade parar de funcionar antes de $\underline{t}^*$. O teste continua até que um determinado número de falhas $\underline{r}$ ocorra. Suponha-se que a $\underline{r}$ -ésima falha é obtida, quando a $\underline{n}$ -ésima unidade é colocada em teste, tal que

$$P(X=r) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}; \quad I_{\{r, r+1, r+2, \dots\}}(n), \quad q = 1 - p.$$

Neste caso, pode-se afirmar com uma confiança $\gamma (0 < \gamma < 1)$ que ao menos uma fração $\underline{q}$ da população sobrevive à duração de tempo $\underline{t}^*$, onde $\underline{q}$ é dado por:

$$q = \left[1 + \left(\frac{r}{n-r} \right) F_{v_1, v_2, \alpha} \right]^{-1},$$

sendo $v_1 = 2r$ e $v_2 = 2n - 2r$.

Quando a distribuição é exponencial, o limite inferior de $\underline{\theta}$ é obtido de $q = \exp\left(\frac{-t^*}{\underline{\theta}}\right)$, assim tem-se:

$$\hat{\theta}_I > t^* \left\{ \ln \left[1 + \left(\frac{r}{n-r} \right) F_{v_1, v_2, \alpha} \right] \right\}^{-1},$$

sendo $v_1 = 2r$ e $v_2 = 2n - 2r$.

2.2 - Estimação para a Distribuição Exponencial Biparamétrica

Neste caso discute-se os problemas de estimação quando o tempo de vida T , pode ser descrito por

$$f(t; \theta; \delta) = \frac{1}{\theta} \exp \left[-\frac{(t - \delta)}{\theta} \right]; \quad I_{[0, \infty)}(t); \quad \theta > 0, \quad \delta \geq 0$$

EPSTEIN e SOBEL (1954) fornecem os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros da distribuição exponencial biparamétrica:

$$\hat{\delta} = t_1$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=2}^r (t_{i,n} - t_{1,n}) + (n-r)(t_{r,n} - t_{1,n})}{r}; \quad r > 0.$$

EPSTEIN (1960) fornece os estimadores imparciais de mínima variância para $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$:

$$\tilde{\delta} = t_1 - \frac{\hat{\theta}}{n}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_{i=2}^r (t_{i,n} - t_{1,n}) + (n-r)(t_{r,n} - t_{1,n})}{r-1}; \quad r > 1.$$

O intervalo de confiança para o parâmetro $\underline{\theta}$ é:

$$\frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\chi^2_{2r+2, \alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\chi^2_{2r+2, 1-\alpha/2}}$$

MANN (1969) propôs estimadores para $\underline{\theta}$ e $\underline{\delta}$ com menor erro quadrático entre os estimadores com perda média, os quais são:

$$\hat{\theta} = \bar{t} - t_{1,n} ,$$

$$\hat{\delta} = \frac{(n+1)t_{1,n} - \bar{t}}{n} .$$

SARHAN (1954), para obter o melhor estimador linear imparcial para $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$, utiliza estatísticas de ordem e a técnica de mínimos quadrados de LLOYD (1952). Os estimadores de $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$ foram:

$$\hat{\delta} = \frac{nt_{1,n} - \bar{t}}{n-1} ,$$

$$\hat{\theta} = -\frac{(\bar{t} - t_{1,n})n}{n-1} .$$

COHEN e HELM (1973) demonstram que o melhor estimador linear imparcial, o qual é também um estimador imparcial de mínima variância dos parâmetros, pode ser obtido, resolvendo-se o sistema de duas equações:

$$E(T) = \bar{t} ,$$

$$E(T_{1,n}) = t_{1,n} ,$$

onde $\bar{t}$ é a média e $t_{1,n}$ é a primeira estatística de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n .

As equações são obtidas aplicando o método dos momentos modificados, proposto por Helm *et alii* (1970).

Para a distribuição exponencial biparamétrica, os valores esperados são:

$$E(T) = \delta + \theta = \bar{t} ,$$

$$E(T_{1,n}) = \delta + \frac{\theta}{n} = t_{1,n} ,$$

resolvendo o sistema, obtêm-se os estimadores de $\underline{\theta}$ e $\underline{\delta}$

$$\hat{\theta} = \frac{n(\bar{t} - t_{1,n})}{n-1},$$

$$\hat{\delta} = \frac{nt_{1,n} - \bar{t}}{n-1}.$$

2.3 - Testes de Hipóteses

O teste de hipótese estatístico é o mais generalizado instrumento da inferência estatística, sendo que, em sua realização, são apresentadas duas hipóteses, a hipótese nula H_0 e a hipótese alternativa H_1 .

2.3.1 - Distribuição Exponencial Monoparamétrica

EPSTEIN (1953) desenvolve um procedimento para testar $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta = \theta_1 < \theta_0$. O procedimento do teste é o seguinte: colocam-se n unidades; após as $\underline{r}$ primeiras falhas, aceita-se a hipótese H_0 , se $\frac{2T_{r,n}}{\theta_0} < C$, onde $T_{r,n}$ é o tempo total do teste, quando a $\underline{r}$ -ésima falha ocorre. O trabalho fornece os valores de $\underline{r}$ e C .

O autor, ainda, deduz a fórmula para o tempo médio esperado para obter a $\underline{r}$ -ésima falha. A fórmula é dada por:

$$E(T_{r,n}) = \theta \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1},$$

quando a distribuição é exponencial.

Novamente EPSTEIN (1954-1960) publicou uma outra série de complementações a respeito da distribuição exponencial. O autor analisa a substancial melhora nos procedimentos, quando se introduz o procedimento seqüencial. Ele mostra que o teste seqüencial da razão de probabilidades pode ser aplicado aos testes de vida e que, desta forma, as decisões podem ser feitas continuamente no tempo.

BULGREN(1973) propõe um teste de amostragem dupla para testar a média da distribuição exponencial, isto é, $H_0: \theta < \theta_0$ versus $H_1: \theta \geq \theta_1$. O teste proposto é feito em dois estágios e possui o seguinte procedimento: n unidades são colocadas em teste; após as r_1 primeiras fa-

lhas aceitam-se a hipótese H_0 , se $\frac{2T_{r_1,n}}{\theta_0} \geq d_2$; rejeita-se a hipótese H_0 ,

se $\frac{2T_{r_1,n}}{\theta_0} < d_1$ e se $d_1 \leq \frac{2T_{r_1,n}}{\theta_0} < d_2$, deve-se continuar o teste, até

que r_2 unidades adicionais tenham falhado. Quando $r_1 + r_2 = r_3$ falhas

ocorrem, deve-se aceitar a hipótese H_0 , se $\frac{2T_{r_3,n}}{\theta_0} \geq d_3$; se $\frac{2T_{r_3,n}}{\theta_0} < d_3$

deve-se rejeitar a hipótese H_0 . Bulgren fornece os valores d_1 , d_2 e d_3 . para $\alpha = 0,05; 0,10$ e $\beta = 0,05; 0,10$ quando $\theta_0/\theta_1 = 2; 2,5, 3$ e 4 .

2.3.2 - Distribuição Exponencial Biparamétrica

Vários testes da razão de máxima verossimilhança foram estudados por NEYMAN e PEARSON (1928) e SUKHATME (1936) para a distribui-

ção exponencial biparamétrica.

PAULSON (1941) estuda a função poder e o viés nos testes de máxima verossimilhança.

EPSTEIN e TSAO (1953) apresentaram alguns testes para comparar duas distribuições exponenciais. Sejam n_1 e n_2 duas amostras aleatórias de duas populações, tendo funções de densidade $f(x; \delta_1; \theta)$ e $f(y; \delta_2; \theta)$ respectivamente. Os testes fundamentam-se em dois conjuntos de observações r_1 e r_2 , das amostras de tamanho n_1 e n_2 respectivamente.

Analisaram os autores os seguintes tipos de testes:

- a) Testar $\theta_1 = \theta_2$ supondo δ_1 e δ_2 conhecidos;
- b) Testar $\theta_1 = \theta_2$ supondo $\delta_1 = \delta_2$, porém desconhecidos;
- c) Testar $\theta_1 = \theta_2$;
- d) Testar $\delta_1 = \delta_2$ supondo θ_1 e θ_2 conhecidos;
- e) Testar $\delta_1 = \delta_2$ supondo $\theta_1 = \theta_2$, porém desconhecidos;
- f) Testar $\delta_1 = \delta_2$.

Eles fornecem para cada caso, as estatísticas teste e as respectivas regiões críticas.

KUMAR e PATEL (1971) propõem a estatística

$$T = \frac{d|X_{1,n} - Y_{1,n}|}{(r_1-1)\theta_1 + (r_2-1)\theta_2} ,$$

onde $d = r_1 + r_2 - 2$, para testar $H_0: \mu_1 = \mu_2$ versus a alternativa $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. A hipótese H_0 é rejeitada ao nível de significância α , se o valor calculado de T é maior que C , onde $P(T > C / H_0) = \alpha$. Os valores de C são fornecidos para alguns valores de r_1 e r_2 . Para calcular T foram

utilizados os estimadores de mínima variância das primeiras estatísticas de ordem $X_{1,n}$ e $Y_{1,n}$ e os da vida média θ_1 e θ_2 .

2.4 - Análise de Dados

DAVIS (1952) faz a análise de alguns dados de falha. Verificou ele que, as falhas dos componentes de um radar, tais como tubos transmissores, "resistores", combinação de transformadores, combinação de "relês", combinação de vários outros componentes, seguem distribuição exponencial. A técnica estatística aplicada na análise dos dados foi o teste qui-quadrado.

Quanto a EPSTEIN (1960), fornece doze procedimentos para testar a validade da hipótese de que as observações vêm de uma distribuição exponencial. Ele afirma que alguns procedimentos são equivalentes, assim como alguns procedimentos são superiores a outros em certas circunstâncias.

Analisa o autor os seguintes procedimentos:

- 1) Processo gráfico.
- 2) Teste qui-quadrado.
- 3) Um critério baseado na distribuição condicional da vida útil.
- 4) Teste para verificar se o tempo de falha é muito curto ou abaixo do normal (falhas precoces).
- 5) Teste para verificar se o tempo da primeira falha é excessivamente longo.
- 6) Teste para detectar a mudança na taxa de falhas.

- 7) Teste para verificar se a taxa de falhas permanece constante, para dados agrupados em classe.
- 8) Um caso particular do procedimento 7, para dados não agrupados em classes.
- 9) Teste baseado na distribuição F máxima.
- 10) Teste para verificar se os tempos entre falhas são excessivamente longos.
- 11) Procedimento gráfico baseado no teste de Kolmogorov-Smirnov.
- 12) Teste baseado na taxa de falhas condicional.

MORAN (1951) afirmou que o procedimento 8 (Teste de Bartlett) é assintoticamente mais poderoso para o seguinte teste H_0 : que o tempo total entre as sucessivas falhas possui distribuição exponencial versus a hipótese alternativa H_1 : que o tempo total entre as sucessivas falhas possui distribuição gama, da forma:

$$f(t; \theta, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)\theta^\beta} t^{\beta-1} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(t), \quad \beta > 1, \quad \theta > 0.$$

BARTHOLOMEW (1957) comparou o procedimento 8 com outros dois procedimentos. Ele verificou que o procedimento 8 é assintoticamente o mais poderoso dos três procedimentos, quando a hipótese alternativa é Weibull ou Gama.

ZELEN e DANNMILLER (1961) examinaram o poder dos procedimentos 3 e 8, quando a hipótese alternativa é Weibull, com função de densidade dada por:

$$f(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right]; \quad I_{[0, \infty)}(t), \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

Para o procedimento 3, consideram a situação de censura tipo II sem reposição das unidades que falham; isto é, o teste começa com n unidades e termina quando r falhas ocorrem. O tempo total para a i -ésima falha é:

$$T_{i,n} = T(t_{i,n}) = t_{1,n} + t_{2,n} + \dots + (n-i+1) t_{i,n}; \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

isto é:

$$T_{1,n} = T(t_{1,n}) = nt_{1,n}, \quad T_{2,n} = T(t_{2,n}) = t_{1,n} + (n-1)t_{2,n} \dots$$

A distribuição condicional de $T(t_{1,n}), T(t_{2,n}), \dots, T(t_{r-1,n})$ é uniforme no intervalo $[0, T(t_{r,n})]$ para um dado $T(t_{r,n})$. Portanto:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{r-1} T(t_{i,n}) - \frac{(r-1)}{2} T(t_{r,n})}{T(t_{r,n}) \sqrt{\frac{r-1}{12}}},$$

é aproximadamente normal com média zero e desvio padrão um.

Deve-se rejeitar a validade da distribuição exponencial ao nível de significância α se $|Z| > z_{\alpha}$, onde z_{α} é o valor crítico tabelado da distribuição normal.

EPSTEIN (1960) fornece a estatística do procedimento 8:

$$B_r = \frac{2r \left\{ \ln \left[\frac{T(t_{r,n})}{r} \right] - \frac{1}{r} \left[\ln T(t_{1,n}) + \ln T(t_{2,n} - t_{1,n}) + \dots + \ln T(t_{r,n} - t_{r-1,n}) \right] \right\}}{1 + \frac{r+1}{6r}},$$

onde $T(t_{i,n} - t_{i-1,n})$ é o tempo total do intervalo $[t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ e

$T_{r,n} = T(t_{1,n}) + T(t_{2,n} - t_{1,n}) + \dots + T(t_{r,n} - t_{r-1,n})$, onde

$T(t_{i,n} - t_{i-1,n}) = (n-i+1)(t_{i,n} - t_{i-1,n})$.

Esta estatística tem distribuição assintótica de qui-quadrado com $r-1$ graus de liberdade. Rejeita-se a validade da distribuição exponencial, se $B_r > \chi^2_{r-1, \alpha}$, onde $\chi^2_{r-1, \alpha}$ é o valor crítico tabelado da distribuição de qui-quadrado.

ZELEN e DANNEMILLER (1961) verificaram que, para pequenas amostras, o procedimento 8 não é suficientemente poderoso para distinguir entre as duas distribuições. O procedimento 3 parece ser mais poderoso que o procedimento 8, quando o parâmetro β da distribuição de Weibull for grande. A verificação foi feita por simulação para valores $\beta = 1, 3/2, 2$ e 3 . São necessárias ao menos 20 falhas para o teste ter um razoável poder de discriminação.

FERCHO e RINGER (1972) comparam dois testes sugeridos por EPSTEIN (1960) (procedimento 7 e 9) com um procedimento sugerido por GNEDENKO *et alii* (1960) para amostras censuradas.

A estatística teste do procedimento 7 é dada por:

$$B_k = \frac{2rk \left\{ \ln \left[\frac{T(t_{k,r})}{k} \right] - \frac{1}{k} \left[\ln T(t_{1,r}) + \ln T(t_{2,r} - t_{1,r}) + \dots + \ln T(t_{k,r} - t_{k-1,r}) \right] \right\}}{1 + \frac{(k+1)}{6rk}}$$

A estatística do procedimento 9 é dada por:

$$U = \frac{\max \{ T(t_{1,r}), T(t_{2,r} - t_{1,r}), \dots, T(t_{k,r} - t_{k-1,r}) \}}{\min \{ T(t_{1,r}), T(t_{2,r} - t_{1,r}), \dots, T(t_{k,r} - t_{k-1,r}) \}}$$

Tanto no procedimento 7, como no procedimento 9, os tempos de falhas são ordenados, tal como:

$$t_{1,1} \leq t_{1,2} \leq \dots \leq t_{1,r} \leq t_{2,1} \leq t_{2,2} \leq \dots \leq t_{2,r} \leq \dots \leq t_{k,1} \leq \dots \leq t_{k,r},$$

e agrupados em k grupos, cada grupo contendo r falhas. O tempo total do teste nos intervalos $[0, t_{1,r}]$, $[t_{1,r}, t_{2,r}]$... $[t_{k-1,r}, t_{k,r}]$ é representado por $T(t_{1,r})$, $T(t_{2,r} - t_{1,r})$, ..., $T(t_{k,r} - t_{k-1,r})$ respectivamente.

No procedimento 7, rejeita-se a hipótese de que a taxa de falhas não é constante se $B_k > \chi_{k-1,\alpha}^2$. O valor crítico $\chi_{k-1,\alpha}^2$ é obtido da tabela da distribuição de qui-quadrado.

No procedimento 9, rejeita-se a hipótese de homogeneidade, se $U > F_{\max_{2r,k,\alpha}}$. HARTLEY (1950) fornece os valores da distribuição $F_{\max}$ para vários valores de r e k adotando $\alpha = 5\%$ e 1% .

FERCHO e RINGER (1972), pela análise de Monte-Carlo, verificaram que o teste de Gnedenko tende a ser mais poderoso, quando a alternativa é Weibull.

O teste de Gnedenko está baseado na seguinte estatística.

$$Q(r_1, r_2) = \frac{\sum_{i=1}^{r_1} \frac{T(t_{i,n} - t_{i-1,n})}{r_1}}{\sum_{i=r_1+1}^{r_2} \frac{T(t_{i,n} - t_{i-1,n})}{r_2}}$$

sendo $T(t_{i,n} - t_{i-1,n}) = (n-i+1)(t_i - t_{i-1})$ com $t_0 = 0$. Cada $T(t_{i,n} - t_{i-1,n})$

tem distribuição exponencial e $\sum_{i=1}^k \frac{2T(t_{i,n} - t_{i-1,n})}{\theta}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2k$ graus de liberdade e $Q(r_1, r_2)$ tem distribuição F com $2r_1$ e $2r_2$ graus de liberdade. A distribuição exponencial é rejeitada, se $Q(r_1, r_2)$ é maior que $F_{2r_1, 2r_2, \alpha/2}$, ou menor que $F_{2r_1, 2r_2, 1-\alpha/2}$.

Quando $Q(r_1, r_2)$ é grande, isto indica que a taxa de falhas está aumentando; quando pequeno, a taxa de falhas está diminuindo. Fercho e Ringer utilizaram $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ para r par e $r_1 = \left[\frac{r}{2}\right]$; $r_2 = \left[\frac{r}{2}\right] + 1$ para r ímpar, onde $[]$ indica o maior inteiro contido.

Para verificar a validade do modelo exponencial, pode-se também utilizar o teste de Kolmogorov-Smirnov. A estatística teste para um teste bilateral é:

$$D_n = \max (\delta_i) ,$$

$$\text{onde: } \delta_i = \max \left[\frac{i}{n} - F(t_i; \theta); F(t_i; \theta) - \frac{(i-1)}{n} \right] ,$$

com $F(t_i; \theta) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\theta}\right)$; $i = 1, 2, \dots, n$; onde t_i é a i -ésima estatística de ordem.

Para a distribuição exponencial com média desconhecida, LILLIEFORS (1969) fornece os valores críticos para a estatística de Kolmogorov-Smirnov, quando a amostra é completa.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Propriedades Estatísticas da Distribuição Exponencial

A função de densidade da variável aleatória exponencial T com dois parâmetros tem a forma:

$$f(t; \theta, \delta) = \frac{1}{\theta} \exp \left[\frac{-(t - \delta)}{\theta} \right] ; \quad I_{[\delta, \infty)}(t), \quad \theta > 0, \quad \delta \geq 0. \quad (3.1.a)$$

Para (3.1.a) tem-se a seguinte denominação para os parâmetros:

δ : parâmetro de localização, de vida mínima, de garantia ou de "soleira".

θ : parâmetro de escala ou vida média.

A função distribuição é obtida de (3.1.a) através de integração:

$$F(t; \theta, \delta) = P(T \leq t) = 1 - \exp \left[\frac{-(t - \delta)}{\theta} \right]; \quad I_{[\delta, \infty)}(t); \quad \theta > 0, \quad \delta \geq 0. \quad (3.1.b)$$

O valor esperado e a variância são $\theta + \delta$ e θ^2 respectivamente.

Como a distribuição biparamétrica pode ser sempre convertida em uma distribuição monoparamétrica, fazendo-se a translação

$T = t - \delta$, ter-se-á de (3.1.a)

$$f(t; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(t); \quad \theta > 0. \quad (3.1.c)$$

Integrando a (3.1.c), obtêm-se a função de distribuição:

$$F(t; \theta) = P(T \leq t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(t), \quad \theta > 0. \quad (3.1.d)$$

A função de confiabilidade para (3.1.a) é dada por:

$$C(t; \theta, \delta) = P(T > t) = \exp \left[\frac{-(t - \delta)}{\theta} \right]; \quad I_{[\delta, \infty)}(t), \quad \theta > 0, \quad \delta \geq 0. \quad (3.1.e)$$

e para (3.1.c) é:

$$C(t; \theta) = P(T > t) = \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(t), \quad \theta > 0. \quad (3.1.f)$$

A taxa de falhas é a probabilidade de que uma falha por unidade de tempo ocorra no intervalo $[t_1, t_2]$, dado que não ocorreu até o instante t_1 .

Portanto, a taxa de falhas é dada por:

$$\frac{P(t_1 \leq T \leq t_2)/(t_2 - t_1)}{C(t_1)} = \frac{C(t_1) - C(t_2)}{(t_2 - t_1) C(t_1)} . \quad (3.1.g)$$

Como se vê, a taxa de falhas $\tilde{e}$ é uma função do tempo.

Ao redefinir-se o intervalo para $[t, t+\Delta t]$, a expressão (3.1.g) ficará:

$$\frac{\frac{C(t) - C(t+\Delta t)}{C(t)}}{\Delta t} \quad (3.1.h)$$

A taxa de falhas definida em (3.1.h) é expressa em falhas por unidade de tempo. Na realidade, as unidades de tempo podem ser quilômetros, rotações, ciclos, horas, e assim por diante.

A função intensidade de falhas ou função acaso é definida como o limite da taxa de falhas, quando o intervalo aproxima-se de zero. Da expressão (3.1.h) ter-se-á:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t) - C(t + \Delta t)}{\Delta t C(t)} = \frac{1}{C(t)} \left[- \frac{d}{dt} C(t) \right] ,$$

como $-\left[\frac{d}{dt} C(t) \right] = f(t)$, então: $h(t) = \frac{f(t)}{C(t)} . \quad (3.1.i)$

Portanto, a função acaso é a taxa de falhas instantânea.

A taxa de falhas instantânea para (3.1.a) e (3.1.c) é uma constante, ou seja, é dada por:

$$h(t) = \frac{1}{\theta} . \quad (3.1.j)$$

Uma outra propriedade importante da distribuição exponencial é dada por:

$$\begin{aligned} P(T > t+a \mid T > t) &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{\theta}(t+a)\right]}{\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)}, \\ &= \exp\left(-\frac{a}{\theta}\right). \end{aligned} \quad (3.1.k)$$

Como se vê, de (3.1.k), a probabilidade desejada é independente do tempo $\underline{t}$, tempo que uma unidade sobreviveu antes do intervalo de tempo $\underline{a}$. Fisicamente, isto significa que enquanto o componente estiver funcionando ele será "tão bom quanto novo", e, por isso, seu comportamento de falhas durante qualquer período particular depende somente da extensão desse período e não do seu passado as experiências do sistema não influenciam quanto ao desgaste; esta é uma propriedade fundamental da distribuição exponencial.

Por sua vez, a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson estão diretamente relacionadas. Se o tempo entre falhas é uma variável aleatória T com distribuição exponencial com parâmetro θ , então o número de falhas em um intervalo de tempo $\underline{t}$, possui distribuição de Poisson com parâmetro t/θ , ou seja, se:

$$t(t;\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right); \quad I_{[0,\infty)}(t), \quad \theta > 0, \quad (3.1.l)$$

onde T é a variável tempo entre falhas, então, para um intervalo de tempo de duração $\underline{t}$, tem-se:

$$P(X = r) = \frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^r \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)}{r!}; \quad I_{\{0,1,2,\dots\}}(r), \quad (3.1.m)$$

onde $\underline{r}$ é o número de falhas observadas no intervalo de tempo de duração $\underline{t}$.

Para demonstrar (3.1.m), supõem-se que X seja o número de falhas no intervalo de tempo $[0, t]$ e que T_r é o tempo da r -ésima falha.

Deve-se observar que se tem $X < r$, se, e somente se, $T_r > t$. Ou:

$$P(X < r) = P(T_r > t) \quad , \quad (3.1.n)$$

$$P(X < r+1) = P(T_{r+1} > t) \quad .$$

Portanto,

$$P(X = r) = P(T_{r+1} > t) - P(T_r > t) \quad . \quad (3.1.o)$$

Daí, tem-se:

$$P(X = r) = [1 - P(T_{r+1} \leq t)] - [1 - P(T_r \leq t)] \quad ,$$

$$P(X = r) = P(T_r \leq t) - P(T_{r+1} \leq t) \quad , \quad (3.1.p)$$

$$P(X = r) = F_{T_r}(t) - F_{T_{r+1}}(t) \quad .$$

Mas, $T_r = t_1 + t_2 + \dots + t_r$, onde os t_i são independentes e distribuídos exponencialmente. A função geradora de momentos para T_r é dada por:

$$M_{T_r}(s) = [M_T(s)]^r \quad . \quad (3.1.q)$$

Como a função geradora de momentos da distribuição exponencial é $M_T(s) = \frac{1}{1 - \theta s}$; $s < \frac{1}{\theta}$, tem-se, portanto, que:

$$M_{T_r}(s) = \left(\frac{1}{1 - \theta s}\right)^r ; \quad s < \frac{1}{\theta} \quad . \quad (3.1.r)$$

Da expressão (3.1.r) pode-se verificar que T_r possui distribuição gama, cuja função densidade, é:

$$f(T_r; \theta, r) = \frac{1}{\theta^r (r-1)!} T_r^{r-1} \exp\left(-\frac{T_r}{\theta}\right); \quad I_{(0, \infty)}(T_r), \quad \theta > 0. \quad (3.1.s)$$

Integrando-se (3.1.s) tem-se:

$$F_{T_r}(t; \theta, r) = \frac{1}{\theta^r (r-1)!} \int_0^t T_r^{r-1} \exp\left(-\frac{T_r}{\theta}\right) dT_r. \quad (3.1.t)$$

Aplicando integração por partes, obtêm-se um modelo que é:

$$F_{T_r}(t; \theta, r) = -\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \left[\frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r-2} + \dots + 1 \right] + 1. \quad (3.1.u)$$

Analogamente,

$$F_{T_{r+1}}(t; \theta, r) = -\exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \left[\frac{1}{r!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^r + \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r-1} + \dots + 1 \right] + 1. \quad (3.1.v)$$

Substituindo (3.1.u) e (3.1.v) em (3.1.p), ter-se-á finalmente:

$$P(X=r) = \frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^r \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right)}{r!}; \quad I_{\{0, 1, 2, \dots\}}(r).$$

É interessante verificar que as distribuições exponencial, gama, de Rayleigh, de Erlang e de Weibull pertencem à "família" cuja função de densidade é dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) x^{\alpha-1} \exp [-B(\alpha, \beta) x^\beta] ; \quad I_{[0, \infty)}(x), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 . \quad (3.1.x)$$

Assim, se $\alpha = \beta = 1$, ter-se-á a distribuição exponencial, se $\alpha > 0, \beta = 1$, a distribuição gama, se $\alpha = \beta = 2$, a distribuição de Rayleigh; se $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, a distribuição de Erlang e se $\alpha = \beta > 0$, a distribuição de Weibull.

3.2 Estimação para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica

3.2.1 - Censura Tipo II: Amostragem sem reposição

O processo de estimação que será desenvolvido é a técnica de máxima verossimilhança.

Para n falhas ordenadas, tem-se a função de verossimilhança:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{n,n}; \theta) = n! \prod_{i=1}^n f(t_{i,n}; \theta) . \quad (3.2.1.a)$$

Para a distribuição exponencial a (3.2.1.a), torna-se:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{n,n}; \theta) = n! \frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n t_{i,n}\right) . \quad (3.2.1.b)$$

A ordenação não faz nenhuma diferença, desde que todas as n unidades sejam mantidas, até ocorrer a falha. Maximizando (3.2.1.b), ter-se-á:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n t_{i,n}}{n} = \bar{t}. \quad (3.2.1.c)$$

Este estimador deve ser utilizado, quando a amostra é completa, isto é, o experimento termina quando todas as unidades falham.

Contudo, se pararmos o teste após a r -ésima falha, quando $r < n$, observam-se as unidades mais fracas da amostra. Neste caso, a ordenação deve ser considerada, e a função de verossimilhança ficará:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t_{1,n}}{\theta}\right) \cdot \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t_{2,n}}{\theta}\right) \dots \right. \\ \left. \dots \exp\left[-\frac{(n-r)t_{r,n}}{\theta}\right] \right],$$

ou:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{\theta^r} \exp\left\{-\frac{\left[\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n}\right]}{\theta}\right\}; \quad (3.2.1.d)$$

$$0 < t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n}.$$

Tomando-se o logaritmo natural da expressão (3.2.1.d), derivando-se em relação a θ e igualando-se a zero, obtém-se o estimador de θ que maximiza (3.2.1.d). Este estimador é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n}}{r}; \quad r > 0. \quad (3.2.1.e)$$

Como a função de verossimilhança (3.2.1.d) pode ser fatorada como $g(\hat{\theta}, \theta) h(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n})$, o estimador para θ é suficiente.

Para verificar que $\hat{\theta}$ é um estimador imparcial, é necessário conhecer a distribuição de $\hat{\theta}$.

Se definirmos novas variáveis:

$$Y_{i,n} = T_{i,n} - T_{i-1,n} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad \text{e} \quad t_0 = 0, \quad (3.2.1.f)$$

como:

$$T_{i,n} = \sum_{j=1}^i t_{j,n} + (n-r)t_{i,n},$$

em função de Y_i ficará:

$$T_{r,n} = T(t_{r,n}) = nt_1 + (n-1)(t_{2,n} - t_{1,n}) + \dots + (n-r+1)t_{r,n},$$

ou

$$T_{r,n} = T(t_{r,n}) = \sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{i,n}. \quad (3.2.1.g)$$

As variáveis aleatórias Y_i são mutuamente independentes. O módulo do Jacobiano para essa transformação (um a um) é um. Substituindo em (3.2.1.d), ter-se-á:

$$L(y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{r,n}; \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} \exp \left[- \frac{\sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right];$$

$$I_{[0, \infty)}(y_{i,n}), \quad \theta > 0. \quad (3.2.1.h)$$

A distribuição marginal para $Y_{k,n}$ pode ser obtida pela integração de (3.2.1.h), $(r-1)$ vezes. Integrando-se para um $Y_{p,n}$, tem-se:

$$h(y_{k,n};\theta) = \frac{n!}{(n-r)!\theta^r} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp \left[\frac{-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r (n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right] \cdot \\ \cdot \exp \left[\frac{-(n-p+1)y_{p,n}}{\theta} \right] \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r dy_{i,n} \right) dy_{p,n} \quad (3.2.1.i)$$

Se $u = \frac{(n-p+1)y_{p,n}}{\theta}$, então, $du = \frac{(n-p+1)dy_{p,n}}{\theta}$; substituindo essas expressões em (3.2.1.i), ter-se-á:

$$h(y_{k,n};\theta) = \frac{n!}{(n-r)!(n-p+1)\theta^{r-1}} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp \left[\frac{-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r (n-i+1)y_{p,n}}{\theta} \right] \cdot \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r dy_{i,n} \left[-e^{-u} \right]_0^\infty,$$

ou:

$$h(y_{k,n};\theta) = \frac{n!}{(n-r)!(n-p+1)\theta^{r-1}} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp \left[\frac{-\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r (n-i+1)y_{p,n}}{\theta} \right] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^r dy_{i,n} \quad (3.2.1.j)$$

Deve-se observar que $\frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{(n-p+1)}$ reduz-se a $(n-k+1)$, quando todas as $y_{k,n}$ são integradas. Portanto, a distribuição marginal para $y_{k,n}$ torna-se, após integrar $(r-1)$ vezes:

$$h(y_{k,n};\theta) = \left(\frac{n-k+1}{\theta} \right) \exp \left[\frac{-(n-k+1)y_{k,n}}{\theta} \right]; \quad I_{[0,\infty)}(y_{k,n}), \quad \theta > 0. \quad (3.2.1.k)$$

Quando as variáveis são independentes, ter-se-á:

$$f(y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{r,n}) = h(y_{1,n}) h(y_{2,n}) \dots h(y_{r,n}) \quad , \quad (3.2.1.l)$$

e, nesse caso,

$$\begin{aligned} L(y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{r,n}) &= \prod_{i=1}^r \left(\frac{n-i+1}{\theta} \right) \exp \left[\frac{-(n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right] . \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{\theta^r} \exp \left[- \frac{\sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right] . \end{aligned} \quad (3.2.1.m)$$

Portanto, o estimador de $\hat{\theta}$ pode ser expresso em função de $Y_{i,n}$:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r (n-i+1)y_{i,n}}{r} ; \quad r > 0 \quad . \quad (3.2.1.n)$$

Pode-se agora encontrar a distribuição de $\hat{\theta}$, lembrando-se que as variáveis $Y_{i,n}$ são independentes e utilizando-se a função geradora de momentos para a distribuição de $\hat{\theta}$.

Visto que a variável $Y_{i,n}$ possui distribuição exponencial, a função geradora de momentos ficará:

$$M_{Y_{i,n}}(s) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{n-i+1} \right) s} ; \quad s < \frac{n-i+1}{\theta} .$$

Então,

$$M_{\hat{\theta}}(s) = M_{Y_{1,n}}\left(\frac{ns}{r}\right) \cdot M_{Y_{2,n}}\left[\frac{(n-1)s}{r}\right] \dots M_{Y_{r,n}}\left[\frac{(n-r+1)s}{r}\right] ,$$

ou:

$$M_{\hat{\theta}}(s) = \left[\frac{1}{1 - (\frac{\theta}{r})s} \right]^r ; \quad s < \frac{r}{\theta} \quad . \quad (3.2.1.p)$$

A expressão (3.2.1.p) é a função geradora de momentos da distribuição gama, portanto, isto implica em que:

$$f(\hat{\theta}; \theta, r) = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{r}{\theta}\right)^r \hat{\theta}^{r-1} \exp\left(-\frac{\hat{\theta}r}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(\hat{\theta}); \quad \theta > 0, \quad r > 0 \quad . \quad (3.2.1.q)$$

Pode-se verificar que $E(\hat{\theta}) = \theta$; portanto $\hat{\theta}$ é um estimador imparcial de θ . Tem-se, também, que $V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{r}$ sendo igual ao limite inferior de Cramer-Rao. Assim $\hat{\theta}$ tem variância mínima e é eficiente.

De (3.2.1.q) pode-se calcular os limites de confiança para $\hat{\theta}$. Entretanto, existe uma grande vantagem em poder utilizar uma distribuição já tabelada. A função de densidade de uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado é:

$$f(x; \theta, k) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right); \quad I_{[0, \infty)}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad . \quad (3.2.1.r)$$

Fazendo-se $\frac{r\hat{\theta}}{\theta} = \frac{x}{2}$, então $d\hat{\theta} = \frac{\theta}{2r} dx$. Substituindo estas expressões em (3.2.1.q), tem-se:

$$f(x; \theta, r) = \frac{1}{2^r (r-1)!} x^{r-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right); \quad I_{[0, \infty)}(x), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad . \quad (3.2.1.s)$$

Portanto, $\frac{2r\hat{\theta}}{\theta}$ tem distribuição de qui-quadrado com $2r$ graus de liberdade. Assim,

$$P\left(\chi_{2r,1-\alpha/2}^2 \leq \frac{2r\hat{\theta}}{\theta} \leq \chi_{2r,\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha.$$

Portanto, o intervalo de confiança para $\underline{\theta}$ será:

$$P\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\chi_{2r,\alpha/2}^2} \leq \theta \leq \frac{2r\hat{\theta}}{\chi_{2r,1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha \quad . \quad (3.2.1.t)$$

Quando a amostra é completa, isto é, todas as unidades falharam, o intervalo de confiança para $\underline{\theta}$ pode ser obtido de (3.2.1.t), fazendo-se, $r = n$.

Pode-se, também, determinar o comprimento do intervalo de (3.2.1.t):

$$L = 2r\hat{\theta}\left(\frac{1}{\chi_{2r,1-\alpha/2}^2} - \frac{1}{\chi_{2r,\alpha/2}^2}\right) \quad .$$

Como $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória, o comprimento do intervalo é também uma variável e o comprimento esperado será obtido de (3.2.1.u), substituindo-se $\hat{\theta}$ por $\underline{\theta}$.

3.2.2 - Censura Tipo II - Amostragem com reposição

Quando a amostragem é com reposição, as unidades que falham são repostas. O experimento permanece, sempre, com $\underline{n}$ unidades, terminando após a $\underline{r}$ -ésima falha.

A função de verossimilhança, para os tempos de falhas ordenados, é dada por:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp \left[\frac{-n \sum_{i=1}^r (t_{i,n} - t_{i-1,n})}{\theta} \right],$$

ou

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp \left(\frac{-n t_{r,n}}{\theta} \right),$$

$$0 \leq t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} ; t_0 = 0 . \quad (3.2.2.a)$$

E para obter-se o estimador de máxima verossimilhança, deve-se tomar o logaritmo natural da expressão (3.2.2.a), derivar em relação a θ e igualar a zero. O estimador é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{nt_{r,n}}{r} ; \quad r > 0 . \quad (3.2.2.b)$$

Se definirmos uma nova variável $Y_{i,n}$ como sendo a diferença entre falhas então

$$Y_{i,n} = T_{i,n} - T_{i-1,n} ; t_0 = 0 .$$

Pode-se reescrever, assim, a expressão (3.2.2.a) como:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp \left(\frac{-n \sum_{i=1}^r y_{i,n}}{\theta} \right) ; \quad I_{[0, \infty)}(y_{i,n}) ,$$

$$0 \leq y_{1,n} \leq y_{2,n} \leq \dots \leq y_{r,n} . \quad (3.2.2.c)$$

Cada $Y_{i,n}$ possui distribuição exponencial com parâmetro n/θ . O módulo do jacobiano dessa transformação (um a um) é um.

Então, $T_{r,n} = \sum_{i=1}^r Y_i$ possui distribuição gama, cuja função de densidade é dada por:

$$f(t_{r,n}; \theta, r) = \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{n}{\theta}\right)^r t_{r,n}^{r-1} \exp\left(-\frac{nt_{r,n}}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(t_{r,n}), \quad \theta > 0, \quad r > 0, \quad (3.2.2.d)$$

Conseqüentemente, $\frac{2nt_{r,n}}{\theta}$ possui distribuição de qui-quadrado com $2r$ graus de liberdade. Assim, o intervalo de confiança para θ é:

$$P\left(\chi_{2r, 1-\alpha/2}^2 \leq \frac{2nt_{r,n}}{\theta} \leq \chi_{2r, \alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha,$$

então

$$P\left(\frac{2nt_{r,n}}{\chi_{2r, \alpha/2}^2} \leq \theta \leq \frac{2nt_{r,n}}{\chi_{2r, 1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha,$$

ou:

$$P\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\chi_{2r, \alpha/2}^2} \leq \theta \leq \frac{2r\hat{\theta}}{\chi_{2r, 1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha, \quad (3.2.2.e)$$

3.2.3 - Censura Tipo I - Amostragem sem reposição

Colocam-se n unidades em teste e o mesmo termina para um prefixado tempo t^* . A função de verossimilhança para este caso é:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} \exp \left\{ - \frac{\left[\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t^* \right]}{\theta} \right\}$$

$$0 < t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} < t^* . \quad (3.2.3.a)$$

Para obter-se o estimador de máxima verossimilhança de θ , deve-se tomar o logaritmo natural da expressão (3.2.3.a), derivar em relação a θ e igualar a zero. Este estimador é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t^*}{r} ; \quad r > 0 . \quad (3.2.3.b)$$

O estimador obtido em (3.2.3.b) não é imparcial, pois $E(\hat{\theta}) \neq \theta$.

Um outro estimador de θ pode ser obtido; supõe-se que uma estimativa da proporção de falhas é dada por:

$$p = \frac{r}{n} . \quad (3.2.3.c)$$

A probabilidade de que uma unidade falhe, antes que o experimento termine é:

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{t^*}{\theta}\right) . \quad (3.2.3.d)$$

Das expressões (3.2.3.c) e (3.2.3.d), tem-se:

$$\tilde{\theta} = \frac{-t^*}{\ln(1 - \frac{r}{n})} = \frac{-t^*}{\ln(1-p)} . \quad (3.2.3.e)$$

BARTOLOMEW (1963) compara $\hat{\theta}$ e $\tilde{\theta}$, determinando o limite da eficiência relativa que é dado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(\hat{\theta})}{V(\tilde{\theta})} = \frac{(1-p) [\ln(1-p)]^2}{p^2} . \quad (3.2.3.f)$$

Ele verificou que o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}$ é preferível, porém $\tilde{\theta}$ é bastante bom para valores de p pequenos. A eficiência relativa excede a 96%, quando $p \leq 0,5$.

Neste caso, é muito difícil obter os limites de confiança para o parâmetro θ . Uma aproximação está baseada na distribuição binomial, que utiliza a informação de que r falhas ocorrem no intervalo do teste $[0, t^*]$, quando n unidades são testadas.

A probabilidade de que r unidades falhem, até o tempo t^* , é dada por:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} ; \quad I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(r) . \quad (3.2.3.g)$$

Os limites de confiança para p são obtidos, resolvendo-se as duas equações. O limite de confiança superior de p é obtido pela solução da equação:

$$P(X \leq r) = \sum_{x=0}^r \binom{n}{x} p_s^x (1-p_s)^{n-x} = \frac{\alpha}{2} . \quad (3.2.3.h)$$

O limite de confiança inferior de p é obtido pela solução da equação:

$$P(X < r) = \sum_{x=0}^{r-1} \binom{n}{x} p_I^x (1-p_I)^{n-x} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (3.2.3.i)$$

Assim, o intervalo de confiança para p é:

$$P(p_I \leq p \leq p_S) = 1 - \alpha \quad (3.2.3.j)$$

Substituindo-se (3.2.3.e) em (3.2.3.j), ter-se-á:

$$P\left[\frac{-t^*}{\ln(1-p_S)} \leq \theta \leq \frac{-t^*}{\ln(1-p_I)}\right] = 1 - \alpha \quad (3.2.3.k)$$

o limite de confiança inferior $\underline{\theta}$, ao nível de probabilidade $1 - \alpha$ é dado por:

$$P\left[\theta_I \geq \frac{-t^*}{\ln(1-p_S)}\right] = 1 - \alpha \quad (3.2.2.l)$$

onde p_S é obtido de:

$$\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} p_S^x (1-p_S)^{n-x} = \alpha$$

Um outro limite de confiança inferior para p , é dado pela solução da equação:

$$\sum_{x=0}^{r-1} \binom{n}{x} p_I^x (1-p_I)^{n-x} = 1 - \alpha = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r) \Gamma(r+1)} \int_0^{p_I} y^{n-r-1} (1-y)^r dy \quad (3.2.3.m)$$

Da relação entre a distribuição binomial e a distribuição beta, tem-se:

$$p_I = 1 - \text{Beta}_{v_1, v_2, 1-\alpha} = \text{Beta}_{v_2, v_1, \alpha} \quad ,$$

onde $v_1 = r+1$ e $v_2 = n-r$ (3.2.3.n)

Os percentis da distribuição podem ser calculados, utilizando-se a distribuição F, através da seguinte relação:

$$\text{Beta}_{v_1, v_2} = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right) F_{2v_1, 2v_2}}{1 + \left(\frac{v_1}{v_2}\right) F_{2v_1, 2v_2}} \quad , \quad (3.2.3.o)$$

3.2.4 - Censura Tipo I - Amostragem com reposição

Considerem-se $\underline{n}$ unidades, as mesmas serão repostas, à medida que falharem; o teste é censurado após um específico tempo $\underline{t}^*$. O experimento permanece sempre com $\underline{n}$ unidades e o tempo total do teste é $\underline{nt}^*$.

A variável número de falhas possui distribuição de Poisson, com parâmetro $\underline{nt}^*/\theta$.

A função de probabilidade da distribuição de Poisson é dada por:

$$P(X=x) = \frac{\left(\frac{\underline{nt}^*}{\theta}\right)^x \exp\left(-\frac{\underline{nt}^*}{\theta}\right)}{x!} \quad ; \quad I_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad . \quad (3.2.4.a)$$

Para encontrar-se o estimador de máxima verossimilhança, deve-se obter a função de verossimilhança.

Dado que $\underline{r}$ falhas ocorrem, os tempos de falhas são distribuídos condicionalmente, como uma variável ordenada uniformemente:

$$f(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n} | r) = \frac{r!}{(t^*)^r} ; \quad (3.2.4.b)$$

$$0 < t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} < t^* .$$

A função de verossimilhança ficará:

$$\begin{aligned} L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta) &= f(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n} | r) P(X=r) , \\ &= \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp\left(-\frac{nt^*}{\theta}\right) ; \\ 0 < t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} < t^* . \end{aligned} \quad (3.2.4.c)$$

Tomando-se o logaritmo natural da expressão (3.2.4.c) derivando-se em relação a θ e igualando-se a zero, obtêm-se o estimador de máxima verossimilhança, que é dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{nt^*}{r} ; \quad r > 0 . \quad (3.2.4.d)$$

Pode-se obter um intervalo de confiança aproximado para θ .

Os limites do intervalo de confiança são determinados, resolvendo-se para λ as equações:

$$\sum_{x=0}^r \frac{\lambda_s^x \exp(-\lambda_s)}{x!} = \frac{\alpha}{2} , \quad (3.2.4.e)$$

e

$$\sum_{x=0}^{r-1} \frac{\lambda_I^x \exp(-\lambda_I)}{x!} = 1 - \frac{\alpha}{2} , \quad (3.2.4.f)$$

onde $\lambda = \frac{nt^*}{\theta}$.

Em (3.2.4.e), $\frac{\alpha}{2}$ representa a probabilidade de observar $\underline{r}$ ou menos falhas para um dado $\underline{\lambda}$. Essa probabilidade decresce, à medida que $\underline{\lambda}$ cresce para um dado $\underline{r}$. Dessa forma, essa equação dará o limite superior para $\underline{\lambda}$. O contrário é verdade para (3.2.4.f).

Pode-se assim, reescrever (3.2.4.e) e (3.2.4.f), como:

$$P(X \leq r \mid \lambda_S) = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad (3.2.4.g)$$

$$P(X < r \mid \lambda_I) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad .$$

Considerando-se a função gama incompleta:

$$\Gamma(t; \delta, \beta) = \frac{1}{\delta! \beta^{\delta+1}} \int_0^t x^\delta \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \quad . \quad (3.2.4.h)$$

Integrando (3.2.4.h) sucessivamente por partes, obtêm-se um modelo que facilmente se reconhece como:

$$\Gamma(y; \delta, \beta) = 1 - \sum_{k=0}^{\delta} \frac{y^k \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right)}{k! \beta^k} \quad . \quad (3.2.4.i)$$

Com o intuito de combinar isto com a desejada soma de Poisson, fazendo-se $y = \lambda$, $\beta = 1$ e $\delta = r$, e então (3.2.4.i), torna-se:

$$\Gamma(\lambda; r, 1) = 1 - P(R \leq r \mid \lambda) \quad ,$$

ou seja,

$$\Gamma(\lambda_I; r-1, 1) = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad (3.2.4.j)$$

$$\Gamma(\lambda_S; r; 1) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad .$$

Estas expressões podem ser usadas para achar λ_I e λ_S através de tabelas da distribuição gama incompleta. Contudo, a distribuição gama e a distribuição de qui-quadrado estão relacionadas.

Substituindo-se em (3.2.4.h) $t = \lambda$, $\delta = r$ e $\beta = 1$ ter-se-á:

$$\Gamma(\lambda; r, 1) = \frac{1}{r!} \int_0^\lambda x^r \exp(-x) dx \quad . \quad (3.2.4.k)$$

Fazendo-se $x = \frac{z}{2}$ e $r = \frac{v}{2} - 1$ e, então, $dx = \frac{dz}{2}$.

Substituindo-se essas expressões em (3.2.4.k) ter-se-á:

$$\Gamma(\lambda; r, 1) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2}) 2^{v/2}} \int_0^{2\lambda} z^{\frac{v}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) dz \quad . \quad (3.2.4.l)$$

Esta expressão possui distribuição de qui-quadrado com número de graus de liberdade igual a $v = 2r+2$.

Assim, o limite superior do intervalo de confiança é:

$$2\lambda_S = \chi_{2r+2, \alpha/2}^2 \quad . \quad (3.2.4.m)$$

O limite inferior do intervalo de confiança encontra-se de forma semelhante:

$$2\lambda_I = \chi_{2r, 1-\alpha/2}^2 \quad . \quad (3.2.4.n)$$

De (3.2.4.m) e (3.2.4.n), podem-se obter os limites do intervalo de confiança:

$$P\left(\frac{\chi_{2r, 1-\alpha/2}^2}{2} \leq \lambda \leq \frac{\chi_{2r+2, \alpha/2}^2}{2}\right) = 1 - \alpha \quad . \quad (3.2.4.o)$$

Como $\lambda = \frac{nt^*}{\theta}$, então:

$$P\left(\frac{2nt^*}{\chi^2_{2r+2, \alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2nt^*}{\chi^2_{2r, 1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha ,$$

ou

$$P\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{2r+2, \alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{2r, 1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha . \quad (3.2.4.p)$$

Ainda que não sejam observadas falhas, pode-se calcular um limite de confiança inferior.

COX (1953) discute o intervalo de confiança assim:

$$\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{2r+1, \alpha/2}} , \frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{2r, 1-\alpha/2}}\right) ,$$

e afirma que $\hat{\theta}$ é ligeiramente menor que o dado em (3.2.4.p). Porém, em alguns casos, possui nível de confiança menor que $1 - \alpha$.

3.3 Estimação da Função de Confiabilidade para a Distribuição Exponencial Monoparamétrica

A função de confiabilidade para a distribuição exponencial $\tilde{\theta}$ é estimada por:

$$\hat{C}(t; \theta) = \exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}}\right) . \quad (3.3.a)$$

O estimador de $\hat{\theta}$ é dado por (3.2.1.f) e (3.2.2.b) para a censura do tipo II, sem reposição e com reposição, respectivamente.

O estimador de $\hat{C}(t;\theta)$ de (3.3.a) não é imparcial e isto é válido para qualquer tipo de censura.

PUGH (1963) e BASU (1964) fornecem um estimador imparcial de mínima variância para $C(t;\theta)$ quando a censura é do tipo II:

$$\hat{C}(t;\theta) = \left(1 - \frac{t}{r\hat{\theta}}\right)^{r-1}; \quad r > 1 \quad . \quad (3.3.b)$$

ZACKS e EVEN (1966) verificam que se $\frac{t}{r\hat{\theta}}$ é próximo de zero, então o estimador de máxima verossimilhança possui menor erro quadrático comparado com o estimador de mínima variância.

O viés não terá muita importância em termos práticos, exceto quando as estimativas de $C(t;\theta)$ são multiplicadas para determinar a confiabilidade do sistema.

O intervalo de confiança para $C(t;\theta)$ é dado por:

$$P \left[\exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}_I}\right) \leq C(t;\theta) \leq \exp\left(-\frac{t}{\hat{\theta}_S}\right) \right] = 1 - \alpha \quad . \quad (3.3.c)$$

Supondo-se censura tipo II, (3.3.c) ficará:

$$P \left[\exp\left(\frac{-t \chi_{2r, \alpha/2}^2}{2r\hat{\theta}}\right) \leq C(t;\theta) \leq \exp\left(\frac{-t \chi_{2r, 1-\alpha/2}^2}{2r\hat{\theta}}\right) \right] = 1 - \alpha \quad . \quad (3.3.d)$$

Se a censura for do tipo I, e o teste for com reposição (3.3.c), ficará:

$$P \left[\exp\left(\frac{-t \chi_{2r+2, \alpha/2}^2}{2r\hat{\theta}}\right) \leq C(t;\theta) \leq \exp\left(\frac{-t \chi_{2r, 1-\alpha/2}^2}{2r\hat{\theta}}\right) \right] = 1 - \alpha \quad . \quad (3.3.e)$$

Em algumas situações, pode-se estar interessado no tempo que uma certa proporção da população sobrevive. Seja $\underline{p}$ a proporção que falha até o instante t_p , daí:

$$C(t_p; \theta) = 1 - p \quad , \quad (3.3.f)$$

mas,

$$C(t_p; \theta) = \exp\left(-\frac{t_p}{\theta}\right) \quad . \quad (3.3.g)$$

De (3.3.f) e (3.3.g), tem-se:

$$t_p = \theta \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \quad . \quad (3.3.h)$$

Uma estimativa é dada por:

$$\hat{t}_p = \hat{\theta} \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \quad . \quad (3.3.i)$$

3.4 Estimação para a Distribuição Exponencial Biparamétrica

Em algumas situações, a distribuição exponencial biparamétrica é o modelo apropriado. Por exemplo, um período de garantia pode ser olhado como o período sem falhas do ponto de vista do cliente. Também, no estudo da fadiga de alguns metais, sabe-se que existe um período durante o qual não ocorrem falhas.

A função de densidade é dada em (3.1.a). A função de verossimilhança para censura tipo II, quando o teste é sem reposição, ficará:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta, \delta) =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\theta^r} \exp \left\{ \frac{- \left[\sum_{i=1}^r (t_{i,n} - \delta) + (n-r)(t_{r,n} - \delta) \right]}{\theta} \right\} .$$

$$\delta \leq t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} . \quad (3.4.a)$$

Tomando-se o logaritmo natural, (3.4.a) é igual a:

$$= \ln \frac{n!}{(n-r)!} - r \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^r (t_{i,n} - \delta) + (n-r)(t_{r,n} - \delta)}{\theta} . \quad (3.4.b)$$

Derivando-se em relação a θ e igualando-se a zero, tem-se:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r (t_{i,n} - \delta) + (n-r)(t_{r,n} - \delta)}{r} ; \quad r > 0 . \quad (3.4.c)$$

Observando-se que $\ln L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta, \delta)$ é uma função monotônica crescente em δ e $\delta \leq t_{1,n}$, conclui-se que:

$$\hat{\delta} = t_{1,n} . \quad (3.4.d)$$

Como $t_{1,n}$ é a menor estatística de ordem, em uma amostra de tamanho n , a função de densidade de $T_{1,n}$ é:

$$g(t_{1,n}; \theta, \delta) = n [1 - F(t_{1,n})]^{n-1} f(t_{1,n}) .$$

$$= \frac{n}{\theta} \exp \left[\frac{-n(t_{1,n} - \delta)}{\theta} \right] ; \quad I_{[\delta, \infty)}(t_{1,n}) . \quad (3.4.e)$$

O valor esperado de $T_{1,n}$ é:

$$E(T_{1,n}) = \delta + \frac{\theta}{n} . \quad (3.4.f)$$

Do numerador de (3.4.c), substituindo δ por $t_{1,n}$, tem-se:

$$V = \sum_{i=2}^r (t_{i,n} - t_{1,n}) + (n-r)(t_{r,n} - t_{1,n}) . \quad (3.4.g)$$

Utilizando-se um procedimento semelhante ao caso de vida mínima zero, pode-se definir:

$$T(t_{i,n} - t_{i-1,n}) = w_{i,n} = (n - i + 1)(t_{i,n} - t_{i-1,n}) ; \quad t_0 = \delta . \quad (3.4.h)$$

Então (3.4.b), pode ser reescrita como:

$$L(w_{1,n}, w_{2,n}, \dots, w_{r,n}; \theta) = \frac{1}{\theta^r} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^r w_{i,n}}{\theta}\right) . \quad (3.4.i)$$

O jacobiano dessa transformação será igual a:

$$\frac{(n-r)!}{r!} .$$

A distribuição marginal para $i = 1, 2, \dots, r$ é:

$$g(w_{i,n}; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{w_{i,n}}{\theta}\right); \quad I_{[0, \infty)}(w_i), \quad \theta > 0 . \quad (3.4.j)$$

A expressão (3.4.g), devido a (3.4.h), torna-se:

$$V = \sum_{i=1}^r w_{i,n} , \quad (3.4.k)$$

onde $2v/\theta$ possui distribuição de qui-quadrado com $2r-2$ graus de liberdade. Portanto,

$$E\left(\frac{2V}{\theta}\right) = 2r-2 \quad ,$$

ou

$$E(V) = \theta(r-1) \quad . \quad (3.4.l)$$

Os estimadores imparciais para θ e δ são:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=2}^r (t_{i,n} - t_{1,n}) + (n-r)(t_{r,n} - t_{1,n})}{r-1} ; \quad r > 1 \quad .$$

$$\tilde{\delta} = t_{1,n} - \frac{\hat{\theta}}{n} \quad , \quad (3.4.m)$$

A função de confiabilidade $\bar{e}$ é estimada por:

$$\hat{C}(t; \tilde{\theta}, \tilde{\delta}) = \exp \left[\frac{-(t - \tilde{\delta})}{\tilde{\theta}} \right] I_{[\tilde{\delta}, \infty)}(t) \quad . \quad (3.4.n)$$

Para determinar o intervalo de confiança para δ , deve-se usar o fato de que $\frac{2n(T_{1,n} - \delta)}{\theta}$ e $\frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\theta}$ são independentes e tendo, ainda, cada uma distribuição de qui-quadrado com 2 e $2(r-1)$ graus de liberdade respectivamente. A razão $w = \frac{n(T_1 - \delta)}{\tilde{\theta}}$ possui distribuição F com 2 e $2(r-1)$ graus de liberdade respectivamente. O limite de confiança inferior para a vida mínima é:

$$P\left(\delta > t_{1,n} - \frac{\tilde{\theta}}{n} F_{2, 2r-2, 1-\alpha}\right) = 1 - \alpha \quad , \quad (3.4.o)$$

Um limite de confiança superior para a vida mínima é dado pela menor estatística de ordem, isto é, $t_{1,n}$.

Como $\frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\theta}$ apresenta distribuição de qui-quadrado com $2(r-1)$ graus de liberdade, o intervalo de confiança ficará:

$$P \left[\frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\chi^2_{2r-2, \alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2(r-1)\tilde{\theta}}{\chi^2_{2r-2, 1-\alpha/2}} \right] = 1 - \alpha . \quad (3.4.p)$$

Para a censura tipo II, com reposição a função de verossimilhança ficará:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta, \delta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp \left[\frac{-n(t_{r,n} - t_{1,n})}{\theta} \right],$$

$$\delta \leq t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} . \quad (3.4.q)$$

Para obter-se os estimadores de máxima verossimilhança, deve-se tomar o logaritmo natural da expressão (3.4.q), derivar em relação $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$ e igualar a zero. Assim, tem-se:

$$\hat{\delta} = t_{1,n} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \frac{n(t_{r,n} - t_{1,n})}{r} ; \quad r > 0 . \quad (3.4.r)$$

Os estimadores imparciais e de mínima variância são:

$$\tilde{\theta} = \frac{n(t_{r,n} - t_{1,n})}{r-1} ; \quad r > 1 \quad \text{e} \quad \tilde{\delta} = \hat{\delta} - \frac{\hat{\theta}}{n} . \quad (3.4.s)$$

Analogamente ao caso sem reposição, pode-se obter o intervalo de confiança para $\underline{\delta}$ e para $\underline{\theta}$.

Se $T_{i,n}$; $i = 1, 2, \dots, r$ são as r primeiras estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho n , proveniente de uma população com distribuição exponencial biparamétrica, então uma translação do tipo

$T_{i,n-1} = T_{i+1,n} - T_{1,n}$; $i = 1, 2, \dots, r-1$, resulta em $r-1$ estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho $n-1$. O parâmetro δ desconhecido é eliminado e as estatísticas de ordem transladadas possuem distribuição exponencial monoparamétrica.

Os resultados discutidos em 3.2.1 e 3.2.2 podem ser aplicados a $T_{i,n-1}$ $i = 1, 2, \dots, r-1$; desde que $\underline{n}$ e $\underline{r}$ sejam substituídos por $n-1$ e $r-1$ respectivamente.

Para a censura tipo I, sem reposição, a função de verossimilhança ficará:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta, \delta) = \frac{n!}{(n-r)! \theta^r} \exp \left\{ \frac{- \left[\sum_{i=1}^r (t_{i,n} - \delta) + (n-r)(t^* - \delta) \right]}{\theta} \right\},$$

$$\delta < t_{1,n} \leq t_{2,n} \leq \dots \leq t_{r,n} < t^* \quad (3.4.t)$$

Para obter-se os estimadores de máxima verossimilhança, deve-se tomar o logaritmo natural da expressão (3.4.t), derivar em relação a $\hat{\delta}$ e $\hat{\theta}$ e igualar a zero. Assim tem-se:

$$\hat{\delta} = t_{1,n} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=2}^r (t_{i,n} - t_{1,n}) + (n-r)(t^* - t_{1,n})}{r} \quad r > 0 \quad (3.4.u)$$

Como as estatísticas de ordem transladadas

$$T_{i,n-1} = T_{i+1,n} - T_{1,n}; \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

possuem distribuição exponencial monoparamétrica, pode-se utilizar os resultados discutidos em 3.2.3, desde que $\underline{r}$, $\underline{t}^*$ e $\underline{n}$ sejam substituídos

por $r-1$, $t^* - t_{1,n}$ e $n-1$ respectivamente.

Quando o teste for com reposição, a função de verossimilhança ficará:

$$L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta, \delta) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp \left[\frac{-n(t^* - \delta)}{\theta} \right],$$

$$\delta < t_{1,n} \leq \dots \leq t_{r,n} < t^*. \quad (3.4.v)$$

Tomando-se o logaritmo natural da expressão (3.4.v), derivando-se em relação a $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$, igualando-se a zero, obtêm-se os estimadores de máxima verossimilhança para $\underline{\delta}$ e $\underline{\theta}$ que são respectivamente:

$$\hat{\delta} = t_{1,n} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} = \frac{n(t^* - t_{1,n})}{r}; \quad r > 0. \quad (3.4.x)$$

Considerando-se novamente as estatísticas de ordem transladadas, podem-se utilizar os resultados discutidos em 3.2.4, desde que $\underline{r}$ e $\underline{t}^*$ sejam substituídos por $r-1$ e $t^* - t_{1,n}$.

3.5 - Testes de Hipóteses

Na área da inferência estatística, denominada Testes de Hipóteses, usar-se-á o símbolo H_0 para indicar a hipótese de nulidade e o símbolo H_1 para indicar a hipótese alternativa. Seja $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ uma amostra aleatória, retirada da população, com função de densidade $f(t; \theta)$; $\theta \in \Omega$, Ω é denominado espaço do parâmetro. Pode-se, assim, formular uma hipótese estatística de que o verdadeiro valor do parâmetro $\underline{\theta}$ pertence a

um subconjunto do espaço paramétrico Ω_0 versus a hipótese alternativa de que θ pertence a Ω_1 . Geralmente $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$; Ω_0 e Ω_1 são disjuntos, mas não é necessário que sejam complementares. A hipótese é denominada simples, se especifica completamente a distribuição; será composta, se não especificá-la completamente.

Em Teste de Hipótese, podem-se cometer dois tipos de erros. O erro tipo I ocorre, quando se rejeita H_0 e H_0 é verdadeira. O erro tipo II ocorre, quando se aceita H_0 e H_0 é falsa.

O esquema básico de Teste de Hipótese é retirar uma amostra aleatória $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ da população em que se está interessado e calcular a estatística teste:

$$T = T(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad .$$

Se a estatística T cair em alguma região crítica C pré-determinada, rejeita-se a hipótese H_0 .

A função poder do teste, representada por $\beta(\theta)$ é:

$$\beta(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \theta) = P(T \in C) \quad . \quad (3.5.a)$$

A probabilidade do erro tipo I é dada por:

$$\alpha = P(H_1 \mid H_0) = \beta(\theta); \quad \theta = \theta_0 \quad , \quad (3.5.b)$$

e a probabilidade do erro tipo II é dada por:

$$\beta = P(H_0 \mid H_1) = 1 - \beta(\theta); \quad \theta = \theta_1 \quad . \quad (3.5.c)$$

O tamanho do teste (ou da região crítica) é o

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} \beta(\theta).$$

Muitos estatísticos usam o termo nível de significância.

Quando a hipótese de nulidade, bem como a hipótese alternativa são simples, o Lema de Neyman-Pearson dá-nos um método de encontrar a melhor região crítica de tamanho α .

Se existe uma região crítica C , de tamanho α e uma constante k , tal que:

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_0)} \geq k, \quad \text{para todos os pontos de } C,$$

e

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_0)} < k, \quad \text{para todos os pontos que não pertencem a } C,$$

(3.5.d)

então C é a região crítica mais poderosa de tamanho α , tem-se então, um teste mais poderoso.

Entretanto, em muitos problemas, a hipótese H_0 ou H_1 é composta; isto é, $H_0: \theta \in \Omega_0$ versus a hipótese alternativa $H_1: \theta \in \Omega - \Omega_0$. A região crítica C , tem tamanho menor ou igual a α para todo $\theta \in \Omega_0$. Tal região crítica pode ser a mais poderosa para algum θ , na alternativa $\Omega - \Omega_0$, e pode não ser mais poderosa para outros valores. Se C é a mais poderosa para todo $\theta \in \Omega - \Omega_0$, então C é denominada a região crítica uniformemente mais poderosa.

É possível determinar um teste uniformemente mais poderoso, quando os testes são do tipo $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$ ou $H_0: \theta > \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$.

Para encontrar as regiões críticas, consideram-se que as variáveis aleatórias $T_1, T_2, \dots, T_n$ são independentes e identicamente distribuídas com função densidade, $f(t; \theta)$. Supondo-se que $f(t_1, t_2, \dots; \theta)$ pode ser escrita como:

$$f(t_1, t_2, \dots; \theta) = A(\theta) \exp [Q(\theta) T(t_1, t_2, \dots, t_n)] \cdot h(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad , \quad (3.5.e)$$

onde $Q(\theta)$ se supõe que seja uma função monotônica estritamente decrescente e $\theta \in \Omega$. A classe de densidade que satisfaz às condições de (3.5.e) é denominada "família" exponencial de densidades.

Quando $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$, um teste, uniformemente mais poderoso de tamanho α , é rejeitar H_0 , se $T(t_1, t_2, \dots, t_n) > C$, onde C é tal que $P [T(t_1, t_2, \dots, t_n) > C] = \alpha$. Quando $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$, um teste uniformemente mais poderoso de tamanho α é rejeitar H_0 , se $T(t_1, \dots, t_n) < C$, onde: $P [T(t_1, t_2, \dots, t_n) < C] = \alpha$.

Quando se quer testar $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta \neq \theta_0$, um teste mais poderoso imparcial de tamanho α , é rejeitar H_0 se $T(t_1, t_2, \dots, t_n) < C_1$ ou $T(t_1, t_2, \dots, t_n) > C_2$, onde C_1 e C_2 são tais que $P [C_1 \leq T(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq C_2] = 1 - \alpha$.

3.5.1 Censura do Tipo II

A fim de determinar a região crítica, para o teste

$H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_1 < \theta_0$) utiliza-se a expressão que foi dada por (3.5.d), tem-se então:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta_1)}{L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta_0)} > k \quad \theta_1 < \theta_0 \quad (3.5.1.a)$$

Quando o teste for sem reposição, a função de verossimilhança ficará:

$$\begin{aligned} L(t_{1,n}, t_{2,n}, \dots, t_{r,n}; \theta_i) &= \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{1}{\theta_i}\right)^r \exp \left\{ - \frac{\left[\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n} \right]}{\theta_i} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.1.b)$$

Substituindo (3.5.1.b) em (3.5.1.a), tem-se

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^r t_{i,n} + (n-r)t_{r,n} \right] \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right\}$$

ou:

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^r \exp \left[-r\hat{\theta} \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} \right) \right] > k, \quad (3.5.1.c)$$

onde $\hat{\theta}$ foi dado por (3.2.1.e).

Como $\theta_1 < \theta_0$, então $\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0} > 0$. O lado esquerdo da desigualdade (3.5.1.c) decresce, quando $\hat{\theta}$ cresce, portanto a região de rejeição da hipótese H_0 é da forma $\hat{\theta} < C$.

Para calcular C , deve-se lembrar que $\frac{2r\hat{\theta}}{\theta}$ possui distribuição qui-quadrado com $2r$ graus de liberdade. Então,

$$\hat{\theta} = \theta \frac{\chi_{2r}^2}{2r} \quad (3.5.1.d)$$

Tem-se então, que:

$$P(\hat{\theta} \geq C \mid \theta = \theta_0) = 1 - \alpha \quad ,$$

ou:

$$P\left(\frac{\theta_0 \chi_{2r}^2}{2r} \geq C\right) = 1 - \alpha \quad , \quad (3.5.1.e)$$

do que resulta:

$$P(\chi_{2r}^2 \geq \frac{2rC}{\theta_0}) = 1 - \alpha \quad . \quad (3.5.1.f)$$

Portanto: $\frac{2rC}{\theta_0} = \chi_{2r, 1-\alpha}^2$, então:

$$C = \frac{\theta_0 \chi_{2r, 1-\alpha}^2}{2r} \quad . \quad (3.5.1.g)$$

A tabela 1 do Apêndice fornece os valores C/θ_0 para fazer o teste $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$. Por exemplo se $\theta_0 = 1000$; $\alpha = 0,05$ e $r=6$, a região de rejeição da hipótese H_0 é $\hat{\theta} < \theta_0 \left(\frac{C}{\theta_0}\right)$. Da tabela 1 do Apêndice tem-se, para estes dados, que $\frac{C}{\theta_0} = 0,436$; como $\theta_0 = 1000$ a hipótese H_0 é rejeitada, se $\hat{\theta} < 1000 \cdot 0,436$ ou $\hat{\theta} < 436$ ao nível de significância $\alpha = 0,05$.

A região de aceitação da hipótese H_0 é:

$$\hat{\theta} \geq \frac{\theta_0 \chi_{2r, 1-\alpha}^2}{2r} \quad , \quad (3.5.1.h)$$

A quantidade $P_a(\theta)$ que é $1 - \beta(\theta)$ pode ser obtida:

$$P_a(\theta) = P\left(\hat{\theta} \geq \frac{\theta_0 \chi_{2r, 1-\alpha}^2}{2r} \mid \theta\right) \quad . \quad (3.5.1.i)$$

Daí, ter-se-á:

$$P_a(\theta) = P\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\theta} \geq \frac{\theta_o}{\theta} \chi^2_{2r, 1-\alpha} \mid \theta\right) = P\left(\chi^2_{2r} \geq \frac{\theta_o}{\theta} \chi^2_{2r, 1-\alpha} \mid \theta\right) . \quad (3.5.1.j)$$

Esta probabilidade é função do parâmetro θ e do número de falhas r , podendo assim ser calculada para diferentes valores de θ e r . Representando-se estes resultados em um gráfico, obtêm-se uma curva que é denominada curva característica de operação.

Através das curvas características, pode-se calcular a probabilidade de aceitar a hipótese H_o para valores pré-fixados de θ_o e θ_1 . Tais curvas, para esta situação, serão fornecidas no Apêndice.

Quando o teste é formulado como $H_o: \theta \leq \theta_o$ e $H_1: \theta > \theta_o$, a um nível de significância α , a probabilidade de aceitar a hipótese H_o é:

$$P\left(\frac{2r\hat{\theta}}{\theta} \leq \chi^2_{2r, \alpha} \mid \theta = \theta_o\right) = 1 - \alpha . \quad (3.5.1.k)$$

A região de aceitação é:

$$\hat{\theta} \leq \frac{\theta_o \chi^2_{2r, \alpha}}{2r} , \quad (3.5.1.l)$$

e a de rejeição é $\hat{\theta} > C$, onde C é:

$$C = \frac{\theta_o \chi^2_{2r, \alpha}}{2r} . \quad (3.5.1.m)$$

A tabela 2 do Apêndice fornece os valores $\frac{C}{\theta_o}$ para fazer o teste $H_o: \theta \leq \theta_o$ versus $H_1: \theta > \theta_o$ por exemplo, se $\theta_o = 500$, $r = 5$ e $\alpha = 0,10$; a região de rejeição da hipótese H_o é dada por :

$$\hat{\theta} > \theta_o \left(\frac{C}{\theta_o}\right) .$$

Da tabela 2 tem-se, para estes dados, que $\frac{C}{\theta_0} = 1,599$; como $\theta_0 = 500$, a hipótese H_0 será rejeitada, se $\hat{\theta} > 799,5$ ao nível de significância $\alpha = 0,10$.

A curva característica de operação para o teste $\tilde{e}$ obtida de:

$$P_a(\theta) = P(\chi_{2r,\alpha}^2 \leq \frac{\theta_0}{\theta} \chi_{2r,\alpha}^2 \mid \theta) . \quad (3.5.1.n)$$

Algumas curvas para essa situação serão fornecidas no Apêndice.

Pode-se verificar de (3.5.1.i) e de (3.5.1.m) que a curva característica de operação depende somente de $\underline{r}$ e não de $\underline{n}$.

Para um conjunto fixado $(\theta_0, \theta_1, \alpha, \beta)$ pode-se calcular $\underline{r}$, digamos r_0 e C . Por exemplo, para o teste $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_1$, procura-se o menor valor de $\underline{r}$, tal que:

$$P(\hat{\theta} \geq C \mid \theta = \theta_0) = 1 - \alpha ,$$

$$P(\hat{\theta} \geq C \mid \theta = \theta_1) = \beta .$$

De (3.5.1.j) tem-se:

$$\frac{\chi_{2r,1-\alpha}^2}{\chi_{2r,\beta}^2} = \frac{\theta_1}{\theta_0} ,$$

e deve-se obter o menor $\underline{r}$, tal que:

$$\frac{\chi_{2r,1-\alpha}^2}{\chi_{2r,\beta}^2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_0} . \quad (3.5.1.o)$$

A tabela 3 do Apêndice fornece

$$\frac{\chi_{2r_o, 1-\alpha}^2}{\chi_{2r_o, \beta}^2} ,$$

para alguns valores de α e β . Através da mesma pode-se determinar o número de falhas que se deve observar no teste. Por exemplo, se $H_0: \theta = 1000$ e $H_1: \theta = 250$, adotando-se $\alpha = 0,05$ e $\beta = 0,10$ da tabela 3, obtém-se $r = 6$, pois $0,282 \geq \frac{250}{1000}$; $0,282 \geq 0,250$. Calcula-se β' de (3.5.1.j), tomando-se $\theta = \theta_1$

$$\beta' = P_a(\theta_1) = P(\chi_{2r}^2 \geq \frac{\theta}{\theta_1} \chi_{2r, 1-\alpha}^2) = P(\chi_{12}^2 \geq 20,92) \approx 0,05$$

podem-se verificar que $\alpha = 0,05$, mas $\beta \leq 0,10$.

Para o teste $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$ pode-se também encontrar o menor valor de $\underline{r}$, tal que:

$$P(\hat{\theta} \leq c \mid \theta = \theta_0) = \alpha ,$$

$$P(\hat{\theta} \leq c \mid \theta = \theta_1) = 1 - \beta .$$

De (3.5.1.n) tem-se:

$$\frac{\chi_{2r_o, \alpha}^2}{\chi_{2r_o, 1-\beta}^2} = \frac{\theta_1}{\theta_0} .$$

Deve-se procurar o valor de $\underline{r}$, tal que:

$$\frac{\chi_{2r_o, \alpha}^2}{\chi_{2r_o, 1-\beta}^2} \geq \frac{\theta_1}{\theta_0} . \quad (3.5.1.p)$$

A tabela 4 do Apêndice fornece

$$\frac{\chi^2_{2r_o, \alpha}}{\chi^2_{2r_o, 1-\beta}},$$

para alguns valores de α e β . Através desta tabela, pode-se determinar o menor valor de falhas que se deve observar no teste.

Em ambos os casos, seleccionou-se o menor r_o que forneça α exato, com $\beta' \leq \beta$.

Quando o teste é com reposição, o procedimento é análogo. O estimador de θ é obtido da expressão dada em (3.2.2.b).

GRUBBS (1973), para obter uma solução analítica de

$$\frac{\chi^2_{2r_o, \alpha}}{\chi^2_{2r_o, 1-\beta}} = \frac{\theta_1}{\theta_o},$$

aproxima a distribuição de qui-quadrado pela distribuição normal, tal como:

$$\frac{\theta_1}{\theta_o} = \frac{v \left[1 - \frac{2}{9v} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9v}} \right]^3}{v \left[1 - \frac{2}{9v} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{2}{9v}} \right]^3}, \quad \text{onde } v = 2r,$$

Se $(\theta_o, \theta_1, \alpha, \beta)$ são fixados, pode-se calcular r . Tem-se, então:

$$r = \frac{4(\delta - 1)^2}{9 \left[\delta z_\alpha - z_{1-\beta} + \sqrt{(\delta z_\alpha - z_{1-\beta})^2 + 4(\delta - 1)^2} \right]^2} = \frac{4}{9 \left[\sqrt{\lambda^2 + 4} - \lambda \right]^2},$$

onde

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{\theta_o}{\theta}} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{z_{1-\beta} - \delta z_\alpha}{\delta - 1}. \quad (3.5.1.q)$$

Na tabela 5, enumera-se as estatísticas usadas e as regiões críticas para os testes relativos à média quando a distribuição é exponencial monoparamétrica.

Para a distribuição exponencial biparamétrica estes resultados podem ser aplicados desde que $\underline{n}$ e $\underline{r}$ sejam substituídos por $n-1$ e $r-1$, respectivamente.

Como já se mencionou, a curva característica de operação depende somente de $\underline{r}$ e não de $\underline{n}$. Isto significa que a mesma precisão é obtida, sejam somente $\underline{r}$ unidades testadas até falharem ou sejam $\underline{n}$ unidades colocadas no teste, e o teste termina após a $\underline{r}$ -ésima falha.

Surge, neste ponto, uma questão lógica: por que colocar-se mais que $\underline{r}$ unidades no teste? A resposta está na economia do tempo de teste.

Para analisar esta afirmação, deve-se calcular o tempo médio esperado para a execução do teste, que é representado por $E(T_{r,n})$. A expressão

$$E(T_{r,n}) = \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n-1} + \dots + \frac{\theta}{n-r+1} = \theta \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1} ,$$

fornece o tempo médio esperado.

Para se encontrar esta fórmula, deve-se lembrar (3.2.1)

$$T_{r,n} = \sum_{i=1}^r Y_{i,n} \text{ onde } Y_i = T_{i,n} - T_{i-1,n} ; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad t_0 = 0$$

(3.5.1.r)

As variáveis aleatórias $Y_{i,n}$ são independentes e cada $Y_{i,n}$ tem função de densidade dada por:

$$f(y_{i,n}; \theta) = \frac{(n-i+1)}{\theta} \exp \left[\frac{-(n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right]; \quad I_{[0, \infty)}(y_{i,n}); \quad \theta > 0 \quad (3.5.1.s)$$

Pode-se calcular o valor esperado da variável aleatória $Y_{i,n}$; assim tem-se:

$$E(Y_{i,n}) = \frac{(n-i+1)}{\theta} \int_0^{\infty} y_{i,n} \exp \left[\frac{-(n-i+1)y_{i,n}}{\theta} \right] dy_{i,n} ,$$

obtem-se

$$E(Y_{i,n}) = \frac{\theta}{n-i+1} . \quad (3.5.1.t)$$

Assim o tempo médio esperado para a execução do teste é:

$$E(T_{r,n}) = E\left(\sum_{i=1}^r Y_{i,n}\right) = \sum_{i=1}^r E(Y_{i,n}) = \theta \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1} , \quad (3.5.1.u)$$

Pode-se, então, verificar que $E(T_{r,n})$ decresce, quando $\underline{n}$ cresce.

A variância da expressão (3.5.1.r) é dada por:

$$V(T_{r,n}) = \theta^2 \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{n-i+1}\right)^2 . \quad (3.5.1.v)$$

A tabela 6 do Apêndice fornece $\left(\frac{1}{\theta_0}\right)E(T_{r,n})$ para vários valores de $\underline{r}$ e $\underline{n}$.

Por exemplo, se $n = 20$ e $r = 10$, o tempo médio esperado para a execução do teste é $0,6688 \theta$.

A economia do tempo de duração do teste pode ser obtida, considerando-se a razão

$$E_f = \frac{E(T_{r,n})}{E(T_{r,r})},$$

onde $E(T_{r,r})$ é o tempo médio esperado do teste, quando $n = r$ unidades, nele são colocadas, observando-se todas as falhas. Neste caso, tem-se

$$E(T_{r,r}) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{r-i+1} \quad (3.5.1.x)$$

Pode-se calcular E_f de (3.5.1.v) e (3.5.1.x), tendo-se

$$E_f = \frac{E(T_{r,n})}{E(T_{r,r})} = \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{r-i+1}} \quad (3.5.1.y)$$

A tabela 7 do Apêndice fornece os valores de E_f para alguns valores de r e n ; por exemplo, se $n = 20$ e $r = 4$ e o teste é sem reposição, tem-se uma economia de tempo de $0,104$, isto é, o teste terá apenas 10% da duração daquele em que quatro unidades são colocadas no teste e todas são mantidas até falharem.

Por outro lado, quando a censura é do tipo II com reposição, o tempo médio esperado é dado por:

$$E(T_{r,n}) = \frac{r\theta}{n} \quad (3.5.1.w)$$

visto que,

$$T_{r,n} = T_{1,n} + (T_{2,n} - T_{1,n}) + \dots + (T_{r,n} - T_{r-1,n})$$

$$\begin{aligned} E(T_{r,n}) &= E(T_{1,n}) + E(T_{2,n} - T_{1,n}) + \dots + E(T_{r,n} - T_{r-1,n}) \\ &= \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n} + \dots + \frac{\theta}{n} = \frac{r\theta}{n} \end{aligned}$$

Desta forma, a economia de tempo será dada por:

$$E_f = \frac{E(T_{r,n})}{E(T_{r,r})} = \frac{\frac{r\theta}{n}}{\theta} = \frac{r}{n} \quad (3.5.1.z)$$

3.5.2 - Censura do Tipo I

No caso da censura do Tipo I, a duração do teste é especificada para algum tempo $\underline{t}^*$. Neste caso, o número de falhas é uma variável aleatória e iremos supor, inicialmente, que a amostragem é sem reposição.

Um teste do tipo $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$ é equivalente a $H_0: p \leq p_0$ versus $H_1: p > p_0$, onde $\underline{p}$ é a probabilidade de que uma unidade falhe no intervalo de $[0, \underline{t}^*]$. A probabilidade $\underline{p}$ é dada por:

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{\underline{t}^*}{\theta}\right) \quad (3.5.2.a)$$

sendo $\underline{p}$ é o parâmetro de uma distribuição binomial.

Pode-se definir uma variável aleatória Y , que assume os valores um ou zero, isto é, Y assume o valor um, se a unidade falhar até $\underline{t}^*$, e zero, se a unidade não falhar até $\underline{t}^*$.

A fim de determinar a região crítica, utiliza-se a expressão dada em (3.5.d). Tem-se, então:

$$\frac{L(y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{r,n}; p_1)}{L(y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{r,n}; p_0)} = \frac{p_1^{\sum y_i} (1-p_1)^{n-\sum y_i}}{p_0^{\sum y_i} (1-p_0)^{n-\sum y_i}} \geq k, \quad (3.5.2.b)$$

como $p_0 < p_1$; $\frac{L_1}{L_0} \geq k$ se $X = \sum y_i \geq C$.

$$C = \frac{\log k - n \log \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}} = r_0, \quad (3.5.2.c)$$

o valor de $\underline{p}$ é obtido de (3.5.2.a).

A região crítica pode ser obtida, resolvendo-se a equação:

$$1 - P(X \leq r_0 - 1 \mid p=p_0) = 1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \leq \alpha. \quad (3.5.2.d)$$

Se o número de falhas é menor que r_0 , aceita-se a hipótese H_0 , caso contrário rejeita-se H_0 .

Analogamente, podem-se determinar as regiões críticas para outros tipos de testes. Na Tabela 8 do Apêndice fornecem-se as estatísticas e as regiões críticas para os mesmos, quando a distribuição é exponencial monoparamétrica. Para a distribuição exponencial biparamétrica estes resultados podem ser aplicados, desde que $\underline{n}$, $\underline{r}$ e $\underline{t}^*$ sejam substituídos por $n-1$, r_0-1 e $t^*-t_{1,n}$, respectivamente.

Para se obter o número médio de unidades necessárias, a fim de se tomar uma decisão, deve-se calcular $E(X)$, donde:

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} ; \quad I_{\{0,1,2,\dots,n\}}(x) , \quad (3.5.2.e)$$

ou:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{r_0-1} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + \sum_{x=r_0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} , \quad (3.5.2.f)$$

mas,

$$x \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! (x-1)!} = n \binom{n-1}{x-1} ,$$

Substituindo (3.5.2.f) em (3.5.2.e) ter-se-á:

$$E(X) = np \left[\binom{n-1}{0} (1-p)^{n-1} + \binom{n-1}{1} p (1-p)^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{r_0-2} p^{r_0-2} (1-p)^{n-r_0+1} \right] + r_0 \left[1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right] ,$$

ou:

$$E(X) = np \left[\sum_{x=0}^{r_0-2} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right] + r_0 \left[1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right] . \quad (3.5.2.g)$$

A fim de se determinar o tempo médio esperado para tomar uma decisão, deve-se calcular:

$$E(T_{r,n}) = \sum_{x=0}^{r_0} P(X=x) E(T_{x,n}) , \quad (3.5.2.h)$$

onde

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} ; \quad I_{\{0,1,2,\dots,r_0\}}(x) .$$

e

$$E(T_{x,n}) = \theta \sum_{i=1}^x \frac{1}{n-i+1}$$

Para analisar-se o caso de censura tipo I com reposição supõe-se o teste $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$. A região crítica é, neste caso, obtida de forma análoga à amostragem sem reposição.

$$X = \sum y_i \geq r_0 \quad .$$

A curva característica de operação para o teste é dada por:

$$P_a(\theta) = P(X \leq r_0 - 1) = \sum_{x=0}^{r_0-1} P(X = x) \quad . \quad (3.5.2.i)$$

Como já foi visto em 3.2.4., o número de falhas possui distribuição de Poisson com parâmetro nt^*/θ .

Assim,

$$P(X=x) = \frac{\left(\frac{nt^*}{\theta}\right)^x \exp\left(-\frac{nt^*}{\theta}\right)}{x!} ; \quad I_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \quad , \quad (3.5.2.j)$$

Então, (3.5.2.i) ficará:

$$P_a(\theta) = P(X \leq r_0 - 1) = \sum_{x=0}^{r_0-1} \frac{\left(\frac{nt^*}{\theta}\right)^x \exp\left(-\frac{nt^*}{\theta}\right)}{x!} \quad . \quad (3.5.2.k)$$

Como já foi visto em 3.1 a distribuição de Poisson pode ser relacionada com a distribuição de qui-quadrado; é possível, então, obter

rem-se as regiões críticas para algumas hipóteses em função desta distribuição. A tabela 9 do Apêndice fornece as estatísticas e as regiões críticas para alguns testes, quando a distribuição é exponencial monoparamétrica.

Para a distribuição exponencial biparamétrica estes resultados podem ser aplicados desde que t^* e r_0 sejam substituídos por $t^* - t_{1,n}$ e $r_0 - 1$.

A fim de determinar o número médio de tentativas para tomar uma decisão, deve-se calcular $E(X)$, donde:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{r_0-1} xP(X=x) + r_0 \left[1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} P(X=x) \right]. \quad (3.5.2.l)$$

Substituindo (3.2.5.j) em (3.5.2.l) ter-se-á:

$$E(X) = \frac{nt^*}{\theta} \sum_{x=0}^{r_0-2} \left[\frac{\left(\frac{nt^*}{\theta}\right)^x \exp\left(-\frac{nt^*}{\theta}\right)}{x!} \right] + r_0 \left[1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \frac{\left(\frac{nt^*}{\theta}\right)^x \exp\left(-\frac{nt^*}{\theta}\right)}{x!} \right]. \quad (3.5.2.m)$$

Para obter-se o tempo médio esperado, a fim de tomar uma decisão, deve-se calcular:

$$E(T_{r,n}) = \frac{\theta}{n} E(X), \quad (3.5.2.n)$$

onde $E(X)$ é dado por (3.5.2.l).

3.5.3 Tamanho da Amostra

O custo esperado do experimento, quando a censura é do tipo II é dado por:

$$E(\text{custo}) = c_1^* E(T_{r,n}) + c_2^* k, \quad (3.5.3.a)$$

onde c_1^* é o custo de observação por unidade de tempo, c_2^* é o custo para colocar uma unidade no experimento e k é o número de unidades colocadas no experimento.

Se a amostragem é sem reposição (3.5.3.a) ficará:

$$E(\text{custo})_n = c_1^* \theta_0 \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1} + c_2^* n. \quad (3.5.3.b)$$

Pode-se calcular o tamanho da amostra, fixando c_1^* , c_2^* , r e variando n . O tamanho da amostra ótimo é aquele que minimiza o custo esperado do experimento.

De modo análogo, pode-se obter o tamanho ótimo da amostra. O custo esperado, quando se coloca $n-1$ unidades, é dado por:

$$E(\text{custo})_{n-1} = c_1^* \theta_0 \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i} + c_2^* (n-1). \quad (3.5.3.c)$$

A diferença das expressões (3.5.3.c) e (3.5.3.b) será:

$$E(\text{custo})_{n-1} - E(\text{custo})_n = c_1^* \theta_0 \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i} - \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1} \right) - c_2^*,$$

que é igual a:

$$c_1^* \theta_0 \frac{r}{n(n-r)} - c_2^*. \quad (3.5.3.d)$$

Fixando $\underline{r}$, c_1^* e c_2^* e variando $\underline{n}$ pode-se obter o tamanho ótimo da amostra. O valor de $\underline{n}$ que satisfaz esta condição é aquele que torna a expressão (3.5.3.d) menor ou igual a zero.

O valor de $\underline{n}$ que torna a expressão (3.5.3.d) nula é dado por:

$$n = 0,5r \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{c_1^*}{c_2^*} \frac{\theta_o}{r}} \right), \quad (3.5.3.e)$$

onde $\underline{n}$ é o menor inteiro contido.

Pode-se estimar $\underline{\theta}$, supondo $\underline{r}$ e especificando uma variância V . Como $V(\theta) = \theta^2/r$, então $\theta = \sqrt{V \cdot r}$; substituindo esta expressão em (3.5.3.e), tem-se:

$$n = 0,5r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c_1^*}{c_2^*} \sqrt{\frac{V}{r}}} \right). \quad (3.5.3.f)$$

Quando a amostragem é com reposição, a expressão (3.5.3.a) ficará:

$$E(\text{custo}) = c_1^* \frac{r\theta_o}{n} + c_2^* (n+r-1). \quad (3.5.3.g)$$

Analogamente ao caso anterior, pode-se calcular $\underline{n}$ fixando c_1^* , c_2^* , $\underline{r}$ e variar $\underline{n}$; o tamanho da amostra ótimo é aquele que minimiza o custo esperado.

Quando colocamos $(n-1)$ unidades, o custo médio esperado é fornecido por:

$$E(\text{custo})_{n-1} = \frac{c_1^* r\theta_o}{n-1} + c_2^* (n+r-2). \quad (3.5.3.h)$$

A diferença das expressões (3.5.3.h) e (3.5.3.g) será:

$$E(\text{custo})_{n-1} - E(\text{custo})_n = c_1^* r \theta_o \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - c_2^* \quad (3.5.3.i)$$

O valor de $\underline{n}$ que torna a expressão (3.5.3.i) nula é:

$$n = 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4c_1^*}{c_2^*} r \theta_o} \right) \quad (3.5.3.j)$$

onde $\underline{n}$ é o menor inteiro contido.

Para compararmos os custos esperados, no caso da amostragem ser com ou sem reposição, vamos definir:

$$n_{SR} = n_{CR} + r - 1 \quad (3.5.3.k)$$

O número n_{CR} não é necessariamente igual a n_{SR} .

Substituindo-se a expressão (3.5.3.k) na expressão (3.5.3.b), tem-se:

$$\begin{aligned} E(\text{custo})_{SR} &= c_1^* \theta_o \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_{SR} - i + 1} + c_2^* n_{SR} \quad , \\ &= c_1^* \theta_o \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_{CR} + r - i} + c_2^* (n_{CR} + r - 1) \quad (3.5.3.l) \end{aligned}$$

Das expressões (3.5.3.l) e (3.5.3.g) tem-se:

$$\frac{E(\text{custo})_{SR}}{c_2} \leq \frac{E(\text{custo})_{CR}}{c_2} \quad (3.5.3.m)$$

pois:

$$\frac{E(\text{custo})_{SR}}{c_2} = \frac{c_1^* \theta_o}{c_2^*} \left(\frac{1}{n_{CR} + r - 1} + \frac{1}{n_{CR} + r - 2} + \dots + \frac{1}{n_{CR}} \right) + (n_{CR} + r - 1) \quad (3.5.3.n)$$

$$\frac{E(\text{custo})_{CR}}{c_2} = \frac{c_1^* \theta r}{c_2^*} \cdot \frac{1}{n_{CR}} + (n_{CR} + r - 1) \quad . \quad (3.5.3.o)$$

Comparando-se a expressão (3.5.3.n) com a expressão (3.5.3.o), verifica-se (3.5.3.m). Portanto, o custo médio esperado sem reposição é menor ou igual ao custo esperado com reposição. Se $r = 1$, os custos esperados são iguais. Estes resultados foram obtidos por RILEY (1962) e BLIGHT (1972).

Quando a censura é do tipo I, há duas maneiras de calcular $\underline{n}$.

Assim, para um teste sem reposição, EPSTEIN (1954) apresenta uma fórmula aproximada para o tamanho da amostra obtida de $p = \frac{r_o}{n}$ onde $p = 1 - \exp(-\frac{t^*}{C})$. Tem-se então:

$$n = \frac{r_o}{1 - \exp(-\frac{t^*}{C})} \quad (3.5.3.p)$$

onde

$$C = \frac{\theta_o \chi_{2r_o, \alpha}^2}{2r_o} \quad .$$

Esta aproximação deve ser utilizada se θ_o/t^* é grande, por exemplo, $\theta_o/t^* > 3$.

Quando o teste é com reposição, o tamanho da amostra $\tilde{n}$, obtida de $\frac{2nt^*}{\theta} = \chi_{2r_o, \alpha}^2$, tem-se então:

$$\tilde{n} = \frac{\theta_o \chi_{2r_o, \alpha}^2}{2t^*} \quad . \quad (3.5.3.q)$$

3.6 Análise de Dados:

Na maioria de nossas explanações, admite-se que a variável em estudo tenha distribuição exponencial. Há vários testes que permitem verificar se a variável possui distribuição exponencial, o que se fará, a seguir, através de alguns testes.

3.6.1 Teste Qui-quadrado:

O teste qui-quadrado não se restringe apenas à distribuição exponencial. Para aplicá-lo deve-se estimar inicialmente, o parâmetro θ pelo método da máxima verossimilhança. Dividem-se os dados em k classes e estima-se o número de unidades que caem em cada classe, sob a hipótese de que o modelo é exponencial. O número de classes é escolhido como sendo o maior possível, sujeito à restrição de que o número esperado de unidades, em cada classe, seja ao menos cinco. Os limites das classes são escolhidos de modo que o número esperado de unidades em cada classe seja igual a:

$$\begin{aligned} P(T \leq t_1) &= \frac{1}{k} \quad , \\ P(T \leq t_2) &= \frac{2}{k} \quad , \\ &\dots\dots\dots (3.6.1.a) \\ P(T \leq t_{k-1}) &= \frac{k-1}{k} \quad , \\ P(T \leq t_k) &= \frac{1}{k} \quad . \end{aligned}$$

Como $P(T \leq t_i) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\theta}\right)$, $i=1,2,\dots,k$, pode-se assim obter os limites superiores das classes.

O número esperado é $e_i = \frac{n}{k}$ para todo i .

Deve-se, então, calcular a estatística:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} ,$$

Esta estatística deve ser comparada com $\chi^2_{k-2, \alpha}$, onde $\chi^2_{k-2, \alpha}$ é o valor crítico tabelado da distribuição de qui-quadrado. Se $\chi^2 > \chi^2_{k-2, \alpha}$, isto indica que o modelo exponencial é incorreto.

3.6.2 Teste para verificar se a Taxa de Falhas permanece constante:

Este teste permite detectar o crescimento ou a diminuição da taxa de falhas. Está ele baseado na estatística de Barthett's a qual estabelece que se S_i^2 ; $i = 1, 2, \dots, k$ são estimativas independentes da mesma variância, cada uma com n_i graus de liberdade. Assim,

$$\chi^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i} \right) - \frac{1}{n} \right]} n \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i S_i^2}{n} \right) - \sum_{i=1}^k n_i \ln S_i^2 , \quad (3.6.2.a)$$

onde $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

A expressão (3.6.2.a) possui distribuição de qui-quadrado com $k-1$ graus de liberdade.

Pois se $\frac{n_i S_i^2}{\sigma^2}$ possui distribuição de qui-quadrado com n_i graus de liberdade, então $\sum_{i=1}^k \frac{n_i S_i^2}{\sigma^2}$ possui distribuição de qui-quadrado

com $\underline{n}$ graus de liberdade.

Considerando-se que os tempos totais entre falhas $T(t_{1,n})$, $T(t_{2,n} - t_{1,n})$, ..., $T(t_{r,n} - t_{r-1,n})$ são independentes e que:

$$\frac{2 T(t_{1,n})}{\theta} \sim \chi_2^2 ,$$

$$\frac{2 T(t_{i,n} - t_{i-1,n})}{\theta} \sim \chi_2^2 , \quad i = 1, 2, \dots, r ,$$

$$\frac{2T(t_{r,n})}{\theta} \sim \chi_{2r}^2 . \quad (3.6.2.b)$$

onde $T_{i,n} = T(t_{i,n}) = t_{1,n} + t_{2,n} + \dots + (n-i+1)t_{i,n}$ e

$$T(t_{i,n} - t_{i-1,n}) = (n-i+1)(t_{i,n} - t_{i-1,n}).$$

Pode-se, assim, reescrever (3.6.2.a), usando-se o fato

que $n_i S_i^2$ e $T(t_{i,n} - t_{i-1,n})$ ambas possuem distribuição de qui-quadrado.

$$B_r = \frac{2r \left\{ \ln \frac{T(t_{r,n})}{r} - \frac{1}{r} \left[\ln T(t_{1,n}) + \ln T(t_{2,n} - t_{1,n}) + \dots + \ln T(t_{r,n} - t_{r-1,n}) \right] \right\}}{1 + \frac{(r+1)}{6r}} . \quad (3.6.2.c)$$

A estatística B_r possui distribuição aproximadamente qui-quadrado com $r-1$ graus de liberdade. Rejeita-se a validade da distribuição exponencial, se $B_r > \chi_{r-1,\alpha}^2$. O valor crítico $\chi_{r-1,\alpha}^2$ é obtido da tabela da distribuição qui-quadrado.

3.6.3 - Técnicas Gráficas

Uma considerável importância deve ser atribuída às técnicas gráficas para a compreensão de processos probabilísticos.

Um gráfico bem traçado pode fornecer informações bastante satisfatórias. De (3.1.b) tem-se que

$$F(t) = F(t; \theta, \delta) = 1 - \exp \left[\frac{-(t - \delta)}{\theta} \right],$$

então,

$$1 - F(t) = \exp \left[\frac{-(t - \delta)}{\theta} \right].$$

Tomando-se o logaritmo na base natural, tem-se que:

$$y = \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \frac{t - \delta}{\theta}. \quad (3.6.3.a)$$

Para (3.1.d), tem-se que:

$$F(t) = F(t; \theta) = 1 - \exp \left(\frac{-t}{\theta} \right);$$

então,

$$1 - F(t) = \exp \left(\frac{-t}{\theta} \right).$$

Tomando-se o logaritmo na base natural, ter-se-á:

$$y = \ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] = \frac{t}{\theta}. \quad (3.6.3.b)$$

Se a função de densidade é exponencial, obtêm-se uma reta com declive $m = \frac{1}{\theta} = \lambda$. Para (3.6.3.a) a reta corta o eixo da abscissa (t); para (3.6.3.b) a reta passa pela origem.

Existem várias formas de estimar-se a função distribuição e uma delas é:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}, \quad (3.6.3.c)$$

onde $\underline{i}$ é a $\underline{i}$ -ésima estatística de ordem. Este método atribui peso igual para cada observação. Observa-se que a estimativa da função distribuição não assume os valores zero e um. O segundo método para estimar a função distribuição é devido a GUMBEL (1958).

A estimativa da função distribuição por ele usada é:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{i}{n+1} , \quad (3.6.3.d)$$

onde $\underline{i}$ é a $\underline{i}$ -ésima estatística de ordem. O método de Gumbel atribui maior peso aos pontos extremos do gráfico, ou seja, os pontos limites assumem um peso maior. Isto significa que eles estão mais afastados de zero e um, do que no primeiro método citado (3.6.3.c).

HAHN e SHAPIRO (1967) observam que uma forma aproximada do valor esperado de um conjunto de observações pode ser expresso por $(i-c) / (n-2c+1)$. O melhor valor de $\underline{c}$ depende da função de densidade e do tamanho da amostra. Eles observam, ainda, que o valor de $c = 0$ é o melhor, quando a função de densidade é uniforme; $c = 0$ leva ao método (3.6.3.d). Finalmente, notam que $c = 1/2$ tem sido geralmente aceitável para uma grande variedade de distribuições e tamanhos de amostras; $c = 1/2$ leva ao método (3.6.3.c).

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 - Distribuição Exponencial Monoparamétrica

4.1.1 - Censura Tipo II - Amostragem sem reposição

Um teste de vida é executado com cinquenta unidades de um determinado produto. A amostragem é censurada após a décima falha e as unidades que falham não são repostas. Os tempos de falha são medidos em semanas e os instantes de falha são: 0,2; 0,4; 0,6; 0,9; 1,2; 1,3; 1,9; 2,0; 2,1 e 2,6.

Pode-se determinar a estimativa pontual para a vida média. Da expressão (3.2.1.e) ter-se-á:

$$\hat{\theta} = \frac{13,2 + 40 \cdot 2,6}{10} = 11,720 \quad .$$

Da expressão (3.2.1.t) obtém-se o intervalo de confiança para a vida média. Supondo $\alpha = 0,05$ tem-se:

$$P\left(\frac{2 \cdot 10 \cdot 11,72}{31,410} \leq \theta \leq \frac{2 \cdot 10 \cdot 11,72}{10,851}\right) = 0,90 \quad ,$$

daí

$$P(7,463 \leq \theta \leq 21,602) = 0,90 \quad .$$

Portanto a probabilidade de que a vida média se encontre nesse intervalo é igual a 0,90.

Pode-se estar interessado em realizar o seguinte teste $H_0: \theta \geq 15$ versus $H_1: \theta < 15$. Da tabela 5 do Apêndice, obtém-se a estatística teste. Substituindo os valores numéricos tem-se:

$$\chi_{\text{emp}}^2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 11,72}{15} = 15,63 \quad .$$

Da tabela da distribuição de qui-quadrado tem-se o valor crítico para $\alpha = 0,05$ que é igual a 10,851. Como $\chi_{\text{emp}}^2 > 10,851$ aceita-se a hipótese H_0 , ao nível de significância de 0,05.

Para desenhar a curva característica de operação, deve-se utilizar a expressão (3.5.1.j). Calcula-se $P_a(\theta)$ para alguns valores de θ , supondo-se $\theta_0 = 15$ e $\alpha = 0,05$. Tem-se então:

$$P_a(15) = P(\chi_{20}^2 \geq 10,851) = 0,95 \quad ,$$

$$P_a(10) = P(\chi_{20}^2 \geq 16,277) \approx 0,70 \quad .$$

$$P_a(7,5) = P(\chi_{20}^2 \geq 21,702) \approx 0,36 \quad .$$

$$P_a(5,0) = P(\chi_{20}^2 \geq 32,553) \approx 0,03 \quad .$$

Representando-se esses valores no gráfico tem-se

Através dessa curva, pode-se determinar a probabilidade de aceitar a hipótese H_0 para alguns valores de θ_0 e θ_1 .

O tempo médio esperado para a execução do experimento pode ser obtido da tabela 6 do Apêndice. Desta, para $n = 50$ e $r = 10$ tem-se que $1/\theta_0 E(T_{10,50}) = 0,22066$, como $\theta_0 = 15$, então o tempo médio esperado para a execução do experimento é de 3,31 semanas.

Da tabela 7 do Apêndice, determina-se a economia do tempo do teste. Para $n = 50$ e $r = 10$, obtém-se E_f igual a 0,07534; o experimento terá apenas 7% da duração do tempo em relação ao experimento no qual são colocadas dez unidades, e espera-se que todas falhem.

Utilizando-se apenas as cinco primeiras falhas pode-se calcular novamente a estimativa pontual da vida média. Tem-se:

$$\hat{\theta} = \frac{3,3 + 45 \cdot 1,2}{5} = 11,460.$$

O erro percentual que está sendo cometido, utilizando-se as primeiras cinco falhas em vez das dez primeiras falhas é de

$$\frac{100(11,720 - 11,460)}{11,720} = 2,22\%$$

Se o custo de observação por unidade de tempo é de 2 u.m. (unidade monetárias) e o custo para colocar uma unidade no experimento é de 1 u.m., pode-se então dimensionar o tamanho ótimo da amostra que minimiza os custos. Mantendo-se $r = 10$ e $\theta_0 = 15$ da expressão (3.5.3.e) tem-se:

$$n = \left[10 \cdot 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2 \cdot \frac{15}{10}} \right) \right] = 23$$

O custo total do experimento é mínimo se observarmos dez falhas em uma amostra de vinte três unidades.

4.1.2 - Censura tipo II. Amostragem com reposição

Um teste de vida é executado com vinte cinco unidades de um determinado produto. A amostragem é censurada após a décima falha. Os tempos de falha são medidos em horas e a última falha ocorre no instante 470 h, havendo reposição das unidades que falham.

A estimativa pontual da vida média é dada pela expressão (3.2.2.b). Assim:

$$\hat{\theta} = \frac{25 \cdot 470}{10} = 1175$$

Da expressão (3.2.2.e), adotando-se $\alpha = 0,10$ tem-se:

$$P\left(\frac{2 \cdot 25 \cdot 470}{31,410} \leq \theta \leq \frac{2 \cdot 25 \cdot 470}{10,851}\right) = 0,90 ,$$

daí

$$P(748,169 \leq \theta \leq 2165,699) = 0,90 .$$

Portanto, a probabilidade de que a vida média esteja contida neste intervalo é igual a 0,90.

Da expressão (3.5.1.z), obtém-se a economia de tempo da duração do experimento. O valor de E_f é 0,40, portanto o experimento terá apenas 40% da duração, em relação a um experimento onde são colocadas dez unidades e espera-se que dez falhas ocorram.

Para o teste $H_0: \theta \leq 1200$ versus $H_1: \theta > 1200$, obtém-se da tabela 5 do Apêndice a estatística teste. Substituindo-se os valores numéricos tem-se:

$$\chi_{\text{emp}}^2 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1175}{1200} = 19,58 .$$

Da tabela da distribuição de qui-quadrado, tem-se o valor crítico para $\alpha = 0,05$; que é 10,851. Como $\chi_{\text{emp}}^2 > 10,851$ deve-se rejeitar a hipótese H_0 ao nível de significância de 0,05.

Se o custo de observação por unidade de tempo é de 2 u.m. e o custo para colocar uma unidade no experimento é de 1 u.m.; pode-se dimensionar o tamanho ótimo da amostra que minimiza estes custos. Mantendo-se $r = 10$ e $\theta_0 = 1200$; da expressão (3.5.3.j), tem-se:

$$n = \left\lceil 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 1175}{1}} \right) \right\rceil = 153 .$$

O custo total do experimento é mínimo, se observarmos dez falhas em uma amostra de cento e cinquenta e três unidades.

4.1.3 - Censura tipo I. Amostragem com reposição

Um teste de vida é executado com quarenta e nove unidades. A amostragem é censurada para $t^* = 40$ h. As unidades que falham não são repostas. Durante o intervalo de tempo de 40 h ocorreram 15 falhas.

A estimativa pontual da vida média é obtida da expressão (3.2.4.d), ou seja:

$$\hat{\theta} = \frac{49 \cdot 40}{15} = 130,6 \text{ h}.$$

O intervalo de confiança é obtido da expressão (3.2.4.p). Portanto, para $\alpha = 0,10$ tem-se:

$$P\left(\frac{2 \cdot 1960}{46,194} \leq \theta \leq \frac{2 \cdot 1960}{18,493}\right) = 0,90,$$

daí

$$P(84,860 \leq \theta \leq 211,972) = 0,90.$$

A probabilidade de que a vida média esteja contida nesse intervalo é igual a 0,90.

Para se estimar a confiabilidade deve-se utilizar a expressão (3.3.b). Se $t = 100$ h ter-se-á:

$$\hat{C}(100) = \left(1 - \frac{100}{1960}\right)^{14} = 0,480 \quad .$$

Portanto, a probabilidade de que uma unidade permaneça funcionando após 100 h é 0,480.

O intervalo de confiança para essa confiabilidade pode ser obtido da expressão (3.3.e), ou seja:

$$P \left[\exp\left(-\frac{100}{84,860}\right) \leq C(100) \leq \exp\left(-\frac{100}{211,972}\right) \right] = 0,90 \quad ,$$

daí:

$$P(0,308 \leq C(100) \leq 0,624) = 0,90 \quad .$$

Portanto, a probabilidade de que a confiabilidade para $t = 100$ h esteja contida neste intervalo é igual a 0,90.

4.1.4 - Censura tipo I. Amostragem sem reposição

Em um teste de vida foram colocadas quarenta e nove unidades. O teste é censurado para $t^* = 40$ h, e as unidades que falham não são repostas. Os instantes das falhas são: 1,2; 2,2; 4,9; 5,0; 6,8; 7,0; 12,8; 13,7; 15,1; 15,2; 23,9; 24,3; 25,1; 35,8 e 38,9 h.

A estimativa da vida média é dada pela (3.2.3.b). Tem-se:

$$\hat{\theta} = \frac{231,9 + (49 - 15)40}{15} = 106,127 \quad .$$

Para determinar o intervalo de confiança, usa-se a expressão (3.2.3.k).

Inicialmente deve-se calcular o limite superior p_s , que é dado em (3.2.3.h). Para $\alpha = 0,05$ e $n = 49$, obtém-se $p_s = 0,42$.

Analogamente determina-se o limite inferior p_I pela expressão (3.2.3.i); obtém-se $p_I = 0,20$. Substituindo-se p_s e p_I em (3.2.3.k), tem-se:

$$P(73,431 \leq \theta \leq 179,257) = 0,90 \quad .$$

Assim, a probabilidade de que a vida média esteja contida no intervalo é igual a 0,90.

Para determinar uma estimativa pontual da confiabilidade, usa-se a expressão (3.3.b). Para $t = 100$ h tem-se:

$$\hat{C}(100) = \left(1 - \frac{100}{15 \cdot 106,127}\right)^{14} = 0,403 \quad .$$

Portanto, a probabilidade de que uma unidade permaneça funcionando após 100 h é 0,403.

4.2 - Distribuição Exponencial Biparamétrica

Um teste de vida é executado com vinte unidades em condições semelhantes. A amostragem é censurada após a décima falha, não havendo reposição das unidades que falham. Os tempos de falhas são medidos em horas, e os instantes de falhas são: 203; 246; 279; 306; 346; 394; 411; 417; 519; 535.

Estes dados provêm de uma distribuição exponencial com $\tilde{\theta}$ da mínima não nula.

Para determinar as estimativas da vida média e vida mínima, utiliza-se a expressão (3.4.m) :

$$\tilde{\theta} = \frac{1626 + 10 \cdot 332}{9} = 549,556 \quad ,$$

e

$$\tilde{\delta} = 203 - \frac{549,556}{20} = 175,522 \quad .$$

O limite de confiança inferior para a vida mínima é obtido da expressão (3.4.o). Adotando-se $\alpha = 0,05$ tem-se:

$$P(\delta \geq 203 - \frac{549,556}{20} \cdot 7,21) = 0,95 \quad ,$$

daí

$$P(\delta \geq 4,885) = 0,95 \quad .$$

Desde que $\delta > 0$, isto sugere que a distribuição exponencial monoparamétrica não é um modelo adequado.

Da expressão (3.4.p) obtêm-se o intervalo de confiança para a vida média. Adotando-se $\alpha = 0,10$ tem-se:

$$P\left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 549,556}{28,869} \leq \theta \leq \frac{2 \cdot 9 \cdot 549,556}{9,390}\right) = 0,90$$

daí

$$P(342,652 \leq \theta \leq 1053,462) = 0,90 \quad .$$

A probabilidade de que a vida média esteja contida nesse intervalo é igual a 0,90.

4.3 - Análise de dados

4.3.1 - Teste Qui-Quadrado

Um teste de vida $\hat{\theta}$ é executado com cem unidades de um determinado produto. A amostragem é censurada após a décima quinta falha e as unidades que falham não são repostas. Os instantes de falha em horas são: 220; 455; 620; 974; 1240; 1290; 1412; 1950; 2165; 2691; 3025; 3808; 4520; 6003; 6935 h.

Para se verificar a validade do modelo exponencial a esses dados, utilizar-se-á o teste qui-quadrado, 3.6.1.

Deve-se, inicialmente, estimar o parâmetro θ . Da expressão (3.2.1.e) tem-se:

$$\hat{\theta} = \frac{37308 + 35 (6935)}{15} = 18668,87 \text{ h} .$$

Decide-se agrupar esses dados em quatro classes; cada classe com cinco dados e a última classe com os restantes.

Para determinar os limites dessas classes usa-se a expressão $\hat{t}_p = -\hat{\theta} \ln(1-p)$ tem-se:

$$t_{0,05} = - 18668,87 \ln(0,95) = 957,59 .$$

$$t_{0,10} = - 18668,87 \ln(0,90) = 1966,96 .$$

$$t_{0,15} = - 18668,87 \ln(0,85) = 3034,04 .$$

Pode-se construir a tabela

classes	e_i	o_i	$(e_i - o_i)^2 / e_i$
0 — 957,59	5	3	0,8
957,89 — 1966,96	5	5	0
1966,96 — 3034,04	5	3	0,8
3034,04 —	85	89	<u>0,19</u>
			1,79

Assim $\chi^2_{\text{emp}} = 1,79$. Da tabela da distribuição de qui-quadrado tem-se que o valor crítico para $\alpha = 0,05$, que é igual a 5,991. Como $\chi^2_{\text{emp}} < 5,991$ não se deve rejeitar a validade do modelo exponencial.

4.3.2 - Teste para verificar se a taxa de falhas permanece constante

Para os mesmos dados de 4.1.1. pode-se verificar se a taxa de falhas permanece constante, utilizando-se para isto a expressão (3.6.2.c). Inicialmente calcula-se o tempo total do teste e os respectivos logaritmos naturais.

t_i	$T(t_i - t_{i-1})$	$\ln T(t_i - t_{i-1})$
0,2	50 (0,2) = 10	2,3026
0,4	49 (0,2) = 9,8	2,2824
0,6	48 (0,2) = 9,6	2,2618
0,9	47 (0,3) = 14,1	2,6462
1,2	46 (0,3) = 13,8	2,6247
1,3	45 (0,1) = 4,5	1,5041
1,9	44 (0,6) = 26,4	3,2734
2,0	43 (0,1) = 4,3	1,4584
2,1	42 (0,1) = 4,2	1,4351
2,6	41 (0,5) = 20,5	3,0204

Substituindo em 3.6.2.c tem-se:

$$B_{20} = \frac{2 \cdot 10 \left[\ln\left(\frac{116,8}{10}\right) - \frac{22,793872}{10} \right]}{1 + \frac{(10 + 1)}{6 \cdot 10}} = 3,02$$

Da tabela da distribuição de qui-quadrado obtêm-se $\chi^2_{9;0,05} = 16,919$. Como $B_{20} < 16,919$, não se deve rejeitar a validade do modelo exponencial.

4.3.3 - Técnica Gráfica

Para verificar a validade do modelo exponencial, pode-se utilizar a técnica gráfica 3.6.3, aos dados do exemplo 4.1.1.

Para estimar a função distribuição utiliza-se a expressão (3.6.3.c) e após estima-se y através da expressão (3.6.3.b). Daí tem-se

t_i	$\frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}$	$y = \ln \frac{1}{1-\hat{F}(t_i)}$
0,2	1,0200	0,02
0,4	1,0408	0,04
0,6	1,0625	0,06
0,9	1,0851	0,08
1,2	1,1087	0,11
1,3	1,1333	0,13
1,9	1,1591	0,15
2,0	1,1860	0,17
2,1	1,2143	0,19
2,6	1,2439	0,22

Agora deve-se representar estes resultados no gráfico.

A estimativa gráfica para a vida média é dada pela expressão (3.6.3.b), tem-se

$$m = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{2,7 \times 3}{5 \times 20} = 0,081 \quad ,$$

daí $\hat{\theta} = 12,35$.

5. CONCLUSÕES

Com base no estudo realizado, após resultados e discussão, e apoiando-se na condição de que a teoria desenvolvida só pode ser aplicada a dados de teste de vida, desde que seja válido o modelo exponencial, pode-se concluir:

a) A interrelação entre a distribuição exponencial e a distribuição de Poisson é muito útil no desenvolvimento da teoria de testes de vida.

b) Quando a distribuição dos tempos de falhas é conhecida, utiliza-se esta informação para estimar os parâmetros da distribuição. Porém, quando aquela for desconhecida, então será útil ter métodos que não dependam desta restrição.

c) A técnica gráfica, usando-se o papel monolog ou o papel próprio, pode fornecer informações bastante satisfatórias para verificar a validade do modelo exponencial e estimar os parâmetros, porém o método de máxi-

ma verossimilhança, que utilizou-se para estimar os parâmetros, é bastante simples e possui propriedades assintóticas desejadas.

d) É de particular importância verificar o erro que ocorre, quando a hipótese relativa à distribuição de falhas é feita através de um conjunto de dados insuficientes.

e) As duas técnicas de censura tipo I e tipo II não devem ser comparadas, pois envolvem conceitos distintos.

f) A censura tipo II é utilizada em menos situações práticas, pois o tempo de duração do experimento é aleatório. Entretanto, é a que apresenta maior facilidade na inferência dos parâmetros, intervalos de confiança, e assim por diante.

g) Para a censura tipo II, verifica-se que o tempo necessário para observar r falhas em uma amostra com n unidades é menor que o tempo necessário para observar r falhas em uma amostra com r unidades. A desvantagem desta, é que $n-r$ unidades devem ser colocadas em teste. Portanto, esta censura deverá ser empregada desde que seja comparado o custo relativo do tempo de experimento em relação ao custo da amostragem e teste de unidades extras.

h) Para a censura tipo II, o custo médio esperado, quando o teste é sem reposição, é menor ou igual ao custo médio esperado de um teste com reposição.

i) A curva característica de operação não depende do tamanho da amostra, mas sim do número de falhas observadas. Isto significa que a mesma

precisão é obtida, quer se somente $\underline{r}$ unidades são testadas até falharem ou se $\underline{n}$ unidades são colocadas no teste e o teste terminará no instante em que ocorre a $\underline{r}$ -ésima falha. Além disso, pode-se determinar o número médio de falhas necessárias.

j) Quanto maior for o número de unidades colocadas em teste, menor será o tempo médio esperado para a sua execução.

6. LITERATURA CITADA

- BARTHOLOMEW, D.J., 1957. Testing for departure from the exponential distribution. Biometrika. Londres, 44: 253-256.
- BARTHOLOMEW, D.J., 1963. The sampling distribution of an estimate arising in life-testing. Technometrics. Washington, 5: 361-374.
- BASU, A.P., 1964. Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. Technometrics. Washington, 6: 215-219.
- BAZOVSKY, I., 1961. Reliability Theory and Practice. Nova Jersey, Prentice Hall, Englewood Cliffs. 292 p. (Prentice-Hall Space Technology Series).
- BLIGHT, B.J., 1972. On the most economical choice of a life testing procedure for exponentially distributed data. Technometrics. Washington, 4: 140-142.
- BULGREN, W.G. e J.E. HEWETT, 1973. Double sample tests for hypotheses about the mean of an exponential distribution. Technometrics. Washington, 15: 187-190.

- COHEN, A.C., F.R. HELM, 1973. Estimation in the exponential distribution. Technometrics. Washington, 15: 415-418.
- COX, D.R., 1953. Some simple approximate testes for Poisson variates. Biometrika. Londres, 40: 354-360.
- EPSTEIN, B., 1954. Truncated life tests in the exponential case. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 25: 555-564.
- EPSTEIN, B., 1960. Tests for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Part I. Technometrics. Washington, 2: 83-101.
- EPSTEIN, B., 1960. Tests for the validity of assumption that the underlying distribution of life is exponential. Parte II. Technometrics. Washington, 2: 167-183.
- EPSTEIN, B., 1960. Statistical life test acceptance procedures. Technometrics. Washington 2: 435-446.
- EPSTEIN, B., 1960. Estimation from life test data. Technometrics. Washington, 2: 447-454.
- EPSTEIN, B. e M. SOBEL, 1953. Life testing. Journal of the American Statistical Association. Washington, 48: 486-502.
- EPSTEIN, B. e M. SOBEL, 1954. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 25: 373-381.
- EPSTEIN, B. e C.K. TSAO, 1953. Some tests based on ordered observations from two exponential populations. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 24: 458-554.
- FERCHO, W.W. e L.J. RINGER, 1972. Small sample power of some tests of the constant failure rate. Technometrics. Washington, 14: 713-724.
- FINKLESTEIN, J.M. e R.E. SCHAFER, 1971. Improved Goodness of Fit Tests, Biometrika. Londres, 58: 641-645.
- FISHER, R.A., 1922. On the mathematical foundations of theoretical statistics. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London, vol. 20A: 175-240 e 263-294.

- GNEDENKO, B. et BELJACO, JU. K.; SOLOVIEV, A.D., 1969. Mathematical Methods of Reliability Theory. Nova York, Academic Press.
- GUMBEL, E.J., 1958. Statistics of Extremes. Columbia University Press. Nova York, 375 p.
- HAHN, G.J. e S.S. SHAPIRO, 1967. Statistical Models in Engineering. Nova York, John Wiley & Sons, Inc., 355 p.
- HALPERIM, M., 1952. Maximum likelihood estimation in truncated samples. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 23: 226-238.
- HARTLEY, H.O., 1950. The maximum F-ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance. Biometrika. Londres, 37: 308-312.
- JACOBSON, P.H., 1947. The relative power of three statistics for small sample destructive tests. Journal of the American Statistical Association. Washington, 42: 575-584.
- KUMAR, S. e H.I. PATEL, 1971. A test for the comparison of two exponential distributions. Technometrics. Washington, 13: 183-189.
- LILLIEFORS, H.W., 1969. On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown. Journal of the American Statistical Association. Washington, 64: 387-389.
- MANN, N.R., 1969. Optimum estimators for linear functions of location and scale parameters. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 40: 2149-2159.
- MANN, N.R., SCHAFFER, R.E., e SINGPURWALLA, M.D., 1974. Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data. Nova York, 564 p.
- MIRSHAWKA, V., 1979. O Modelo de Weibull e Aplicações à Confiabilidade. São Paulo, USP, 238p. (Dissertação de Mestrado)
- MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A., e D. BOES, 1974. Introduction to the Theory of Statistics. Nova York, McGraw-Hill. 564p.
- MORAN, P.A.P., 1951. The random division of an interval. Part II. Journal Royal Statistic Society, B. Londres, 13: 147-150.

- NEYMAN, J. e E.S. PEARSON, 1928. On the use and interpretation of certain best criteria for purposes of statistical inference. Biometrika. Londres, vol. 20A: 175-240 e 263-294.
- NEYMAN, J., 1935. On the problem of confidence intervalos. The Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 6: 111-116.
- PAULSON, E., 1941. On certain likelihood ratio test associated with the exponential distribution. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 12: 301-306.
- PUGH, E.L., 1963. The best estimate of reliability in the exponential case. Journal of the Operations Research Society of American. Baltimore, 11: 57-61.
- RILEY, J.D., 1962. Comparative cost of two life test procedures. Technometrics. Washington, 4: 140-142.
- SARHAN, A.E., 1954. Estimation of the mean an standard deviation by order statistics. The Annals of Mathematical Statistics. Baltimore, 25: 317-328.
- SUKHATME, P.V., 1936. On the analysis of k samples from exponential reference to the problem of random intervals. Statistical Research. Memoirs. Universidade de Londres, 1: 94-112.
- ZACKS, S. e M. EVEN, 1966. The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best umbiased estimators of reliability function. Journal of the American Statistical Association. Washington, 61: 1033-1051.
- ZELEN, M. e M.C. DANNEMILLER, 1961. The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. Technometrics. Washington, 3: 29-49.

APÉNDICE

FIGURAS - Curvas características de operação para alguns testes

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$ $\alpha = 0,01$

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$ $\alpha = 0,01$

Figuras - continuação

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$; $\alpha = 0.05$

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$; $\alpha = 0.05$

Figuras - continuação

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$; $\alpha = 0,10$

Teste para $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$; $\alpha = 0,10$

Figuras - continuação

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,01$

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,01$

Figuras - continuação

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,05$

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,05$

Figuras - continuação

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,10$

Teste para $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$; $\alpha = 0,10$

Tabela 1 - Valores de C/θ_0 para o teste $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$.
Censura tipo II.

r	α				
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50
1	0,010	0,052	0,106	0,288	0,693
2	0,074	0,178	0,266	0,418	0,839
3	0,145	0,272	0,367	0,576	0,891
4	0,206	0,342	0,436	0,634	0,918
5	0,256	0,349	0,487	0,674	0,934
6	0,298	0,436	0,525	0,703	0,945
7	0,333	0,469	0,556	0,726	0,953
8	0,363	0,498	0,582	0,744	0,959
9	0,390	0,522	0,604	0,760	0,963
10	0,413	0,543	0,622	0,773	0,967
15	0,498	0,616	0,687	0,816	0,978
20	0,554	0,663	0,726	0,842	0,983
25	0,594	0,665	0,754	0,859	0,987
30	0,625	0,720	0,774	0,872	0,989
35	0,649	0,739	0,790	0,881	0,990
40	0,669	0,755	0,804	0,889	0,991
45	0,687	0,768	0,814	0,896	0,992
50	0,701	0,779	0,824	0,901	0,993

Tabela 2 - Valores de C/θ_0 para o teste $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_1$.
Censura tipo II.

r	α				
	0,01	0,05	0,10	0,25	0,50
1	4,605	2,996	2,303	1,387	0,693
2	3,319	2,372	1,945	1,346	0,839
3	2,802	2,099	1,774	1,307	0,891
4	2,511	1,938	1,670	1,277	0,918
5	2,321	1,831	1,599	1,255	0,934
6	2,185	1,827	1,546	1,237	0,945
7	2,082	1,692	1,505	1,223	0,953
8	2,000	1,644	1,471	1,211	0,959
9	1,934	1,604	1,444	1,200	0,963
10	1,878	1,571	1,421	1,191	0,967
15	1,696	1,459	1,342	1,160	0,978
20	1,593	1,394	1,295	1,140	0,983
25	1,523	1,350	1,263	1,127	0,987
30	1,472	1,318	1,240	1,116	0,988
35	1,435	1,293	1,221	1,108	0,990
40	1,404	1,273	1,207	1,102	0,991
45	1,379	1,257	1,195	1,096	0,992
50	1,358	1,243	1,185	1,091	0,993

Tabela 3 - Fornece $\chi^2_{2r_0, 1-\alpha} / \chi^2_{2r_0, \beta}$ para se determinar r_0 em um teste do tipo $H_0: \theta \geq \theta_0$ versus $H_1: \theta < \theta_0$. Censura tipo II.

r	α, β					
	$\alpha = 0,01$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,05$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,10$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,01$ $\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$ $\beta = 0,05$	$\alpha = 0,10$ $\beta = 0,05$
1	0,004	0,022	0,046	0,003	0,017	0,035
2	0,038	0,091	0,137	0,031	0,075	0,112
3	0,082	0,154	0,207	0,069	0,130	0,175
4	0,123	0,205	0,261	0,106	0,176	0,225
5	0,160	0,246	0,304	0,140	0,215	0,266
6	0,193	0,282	0,340	0,163	0,238	0,288
7	0,221	0,312	0,370	0,197	0,277	0,329
8	0,247	0,338	0,396	0,221	0,303	0,354
9	0,270	0,361	0,418	0,243	0,325	0,376
10	0,291	0,382	0,438	0,263	0,345	0,396
15	0,371	0,459	0,512	0,342	0,422	0,471
20	0,428	0,512	0,561	0,397	0,475	0,521
25	0,470	0,552	0,597	0,440	0,515	0,559
30	0,504	0,581	0,624	0,474	0,546	0,588
35	0,531	0,605	0,627	0,502	0,571	0,611
40	0,554	0,625	0,666	0,525	0,593	0,631
45	0,574	0,642	0,681	0,546	0,611	0,648
50	0,591	0,658	0,695	0,563	0,627	0,663

Tabela 4 - Fornece $\chi^2_{2r_0, \alpha} / \chi^2_{2r_0, 1-\beta}$ para se determinar r_0 em um teste do tipo $H_0: \theta \leq \theta_0$ versus $H_1: \theta > \theta_0$. Censura tipo II.

r	α, β					
	$\alpha = 0,01$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,05$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,10$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,01$ $\beta = 0,05$	$\alpha = 0,05$ $\beta = 0,05$	$\alpha = 0,10$ $\beta = 0,05$
1	13,649	28,393	21,825	89,417	58,165	44,709
2	12,478	8,917	7,311	18,674	13,345	10,941
3	7,628	5,713	4,830	10,283	7,702	6,511
4	5,756	4,443	3,829	7,351	5,674	4,889
5	4,771	3,763	3,286	5,891	4,646	4,058
6	4,159	3,477	2,942	5,017	4,194	3,549
7	3,741	3,040	2,704	4,435	3,604	3,206
8	3,436	2,824	2,528	4,019	3,303	2,957
9	3,203	2,657	2,392	3,707	3,074	2,768
10	3,019	2,524	2,283	3,462	2,895	2,618
15	2,471	2,125	1,954	2,752	2,367	2,177
20	2,192	1,918	1,781	2,403	2,103	1,953
25	2,020	1,720	1,675	2,191	1,942	1,816
30	1,902	1,701	1,600	2,047	1,831	1,722
35	1,815	1,636	1,545	1,941	1,750	1,653
40	1,747	1,584	1,502	1,860	1,687	1,599
45	1,693	1,543	1,467	1,796	1,637	1,556
50	1,649	1,509	1,438	1,743	1,596	1,520

Tabela 5 - Estatística teste e regiões críticas para os testes relativos a vida média. Censura tipo II.

H_0	Estatística teste	H_1	Região Crítica (R.C.)
$\theta \leq \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2r\hat{\theta}}{\theta_0}$	$\theta > \theta_0$	$\chi^2 > \chi_{2r,\alpha}^2$
$\theta \geq \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2r\hat{\theta}}{\theta_0}$	$\theta < \theta_0$	$\chi^2 < \chi_{2r,1-\alpha}^2$
$\theta = \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2r\hat{\theta}}{\theta_0}$	$\theta \neq \theta_0$	$\chi^2 < \chi_{2r,1-\alpha/2}^2$ $\chi^2 > \chi_{2r,\alpha/2}^2$ r grande

Tabela 6 - Fornece os valores de $1/\theta_0 E(T_{r,n})$ para determinar o tempo médio esperado do experimento.

n	r									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,00000									
2	0,50000	1,50000								
3	0,33333	0,83333	1,83333							
4	0,25000	0,58333	1,08333	2,08333						
5	0,20000	0,45000	0,78333	1,28333	2,28333					
6	0,16667	0,36667	0,61667	0,95000	1,45000	2,45000				
7	0,14286	0,30952	0,50952	0,75952	1,09286	1,59286	2,59286			
8	0,12500	0,26786	0,43452	0,63452	0,88452	1,21786	1,71786	2,71786		
9	0,11111	0,23611	0,37897	0,54563	0,74563	0,99563	1,32897	1,82897	2,82897	
10	0,10000	0,21111	0,33611	0,47897	0,64563	0,84563	1,09563	1,42897	1,92897	2,92897
11	0,09091	0,19091	0,30202	0,42702	0,56988	0,73654	0,93654	1,18654	1,51988	2,01988
12	0,08333	0,17424	0,27424	0,38535	0,51035	0,65321	0,81988	1,01988	1,26988	1,60321
13	0,07692	0,16026	0,25117	0,35117	0,46228	0,58728	0,73013	0,89680	1,09680	1,34680
14	0,07143	0,14835	0,23168	0,32259	0,42259	0,53371	0,65871	0,80156	0,96823	1,16823
15	0,06667	0,13810	0,21502	0,29835	0,38926	0,48926	0,60037	0,72537	0,86823	1,03489
16	0,06250	0,12917	0,20060	0,27752	0,36085	0,45176	0,55176	0,66287	0,78787	0,93073
17	0,05882	0,12132	0,18799	0,25942	0,33634	0,41968	0,51058	0,61058	0,72170	0,84670

Tabela 6 - continuação

n	r									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0,05556	0,11438	0,17688	0,24355	0,31497	0,39190	0,47523	0,56614	0,66614	0,77725
19	0,05263	0,10819	0,16701	0,22951	0,29618	0,36761	0,44453	0,52786	0,61877	0,71877
20	0,05000	0,10263	0,15819	0,21701	0,27951	0,34618	0,41761	0,49453	0,57786	0,66877
21	0,04762	0,09762	0,15025	0,20581	0,26463	0,32713	0,39380	0,46522	0,54215	0,62548
22	0,04545	0,09307	0,14307	0,19571	0,25126	0,31008	0,37258	0,43925	0,51068	0,58760
23	0,04348	0,08893	0,13655	0,18655	0,23918	0,29474	0,35356	0,41606	0,48273	0,55416
24	0,04167	0,08514	0,13060	0,17822	0,22822	0,28085	0,33641	0,39523	0,45773	0,52440
25	0,04000	0,08167	0,12514	0,17060	0,21822	0,26822	0,32085	0,37641	0,43523	0,49773
26	0,03846	0,07846	0,12013	0,16361	0,20906	0,25668	0,30668	0,35931	0,41487	0,47369
27	0,03704	0,07550	0,11550	0,15717	0,20064	0,24610	0,29372	0,34372	0,39635	0,45190
28	0,03571	0,07275	0,11121	0,15121	0,19288	0,23636	0,28181	0,32943	0,37943	0,43206
29	0,03448	0,07020	0,10723	0,14570	0,18570	0,22736	0,27084	0,31629	0,36391	0,41391
30	0,03333	0,06782	0,10353	0,14057	0,17903	0,21903	0,26070	0,30417	0,34963	0,39725
31	0,03226	0,06559	0,10007	0,13579	0,17283	0,21129	0,25129	0,29295	0,33643	0,38189
32	0,03125	0,06351	0,09684	0,13132	0,16704	0,20408	0,24254	0,28254	0,32420	0,36768
33	0,03030	0,06155	0,09381	0,12714	0,16163	0,19734	0,23438	0,27284	0,31284	0,35451
34	0,02941	0,05971	0,09096	0,12322	0,15656	0,19104	0,22675	0,26379	0,30225	0,34225

Tabela 6 - continuação

n	T									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
35	0,02857	0,05798	0,08829	0,11954	0,15179	0,18513	0,21961	0,25532	0,29236	0,33082
36	0,02778	0,05635	0,08576	0,11606	0,14731	0,17957	0,21291	0,24739	0,28310	0,32014
37	0,02703	0,05480	0,08338	0,11279	0,14309	0,17434	0,20660	0,23993	0,27442	0,31013
38	0,02632	0,05334	0,08112	0,10969	0,13910	0,16941	0,20066	0,23291	0,26625	0,30073
39	0,02564	0,05196	0,07898	0,10676	0,13533	0,16474	0,19505	0,22630	0,25856	0,29189
40	0,02500	0,05064	0,07696	0,10398	0,13176	0,16033	0,18974	0,22005	0,25130	0,28356
41	0,02439	0,04939	0,07503	0,10135	0,12837	0,15615	0,18472	0,21413	0,24444	0,27569
42	0,02381	0,04820	0,07320	0,09884	0,12516	0,15218	0,17996	0,20853	0,23794	0,26825
43	0,02326	0,04707	0,07146	0,09646	0,12210	0,14841	0,17544	0,20322	0,23179	0,26120
44	0,02273	0,04598	0,06979	0,09418	0,11918	0,14482	0,17114	0,19817	0,22594	0,25452
45	0,02222	0,04495	0,06821	0,09201	0,11641	0,14140	0,16705	0,19336	0,22039	0,24817
46	0,02174	0,04396	0,06669	0,08994	0,11375	0,13814	0,16314	0,18879	0,21510	0,24213
47	0,02128	0,04302	0,06524	0,08797	0,11122	0,13503	0,15942	0,18442	0,21006	0,23638
48	0,02083	0,04211	0,06385	0,08607	0,10880	0,13205	0,15586	0,18025	0,20525	0,23089
49	0,02041	0,04124	0,06252	0,08426	0,10648	0,12921	0,15246	0,17627	0,20066	0,22566
50	0,02000	0,04041	0,06124	0,08252	0,10426	0,12648	0,14921	0,17246	0,19627	0,22066

Tabela 6 - continuação

n	r									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	3,01988									
12	2,10321	3,10321								
13	1,68013	2,18013	3,18013							
14	1,41823	1,75156	2,25156	3,25156						
15	1,23489	1,48489	1,81823	2,31823	3,31823					
16	1,09739	1,29739	1,54739	1,88073	2,38073	3,38073				
17	0,98955	1,15622	1,35622	1,60622	1,93955	2,43955	3,43955			
18	0,90225	1,04511	1,21177	1,41177	1,66177	1,99511	2,49511	3,49511		
19	0,82988	0,95488	1,09774	1,26441	1,46441	1,71441	2,04774	2,54774	3,54774	
20	0,76877	0,87988	1,00488	1,14774	1,31440	1,51440	1,76440	2,09774	2,59774	3,59774
21	0,71639	0,81639	0,92750	1,05250	1,19536	1,36202	1,56202	1,81202	2,14536	2,64536
22	0,67094	0,76184	0,86184	0,97296	1,09796	1,24081	1,40748	1,60748	1,85748	2,19081
23	0,63108	0,71441	0,80532	0,90532	1,01643	1,14143	1,28429	1,45096	1,65096	1,90096
24	0,59582	0,67275	0,75608	0,84699	0,94699	1,05810	1,18310	1,32596	1,49262	1,69262
25	0,56440	0,63582	0,71275	0,79608	0,88699	0,98699	1,09810	1,22310	1,36596	1,53262
26	0,53619	0,60286	0,67429	0,75121	0,83454	0,92545	1,02545	1,13656	1,26156	1,40442
27	0,51073	0,57323	0,63989	0,71132	0,78825	0,87158	0,96249	1,06249	1,17360	1,29860

Tabela 6 - continuação

n	r									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28	0,48762	0,54644	0,60894	0,67561	0,74704	0,82396	0,90729	0,99820	1,09820	1,20931
29	0,46655	0,52210	0,58092	0,64342	0,71009	0,78152	0,85844	0,94178	1,03268	1,13268
30	0,44725	0,49988	0,55543	0,61426	0,67676	0,74342	0,81485	0,89178	0,97511	1,06602
31	0,42951	0,47951	0,53214	0,58769	0,64652	0,70902	0,77568	0,84711	0,92403	1,00737
32	0,41314	0,46076	0,51076	0,56339	0,61894	0,67777	0,74027	0,80693	0,87836	0,95528
33	0,39798	0,44344	0,49106	0,54106	0,59369	0,64925	0,70807	0,77057	0,83724	0,90866
34	0,38392	0,42740	0,47285	0,52047	0,57047	0,62310	0,67866	0,73748	0,79998	0,86665
35	0,37082	0,41249	0,45597	0,50142	0,54904	0,59904	0,65167	0,70723	0,76605	0,82855
36	0,35860	0,39860	0,44027	0,48375	0,52920	0,57682	0,62682	0,67945	0,73501	0,79383
37	0,34717	0,38563	0,42563	0,46729	0,51077	0,55623	0,60385	0,65385	0,70648	0,76203
38	0,33645	0,37348	0,41194	0,45194	0,49361	0,53709	0,58254	0,60316	0,68016	0,73279
39	0,32637	0,36209	0,39912	0,43758	0,47758	0,51925	0,56273	0,60818	0,65580	0,70580
40	0,31689	0,35137	0,38709	0,42412	0,46258	0,50258	0,54425	0,58773	0,63318	0,68080
41	0,30795	0,34128	0,37576	0,41148	0,44851	0,48697	0,52697	0,56864	0,61212	0,65757
42	0,29950	0,33176	0,36509	0,39957	0,43529	0,47232	0,51078	0,55078	0,59245	0,63593
43	0,29150	0,32275	0,35501	0,38834	0,42283	0,45854	0,49558	0,53404	0,57404	0,61571
44	0,28393	0,31423	0,34548	0,37774	0,41107	0,44555	0,48127	0,51831	0,55677	0,59677

Tabela 6 - continuação

n	r									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
45	0,27674	0,30615	0,33645	0,36770	0,39996	0,43329	0,46778	0,50349	0,54053	0,57899
46	0,26991	0,29848	0,32789	0,35819	0,38944	0,42170	0,45503	0,48952	0,52523	0,56227
47	0,26340	0,29118	0,31975	0,34917	0,37947	0,41072	0,44298	0,47631	0,51079	0,54651
48	0,25721	0,28424	0,31202	0,34059	0,37000	0,40030	0,43155	0,46381	0,49714	0,53163
49	0,25130	0,27762	0,30465	0,33242	0,36100	0,39041	0,42071	0,45196	0,48422	0,51755
50	0,24566	0,27130	0,29762	0,32465	0,35242	0,38100	0,41041	0,44071	0,47196	0,50422

Tabela 6 - continuação

n	r									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
21	3,64536									
22	2,69081	3,69081								
23	2,23429	2,73429	3,73429							
24	1,94262	2,27596	2,77596	3,77596						
25	1,73262	1,98262	2,31596	2,81596	3,81596					
26	1,57108	1,77108	2,02108	2,35442	2,85442	3,85442				
27	1,44145	1,60812	1,80812	2,05812	2,39145	2,89145	3,89145			
28	1,33431	1,47717	1,64384	1,84383	2,09383	2,42717	2,92717	3,92717		
29	1,24379	1,36879	1,51165	1,67832	1,87832	2,12832	2,46165	2,96165	3,96165	
30	1,16602	1,27713	1,40213	1,54498	1,71165	1,91165	2,16165	2,49498	2,99498	3,99498
31	1,09828	1,19828	1,30939	1,43439	1,57724	1,74391	1,94391	2,19391	2,52724	3,02724
32	1,03862	1,12953	1,22953	1,34064	1,46564	1,60849	1,77516	1,97516	2,22516	2,55849
33	0,98559	1,06892	1,15983	1,25983	1,37094	1,49594	1,63880	1,80546	2,00546	2,25546
34	0,93808	1,01500	1,09833	1,18924	1,28924	1,40035	1,52535	1,66821	1,83487	2,03487
35	0,89522	0,96665	1,04357	1,12690	1,21781	1,31781	1,42892	1,55392	1,69678	1,86344

Tabela 6 - continuação●

n	I									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
36	0,85633	0,92300	0,99442	1,07135	1,15468	1,24559	1,34559	1,45670	1,58170	1,72456
37	0,82086	0,88336	0,95002	1,02145	1,09837	1,18171	1,27262	1,37262	1,48373	1,60873
38	0,78835	0,84717	0,90967	0,97634	1,04777	1,12469	1,20802	1,29893	1,39893	1,51004
39	0,75843	0,81399	0,87281	0,93531	1,00198	1,07341	1,15033	1,23366	1,32457	1,42457
40	0,73080	0,78343	0,83899	0,89781	0,96031	1,02698	1,09841	1,17533	1,25866	1,34957
41	0,70519	0,75519	0,80782	0,86338	0,92220	0,98470	1,05137	1,12280	1,19972	1,28305
42	0,68138	0,72900	0,77900	0,83163	0,88719	0,94601	1,00851	1,07518	1,14661	1,22353
43	0,65918	0,70464	0,75226	0,80226	0,85489	0,91045	0,96927	1,03177	1,09844	1,16986
44	0,63843	0,68191	0,72737	0,77499	0,82499	0,87762	0,93317	0,99200	1,05450	1,12116
45	0,61899	0,66066	0,70413	0,74959	0,79721	0,84721	0,89984	0,95539	1,01422	1,07672
46	0,60073	0,64073	0,68240	0,72587	0,77133	0,81895	0,86895	0,92158	0,97713	1,03596
47	0,58354	0,62201	0,66201	0,70367	0,74715	0,79260	0,84022	0,89022	0,94286	0,99841
48	0,56734	0,60438	0,64284	0,68284	0,72451	0,76798	0,81344	0,86106	0,91106	0,96369
49	0,55203	0,58775	0,62479	0,66325	0,70325	0,74491	0,78839	0,83385	0,88147	0,93146
50	0,53755	0,57203	0,60775	0,64479	0,68325	0,72325	0,76491	0,80839	0,85385	0,90146

Tabela 6 - continuação

n	r									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
31	4,02724									
32	3,05849	4,05849								
33	2,58879	3,08879	4,08879							
34	2,28487	2,61821	3,11821	4,11821						
35	2,06344	2,31344	2,64678	3,14678	4,14678					
36	1,89122	2,09122	2,34122	2,67455	3,17455	4,17455				
37	1,75158	1,91825	2,11825	2,36825	2,70158	3,20158	4,20158			
38	1,63504	1,77790	1,94456	2,14456	2,39456	2,72790	3,22790	4,22790		
39	1,53568	1,66068	1,80354	1,97021	2,17021	2,42021	2,75354	3,25354	4,25354	
40	1,44957	1,56068	1,68568	1,82854	1,99520	2,19520	2,44520	2,77854	3,27854	4,27854

Tabela 6 - continuação

n	r									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	1,37396	1,47396	1,58507	1,71007	1,85293	2,01960	2,21959	2,46959	2,80293	3,30293
42	1,30686	1,39777	1,49777	1,60888	1,73388	1,87674	2,04340	2,24340	2,49340	2,82674
43	1,24679	1,33012	1,42103	1,52103	1,63214	1,75714	1,89999	2,06666	2,26666	2,51666
44	1,19259	1,26951	1,35285	1,44376	1,54375	1,65487	1,77987	1,92272	2,08939	2,28939
45	1,14338	1,21481	1,29174	1,37507	1,46598	1,56598	1,67709	1,80209	1,94494	2,11161
46	1,09846	1,16512	1,23655	1,31347	1,39681	1,48772	1,58772	1,69883	1,82383	1,96668
47	1,05723	1,11973	1,18640	1,25783	1,33475	1,41808	1,50899	1,60899	1,72010	1,84510
48	1,01924	1,07807	1,14057	1,20723	1,27866	1,35558	1,43892	1,52983	1,62982	1,74094
49	0,98410	1,03965	1,09847	1,16097	1,22764	1,29907	1,37599	1,45932	1,55023	1,65023
50	0,95146	1,00410	1,05965	1,11847	1,18097	1,24764	1,31907	1,39599	1,47932	1,57023

Tabela 6 - continuação

n	r									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
41	4,30293									
42	3,32674	4,32674								
43	2,84999	3,34999	4,34999							
44	2,53939	2,87272	3,37272	4,37272						
45	2,31161	2,56161	2,89494	3,39494	4,39494					
46	2,13335	2,33335	2,58335	2,91668	3,41668	4,41668				
47	1,98796	2,15463	2,35463	2,60463	2,93796	3,43796	4,43796			
48	1,86594	2,00879	2,17546	2,37546	2,62546	2,95879	3,45879	4,45879		
49	1,76134	1,88634	2,02920	2,19587	2,39587	2,64587	2,97920	3,47920	4,47920	
50	1,67023	1,78134	1,90634	2,04920	2,21587	2,41587	2,66587	2,99920	3,49920	4,49920

Tabela 7 - Fornece os valores $1/\theta_0 E(T_{r,n})$ para determinar o tempo médio esperado do experimento.

n	r									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,00000									
2	0,50000	1,00000								
3	0,33333	0,55556	1,00000							
4	0,25000	0,38889	0,59091	1,00000						
5	0,20000	0,30000	0,42727	0,61600	1,00000					
6	0,16667	0,24444	0,33636	0,45600	0,63504	1,00000				
7	0,14286	0,20635	0,27792	0,36457	0,47862	0,65015	1,00000			
8	0,12500	0,17857	0,23701	0,30457	0,38738	0,49708	0,66253	1,00000		
9	0,11111	0,15741	0,20671	0,26190	0,32656	0,40638	0,51255	0,67295	1,00000	
10	0,10000	0,14074	0,18333	0,22990	0,28276	0,34516	0,42256	0,52577	0,68186	1,00000
11	0,09091	0,12727	0,16474	0,20497	0,24958	0,30063	0,36120	0,43657	0,53726	0,68962
12	0,08333	0,11616	0,14959	0,18497	0,22351	0,26662	0,31621	0,37525	0,44888	0,54736
13	0,07692	0,10684	0,13700	0,16856	0,20246	0,23970	0,28159	0,32997	0,38770	0,45982
14	0,07143	0,09890	0,12637	0,15485	0,18508	0,21784	0,25405	0,29492	0,34226	0,39885
15	0,06667	0,09206	0,11728	0,14321	0,17048	0,19970	0,23155	0,26689	0,30691	0,35333
16	0,06250	0,08611	0,10942	0,13321	0,15804	0,18439	0,21280	0,24390	0,27850	0,31777
17	0,05882	0,08088	0,10254	0,12452	0,14730	0,17130	0,19692	0,22466	0,25511	0,28908

Tabela 7 - continuação

n	r									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0,05556	0,07625	0,09648	0,11690	0,13794	0,15996	0,18328	0,20830	0,23547	0,26537
19	0,05263	0,07212	0,09110	0,11017	0,12971	0,15004	0,17144	0,19422	0,21873	0,24540
20	0,05000	0,06842	0,08628	0,10417	0,12241	0,14130	0,16106	0,18196	0,20427	0,22833
21	0,04762	0,06508	0,08195	0,09879	0,11590	0,13352	0,15188	0,17117	0,19164	0,21355
22	0,04545	0,06205	0,07804	0,09394	0,11004	0,12656	0,14370	0,16162	0,18052	0,20062
23	0,04348	0,05929	0,07448	0,08954	0,10475	0,12030	0,13636	0,15308	0,17064	0,18920
24	0,04167	0,05676	0,07124	0,08554	0,09995	0,11463	0,12974	0,14542	0,16180	0,17904
25	0,04000	0,05444	0,06826	0,08189	0,09557	0,10948	0,12374	0,13849	0,15385	0,16993
26	0,03846	0,05231	0,06552	0,07853	0,09156	0,10477	0,11828	0,13220	0,14665	0,16173
27	0,03704	0,05033	0,06300	0,07544	0,08787	0,10045	0,11328	0,12647	0,14010	0,15429
28	0,03571	0,04850	0,06066	0,07258	0,08447	0,09647	0,10869	0,12121	0,13412	0,14751
29	0,03448	0,04680	0,05849	0,06993	0,08133	0,09280	0,10446	0,11638	0,12864	0,14132
30	0,03333	0,04521	0,05647	0,06747	0,07841	0,08940	0,10054	0,11192	0,12359	0,13563
31	0,03226	0,04373	0,05459	0,06518	0,07569	0,08624	0,09692	0,10779	0,11892	0,13038
32	0,03125	0,04234	0,05282	0,06304	0,07316	0,08330	0,09354	0,10396	0,11460	0,12553
33	0,03030	0,04104	0,05117	0,06103	0,07079	0,08055	0,09039	0,10039	0,11058	0,12103
34	0,02941	0,03981	0,04962	0,05915	0,06856	0,07798	0,08745	0,09706	0,10684	0,11685

Tabela 7 - continuação

n	1	2	3	4	5	r					9	10
						6	7	8				
35	0,02857	0,03866	0,04816	0,05738	0,06648	0,07556	0,08470	0,09394	0,10335	0,11295		
36	0,02778	0,03757	0,04678	0,05571	0,06452	0,07329	0,08211	0,09102	0,10007	0,10930		
37	0,02703	0,03654	0,04548	0,05414	0,06267	0,07116	0,07968	0,08828	0,09700	0,10588		
38	0,02632	0,03556	0,04425	0,05265	0,06092	0,06915	0,07739	0,08570	0,09411	0,10267		
39	0,02564	0,03464	0,04308	0,05125	0,05927	0,06724	0,07522	0,08326	0,09140	0,09966		
40	0,02500	0,03376	0,04198	0,04991	0,05771	0,06544	0,07318	0,08096	0,08883	0,09681		
41	0,02439	0,03293	0,04093	0,04865	0,05622	0,06374	0,07124	0,07879	0,08641	0,09412		
42	0,02381	0,03213	0,03993	0,04744	0,05481	0,06212	0,06941	0,07673	0,08411	0,09158		
43	0,02326	0,03138	0,03898	0,04630	0,05347	0,06058	0,06766	0,07477	0,08193	0,08918		
44	0,02273	0,03066	0,03807	0,04521	0,05220	0,05911	0,06600	0,07291	0,07987	0,08690		
45	0,02222	0,02997	0,03720	0,04417	0,05098	0,05772	0,06443	0,07114	0,07790	0,08473		
46	0,02174	0,02931	0,03638	0,04317	0,04982	0,05639	0,06292	0,06946	0,07604	0,08267		
47	0,02128	0,02868	0,03558	0,04222	0,04871	0,05511	0,06148	0,06786	0,07425	0,08070		
48	0,02083	0,02807	0,03483	0,04131	0,04765	0,05390	0,06011	0,06632	0,07255	0,07883		
49	0,02041	0,02749	0,03410	0,04044	0,04663	0,05274	0,05880	0,06486	0,07093	0,07704		
50	0,02000	0,02694	0,03340	0,03961	0,04566	0,05162	0,05755	0,06346	0,06938	0,07534		

Tabela 7 - continuação

n	r									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	1,00000									
12	0,69646	1,00000								
13	0,55636	0,70254	1,00000							
14	0,46963	0,56444	0,70801	1,00000						
15	0,40892	0,47850	0,57175	0,71296	1,00000					
16	0,36339	0,41808	0,48658	0,57841	0,71747	1,00000				
17	0,32768	0,37259	0,42647	0,49398	0,58451	0,72161	1,00000			
18	0,29877	0,33678	0,38105	0,43418	0,50080	0,59014	0,72542	1,00000		
19	0,27481	0,30771	0,34519	0,38886	0,44132	0,50711	0,59535	0,72895	1,00000	
20	0,25457	0,28354	0,31599	0,35298	0,39612	0,47795	0,51298	0,60019	0,73222	1,00000
21	0,23723	0,26308	0,29166	0,32369	0,36024	0,40288	0,45414	0,51845	0,60471	0,73528
22	0,22217	0,24550	0,27101	0,29923	0,33089	0,36703	0,40920	0,45992	0,52357	0,60894
23	0,20898	0,23022	0,25324	0,27843	0,30632	0,33763	0,37339	0,41514	0,46536	0,52838
24	0,19730	0,21679	0,23775	0,26049	0,28539	0,31298	0,34397	0,37938	0,42073	0,47047
25	0,18689	0,20489	0,22413	0,24483	0,26731	0,29195	0,31926	0,34995	0,38502	0,42600

Tabela 7 - continuação

n	r									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
26	0,17755	0,19427	0,21203	0,23103	0,25150	0,27374	0,29814	0,32519	0,35560	0,39036
27	0,16912	0,18472	0,20122	0,21876	0,23755	0,25781	0,27983	0,30399	0,33080	0,36095
28	0,16147	0,17609	0,19148	0,20778	0,22513	0,24372	0,26378	0,28560	0,30955	0,33613
29	0,15449	0,16825	0,18267	0,19788	0,21400	0,23117	0,24958	0,26946	0,29108	0,31483
30	0,14810	0,16108	0,17466	0,18891	0,20395	0,21990	0,23691	0,25515	0,27485	0,29630
31	0,14223	0,15452	0,16733	0,18074	0,19484	0,20972	0,22552	0,24237	0,26046	0,28000
32	0,13681	0,14848	0,16061	0,17327	0,18653	0,20048	0,21522	0,23088	0,24758	0,26552
33	0,13179	0,14290	0,15441	0,16640	0,17892	0,19204	0,20586	0,22047	0,23599	0,25257
34	0,12713	0,13713	0,14869	0,16007	0,17192	0,18431	0,19731	0,21100	0,22549	0,24089
35	0,12279	0,13292	0,14338	0,15421	0,16546	0,17719	0,18946	0,20235	0,21593	0,23030
36	0,11875	0,12845	0,13844	0,14877	0,15948	0,17062	0,18224	0,19440	0,20718	0,22065
37	0,11496	0,12427	0,13384	0,14371	0,15393	0,16453	0,17556	0,18707	0,19913	0,21181
38	0,11141	0,12035	0,12954	0,13899	0,14876	0,15887	0,16937	0,18030	0,19172	0,20368
39	0,10807	0,11668	0,12551	0,13458	0,14393	0,15359	0,16361	0,17401	0,18485	0,19618
40	0,10493	0,11323	0,12172	0,13044	0,13941	0,14866	0,15823	0,16816	0,17848	0,18923

Tabela 7 - continuação

n	x									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
41	0,10197	0,10998	0,11816	0,12655	0,13517	0,14404	0,15321	0,16270	0,17254	0,18277
42	0,09918	0,10691	0,11480	0,12289	0,13118	0,13971	0,14870	0,15759	0,16690	0,17676
43	0,09653	0,10401	0,11163	0,11943	0,12743	0,13563	0,14408	0,15280	0,16180	0,17114
44	0,09402	0,10126	0,10864	0,11617	0,12388	0,13179	0,13992	0,14829	0,15694	0,16587
45	0,09164	0,09866	0,10580	0,11309	0,12053	0,12817	0,13600	0,14406	0,15236	0,16093
46	0,08938	0,09618	0,10311	0,11016	0,11736	0,12474	0,13239	0,14006	0,14805	0,15628
47	0,08722	0,09383	0,10055	0,10738	0,11436	0,12149	0,12879	0,13628	0,14398	0,15190
48	0,08517	0,09159	0,09811	0,10475	0,11150	0,11841	0,12547	0,13270	0,14013	0,14777
49	0,08322	0,08946	0,09580	0,10224	0,10879	0,11548	0,12232	0,12931	0,13649	0,14385
50	0,08135	0,08743	0,09359	0,09984	0,10621	0,11270	0,11932	0,12609	0,13303	0,14015

Tabela 7 - continuação

n	r									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
21	1,00000									
22	0,73815	1,00000								
23	0,61291	0,74084	1,00000							
24	0,53290	0,61666	0,74337	1,00000						
25	0,47530	0,53718	0,62019	0,74576	1,00000					
26	0,43098	0,47986	0,54122	0,62353	0,74802	1,00000				
27	0,39542	0,43571	0,48419	0,54506	0,62670	0,75017	1,00000			
28	0,36603	0,40023	0,44020	0,48831	0,54871	0,62971	0,75221	1,00000		
29	0,34120	0,37087	0,40480	0,44448	0,49223	0,55218	0,63258	0,75415	1,00000	
30	0,31986	0,34603	0,37547	0,40916	0,44855	0,49596	0,55549	0,63531	0,75600	1,00000
31	0,30128	0,32466	0,35064	0,37987	0,41333	0,45244	0,49953	0,55865	0,63793	0,75776
32	0,28492	0,30604	0,32925	0,35505	0,38408	0,41731	0,45617	0,50295	0,56168	0,64043
33	0,27037	0,28962	0,31059	0,33365	0,35927	0,38811	0,42113	0,45974	0,50622	0,56457
34	0,25733	0,27501	0,29412	0,31495	0,33786	0,36331	0,39198	0,42479	0,46316	0,50936
35	0,24558	0,26191	0,27946	0,29844	0,31914	0,34190	0,36720	0,39569	0,42830	0,46645

Tabela 7 - continuação

n	r									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
36	0,23491	0,25008	0,26630	0,28373	0,30259	0,32316	0,34578	0,37093	0,39925	0,43168
37	0,22518	0,23934	0,25441	0,27052	0,28784	0,30659	0,32703	0,34952	0,37452	0,40269
38	0,21626	0,22954	0,24360	0,25857	0,27458	0,29179	0,31043	0,33076	0,35312	0,37799
39	0,20806	0,22055	0,23373	0,24770	0,26258	0,27849	0,29560	0,31414	0,33435	0,35659
40	0,20048	0,21227	0,22467	0,23777	0,25166	0,26644	0,28226	0,29928	0,31771	0,33782
41	0,19345	0,20461	0,21633	0,22865	0,24167	0,25547	0,27017	0,28591	0,30283	0,32117
42	0,18692	0,19752	0,20861	0,22024	0,23250	0,24544	0,25916	0,27378	0,28943	0,30627
43	0,18083	0,19092	0,20145	0,21247	0,22403	0,23621	0,24908	0,26273	0,27727	0,29283
44	0,17514	0,18476	0,19478	0,20524	0,21619	0,22769	0,23980	0,25260	0,26618	0,28064
45	0,16980	0,17900	0,18856	0,19852	0,20891	0,21980	0,23124	0,24328	0,25601	0,26952
46	0,16479	0,17360	0,18274	0,19224	0,20213	0,21247	0,22330	0,23467	0,24665	0,25931
47	0,16008	0,16853	0,17728	0,18636	0,19580	0,20564	0,21592	0,22668	0,23800	0,24992
48	0,15563	0,16375	0,17215	0,18084	0,18986	0,19925	0,20903	0,21926	0,22997	0,24123
49	0,15143	0,15925	0,16731	0,17565	0,18429	0,19326	0,20260	0,21233	0,22250	0,23316
50	0,14746	0,15499	0,16275	0,17076	0,17905	0,18764	0,19656	0,20585	0,21553	0,22565

Tabela 7- continuação

n	r									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
31	1,00000									
32	0,75945	1,00000								
33	0,64282	0,76107	1,00000							
34	0,56736	0,64512	0,76262	1,00000						
35	0,51237	0,57003	0,64733	0,76411	1,00000					
36	0,46961	0,51527	0,57260	0,64945	0,76555	1,00000				
37	0,43493	0,47265	0,51806	0,57507	0,65149	0,76693	1,00000			
38	0,40600	0,43807	0,47558	0,52075	0,57745	0,65346	0,76826	1,00000		
39	0,38132	0,40919	0,44109	0,47841	0,52335	0,57975	0,65536	0,76954	1,00000	
40	0,35994	0,38455	0,41227	0,44401	0,48115	0,52585	0,58197	0,65917	0,77078	1,00000

Tabela 7 - continuação

n	r									
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	0,34117	0,36318	0,38766	0,41525	0,44684	0,48379	0,52828	0,58412	0,65897	0,77198
42	0,32451	0,34441	0,36631	0,39068	0,41813	0,44957	0,48634	0,53062	0,58620	0,66068
43	0,30959	0,32774	0,34754	0,36934	0,39359	0,42092	0,45221	0,48882	0,53289	0,58821
44	0,29613	0,31280	0,33087	0,35058	0,37228	0,39642	0,42362	0,45477	0,49121	0,53509
45	0,28391	0,29933	0,31592	0,33390	0,35352	0,37512	0,39916	0,42624	0,45725	0,49354
46	0,27276	0,28708	0,30243	0,31894	0,33684	0,35638	0,37789	0,40181	0,42878	0,45966
47	0,26252	0,27590	0,29016	0,30543	0,32188	0,33970	0,35915	0,38057	0,40439	0,43125
48	0,25309	0,26563	0,27895	0,29315	0,30835	0,32473	0,34247	0,36184	0,38317	0,40690
49	0,24436	0,25617	0,26866	0,28191	0,29605	0,31119	0,32749	0,34517	0,36446	0,38570
50	0,23626	0,24741	0,25916	0,27159	0,28479	0,29887	0,31395	0,33019	0,34779	0,36700

Tabela 7 - continuação

n	r									
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
41	1,00000									
42	0,77313	1,00000								
43	0,66234	0,77426	1,00000							
44	0,59015	0,66395	0,77534	1,00000						
45	0,53722	0,59204	0,66551	0,77639	1,00000					
46	0,49479	0,53929	0,59388	0,66702	0,77741	1,00000				
47	0,46200	0,49798	0,54130	0,59565	0,66849	0,77840	1,00000			
48	0,43364	0,46427	0,50011	0,54325	0,59738	0,66991	0,77937	1,00000		
49	0,40934	0,43597	0,46648	0,50217	0,54514	0,59906	0,67130	0,78030	1,00000	
50	0,38816	0,41171	0,43824	0,46863	0,50419	0,54699	0,60070	0,67265	0,78121	1,00000

Tabela 8 - Estatística teste e regiões críticas para os testes relativos a vida média. Censura tipo I, amostragem sem reposição.

H_0	Estatística teste	H_1	Região Crítica (R.C.)
$\theta \leq \theta_0$ ou $p \geq p_0$	$B(n, r_0, p_0) = \sum_{x=0}^{r_0} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}$	$\theta > \theta_0$ ou $p < p_0$	$B(n, r_0, p_0) \leq \alpha$
$\theta \geq \theta_0$ ou $p \leq p_0$	$1 - B(n, r_0 - 1, p_0) = 1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}$	$\theta < \theta_0$ ou $p > p_0$	$1 - B(n, r_0 - 1, p_0) \leq \alpha$
$\theta = \theta_0$ ou $p \neq p_0$	$B(n, r_0, p_0) = \sum_{x=0}^{r_0} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}$ $1 - B(n, r_0 - 1, p_0) = 1 - \sum_{x=0}^{r_0-1} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x}$	$\theta \neq \theta_0$ ou $p \neq p_0$	$B(n, r_0, p_0) \leq \frac{\alpha}{2}$ $1 - B(n, r_0 - 1, p) \leq \frac{\alpha}{2}$

Tabela 9 - Estatística teste e regiões críticas para os testes relativos a vida média. Censura tipo I, amostragem com reposição.

H_0	Estatística teste	H_1	Região Crítica
$\theta \leq \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2nt^*}{\theta_0}$	$\theta > \theta_0$	$\chi^2 \geq \chi_{2r_0+2, \alpha}^2$
$\theta \geq \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2nt^*}{\theta_0}$	$\theta < \theta_0$	$\chi^2 \leq \chi_{2r_0, 1-\alpha}^2$
$\theta \neq \theta_0$	$\chi^2 = \frac{2nt^*}{\theta_0}$	$\theta \neq \theta_0$	$\chi^2 \geq \chi_{2r_0+2, \alpha/2}^2$ $\chi^2 \leq \chi_{2r_0, 1-\alpha}^2$