COMPARAÇÃO ENTRE OS TESTES t SEQUENCIAL DE WALD E DE STUDENT

JOSÉ RUY PORTO DE CARVALHO

Estatístico

Orientador: Prof. Cássio R. M. Godoi

Dissertação apresentada à Escola Superior de
Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade
de São Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Experimentação e Estatística.

P I R A C I C A B A

Estado de São Paulo - Brasil

Julho, 1978

A meus pais Romeu e Edith,

A meus irmãos: José Francisco,

Maria Izabel, José Romeu e

Ana Maria,

D E D I C O

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Cássio Roberto de Melo Godoi, Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela orientação segura, o qual, mais do que orientador, foi amigo.

Ao Dr. F. Pimentel Gomes, Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística, pelos ensinamentos transmitidos e pela revisão final do trabalho.

À Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA), pela oportunidade oferecida para a realização do curso.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão de bolsa de estudos.

Aos demais professores do Departamento de Matemática e Estatística da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", pela dedicação e espírito de colaboração.

Às Srtas. Maria Izalina Ferreira Alves e Rosa Maria Alves, pela execução de trabalhos datilográficos e, principalmente, pelo companheirismo e amizade.

Ao Sr. Octávio Frassetto, pelo cuidado com que procedeu os serviços de impressão.

Aos colegas e funcionários do Centro de Computação Eletrônica da ESALQ, pela colaboração e amizade.

Aos colegas do curso de Experimentação e Estatística, pelo apoio.

Ao colega H.E. Bajungu, pela versão do resumo para o inglês.

A todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização desse trabalho.

Í N D I C E

	Pág.
1. RESUMO	1
2. INTRODUÇÃO	4
3. REVISÃO DE LITERATURA	8
3.1 - Testes de Hipóteses	8
3.2 - Teste t de Student	11
3.3 - Teste t-Sequencial	14
3.4 - Robustez	17
4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	20
4.1 - Testes de Hipóteses	20
4.2 - Teste t de Student	24
4.3 - Teste Sequencial	27
4.3.1 - Teste sequencial da razão de probabilidades	27
4.3.2 - Relações fundamentais entre α , β , A e B ..	30
4.3.3 - Função operatória característica	33
4.3.4 - Função do tamanho médio das amostras de um teste sequencial	35
4.3.5 - Teste t-sequencial	36
5. MATERIAL E MÉTODOS	39
5.1 - Poder do Teste t-Sequencial	39
5.2 - Robustez do Teste t-Sequencial	44
6. RESULTADOS E DISCUSSÃO	46
6.1 - Poder do Teste t-Sequencial	46

	Pág.
6.2 - Robustez do Teste t-Sequencial	59
7. CONCLUSÕES	62
8. SUMMARY	64
9. BIBLIOGRAFIA	67
10. APÊNDICE	73

1. RESUMO

A Experimentação Agronômica apresenta-se como uma técnica difícil e perigosa, principalmente quando se quer tomar decisões a respeito do melhor procedimento a ser empregado.

O presente trabalho tem por objetivo uma introdução à análise seqüencial, especificamente ao teste t-seqüencial; verificar seu poder e sua robustez quando comparado com um teste equivalente não-seqüencial.

Tal comparação é feita através da técnica de simulação de dados, obtendo resultados que mostram, quando bem utilizada, quanto eficiente é o seu emprego.

O número de observações é função de uma seqüência infinita de dados com probabilidade igual a 1 de se tomar uma decisão, ou seja, aceitar ou rejeitar a hipótese $H_0: \theta = 0$ em favor da hipótese $H_1: \theta \geq \delta$.

Os dados são simulados através da sub-rotina UNNOR (Apêndice I), com distribuição Normal de média θ e variância σ^2 .

Para os riscos fixados α' e β' , obtêm-se, para cada caso, o número de rejeições, não-rejeições da hipótese de nulidade, além da esperança e variância de N .

O cálculo do número médio de observações para o teste t-seqüencial é feito com o intuito de comparar, sob determinadas hipóteses, com o número de observações para o teste t de Student, verificando-se que, em média, necessita-se de menor número de observações para o teste seqüencial.

Quando a hipótese alternativa está próxima da hipótese de nulidade, verifica-se, pelo atual estudo, que o número de observações requerido pelo teste seqüencial é, em média, a metade do requerido pelo teste de Student, sendo por isso condizentes com os resultados apresentados pela literatura tradicional.

A medida em que a hipótese alternativa se afasta da nulidade, a relação entre o número de observações apresentado pelos testes vai diminuindo, chegando em alternativas mais afastadas, até a se igualar.

O poder para os testes é calculado, e observa-se que, em média, para o teste t-seqüencial, em todos os casos estudados, se apresenta maior.

A probabilidade de se estar cometendo um erro quando faz-se a afirmação de que o poder é maior para o teste seqüencial é calculada para cada caso, encontrando-se a maior probabilidade igual

a 16,80%, sendo por isso possível tal afirmação.

É apresentado o gráfico da Curva Característica de Operação e do Tamanho Médio de Amostras para $\delta = 1,00$.

Além do mais, verifica-se pelo trabalho, que o estudo sobre a não-normalidade dos dados, permite a conclusão de que o teste t-seqüencial independe dos princípios para o qual é formado, caracterizando dessa forma sua robustez.

2. INTRODUÇÃO

Após a realização de um experimento, as informações fornecidas por ele são apresentadas a um experimentador para que decisões sejam tomadas.

As necessidades da pesquisa científica estimulam a elaboração de novas técnicas estatísticas, capacitando o experimentador a afirmar suas hipóteses nos mais precisos termos e planejar seus procedimentos experimentais mais eficazmente.

Muitos testes são utilizados para verificar hipóteses, que nada mais são do que uma afirmação sobre os parâmetros de uma população.

Dentre esses testes salienta-se o teste seqüencial, cabendo a WALD (1947) a mais importante contribuição a esse respeito.

Quando um experimento é seqüencial, o experimentador pode parar depois de cada observação e examinar os resultados acumulados até o momento, antes de decidir se continua ou não o experimento. Em outras palavras, a análise pode seguir seqüencialmente do mesmo modo que o experimento.

Parece fácil de ver, que uma análise seqüencial é mais eficiente do que os demais métodos, para os quais o número de repetições necessário é estimado com antecedência e não se faz um exame dos resultados até que o número de repetições tenha sido completado.

Por exemplo, um cálculo previamente feito pode requerer 20 repetições, mas a superioridade de um tratamento pode ser completamente evidente numa inspeção depois de 6 repetições (COCHRAN e COX, 1965).

A análise seqüencial, também chamada teste seqüencial e ainda amostragem seqüencial, apresenta, dentre as inúmeras vantagens, as seguintes:

- 1) Com a mesma garantia de sensibilidade, requer-se menor número de repetições, em média, do que com um experimento de tamanho previamente determinado (COCHRAN e COX, 1965);

- 2) O número de repetições economizadas varia de caso em caso, mas a média é ao redor de 30 a 40%. Uma redução desse tamanho é muito aceitável quando as observações são onerosas (WALD, 1947);

3) Garante uma considerável poupança de tempo, proporcionada por evitar a excessiva amostragem, quando o parâmetro populacional θ é bem maior ou bem menor de que o valor θ' considerado para comparação (ESTEFANEL, 1977);

4) Permite a consideração, logo de início, de uma diferença a ser detectada e a probabilidade de erro a essa associada de não rejeitá-la (erro tipo II), fato esse não considerado na maioria dos experimentos conduzidos tradicionalmente.

Mas, apresenta a desvantagem de exigir que a população não esteja dispersa e que as unidades amostrais colhidas possam ser prontamente avaliadas.

Pelo fato da análise seqüencial ser uma das mais importantes e recentes conquistas na metodologia estatística e devido à pouca literatura disponível sobre o assunto, pretende-se, baseado na comparação entre duas das principais classes de procedimentos (métodos seqüenciais e não-seqüenciais), escolher o teste que melhor se aplica a uma determinada hipótese.

A comparação entre os métodos seqüenciais e não-seqüenciais que correspondem, respectivamente, aos testes t-seqüencial e t de Student, será conduzida obtendo-se as vantagens e desvantagens de um em relação ao outro, através de simulação de dados em computador.

Deseja-se comparar o teste t-seqüencial e o teste t de Student através de poder e, além disso, obter alguns resultados

que proporcionem estudar o comportamento do teste t-seqüencial quando da não-normalidade dos dados.

3. REVISÃO DE LITERATURA

3.1 - Testes de Hipóteses

A Inferência Estatística consiste em geral de dois problemas: estimação dos parâmetros e testes de hipóteses a respeito desses parâmetros.

O teste de hipótese estatística é o mais generalizado instrumento de Inferência Estatística, sendo que na sua realização são feitas duas hipóteses: a hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1).

CAMPOS (1976) apresenta a seguinte definição para teste de hipótese: É uma regra de decisão que, com base nas observações, aceita ou rejeita H_0 .

MEYER (1969) indica o teste de hipótese como uma outra maneira de tratar o problema de se fazer uma afirmação sobre um

parâmetro desconhecido, associado a uma distribuição de probabilidade, baseada em uma amostra aleatória. Em vez de procurar-se uma estimativa do parâmetro, frequentemente nos parecerá conveniente admitir um valor hipotético para ele e, depois, utilizar a informação da amostra para confirmar ou rejeitar esse valor hipotético.

MURILLO MARQUES (1969) afirma que a Estatística oferece diversos procedimentos para aceitar ou rejeitar uma hipótese, e deve-se determinar o procedimento que leve a uma conclusão certa na maior parte das vezes. Diz-se a maior parte das vezes, pois qualquer que seja o procedimento escolhido, ele não exclui a possibilidade de que sejam cometidos dois tipos de erros e que somente o experimentador deve escolher o valor do erro que ele se dispõe a tolerar.

Regras de procedimento geralmente fixam a possibilidade do erro de rejeição quando a hipótese nula é verdadeira, calcula-se então os erros associados às hipóteses alternativas (FEDERER, 1955).

SIEGEL (1977) mostra que o ideal seria o pesquisador fixar os erros antes de iniciar a pesquisa, pois esses valores vão determinar o tamanho da amostra que se deve tomar para aplicar a prova escolhida.

MEYER (1969) esclarece que não se pode evitar completamente os erros tipo I e tipo II, e o que se faz é manter relativamente pequena a probabilidade de cometer esses erros e indica como solução desse problema a teoria de Função Característica de Opera-

ção.

Ela proporciona indicações de como testes bem aplicados podem possibilitar a redução ao mínimo do erro tipo II, isto é, indica o poder do teste, para evitar que decisões erradas sejam tomadas. São úteis no planejamento de experimentos por mostrarem, por exemplo, que tamanho de amostras devem ser usadas (SPIEGEL, 1971).

ANDERSON e BANCROFT (1952), estudando a importância do erro tipo II e do poder do teste, afirmam que maximizar o poder de um teste corresponde a minimizar a probabilidade de cometer o erro tipo II para uma probabilidade fixa de cometer o erro tipo I.

GODINHO (1973) deduz fórmulas para o tamanho da amostra e para o poder do teste, concluindo que, quanto maior o tamanho da amostra, maior será a potência do teste.

COX (1958) constata que a precisão e o poder dos testes estatísticos aumentam com a remoção dos tipos irrelevantes de variabilidade no planejamento de experimentos.

CARVALHO (1978) afirma que, para que qualquer teste de hipótese seja bom, ele deve ser planejado de modo a que os erros sejam reduzidos ao mínimo, o que não é simples, pois dado um tamanho de amostra fixo, a tentativa de diminuir a probabilidade de um certo tipo de erro, geralmente acarreta o acréscimo da do outro tipo e sugere, como um dos caminhos para a redução de ambos os tipos de erro, o aumento do tamanho da amostra.

CRAMER (1963) explica que um teste de hipótese pode

ser julgado bom, quando o teste tem uma probabilidade pequena de rejeitar a hipótese quando verdadeira, mas tem uma probabilidade grande de rejeitar a hipótese quando falsa.

Muitos testes são utilizados para testar hipóteses. Um bom teste é aquele que minimiza a probabilidade de todos os erros sob todos os valores possíveis dos parâmetros (FEDERER, 1955).

3.2 - Teste t de Student

A distribuição de t foi descoberta (originalmente) por W.S. GOSSET, que usou o pseudônimo de Student, sendo que sua dedução, importância e inúmeras aplicações práticas foram posteriormente realizadas por Fisher.

KREYSZIG (1974), estudando a região crítica de um teste, afirma que essa é uma região no espaço n-dimensional, que consta de todos os pontos amostrais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para os quais a prova nos leva a rejeitar a hipótese estudada.

FREEMAN (1970), por exemplo, discutindo o poder da prova de Student, observa que se deve, quando possível, escolher aquela região crítica que tenha maior poder com respeito a todas as possíveis hipóteses alternativas sobre o espaço dos parâmetros. Se essa região existe (o que é raro), o teste da hipótese H_0 , usando essa região, chama-se uniformemente mais poderoso.

CALZADA BENZA (1964) esclarece que a distribuição t é de ótima aplicação para amostras pequenas, sendo que, para amos-

tras com mais de 30 observações ela se aproxima da distribuição Normal.

LI (1969) afirma que a distribuição t de Student não é uma única curva de frequência, mas uma família de curvas, cada uma identificada por um número de graus de liberdade. Quando o número de graus de liberdade aumenta, a variância da amostra (s^2) se aproxima da variância da população (σ^2) e t se aproxima da distribuição Normal.

SILVEY (1970) explica que o critério de Student é justificado pelo teste da razão de verossimilhança, tendo propriedades ótimas em grandes amostras.

SIEGEL (1977) afirma que as provas de maior poder são precisamente aquelas que exigem suposições mais restritivas ou mais amplas. As provas paramétricas, como por exemplo, o teste t, admitem várias suposições restritivas às quais seu emprego deve subordinar-se. Válidas essas suposições, são as provas que apresentam maior probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é falsa, sendo que as condições que devem ser satisfeitas para tornar o teste t mais poderoso são, no mínimo, as seguintes:

- 1) As observações devem ser independentes, isto é, a escolha de determinado elemento para inclusão na amostra não deve influir na escolha de outros elementos;

- 2) As observações devem ser extraídas de populações com distribuição Normal;

3) As populações devem ter a mesma variância ou, em casos especiais, deve existir uma relação conhecida entre as variâncias.

Satisfeitas essas condições, o teste paramétrico é o mais indicado para analisar os dados.

ANDERSON e BANCROFT (1952) apresentam o teste de Student para verificar a hipótese de que uma amostra $x_1, x_2, \dots, x_n$ é retirada de uma população Normal com média θ especificada, com o desconhecimento do σ^2 , ou seja:

$$t = \frac{\bar{X} - \theta}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

onde, $\bar{X}$ e s são calculados de uma amostra aleatória cuja população original é Normal com média θ e variância σ^2 , destacando-se duas propriedades:

1) t é a razão entre um desvio Normal e a raiz quadrada de uma estimativa imparcial de sua variância;

2) t^2 é a razão entre o quadrado de uma variável $y = \frac{\sqrt{n} (\bar{X} - \theta)}{s}$, que é $N(0,1)$ e a variável $\frac{s^2}{\sigma^2}$ que é distribuída como um $\frac{\chi^2 \sigma}{n-1}$, com $n-1$ graus de liberdade.

OWEN (1965) informa que, dada uma amostra $x_1, x_2, \dots, x_n$, tomada aleatoriamente de uma distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, a probabilidade de rejeitar a hipótese $H_0: \theta = \theta_0$ com probabilidade α em favor de uma hipótese $H_1: \theta > \theta_0$ é: $\Pr \{t \text{ Student} > t_{\alpha}\} = \alpha$ se H_0 é verdadeira, com um poder de teste igual a

$$\Pr \left\{ t(\lambda) \text{ não central} > t_{\alpha} / \lambda = \frac{(\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n}}{\sigma} \right\} = 1 - \beta ,$$

onde λ é o parâmetro de não-centralidade da distribuição t não-central com $n-1$ graus de liberdade.

3.3 - Teste t-Sequencial

O método seqüencial foi desenvolvido teoricamente durante a Segunda Guerra Mundial, principalmente por WALD (1947), nos Estados Unidos e, simultaneamente, na Inglaterra por G.A. BARNARD (1946).

GOVINDARAJULU (1975) comenta que todos os problemas de decisão que se apresentam a um experimentador são de uma alta ordem de dificuldade, sendo que esse tem a liberdade, entretanto, de decidir se continua ou pára a amostragem. Esse tipo de procedimento é o denominado problema Seqüencial.

OSTLE (1963), estudando o método seqüencial, diz que devido à grande dificuldade na determinação do tamanho adequado do número de observações, indica o método seqüencial baseado no fato desse não precisar fixar o tamanho da amostra antes de conduzir o experimento, sendo que o experimento não deve ser muito longo, acarretando com isso, uma considerável poupança de tempo e dinheiro.

WALD (1947) afirma que o número de observações nos testes seqüenciais é uma variável aleatória e que sua esperança é menor do que o tamanho requerido da amostra em testes com número

fixo de observações.

Todo trabalho de Wald encontra-se resumido no seu livro "Sequential Analysis", que apresenta fundamentos teóricos apro-ximados, mas muito usados na prática.

Em seu livro, estudando o procedimento dos testes se-qüenciais para hipóteses compostas, ele dá como exemplo uma aplica-ção para testar a hipótese de que a média de uma variável normalmente distribuída com variância desconhecida é um valor dado, sendo que esse tipo de teste é denominado teste t-seqüencial.

Ele é conhecido como teste t-seqüencial porque rela-ciona-se com o mesmo problema apresentado pelo teste t de Student pa-ra amostras fixas (KENDALL e STUART, 1967).

EWENS (1950), em um estudo sobre a normalidade dos testes, distingue dois casos:

- 1) teste da média de uma população,
- 2) teste da variância de uma população,

obtendo uma única fórmula para os dois testes. Na comparação entre os testes não-seqüencial e seqüencial, se conclui que o teste seqüencial para médias é mais robusto quanto à normalidade, enquanto que o teste da variância é mais sensível.

WEISS e WOLFOWITZ (1972), interessados em testar se-qüencialmente uma hipótese sobre a média de uma amostra aleatória, independente, normalmente distribuída com média e variâncias desconhecidas, afirmam que, quando o tamanho da amostra é fixado, o tes-

te t de Student é o indicado, mas, quando o tamanho da amostra não é fixado, usa-se o teste t-seqüencial.

A teoria desenvolvida por WALD (1947), principalmente para hipóteses simples, não é em toda parte aplicável.

SISKIND (1964) apresenta um estudo cujo objetivo é examinar mais rigorosamente as fórmulas apresentadas por WALD (1947), principalmente as aplicadas ao teste t-seqüencial, empiricamente, por médias de muitas séries de experimentos amostrais.

O autor conclui que o uso da Função Característica de Operação equivalente a hipóteses simples usadas no teste t-seqüencial, é satisfatório somente para valores do parâmetro sob o teste, os quais são satisfeitos para os valores da hipótese alternativa.

RUSHTON (1950) discute o teste t-seqüencial unilateral e sugere, devido ao difícil fundamento teórico, o uso de uma aproximação para o teste na prática.

A aproximação apresentada é a seguinte:

$$S_N = \frac{1}{4} \delta^2 u_N^2 + N^{1/2} \delta u_N - \frac{1}{2} (N \delta^2) \left[1 - \frac{1}{4N} + \frac{\delta^2 u_N^2}{24N} \right],$$

discordando da aproximação apresentada por GOVINDARAJULU (1975) pelo termo $\frac{1}{2} (N \delta^2)$.

Usa-se nesse trabalho a aproximação apresentada por RUSHTON (1950), devido à maior coerência com os resultados obtidos quando comparados com a literatura tradicional.

3.4 - Robustez

Um teste estatístico que é insensível aos princípios para o qual é formado, é chamado um teste robusto, termo introduzido por G.E. BOX, em 1953.

Devido ao fato de que os métodos não-paramétricos são predominantemente robustos, para um melhor entendimento desse aspecto da Estatística necessários se fazem alguns esclarecimentos sobre as provas não-paramétricas.

Uma prova estatística não paramétrica é aquela cujo modelo não especifica condições muito restritivas sobre os parâmetros da população da qual se extrai a amostra.

Há certas hipóteses básicas associadas à maioria das provas não-paramétricas, isto é, que as observações sejam independentes e que a variável em estudo tenha continuidade básica. Mas essas suposições são em menor número e mais fracas do que as associadas às provas paramétricas.

Além disso, as provas não-paramétricas não exigem mensurasões tão rígidas quanto as provas paramétricas (SIEGEL, 1977).

CAMPOS (1976) sugere o uso da Estatística Não-Paramétrica apontando muitas vantagens, entre elas:

- 1) São menos exigentes do que a paramétrica, dispensando, por exemplo, a normalidade dos dados;
- 2) Em geral, as probabilidades das afirmativas obtidas são mais

exatas, salvo quando se usam aproximações para grandes amostras;

3) Independem da forma da população da qual a amostra é obtida;

4) São de aplicação mais fácil e exigem quase sempre menor volume de cálculos.

KREYSZIG (1974) enfatiza a aplicação do método não-paramétrico quando não se conhece a distribuição da população, recebendo, devido a isto, nome de método de distribuição livre.

LI (1969), estudando os métodos de distribuição livre, afirma que se pode ganhar ou perder algo dependendo do procedimento adotado. Se os métodos da distribuição Normal são usados em populações cujas observações não são Normais, o nível de significância pode ser alterado. Se as observações da população são aproximadamente Normais, os métodos da distribuição livre são menos poderosos do que os métodos da distribuição Normal.

MOOD e GRAYBILL (1950) evidenciam o método não-paramétrico, pois, além de ser extremamente geral, ele requer poucas su_uposições sobre a forma da função de distribuição.

CONOVER (1971) enfatiza ainda mais a aplicação do método não-paramétrico, pois, na comparação entre o teste de Wilcoxon e o teste t de Student, sob as seguintes condições:

1) as variáveis aleatórias bivariadas $(X_1, Y_1) \dots (X_N, Y_N)$ constituem uma amostra aleatória;

2) a distribuição de X_1 é idêntica à distribuição de Y_1 , exce-

to para uma possível diferença em médias.

O autor afirma que o teste não-paramétrico é infinitamente melhor do que o correspondente teste paramétrico.

SIEGEL (1977) define o teste de Wilcoxon como sendo aquele que atribui maior ponderação a um par que acuse grandes diferenças entre as condições, do que a um par em que essa diferença seja pequena, obtendo assim um teste mais poderoso.

O poder do teste de Wilcoxon é extremamente alto, é cerca de $3/\pi = 95,5\%$ quando comparado com o teste t em circunstâncias onde ambos podem ser aplicados (KEEPING, 1962).

4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Os fundamentos teóricos utilizados para testes de hipóteses em geral e teste de Student em particular, baseiam-se respectivamente em FREEMAN (1970) e KEEPING (1962), e para o teste t-seqüencial em WALD (1947) e GOVINDARAJULU (1975).

4.1 - Testes de Hipóteses

A formulação explícita, assim como muitos dos conceitos básicos importantes sobre testes de hipóteses se devem a J. NEYMAN e E.S. PEARSON, considerados os pioneiros nessa área da Inferência Estatística.

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x;\theta)$.

Consideram-se as hipóteses simples H_0 e H_1 sobre o verdadeiro valor do parâmetro θ : $H_0: \theta = \theta_0$, também chamada hipóte-

se nula; $H_1: \theta = \theta_1$, também chamada hipótese alternativa.

O verdadeiro valor de θ pode ser o de qualquer das hipóteses. Decide-se se está em H_0 ou H_1 somente depois de examinar o resultado de uma amostra aleatória $E: x_1, x_2, \dots, x_n$, de tamanho fixo sobre a variável x . Ao tomar tal decisão, sujeita-se a dois tipos de erros:

1) Rejeitar a hipótese H_0 quando verdadeira; esse erro chama-se erro do tipo I, e a probabilidade dele ser cometido denota-se por α ;

2) Aceitar a hipótese H_1 quando falsa; esse erro chama-se erro do tipo II e sua probabilidade de ocorrência denota-se por β .

Para se tomar uma decisão, usa-se o seguinte processo: as observações da amostra aleatória E constituem um ponto no espaço euclidiano n -dimensional. Separa-se esse espaço em duas regiões. Seja R uma região, às vezes chamada de região crítica desse espaço, tal que se E cai em R , rejeita-se H_0 , ou seja, aceita-se H_1 . Por outro lado, se E cai fora de R , aceita-se H_0 .

Determinar uma região R é, portanto, equivalente a determinar o teste de uma hipótese.

A região R é definida como sendo o conjunto de rejeição da hipótese H_0 e α é a probabilidade de E cair em R quando H_0 é verdadeira, indicada simbolicamente por $\Pr(E \in R/\theta_0) = \alpha$.

Por outro lado, $\Pr(E \in R/\theta_1) = 1 - \beta$, onde $1 - \beta$ é a probabilidade de rejeitar $H_0: \theta = \theta_0$ quando $H_1: \theta = \theta_1$ é verdadeira.

Toda região R tem uma Função Poder $\Pr(E \in R/\theta)$, isto é, a probabilidade de rejeitar H_0 quando o valor do parâmetro é θ ; considerados todos os valores possíveis de θ , sem se restringir somente quando $\theta = \theta_1$.

A Função Poder ou Poder do Teste é valiosa, pois dentro do modelo que está definida, ela considera todas as características de um teste. Além disso, sugere uma forma de escolher a região R e, portanto, escolher um teste de hipótese de tal forma que, de todas as regiões, escolhe-se aquela que minimiza alguma função de α e β .

NEYMAN e PEARSON (1933), citados por FREEMAN (1970), sugerem que, restringindo a região de tamanho fixo α , deve-se, quando possível, escolher a região que tenha maior poder, consideradas todas as possíveis hipóteses alternativas sobre θ . Se existe tal região, o que é raro, o teste de hipótese sobre H_0 , usando essa região, chama-se uniformemente mais poderoso.

Como se vê, para a obtenção de um bom teste é necessário um cuidado especial com os riscos α e β , pois, sempre existe o perigo de se cometer qualquer um deles, sendo impossível evitá-los completamente.

O que se faz é manter pequena a probabilidade de cometer esses erros. Também com o intuito de enfrentar esse problema, se introduz a noção de Função Característica de Operação de um teste, L , que é uma função do parâmetro desconhecido θ .

Ela é definida como sendo:

$$L(\theta) = \Pr\{\text{aceitar } H_0/\theta\} = \beta(\theta) = 1 - \text{poder do teste} ,$$

isto é, $L(\theta)$ é a probabilidade de aceitar H_0 , considerada como uma função de θ , apresentando as seguintes propriedades:

- 1) $L(-\infty) = 1$;
- 2) $L(+\infty) = 0$;
- 3) $\frac{dL}{d\theta} < 0$, para todo θ (portanto L é uma função estritamente de crescente de θ).

Assim, o gráfico dessa função apresenta a aparência geral da curva da figura 4.1.1.

Figura 4.1.1 - Função Característica de Operação.

Fonte: MEYER (1969).

Considere-se $1 - L(\theta_0)$: este número representa a probabilidade de rejeitar H_0 , quando H_0 for verdadeira, isto é, $1 - L(\theta_0)$ representa a probabilidade do erro tipo I (α).

Tomado o necessário cuidado com os erros, definem-se as hipóteses: Uma hipótese é dita simples, quando especifica completamente a distribuição de probabilidade e, como a forma da distribuição de probabilidade se supõe conhecida, todos os parâmetros de uma hipótese simples estão especificados, sendo que a hipótese constitui um ponto no espaço dos parâmetros.

Quando a distribuição de probabilidade não está completamente especificada, ou seja, os valores de alguns parâmetros da população não estão especificados pela hipótese, tem-se caracterizada uma hipótese composta, constituindo uma região no espaço dos parâmetros.

Essa hipótese, apesar de ser muito comum, é mais difícil de ser trabalhada, apresentando grandes dificuldades na determinação do poder para um teste composto, devido a certos parâmetros não serem especificados pela hipótese de nulidade.

4.2 - Teste t de Student

Se uma variável aleatória Z é distribuída como uma Normal com média 0 e variância σ^2 ; e se outra variável aleatória W com distribuição de Qui-quadrado, com p graus de liberdade, e se Z e W são independentes, então

$$t' = \frac{Z + \lambda}{\sqrt{W}} \quad (4.2.a)$$

tem distribuição de t não-central com p graus de liberdade e parâme

tro de não-centralidade λ .

A função de densidade de t' é

$$f_1(t') = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(p/2) 2^{(p-2)/2}} \int_0^\infty P\left(\frac{t'x}{\sqrt{p}} - \lambda\right) x^{p-1} Z(x) dx \quad (4.2.b)$$

para $-\infty < t' < \infty$, onde

$$P(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r e^{-y^2/2} dy \quad (4.2.c)$$

para

$$r = \frac{t'x}{\sqrt{p}} - \lambda \quad (4.2.d)$$

e

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (4.2.e)$$

Se $\lambda = 0$, $f_1(t')$ se reduz à função de densidade do t central, ou seja,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{p} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{p}\right)^{-(p+1)/2}, \quad (4.2.f)$$

para $-\infty < t < \infty$.

No caso específico do trabalho, considera-se a estatística

$$t = \frac{\bar{x} - \theta}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \quad (4.2.g)$$

onde $\bar{x}$ é a média e s o desvio padrão de uma amostra de tamanho n , pro

veniente de uma distribuição Normal com média θ e variância σ^2 .

Uma característica importante de $f(t)$ é que ela é independente de σ e, por esta razão, tabelas dessa função podem ser usadas para testar hipóteses sobre a média de uma população, independentemente da variância.

É necessário definir a distribuição t antes que o teste de hipótese seja discutido, pois os valores de t necessários para estabelecer a região crítica são retirados da tabela, a qual é feita de acordo com a distribuição dos valores de t de todas as possíveis amostras retiradas de uma mesma população Normal.

A Esperança Matemática da variável t , distribuída como uma t de Student, com p graus de liberdade, é obtida, sendo

$$E(t) = 0 \quad (4.2.h)$$

e sua variância

$$V(t) = \frac{p}{p-2}, \text{ para } p > 2. \quad (4.2.i)$$

As mais importantes aplicações da distribuição t não-central são:

1) No cálculo do poder do teste de Student, para o qual a região crítica é unilateral, ou seja:

$$P = \int_{t_\alpha}^{\infty} f_1(t') dt', \quad (4.2.j)$$

onde t_α é calculado pela equação:

$$\alpha = \int_{t_{\alpha}}^{\infty} f(t) dt \quad (4.2.k)$$

2) Na obtenção das Curvas de Operação Característica para o teste t de Student definida pela $\Pr \{t \text{ não-central com } p \text{ graus de liberdade ser menor ou igual a um valor crítico } t_{\alpha} \text{ da distribuição de Student com } p \text{ graus de liberdade}\} = \beta$. Se $\lambda = 0$, então $\beta = 1 - \alpha$;

3) Para determinar o tamanho da amostra necessário para testar a média de uma distribuição Normal com variância desconhecida (teste t de Student) e uma diferença mínima significativa pré-estabelecida.

4.3 - Teste Seqüencial

Antes de introduzir os fundamentos teóricos sobre o teste t-seqüencial, necessário se faz o esclarecimento de alguns conceitos da análise seqüencial.

4.3.1 - Teste seqüencial da razão de probabilidade

Durante a Segunda Guerra Mundial, Abraham Wald começou a trabalhar com os procedimentos seqüenciais e desenvolveu o Teste Seqüencial da Razão de Probabilidade.

Seja $f(x;\theta)$ a função de densidade da variável aleatória X.

Seja H_0 a hipótese que $\theta = \theta_0$, e H_1 a hipótese que

$\theta = \theta_1$. Assim, a distribuição de X é dada por $f(x; \theta_0)$ quando H_0 é verdadeira, e por $f(x; \theta_1)$ quando H_1 é verdadeira.

Para algum valor inteiro positivo de m , a probabilidade de se obter uma amostra $x_1, x_2, \dots, x_m$ é dada por

$$p_{1m} = f(x_1; \theta_1) \cdot f(x_2; \theta_1) \dots f(x_m; \theta_1) ,$$

quando H_1 é verdadeira, ou por

$$p_{0m} = f(x_1; \theta_0) \cdot f(x_2; \theta_0) \dots f(x_m; \theta_0) ,$$

quando H_0 é verdadeira, supondo a independência das variáveis.

NEYMAN e PEARSON (1933), citados por GOVINDARAJULU (1975), elaboraram um método para construir o mais poderoso teste de uma hipótese simples versus uma alternativa simples.

Seja,

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{f(x_1; \theta_1) \cdot f(x_2; \theta_1) \dots f(x_m; \theta_1)}{f(x_1; \theta_0) \cdot f(x_2; \theta_0) \dots f(x_m; \theta_0)} \quad (4.3.1.a)$$

a Razão de Probabilidades, ou, também chamada Razão de Verossimilhanças.

O teste mais poderoso de H_0 contra H_1 é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Rejeita-se } H_0 \text{ se } \frac{p_{1m}}{p_{0m}} &\geq K ; \\ \text{Aceita-se } H_0 \text{ se } \frac{p_{1m}}{p_{0m}} &\leq K ; \end{aligned}$$

onde K é determinado pelo nível de significância.

O Teste Seqüencial da Razão de Probabilidades, proposto por WALD (1947), para testar H_0 versus H_1 é definido como se segue.

Duas constantes positivas A e B, com $0 < B < A < \infty$, são determinadas. Para cada estágio do experimento, a razão $\frac{p_{1m}}{p_{0m}}$ é calculada.

Se

$$B < \frac{p_{1m}}{p_{0m}} < A ,$$

o processo continua e uma observação adicional é tomada. Se

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \geq A ,$$

o processo termina com a rejeição de H_0 (aceitação de H_1). Se

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \leq B ,$$

o processo termina com a aceitação de H_0 .

Para fins práticos, é mais conveniente calcular o log garítmio da razão de probabilidades em vez da razão de probabilidades propriamente dita, ou seja:

$$\log \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \log \frac{f(x_1; \theta_1)}{f(x_1; \theta_0)} + \log \frac{f(x_2; \theta_1)}{f(x_2; \theta_0)} + \dots + \log \frac{f(x_m; \theta_1)}{f(x_m; \theta_0)} \quad (4.3.1.b)$$

Se

$$\log B < \log \frac{p_{1m}}{p_{0m}} < \log A , \quad (4.3.1.c)$$

a amostragem continua e uma observação adicional é tomada. Se

$$\log \frac{p_{1m}}{p_{0m}} \geq \log A \quad , \quad (4.3.1.d)$$

a amostragem termina com a rejeição de H_0 . Se

$$\log \frac{p_{1m}}{p_{0m}} \leq \log B \quad , \quad (4.3.1.e)$$

a amostragem termina com a aceitação de H_0 .

4.3.2 - Relações fundamentais entre α , β , A e B.

Obtêm-se nesta secção, certas inequações satisfeitas pelos números α , β , A e B, formando a base para determinar as constantes A e B no teste Seqüencial da Razão de Probabilidade.

Uma amostra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é do tipo 0 se

$$B < \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{f(x_1; \theta_1) \cdot f(x_2; \theta_1) \dots f(x_m; \theta_1)}{f(x_1; \theta_0) \cdot f(x_2; \theta_0) \dots f(x_m; \theta_0)} < A \quad ,$$

para $m = 1, 2, \dots, n-1$, e $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq B$.

Uma amostra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é do tipo 1 se

$$B < \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{f(x_1; \theta_1) \cdot f(x_2; \theta_1) \dots f(x_m; \theta_1)}{f(x_1; \theta_0) \cdot f(x_2; \theta_0) \dots f(x_m; \theta_0)} < A \quad ,$$

para $m = 1, 2, \dots, n-1$, e $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \geq A$.

Assim, uma amostra do tipo 0 leva a aceitar H_0 e uma amostra do tipo 1 leva a aceitar H_1 (rejeitar H_0).

Dessa forma, para alguma dada amostra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do tipo 1, a probabilidade de obtê-la sob a hipótese H_1 é, pelo menos, A vezes maior do que sob a hipótese H_0 . Assim, a medida de probabilidade da totalidade de amostras do tipo 1 é também A vezes maior sob H_1 do que sob H_0 .

A medida de probabilidade da totalidade de amostras do tipo 1 é a mesma probabilidade que o processo seqüencial termine com a aceitação de H_1 (rejeição de H_0). Mas essa probabilidade é igual a α quando H_0 é verdadeira e $1 - \beta$ quando H_1 é verdadeira.

Dessa maneira, obtém-se a inequação

$$1 - \beta \geq A \alpha ,$$

ou,

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} , \quad (4.3.2.a)$$

sendo $\frac{1 - \beta}{\alpha}$ o limite superior de A .

Para se obter o limite inferior para B , segue-se procedimento análogo. De fato, para alguma dada amostra $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do tipo 0, a probabilidade de obtê-la sob H_1 é no máximo B vezes maior do que a probabilidade de obtê-la quando H_0 é verdadeira.

Desse modo, também a probabilidade de aceitação de H_0 é no máximo B vezes maior quando H_1 é verdadeira, do que quando H_0 é verdadeira.

Desde que a probabilidade de aceitar H_0 é $1 - \alpha$ quando H_0 é verdadeira e β quando H_1 é verdadeira, obtém-se a inequação:

$$\beta \leq (1 - \alpha) B ,$$

ou,

$$B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha} \quad (4.3.2.b)$$

onde, $\frac{\beta}{1 - \alpha}$ é o limite inferior para B.

Se no final do processo seqüencial a razão de probabilidades $\frac{p_{1m}}{p_{0m}}$ é exatamente igual para A ou B, então as inequações para A e B se tornam equações exatas.

Ao se usar os valores de A e B, dados por

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad (4.3.2.c)$$

e

$$B = \frac{\beta}{1 - \alpha}, \text{ com } B < 1 < A \quad (4.3.2.d)$$

valores esses aproximados, as probabilidades dos erros tipo I e tipo II, ou sejam, α e β não serão as mesmas.

Denotando-se as probabilidades aproximadas dos erros tipo I e II, fixados inicialmente por α' e β' , e as verdadeiras probabilidades por α e β , tem-se:

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} > \frac{1 - \beta'}{\alpha'}, \quad (4.3.2.e)$$

e

$$B = \frac{\beta'}{1 - \alpha'} > \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad (4.3.2.f)$$

ou,

$$\alpha'(1 - \beta) \geq (1 - \beta')\alpha, \quad (4.3.2.g)$$

e

$$\beta'(1 - \alpha) \geq (1 - \alpha')\beta \quad . \quad (4.3.2.h)$$

Multiplicando (4.3.2.e) e (4.3.2.f) por $(1-\beta')(1-\beta)$ e $(1-\alpha')(1-\alpha)$, respectivamente, encontra-se finalmente:

$$\alpha' + \beta' \geq \alpha + \beta \quad . \quad (4.3.2.i)$$

A transformação de inequação para equação apresenta a desvantagem do aumento do número de observações para a amostra, antes que uma decisão seja tomada.

4.3.3 - Função operatória característica

Depois que um teste seqüencial particular é adotado, a probabilidade de que o processo termine com a aceitação ou não de H_0 , depende de A, B e da distribuição da variável aleatória X considerada.

Admita-se que a distribuição de X seja conhecida, exceto para os valores de um número finito de parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Desse modo, a distribuição de X é dada pela função $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, onde a forma da função é conhecida, mas os verdadeiros valores dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ são desconhecidos.

Para simplificar a notação, usa-se a letra θ para representar o conjunto de todos os k parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, onde θ pode ser representado geometricamente por um ponto com as coordenadas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

Como a distribuição de X é determinada pelo valor do parâmetro θ , a probabilidade de aceitação de H_0 é uma função de θ .

Esta função, denotada por $L(\theta)$ é chamada "Função Operatória Característica".

Se há somente um parâmetro desconhecido θ , a função $L(\theta)$ pode ser disposta em um gráfico onde θ representa a abscissa e $L(\theta)$ a ordenada.

Visto que se considera somente testes cuja probabilidade de que o processo termine seja igual a 1, a probabilidade de rejeição H_0 é igual a $1 - L(\theta)$.

Para algum parâmetro θ , a probabilidade de tomar uma decisão correta pode ser obtida imediatamente da Função Operatória Característica. Se θ é consistente em H_0 , a probabilidade de tomar uma decisão correta é $L(\theta)$, por outro lado, se θ não é consistente com H_0 , a probabilidade de obter uma decisão correta é $1 - L(\theta)$.

A Função Operatória Característica é equivalente à noção do poder do teste na teoria comum dos testes estatísticos, recebendo por isso o nome de "Curva de Poder".

O nome Função Operatória Característica, introduzido por WALD (1947), foi largamente utilizado no passado. Atualmente, devido à pouca significância que esse nome inspira, os estatísticos estão preferindo usar o nome "Curva de Poder", que na verdade é $1 - L(\theta)$.

4.3.4 - Função do tamanho médio das amostras de um teste seqüencial

O número de observações requerido por um teste seqüencial não é pré-determinado, mas sim, uma variável aleatória, pois para cada estágio do experimento a decisão de terminar o processo depende do resultado acumulado das observações.

Seja N o número de observações requerido pelo teste seqüencial, onde N é uma variável aleatória.

Executando o mesmo procedimento seqüencial repetidamente, obtêm-se, em geral, diferentes valores para N , cujo valor esperado depende somente da distribuição de X . Desde que a distribuição de X é determinada pelo parâmetro θ , o valor esperado de N depende somente de θ , denotando-se por $E_{\theta}(N)$.

Se existe somente um parâmetro θ desconhecido, a função $E_{\theta}(N)$ pode ser disposta em um gráfico, onde θ é colocado na abscissa e $E_{\theta}(N)$ na ordenada.

A Função Operatória Característica e o Tamanho Médio das Amostras estão associados a cada teste seqüencial.

Essas duas funções são, talvez, as mais importantes consequências do procedimento de um teste seqüencial.

A Função Operatória Característica descreve quão bem o teste é no seu objetivo de tomar decisões corretas e o tamanho médio das amostras representa o preço que se tem que pagar, em média, em termos de número de observações requeridos por um teste.

4.3.5 - Teste t-sequencial

Um frequente e importante problema da Estatística, é quando se quer testar a hipótese H de que a média θ desconhecida de uma distribuição Normal é igual a algum valor especificado θ_0 , sem se conhecer nada sobre a variância σ^2 da distribuição.

Se o verdadeiro valor de θ difere levemente de θ_0 , isto é, se $\theta - \theta_0$ é uma pequena fração do desvio padrão σ , a aceitação de H usualmente não é considerada um erro de consequência prática. Entretanto, a importância de um erro cometido pela aceitação de H quando $\theta \neq \theta_0$ aumenta, em geral, com o aumento do valor de $\frac{\theta - \theta_0}{\sigma}$.

Assim, é possível achar um valor positivo tal que a aceitação de H seja considerada um erro de importância prática somente quando $\frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \geq \delta$.

Consequentemente, as três zonas no espaço dos parâmetros são definidas como se segue:

1) A zona W_a de aceitação consiste de todos os pontos (θ, σ) para os quais $\theta = \theta_0$, isto é, W_a consiste de todos os pontos (θ_0, σ) , onde σ tem algum valor positivo;

2) A zona W_r de rejeição consiste de todos os pontos (θ, σ) para os quais $\frac{\theta - \theta_0}{\sigma} \geq \delta$;

3) A zona de indiferença contém todos os pontos (θ, σ) para o qual $0 < \frac{\theta - \theta_0}{\sigma} < \delta$.

Dessa maneira, o teste t-sequencial é definido supom

do que X seja normalmente distribuída com média θ e variância desconhecida σ^2 .

O procedimento seqüencial será baseado em t_N , onde

$$t_N = \frac{\sqrt{N} (\bar{X} - \theta_0)}{S_N} . \quad (4.3.5.a)$$

O teste t-seqüencial de $H_0: \theta = \theta_0$ contra a alternativa $H_1: \theta - \theta_0 \geq \delta\sigma$ pode ser descrito como se segue.

Se o procedimento seqüencial prossegue até o N -ésimo estágio, a região de continuação é dada por:

$$B_N < t_N < A_N , \quad (4.3.5.b)$$

para $N = 2, 3, \dots$

Se

$$t_N > A_N , \quad (4.3.5.c)$$

termina o processo e rejeita-se H_0 . Se

$$t_N < B_N , \quad (4.3.5.d)$$

termina o processo e aceita-se H_0 .

As constantes B_N e A_N são tais que o procedimento termine. É concebível que esse procedimento nunca termine, mas DAVID e KRUSKAL (1956), segundo GOVINOARAJULU (1975), provaram que a probabilidade de nunca terminar é zero.

RUSHTON (1950) considerou a aproximação assintótica para o logarítmo neperiano da razão de verossimilhança no teste t-seqüencial.

Seja

$$u_N = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \theta_0)}{\left[\sum_{i=1}^N (X_i - \theta_0)^2 \right]^{1/2}}, \quad (4.3.5.e)$$

adotando-se $A_N = L \frac{\beta'}{1 - \alpha'}$ e $B_N = L \frac{1 - \beta'}{\alpha'}$, então RUSHTON (1950) demonstra que a região de continuação da amostragem é dada por:

$$L \left[\frac{\beta'}{1 - \alpha'} \right] < S_N < L \left[\frac{1 - \beta'}{\alpha'} \right] \quad (4.3.5.f)$$

e para um alto valor de N , obtém-se:

$$S_N \approx \frac{1}{4} \delta^2 u_N^2 + N^{1/2} \delta u_N - \frac{1}{2} (N \delta^2) \left[1 - \frac{1}{4N} + \frac{\delta^2 u_N^2}{24N} \right], \quad (4.3.5.g)$$

sendo que os termos $\frac{1}{4N}$ e $\frac{\delta^2 u_N^2}{24N}$ só serão usados quando estamos próximos de tomar uma decisão.

5. MATERIAL E MÉTODOS

5.1 - Poder do Teste t-Sequencial

A metodologia usada para o estudo do teste seqüencial proporciona o manuseio dos riscos α e β transformando-se em uma grande opção para o experimentador.

Devido à facilidade que traz o uso da computação eletrônica e com o crescente aumento da pesquisa científica, utiliza-se o processo da simulação de dados para cobrir a falta presente de dados reais.

Desenvolvem-se através do computador IBM-1130-16K da ESALQ, programas em linguagem Fortran, com o intuito de comparar o poder dos testes t-seqüencial e t de Student, considerando a hipótese simples $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta - \theta_0 \geq \delta\sigma$ para $\theta_0 = 0$ e $\sigma = 1$, o que equivale a testar $H_0: \theta = 0$ versus $H_1: \theta \geq \delta$.

Inicialmente α' e β' são fixados de forma a obter-se as regiões de decisão dadas por (4.3.2.a) e (4.3.2.b).

Quando se toma o limite superior da desigualdade (4.3.2.a) como valor de A, e o limite inferior de (4.3.2.b) como valor de B, essas desigualdades transformam-se em igualdades dadas por (4.3.2.c) e (4.3.2.d), fazendo com isso uma alteração nos valores de α' e β' , diferindo dos verdadeiros α e β requeridos no teste.

WALD (1947) afirma que a principal razão da altera-
ção dos valores de α' e β' é por N ser uma variável aleatória dis-
creta e ainda pela decisão do teste não ser tomada quando S_N atinge
exatamente A ou B, mas tomada quando cruzar esses limites.

Os dados são simulados através da sub-rotina UNNOR
(Apêndice I), que gera números aleatórios com densidade $N(\theta, \sigma^2)$.

Para cada número aleatório gerado, é calculado S_N pe-
la fórmula (4.3.5.g), e é verificado se está dentro dos limites da
região de continuação da amostragem apresentada em (4.3.5.j).

Se está fora da região, o processo termina com a re-
jeição ou aceitação de H_0 . Se está dentro, o processo continua, com
probabilidade um (1) de terminar.

Para cada seqüência de números aleatórios, é calculaa
do o número de observações necessário para se tomar uma decisão.

A esperança e a variância de 1.500 números de obser-
vações, necessários para se tomar qualquer das duas decisões, são
calculadas e é feito um histograma para ter-se uma idéia do tipo de

distribuição seguida (Apêndice II).

Variando os riscos α' e β' , a média θ e a constante positiva δ , obtêm-se diversas situações, sendo possível o cálculo do poder para cada caso, pois $1 - \beta = \frac{\text{Número de rejeições}}{N}$, conseguindo resultados para comparação com o teste t de Student.

Para tanto, é necessário obter-se o número de observações para o teste t de Student, correspondente ao poder anteriormente calculado.

Nesse ponto do presente trabalho, devido à falta de tabelas para o cálculo do número de observações para o teste não-seqüencial, foi necessário fazer outro programa para a obtenção de tais resultados (Apêndice III).

Tal programa é feito para o cálculo da probabilidade de rejeição de H_0 para diversos valores do grau de liberdade e parâmetro de não-centralidade.

Toma-se o poder calculado para o teste t-seqüencial como referência e por tentativas obtém-se o valor de N fixo que, associado ao parâmetro de não-centralidade λ , apresenta poder equivalente.

Usa-se a fórmula apresentada em (4.2.b), considerando uma aproximação para $P(r)$ pois, com isso, transforma-se o problema da integração dupla no caso de integração simples.

A aproximação usada para $P(r)$, segundo PACITTI(1960), corresponde ao seguinte polinômio:

$$P(r) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-r)^2/2} (b_1 K + b_2 K^2 + b_3 K^3 + b_4 K^4 + b_5 K^5) \quad (5.a)$$

$$\text{para } r \geq 0, \text{ onde: } K = \frac{1}{1 + pr};$$

$$p = 0,2316419;$$

$$b_1 = 0,31938153;$$

$$b_2 = -0,356563782;$$

$$b_3 = 1,781477937;$$

$$b_4 = -1,821255978;$$

$$b_5 = 1,330274429;$$

com erro no sétimo algarismo significativo, dado por

$$|\epsilon(r)| < 7,5 \times 10^{-8}.$$

De posse das probabilidades de rejeição de H_0 , e usando a tabela de percentis da distribuição t de Student, obtém-se N fixo, através de método Iterativo.

Para ilustrar a metodologia empregada, é apresentado o seguinte exemplo: Para um $\alpha' = \beta' = 0,01$ e $\delta = 1,00$ fixados, obtêm-se as regiões de decisão dadas por $A_N = 99$ e $B_N = 0,010101$.

Simulam-se seqüências de dados com média e variância iguais a 1, obtendo como resultado 1.490 rejeições de H_0 e 10 não-rejeições, com $E(N) = 14,21$ e $V(N) = 40,36$.

Assim, o poder para o teste t-seqüencial é calculado, sendo aproximadamente 99,33% correspondente a um erro tipo II real (β) da ordem de 0,0066.

Para esse poder, obtém-se, por método iterativo, o número de observações para o teste t de Student, usando o seguinte procedimento.

Inicia-se o método fixando $\alpha = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma} = 1,0$, pois $\theta_0 = 0$ e $\sigma = 1$.

O número de observações requerido para o teste t de Student é inicialmente qualquer valor inteiro positivo, por exemplo, parte-se de $N = 25$.

Para $N = 25$, implica em se ter $p = 24$ graus de liberdade e pela fórmula (4.2.b), fixado um poder de 99,33%, calcula-se pelo computador, por tentativas, o valor de λ que, associado a 24 graus de liberdade, apresenta um poder para o teste t de Student igual a 99,33%.

O valor de λ encontrado é igual a 5,10.

O próximo passo é recalcular o valor de N da seguinte forma. Como

$$\lambda = \frac{(\theta_1 - \theta_0) \sqrt{N}}{\sigma} = \delta \sqrt{N},$$

têm-se que

$$\sqrt{N} = \frac{\lambda}{\delta} \implies N = \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^2.$$

Como $\delta = 1,0$, obtém-se

$$N = \left(\frac{\lambda}{1,0} \right)^2 = \left(\frac{5,10}{1,0} \right)^2 \approx 27 \text{ observações.}$$

O mesmo processo é repetido, até que o valor de N inicial coincida com o recalculado, sendo que, neste caso particular, uma interação foi suficiente, pois, se o processo for repetido com N inicial igual a 27, para um poder de 99,33%, obtém-se como resultado para N recalculado 27 observações.

Desse modo, enquanto que para o teste t -sequencial é necessário, em média, 15 observações para obter um poder de 99,33%, para o teste t de Student são necessárias 27 observações.

5.2 - Robustez do Teste t -Sequencial

Devido ao fato dos testes não-paramétricos apresentarem frequentemente alternativas bem gerais torna-se difícil o estudo sobre os seus respectivos poderes.

Por outro lado, eles são essencialmente robustos, pois sua construção independe da forma da distribuição de probabilidades, requerem somente suposições bem fracas.

É de interesse, portanto, estudar os efeitos que acarretam a não-normalidade sobre o teste t -sequencial e verificar se essa vantagem apresentada pelos testes não-paramétricos também é apresentada por ele.

Para tanto, a metodologia usada é semelhante para o caso em que se quer estudar o poder, variando apenas a distribuição em que os números aleatórios são obtidos, pois estes são simulados de uma distribuição de Poisson, obtidos através da sub-rotina POI

(Apêndice IV), que, quando chamada, retorna como resultado um número aleatório inteiro da distribuição de Poisson de parâmetro θ .

A hipótese utilizada para estudo é semelhante à anterior, ou seja, $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta - \theta_0 \geq \delta\sigma$, para $\theta_0 = 2,0$ e $\sigma = 1$, o que equivale a testar $H_0: \theta = 2,0$ versus $H_1: \theta \geq 2 + \delta$.

Simuladas 1.500 observações para $\alpha' = \beta' = 20\%$, obtêm-se o número de rejeições e não-rejeições da hipótese de nulidade e verifica-se se há alterações no comportamento de $E(N)$, $V(N)$, poder do teste e do erro tipo I, quando confrontadas com as obtidas anteriormente, usando a distribuição Normal.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 - Poder do Teste t-Sequencial

Devido ao fato de que a hipótese alternativa estudada seja $H_1: \theta \geq \delta$, todas as tabelas são feitas com a intenção final de se obter o número de observações para diferentes valores da constante positiva δ .

A Tabela 6.1.1 mostra o número de rejeições da hipótese $H_0: \theta = 0$, obtidas da simulação de 1.500 seqüências de observações para diversas médias e riscos fixos $\alpha' = \beta'$.

O cálculo do número de rejeições de H_0 permite obter os valores quase exatos para os riscos α' e β' .

Para $\alpha' = \beta' = 0,10$, por exemplo, encontram-se 135 rejeições da hipótese $H_0: \theta = 0$, em favor da hipótese $H_1: \theta \geq 0,50$.

Tabela 6.1.1 - Número de rejeições de H_0 , para diferentes valores de θ , fixados vários níveis de probabilidades ($\alpha' = \beta'$) para cada δ .

θ	δ												
	0,50						1,00						
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20	0,20
0,00	0	70	135	292	7	61	133	319	6	55	117	300	
0,50	1.470	1.427	1.390	1.268									
0,75	1.500	1.500	1.496	1.448									
1,00	1.500	1.500	1.497	1.488	1.490	1.443	1.397	1.348					
1,25	1.500	1.500	1.500	1.500	1.500	1.497	1.474	1.445					
1,50					1.500	1.496	1.496	1.476	1.494	1.475	1.468	1.426	
1,75					1.500	1.498	1.500	1.487	1.500	1.485	1.487	1.476	
2,00					1.500	1.500	1.500	1.498	1.500	1.497	1.494	1.492	
2,25					1.500	1.500	1.500	1.500	1.500	1.498	1.496	1.495	
2,50									1.500	1.499	1.500	1.499	
2,75									1.500	1.500	1.500	1.500	

Como

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\text{Número de rejeições}}{N} / H_0 \right\} \rightarrow \alpha ,$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\text{Número de rejeições}}{N} / H_1 \right\} = 1 - \beta ,$$

obtêm-se $\alpha = 0,09$ e $\beta = 0,07$, prevalecendo a relação $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta'$.

Os erros α' e β' são fixados inicialmente para se obter as regiões de decisão, caso contrário, é de uma dificuldade enorme o cálculo de tais regiões, devido à complexidade das equações (WALD, 1947).

Com o aumento da média θ , a alternativa se afasta cada vez mais da nulidade, aumentando o número de rejeições.

À medida que os riscos aumentam, a amplitude da região de decisão fica menor, como mostra a Tabela 6.1.2, chegando com isso a decisões mais rápidas.

Tabela 6.1.2 - Valores de A e B que determinam as regiões de decisão.

α'	β'	B	A
0,01	0,01	-4,59	4,59
0,05	0,05	-2,94	2,94
0,10	0,10	-2,19	2,19
0,20	0,20	-1,38	1,38

De posse dos valores de α e β , é calculado o poder do teste. A Tabela 6.1.3 apresenta os poderes para o teste t-seqüencial para diferentes valores de δ e θ .

Com o aumento de θ , para um mesmo risco o poder aumenta, pois como foi visto, o número de rejeições aumenta, e como $P = N^\circ \text{ de rejeições} / N$, sendo N fixo igual a 1.500, o poder é diretamente proporcional ao número de rejeições.

Tabela 6.1.3 - Poder do teste t-seqüencial para diferentes valores de θ , fixados vários níveis de probabilidades ($\alpha' = \beta'$) para cada δ .

θ	δ												
	0,50				1,00				1,50				
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20	0,20
0,00	-	0,047	0,090	0,195	0,005	0,041	0,089	0,213	0,004	0,037	0,078	0,200	
0,50	0,980	0,951	0,927	0,845									
0,75	1,000	1,000	0,997	0,965									
1,00	1,000	1,000	0,998	0,992	0,993	0,962	0,931	0,899					
1,25	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,983	0,963					
1,50					1,000	0,997	0,997	0,984	0,996	0,983	0,979	0,951	
1,75					1,000	0,999	1,000	0,991	1,000	0,990	0,991	0,984	
2,00					1,000	1,000	1,000	0,997	1,000	0,998	0,996	0,995	
2,25					1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,997	
2,50									1,000	0,999	1,000	0,999	
2,75									1,000	1,000	1,000	1,000	

Para $\theta = 0,00$ têm-se as melhores aproximações para α em relação a α' .

Devido às limitações do programa o número máximo permitido de simulações é 1.500. mas se fosse possível o aumento para N melhores aproximações seriam obtidas.

A Figura 6.1.1 mostra um conjunto de Curvas Características de Operação para o teste t-sequencial para diversos erros, fixado $\delta = 1,00$.

Essas curvas não são essenciais para o teste sequencial mas, seu estudo, permite avaliar o desempenho do teste, além de permitirem o cálculo dos poderes para complementação da tabela 6.1.3.

Figura 6.1.1 - Curva Característica de Operação para $\delta = 1,0$ e vários níveis de probabilidade.

Como $L(\theta) = \Pr \{ \text{aceitar } H_0 / \theta \} = 1 - \text{Poder do teste}$, para o cálculo de $L(\theta)$ basta subtrair de um os valores obtidos pela Tabela 6.1.3.

Para a complementação da Tabela 6.1.3, no caso de se querer o poder para uma média igual a 0,25, por exemplo, basta consultar a Figura 6.1.1 e tal resultado é diretamente obtido.

As Tabelas 6.1.4 e 6.1.5 mostram o número de observações para os testes t-seqüencial e t de Student para diferentes valores de θ fixados vários níveis de probabilidades para cada δ .

Como já foi explicado anteriormente, o fato de se aumentar os erros $\alpha' = \beta' = 0,20$, por exemplo, acarreta uma amplitude menor para a região de decisão, proporcionando com isto um menor número de observações para se chegar a uma decisão.

A literatura informa que o número de observações necessário para se chegar a uma decisão para o teste seqüencial é aproximadamente a metade do número requerido pelo teste não-seqüencial e este fato é comprovado pelas Tabelas 6.1.4 e 6.1.5

Fixado um poder de 98%, por exemplo, enquanto que para o teste t-seqüencial é necessário, em média, 41 observações para se chegar a uma decisão, para o teste t de Student precisa-se de 84 observações.

Tabela 6.1.5 - Número de observações para o teste t de Student para diferentes valores de θ , fixados vários níveis de probabilidades ($\alpha' = \beta'$) para cada δ .

θ	δ											
	0,50				1,00				1,50			
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20	0,01	0,05	0,10	0,20
0,50	84	45	32	15								
0,75			31	13								
1,00			18	11	27	14	9	5				
1,25					15	8	6					
1,50					11	9	5		14	10	6	4
1,75					9		4		7	6	4	
2,00							5		7	5	4	
2,50									6		4	

Com o aumento de δ , a relação entre o número de observações requerido por ambos os testes vai diminuindo, chegando a certa altura que a diferença entre os testes se torna mínima, mas dificilmente se igualando, prevalecendo a necessidade de mais observações para o teste de Student.

Convém ressaltar que a Tabela 6.1.4 apresenta o número médio de observações requeridas pelo teste t-seqüencial para se chegar a uma decisão, não é o valor exato para N , pois, uma das principais características dos testes seqüenciais é que N seja uma variável aleatória.

A Figura 6.1.2 mostra um conjunto de curvas do tamanho médio das amostras para o teste t-seqüencial com $\delta = 1,00$.

Como a hipótese alternativa é $H_1: \theta \geq 1,0$, no intervalo de $0 - 1,0$, têm-se a zona de indiferença para o teste, verificando-se altas esperanças para N ; a partir de $\theta = 1,0$, a curva do tamanho médio de amostras tende a diminuir.

Devido ao fato de não se ter o valor exato para N , corre-se o risco de tomar o teste t-seqüencial como o melhor teste para uma determinada hipótese, quando na verdade o teste t de Student se apresenta em condições mais vantajosas.

Economicamente, o fato de se tomar decisões erradas a respeito dos testes traz prejuízos financeiros, apesar de que estes prejuízos não são de grande monta, devido ao fato da baixa probabilidade que se tem de tomar uma decisão errada, como mostra a Tabela 6.1.6.

Figura 6.1.2 - Curvas do Tamanho Médio de Amostra, para $\delta = 1,0$ e vários ris
cos.

Tabela 6.1.6 - Riscos aproximados, em %, cometidos na decisão de que o teste t-sequencial é o mais apropriado para o estudo da hipótese $H_0: \theta = 0$ versus $H_1: \theta \geq \delta$.

θ	δ											
	0,50				1,00				1,50			
	0 01	0 05	0 10	0 20	0 01	0 05	0 10	0 20	0 01	0 05	0 10	0 20
0,50				16,800								
0,75				7,467								
1,00			0,467	2,200	5,133	11,667	12,000	12,467				
1,25						1,330	6,067	2,600				
1,50					0,867	0,000	3,000	7,467	4,000	13,067	8,400	
1,75					2,267		6,000		9 333	5 667	4,400	
2,00							0,000		3,400	6,333	1,600	
2,50									1,533		0,000	

A Tabela 6.1.6 mostra, por exemplo, para $N = 9$, que o risco de se tomar o número de observações para o teste t-seqüencial maior do que o número de observações para o teste t de Student é de 0,467%.

6.2 - Robustez do Teste t-Seqüencial

Após a simulação de 1.500 seqüências de observações com distribuições de Poisson e Normal para testar a hipótese $H_0: \theta = 2,0$ versus $H_1: \theta = 2,0 + \delta\sigma$ para $\sigma = 1,0$, obteve-se para a hipótese de nulidade e para diversas alternativas considerando δ fixo igual a 1,50, a seguinte tabela comparativa entre as distribuições.

Tabela 6.2.1 - Resultados obtidos para o teste t-seqüencial quando as seqüências de observações são simuladas com distribuições de Poisson e Normal.

θ	$\alpha' = \beta' = 20,00\%$									
	Poisson					Normal				
	E(N)	V(N)	α	β	P	E(N)	V(N)	α	β	P
2,0	2,55	1,34	13,33	13,33	86,67	2,52	1,26	19,80	19,80	80,20
3,5	3,42	5,39	-	34,60	65,40	2,67	1,54	-	4,10	95,87
4,0	3,32	4,39	-	20,00	80,00	2,32	0,59	-	0,53	99,47
4,5	3,19	3,89	-	10,20	89,80	2,15	0,21	-	0,07	99,93
5,0	2,91	2,44	-	5,67	94,33	2,08	0,09	-	0,00	100,00

Os resultados obtidos pela Tabela 6.2.1 mostram que tanto a esperança como a variância do número de seqüências de observações simuladas com distribuições de Poisson e Normal, diminuem conforme a média se afasta da nulidade.

Tal resultado é bem viável, pois quando a alternativa se afasta da nulidade é preciso de mais observações simuladas para se chegar a uma decisão.

Observa-se também pela Tabela 6.2.1, que sob a hipótese de nulidade, ou seja, $H_0: \theta = 2,0$, α para distribuição de Poisson é menor do que α para a distribuição Normal, comparado com um α' fixado de 20%, mostrando com isto que a não-normalidade das observações afetam o teste t-seqüencial.

Devido ao fato de que a formulação do teste t-seqüencial é feita considerando que a distribuição seguida é a Normal, o resultado obtido para α é bem compatível.

Finalmente, observa-se pela Tabela 6.2.1 que o poder aumenta quando a média se afasta da nulidade, obtendo para $H_1: \theta = 5,0$ um poder de 100%, quando os dados são provenientes da Normal, e 94,33% quando provenientes da Poisson.

Apesar de que para se obter um poder de 100% quando se usa a distribuição de Poisson a média precisaria ser maior, ou seja, estar mais distante da nulidade, verifica-se que a afirmativa de que o teste t-seqüencial é robusto não é inviável, pois, mesmo apresentando poderes menores quando calculado com outra distri-

buição sem ser Normal, para um experimentador tais poderes são altamente significativos.

Como a média usada $H_0: \theta = 2$ é bem baixa, a distribuição é bem assimétrica, tornando-se simétrica à medida que θ aumenta, aproximando-se da distribuição Normal.

7. CONCLUSÕES

Com base no estudo realizado em Resultados e Discussão, pode-se concluir que:

a) A técnica da simulação se mostra bastante eficiente aos propósitos que se querem alcançar nesse estudo, conseguindo confirmar discrepâncias significativas na literatura utilizada.

b) Para qualquer risco fixado, o poder do teste t-sequencial aumenta com o aumento da distância da hipótese alternativa em relação à hipótese de nulidade, isto é, com o aumento de θ .

c) O número de observações requerido pelo teste t-sequencial para se chegar a uma decisão, é, em média, a metade quando comparado com o teste t de Student.

Tais resultados são coerentes com os valores apresentados pela literatura tradicional, principalmente quando a alterna-

tiva não está muito longe da nulidade. No caso contrário, o número de observações requerido pelo teste t-seqüencial vai diminuindo, tornando-se cada vez mais próximo do número de observações requerido pelo teste t de Student.

d) Para um mesmo poder fixado, é necessária, em média, a metade das observações para o teste t-seqüencial quando comparado com o teste t de Student, provando, desse modo, quão poderoso o teste se apresenta no confronto com um teste não-seqüencial.

e) O maior risco encontrado no atual estudo de se tomar o número de observações para o teste t-seqüencial maior do que para o teste t de Student, é de 16,80% em todos os casos verificados, incentivando com isto o uso da análise seqüencial.

f) Do presente trabalho obtiveram-se histogramas relativos à distribuição seguida pelo número de observações (N), sendo preciso um estudo mais completo e detalhado a fim de determinar a expressão analítica de tal distribuição.

g) A não-normalidade estudada (Poisson) pouco afeta o teste t-seqüencial, sendo considerado portanto, um teste robusto.

8. SUMMARY

Agronomic Experimentation is a difficult and dangerous technique especially when one wants to make decisions about bettering his method to be utilized in his work.

The present work has as an objective the introduction to Sequential Analysis specifically to the Sequential t-test in respect to its power and robustness when compared with another equivalent test which is not sequential.

Such a comparison is done by a data simulation technique thus getting results which when well utilized are very efficient for the purpose.

The number of observations is a function of one infinite sequence of data with a probability equal to 1 to get to a decision whether to accept or reject the hypothesis $H_0: \theta = 0$ in

favor of $H_1: \theta \geq \delta$.

Data are simulated by the sub-routine UNNOR (Appendix I) with a Normal distribution of average θ and variance σ^2 .

For the fixed risks α' and β' a number of rejections are obtained for each case; non-rejections of the nullity hypothesis inspite of the expectation and variance of N .

The calculations of the average number of observations for the sequential t-test are done with the intention of comparing with a number of observations for the Student t-test, thus verifying that on the average fewer observations are necessary for the sequential test.

When an alternative hypothesis is close to the null hypothesis, it is verified in this work that the number of observations required by the sequential test is, on the average, half of that required by the Student t-test, thus agreeing with the results presented by the traditional literature.

From the way by which the alternative hypothesis is itself distant from nullity the relation between the number of observations presented by the tests keeps decreasing to wards distant alternatives until they equalise themselves.

The power for the tests is calculated and in all the cases studied of the sequential t-tests, it is more on the average.

An estimate of the probability of deciding upon the more powerfull test (Sequential or non-sequential) wrongly is ob-

tained and a result as high as 16,80% is gotten in the worst condition.

The Power Function and the Average Sample Size for $\delta = 1,00$ are presented in graphs.

Along with other conclusions reached, the present work verifies that the non-normality study of data allows the conclusion that sequential t-test is not strongly affected by the principles for which it was formed; thus characterising more, in this way, its robustness.

9. BIBLIOGRAFIA

ANDERSON, R.L. e T.A. BANCROFT, 1952. Statistical Theory in Research. Nova York, McGraw-Hill, 399 pp.

ARNOLD, K.J., 1951. Tables to facilitate Sequential t-test. Washington, National Bureau of Standards, Applied Mathematic Series, 7: 82 pp.

BARNARD, G.A., 1946. Sequential Tests in Industrial Statistics. Londres, Journal of the Royal Statistical Society, B, 8(1):60-66.

BILLARD, L., 1972. Properties of Some Two-Sided Sequential Tests for the Normal Distribution. Londres, Journal of the Royal Statistical Society, B, 34(3):417-426.

BURK, R.H., 1975. Comparing Sequential and Non-Sequential Tests. São Francisco, The Annals of Statistics, 3(4):991-999.

CALZADA BENZA, J., 1964. Métodos Estadísticos para la Investigación. 2.^a edição. Lima, Ministério de Agricultura, 484 pp.

- CAMPOS, H., 1976. Estatística Experimental Não-Paramétrica. Piracicaba, ESALQ/USP, 332 pp.
- CARVALHO, J.R.P., 1978. Uso da Probabilidade do Erro Tipo II na Determinação do Tamanho da Amostra. (Mimeografado). Piracicaba, ESALQ/USP. Seminário apresentado no Curso de Pós-Graduação em Experimentação e Estatística.
- COCHRAN, W.G. e G.M. COX, 1965. Diseños Experimentales. México, F. Trilhas, 661 pp.
- CONOVER, W.J., 1971. Practical Nonparametric Statistics. Nova York, John Wiley, 462 pp.
- COX, D.R., 1958. Planning of Experiments. Nova York, John Wiley, 308 pp.
- CRAMER, H., 1963. Métodos Matemáticos de Estadística. Madrid, Aguilar, 660 pp.
- DAVIES, O.L., 1956. The Design and Analysis of Industrial Experiments. Nova York, Hafner Publishing, 636 pp.
- DAY, N.E., 1969. A Comparison of Some Sequential Designs. Londres, Biometrika, 56:301-311.
- DIXON, W.J. e F.J. MASSEY Jr., 1959. Introduction to Statistical Analysis. Nova York, McGraw-Hill, 638 pp.
- ESTEFANEL, V., 1977. A Amostragem Seqüencial Baseada no Teste Seqüencial da Razão de Probabilidade e seu Uso no Controle das Lagartas de Soja do Estado do Rio Grande do Sul. Piracicaba, ESALQ/USP, 117 pp. (Dissertação de Mestrado).

- EWENS, W.J., 1950. Departures from Assumption in Sequential Analysis. Londres, Biometrika, 48:206-211.
- FEDERER, W.T., 1955. Experimental Design, Theory and Application. Nova York, MacMillan, 544 pp.
- FERRIS, C.D.; F.E. GRUBBS; C.L. WEAVER, 1946. Operating Characteristics for the Common Statistical Tests of Significance. Baltimore, The Annals of Mathematical Statistics, 17:178-197.
- FREEMAN, H., 1970. Introducción a la Inferencia Estadística. México, Editorial Trillas 464 pp.
- FREEMAN, P.R., 1972. Sequential Estimation of the Size of a Population. Londres, Biometrika, 59:9-17.
- GIBBONS, J.D., 1971. Nonparametric Statistical Inference. Nova York, McGraw-Hill, 463 pp.
- GODINHO, P.H., 1973. Aspectos da Aplicação da Potência dos Testes Estatísticos. Assis, 203 pp. (Tese de Doutorado).
- GOVINDARAJULU, Z., 1975. Sequential Statistical Procedures. Nova York, Academic Press, 565 pp.
- HAJNAL, J., 1961. A Two-Sample Sequential t-Test. Londres, Biometrika, 48:65-75.
- HARRIS, M., D.G. HORVITZ e A.M. MODD, 1948. On the Determination of Sample Sizes in Designing Experiments. Washington, Journal of the American Statistical Association, 43:391-402.

- JOANES, D.N., 1972. Sequential Tests of Composite Hipotheses. Londres, Biometrika, 59:633-637.
- JOHNSON, N.L. e B.L. WELCH, 1939. Applications of the Non-Central t-Distribution. Londres, Biometrika, 31:362-389.
- KEEPING, E.S., 1962. Introduction to Statistical Inference. Princeton, D. Van Nostrand Company, 451 pp.
- KENDALL, M.G. e A. STUART, 1967. The Advanced Theory of Statistical. Vol. 2, Londres, Charles Griffin, 690 pp.
- KREYSZIG, E., 1974. Introductory Mathematical Statistics, Principles and Methods. Nova York, John Wiley, 505 pp.
- LEHMANN, E.L., 1959. Testing Statistical Hypotheses. Nova York, John Wiley, 369 pp.
- LI, J.C.R., 1969. Statistical Inference. Vol. 1. Ann Arbor, Edwards Brothers, Inc., 658 pp.
- MEYER, P.L., 1969. Probabilidade, Aplicações à Estatística. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 391 pp.
- MODD, A.M. e F.A. GRAYBILL, 1950. Introduction to the Theory of Statistics. Nova York, McGraw-Hill, 443 pp.
- MURILLO MARQUES, R., 1969. Elementos de Estatística. Campinas, UNICAMP, 137 pp.
- NEYMAN, J. e E.S. PEARSON, 1928. On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference. Londres, Biometrika, 20A:175-240 e 263-294.

- NEYMAN, J. e B. TOKARSKA, 1936. Errors of the Second Kind in Testing "Student's" Hypothesis. Washington, Journal of the American Statistical Association, 31:318-326.
- OSTLE, B., 1963. Statistics in Research. Ames Iowa State University Press, 629 pp.
- OWEN, D.B., 1962. HandBook of Statistical Tables. Reading, Addison-Wasley Publishing Company, 580 pp.
- OWEN, D.B., 1965. The Power of Student's t-Test. Washington, Journal of the American Statistical Association, 60:320-333.
- PACITTI, T., 1970. Fortran-Monitor, Princípios. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 347 pp.
- PIMENTEL GOMES, F., 1971. Iniciação à Estatística. São Paulo, Livraria Nobel, 205 pp.
- RUSHTON, S., 1950. On a Sequential t-Test. Londres, Biometrika: 37:326-333.
- RUSHTON, S., 1952. On a Two-Sided Sequential t-Test. Londres, Biometrika, 39:302-308.
- SACKS, J., 1965. A note on the Sequential t-Test. Baltimore, Annals of Mathematical Statistics, 36:1867-1869.
- SIEGEL, S., 1977. Estatística Não-Paramétrica para as Ciências do Comportamento. São Paulo, McGraw-Hill, 350 pp.
- SILVEY, S.D., 1970. Statistical Inference. Middlesex, Penguin Books, 192 pp.

SISKIND, V., 1964. On Certain Suggested Formulae Applied to the Sequential t-Test. Londres, Biometrika, 51:97-106.

SPIEGEL, M.R., 1971. Estatística. Rio de Janeiro, McGraw-Hill, 580 pp.

TALLIS, G.M. e M.K. VAGHOLKAR, 1965. Formulae to Improve Wald's Approximation for Some Properties of Sequential Tests. Londres, Journal of the Royal Statistical Society, B, 27(1):74-81.

WALD, A., 1947. Sequential Analysis. Nova York, John Wiley, 212 pp.

WEISS, L. e J. WOLFOWITZ, 1972. An Asymptotically Efficient, Sequential Equivalent of the t-Test. Londres, Journal of the Royal Statistical Society, B, 34(3):456-460.

WHITEHEAD, J., 1974. A Sequential Test for Certain Composite Hypotheses. Londres, Journal of the Royal Statistical Society, B, 37(2):198-204.

10. APÉNDICE

Apêndice I - Sub-Rotina UNNOR, que gera números aleatórios com densidade Normal de média θ e variância σ^2 .

```
SUBROUTINE UNNOR (X1,XM,E,IX)
  DIMENSION U(2)
  DO 1 I=1,2
    IY=IX*899
    IF(IY)5,6,6
5   IY=IY+32767+1
6   YFL=IY
    YFL=YFL/32767.
    U(I)=YFL
1   IX=IY
    U(1)=6.2831854*U(1)
    U(2)=SQRT(-2*ALOG(U(2)))
    X1=U(2)*COS(U(1))
    X1=XM+E*X1
    RETURN
  END
```

Apêndice II - Histograma para o número de observações (N) fixados $\alpha' = \beta' =$
 $= 0,05$, $\theta = 0,50$ e $\delta = 1,50$.

Apêndice III - Listagem do Programa para o cálculo do poder do teste t de Student, incluindo a sub-rotina GAMMA e a FUNCTION Z(T,U,G,DELTA).

```

SUBROUTINE GAMMA(XX,GX,IER)
  IF(XX-34.5)6,6,4
4  IER=2
  GX=1.E38
  RETURN
6  X=XX
  ERR=1.0E-6
  IER=0
  GX=1.0
  IF(X-2.0)50,50,15
10 IF(X-2.0)110,110,15
15 X=X-1.0
  GX=GX*X
  GO TO*10
50 IF(X-1.0)60,120,110
C   SEE IF X IS NEAR NEGATIVE INTEGER OR ZERO
60 IF(X-ERR)62,62,80
62 K=X
  Y=FLOAT(K)-X
  IF(ABS(Y)-ERR)130,130,64
64 IF(1.0-Y-ERR)130,130,70
C   X NOT NEAR A NEGATIVE INTEGER OR ZERO
70 IF(X-1.0)80,80,110
80 GX=GX/X
  X=X+1.0
  GO TO 70
110 Y=X-1.0
  GY=1.0+Y*(-0.5771017+Y*(+0.9858540+Y*(-0.8764218+Y*(+0.8328212+
  IY*(-0.5684729+Y*(+0.2548205+Y*(-0.05149930))))))
  GX=GX*GY
120 RETURN
130 IER=1
  RETURN
END

```

```

FUNCTION Z(T,U,G,DELTA)
TANG=SIN(U)/COS(U)
XN=(T*TANG/SORT(G))-DELTA
X=ABS(XN)
C   CALCULO DO POLINOMIO
    A1=1/(1+0.231642*X)
    A2=A1*A1
    POLI= 1-0.398942*EXP(-X**2/2)*(0.319382*A1 -0.356564*A2+1.781480*A
.1*A2-1.821256*A2*A2+1.330274*A1*A2**2)
C   CALCULO DE UM COMPLEMENTO DA INTEGRAL
    C1=TANG**(G-1)
C   CALCULO DO SEGUNDO COMPLEMENTO DA INTEGRAL
    C2=0.398942*EXP(-TANG**2/2)
C   JACOBIANO, TERCEIRO COMPLEMENTO DA INTEGRAL
    C3=1/COS(U)**2
    IF(XN)20,25,25
20  PX=1.0-POLI
    GO TO 27
25  PX=POLI
27  CONTINUE
    Z=PX*C1*C2*C3
    RETURN
END

```

```

EXTERNAL SIN,COS,GAMA,EXP,SQRT
READ(2,1000)XIN,XFI,N
1000 FORMAT(2F8.6,I5)
H=(XFI-XIN)/(N-1)
15 READ(6,9)G,T,DELTA
9 FORMAT(F5.1,F6.4,F5.2)
NN=N
XX=G/2.0
C CALCULO DA CONSTANCE
CALL GAMMA(XX,GX,IER)
CONS=(2.506628/(GX*2**((G-2)/2)))
AREA=0.
N=N-2
U=XIN
DO 120 I=3,N,2
U=U+2*H
U1=U-H
120 AREA=AREA+4*Z(T,U1,G,DELTA)+2*Z(T,U,G,DELTA)
XFIH=XFI-H
AREA=H*(AREA+Z(T,XIN,G,DELTA)+Z(T,XFI,G,DELTA)+4*Z(T,XFIH,G,DELTA)
.) /3.
AREA=AREA*CONS
N=N+1
WRITE(1,2000)G,T,DELTA,AREA
WRITE(3,2000)G,T,DELTA,AREA
2000 FORMAT(1X,'G=',F5.1,3X,'T=',F6.4,3X,'DELTA=',F6.2,3X,'BETA=',E14.7
.)
N=NN
GO TO 15
END

```

Apêndice IV - Sub-Rotina POI, que gera números aleatórios com densidade de Poisson e parâmetro θ .

```

SUBROUTINE POI(II,XLAMB,IX)
C=EXP(-XLAMB)
CALL RANDU(IX,IY,YFL)
IX=IY
X=YFL
I=0
A=1
P=C
S=1.
IF(P-X)10,10,11
10 I=I+1
A=A*XLAMB/I
S=S+A
P=C*S
IF(P-X)10,10,11
11 II=I
RETURN
END

```