COMPARAÇÃO DO PODER DO TESTE DE JONCKHEERE E DA ESTATÍSTICA $\bar{X}_{\text{rank}}^2$ PARA ALTERNATIVAS ORDENADAS

GILÊNIO BORGES FERNANDES
Engenheiro Agrônomo

Orientador: Prof. Dr. HUMBERTO DE CAMPOS

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de Concentração "Estatística e Experimentação Agronômica".

PIRACICABA
Estado de São Paulo - Brasil
Julho - 1984

Aos meus pais

Chico e Nena

Aos meus irmãos

Getúlio

Genádio

Genário - in memoriam

Gilberto

Gildete

Godson

Geracy

Geysa

À Eliene

DEDICO

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Humberto de Campos, pelo estímulo e principalmente pela valiosa orientação durante o curso de Pós-graduação e na realização deste trabalho.

- Ao Prof. Dr. Antonio Francisco Iemma, pela sugestão do tema, incentivo e amizade.

- Aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática e Estatística da ESALQ, pelos ensinamentos e constante disponibilidade.

- À Empresa de Pesquisa Agropecuária da Bahia - S.A. - EPABA, pela oportunidade para realização do curso de Pós-graduação.

- Ao colega João Albany Costa pela constante amizade, apoio e incentivo, durante todo o exercício de nossa profissão.

- Ao Centro de Processamento de Dados (CPD) da Universidade Federal da Bahia pelo apoio e disposição de seus equipamentos para realização deste trabalho.

- À Analista de Sistemas Maria Madalena G. Fernandez e ao Acadêmico de Processamento de Dados Luiz Cláudio de A. Mendonça, pela atenção e valioso apoio na elaboração das sub-rotinas FORTRAN e demais tarefas de processamento de dados.

- Às Biblioteconomistas Lícia Melo de Paiva e Rosângela Barbosa Machado, pelo apoio na obtenção de separatas e revisão na citação de literatura.

- Ao Professor Jonas Machado da Costa pelas correções na versão do Resumo.

- À Professora Ana Maria Salgado Lobo pelas correções de Portugues.

- Aos colegas do curso de Pós-graduação pelo companherismo e amizade.

- À Aparecida de Fátima Florêncio, secretária do Departamento de Planejamento da EPABA, pelo trabalho datilográfico.

- A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

ÍNDICE

	Página
RESUMO	viii
SUMMARY	xí
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	5
2.1. Considerações sobre poder de testes	5
2.2. Os problemas levantados e a necessidade dos testes	7
2.3. O teste de Jonckheere	10
2.3.1. Cálculo da estatística do teste de Jonckheere.....	16
2.3.2. A ocorrência de empates	22
2.3.3. A distribuição nula da estatística do teste	25
2.3.4. Distribuição da estatística do teste para o caso de grandes amostras	29
2.3.5. Os testes unilateral e bilateral	30
2.3.6. O poder do teste de Jonckheere	31
2.4. O teste baseado na estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	34
2.4.1. O teste da razão de verossimilhança ...	35
2.4.2. As estatísticas $\bar{\chi}_k^2$ e $\bar{E}^2$	36
2.4.3. A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	37

2.4.4. Um procedimento para obter as estimativas de máxima verossimilhança de parâmetros sob restrições de ordem..	40
2.4.5. A distribuição nula da estatística χ^2_{rank}	42
3. MATERIAL E MÉTODOS	45
3.1. Procedimento geral de comparação dos testes	45
3.2. Critérios de seleção das configurações das médias verdadeiras.....	48
3.3. As estatísticas dos testes	51
3.3.1. A estatística J de Jonckheere.....	51
3.3.2. A estatística χ^2_{rank}	52
3.4. Simulação	53
3.4.1. Geração de variáveis aleatórias	53
3.4.2. Geração de variáveis aleatórias com distribuição uniforme	55
3.4.3. Geração de variáveis aleatórias com distribuição normal.....	57
3.5. Simulação das amostras e critério utilizado para estimar o Erro Tipo I e o poder dos testes	60
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	63
4.1. Configurações 1, 7, 8 e 9 de k = 3 médias .	63
4.2. Configurações 2 a 6 de k = 3 médias	66
4.3. Configurações 10 a 15 (H_2 e H_3)	74

4.4. Configurações 16, 17 e 18	78
5. CONCLUSÕES	81
6. LITERATURA CITADA	83
7. APÊNDICE	87

COMPARAÇÃO DO PODER DO TESTE DE JONCKHEERE E DA ESTATÍSTICA
 $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ PARA ALTERNATIVAS ORDENADAS

Autor: Gilênio Borges Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Humberto de Campos

RESUMO

Os testes de Jonckheere e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ (Chacko-Shorack) foram comparados através da função empírica de poder, estimada com dados simulados, considerando-se as distribuições normal e uniforme.

Definiu-se como uma configuração, o arranjo de três médias, μ_1, μ_2, μ_3 para o qual, foi efetuado o teste de hipóteses, $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra a alternativa ordenada $H_a: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, com pelo menos uma desigualdade prevalecendo.

Utilizaram-se 18 configurações, cada uma com $k=3$ médias verdadeiras, sendo que, para as configurações 7 a 18, considerou-se três coeficientes de variação fixados em 10%, 20% e 30%. Para cada configuração de três médias foram simulados dados tomando-se $n_1 = n_2 = n_3 = n$ onde n (tamanho de amostras) assumiu os valores 3, 5 e 8.

As configurações de médias 2 a 6 ($H_1: \mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$) e 10 a 15 ($H_2: \mu_1 = \mu_2 = \mu - 0,6 \sigma_p$, $\mu_3 = \mu + 1,2 \sigma_p$ e $H_3: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu + 0,6 \sigma_p$) constituíram situações de ordenação parcial ou incompleta, da hipótese alternativa ordenada H_a . As configurações 16 a 18 ($H_4: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p$, $\mu_2 = \mu + 0,4 \sigma_p$, $\mu_3 = \mu + 0,8 \sigma_p$) representaram casos de ordenação completa da hipótese alternativa. Em H_1 , C assumiu os valores 0,3, 0,6, 0,9, 1,2 e 1,5. Para H_2 , H_3 e H_4 os valores atribuídos a μ e σ_p ($p = 1, 2, 3$) foram 100, 10, 20 e 30 respectivamente.

Para cada distribuição e tamanho de amostra foram simulados quatro mil experimentos, calculando-se as estatísticas dos testes em cada um deles e efetuando-se o teste de hipóteses. As estimativas do Erro Tipo I ($\hat{\alpha}$) e do poder de cada teste foram obtidos respectivamente por

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{Nº de decisões } (H_a | H_a \text{ é falsa})}{\text{Nº total de experimentos}}$$

$$\text{Poder estimado} = \frac{\text{Nº de decisões } (H_a | H_a \text{ é verdadeira})}{\text{Nº total de experimentos}}$$

As estimativas do poder foram obtidas considerando-se $\alpha \approx 0,01$, $\alpha \approx 0,05$ e $\alpha \approx 0,10$. As estimativas do Erro Tipo I e do poder não foram muito afetados pelo coeficiente de variação e pela distribuição considerada.

Quanto ao poder, o teste de Jonckheere apresentou-se mais sensível ao tipo de ordenação. Nos casos de ordenação parcial (configurações 2 a 6) e $n = 3$ o teste $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi mais poderoso.

POWER COMPARISON OF JONCKHEERE'S TEST AND $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ STATISTIC FOR
ORDERED ALTERNATIVES

Author: Gilênio Borges Fernandes

Adviser: Prof. Dr. Humberto de Campos

SUMMARY

The Jonckheere's and $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ (Chacko-Shorack) tests were compared through the power empirical function, estimated with simulated data, considering the normal and uniform distribution.

As one configuration were defined, the three means array, μ_1, μ_2, μ_3 for which, were effected the hyphotesis test, $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ against the ordered alternative $H_a: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, with at least one strict inequality.

Eighteen configurations were used, each one with $k = 3$ true means. Three levels of coefficient of variation fixed at 10, 20 and 30 percent were considered, for configuration from seven to eighteen. For each configuration of three means, data were simulated taking in account $n_1 = n_2 = n_3 = n$, doing n (sample size) equal to 3, 5 and 8.

The configurations of means 2 to 6 ($H_1: \mu_1 = -2C, \mu_2 = \mu_3 = C$) and 10 to 15 ($H_2: \mu_1 = \mu_2 = \mu - 0,6 \sigma_p, \mu_3 = \mu + 1,2 \sigma_p$ and $H_3: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p, \mu_2 = \mu_3 = \mu + 0,6 \sigma_p$) had represented, general conditions of partial or incomplete ordering of the ordered alternative hypothesis H_a . The configurations 16 to 18 ($H_4: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p, \mu_2 = \mu + 0,4 \sigma_p, \mu_3 = \mu + 0,8 \sigma_p$) had represented case of complete ordering of the ordered alternative hypothesis. In H_1 , C assumed the values 0.3, 0.6, 0.9, 1.2 and 1.5. For H_2 , H_3 and H_4 the values attributed to μ and σ_p ($p = 1, 2, 3$) were 100, 10, 20 and 30 respectively.

Four thousand experiments were simulated for each distribution and sample size. The statistics of the tests were calculated and the hypothesis test was done for each experiment. The estimates of the power and Type I Error ($\hat{\alpha}$) of each test were obtained by following rates respectively

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{number of decisions } (H_a | H_a \text{ is false})}{\text{total number of experiments}}$$

$$\text{Estimate power} = \frac{\text{number of decisions } (H_a | H_a \text{ is true})}{\text{total number of experiments}}$$

The estimates of the power were obtained considering $\alpha \approx 0.01$, $\alpha \approx 0.05$, and $\alpha \approx 0.10$. Estimates of the Type I Error and power weren't very affected by the coefficient of variation and by the considered distribution.

Concerning the power, the Jonckheere's test showed more sensitive to the type of ordering. In the partial ordering situations (configurations 2 to 6 and 10 to 15) and $n = 3$ the $\bar{\chi}_{\text{rank}}^{-2}$ showed more powerfull.

1. INTRODUÇÃO

A maior parte da teoria estatística sobre teste de hipóteses, foi desenvolvida considerando-se que as amostras são de população com distribuição normal e até mesmo, muitas vezes, pressupondo-se a variância σ^2 , conhecida. Diante da violação de tais pressuposições, é provado que a maioria desses testes não sejam robustos, especialmente quando o número n_i de observações por amostra, é pequeno. Assim surgiu a necessidade do desenvolvimento da teoria dos denominados testes de livre distribuição, que são úteis para os casos em que nada é conhecido a respeito da distribuição.

No caso da análise de variância não-paramétrica, frequentemente os pesquisadores aplicam o teste de Kruskal - Wallis para a classificação simples ou o teste de Friedman na classificação dupla, para testar a hipótese de nulidade $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, contra a hipótese alternativa $H_a: \mu_i \neq \mu_j$ para algum par i, j , com $i \neq j$. Na pesquisa científica, muitas vezes, a própria natureza do problema prático pode permitir restringir

que as médias devam situar-se numa determinada região do espaço de parâmetros. Pode ser razoável admitir, "a priori", que as médias de tratamentos envolvidas num determinado estudo se dispõem numa ordem não decrescente, por exemplo.

Uma fraqueza dos testes estatísticos padrões da costumeira análise de variância, para a alternativa $\mu_i \neq \mu_j$, é que eles não utilizam completamente a informação "a priori", muitas vezes vantajosa para certas hipóteses alternativas especificadas. O aproveitamento deste tipo de informação preliminar, pode melhorar sensivelmente o poder do teste a ser utilizado. Este assunto tem sido estudado por alguns autores com o título inferência estatística sob restrições de ordem.

Algumas estatísticas são encontradas na literatura para o caso em que se tem k populações e de cada população i ($i=1,2,\dots,k$), é tomada uma amostra de n_i observações $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$, para testar a hipótese nula

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (1.1)$$

contra a hipótese alternativa ordenada geral

$$H_a: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \quad (1.2)$$

onde pelo menos uma desigualdade de H_a deve prevalecer.

Se for admitido que a variável aleatória X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) tem função de distribuição F_i e que as amostras das diferentes populações são independentes o teste de hipóteses pode ser estruturado como

$$H_0: F_1 \equiv F_2 \equiv \dots \equiv F_k$$

$$H_a: F_1 \geq F_2 \geq \dots \geq F_k$$

com pelo menos uma desigualdade de H_a prevalecendo.

A alternativa $F_1 \geq F_2 \geq \dots \geq F_k$ traduz que há uma ordenação estocástica das populações, ou seja, as observações da população 1 tendem a ser menores ou iguais às da população 2, e as desta, menores ou iguais às das populações 3, e assim por diante.

Para os testes de livre distribuição, quando se trata de duas amostras independentes, o problema estatístico de testar H_0 (1.1) contra H_a (1.2) pode ser tomado como um caso de aplicação do teste unilateral de Wilcoxon, sendo que a hipótese alternativa H_a , neste caso fica $\mu_1 < \mu_2$. Para o caso de k amostras independentes ($k > 2$), alguns testes estatísticos são sugeridos, tais como: o teste de Jonckheere, o teste de Page a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$; etc.

Na prática, sendo satisfeitas as exigências de cada teste, geralmente a opção é feita por aquele que apresenta menor complexidade de cálculos e disponibilidade de tabelas de limites críticos. Nem sempre os livros textos de estatística não-paramétrica discutem o poder dos testes para hipóteses alternativas ordenadas. Também as tabelas de limites críticos para estes testes são deficientes devido à complexidade de cálculos, para gerar suas distribuições nulas.

Neste trabalho, o propósito foi comparar a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ com o teste de Jonckheere quanto ao poder, para alguns membros da hipótese alternativa ordenada geral, dife -

rentes tamanhos de amostras e três populações ($k = 3$).

A função empírica de poder foi estimada pelo método de Monte Carlo, através de dados simulados. Para a simulação foram consideradas as distribuições normal e uniforme.

Para o teste de Jonckheere que é um dos mais aplicados, especialmente na análise de variância classificação simples, foi determinado o poder máximo que ele atinge, através de sua função exata de poder, para determinados membros de H_a (1.2).

As sub-rotinas FORTRAN para o cálculo das estatísticas J de Jonckheere e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ são apresentadas

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1. *Considerações sobre poder de testes*

Na inferência estatística, quando se trata de teste de hipóteses, é um aspecto de capital importância a fixação de uma região crítica α , baseado na qual se aceita ou rejeita uma hipótese. Define-se Erro Tipo I, com probabilidade α , como o fato de rejeitar-se uma hipótese nula (H_0) quando esta é verdadeira. O Erro Tipo II, com probabilidade β , é caracterizado pelo fato de aceitar-se uma hipótese nula quando ela é falsa.

O poder ou força ou potência de um teste, frente a uma determinada hipótese alternativa (H_a), é definido como a probabilidade de rejeitar H_0 quando esta é falsa. Sua probabilidade é $1-\beta$.

Aumentando o valor da região crítica, eleva-se

a probabilidade de se incorrer num Erro Tipo I. Por outro lado, diminuindo o valor de α , diminui-se o poder do teste.

Naturalmente, o desejável em teste de hipóteses é tornar α e β tão próximos de zero quanto possível. Na prática, α e β diminuem à medida que se aumenta o tamanho da amostra, sendo que somente quando a amostra inclui todos os elementos da população a possibilidade de erro é completamente eliminada.

STEEL e TORRIE (1980) resumem as consequências de possíveis decisões concernentes a testes de hipóteses de acordo com a Tabela 2.1.

TABELA 2.1. Decisões e suas consequências com relação ao tipo de erro.

Os dados provêm de uma pop. para a qual		Decisão relativa a		A decisão é	A probab. deveria ser
A hipótese nula H_0 é	A hipótese al- ternat. H_a é	H_0 é	H_a é		
Verdadeira	Falsa	Aceita	Rejeit.	Correta	Alta
Verdadeira	Falsa	Rejeit.	Aceita	Erro Tipo I	Baixa
Falsa	Verdadeira	Aceita	Rejeit.	Erro Tipo II	Baixa
Falsa	Verdadeira	Rejeit.	Aceita	Correta	Alta

FONTE: STEEL e TORRIE (1980).

Maiores detalhes sobre escolha da região crítica α , e poder de testes, podem ser vistos, entre outros, em DI

XON e MASSEY (1969), COSTA NETO (1981), FONSECA e MARTINS (1982) e CONOVER (1971).

2.2. Os problemas levantados e a necessidade dos testes

JONCKHEERE (1954) menciona um experimento em que quatro grupos de indivíduos são submetidos a desempenhar uma tarefa sob quatro diferentes níveis de "stress". A hipótese nula é aquela de que, os quatro grupos constituem uma amostra aleatória de uma única população, a ser testada contra a alternativa de que o número de erros cometidos aumenta com o aumento do grau de "stress".

Hundall (1969) citado por HOLLANDER e WOLFE (1973) e POTTER e STURM (1980) trata de um problema referente ao grau de conhecimento dos resultados, como incentivo num processo repetitivo industrial. Três grupos de indivíduos com diferentes graus de conhecimento sobre os resultados foram estudados. A hipótese alternativa admitida foi a de que o incentivo cresce à medida que se aumenta o grau de conhecimento dos resultados.

JONCKHEERE (1954) comenta a aplicação dos testes para alternativas ordenadas no estudo de séries temporais, supondo que sobre cada uma das n sucessivas ocasiões, qualquer um dos k eventos possa ocorrer. Então pode ser testada a hipótese de que os k eventos ocorrem aleatoriamente na série de n .

ocasiões contra a alternativa de que eles tendem a ocorrer numa particular sequência ordenada de tempo.

Numa situação de análise de variância, classificação simples ou dupla, em que alguma informação prévia, não sugerida pelos dados é disponível sobre a ordenação das populações, o teste de Jonckheere e a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, diferentes da teoria dos testes de Kruskal-Wallis e Friedman, centralizam seu poder sobre as hipóteses alternativas ordenadas e não sobre qualquer alternativa. Nestas condições é evidente que os testes cujo poder está concentrado em torno de especificadas hipóteses alternativas, têm maior poder que aqueles desenvolvidos para a hipótese alternativa geral, como é o caso dos testes de Kruskal-Wallis e Friedman.

Dispondo da informação sobre a ordenação das populações, uma questão que naturalmente surge, é se o teste de Jonckheere ou a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é preferível. BARTHOLOMEW (1961 a,b), dá uma resposta para tal questão, baseando-se no modelo populacional assumido para as observações X_{ij} . Sendo estas distribuídas independentemente de acordo com

$$\Pr(X_{ij} \leq x) = F(x - \mu_i) \text{ para } j = 1, 2, \dots, n_i$$

e com os μ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) satisfazendo

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k,$$

aquele autor sugere preferir o teste de Jonckheere quando as médias μ_i estão igualmente espaçadas e o teste $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ quando os espaçamentos entre as médias μ_i são diferentes.

A sugestão de BARTHOLOMEW (1961 a,b) foi ilustrada através de dois exemplos apresentados por LEHMANN (1975, p. 238). Para o exemplo 10, a diferença entre as médias aparenta ser aproximadamente a mesma, enquanto que, no exemplo 11, não parece haver um espaçamento constante entre as médias. Os níveis mínimos de significância α , encontrados por LEHMANN (1975) para os testes de Jonckheere, Kruskal-Wallis e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ aplicados aos dois exemplos encontram-se na Tabela 2.2.

TABELA 2.2. Níveis mínimos de significância α , para os testes de Jonckheere, Kruskal-Wallis e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, para o caso de três amostras, aplicados aos dois exemplos de LEHMANN (1975).

	T E S T E S		
	Jonckheere	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	Kruskal-Wallis
Exemplo 1	0,012	0,025	0,072
Exemplo 2	0,063	0,019	0,054

FONTE: LEHMANN (1975).

Muitas vezes, mesmo se dispendo de informações "a priori" sobre a ordenação das populações, a informação sobre o espaçamento das médias μ_i pode não estar disponível. Neste caso, LEHMANN (1975) sugere que o teste baseado em $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ deve ser preferido em relação ao teste de Jonckheere.

2.3. O teste de Jonckheere

O teste de Jonckheere foi estudado pela primeira vez, independentemente, por TERPSTRA (1952) e JONCKHEERE (1954), sendo por isso, às vezes, encontrado na literatura como teste de Jonckheere - Terpstra.

O teste foi estruturado como uma extensão de outros testes anteriormente desenvolvidos para o caso de duas amostras. WILCOXON (1945) propõe um teste para duas amostras, cuja estatística a ser calculada é a soma das ordens de uma das amostras na classificação conjunta de todas as observações. MANN e WHITNEY (1947) sugerem uma estatística U , para testar se duas amostras são provenientes de uma mesma população ou de populações diferentes. A relação entre U e a estatística S do teste de Jonckheere pode ser dada por

$$S = n_1 n_2 - 2U$$

onde n_1 e n_2 são os números de observações das amostras um e dois respectivamente.

A estatística S do teste de Jonckheere foi estabelecida considerando-se a situação em que $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}), \dots, (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}), \dots, (X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kn_k})$ são k amostras aleatórias de tamanhos $n_1, \dots, n_i, \dots, n_k$ respectivamente, tomadas de populações contínuas com distribuições acumuladas

$$F_1(X), \dots, F_i(X), \dots, F_k(X)$$

arranjadas de modo que, os índices dos X's estejam na ordem implicada pela hipótese alternativa ordenada,

$$H_a: F_1(X) \geq \dots \geq F_i(X) \geq \dots \geq F_k(X)$$

para todo X, com pelo menos uma inequação prevalecendo.

O teste supõe que as observações sejam independentes, e para sua validade, a ordenação preestabelecida pela hipótese alternativa deve ser antes do conhecimento dos dados.

Genericamente, se $X_{i\alpha_i}$ é a α_i -ésima observação na i -ésima amostra, obtida de uma população com função de distribuição cumulativa $F_i(X)$, o teste de hipótese é:

$$H_0: F_i(X) \equiv F_j(X) \quad (2.1) \quad (i, j=1, 2, \dots, k, i \neq j)$$

contra a hipótese alternativa

$$H_a: F_i(X) > F_j(X) \quad (2.2) \quad (i < j) \text{ para todo } X.$$

JONCKHEERE (1954) comenta que se $F_i(X) > F_j(X)$ para todo X, e M_i e M_j sendo as medianas das duas populações, então $M_i > M_j$, mesmo que a configuração das duas distribuições seja idêntica. A estatística S do teste de Jonckheere é mais sensível às diferenças de locação entre as distribuições populacionais que as diferenças de curtose.

TERPSTRA (1952) estudou o teste para alternativas ordenadas, como uma extensão do coeficiente de correlação de Kendall (1948), quando não ocorrem empates. Aquele autor tomando como base a desigualdade:

$$\sum_{i < j} \epsilon_{j,i} > 0$$

onde $\epsilon_{j,i} = 2\Pr(X_i < X_j) - 1$, $-1 \leq \epsilon \leq +1$

definida por Mann (1945) e que traduz uma tendência ascendente assumida pelas médias, definiu a estatística do teste como

$$\tau = \sum_{i < j} U_{i,j} \quad (2.3)$$

onde $U_{i,j}$ é o número de pares (h,k) , $h \leq n_i$, $k \leq n_j$ com $i < j$ e $X_{i,h} < X_{j,k}$.

A relação entre τ e a estatística S de Kendall (1948) pode ser expressa por

$$2\tau - S = \sum_{i < j} n_i n_j$$

O critério do teste é rejeitar H_0 (2.1) em favor de H_a (2.2) se

$$\tau \geq T_\alpha \quad \text{onde,}$$

$$\Pr(\tau \geq T_\alpha \mid H_0) \leq \alpha$$

De acordo com o Teorema II de TERPSTRA (1952), sob condições de H_0 , a média e a variância de τ são dadas por

$$\mu_0 = E(\tau \mid H_0) = \frac{1}{4} (N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2)$$

$$\sigma_0^2 = \text{Var}(\tau \mid H_0) = \frac{1}{72} \{ N(N+1)(2N+1) -$$

$$- \sum_{i=1}^k n_i(n_i+1)(2n_i+1) \}$$

$$\text{onde } N = \sum_{i=1}^k n_i$$

Aquele autor prova que a rejeição da hipótese nula, se e somente se $\tau \geq T_\alpha$ é um teste consistente de H_0 (2.1) contra a classe de hipóteses alternativas.

$$H_a: \Pr (X_{i,h} < X_{j,k}) = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_{j,i}) \quad -1 \leq \epsilon_{j,i} \leq +1,$$

sendo todo $X_{j,h}$ independente e de distribuição contínua.

TERPSTRA (1953) sugere uma fórmula recorrente para a determinação da distribuição nula da estatística S de Kendall (1948) apresentando uma tabela para $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq 5$ e compara com a distribuição normal para vários níveis de α .

JONCKHEERE (1954) definiu a estatística do teste considerando

$$p_{i\alpha_i j\alpha_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{i\alpha_i} < X_{j\alpha_j} \\ 0 & \text{se } X_{i\alpha_i} > X_{j\alpha_j} \end{cases}$$

onde $i = 1, 2, \dots, k-1$; $j = i+1, i+2, \dots, k$; $\alpha_i = 1, 2, \dots, n_i$ e $\alpha_j = 1, 2, \dots, n_j$

$$p_{ij} = \sum_{\alpha_i=1}^{n_i} \sum_{\alpha_j=1}^{n_j} p_{i\alpha_i j\alpha_j} \quad (2.4)$$

Para testar H_0 (2.1) contra H_a (2.2) aquele autor propõe a estatística

$$S = 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k p_{ij} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k n_i n_j \quad (2.5).$$

Observa-se de (2.4) que a expressão

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k n_i n_j$$

é o máximo valor que pode assumir a expressão

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k p_{ij}, \text{ quando } S = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k n_i n_j$$

A estatística S definida por JONCKHEERE (1954) é o mesmo procedimento que a estatística S proposta por Kendall (1948) calculada entre duas classificações (ranking), quando uma delas contém empates e estes são considerados. Dividindo-se a estatística S (2.5) do teste de Jonckheere pelo máximo valor que ela pode assumir, obtém-se o usual coeficiente de correlação de Kendall, τ , ou seja,

$$\tau = \frac{S}{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k n_i n_j}$$

Quando uma ordenação pode ser estabelecida "a priori" para as populações, o teste de Jonckheere-Terpstra é mais adequado para o teste de hipóteses que os testes estatísticos que não consideram esta informação.

Um exemplo com $k=4$ amostras, cada uma com $n=4$ observações, apresentado por JONCKHEERE (1954), forneceu $S=46$. Efeituando as análises de variância paramétrica e não-paramétrica, aquele autor encontrou $F_{3;12} = 1,216$ e $H = 3,728$ (estatística do

teste de Kruskal - Wallis) respectivamente. É interessante notar que

$$\Pr(S \geq 46) = 0,017$$

enquanto que

$$\Pr(F_{3;12} \geq 1,216) = 0,346 \quad \text{e} \quad \Pr(H \geq 3,728) = 0,292$$

Observa-se que pelos testes F e de Kruskal-Wallis, dificilmente um pesquisador rejeitaria H_0 . JONCKHEERE (1954) comenta que a acentuada diferença entre os níveis mínimos de significância do teste de Jonckheere para os outros é atribuída ao fato da grande variedade de hipóteses alternativas para a hipótese nula, no caso da análise de variância.

JONCKHEERE (1954) estudou a distribuição amostral de S considerando-se a função geradora de probabilidades

$$f(N) = \prod_{r=1}^S f(m_r) \quad f(m_1, m_2, \dots, m_s)$$

onde N é o número total de observações, ordenadas de modo que po de haver s conjuntos de empates de tamanho m_r , ($r = 1, 2, \dots, s$).

$f(m_1, m_2, \dots, m_s)$ representa a função geradora de probabilidade dos valores de S quando uma das ordenações consiste de N itens não empatados e a outra contém empates. Portanto,

$$f(m_1, m_2, \dots, m_s) = \frac{f(N)}{\prod_{r=1}^S f(m_r)}$$

Partindo da função geradora de probabilidades,

JONCKHEERE (1954) obteve a função característica e a função geradora de cumulantes de S. Os cumulantes e momentos de ordem im par da distribuição amostral de S são nulos. Não havendo empates entre observações de diferentes amostras, LEACH (1979) apresenta a seguinte expressão para a variância de S

$$V_0(S) = \frac{1}{18} \left[2(N^3 - \sum_{i=1}^k n_i^3) + 3(N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2) \right]$$

2.3.1. Cálculo da estatística do teste de Jonckheere.

Muitas vezes, encontra-se na literatura, a estatística do teste de Jonckheere expressa sob a forma

$$J = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k p_{ij}$$

onde p_{ij} foi definido em (2.4).

CAMPOS (1983), dentre outros, apresenta as seguintes expressões para a média e variância de J

$$E_0(J) = N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2$$

$$V_0(J) = \frac{1}{72} \left\{ N^2(2N + 3) - \sum_{i=1}^k n_i^2(2n_i + 3) \right\}$$

A relação entre as estatística J, e S definido em (2.5) é dada por

$$S = 2J - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k n_i n_j$$

onde n_i e n_j são os números de observações das amostras i e j , respectivamente.

A maioria das tabelas de limites críticos são referentes à estatística J . JONCKHEERE (1954) e LEACH (1979) apresentaram tabelas de limites críticos para S . Entretanto, como as duas estatísticas diferem apenas por uma constante, os testes são equivalentes e facilmente se consegue adequar as tabelas para qualquer das duas estatísticas.

LEACH (1979) apresenta um exemplo simplificado, oriundo de um estudo realizado para determinar se o rendimento na execução de uma tarefa num processo repetitivo industrial, é influenciado pelo grau de conhecimento dos resultados (CR), que é dado ao executor da tarefa. Para compor o experimento, quatro pessoas foram designadas aleatoriamente a um dos três grupos, que constituíam os níveis de conhecimento dos resultados. Após cada execução, nenhum conhecimento de resultado foi dado ao grupo um (sem CR), um conhecimento parcial foi dado ao grupo dois (CR parcial) e o grupo três recebeu conhecimento completo dos resultados (CR completo). O grupo sem conhecimento dos resultados teve um elemento, o de conhecimento parcial, dois e o de conhecimento completo um elemento. Portanto $N = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 1$.

Após 20 execuções da tarefa, o número delas com aumento de rendimento verificado para cada pessoa em cada grupo, são apresentados na Tabela 2.3.

TABELA 2.3. Número de execuções com aumento de rendimento após 20 tentativas para cada pessoa, referentes ao exemplo de LEACH (1979).

Sem CR	CR parcial	CR completo
10	12	15
	16	

FONTE: LEACH (1979).

Neste exemplo, o interesse era saber se o número de execuções com aumento de rendimento era crescente à medida que se aumentava o conhecimento dos resultados, de modo que o grupo Sem CR deveria apresentar os resultados mais baixos, e o grupo CR completo, os mais altos.

LEACH (1979) apresenta duas maneiras para o cálculo da estatística S, do teste relatadas a seguir:

a) Cálculo direto

Para o cálculo direto de S, as k amostras devem ser escritas, na ordem preestabelecida pela hipótese alternativa. O valor de S é obtido, tomando cada observação da primeira amostra da esquerda e contando quantas observações das k-1 amostras da direita são maiores e quantas são menores. Estas são as contribuições p e q, positivas e negativas, respectivamente ao valor de S. Em seguida, toma-se a segunda amostra da esquerda para a direita e assim sucessivamente até a amostra k-1. A amostra k não é tomada já que à sua direita não há nenhuma outra. Sendo P a soma dos p's e Q a soma dos q's, S é obtido por

$$S = P - Q$$

Para ilustrar o cálculo direto de S , foram considerados os dados da Tabela 2.3, conforme são encontrados na Tabela 2.4.

TABELA 2.4. Dados do exemplo de LEACH (1979) e valores de p e q para obtenção de S através do cálculo direto.

Sem		CR	CR parcial			CR completo
X_{1j}	p	q	X_{2j}	p	q	X_{3j}
10	3	0	12	1	0	15
			16	0	1	

FONTE: LEACH (1979).

$$P = 3 + 1 + 0 = 4 ; \quad Q = 1 + 0 = 1 ; \quad S = P - Q = 3 .$$

Na Tabela 2.4 verifica-se que o resultado 10 do grupo Sem CR contribui com o valor três na obtenção de P e com zero na obtenção de Q , já que os resultados dos outros grupos são maiores que 10. O resultado 16 do grupo CR parcial, contribui com zero a P e com um a Q , pois, o único resultado (15) do grupo $\hat{a}$ sua direita é menor que 16. Assim, o valor que resulta para S é três. Os valores pequenos de S favorecem a hipótese nula enquanto que grandes valores de S favorecem a hipótese alternativa.

LEACH (1979) não recomenda o cálculo direto de S , quando ocorrem empates.

b) Cálculo de S através de uma tabela de contingência ordenada.

Para o caso de pequenas amostras, S pode também ser calculado a partir de dados representados em forma de uma tabela de contingência ordenada e segundo LEACH (1979) esta é a maneira mais conveniente para os casos em que ocorrem empates entre ob-

servações de diferentes amostras.

Neste caso, nas linhas da tabela de contingência se indica os níveis da variável explicativa, escritos na ordem estabelecida pela hipótese alternativa e, em suas colunas, os níveis da variável resposta ordenados, como ilustra a Tabela 2.5. Os números do corpo da tabela indicam as frequências das combinações dos resultados. Para cada quadrícula diferente de zero do corpo da tabela, p é obtido multiplicando-se a frequência da quadrícula pela soma das frequências das quadrículas abaixo e à direita daquela considerada, desprezando-se a linha e a coluna que a quadrícula pertence. Isto significa multiplicar a frequência da quadrícula pela soma das frequências das quadrículas ao seu Sudeste, na tabela de contingência ordenada. q se obtém, multiplicando-se a frequência da quadrícula pela soma das frequências das quadrículas abaixo e à esquerda daquela considerada, desprezando-se sua linha e coluna. Isto equivale a multiplicar a frequência da quadrícula pela soma das frequências das quadrículas ao seu Sudoeste.

Como ilustração do procedimento, considerou-se os dados da Tabela 2.3. estruturados na Tabela 2.5.

TABELA 2.5. Frequências da variável resposta referentes ao exemplo de LEACH (1979), para o cálculo de S através da tabela de contingência ordenada.

	VARIÁVEL RESPOSTA				n_i
	10	12	15	16	
Sem CR	1				1
CR parcial		1		1	2
CR completo			1		1
u_j	1	1	1	1	4 = N

FONTE: LEACH (1979).

Como no cálculo direto, P se obtém pela soma dos p's, Q pela soma dos q's e

$$S = P - Q$$

$$P = 1 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 4$$

$$Q = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$$

$$S = P - Q = 3$$

que está de acordo com o resultado obtido pelo cálculo direto.

Com os dados organizados numa tabela de contingência ordenada, S será grande e positivo se as frequências concentram na região da diagonal principal e grande e negativo, se a maior concentração das frequências é em torno da diagonal secundária.

2.3.2. A ocorrência de empates.

Na prática, se os empates aparecem dentro de uma mesma amostra, o valor de S não é afetado, porém, sua distribuição nula se altera. Para o cálculo de S , a dificuldade maior ocorre quando empates estão presentes entre observações de diferentes amostras. Neste caso, o procedimento recomendado por JONCKHEERE (1954) é desfazer os empates de tal maneira que seus valores se tornem o mais desfavorável possível para a hipótese alternativa considerada. Deve-se provar que o valor de S , com esse procedimento, rejeita a hipótese nula com alguma confiança, em favor da hipótese alternativa. Este procedimento é praticável somente se o número de empates entre observações de diferentes amostras é pequeno.

De acordo com JONCKHEERE (1954), a ocorrência de muitos empates pode ser a indicação de que as populações das quais as amostras foram extraídas não são contínuas, o que invalida a aplicação do teste.

HOLLANDER e WOLFE (1973) e LEACH (1979) sugerem resolver o problema dos empates usando a média das ordens na classificação conjunta das N observações, o que produz uma ligeira, ou às vezes nula, modificação nos métodos utilizados para calcular S . Para os métodos tratados na seção 2.3.1, no cálculo direto, qualquer empate que ocorre quando se compara uma observa

ção com outras de amostras à sua direita, é ignorado no cálculo de p e q . Nenhuma modificação é requerida no cálculo de S , através da tabela de contigência ordenada.

O procedimento sugerido por aqueles autores é equivalente a redefinir $p_{i\alpha_i j\alpha_j}$ como

$$p_{i\alpha_i j\alpha_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{i\alpha_i} < X_{j\alpha_j} \\ 1/2 & \text{se } X_{i\alpha_i} = X_{j\alpha_j} \\ 0 & \text{se } X_{i\alpha_i} > X_{j\alpha_j} \end{cases}$$

Quando mais que a quarta parte dos dados estão empatados, a aproximação normal de S corrigido para empates é adequada.

Quando se utiliza a aproximação normal para S , é comum o uso de uma correção de continuidade. A variável resposta sendo ordinal e ocorrendo empates, a separação entre os possíveis consecutivos valores de S é irregular, de modo que não existe uma correção de continuidade que possa aplicar adequadamente.

A variância de S para o caso de empates pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
V_0(S) = & \frac{2 \left(N^3 - \sum_{i=1}^k n_i^3 - \sum_{j=1}^h u_j^3 \right) + 3 \left(N^2 - \sum_{i=1}^k n_i^2 - \sum_{j=1}^h u_j^2 \right) + 5N}{18} + \\
& + \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i^3 - 3 \sum_{i=1}^k n_i^2 + 2N \right) \left(\sum_{j=1}^h u_j^3 - 3 \sum_{j=1}^h u_j^2 + 2N \right)}{9 N (N-1) (N-2)} + \\
& + \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i^2 - N \right) \left(\sum_{j=1}^h u_j^2 - N \right)}{2 N (N-1)},
\end{aligned}$$

onde n_i é o tamanho da amostra i , u_j é o tamanho do grupo de empates na classificação conjunta das N observações e h é o número de grupos com empates. Os dados sendo organizados numa tabela de contingência ordenada, h é o número de níveis da variável resposta e u_j são os totais das colunas da tabela.

Uma situação especial ocorre quando a variável resposta apresenta duas categorias. Neste caso é possível usar uma correção de continuidade dada por

$$(2N - n_1 - n_k) / 2 (k-1)$$

onde n_1 e n_k são os tamanhos das amostras um e k respectivamente. Neste caso, a variância de S é expressa por

$$V_o(S) = \frac{u_1 u_2 (N^3 - \sum_{i=1}^k n_i^3)}{3N(N-1)}$$

LEACH (1979) dentre outros comenta que a aplicação do teste de Jonckheere a dados em duas categorias é equivalente ao teste unilateral da soma das ordens (Wilcoxon) com muitos empates, sendo que, às vezes, podem ser invertidos os papéis de variável resposta e da explicativa.

Uma aplicação interessante do teste de Jonckheere salientada por LEACH (1979), é sua utilização para testar a correlação entre duas variáveis, quando uma delas tem muitos empates, sendo, muitas vezes, mais adequado que o teste de correlação de Kendall. O procedimento consiste em tomar a variável com muitos empates como explicativa, calcular S da maneira usual, e utilizar sua distribuição nula para o teste de hipóteses.

2.3.3. A distribuição nula da estatística do teste de Jonckheere.

De acordo com HOLLANDER E WOLFE (1973) e LEACH (1979), um procedimento para obter a distribuição nula de S (ou J) é basear no fato de que todos os possíveis

$$N! / \left(\prod_{i=1}^k n_i! \right), \quad N = \sum_{i=1}^k n_i,$$

arranjos das ordens das observações são igualmente prováveis sob

Ho, e calcular o valor de S (ou J) associado a cada arranjo. A maioria das tabelas de distribuição nula encontradas na literatura é da estatística J. Embora não seja necessário proceder a ordenação conjunta das N observações X_{ij} , de posse dela, sem conhecer os dados originais, é possível calcular a estatística do teste.

Ilustrando o caso de três amostras ($k = 3$), cada uma delas com duas observações ($n_i = 2$ para qualquer i) tem-se:

$$N! / \left(\prod_{i=1}^k n_i ! \right) = 6! / (2! 2! 2!) = 90$$
 arranjos. Dois dos possíveis arranjos das ordens das observações são:

(a)

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}
1	3	5
2	4	6

(b)

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}
5	3	1
6	4	2

O arranjo (a) fornece o valor máximo 12, para S ou J e o arranjo (b) fornece os valores mínimos, $S = -12$ e $J = 0$.

Determinando-se o valor da estatística do teste para cada arranjo e pressupondo que cada um deles ocorre com a mesma probabilidade, fica estruturada sua distribuição nula. Como os arranjos (a) e (b) são únicos e fornecem os valores máximo e mínimo, respectivamente, para S ou J, tem-se:

$$\Pr (S \geq 12) = \Pr (J \geq 12) = \Pr (S = 12) = \Pr (J = 12) = \frac{1}{90}$$

$$\Pr (S \leq -12) = \Pr (J \leq 0) = \Pr (S = -12) = \Pr (J = 0) = \frac{1}{90}$$

Sendo U_{uv} uma estatística de Mann-Whitney calculada entre as amostras u e v , HOLLANDER e WOLFE (1973) comentam que sob H_0

$$E_0 (U_{uv}) = n_u n_v / 2$$

sendo n_u e n_v os respectivos tamanhos das amostras u e v . Para o caso de três amostras, $J = U_{12} + U_{13} + U_{23}$. Sob a hipótese alternativa, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, é fácil verificar que J tende a ser maior que sua esperança nula

$$E_0(J) = (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) / 2 = [N^2 - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)] / 4$$

Para o caso de diferentes tamanhos de amostras, as tabelas de distribuição nula de S ou J são encontradas na Literatura apenas para três amostras. As tabelas são estruturadas considerando-se $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ ou $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, porém, pontos críticos para configurações (n_1, n_2, n_3) fora desta ordem podem ser obtidos simplesmente colocando os três tamanhos de amostras em ordem crescente ou decrescente. Isto é decorrente do fato da estatística do teste apresentar uma propriedade de simetria em que

$$j [\alpha, k (n_1, n_2, \dots, n_k)] = j [\alpha, k (n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k})]$$

onde $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ é qualquer permutação de $(1, 2, \dots, k)$ e α

é o nível mínimo de significância estabelecido.

Para mais de três amostras ($k > 3$) as tabelas são disponíveis apenas para $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$. Isto não se verificando, utiliza-se a aproximação para grandes amostras.

Quando $k = 2$, o procedimento do teste de hipóteses reduz-se ao teste unilateral de Mann-Whitney (ou Wilcoxon).

De acordo com JONCKHEERE (1954), quando se tem apenas uma observação por amostra, a estatística S é equivalente ao teste proposto por Kendall (1948) e sua distribuição nula já foi tabelada por aquele autor.

ODEH (1971) derivou a exata distribuição nula de S , para iguais tamanhos de amostras n , através da seguinte fórmula recorrente:

$$\Pr (S=s) = p(s,k,n) = \sum_t p(t,k-1,n) q[n, n(k-1), s-t]$$

onde a soma é sobre todos os valores de t na amplitude

$$\max \{0, s - n^2 (k-1)\} \leq t \leq \min \{s, (k-1) (k-2) n^2 / 2\}.$$

$p(s,k,n)$ é a probabilidade de que $S=s$, $0 \leq s \leq k(k-1) n^2 / 2$ sendo S calculado de k amostras de tamanho n . $p(t, k-1, n)$ é a probabilidade de $S=t$ sendo S calculado de $k-1$ amostras de tamanho n e $0 \leq t \leq (k-1) (k-2) n^2 / 2$. $q(i_1, i_2, u)$, é a probabilidade de que $U = u$, $0 \leq u \leq i_1 i_2$, sendo U uma estatística de Mann-Whitney calculada entre as amostras i_1 e i_2 .

A fórmula recorrente proposta por ODEH (1971) pode ser facilmente adaptada para diferentes tamanhos de amostras.

2.3.4. Distribuição da estatística do teste para o caso de grandes amostras.

Para o caso de grandes amostras, ou seja, quando N tende a ∞ , JONCKHEERE (1954) demonstra que

$$\frac{S}{[V_o(S)]^{1/2}} \text{ ou } \frac{J - E_o(J)}{[V_o(J)]^{1/2}}$$

tem distribuição normal padrão, ou ainda

$$t_v = S \left\{ \frac{v}{(v+1) \mu_2 - S^2} \right\}^{1/2}$$

tem distribuição de t de Student com v graus de liberdade, onde

$$v = -3 (2 + \gamma_2) / \gamma_2 \cdot$$

$$\gamma_2 = K_4 / (K_2)^2$$

sendo K_2 e K_4 o segundo e o quarto cumulantes respectivamente e μ_2 é o segundo momento em relação a média.

Quando $N \rightarrow \infty$, $\gamma_2 \rightarrow 0^-$, logo $v \rightarrow \infty$ e

$$t_v \rightarrow S / (\mu_2)^{1/2}$$

que é a aproximação normal sugerida por JONCKHEERE (1954).

Quando não ocorrem empates na variável resposta, o intervalo entre dois valores consecutivos de S é sempre dois, por isso, de acordo com JONCKHEERE (1954) e LEACH (1979), um aperfeiçoamento na aproximação normal é obtido se, antes da divisão da estatística por seu desvio padrão, for subtraído a unidade de seus valores positivos ou somada a seus valores negativos.

Segundo LEACH (1979), a aproximação é precisa quando, pelo menos duas das amostras apresentem no mínimo cinco observações cada.

2.3.5. Os testes unilateral e bilateral de Jonckheere.

Considerando-se $n_1=1$, $n_2=2$ e $n_3=1$, a distribuição nula de S ou J pode ser estruturada conforme a Tabela 2.6.

TABELA 2.6. Distribuição nula das estatísticas S e J do teste de Jonckheere, para três amostras quando $n_1=1$, $n_2=2$ e $n_3=1$.

	-5	-3	-1	1	3	5
S_o						
J_o	0	1	2	3	4	5
$\Pr (S=S_o)$						
ou	1/12	2/12	3/12	3/12	2/12	1/12
$\Pr (J=J_o)$						

De acordo com a Tabela 2.6., a probabilidade de se obter, por exemplo, um valor de S maior ou igual a 3, sob H_o é $\Pr(S \geq 3) = \Pr(S = 3) + P(S = 5) = 0,25$

• Equivalentemente a probabilidade de se obter um valor

de J maior ou igual a 4 é

$$\Pr(J \geq 4) = \Pr(J = 4) + \Pr(J = 5) = 0,25.$$

Este procedimento é adequado para o teste unilateral.

A estatística S pode também ser usada no teste bilateral. Para o exemplo de LEACH (1979), apresentado na Secção 2.3.1, o teste bilateral seria perguntar se há evidência de que o rendimento cresce ou decresce, quando aumenta o grau de conhecimento dos resultados. Os dois sentidos da hipótese alternativa resultam na mesma magnitude de S , porém, com sinal contrário. Para os dados da Tabela 2.3 e de acordo com a distribuição nula de S apresentada na Tabela 2.6, tomando-se $\alpha = 0,17$, para rejeitar a hipótese nula, é necessário obter um valor de S não inferior a cinco em valor absoluto, pois,

$$\Pr(S \geq 5) + \Pr(S \leq -5) = 1/12 + 1/12 = 0,17.$$

Naquele exemplo observa-se que para rejeitar a hipótese nula num teste bilateral, mesmo a um nível mínimo de significância elevado ($\alpha = 0,17$), é necessário que S assumo seu máximo valor absoluto. Isto é decorrente do fato de se ter uma amostra muito pequena para o teste.

2.3.6. O poder do teste de Jonckheere.

SHORACK (1968) apresenta uma fórmula recorrente para determinar o poder do teste de Jonckheere para algumas hipóteses alternativas simples.

POTTER e STURM (1980), comparando alguns testes pa

ra alternativas ordenadas, através da função empírica de poder concluíram que para o caso de três amostras ($k = 3$), o teste de Jonckheere tem baixo poder, para $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, tem poder variável quando o número de observações por amostra não é o mesmo e varia entre 5 e 20 e é equivalente ou às vezes superior aos demais quando $n_1 = n_2 = n_3 = n \geq 10$.

Para algumas hipóteses alternativas simples, POTTER e STURM (1981) determinaram o poder máximo atingido pelo teste de Jonckheere. Aqueles autores consideraram $k = 3$ amostras de tamanhos $n_1 = n_2 = n_3 = n$ e representaram os valores críticos da estatística por $j(\alpha, n)$. Para a alternativa $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, com pelo menos uma desigualdade prevalecendo, o poder do teste pode ser representado por

$$\Pr [J \geq j(\alpha, n) \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3] \quad (2.6)$$

onde n é o tamanho de cada amostra, α é o nível mínimo de significância e

$$J = \sum_{u < v} U_{uv} = U_{12} + U_{13} + U_{23} \quad (2.7)$$

U_{uv} é uma estatística de Mann-Whitney, calculada entre as amostras u e v .

POTTER e STURM (1981) consideraram a hipótese alternativa

$$H_1: \mu_i = 2\lambda_1 c, \mu_i' = \mu_i'' = \lambda_2 c \quad (2.8)$$

com $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ e c uma constante positiva qualquer.

Para o caso particular de H_1 (2.8),

$$H_2: \mu_1 = -2c, \mu_2 = \mu_3 = c \quad (2.9)$$

e de acordo com (2.6) e (2.7), o poder do teste para H_2 (2.9) é dado por:

$$\begin{aligned} \Pr [J \geq j(\alpha, n)] &= \Pr [U_{12} + U_{13} + U_{23} \geq j(\alpha, n)] \\ \Pr [J \geq j(\alpha, n)] &\leq \Pr [n^2 + n^2 + U_{23} \geq j(\alpha, n)] \\ \Pr [J \geq j(\alpha, n)] &= \Pr [U_{23} \geq j(\alpha, n) - 2n^2] \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde n é o tamanho de amostras, α é o nível de significância e $j(\alpha, n)$ é o limite crítico da distribuição nula da estatística do teste.

Através da expressão (2.10) é possível obter o poder máximo atingido pelo teste, pois, sob condições de H_0 , U_{23} tem distribuição de uma estatística de Mann-Whitney, cuja distribuição nula poder ser encontrada em BEYER (1968).

Na Tabela 2.7 constam os valores máximos de poder atingidos pelo teste, para diferentes tamanhos de n , $\alpha = 0,05$ e H_2 (2.9), obtidos através da expressão (2.10).

TABELA 2.7. Poder máximo atingido pelo teste de Jonckheere para $\mu_1 = -2c$, $\mu_2 = \mu_3 = c$ e $\alpha = 0,05$.

n	Poder máximo
2	0,433
3	0,731
4	0,909
5	0,977
6	0,996

FONTE: POTTER e STURM (1981).

2.4. O teste baseado na estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$

A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi estruturada pela primeira vez por CHACKO (1963) considerando-se iguais tamanhos de amostras e estendida por SHORACK (1967) para o caso de tamanhos de amostras diferentes.

A notação $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é devida a semelhança ao cálculo da estatística do teste de qui-quadrado. A barra indica ordenação das médias e o índice "rank", que os cálculos são efetuados sobre as ordens, na classificação conjunta das observações.

A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi estudada por aqueles autores, como uma versão da estatística $\bar{\chi}_k^2$, estruturada por BARTHOLOMEW (1959a), a partir do teste da razão de verossimilhança.

2.4.1. O teste da razão de verossimilhança.

Seja $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$, $i=1, 2, \dots, k$ uma amostra de k populações independentes com médias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ e probabilidade

$$\Pr[(X_{i1}=x_{i1})(X_{i2}=x_{i2}) \dots (X_{in_i}=x_{in_i}) \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]$$

soa a classe de hipóteses admissíveis Ω . Se $H_a: \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$ com pelo menos uma desigualdade prevalecendo significa $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ pertencer a ω , um subespaço de Ω , então o teste da hipótese de que $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ pertence a ω , de acordo com KENDALL e STUART (1963) consiste em rejeitar a hipótese se a razão $\lambda = L(\hat{\omega})/L(\hat{\Omega})$ (2.11) é suficientemente pequena, onde

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \Omega} \Pr[(X_{i1}=x_{i1})(X_{i2}=x_{i2}) \dots (X_{in_i}=x_{in_i}) \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \in \omega} \Pr[(X_{i1}=x_{i1})(X_{i2}=x_{i2}) \dots (X_{in_i}=x_{in_i}) \mid \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]$$

Se $P_I = P_r$ (λ ser tão pequeno ou menor do que $\lambda \mid \omega$), desde que, λ é a razão da maior probabilidade de se observar a amostra $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$ quando $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ pertence a ω , comparada com a maior probabilidade sob Ω , pode se afirmar que se P_I é pequena, a hipótese de que $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ pertence a ω não é provável. Portanto sempre que $P_I \leq \alpha$,

onde α é o nível de significância prefixado, deve-se rejeitar a hipótese de que $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ pertence a ω .

2.4.2. As estatísticas $\bar{\chi}_k^2$ e $\bar{E}^2$

A partir do teste da razão de verossimilhança (2.11) e admitindo que as amostras são provenientes de populações com distribuição normal e variância comum conhecida σ^2 , BARTHOLOMEW (1959a) estruturou a estatística $\bar{\chi}_k^2$ que pode ser expressa por

$$\bar{\chi}_k^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\mu_i^* - \hat{\mu})^2 / \sigma^2 \quad (2.12)$$

Considerando a variância comum desconhecida, BARTHOLOMEW (1961a) propôs a estatística

$$\bar{E}^2 = \sum_{i=1}^k n_i (\mu_i^* - \hat{\mu})^2 / \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \hat{\mu})^2 \quad (2.13)$$

onde $\hat{\mu}$ é a média geral estimada e μ_i^* é o estimador de máxima verossimilhança de μ_i sob a restrição $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$, também chamada regressão isotônica de μ_i .

BARTHOLOMEW (1961 b) mostrou que a função de distribuição da estatística $\bar{\chi}_k^2$, pode ser obtida a partir de uma soma ponderada de funções de distribuição de qui-quadrado.

2.4.3. A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

Se a função de distribuição F_i de variável aleatória X_{ij} é conhecida apenas ser contínua as estatísticas $\bar{\chi}_k^2$ (2.12) e $\bar{E}^2$ (2.13), não são adequadas para o teste de hipóteses e a versão de livre distribuição dessas estatísticas é a $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

CHACKO (1963) considerou iguais tamanhos de amostras e definiu a estatística do teste de livre distribuição, para a hipótese alternativa ordenada geral como

$$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 = \frac{12n}{N(N+1)} \sum_{j=1}^m t_j \left\{ R^* [t_j] - \frac{N+1}{2} \right\}^2 \quad (2.14)$$

onde n é o tamanho comum de amostras, $N = nk$, k é o número de amostras, t_j com $j = 1, 2, \dots, m$ ($m \leq k$) é o número de médias envolvidas em cada grupo para obter a ordenação estabelecida pela hipótese alternativa e m é o número de grupos, depois de obtido a ordenação das médias. Para o caso da ordenação completa tem-se $m=k$. $R^* [t_j]$ são as estimativas de máxima verossimilhança das médias das ordens $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_k$ sob a restrição, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$.

BRUNK (1958) define ordenação completa como os casos em que as médias das ordens de cada amostra já se encontram na ordenação estabelecida pela hipótese alternativa. Orde-

nação incompleta é aquela em que, algumas ou todas as médias das ordens de cada amostra, não estão na ordem estabelecida pela hipótese alternativa; neste caso, é necessário um agrupamento nas médias, de modo a se obter a ordenação desejada.

CHACKO (1963) afirma que, quando $k=2$, o teste baseado na estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é equivalente ao teste unilateral de Wilcoxon.

Resultados de BARTHOLOMEW (1961a), evidenciam que o teste $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, apresenta maior poder que o teste de Jonckheere, quando há considerável variação nas diferenças entre as médias.

SHORACK (1967) estudou a aplicação da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para o caso do modelo da análise de variância classificação simples, com diferentes tamanhos de amostras.

Para diferentes tamanhos de amostras e ordenação completa a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ pode ser obtida por

$$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i \left(R_j^* - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

$$\text{onde } N = \sum_{i=1}^k n_i$$

BARLOW et alii (1972) demonstram que $R_1^*, R_2^*, \dots, R_k^*$ é a solução única de minimização de

$$\sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \mu_i)^2$$

sob a restrição $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$. R_{ij} é a ordem de X_{ij} na classificação conjunta das N observações.

Os R_i^* 's são usualmente chamados a regressão isotônica das $\bar{R}_i$'s. Uma das formas de expressão dos R_i^* 's, apresentada por BARLOW et alii (1972) é

$$R_i^* \equiv R_i^* (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_k) \equiv \max_{r=1}^i \min_{t=i}^k \left\{ \frac{\sum_{j=r}^t n_j \bar{R}_j}{\sum_{j=r}^t n_j} \right\}$$

BARLOW et alii (1972) comentam que a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, está relacionada com a estatística do teste de Kruskal-Wallis, calculada depois do "grupamento para obter a ordenação" (amalgamation) das médias, tomando os pesos

$$w_i = n_i / \sigma_{\text{rank}}^2 \quad \text{onde}$$

$$\sigma_{\text{rank}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ R_{ij} - \frac{N+1}{2} \right\}^2$$

Este resultado confirma o fato de que a definição de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é uma extensão da estatística $\bar{\chi}_k^2$, estruturada sob condições de distribuição normal e variância conhecida.

2.4.4. Um procedimento para obter as estimativas de máxima verossimilhança de parâmetros sob restrições de ordem.

Sob condições da hipótese nula $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$, as estimativas de máxima verossimilhança das μ_i 's são:

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \dots = \hat{\mu}_k = \bar{x}_{[1,k]},$$

ou seja, a partir de amostras de n_i observações X_{ij}

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i}$$

BRUNK (1955, 1958) e Van EEDEN (1957) provaram que as estimativas de máxima verossimilhança das μ_i 's sob a restrição $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k$, com pelo menos uma desigualdade prevalecendo, são únicas e podem ser representadas por

$$\mu_i^* = \max_{1 \leq r \leq i} \min_{i \leq s \leq k} \bar{x}_{[r,s]}$$

A notação $\bar{x}_{[r,s]}$ com $r \geq 1$ e $s \leq k$, indica que as médias de r a s foram grupadas (amalgamated), a fim de se obter a ordenação estabelecida pela hipótese alternativa.

Um procedimento indicado por BRUNK (1958) para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos μ_i 's sob condições da hipótese alternativa ordenada, pode ser descrito

como se segue:

1) se $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_k$ então $\mu_i^* = \bar{x}_i$ para $1, 2, \dots, k$;

2) se $\bar{x}_i > \bar{x}_{i+1}$ para algum i ($i = 1, 2, \dots, k-1$), então $\mu_i^* = \mu_{i+1}^*$ e as médias $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_{i+1}$ são substituídas na sequência $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$, pela combinação (pooled) das médias $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_{i+1}$ formando a média $\bar{x}_{[i, i+1]}$, obtendo-se um conjunto ordenado de $k-1$ médias. O valor da média ponderada obtido é então comparado com $\bar{x}_{i-1}$ e $\bar{x}_{i+2}$ e adota-se o seguinte procedimento:

(i) se $\bar{x}_{[i, i+1]} > \bar{x}_{i+2}$ os três valores, $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$ e $\bar{x}_{i+2}$ são substituídos pela combinação das médias $\bar{x}_{[i, i+2]}$;

(ii) se $\bar{x}_{[i, i+1]} < \bar{x}_{i-1}$ os três valores, $\bar{x}_{i-1}$, $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_{i+1}$ são substituídos pela combinação das médias, $\bar{x}_{[i-1, i+1]}$;

(iii) se $\bar{x}_{i-1} > \bar{x}_{[i, i+1]} > \bar{x}_{i+2}$, um dos procedimentos acima (i) ou (ii) deve ser executado até que se obtenha um ou uma sequência de valores monotonicamente não decrescentes, ordenados pelos índices $i=1, 2, \dots, k$;

(iv) se o procedimento está sendo executado do menor para o maior índice de $\bar{x}$, em outros casos os valores são à esquerda inalterados.

As novas quantidades são então comparadas com as adjacentes. O procedimento anterior é continuado, até que um conjunto ordenado de quantidades monotônicas não decrescentes, menor ou igual a k seja obtido. Então, para cada i , a estimativa de máxima

verossimilhança μ_i^* de μ_i , sob condições da hipótese alternativa ordenada, é igual aquela das quantidades finais para a qual a média original $\bar{x}_i$ contribuiu. Embora a ordem da combinação das médias não seja unicamente determinada, as estimativas finais formam um conjunto único.

2.4.5. A distribuição nula da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

A exata distribuição nula da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ pode ser obtida, considerando-se que, sob H_0 , todas as

$$N! / \left(\prod_{i=1}^k n_i! \right)$$

configurações de n_1 ordens da população 1, n_2 ordens da população 2, ..., n_k ordens da população k são igualmente prováveis. Portanto, estruturar todas as configurações possíveis e calcular o valor de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para cada uma delas, é um caminho para se obter a distribuição nula da estatística do teste.

Para iguais tamanhos de amostras, $n_i = n$ para todo i, foi mostrado por PARSONS (1979) que a função de distribuição de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ pode ser expressa, como uma soma, ponderada de estatística padronizadas de Kruskal-Wallis. Isto baseia-se essencialmente numa aplicação do Teorema 1.2 de Boswell

e Brunk (1969), citados por PARSONS (1979). Utilizando esta aplicação, este autor apresenta valores críticos de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para $k = 3$ amostras e $n_1 = n_2 = n_3 \leq 8$.

Para grandes amostras o Teorema 4.5 de BARLOW et alii (1972) assegura que a distribuição da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, é aproximadamente aquela de $\bar{\chi}_k^2$ para o caso de ordenação completa.

Para $k = 3$ amostras, aqueles autores apresentam a seguinte aproximação para a distribuição nula de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

$$\Pr(\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 \geq C) = \frac{1}{2} \Pr(\chi_1^2 \geq C) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}(\rho) \right) \Pr(\chi_2^2 \geq C)$$

onde χ_1^2 e χ_2^2 são estatísticas de qui-quadrado com 1 e 2 graus de liberdade respectivamente e

$$\rho = \left\{ \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_2 + n_3)} \right\}^{1/2}$$

Alexander e Quade (1968), citados por PARSONS (1979), apresentam uma fórmula recorrente que pode ser utilizada na obtenção da distribuição nula de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, quando se tem três amostras.

POTTER e STURM (1980) demonstraram que para $k = 3$, a distribuição nula de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ apresenta a seguinte

propriedade de simetria parcial:

$$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 [\alpha, k, (n_1, n_2, n_3)] = \bar{\chi}_{\text{rank}}^2 [\alpha, k, (n_3, n_2, n_1)]$$

o que reduz significativamente o número de valores críticos em sua tabulação. PARSONS (1981) comenta que esta propriedade é decorrente do fato de que as N ordens R_{ij} têm a mesma distribuição que as $N + 1 - R_{ij}$ ordens transformadas.

PARSONS (1981) estudou a aproximação da distribuição da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, através da distribuição de $\bar{\chi}_k^2$, considerando-se a porcentagem absoluta de erro, dada por

$$| [\alpha - \Pr(\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 \geq C)] / \alpha | \quad \text{onde}$$

$$\Pr(\bar{\chi}_k^2 \geq C) = \alpha.$$

Aquele autor considerou $8 \leq N \leq 21$ e $|n_i - n_{i'}| \leq 4$, onde n_i e $n_{i'}$ são os respectivos tamanhos das amostras i e i' . Para $15 \leq N \leq 21$ PARSONS (1981) observou que, o nível mínimo de significância α , determinado pela aproximação de $\bar{\chi}_k^2$, situa entre 0,092 e 0,108 para $\alpha = 0,10$ e entre 0,045 e 0,054 para $\alpha = 0,05$, portanto, a aproximação pode ser considerada razoável. Com $N = 8$ e $N = 11$, em certas configurações de tamanhos de amostras, a aproximação não foi adequada. Quando $N \geq 15$, e os tamanhos de amostras aproximadamente $N/3$, a aproximação não leva a grandes erros, para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. *Procedimento geral de comparação dos testes.*

O teste de Jonckheere e a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, foram comparados através da função empírica de poder, determinada para alguns membros da hipótese alternativa ordenada geral H_a . A função empírica do poder de cada teste foi estimada pelo Método de Monte Carlo, baseando-se em quatro mil experimentos simulados para cada configuração de médias e para cada tamanho de amostras.

Foram consideradas três populações ($k = 3$) e as distribuições normal e uniforme. Em cada uma delas, dados foram simulados considerando-se $n_1 = n_2 = n_3 = n$, tomando-se n (tamanho de amostras) nos valores 3, 5 e 8. Estes tamanhos de amostras foram escolhidos de maneira arbitrária, su-

pondo apenas que o poder de cada teste tem comportamento diferente para diferentes tamanhos de amostras e considerando-se as limitações das tabelas de distribuição nula existentes para estas estatísticas.

Como membros representativos da hipótese alternativa ordenada foram escolhidos:

a) $H_r \mu_i = 2\lambda_1 C, \mu_{i'} = \mu_{i''} = \lambda_2 C$ ($r = 0,1$) onde $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, μ_i é a média da i -ésima amostra e C uma constante não negativa qualquer, que no presente estudo assumiu os valores 0,0,3; 0,6; 0,9; 1,2 e 1,5. Os níveis mínimos de significância α , adotados foram aproximadamente 0,01, 0,05 e 0,10.

Neste membro de H , a simulação foi efetuada para as distribuições normal e uniforme com variância unitária e médias definidas pelos valores de C , considerando-se $\mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$. Na Tabela 3.1 constam as configurações de médias verdadeiras definidas pelos valores de C .

TABELA 3.1. Configurações de médias verdadeiras definidas pelos valores de C para $\mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$.

Configurações	C	H	Médias verdadeiras		
			μ_1	μ_2	μ_3
1	0,0	H_0	0,0	0,0	0,0
2	0,3	H_1	-0,6	0,3	0,3
3	0,6	H_1	-1,2	0,6	0,6
4	0,9	H_1	-1,8	0,9	0,9
5	1,2	H_1	-2,4	1,2	1,2
6	1,5	H_1	-3,0	1,5	1,5

A Figura 3.1 esquematiza a função empírica de poder para H_r .

FIGURA 3.1. Função do poder para o membro de

$$H_a, H_r: \mu_i = 2\lambda_1 C, \mu_{i'} = \mu_{i''} = \lambda_2 C$$

a) H_s ($s = 2, 3, 4$) : As configurações de médias da Tabela 3.2.

TABELA 3.2. Grupos de configurações de médias verdadeiras componentes de H_s .

GRUPO	CONFIGURAÇÃO		
I	$\mu - 0,6 \sigma_p$	$\mu - 0,6 \sigma_p$	$\mu + 1,2 \sigma_p$
II	$\mu - 1,2 \sigma_p$	$\mu + 0,6 \sigma_p$	$\mu + 0,6 \sigma_p$
III	$\mu - 1,2 \sigma_p$	$\mu + 0,4 \sigma_p$	$\mu + 0,8 \sigma_p$

Maiores detalhes sobre as configurações de H_s são dadas no Item 3.2.

3.2. Critérios de seleção das configurações das médias verdadeiras.

Foram selecionadas 12 configurações de $k = 3$ médias verdadeiras. Como o teste de Jonckheere e a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ são aplicados muitas vezes como complementares à análise de variância não-paramétrica classificação simples e mais recente na classificação dupla, considerou-se como critério para a seleção das configurações de médias verdadeiras, o coeficiente de variação. Quando se trabalha com experimentos, para a validade dos dados, geralmente admite-se coeficiente de variação entre baixo e alto. Em decorrência disso, de acordo com PIMENTEL GOMES (1982), decidiu-se trabalhar com três faixas de coeficientes de variação: 10%, 20% e 30%, que combinados com quatro grupos de configurações apresentados na Tabela 3.3 resultou nas 12 configurações que são apresentadas na Tabela 3.4.

TABELA 3.4. Grupos de configurações de médias verdadeiras.

GRUPO	CONFIGURAÇÃO		
I	μ	μ	$\mu + 0 \sigma_p$
II	$\mu - 0,6 \sigma_p$	$\mu - 0,6 \sigma_p$	$\mu + 1,2 \sigma_p$
III	$\mu - 1,2 \sigma_p$	$\mu + 0,6 \sigma_p$	$\mu + 0,6 \sigma_p$
IV	$\mu - 1,2 \sigma_p$	$\mu + 0,4 \sigma_p$	$\mu + 0,8 \sigma_p$

Diante do estabelecido, a média geral $\mu = 100$ e os desvios padrões $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 20$ e $\sigma_3 = 30$ foram escolhidos, de modo arbitrário, visando apenas, fornecer os citados coeficientes de variação.

O grupo I de configurações da Tabela 3.3, naturalmente enquadra-se em H_0 e foi selecionado apenas com o objetivo de possibilitar estimar o Erro Tipo I.

Certamente os valores numéricos das médias verdadeiras e dos desvios padrões σ_p ($p = 1, 2, 3$) tem influência na função de poder dos testes em estudo. É sabido que, se for definida uma distância $\delta = \mu_i - \mu_j$ entre H_0 e H_a , tomada em valor absoluto, o poder do teste cresce com δ . Diferentes configurações de médias apresentam o mesmo coeficiente de variação porém, o poder dos testes em cada uma delas pode não ser o mesmo. Uma medida da distância entre H_0 e H_a proposta por BARTHOLOMEW (1961 b) é o parâmetro

$$\Delta = \left[\sum_{i=1}^k (\mu_i - \mu)^2 \right]^{1/2}$$

sendo

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_i$$

O poder dos testes para alternativas ordenadas tipo H_a foi estudado como uma função de Δ . BARTHOLOMEW (1961b) comenta que Δ não leva em consideração a "direção" da hipótese alternativa, sendo que, em decorrência disto, cada valor Δ define uma amplitude de valor do poder, ou seja, um valor máximo e um mínimo. Aquele autor salienta porém que, a "direção" da hipótese alternativa tem pouca influência sobre o poder, e por isso, para efeito de comparação do poder de testes este aspecto não precisa ser levado em consideração.

No presente estudo, utilizou-se também o parâmetro Δ como uma caracterização do tipo de ordenação, que é mais adequado que o desvio padrão, conforme pode ser observado na Tabela 3.4.

Substituindo na Tabela 3.3. μ e σ_p ($p=1,2,3$) pelos seus respectivos valores, cada grupo dá origem a três configurações de médias verdadeiras que aparecem na Tabela 3.4.

TABELA 3.4. Configurações de médias verdadeiras, com respectivos desvios padrões, coeficientes de variação e Δ 's

CONFIGURAÇÕES	Médias verdadeiras			H	σ_p	CV%	Δ
7	100	100	100	H_0	10	10	0,00
8	100	100	100	H_0	20	20	0,00
9	100	100	100	H_0	30	30	0,00
10	94	94	112	H_2	10	10	14,70
11	88	88	124	H_2	20	20	29,39
12	82	82	136	H_2	30	30	44,09
13	88	106	106	H_3	10	10	14,70
14	76	112	112	H_3	20	20	29,39
15	64	118	118	H_3	30	30	44,09
16	88	104	108	H_4	10	10	14,97
17	76	108	116	H_4	20	20	29,93
18	64	112	124	H_4	30	30	44,90

3.3. As estatísticas dos testes.

3.3.1. A estatística J de Jonckheere.

Embora a estatística J de Jonckheere possa ser definida de outras maneiras, a depender da distribuição nula tabelada que se dispõe, uma expressão conveniente, especialmente para a sub-rotina FORTRAN, de seu cálculo, e que foi adotada neste trabalho é

$$J = \sum_{u < v}^k U_{uv} = \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=u+1}^k U_{uv}$$

onde U_{uv} com $u < v$ é uma estatística de Mann-Whitney definida como

$$U_{uv} = \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{i'=1}^{n_v} \phi(X_{iu}, X_{i'v})$$

onde

$$\phi(X_{iu}, X_{i'v}) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_{iu} < X_{i'v} \\ 1/2 & \text{se } X_{iu} = X_{i'v} \\ 0 & \text{se } X_{iu} > X_{i'v} \end{cases}$$

n_u e n_v representam os números de observações das amostras u e v respectivamente.

Para testar H_0 contra a hipótese alternativa ordenada H_a , rejeita-se H_0 ao nível α de probabilidade se

$$J \geq j[\alpha, k, (n)] \quad \text{onde } j[\alpha, k, (n)]$$

é um limite crítico tabelado. Portanto

$$\Pr \{ J \geq j [\alpha, k, (n)] \} \leq \alpha$$

Uma conveniência da expressão de J como uma função linear de estatísticas U de Mann-Whitney, é a facilidade de obtenção de sua função exata de poder para os membros H_1 , H_2 e H_3 da alternativa ordenada geral H_a .

A sub-rotina FORTRAN para o cálculo da estatística J encontra-se no Apêndice.

3.3.2. A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$

A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é expressa por

$$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i \left(\mu_i^* - \frac{N+1}{2} \right)^2$$

$$\text{onde } N = \sum_{i=1}^k n_i$$

μ_i^* dentre outras expressões pode ser dada por:

$$\mu_i^* = \max_{r=1}^i \min_{t=i}^k \left\{ \sum_{j=r}^t n_j \bar{R}_j / \sum_{j=r}^t n_j \right\} \quad (i=1,2,3)$$

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^n R_{ij} / n$$

R_{ij} é a ordem da observação X_{ij} na classificação conjunta das N observações. Em caso de empates atribuiu-se a cada observação empatada a média das ordens que a elas seriam atribuídas

caso não ocorressem empates.

Para testar H_0 contra algum membro de H_a , rejeita-se H_0 se

$$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 \geq \bar{\chi}_{\text{rank}}^{2*} \quad \text{onde}$$

$$\Pr(\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 \geq \bar{\chi}_{\text{rank}}^{2*}) \leq \alpha$$

sendo $\bar{\chi}_{\text{rank}}^{2*}$ um limite de tabela de sua distribuição nula.

Tabela de limites críticos da distribuição nula da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para $k = 3$ amostras, são encontradas em PARSONS (1979, 1981) e POTTER e STÜRM (1980).

A sub-rotina FORTRAN para o cálculo de $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ encontra-se no Apêndice.

3.4. *Simulação*

3.4.1. *Geração de variáveis aleatórias*

Para a geração de variáveis aleatórias foi utilizado o método de transformação Inversa, para o qual são feitas algumas considerações a seguir.

Para gerar valores aleatórios x_i de uma determinada distribuição probabilística particular, cuja função de densidade é $f(x)$, deve-se primeiro obter a função de distribuição cumulativa $F(x)$.

Fazendo-se $F(x)$ assumir valores no intervalo $[0, 1]$ pode-se gerar números aleatórios uniformemente distribuídos e fazer $F(x)=r$. Assim x é determinado univocamente por $r=F(x)$.

Portanto, para qualquer valor r_0 particular de r que se tem gerado é possível achar o valor x_0 correspondente a r_0 pela função inversa de F , se a mesma for conhecida, ou seja,

$$x_0 = F^{-1}(r_0) \quad (3.1)$$

onde $F^{-1}(x)$ é a transformação da função de distribuição no intervalo $[0, 1]$ de x .

Matematicamente este método pode ser sumarizado dizendo que se são gerados números aleatórios uniformemente distribuídos, correspondendo a uma função $F(x)$,

$$r = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (3.2)$$

então

$$\Pr(X \leq x) = F(x) = \Pr(r \leq F(x)) = \Pr[F^{-1}(r) \leq x] \quad (3.3)$$

e conseqüentemente $F^{-1}(x)$ é uma variável que tem $f(x)$ como função de densidade.

Para maior clareza do método considere o seguinte exemplo: gerar valores aleatórios x com uma função de densidade $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$.

$$r = F(x) = \int_0^x 2t dt = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

tomando a transformação inversa $F^{-1}(r)$, ou seja, resolvendo a equação em relação a x tem-se.

$$x = F^{-1}(r) = \sqrt{r} \quad 0 \leq r \leq 1$$

Isto significa que os valores de x com função de densidade $f(x) = 2x$ podem ser geradas tomando-se a raiz quadrada de números aleatórios r .

3.4.2. Geração de variáveis aleatórias com distribuição uniforme.

Uma variável aleatória x tem distribuição uniforme se sua função de densidade for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{para outros casos} \end{cases}$$

A função de distribuição cumulativa é

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \quad 0 \leq F(x) \leq 1 \quad (3.4)$$

A média e a variância de uma variável aleatória uniformemente distribuída são dadas por

$$E(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{b+a}{2} \quad (3.5)$$

$$V(X) = \int_a^b \frac{[x-E(X)]^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (3.6)$$

Os valores a e b são desconhecidos, porém, isto não tem maior importância porque eles ficam determinados com o conhecimento da média e da variância, estabelecidos para a simulação em cada configuração do Item 3.2 conforme se segue

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \quad (3.7)$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Deste sistema obtém-se facilmente

$$a = E(X) - \sqrt{3V(X)} \quad (3.8)$$

$$b = E(X) + \sqrt{3V(X)}$$

Para a simulação de uma variável aleatória com distribuição uniforme no domínio (a,b) , NAYLOR et alii (1972) utiliza a transformação inversa para a Equação 3.4 de acordo com a Equação (3.1)

$$x = a + (b-a)r \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.9)$$

Gera-se então um conjunto de números aleatórios correspondente ao domínio das probabilidades cumulativas, isto é, valores aleatórios uniformemente distribuídos no domínio $[0,1]$. Cada número aleatório r determina univocamente um valor uniformemente distribuído x .

A sub-rotina FORTRAN utilizada na simulação de variáveis com distribuição uniforme no intervalo (a,b) , é a seguinte:

1. SUBROTINA UNIFRM (A,B,X)
2. R = RAN(0)
3. X = A + (B-A) * R
4. RETURN

3.4.3. Geração de variáveis aleatórias com distribuição normal.

Várias maneiras de gerar valores aleatórios normalmente distribuídos são encontrados na literatura. Aqui foi utilizado o processo do limite central que é tratado a seguir.

Cada observação foi simulada partindo-se da função de densidade uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

com média e variância dadas por

$$E(X) = (b+a) / 2$$

$$V(X) = (b - a)^2 / 12$$

Para o intervalo $(a=0, b=1)$ tem-se

$$E(X) = (1+0)/2 = 1/2$$

$$V(X) = (1-0)^2/12 = 1/12$$

Gerando-se r_i , $i = 1, 2, \dots, n$, números aleatórios no intervalo $0 \leq x \leq 1$ a média e a variância de $\sum_{i=1}^n r_i$

são dadas por

$$E\left(\sum_{i=1}^n r_i\right) = \sum_{i=1}^n E(r_i) = \sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n r_i\right) = \sum_{i=1}^n V(r_i) = \sum_{i=1}^n 1/12 = n/12$$

Pelo Teorema do limite central, $\sum_{i=1}^n r_i$ tende a uma distribuição normal $N(n/2, n/12)$ para n suficientemente grande. De acordo com NAYLOR et alii (1972) o menor valor de n recomendado para simulação é 10. DITTRICH (1976) adotou $n=12$, num estudo envolvendo simulação, o que proporciona uma vantagem computacional. Neste trabalho, adotou-se $n=12$ o que resulta em

$$E\left(\sum_{i=1}^{12} r_i\right) = 6 \quad \text{e} \quad V\left(\sum_{i=1}^{12} r_i\right) = 1$$

ou seja, para $n=12$ tem-se

$$\sum_{i=1}^{12} r_i \text{ aproximadamente } N(6;1)$$

$$\text{Fazendo } Z = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \quad \text{tem-se}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6\right) = E\left(\sum_{i=1}^{12} r_i\right) - 6 = 0$$

$$\text{portanto, } Z = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \text{ é aproximadamente } N(0;1)$$

Cada valor Z dá origem a um valor simulado segundo a expressão

$$X = \mu + \sigma Z, \text{ em decorrência de}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Portanto, os valores x assim simulados constituem uma amostra para a variável aleatória X distribuída normalmente, com média μ e variância σ^2 .

Pode ser verificado facilmente que o valor $n=12$ trunca a distribuição nos limites $\pm 6\sigma$, ou seja, a amplitude de variação de Z é $-6 \leq Z \leq 6$, porém, para o propósito deste trabalho isto não tem muita importância.

A sub-rotina FORTRAN utilizada para geração de valores normalmente distribuídos com média μ e desvio padrão σ , e adotadas as notações,

$$\begin{aligned} EX &= \mu \\ STDX &= \sigma \\ SUM &= \sum_{i=1}^{12} R_i \\ R &= \text{número aleatório} \end{aligned}$$

é apresentada a seguir:

1. SUBROTINA NORMAL (EX, STDX,X)
2. SUM = 0,0
3. DO 5 I = 1,12
4. R = RAN(0)
5. SUM = SUM + R
6. X = STDX * (SUM - 6.0) + EX
7. RETURN

3.5. Simulação das amostras e critério utilizado para estimar o Erro Tipo I e o poder dos testes.

Cada configuração de $k=3$ médias de populações, quando n assumiu um dos valores 3, 5 ou 8 foi considerada um experimento. Assim para $n=3$, cada configuração pode ser entendida como um experimento com três tratamentos e três observações por tratamento e analogamente, $n=5$ e $n=8$ denominados experimentos de três tratamentos com cinco e oito repetições por tratamento, respectivamente.

Para ambas as distribuições, o critério de composição das amostras simuladas foi o seguinte:

No caso de H_1 quando C tomou o valor zero e $n=3$ simulou-se para cada uma das $k=3$ médias verdadeiras, três valores constituindo-se assim um experimento com três tratamentos, cada um com três repetições. Para este experimento foram calculadas as estatísticas J de Jonckheere e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ e com elas efetuado o teste de H_0 contra H_1 considerando-se os níveis de significância 0,01, 0,05 e 0,10 e os critérios estabelecidos no item 3.3. Quatro mil experimentos deste tipo foram simulados, e o procedimento de aplicação dos testes foi executado para cada um deles. Nos quatro mil experimentos, foi contado o número deles em que H_0 foi rejeitada, sendo este, uma estimativa do Erro Tipo I, com probabilidade α . Portanto

$$\alpha = \Pr (\text{Rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira})$$

ou

$$\hat{\alpha} = \frac{\text{Nº de decisões } (H_1 | H_1 \text{ é falsa})}{\text{Nº total de experimentos}}$$

Assim, o valor $C = 0$ serviu apenas para estimar o Erro Tipo I.

Quando n assumiu os valores 5 e 8, o procedimento foi análogo.

Para os valores de $C, 0,3, 0,6, 0,9, 1,2$ e $1,5$, que serviram para estimar o Erro Tipo II, com probabilidade β e o poder dos testes, o procedimento de simulação dos experimentos e aplicação dos testes foi idêntico ao caso $C=0$. Também para cada valor de C e cada tamanho de amostra n , foram simulados quatro mil experimentos e contado o número deles que cada teste não rejeitou H_0 . As estimativas de β e do poder foram obtidas por

$$\beta = \text{Pr}(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

ou

$$\hat{\beta} = \frac{\text{Nº de decisões } (H_0 | H_0 \text{ é falsa})}{\text{Nº total de experimentos}}$$

$$\text{Poder} = \text{Pr}(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

ou

$$\text{Poder} = \frac{\text{Nº de decisões } (H_a \mid H_a \text{ é verdadeira})}{\text{Nº total de experimentos}}$$

ou

$$\text{Poder} = 1 - \beta$$

No caso de H_s ($s = 2, 3, 4$), analogamente, simulou-se quatro mil experimentos para cada configuração e para cada tamanho de amostra n . As configurações 7 a 9 serviram apenas para estimar o Erro Tipo I e as demais (10 a 18) o poder dos testes e o Erro Tipo II, pelo mesmo procedimento usado para H_1 .

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados são apresentados e discutidos considerando-se sempre um conjunto de configurações de $k = 3$ mêdias verdadeiras, estabelecidas nas Tabelas 3.1 e 3.4.

4.1. *Configurações 1, 7, 8 e 9 de $k = 3$ médias.*

As configurações 1, 7, 8 e 9 foram utilizadas apenas para estimar o Erro Tipo I, pois, para cada uma delas tomou-se três médias verdadeiras iguais.

Como critério para rejeição de H_0 foram adota-dos três níveis de Erro Tipo I ($\alpha \approx 0,01$, $\alpha \approx 0,05$ e $\alpha \approx 0,10$). Os níveis exatos de α utilizados para os dois testes nos dife-rentes tamanhos de amostra são apresentados na Tabela 4.1.

TABELA 4.1. Níveis de significância exatos e aproximados, e pontos críticos C adotados para a rejeição de H_0 , para a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ [$\alpha = \Pr(\bar{\chi}_{\text{rank}}^2 \geq C)$] e o teste de Jonckheere [$\alpha = \Pr(J \geq C)$].

ESTATÍSTICA	n	α aprox.	C	α exato
$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	3	0,01	5,472	0,0119
		0,05	3,822	0,0518
		0,10	2,756	0,0970
J	3	0,01	24	0,0107
		0,05	21	0,0613
		0,10	20	0,0946
$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	5	0,01	6,170	0,0101
		0,05	3,850	0,0450
		0,10	2,540	0,1003
J	5	0,01	59	0,0120
		0,05	54	0,0456
		0,10	50	0,1049
$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	8	0,01	6,495	0,0099
		0,05	3,920	0,0498
		0,10	-	-
J	8	0,01	140	0,0099
		0,05	128	0,0480
		0,10	-	-

FONTE: PARSONS (1979, 1981) e CAMPOS (1983).

TABELA 4.2. Erro Tipo I estimado na base de quatro mil experimentos para o teste de Jonckheere para a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
1	N	3	0,0143	0,0105	0,0515	0,0582	0,0890	0,0938
		5	0,0090	0,0100	0,0372	0,0385	0,0867	0,0985
		8	0,0127	0,0100	0,0460	0,0468	-	-
	U	3	0,0108	0,0080	0,0540	0,0652	0,0970	0,0995
		5	0,0103	0,0125	0,0430	0,0428	0,0965	0,1013
		8	0,0105	0,0080	0,0465	0,0482	-	-
7	N	3	0,0105	0,0097	0,0518	0,0625	0,0888	0,0932
		5	0,0130	0,0143	0,0490	0,0463	0,1050	0,1108
		8	0,0093	0,0088	0,0452	0,0482	-	-
	U	3	0,0103	0,0093	0,0497	0,0545	0,0872	0,0900
		5	0,0097	0,0100	0,0463	0,0465	0,1082	0,1075
		8	0,0068	0,0090	0,0430	0,0433	-	-
8	N	3	0,0100	0,0077	0,0532	0,0605	0,0890	0,0972
		5	0,0100	0,0153	0,0472	0,0442	0,1023	0,1037
		8	0,0103	0,0088	0,0488	0,0482	-	-
	U	3	0,0093	0,0073	0,0480	0,0567	0,0852	0,0885
		5	0,0095	0,0127	0,0475	0,0487	0,0992	0,1123
		8	0,0085	0,0115	0,0497	0,0497	-	-
9	N	3	0,0130	0,0123	0,0570	0,0630	0,0980	0,1015
		5	0,0088	0,0143	0,0465	0,0455	0,1032	0,1087
		8	0,0130	0,0132	0,0487	0,0520	-	-
	U	3	0,0150	0,0147	0,0578	0,0725	0,0915	0,1050
		5	0,0120	0,0145	0,0482	0,0430	0,0970	0,1073
		8	0,0103	0,0112	0,0433	0,0468	-	-

N = Normal

U = Uniforme

Os dados da Tabela 4.2 revelam uma boa exatidão no método utilizado para a estimação do Erro Tipo I. Apenas no caso da distribuição normal, $n = 5$ e $\alpha \approx 0,05$, as estimativas aparecem um pouco discrepantes dos valores exatos de α .

As configurações 7, 8 e 9 corresponderam aos coeficientes de variação 10%, 20% e 30% respectivamente. Constituíram casos em que H_0 é verdadeira. Observando-se as estimativas do Erro Tipo I naquelas configurações (Tabela 4.2) verifica-se facilmente que o coeficiente de variação não teve influência nas estimativas de α .

4.2. Configurações 2 a 6 de $k = 3$ médias.

As configurações 2 a 6 constituem o membro de H_a , $H_1: \mu_1 = -2C, \mu_2 = \mu_3 = C$ onde C foi definido em 3.1. Os valores do poder estimado para os dois testes encontram-se na Tabela 4.3.

TABELA 4.3. Poder estimado do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, na base de quatro mil experimentos, para as configurações 2 a 6 de $k = 3$ médias.

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
2	N	3	0,0713	0,0627	0,2480	0,2567	0,3500	0,3432
		5	0,1355	0,1355	0,3530	0,3293	0,5410	0,5187
		8	0,2715	0,2243	0,5222	0,4832	-	-
	U	3	0,0695	0,0645	0,2253	0,2517	0,3412	0,3455
		5	0,1253	0,1223	0,3210	0,3060	0,5035	0,4965
		8	0,2297	0,1962	0,4917	0,4565	-	-
3	N	3	0,2160	0,1837	0,6010	0,5440	0,7340	0,6700
		5	0,5852	0,4508	0,8505	0,7453	0,9340	0,8920
		8	0,8752	0,7210	0,9733	0,9277	-	-
	U	3	0,1988	0,1740	0,5610	0,5203	0,7093	0,6428
		5	0,5150	0,4042	0,7998	0,6997	0,9108	0,8563
		8	0,8500	0,6815	0,9640	0,9087	-	-
4	N	3	0,4000	0,2980	0,8818	0,7268	0,9457	0,8287
		5	0,9333	0,6935	0,9932	0,9305	0,9988	0,9883
		8	0,9985	0,9530	0,9998	0,9963	-	-
	U	3	0,3875	0,2985	0,9118	0,7273	0,9720	0,8435
		5	0,9505	0,7053	0,9953	0,9340	0,9990	0,9888
		8	1,0000	0,9553	1,0000	0,9988	-	-
5	N	3	0,4713	0,3350	0,9870	0,7813	0,9963	0,8808
		5	0,9970	0,7765	1,0000	0,9698	1,0000	0,9993
		8	1,0000	0,9782	1,0000	1,0000	-	-
	U	3	0,4880	0,3403	1,0000	0,7950	1,0000	0,9007*
		5	1,0000	0,7868	1,0000	0,9703	1,0000	1,0000
		8	1,0000	0,9880	1,0000	1,0000	-	-

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
6	N	3	0,5023	0,3582*	0,9995	0,7987	1,0000	0,8950
		5	0,9998	0,7953*	1,0000	0,9738	1,0000	0,9998
		8	1,0000	0,9853	1,0000	1,0000	-	-
	U	3	0,5115	0,3495	1,0000	0,8040*	1,0000	0,8987
		5	1,0000	0,7875	1,0000	0,9707	1,0000	1,0000
		8	1,0000	0,9878	1,0000	1,0000	-	-

N = Normal

U = Uniforme

* Valor que ultrapassou o poder máximo esperado, atingido pelo teste de Jonckheere.

Em H_1 o poder estimado dos testes cresceu, quando se aumentou n , e α . O comportamento quanto ao poder dos dois testes não se modificou da distribuição normal para a uniforme, porém, nas configurações 2 e 3 ($C = 0,3$ e $C = 0,6$) os dados revelaram que os dois testes apresentaram em geral, poder ligeiramente mais elevado na distribuição normal. Na configuração 4 ($C = 0,9$), o teste de Jonckheere apresentou um pouco mais poderoso na distribuição uniforme e na configuração 6 ($C = 1,5$) esta observação foi verificada para a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

Para $n = 3$ e $\alpha \approx 0,01$ os dois testes apresentaram baixo poder para todas as configurações de H_1 nas duas distribuições, sendo o poder máximo atingido verificado na configuração 6 ($C = 1,5$), não superior a 0,50.

Em H_1 , para todos os níveis de α considerados nas duas distribuições, a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi acentuadamente mais poderosa que o teste de Jonckheere para $n = 3$, sendo que a diferença de potência cresce à medida que se aumenta C . Este resultado está de acordo com aqueles obtidos por POTTER e STURM (1980 e 1981), que afirmam ter o teste de Jonckheere baixo poder para $n = 3$.

Também, as configurações 2 a 6 é um caso de ordenação parcial, ou seja, apenas uma desigualdade de H_a prevalece. Nesta condição, para qualquer tamanho de amostra, LEHMANN(1975) baseado em resultados de BARTHOLOMEW(1961 a,b), comenta que a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ é mais adequada para o teste de hipóteses.

Com $n = 5$ os dois testes tiveram o seguinte comportamento quanto ao poder para as configurações 2 a 6, nas duas distribuições:

- a) a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi acentuadamente mais poderosa que o teste de Jonckheere quando $\alpha \approx 0,01$, sendo que a diferença de poder cresceu à medida que C aumentou no intervalo $0,3 \leq C \leq 1,5$. O valor máximo de poder estimado foi verificado para $C = 1,5$, sendo 0,80 para o teste de Jonckheere e 1,00 para $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$;
- b) para $\alpha \approx 0,05$ a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ apresentou-se ligeiramente superior;
- c) os dois testes foram praticamente equivalentes para $\alpha \approx 0,10$, havendo uma pequena superioridade da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ nas configurações 2, 3 e 4.

No caso de $n = 8$ a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi ligeiramente superior sendo a diferença mais elevada para a configuração 3 ($C = 0,6$), com $\alpha \approx 0,01$.

As figuras 4.1 A, 4.1.B, 4.1.C, ilustram a função empírica do poder dos dois testes para as configurações 1 a 6 e $\alpha \approx 0,05$.

Para as configurações 1 a 6, segundo POTTER e STURM (1981) (Expressão 2.10) os valores máximos de poder atingidos pelo teste de Jonckheere para $n = 3$ e $n = 5$ e os níveis de α utilizados neste trabalho, são apresentados na Tabela 4.4.

FIGURA 4.1A. Função empírica do poder do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para $n = 3$, $H_1: \mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$ e $\alpha = 0,05$.

FIGURA 4.1B. Função empírica do poder do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ para $n = 5$, $H_1: \mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$ e $\alpha = 0,05$.

FIGURA 4.1C. Função empírica de poder do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{rank}^2$ para $n = 8$, $H_1: \mu_1 = -2C$, $\mu_2 = \mu_3 = C$ e $\alpha = 0,05$.

TABELA 4.4. Poder máximo atingido pelo teste de Jonckheere para as configurações, 1 a 6 sob diferentes níveis de α e n .

n	α	PODER MÁXIMO
3	0,0107	0,3500
5	0,0120	0,7897
3	0,0613	0,8000
5	0,0456	0,9722
3	0,0946	0,9000
5	0,1049	1,0000

Comparando os valores da Tabela 4.4. com as estimativas do poder obtidos na base de quatro mil experimentos, observa-se que estas apresentam-se dentro da faixa esperada.

4.3. Configurações 10 a 15 (H_2 e H_3).

Nas configurações 10 a 15 dentro de um mesmo nível de n e α , cada teste apresentou praticamente o mesmo poder para as duas distribuições. Estes resultados levam a pensar que o coeficiente de variação não tem influência sobre o poder dos testes estudados.

A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi mais poderosa em todos os níveis de α e tamanhos de amostras. Isto confirma os resultados de LEHMANN (1975) e BARTHOLOMEW (1961 a,b), já que se trata de um caso de ordenação parcial das médias.

O teste de Jonckheere foi superado nas duas distribuições por uma maior amplitude de poder, nos casos $n = 5$ e $n = 8$ com $\alpha \approx 0,01$ e $n = 5$ com $\alpha \approx 0,05$.

Para $n = 3$, o teste de Jonckheere não foi muito inferior, sendo que para $\alpha \approx 0,05$ e $\alpha \approx 0,10$ seu poder foi acima de 0,50. Este resultado não concorda com aqueles obtidos por POTTER e STURM (1980).

Os dados do poder estimado para os dois testes referentes às configurações 10 a 15, são apresentados na Tabela 4.5.

TABELA 4.5. Poder estimado do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, na base de quatro mil experimentos para as configurações 10 a 15 de $k = 3$ médias.

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
10	N	3	0,2370	0,2010	0,6195	0,5552	0,7407	0,6680
		5	0,5653	0,4473	0,8298	0,7245	0,9315	0,8808
		8	0,8785	0,7215	0,9735	0,9282	-	-
	U	3	0,1930	0,1685	0,5578	0,5135	0,6985	0,6318
		5	0,5133	0,4170	0,8040	0,7080	0,9105	0,8717
		8	0,8483	0,6865	0,9595	0,9100	-	-
11	N	3	0,2125	0,1785	0,6103	0,5490	0,7383	0,6635
		5	0,5772	0,4532	0,8425	0,7330	0,9358	0,8867
		8	0,8727	0,7255	0,9717	0,9285	-	-
	U	3	0,2012	0,1793	0,5478	0,5042	0,6995	0,6280
		5	0,5255	0,4103	0,8065	0,7010	0,9132	0,8620
		8	0,8392	0,6847	0,9570	0,9030	-	-
12	N	3	0,2143	0,1780	0,6080	0,5320	0,7322	0,6582
		5	0,5855	0,4627	0,8298	0,7297	0,9305	0,8820
		8	0,8823	0,7212	0,9755	0,9370	-	-
	U	3	0,1845	0,1610	0,5468	0,5050	0,7088	0,6297
		5	0,5278	0,4108	0,8038	0,6955	0,9125	0,8657
		8	0,8472	0,6782	0,9600	0,9073	-	-
13	N	3	0,2188	0,1835	0,6082	0,5438	0,7402	0,6655
		5	0,5755	0,4508	0,8300	0,7255	0,9300	0,8853
		8	0,8695	0,7243	0,9693	0,9253	-	-
	U	3	0,1882	0,1640	0,5585	0,5133	0,7080	0,6380
		5	0,5138	0,4158	0,8038	0,6908	0,9087	0,8582
		8	0,8537	0,6938	0,9647	0,9143	-	-

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
14	N	3	0,2212	0,1937	0,6173	0,5570	0,7472	0,6775
		5	0,5755	0,4552	0,8395	0,7340	0,9368	0,8872
		8	0,8757	0,7365	0,9755	0,9340	-	-
	U	3	0,1880	0,1710	0,5482	0,5073	0,6992	0,6270
		5	0,5332	0,4273	0,8110	0,7130	0,9160	0,8663
		8	0,8418	0,6795	0,9535	0,9055	-	-
15	N	3	0,2245	0,1900	0,6220	0,5508	0,7415	0,6675
		5	0,5777	0,4495	0,8378	0,7322	0,9298	0,8850
		8	0,8775	0,7243	0,9728	0,9277	-	-
	U	3	0,1998	0,1662	0,5570	0,5180	0,7020	0,6372
		5	0,5200	0,4125	0,8095	0,7000	0,9202	0,8665
		8	0,8457	0,6885	0,9625	0,9130	-	-

N = Normal

U = Uniforme

4.4. Configurações 16, 17 e 18.

As configurações 16, 17 e 18 constituíram o membro de H_a , H_4 , onde se verifica a ordenação completa das médias, ou seja, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Cada teste apresentou poder estimado constante para as três configurações em questão, em todos os níveis de α e tamanhos de amostras.

No teste de Jonckheere verificou-se uma acentuada elevação no poder em relação às configurações 10 a 15 enquanto que a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ manteve um poder mais ou menos constante nas configurações 10 a 18.

Os dois testes apresentaram baixo poder para $n=3$ e $\alpha \approx 0,01$, sendo o valor máximo do poder atingido pelos testes na distribuição normal, em torno de 0,30.

Considerando-se todas as configurações de médias envolvidas neste trabalho, o teste de Jonckheere apresentou a maior superioridade de poder nas configurações 16, 17 e 18 quando se teve $n = 3$ e $\alpha \approx 0,05$ para a distribuição normal.

Para $\alpha \approx 0,01$ os testes foram um pouco mais poderosos na distribuição normal apresentando poder variando nas seguintes faixas:

- a) distribuição normal: poder variando de 0,60 a 0,63 para $n=5$ e 0,87 a 0,91 para $n = 8$;
- b) distribuição uniforme: poder variando de 0,56 a 0,59 para $n = 5$ e 0,84 a 0,88 para $n = 8$.

Em todos os casos das configurações 16 a 18, os testes foram praticamente equivalentes, prevalecendo às vezes uma ligeira superioridade da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

Na Tabela 4.6 constam os valores de poder estimado para os dois testes referentes às configurações 16 a 18.

TABELA 4.6. Poder estimado do teste de Jonckheere e da estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$, na base de quatro mil experimentos para as configurações 16 a 18 de $k = 3$ médias.

Conf.	Dist.	n	$\alpha \approx 0,01$		$\alpha \approx 0,05$		$\alpha \approx 0,10$	
			$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J	$\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$	J
16	N	3	0,3113	0,2900	0,6620	0,6805	0,7795	0,7858
		5	0,6270	0,6082	0,8660	0,8490	0,9448	0,9390
		8	0,8937	0,8663	0,9778	0,9733	-	-
	U	3	0,2682	0,2558	0,6063	0,6472	0,7453	0,7540
		5	0,5780	0,5887	0,8510	0,8368	0,9368	0,9358
		8	0,8808	0,8410	0,9735	0,9660	-	-
17	N	3	0,3080	0,2925	0,6578	0,6710	0,7785	0,7732
		5	0,6330	0,6310	0,8698	0,8567	0,9487	0,9442
		8	0,9038	0,8720	0,9817	0,9857	-	-
	U	3	0,2685	0,2508	0,6112	0,6500	0,7430	0,7517
		5	0,5560	0,5560	0,8405	0,8150	0,9352	0,9330
		8	0,8733	0,8493	0,9695	0,9665	-	-
18	N	3	0,2905	0,2740	0,6545	0,6760	0,7788	0,7832
		5	0,6280	0,6093	0,8733	0,8448	0,9487	0,9445
		8	0,9060	0,8725	0,9785	0,9733	-	-
	U	3	0,2653	0,2572	0,6088	0,6425	0,7440	0,7507
		5	0,5838	0,5943	0,8595	0,8453	0,9440	0,9420
		8	0,8795	0,8420	0,9765	0,9693	-	-

N = Normal

U = Uniforme

Observando-se as configurações 10 a 18 conjuntamente, verifica-se que o poder dos testes estudados não depende muito do coeficiente de variação e sim da configuração de médias. De um modo geral, a estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi superior para o caso de ordenação parcial (configurações 2 a 6 e 10 a 15) e os dois testes foram equivalentes para ordenação completa (configurações 16 a 18).

5. CONCLUSÕES

a) Para as configurações 2 a 6 de $k = 3$ médias ($H_1: \mu_1 = -2C, \mu_2 = \mu_3 = C$, sendo $C, 0,3, 0,6, 0,9, 1,2$ e $1,5$), o teste $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi mais poderoso, exceto para os casos, $\alpha \approx 0,05$ com $n = 8$ e $\alpha \approx 0,10$ com $n = 5$.

b) Nas configurações 10 a 15 de $k = 3$ médias ($H_2: \mu_1 = \mu_2 = \mu - 0,6 \sigma_p, \mu_3 = \mu + 1,2 \sigma_p$ e $H_3: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p, \mu_2 = \mu_3 = \mu + 0,6 \sigma_p$, sendo μ e $\sigma_p, (p = 1,2,3) 100, 10, 20$ e 30 respectivamente), onde se verifica a ordenação parcial das médias, cada teste manteve seu poder constante, nos diferentes níveis de α e tamanhos de amostras. O teste $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi mais poderoso, sendo que a diferença de poder foi mais acentuada nos casos:

- $b_1)$ $\alpha \approx 0,01; n = 5$ e $n = 8$ na distribuição normal e $n = 8$ na distribuição uniforme;
- $b_2)$ $\alpha \approx 0,05; n = 5$ nas duas distribuições.

c) Nas configurações 16 a 18 ($H_4: \mu_1 = \mu - 1,2 \sigma_p$, $\mu_2 = \mu + 0,4 \sigma_p$, $\mu_3 = \mu + 0,8 \sigma_p$, sendo μ e σ_p , ($p=1,2,3$) 100, 20 e 30 respectivamente) que é um caso de ordenação completa, os dois testes foram equivalentes quanto ao poder.

d) A estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ foi mais poderosa para $n=3$ e $n = 5$, em todos os níveis de α , para a ordenação parcial e os dois testes foram equivalentes para a ordenação completa e para $n = 8$.

e) O coeficiente de variação e a distribuição não tiveram grande influência sobre o poder dos testes e as estimativas do Erro Tipo I. O teste de Jonckheere foi mais sensível ao tipo de ordenação apresentando maior poder na completa.

f) Apesar de maior dificuldade de cálculo, para três amostras cada uma com três observações ($k=3$ e $n=3$) e para a ordenação parcial da hipótese alternativa, independente do tamanho de n , deve-se preferir o teste baseado na estatística $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$ em relação ao teste de Jonckheere.

6. LITERATURA CITADA

BARLOW, R.E., D.J. BARTHOLOMEW, J.M. BREMER e H.D. BRUNK, 1972.
Statistical Inference Under Order Restrictions. New York,
Wiley. 388 p.

BARTHOLOMEW, D.J., 1959 a. A Test of Homogeneity for Ordered
Alternatives. *Biometrics*, 46: 36 - 48.

BARTHOLOMEW, D.J., 1959 b. A Test of Homogeneity for Ordered
Alternatives II. *Biometrics*, 46: 328 - 35.

BARTHOLOMEW, D.J., 1961 a. Ordered Test in Analysis of
Variance. *Biometrika*, 48: 325 - 32.

BARTHOLOMEW, D.J., 1961 b. A Test of Homogeneity of Means
Under Restricted Alternatives. *J.R. Statist. Soc.*, B 23 :
239 - 72.

BEYER, W.H., 1968. *Handbook of Tables for Probability and*

- Statistics*. 2^a ed. Cleveland, Ohio, Chemical Rubber Co.
- BRUNK, H.D., 1955. Maximum Likelihood Estimates of Monotone Parameters. *Ann. Math. Statist.*, 26: 607 - 16.
- BRUNK, H.D., 1958. On the Estimation of Parameters Restricted by Inequalities. *Ann. Math. Statist.*, 29: 437 - 54.
- CAMPOS, H. 1983. *Estatística Experimental Não Paramétrica*. 4^a ed. Piracicaba, SP, USP/ESALQ. 349 p.
- CHACKO, V.J., 1963. Testing Homogeneity Against Ordered Alternatives. *Ann. Math. Statist.*, 34, 945 - 56.
- CONOVER, W.J., 1971. *Practical Nonparametric Statistics*. New York, John Wiley & Sons, 462 p.
- COSTA NETO, P.L.O., 1981. *Estatística*. São Paulo, Edgar Blucher. 264 p.
- DITTRICH, R.C., 1976. *Estudo de Alguns Métodos de Comparações Múltiplas de Médias*. Brasília, UnB 108 p. (Dissertação de Mestrado).
- DIXON, W.J. e F.J. MASSEY JUNIOR, 1969. *Introduction to Statistical Analysis*. 3^a ed. New York, McGraw-Hill Book Company. 638 p.
- FONSECA, J.S. e G.A. MARTINS, 1982. *Curso de Estatística*. 3^a ed. São Paulo, Atlas. 165 p.
- HOLLANDER, M. e D.A. WOLFE, 1973. *Nonparametric Statistical Methods*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 503 p.

- JONCKHEERE, R.A., 1954 . A distribution - Free K-Sample Test Against Ordered Alternatives. *Biometrika*, 41, 133 - 45.
- KENDALL, M.G. e A. STUART, 1973. *The Advanced Theory of Statistics*. 3^a ed. London, Griffin. V.2.
- LEACH, C., 1979. *Introduction to Statistics: A Nonparametric Approach for the Social Sciences*. New York, John Wiley 415 p.
- LEHMANN, E.L., 1975. *Nonparametric Statistical Methods Based on Ranks*. São Francisco, Holden - Day, Inc. 457 p.
- MANN, H.B. e D.R. WHITNEY, 1947. On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. *Ann. Math. Statist.*, 18: 50 - 60.
- NAYLOR, T.H., J.L. BALINTFY, D.S. BURDICK e K. CHU, 1971. *Técnica de Simulação em Computadores*. Rio de Janeiro, Vozes. 402 p.
- ODEH, R.E., 1971. On Jonckheere's K-Sample Test Against Ordered Alternatives. *Technometrics*, 13: 912 - 18.
- PARSONS, V.L., 1979. A Note on the Exact Distribution of a Nonparametric Test Statistic for Ordered Alternatives. *Ann. Statist.*, 7: 454 - 58.
- PARSONS, V.L., 1981. Small Sample Distribution for a Nonparametric Test for Trend. *Commun. Statist. - Simula. Computa.*, B 10 (3): 289 - 302.
- PIMENTEL GOMES, F., 1982. *Curso de Estatística Experimental*. 10^a ed. Piracicaba, Livraria Nobel. 430 p.

- POTTER, R.M. e G.W. STURM, 1980. *Test for Ordered Alternatives*. Western Electric Technical Report CC-7324.
- POTTER, R.M. e G.W. STURM, 1981. The Power of Jonckhure's Test. *The American Statistician*, 35 (4): 249 - 50.
- SHORACK, G.R., 1967. Testing Against Ordered Alternatives in Modelo I Analysis of Variance; Normal Theory and Nonparametric. *Ann. Math. Statist.*, 38: 1740 - 53.
- SHORACK, R.A., 1968. Recursive Generation of the Distribution of Several Nonparametric Test Statistics Under Censoring. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 63: 353 - 66.
- STEEL, R.G.D. e J.H. TORRIE, 1980. *Principles and Procedures of Statistics: A Biometric Approach*. 2^a ed. New York, McGraw-Hill Book Company. 663 p.
- TERPSTRA, T.J., 1952. The Asymptotic Normality, and Consistency of. Kendall's Test Against Trend, When Ties are Present in One Ranking. *Indag. Math.*, 14: 327 - 33.
- TERPSTRA, T.J., 1953. The Exact Probability Distribution of the T Statistic for Testing Against Trend and its Normal Approximation. *Indag. Math.*, 15: 433 - 7.
- Van EEDEN, C., 1957. Note on Two Methods for Estimating Ordered Parameters of Probability Distribution. *Indag. Math.*, 19: 506 - 12.
- WILCOXON, F., 1945. Individual Comparisons by Ranking Methods. *Biometrics*, 1: 80 - 3.

7. APÊNDICE

Sub-rotinas FORTRAN para calcular as estatísticas dos testes de Jonckheere e $\bar{\chi}_{\text{rank}}^2$.

SUBROTINA PARA CALCULAR A ESTATISTICA QUI-QUADRADO-BAR-RANK

DESCRICAO DAS VARIABEIS:

NOME	I/O	TIPO	DEFINICOES
NUMPOP	INPUT	INTEIRO	NUMERO DE POPULACOES
DADOS	INPUT	REAL	VETOR DE OBSERVACOES
N	INPUT	INTEIRO	VETOR DE TAMANHOS DE AMOSTRAS
NTOTAL	INPUT	INTEIRO	TOTAL DE TODOS OS TAMANHOS DE AMOSTRAS
STAT	OUTPUT	REAL	VALOR DA ESTATISTICA

CHI-QUADRADO-BAR-RANK

```

SUBROUTINE CHIBAR(NUMPOP, DADO, N, NTOTAL, STAT)
REAL DADO(30), RANK(30), XI(50), AVRANK(9), U(9), NUMER
REAL DAUX(30), RAUX(30)
INTEGER N(9),CONT
LOGICAL TROCA, NACHOU

```

ORDENACAO DAS OBSERVACOES (VETOR RANK)

```

DO 10 I= 1, NTOTAL
  RANK(I) = DADO(I)
  XI(I) = I
10 CONTINUE
DO 30 I=1,NTOTAL
  IC=0
  DO 20 J=1, NTOTAL-I
    IF (RANK(J).LT.RANK(J+1)) GO TO 20
    TEMP = RANK(J)
    RANK(J)=RANK(J+1)
    RANK(J+1)=TEMP
    TEMP=XI(J)
    XI(J)=XI(J+1)
    XI(J+1)=TEMP
    IC=1
  20 CONTINUE
  IF (IC.EQ.0) GO TO 40
30 CONTINUE
40 CONTINUE
DO 50 I= 1,NTOTAL
  J=XI(I)+0.50
  RANK(J)=I
50 CONTINUE
DO 51 I=1,NTOTAL
  DAUX(I)=DADO(I)
  RAUX(I)=RANK(I)
51 CONTINUE
TROCA=.TRUE.
52 CONTINUE
IF (.NOT.(TROCA)) GOTO 55
TROCA=.FALSE.
DO 54 I=1,NTOTAL-1
  IF (.NOT.(DAUX(I).GT.DAUX(I+1))) GOTO 53
  TEMP=DAUX(I)
  DAUX(I)=DAUX(I+1)
  DAUX(I+1)=TEMP
  TEMP=RAUX(I)
  RAUX(I)=RAUX(I+1)
  RAUX(I+1)=TEMP
  TROCA=.TRUE.
53 CONTINUE

```

```

54  CONTINUE
    GOTO 52
55  CONTINUE
    I=1
56  CONTINUE
    IF (.NOT.(I.LE.NTOTAL-1)) GOTO 60
    ELEM=DAUX(I)
    CONT=1
    SRANK=RAUX(I)
    J=I+1
57  CONTINUE
    IF (.NOT.((DAUX(J).EQ.ELEM).AND.(J.LE.NTOTAL))) GOTO 58
    CONT=CONT+1
    SRANK=SRANK+RAUX(J)
    J=J+1
    GOTO 57
58  CONTINUE
    RMED=SRANK/CONT
    DO 59 K=I,J-1
        RAUX(K)=RMED
59  CONTINUE
    I=J
    GOTO 56
60  CONTINUE
    DO 65 I=1,NTOTAL
        NACHOU=.TRUE.
        J=1
61  CONTINUE
        IF (.NOT.(NACHOU)) GOTO 64
        IF (.NOT.(DAUX(I).EQ.DAUX(J))) GOTO 62
        NACHOU=.FALSE.
        RANK(I)=RAUX(J)
        GOTO 63
62  CONTINUE
        J=J+1
63  CONTINUE
        GOTO 61
64  CONTINUE
65  CONTINUE

```

C
C
C

CALCULO DAS MEDIAS DOS RANKS (VETOR AVRANK) PARA CADA AMOSTRA

```

    IRMAX=0
    DO 70 I=1,NUMPOP
        AVRANK(I)=0.0
        IRMIN=IRMAX+1
        IRMAX=IRMAX+N(I)
        DO 69 II=IRMIN, IRMAX
            AVRANK(I)=AVRANK(I) + RANK(II)/N(I)
69  CONTINUE
70  CONTINUE

```

C
C
C
C

CALCULO DA REGRESSAO ISOTONICA (VETOR U), DAS MEDIAS DOS RANKS (VETOR AVRANK) E DA ESTATISTICA QUI-QUADRADO-BAP-RANK (STAT)

```

    STAT=0.0
    DO 110 I=1,NUMPOP
        XMAX=-9.0E20
        DO 100 II=1,I
            XMIN = 9.0E20
            DO 90 III=I,NUMPOP
                NUMER=0.0
                DENOM=0.0

```

```
DO 80 IIII=II, III
  NUMER = NUMER + AVPRANK(IIII)*N(IIII)
  DENOM = DENOM + N(IIII)
80  CONTINUE
  RATIO=NUMER/DENOM
  IF (RATIO.LT.XMIN) XMIN=RATIO
90  CONTINUE
  IF (XMIN.GT.XMAX) XMAX=XMIN
100 CONTINUE
  U(I)=XMAX
  STAT=STAT + (12.0/(NTOTAL*(NTOTAL+1)))*N(I)*
    (U(I)-((NTOTAL+1.0)/2.0))**2
110 CONTINUE
  RETURN
  END
```

SUBROTINA PARA CALCULAR A ESTATISTICA DO TESTE DE JONCKHEERE

DESCRICAO DAS VARIABEIS:

NOME	I/O	TIPO	DEFINICOES
NUMPOP	INPUT	INTEIRO	NUMERO DE POPULACOES
DADOS	INPUT	REAL	VETOR DE OBSERVACOES
N	INPUT	INTEIRO	VETOR DE TAMANHOS DE AMOSTRAS
NTOTAL	INPUT	INTEIRO	TOTAL DE TODOS OS TAMANHOS DE AMOSTRAS
JONCK	OUTPUT	REAL	VALOR DA ESTATISTICA DO TESTE DE JONCKHEERE

SUBROUTINE JONCKH(NUMPOP,DADO,N,NTOTAL,JONCK)

REAL DADO(30), JONCK

INTEGER N(9), ISMN(9)

DO 10 I=1,NUMPOP

ISMN(I)=0

10 CONTINUE

DO 20 I=2,NUMPOP

ISMN(I)=ISMN(I-1)+N(I-1)

20 CONTINUE

SOMA DOS INDICADORES PARA OBTEN A ESTATISTICA DO
TESTE DE JONCKHEERE (JONCK)

JONCK=0.0

DO 60 I=1,NUMPOP-1

DO 50 J=I+1,NUMPOP

DO 40 IL=ISMN(I)+1,ISMN(I)+N(I)

DO 30 IK=ISMN(J)+1,ISMN(J)+N(J)

XIND=0.0

IF (DADO(IL).LT.DADO(IK)) XIND=1.0

IF (ABS(DADO(IL)-DADO(IK)).LE.0.00001) XIND=0.5

JONCK=JONCK+XIND

30 CONTINUE

40 CONTINUE

50 CONTINUE

60 CONTINUE

RETURN

END