COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS - SÉRIE DE PRECIPITAÇÕES PLUVIAIS MEN- SAIS NO MUNICÍPIO DE PINDORAMA - SP

ELISABETH BORGES GONÇALVES

Orientador: Prof. Dr. VIVALDO FRANCISCO DA CRUZ

Dissertação apresentada à Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Agronomia, Área de Concentração: Estatística e Experimentação Agronômica.

P I R A C I C A B A
Estado de São Paulo - Brasil
Fevereiro de 1983

À minha mãe

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Vivaldo Francisco da Cruz, orientador deste trabalho, pelas suas valiosas sugestões, pela cuidadosa revisão do texto e pela honrosa dedicação.

Ao Professor Ph.Dr. Arnol'do De Hoyos, pela inestimável colaboração, sem a qual este estudo jamais teria sido realizado.

Ao Professor Dr. Humberto de Campos, pela amizade e apoio recebidos durante todo o curso.

Aos Professores que compõem o quadro do Departamento de Matemática e Estatística, pela fabulosa contribuição em minha formação profissional.

Aos funcionários do Departamento, pelos incalculáveis serviços prestados.

À Iza e Rosa, que sempre souberam contornar os problemas surgidos durante o curso.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro fornecido para que este estudo se efetuasse.

Ao Cláudio, Jaime, Rosanne, Tera, Ronaldo e todos os outros... foram tantos..., que me incentivaram, apoiaram, acreditaram e ... tantas outras coisas mais...

ÍNDICE

	Página
LISTA DE QUADROS.....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	viii
RESUMO.....	x
SUMMARY.....	xii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DE LITERATURA	6
3. METODOLOGIA	11
3.1. Definições Básicas	11
3.1.1. Séries Temporais e Estacionariedade	11
3.1.2. Processos em L_2 - A Melhor Previsão Linear	14
3.1.3. Funções de Autocorrelação	16
3.1.4. Sistemas Dinâmicos	23
3.1.5. Idéias Básicas na Construção e Ajuste de Modelos	25
3.2. Não Estacionariedade	29
3.3. Modelos "Naive"	31
3.3.1. Naive I	32
3.3.2. Naive II	32
3.3.3. Naive III	33
3.4. Modelos de Autoregressão	33
3.4.1. Modelo de Regressão	33
3.4.2. Filtragem Adaptativa	35
3.5. Métodos de Decomposição	37
3.5.1. Decomposição por Alisamento	38

3.5.2. Decomposição por Regressão	39
3.6. Suavização	40
3.6.1. Médias Móveis Simples e Linear	42
3.6.2. Suavização Exponencial Simples e Linear	44
3.6.3. Modelos de Holt e/ou Winters	48
3.7. Modelos de Box e Jenkins	51
3.7.1. Estacionariedade e Invertibilidade	53
3.7.2. Modelos Lineares Estacionários e Não Estacionários	55
3.7.3. Função de Autocorrelação Parcial	59
3.7.4. O Sistema de Previsão	61
3.8. As Medidas SNR e ARSE	68
3.9. Melhora e Misturas	72
3.10. Materiais	74
4. RESULTADOS	77
4.1. Definição do Problema	77
4.2. Familiarização	78
4.3. Ajuste dos Modelos	84
4.3.1. Modelos Naive	85
4.3.2. Decomposição	87
4.3.3. Suavização	89
4.3.4. Auto-regressão	93
4.3.5. Box e Jenkins	95
4.4. Comparação, Melhora e Misturas	96
4.5. SNR e ARSE	98
5. DISCUSSÃO	99
6. CONCLUSÕES	155
BIBLIOGRAFIA	157

LISTA DE QUADROS

Página

Quadro 1	. Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP, janeiro/50/abril,1981.....	112
Quadro 2	. Teste de Aditividade - Resultados Obtidos.....	117
Quadro 3	. Funções de Autocorrelação - Série Observada e Série Diferenciada	119
Quadro 4	. Função de Autocorrelação - Série Observada e Série Diferenciada	121
Quadro 5	. Modelos Naive - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes	123
Quadro 6	. Decomposição/Naive - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes	125
Quadro 7	. Decomposição por Regressão - Funções de Autocorrelação dos Resíduos do Ajuste.....	127
Quadro 8	. Modelos Suavizados. Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes	129
Quadro 9	. Modelos de Holt e/ou Winters - Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes	131
Quadro 10	. Modelos Auto-regressivos - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes	133
Quadro 11	. Função de Autocorrelação Parcial da Série X_t	135
Quadro 12	. Função de Autocorrelação Parcial da Série W_t	136
Quadro 13	. F.A.C. dos Resíduos do Ajuste do Modelo ARMA	137
Quadro 14	. F.A.C.P. dos Resíduos do Modelo ARMA Ajustado	138
Quadro 15	. Ajustes de Regressões - Resultados Obtidos	139
Quadro 16	. Modelo ARMA Ajustado - Resultados Obtidos	140

Quadro 17 . Melhora de Previsões - Resultados Obtidos	141
Quadro 18 . Melhora de Previsões - Resultados Obtidos	142
Quadro 19 . Mistura de Previsões - Resultados Obtidos	143
Quadro 20 . Medidas SNR e ARSE - Resultados Obtidos	144
Quadro 21 . Séries Simuladas, com $\alpha_e^2 = 0,001$ e estacionárias, n = 50	145
Quadro 22 . Modelo ARMA. Determinação das ordens e diagnose ...	146
Quadro 23 . Modelos Ajustados - Resultados Obtidos	154

LISTA DE FIGURAS

Página

Figura 1 . Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama/SP, a partir de t=251	113
Figura 2 . Série de Logarítmos de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP, a partir de jan./71.....	114
Figura 3 . Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-Sp com diferenças ∇_{12} , a partir de t = 251.....	115
Figura 4 . Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP e Série Alisada, a partir de t = 251.....	116
Figura 5 . Teste de Aditividade	118
Figura 6 . Funções de Autocorrelação - Série Observada, Logarítmos e Diferenciada	120
Figura 7 . Funções de Autocorrelação Inversa - Série Observada e Diferenciada	122
Figura 8 . Funções de Autocorrelação de Resíduos dos Ajustes Naive	124
Figura 9 . Autocorrelação de Resíduos dos Ajustes - Decomposição/Naive	126
Figura 10 . Função de Autocorrelação dos Resíduos do Ajuste Decomposição por Regressão	128
Figura 11 . Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes S.E.L. e M.M.L.....	130
Figura 12 . Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes Modelos Suavizados de Holt e/ou Winters	132

Figura 13 . Funções de Autocorrelação de Resíduos - Modelos de Autoregressão	134
Figura 14 . Série Observada e Ajuste Naive I - a partir de t=251	147
Figura 15 . Série Observada e Ajustes Decomposição Naive e por Regressão, a partir de t=251	148
Figura 16 . Série Observada e Ajustes Sazonais de Holt e Winters, a partir de t=251	149
Figura 17 . Série Observada e Ajustes de Holt e Winters Aditivo, Suavização Exponencial Linear e Médias Móveis Linear, a partir de t=251	150
Figura 18 . Série Observada e Modelos de Auto-regressão Ajustados, a partir de t=251	151
Figura 19 . Série Observada e Modelo ARMA ajustado. Últimas 37 previsões.....	152
Figura 20 . Série Observada, Modelo ARMA e Holt e Winters Ajustados. Últimas 37 previsões.....	153

COMPARAÇÃO DE MODELOS PARA PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS
- SÉRIE DE PRECIPITAÇÕES PLUVIAIS MENSAL NO
MUNICÍPIO DE PINDORAMA-SP

Elisabeth Borges Gonçalves

Orientador: Prof.Dr.Vivaldo Francisco da Cruz

RESUMO

O trabalho focaliza análise de séries temporais no domínio do tempo, a partir de conceitos básicos em modelagem e previsão, apresentando-se um sistema preditivo.

As classes de modelos Naive, Suavizados, Auto-regressivos Box e Jenkins e métodos de decomposição são desenvolvidos e discutidos em seus aspectos prático e teórico.

No intuito de estudar estes modelos em séries climatológicas e pesquisar sua acuracidade em casos excessivamente aleatórios, é analisada a série de precipitações pluviais mensais no Município de Pindorama-SP, a partir de janeiro de 1950 a abril de 1981, discutindo-se a performance dos modelos.

Como instrumentos para tomadas de decisão na escolha entre modelos autoregressivos e suavizados são propostas e discutidas as medidas ARSE e SNR, utilizando-se séries econômicas de domínio público (oito) e processos ARMA simulados no intuito de verificar a adequabilidade destas medidas.

De modo geral, os melhores modelos foram o de suavização sazonal aditiva de Holt e Winters e ARMA sazonal, com relação ao EQM de previsão, porém enquanto o suavizado não apresentou f.a.c. residual aleatória, o ARMA ajustado revelou-se pouco prático.

As medidas ARSE e SNR obtiveram um desempenho razoável, mas ainda devem ser melhor desenvolvidas, o que envolverá discussões sobre o sentido de aleatoriedade em séries temporais.

COMPARATION OF FORECASTING MODELS IN TIME SERIES - MONTHLY
PLUVIAL PRECIPITATIONS IN PINDORAMA-SP

Elisabeth Borges Gonçalves

Adviser: Prof.Dr.Vivaldo Francisco da Cruz

SUMMARY

This study comprises time series analysis on time domain, beginning with concepts in models construction and forecasting, being introduced a predictive system.

Smoothing methods, Naive models, Autoregressive, ARIMA and Decomposition technics are developed and discussed in their practical and theoretical aspects.

To observe this models on climatological series and research their accuracy in random cases, a pluvial time serie is analysed, the serie is composed by 364 monthly observations from january, 1950 to april, 1981 in Pindorama-SP, looking upon the models performance.

As instruments to make decision to pick out autoregressive or smoothing models are proposed the measures ARSE and SNR, using public economical series (eight series) and simulated ARMA processes to verify their properties.

In a general way, the best models were the Holt-Winters' additive seasonal smoothing and the seasonal ARMA model, relative to M.S.E.,

but the smoothing method had not random residual autocorrelation function and the ARMA wasn't practical.

Measures ARSE and SNR had a reasonable accomplishment, but they must be something more developed, what will involve considerations about the sense of random components in time series.

1. INTRODUÇÃO

Em quase todos os ramos da ciência podem ser observados sistemas que se desenvolvem em um período (ou sequências de intervalos) de tempo, como por exemplo arrecadações de ICM, crescimento de colônias de bactérias, fenômenos climatológicos em geral, etc.

Nos casos em que a situação demonstra acréscimo, ou decréscimo muito rápido, como é típico em colônias de bactérias, o fenômeno é dito explosivo, podendo ser estudado através de "curvas de crescimento", não sendo tratados neste trabalho.

De modo genérico, os problemas envolvidos nos mencionados sistemas não se reportam unicamente a seu comportamento, porém, englobam obtenção de previsões, controle e outros fatores, nos mais diversos intuitos.

Entende-se por previsão, a tentativa de predizer o comportamento de um sistema em um instante $t+h$, com bases nas informações até o momento t , ou seja, passadas e presentes.

A questão da previsão se refere aos campos qualitativo e quantitativo e o propósito é apresentar procedimentos quantitativos para uso em sistemas preditivos.

Técnicas de previsão quantitativa vem sendo desenvolvidas, recaindo nos grupos de métodos intuitivos e formais. Os primeiros empregam extrapolação horizontal, sazonal ou de tendência baseados na experiência, assim são simples e de fácil utilização, porém nem sempre muito acurados.

Os formais, eventualmente se servem de extrapolação, mas de acordo com um desenrolar sistemático, que tenta minimizar erros de previsão, recaindo em princípios estatísticos.

Comumente, os métodos quantitativos de previsão causam surpresa, surgindo a discussão com relação ao passado não dispor de força para descrever o futuro de modo satisfatório, pois todo sistema está sujeito a alterações.

Porém, segundo MAKRIDAKIS e WEELWRIGHT (1978) ... embora tudo continue mudando, até mesmo a própria história se repete em algum sentido ...

A idéia de se realizar previsões é bastante discutível, principalmente quando se trata da argumentação sobre a possibilidade de um controle efetivo dos fatores que regem o comportamento de qualquer fenômeno.

Modelos específicos vem sendo desenvolvidos neste sentido, permitindo a obtenção de previsões que possam se revelar razoáveis de acordo com certos critérios.

Quando se constroi um modelo matemático, pretende-se descrever uma situação real, através de um conjunto de variáveis e relações entre elas, com o auxílio de hipóteses simplificadoras.

Considerando as pressuposições e suporte teórico dos modelos, estes se classificam em causais ou de séries temporais. Os causais assumem que existe uma relação de causa e efeito entre as variáveis de interesse (dependente) e uma ou mais independentes, propondo-se a descrever a forma de relação e usá-la no sentido da previsão.

Os modelos de séries temporais, se apoiam unicamente em valores do passado e presente da variável em questão. Desta forma deixam que os dados "falem por si próprios".

Ambas as classes de modelos oferecem vantagens em várias situações. Os causais possibilitam estudos genéricos e tomadas de decisão, ou mesmo, quando não existir uma forte relação causal entre as variáveis, se prestam à estimação, enquanto que os de séries temporais serão mais facilmente utilizados para previsão.

A escolha dos modelos a serem ajustados acontece mediante uma etapa de familiarização, correspondente em algum sentido a uma análise exploratória, cujos resultados indicam modelos que eventualmente se mostram razoáveis.

De modo genérico, o uso de modelos probabilísticos abrange confecção, ajuste e testes. Estas etapas serão acrescidas de obtenção de previsões, comparação e melhora dos resultados fornecidos pelo ajuste.

As técnicas empregadas em análise de séries temporais compreendem análise de séries estacionárias, funções de autocorrelações, testes de ajuste, critérios para seleção de modelos, etc.

Tais recursos serão apenas esboçados, pois os modelos são vários, e algo diversos no que concerne à sua estrutura e suporte teórico, de mesma forma para os critérios de seleção.

Nem sempre a aplicação dos modelos será automática, requerendo alguma prática. Por vezes o usuário estará sujeito a tomadas de decisão que irão depender de seu conhecimento e experiência em outras áreas.

Quando se define um problema de previsão, são colocados critérios subjetivos que variam de acordo com o tipo de dados e objetivos da análise.

Em alguns casos e/ou para alguns profissionais da área a acuracidade do modelo será aceitável, de modo independente do modelo ajustado. O melhor resultado numérico poderá ser proporcionado por um modelo pouco prático, o que reflete prováveis distorções de diferenciação, excessos de variação, etc.

Um modelo estará sujeito a restrições se seus resíduos contrariam as pressuposições do ajuste, Caso não existam maneiras de modificar o modelo, caberá ao usuário decidir se os resultados merecem ser considerados grosseiros, classificando o modelo como razoável, ou preferindo descartá-lo.

De qualquer forma, não se deve esperar um rigor excessivo no ajuste de modelos probabilísticos, pois ... "nenhuma forma de modelo representa absolutamente a verdade"... (BOX e JENKINS (1978)).

Serão, então, estudadas classes de modelos, de modo a analisar seu comportamento. Especial atenção será voltada aos casos em que a variabilidade se mostre acentuada, dificultando a obtenção de previsões, como em diversos fenômenos climatológicos.

2. REVISÃO DA LITERATURA

A idéia de obter previsões não é absolutamente recente, constituindo um problema de grande importância especialmente nas áreas de economia e engenharia. Muitos trabalhos vem se desenvolvendo simultaneamente, nas mais diversas áreas, e este crescimento desordenado da literatura torna difícil o contato com várias publicações.

Estudos no domínio das frequências (análise espectral, harmônica) são bastante antigos, ressaltando os mais modernos como o de JENKINS e WATTS (1968), que expõem amplamente a teoria espectral, enquanto que FULLER (1976) traz um trabalho algo matemático, enfatizando estimadores de máxima verossimilhança.

A análise de séries temporais no domínio do tempo se realizava, nem sempre com um embasamento teórico rígido, até o surgimento de novas técnicas, que vieram apoiar os modelos anteriormente conhecidos.

Com relação a modelos intuitivos, BLACKMAN (1965) analisa séries temporais utilizando os de suavização linear, focalizando

a série como refletindo um impulso a um tempo t , correspondente a uma excitação aplicada a uma unidade, de duração infinitesimal no tempo zero.

Desta forma, a resposta ao tempo t , data uma excitação aplicada no instante λ , é $X_{t-\lambda}$.

No campo dos métodos formais, que envolvem uma teoria um pouco mais sofisticada, os de decomposição constituem exemplo clássico, a dificuldade de remoção de componentes é reconhecida por diversos autores.

De acordo com HANNAN (1975), a remoção de tendência através de regressão nem sempre é eficiente, enquanto que para outros autores, a estimativa de um componente, por vezes é afetada por efeitos de outro.

DRAPPER e SMITH (1966) apresentam a teoria geral de regressão, trazendo exemplos e discussões quanto às técnicas de seleção de variáveis independentes através de regressão "forward", "backward" e "stepwise".

O modelo de filtragem adaptativa, foi introduzido por MAKRIDAKIS e WHEELWRIGHT (1978), uma discussão comparativa entre este e outras classes de modelos pode ser encontrada em MAKRIDAKIS e HIBON (1979).

Grandes avanços na área de previsão e controle vem sendo alcançados após o surgimento de modelos ARIMA, de BOX e JENKINS (1970), que se baseiam em operações de filtros lineares.

Os modelos ARIMA trabalham com séries estacionárias, ou aproximadas mediante diferenciações ou transformações como as de Box-Cox. ANSLEY, SPYVEY e WROBLESKI (1977) apresentam um algoritmo para estimar o parâmetro λ da transformação, junto aos demais parâmetros do modelo, envolvendo ao redor de 10% a mais de CPU na estimação de modelos ARIMA sazonais.

A dualidade entre os modelos AR e MA, é estudada por diversos autores, PIERCE (1970) a desenvolve no que se refere aos parâmetros estimados por mínimos quadrados, explicitando os casos onde ocorrem sub ou superestimação.

Durante a fase de identificação dos modelos ARIMA são analisadas funções de autocorrelação (f.a.c. e f.a.c.p.), KENDALL e STUART (1976) desenvolvem teoria assintótica para a f.a.c., chegando ao resultado de BARTLET (1946).

CLEVELAND (1972) introduziu a f.a.c.i. no campo espectral como alternativa à f.a.c.p., mostrando também que quando p é pequeno, as estimativas da f.a.c. são viciadas, no caso contrário, terão grandes variâncias.

De outra forma, CHATFIELD (1979), através da generalização da f.a.c., define a f.a.c.i. no domínio do tempo, tratando também, mediante o uso desta função, da dualidade entre os processos AR e MA.

Testes aproximados para a f.a.c. foram sugeridos por QUENOUILLE (1949), enquanto que WOLD (1949) desenvolveu um teste assintótico para processos MA (q) . ANDERSON (1971) especifica testes UMP

para uma certa ordem do modelo, trazendo testes não viciados, e citando casos em que não existe um teste UMP.

Um problema nos modelos ARIMA, é determinar as suas ordens, ou seja, p e q . BOX e PIERCE (1970) sugeriram a estatística χ^2 , OZAKI (1977) formulou o procedimento de obtenção do estimador de mínimo para o critério de informação de Akaike, chegando ao critério de informação de Akaike normalizado (AIC).

FINDLEY (1978) propôs modificações para o AIC, através de estimadores de máxima verossimilhança para a inovação X_n , obtendo estimativas consistentes das ordens.

QUINN (1980) desenvolveu um procedimento baseado no AIC para determinar a ordem de uma auto-regressão multivariada, porém, um aspecto difícil neste caso, é de ordem computacional, envolvendo o cálculo de determinantes de matrizes por vezes muito grandes, que ocupam certo espaço de memória.

Como modo de pesquisar mudanças no comportamento de uma série, BOX e TIAO (1976) realizaram uma comparação entre previsão e atualidade, analisando a performance dos modelos ARIMA.

Vários estudos comparativos entre diversas classes de modelos vem sendo efetuados. CHATFIELD (1978) compara modelos de Holt e Winters, em suas versões automática e não automática com os de Box e Jenkins. Ressalta que os de Box e Jenkins são mais vantajosos quando os componentes determinísticos são dominantes, mostrando classes de modelos ARIMA para os quais os métodos de Holt e Winters são ótimos. Nota ainda que a eficácia dos modelos ARIMA depende das diferenciações

iniciais.

MAKRIDAKIS e HIBON (1979), pesquisam a acuracidade de previsões em diversas classes de modelos, preferindo os de Filtragem Adaptativa quando a série muda seu padrão de comportamento.

Modelos para previsão no domínio do tempo, são abordados de modo geral por HOYOS (1980), além de processos estocásticos, teoria da previsão e aplicações. MORETTIN e TOLOI (1981) incluem também modelos bayesianos, fazendo comparações para séries reais, especialmente econômicas, ambas as obras trazem sugestões para as determinações das ordens dos processos ARIMA.

Análises gerais dos desenvolvimentos na área séries temporais, poderão ser encontradas nos trabalhos de CHATFIELD (1977) ou BOX e JENKINS (1980). Com relação a séries sazonais, especificamente, PIERCE (1980) realiza um exame minucioso dos desenvolvimentos até esta época.

3. METODOLOGIA

3.1. Definições Básicas

3.1.1. Séries Temporais e Estacionariedade

Com relação aos sistemas descritos em (1), o tipo de variável observada será estudado através de processos estocásticos, ou seja, processos regidos por leis probabilísticas, obtendo-se previsões mediante o uso de modelos específicos.

Um processo estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias $X = (X_t)$ com $t \in T$ sobre o espaço de probabilidade (Ω, A, P) , onde $T (-\infty, +\infty)$, contínuo ou discreto.

Em virtude da possibilidade de tomar intervalos equiespaçados de tempo, ou "discretizar" os intervalos, será considerado t discreto, o processo é dito de parâmetro discreto.

A variável X_t é dita p -dimensional k -variada, quando $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ e $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$. Na verdade, todos os sistemas são deste tipo, porém estuda-se uma única componente do vetor X , através de um elemento de t , sendo que este último pode se referir à distância

a um ponto fixo, temperatura, etc.

Uma série temporal é interpretada como uma "trajetória" ou "realização" observada de um processo $X = (X_t)_{t \in T}$ em $L_2(\Omega, A, P)$, onde L_2 é a classe em que $E(X^2) < \infty$.

Esta se assume completamente definida, ou especificada, se suas distribuições finito dimensionais, dadas pelas distribuições conjuntas de um subconjunto finito de variáveis aleatórias $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P \left[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n \right] \quad (1)$$

$$t_1 \leq \dots \leq t_n \in T$$

forem conhecidas, de média $m_X(t) = E(X_t)$ e covariância (autocovariância) $k_X(s, t) = E((X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s)))$.

Uma série é estritamente estacionária se sua função de distribuição é invariante no tempo, conforme (2). Estacionária se $m_X(t)$ é constante e $k_X(s, t)$, função de $t-s$ somente, i.e., uma função $\rho_X(t-s)$.

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$t_1, \dots, t_n, t_1+h, \dots, t_n+h \in T$$

De maneira intuitiva, uma série é estacionária se sua estrutura de comportamento se mantém, independentemente da origem dos tempos.

A análise destas sequências de observações dependentes pode ser realizada no domínio do tempo ou das frequências (análise espectral).

De acordo com o teorema das isometrias, para todo processo X em L_2 , este o espaço de Hilbert em que $E(X^2)$ é finita, se cumprem as isometrias, ou seja, se mantêm inalterados certos produtos internos, entre os espaços correspondentes ao processo e sua covariância.

Chamando $H(k_x)$ o espaço de covariância e $L_2(F_x)$ o espaço onde se define o espectro F_x do processo, este será dado por (3), com $s \leq t$.

$$k_x(x, t) = \int e^{i\lambda(t-s)} dF(\lambda) \quad (3)$$

Nos casos em que X é contínuo em L_2 e estacionário, se verificam isometrias entre $H(K_x)$ e $L_2(F_x)$. Estas considerações poderão ser melhor visualizadas através do esquema I.

Desta forma, o estudo de um processo pode ser realizado através de $H(K_x)$ e $L_2(F_x)$ e as relações de isometria poderão ser aplicadas para o problema da previsão e da representação espectral.

3.1.2. Processos em L_2 - A Melhor Previsão Linear

O intuito é obter previsões lineares, com base em valores anteriores, i.e., prever X_t com o conhecimento de $X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots$, então se considera $X = (X_t)_{t \in T}$, um processo em L_2 com $m_X(t) = 0$ e

$$X_0 \in L_2(X) = \overline{SP}(X_t)_{t \in T} \quad (4)$$

o fecho de $SP(X_t)_{t \in T}$ em L_2 , com $SP(X_t)$ o espaço linear gerado por X_t .

Desta forma, a expressão fornecida por (5) será o espaço de Hilbert gerado por $X = (X_t)_{t \in T}$. Será considerada ótima a previsão que minimiza a perda quadrática esperada, expressa em (6) para $Z \in L_2(\Omega, \beta, P)$.

$$X_0 \in L_2(X) = \{L_2 - \lim X_n : X_n \in SP(X_t)_{t \in T}\} \quad (5)$$

$$(X_0 - Z)' k(X_0 - Z) = \|X_0 - X_0^*\|_{L_2}^2 = E |X_0 - X_0^*|^2 \quad (6)$$

Encontrar a melhor previsão linear para X_t , é o problema de encontrar o ponto na variedade linear formada pelos X_s 's com $s < t$, que é fechada em X_t .

Entende-se por variedade linear um subconjunto não vazio de um espaço H , desde que qualquer $\alpha, \beta \in R$, $\alpha x + \beta y \in$ subconjunto se $x, y \in$ subconjunto.

Na prática, o que se faz é tomar $X_0^* = E(X_0 / \mathcal{F}_{T_0}(X))$ com $\mathcal{F}_{T_0}(X) = \sigma(X_t)_{t \in T_0}$, esta última, a σ -álgebra proporcionada por $(X_t)_{t \in T_0}$ (ver GRANGER, 1969).

Isto pode ser explicado pelo fato que em termos de espaços de Hilbert, a previsão linear é simplesmente uma projeção, i.e., $X_0^* = E(X_0/\mathcal{F}_{T_0}(X))$ é a projeção ortogonal de X_0 em $M = L_2(\Omega, \mathcal{F}_{T_0}(X), P)$.

Portanto, deve-se determinar a esperança condicional X_0^* que será a função preditora, assim se procura a projeção $P_{M_0} X_0$ em $M_0 = L_2((X_t)_{t \in T_0})$.

Esta esperança condicional depende da distribuição de $X_t, X_{t-1}, \dots$, ou da medida de probabilidade, se a distribuição é normal, A esperança condicional será função linear dos valores passados de X_t , em outros casos não será função linear.

No caso Gaussiano, as projeções são determinadas através das equações normais provenientes da ortogonalidade.

$$(X_0, Z) = (P_{M_0} X_0, Z) \quad Z \in M_0 \quad (7)$$

Ainda sob normalidade, utilizando a esperança condicional, se chega às equações da forma (9), que são as equações normais.

$$E(X_n/X_1, \dots, X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j \quad (8)$$

$$(X_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_j, X_k) = 0 \quad k=1, \dots, n-1 \quad (9)$$

Uma maneira de se estimar os parâmetros seria obter o produto interno dado por (7), o que se torna difícil em virtude do cálculo requerido.

Então se calculam as covariâncias $K_X(s,t)$, o que é uma aplicação do teorema das isometrias, logo

$$(X_s, X_t) = K_X(s, t)$$

Retomando o problema da previsão, se $X_0 = \hat{X}_{t+h}$, S seria o conjunto das informações até o tempo t , obtendo-se as expressões (10) e (11).

$$X_0^* = \hat{X}_{t+h} = E[X_{t+h} / \sigma(X_t)_{t \in S}] \quad (10)$$

$$\|X_0 - X_0^*\|^2 = \|X_{t+h} - \hat{X}_{t+h}\|^2 = \|X_{t+h}\|^2 - \|\hat{X}_{t+h}\|^2 = \delta_t^2(h) \quad (11)$$

Deve-se notar que $\delta_t^2(h)$ tende à covariância do processo à medida que n cresce.

Se o processo é estacionário em L_2 , de média nula e $\bigcap_{t \in T} H_t(X) = 0$, o processo será linearmente regular, ou não determinístico, e determinístico se $\bigcap_{t \in T} H_t(X) = L_2(X)$.

A obtenção de previsões em processos linearmente regulares é bastante difícil, ao passo que fornecerá melhores resultados no caso determinístico, na verdade, a acuracidade das previsões dependerão também do grau de regularidade do processo.

3.1.3. Funções de Autocorrelação

a) Função de Autocorrelação (f.a.c.)

Seja $K_X(s, t) = E(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))$, então se $\gamma_X(t) = k_X(s, s-t)$, a função de autocorrelação é dada por (12).

$$\rho_X(t) = \frac{\gamma_X(t)}{\gamma_X(0)} \quad , t=0,1,\dots,n-1 \quad (12)$$

A função de autocorrelação obedece as propriedades a seguir que serão apresentadas sem prova:

- i) $\rho_X(t)$ é par
- ii) $|\rho_X(t)| \leq 1$
- iii) $\rho_X(t)$ define um único processo estacionário normal

ANDERSON (1971) generalizou a função de autocorrelação f. a.c., através da expressão (13), em que Z é uma variável artificial (dummy).

$$\Gamma_X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) Z^k$$

A f.a.c. é definida para valores inteiros de t, visto que se trabalha com processos de parâmetro discreto, e será no decorrer do estudo, representada por ρ_k , com $k=0,1,\dots$.

Como a autocorrelação entre observações muito espaçadas tende a se anular, o mesmo acontecendo com a média das autocorrelações para grandes amostras (ver BARTLET, 1946), então a média amostral constitui um bom estimador para μ , e se estima $\rho_X(t)$, ou ρ_k , a partir da equação (15).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i = 0 \quad (14)$$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (15)$$

Desta forma, é possível obter estimadores para f.a.c., através de

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (16)$$

Para processos Gaussianos, ou seja, aqueles em que a distribuição de $X = (X_1, \dots, X_n)'$ é normal multivariada,

$$\text{cov}(r_k, r_{k-1}) \sim \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n-k} \rho_i \rho_{i-1} \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (17)$$

Através do resultado (17), é possível notar que a análise de autocorrelações individuais exige cuidado, pois a existência de grandes correlações entre valores vizinhos pode distorcer a f.a.c..

Na prática, não são conhecidos os valores teóricos das autocorrelações, porém existe uma distância entre estes valores (teóricos) e os estimados. Fazendo-se $k=0$ na equação (17), se obtém a variância expressa em (18).

$$\text{Var}(r_k) \sim \frac{1}{n} \sum_{i=-k}^k \rho_i^2 \sim \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{i=-k}^k \rho_i^2 \right] \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (18)$$

Uma forma aproximada de testar $\rho_k=0$ extensamente utilizada na prática é constituir de considerar a faixa $\pm 2/\sqrt{n}$, isto porque

$$\text{Var}(r_k) \sim 1/n \quad (19)$$

De acordo com ANDERSON (1942) quando n é moderado a distribuição do coeficiente de correlação estimado cujo valor teórico

é zero, tende a normal. Assim, sob a hipótese $\rho_k=0$, a estimativa dividida pelo seu desvio padrão será aproximadamente normal, de média nula e variância um.

Resultados similares são verdadeiros para as funções de autocorrelação inversa e autocorrelação parcial (f.a.c.i. e f.a.c.p. respectivamente) a serem apresentadas no decorrer do trabalho.

BOX e JENKINS (1968) recomendam um número mínimo de 50 observações, a partir das quais se calculem $k \leq n/4$ estimativas de autocorrelações.

b) A Função de Autocorrelação e o Espectro

A análise de séries temporais pode ser realizada de várias maneiras, conforme foi anteriormente mencionado, por exemplo, através de ondas de senos e cossenos com diferentes frequências, ou seja, do "periodograma".

Supondo que o número de observações (n) é ímpar, e que se pretenda ajustar o modelo de séries de Fourier

$$X_t = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i c_{it} + b_i s_{it}) + e_t \quad (20)$$

com $n = 2k+1$, $c_{it} = \cos 2\pi f_i t$, $s_{it} = \sin 2\pi f_i t$, $f_i = i/n$, e harmônicos de frequência $1/n$.

Através do método dos mínimos quadrados, são obtidos os estimadores dados pelas equações (21).

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= \bar{X} \\
\hat{a}_i &= (2/n) \sum_t X_t c_{it} & i=1, \dots, q \\
\hat{b}_i &= (2/n) \sum_t X_t s_{it} & i=1, \dots, q
\end{aligned} \tag{21}$$

Os q valores de $I(f_i)$, consistem o periodograma, com $I(f_i)$ chamada intensidade para a frequência f_i , dada por

$$I(f_i) = (n/2) (\hat{a}_i^2 + \hat{b}_i^2) \quad i=1, \dots, q \tag{22}$$

no caso em que $n = 2q$, os resultados serão similares, alterando-se apenas para $\hat{a}_q$ e $\hat{b}_q$.

A definição dada para o periodograma se refere a $f_i = i/n$ onde os harmônicos tem frequência $1/n$, porém modificando-se esta suposição, assumindo frequência contínua, variando de zero a meio ciclo, então a equação (22) pode ser reescrita conforme:

$$I(f) = (2/n)(\hat{a}_f^2 + \hat{b}_f^2) \quad 0 \leq f \leq 1/2 \tag{23}$$

Assim é que, o espectro (23), bem como o periodograma pode ser utilizado de várias formas, porém o resultado importante neste trabalho é a relação entre $I(f)$ e as estimativas c_k de autocovariância, dada por (24).

$$I(f) = 2 \left[c_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cos 2\pi f k \right] \quad 0 \leq f \leq 1/2 \tag{24}$$

O espectro, é uma transformada de Fourier da estimativa da função de autocovariância, aplicando-se o valor esperado e dividindo-se por σ^2 em (24), se obtém $S(f)$ quando $n \rightarrow \infty$, que é uma função de densidade, chamada densidade espectral.

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(I(f))}{\sigma^2} = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi f k \rho_k \right] \quad (25)$$

c) Função de Autocorrelação Inversa (f.a.c.i.)

A função de autocorrelação inversa (f.a.c.i.) foi inicialmente introduzida por CLEVELAND (1972), utilizando o espectro. Considere-se a função de autocovariância $\gamma(k)$, $k=0,1,\dots$, e a f.a.c. obtidas através da densidade espectral, com $1/S(f)$ integrável em $[0,1]$, definindo $\gamma(k)$ conforme (26).

$$\gamma(k) = \int_0^1 e^{2\pi i k f} S(f) df \quad (26)$$

$$\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0) \quad (27)$$

Chamando $S_i(f) = 1/S(f)$, a autocovariância e autocorrelação inversas são fornecidas pelas expressões (28) e (29) respectivamente, representadas por $\gamma_i(k)$ e $\rho_i(k)$

$$\gamma_i(k) = \int_0^1 e^{2\pi i k f} S_i(f) df \quad (28)$$

$$\rho_i(k) = \gamma_i(k)/\gamma_i(0) \quad (29)$$

Uma definição equivalente foi dada por CHATFIELD (1979), no domínio do tempo, através da função de autocovariância generalizada.

Se a função de autocovariância generalizada é da forma (30), então a f.a.c. pode ser expressa por (31).

$$\Gamma(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) Z^k \quad (30)$$

$$P(Z) = \Gamma(Z)/\Gamma(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k Z^k \quad (31)$$

Desta forma, a f.a.c.i. é definida por (31), e o coeficiente Z^k em $\Gamma_i(Z)$ será o coeficiente de covariância inversa para o "lag" k ($\gamma_i(k)$) e a f.a.c.i. será obtida por meio de (33)

$$\Gamma(Z) \Gamma_i(Z) = 1 \quad (32)$$

$$P_i(Z) = \Gamma_i(Z)/\gamma_i(0) \quad (33)$$

Por analogia com a expressão (32) espera-se que $P(Z)P_i(Z)=1$, mas

$$P(Z) P_i(Z) = 1/(\Gamma(0)\gamma_i(0)) \quad (34)$$

também, embora seja esperado que $\gamma_i(0) = 1/\gamma(0)$, tal somente acontece no caso de ruído branco.

De acordo com CLEVELAND (1979), a f.a.c.i., é frequentemente superior à função de autocorrelação parcial, que será introduzida em 3.7 e o conhecimento das relações entre séries e suas autocorrelações servirá para interpretar a f.a.c.i.

Apenas no intuito de tornar mais simples a referência às funções de autocorrelação, se optou pela forma utilizada nesta seção, assim, a função de autocorrelação será representada f.a.c., enquanto que f.a.c.i., a função de autocorrelação inversa.

3.1.4. Sistemas Dinâmicos

Supondo duas (ou mais) séries relacionadas de observações tomadas em intervalos equiespaçados de tempo, é possível construir modelos de maneira a representar formas de relação dinâmica entre as séries, estimando então a função de transferência.

Vários métodos foram propostos por diversos autores para estimar a função de transferência, nos quais o sistema é constituído de uma entrada X_t e saída Y_t conforme o esquema II

Uma importante aplicação dos modelos de função de transferência é a obtenção de previsões, se a relação dinâmica no exemplo dado pode ser determinada, valores passados de ambas as séries podem ser usados neste sentido.

Em termos da dinâmica e estabilidade do sistema, o controle é necessário pela razão da existência de perturbações (como ruído) inerentes ao processo.

A noção de controle utilizada, serve para representação de perturbações por uma série temporal ou um modelo estocástico e as características inerciais de um sistema por funções de transferência.

Assim, são empregadas equações que seguem a ação, passíveis de serem tomadas a qualquer tempo, dados estados anteriores do sistema.

Um processo e_t , série de choques aleatórios independentes provindos de uma distribuição fixa, usualmente normal, de média nula e variância σ^2 é dito processo de ruído branco, e encarado como transformado ao processo X_t através de um filtro.

O filtro da operação descrita, admite representações diversas, por exemplo, assumindo aditividade e um filtro referente a um sinal genérico, se obtém

$$X_t = S + e_t \quad (35)$$

Alguns tipos de modelos estocásticos se baseiam na idéia de que uma série temporal, com valores sucessivos dependentes, é interpretada como gerada por um processo de ruído branco.

Então, se o filtro é do tipo linear, isto é, realiza combinações lineares, um processo de ruído branco leva a um processo X_t através de um filtro linear,

A sequência X_t será escrita na forma (36), ou reescrita conforme (39) mediante a utilização do operador retardado B , definido em (37) e generalizado em (38).

$$X_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots \quad (36)$$

$$B(e_t) = e_{t-1} \quad (37)$$

ou, de modo geral,

$$B^j(e_t) = e_{t-j} \quad (38)$$

reescrevendo X_t , usando o operador retardado,

$$X_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) e_t = \Psi(B) e_t \quad (39)$$

A sequência $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$, de parâmetros poderá ser finita ou infinita; se finita, ou infinita convergente, o filtro é estável e o processo estacionário.

Incluindo o parâmetro μ no modelo, este se refere à média no caso estacionário, em outras situações, apenas um ponto de localização para o nível do processo e o modelo será dado por (40),

$$X_t = \mu + \Psi(B)e_t \quad (40)$$

onde

$$\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \quad (41)$$

3.1.5. Idéias Básicas na Construção e Ajuste de Modelos

A construção de modelos envolve aspectos qualitativos de desenvolvimento de sistemas preditivos. Inicialmente é necessária uma definição clara e objetiva do problema, deverão ser aquilatados critérios subjetivos envolvendo custos operacionais, formas de planejamento e otimização, disponibilidade de programas, etc.

Por outro lado, as variáveis a serem analisadas e previstas serão claramente estabelecidas, bem como o horizonte (e.g. a um passo) e intervalo de previsão (intervalo em que novas previsões serão fornecidas), também, forma da previsão, no que se refere à estrutura da variável, distribuição e intervalos de confiança, quando possíveis.

Estes aspectos e os processos de decisão em que se baseiam são exaustivamente discutidos em MONTGOMERY e JOHNSON (1976), BOX e JENKINS (1968), ANDERSON (1971) e outros, porém neste estudo, tais itens não serão todos inicialmente estabelecidos, preferindo-se discutí-los após a aplicação dos modelos.

A etapa seguinte do processo de estudo, familiarização, visa filtrar o máximo possível de informação sobre os dados, isto mediante inspeção visuais de gráficos, realização de testes, etc.

Classes de modelos são então propostas e identificadas subclasses se a classe escolhida o requer, então um modelo é estimado (ajustado) tentativamente na subclasse que se considera.

Supondo que um determinado modelo tenha sido ajustado, deve-se decidir se é adequado, testando as pressuposições do ajuste, i. e., se aplica uma diagnose. Não sendo encontradas quebras de restrições, ou estas não merecerem ser consideradas grosseiras, o modelo estará habilitado para uso.

Caso o ajuste não tenha sido considerado razoável, deve-se descobrir como este é inadequado e sugerir modificações, ou então propor uma nova subclasse (ou classe) recomeçando-se o processo de ajuste.

Ao serem selecionados os melhores modelos em cada classe, de acordo com certos critérios, estes serão utilizados para obter previsões, que poderão em seguida ser misturadas, aproximando cada vez mais os valores fornecidos dos observados.

Cada nova observação poderá ser incluída no cálculo de novas previsões, ou também utilizada para atualizar e/ou corrigir previsões obtidas.

Desta forma, seleciona-se o melhor modelo puro, ou mistura de modelos, passando-se a empregá-lo na obtenção de previsões. O procedimento todo, será melhor visualizado após a observação do esquema (V), que mostra os passos deste sistema preditivo.

Quando se estima um modelo, este deverá ser parcimonioso, ou seja, exigir o menor número de parâmetros para sua adequada representação. Assim é que o modelo na forma (42) será adequadamente representado pela expressão (43), onde ξ_i e η são constantes.

$$Y_t = (\xi_0 + \xi_1 \bar{v} + \dots + \xi_k \bar{v}_k) X_t, \quad \bar{v}_r = Y_t - Y_{t-r} \quad (42)$$

$$(1 + \eta \bar{v}) Y_t = X_t \quad (43)$$

O modelo (43), quando k é suficientemente grande, poderá representar adequadamente o modelo proposto, assim, torna-se desnecessário o uso de k parâmetros, quando na forma mais simples pode-se utilizar apenas um.

Esquema V - Sistema preditivo

3.2. Não Estacionariedade

A hipótese de estacionariedade não é uma constante para todos os tipos de modelos, isto porque na prática, grande parte das séries observadas não são estacionárias.

Séries não estacionárias podem ser levadas a outras estacionárias através de transformações como as de Box-Cox, diferenciações, etc., os casos não estacionários homogêneos em nível ou inclinação são facilmente transformados em estacionários mediante uma única, ou mesmo duas diferenciações sucessivas.

Supondo que a série X_t possa ser afetada por fatores (componentes) probabilísticos e determinísticos, os primeiros compreendem aleatoriedade e ciclosidade, enquanto que os últimos, tendência e sazonalidade.

Quando se observa um acréscimo (ou decréscimo) gradual na série, ou melhor, um comportamento que em grande parte das vezes pode ser descrito por polinômios até de 3º grau, o que se verifica é a existência de tendência. No caso de flutuações periódicas, de periodicidade constante bem definida, é verificada a presença de sazonalidade, na verdade considera-se que para séries sazonais

$$f(t + \phi) = f(t) \quad (44)$$

Uma série demonstra ciclosidade se exibir um comportamento apenas aproximadamente periódico, isto é, oscilações irregulares, de período variável, como em vários casos na economia. Porém vários autores não consideram este componente em seus modelos, tratando-o como mudança de comportamento.

O componente aleatoriedade, se refere a interferências meramente aleatórias, que por vezes se supõe um processo aleatório puro de média nula e variância σ^2 (ruído branco).

Uma série que apresenta apenas tendência e aleatoriedade, focalizada como exemplo, pode ser escrita de acordo com a expressão (45). Modelando a parte de tendência, sob a suposição de que esta é linear, obtem-se o modelo (46).

$$X_t = T_t + e_t \quad (45)$$

$$X_t = \alpha + \beta t + e_t \quad (46)$$

Os modelos expressos em (45) e (46), a menos do caso em que a tendência exprime uma reta paralela ao eixo dos tempos, representam uma série não estacionária, porém, através do operador de diferenças, definido conforme (47), é possível obter uma série estacionária.

$$\nabla_r X_t = X_t - X_{t-r} = (1 - B^r) X_t \quad (47)$$

Considerando o operador aplicado à equação (46), com $r = 1$, se obtém a série W_t fornecida pela expressão (48), que denota uma série estacionária.

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (\alpha + \beta t + e_t) - (\alpha + \beta(t-1) + e_{t-1}) = \beta + e_t - e_{t-1} = W_t \quad (48)$$

Ainda com relação aos componentes da série, um modelo será aditivo, multiplicativo ou misto, por exemplo conforme as expressões (49), (50) e (51), respectivamente.

$$X_t = T_t + S_t + e_t \quad (49)$$

$$X_t = T_t S_t e_t \quad (50)$$

$$X_t = T_t S_t + e_t \quad (51)$$

Para modelos aditivos se supõe que um determinado componente não depende dos demais, e o inverso para modelos multiplicativos ; este caso, pode também ser tratado através de transformações, como logarítmicas.

3.3. Modelos Naive ("Simplórios ou Ingênuos")

Trata-se de uma classe de modelos intuitivos, apresentando como vantagens sua simplicidade e ausência de estimação de parâmetros. Como desvantagem, sua exagerada simplicidade de estrutura, desvinculada de suporte teórico, nem sempre satisfaz o intuito de explicar o comportamento de um fenômeno.

Por vezes, em alguns modelos mais sofisticados, a importância de componentes determinísticos é tão decisiva que apenas a diferenciação tende a estacionarizar a série.

Assim, os modelos Naive mais facilmente representados por N, se fundamentam na influência de componentes determinísticos, que será aliada à idéia da "previsão persistente".

3.3.1. Naive I (N I)

MAKRIDAKIS e WLEELWRIGHT (1978) se referem a este modelo como o de previsão persistente, pois fornece como previsão o último valor observado, i.e.

$$\hat{X}_{t+h} = X_t, \quad t = h+1, \dots, n \quad (52)$$

O ajuste deste modelo é recomendado principalmente nos casos em que a série é suposta de choques aleatórios, por outro lado, a presença de componentes determinísticos não invalida a utilização do modelo, pois este acompanhará o desenvolvimento da série, embora o faça com uma defasagem de h "lags".

Os resultados nos casos determinísticos não serão satisfatórios, haverá subestimação (super) no caso de tendência positiva (negativa) e na presença de sazonalidade o modelo oscila entre subestimar ou superestimar os valores reais, a menos da aleatoriedade.

3.3.2. Naive II (N II)

Se o modelo Naive I pode ser aplicado a séries com padrão de comportamento mais geral, o N II prevê a presença de um único componente determinístico, tendência ou sazonalidade, ou então algum tipo de não estacionariedade tratável com uma única diferenciação.

O modelo pode ser expresso pelo conjunto de relações:

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{Y}_{t+h} + \hat{X}_{t+h-1}, \quad \hat{Y}_{t+h} = Y_t \quad (53)$$

onde

$$Y_t = \nabla_k X_t \quad (54)$$

Atribuindo o valor um (1) ao horizonte de previsão (h), tem-se através de (53),

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{Y}_{t+1} + \hat{X}_t = Y_t + \hat{X}_t = (X_t - X_{t-k}) + \hat{X}_t \quad (55)$$

3.3.3. Naive III (N III)

Neste caso, incluem-se as séries que se estacionarizam mediante duas diferenciações sucessivas, onde uma delas é de ordem um.

Seu desempenho poderá ser razoável para séries que tragam tendência (linear) e sazonalidade, ou mesmo para séries com tendência quadrática, que possam ser estacionarizadas através de $\nabla_1 \nabla_1 = \nabla_1^2$.

Genericamente, as previsões podem ser obtidas de modo similar ao N II, somente se alterando em (57).

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{Y}_{t+h} + \hat{X}_{t+h-1}, \quad \hat{Y}_{t+h} = Y_t \quad (56)$$

com

$$Y_t = \nabla_1 \nabla_k X_t \quad (57)$$

3.4. Modelos de Auto-regressão (R)

3.4.1. Modelo de Regressão (RAR)

Supondo X_t , $t = 1, \dots, n$, linearmente relacionado com k de seus valores anteriores (defasados), ou seja, tal que se possa obter um modelo conforme (58), este é dito de auto-regressão (RAR), pois as variáveis independentes são valores anteriores da própria variável dependente.

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_k X_{t-k} + e_t \quad (58)$$

Se a equação (58) for reescrita na forma matricial, onde X é o vetor de observações de ordem $n \times 1$, $W : n \times k$ é a matriz dos coeficientes, $\beta : k \times 1$ vetor de parâmetros e $\epsilon : n \times 1$, os erros, então se tem que:

$$X = W \beta + \epsilon \quad (59)$$

A seguir, supondo que

- i) $E(\epsilon) = 0$
- ii) $V(\epsilon) = \sigma^2 I$, onde I é matriz identidade
- iii) $X_0, X_{-1}, X_{1-k} \dots$ são assumidas sequências de constantes
- iv) as raízes de $X_t^k - \sum_{j=1}^k \beta_j X_t^{k-j}$ em X_t são, em valor absoluto menores que um.

Os estimadores (b) são obtidos através do método dos mínimos quadrados, a partir de (60). MANN e WALD (1943) mostram que embora W na verdade não seja uma matriz de constantes, a teoria dos mínimos quadrados é correta no caso assintótico, se as variáveis independentes são valores defasados da dependente.

$$W'Wb = W'X \quad (60)$$

Portanto, os testes conhecidos da teoria da regressão podem ser aplicados sem perda de generalidade. Mesmo que haja normalidade não satisfeita, existe uma teoria assintótica justificando os procedimentos regressivos.

Por outro lado, sob a hipótese de normalidade os estimadores de mínimos quadrados são de máxima verossimilhança, então pode-se calcular o erro de previsão quando se negligencia variáveis independentes, o que possibilita o emprego de técnicas comuns de seleção de variáveis em modelos de regressão.

Na prática se lança mão de regressão "stepwise" para evitar que o modelo seja superparametrizado, e de funções de autocorrelação para determinar o valor de k .

As previsões são obtidas supondo que a equação (58) seja válida para algum tempo $t+h$ futuro, então o melhor previsor assintoticamente não viciado é fornecido pela expressão (61).

$$\hat{X}_{t+h} = W'_{t+h} b = \sum_{j=1}^k b_j \tilde{X}_{t+h-j} \quad (61)$$

onde

$$W'_{t+h} = (X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_{t+h-k})$$

e

$$\tilde{X}_{t+h-j} = \begin{cases} \hat{X}_{t+h-j} & , h-j > 0 \\ X_{t+h-j} & , h-j \leq 0 \end{cases} \quad (62)$$

3.4.2. Filtragem Adaptativa (RFA)

O método (RFA) não exige estacionariedade, mas que o comportamento da série seja passível de representação através da soma ponderada de observações passadas; os pesos que irão ponderar as observações são determinados por método de mínimos quadrados não linear e se adaptam ao longo do tempo.

A determinação do número de pesos constitui problema similar ao da determinação de k em um modelo de regressão. Considerando en tão que o modelo $\hat{e}$ o de ordem $p = k$, conforme (62), os ϕ_i s se referem aos pesos, e outra dificuldade na utilização do modelo vem a ser a especificação de valores iniciais destes.

MAKRIDAKIS e WHEELWRIGHT (1978) sugerem valores iniciais todos iguais a um, i.e., $\phi_{i,1} = 1$, $i=1, \dots, p$, e as previsões a um passo de acordo com

$$\hat{X}_{t+1} = \sum_{i=t-p+1}^p X_i \phi_{i-t+p,t} \quad (63)$$

A seguir, os pesos são ajustados de modo a reduzir o erro da próxima previsão, utilizando a expressão

$$\phi_{i,t} = \phi_{i,t-1} + 2ke_t X_{t-i} \quad (64)$$

$$i = 1, \dots, p \quad t = p+1, p+2, \dots, n$$

Na equação (64), $\phi_{i,t}$ se trata do novo parâmetro, $\phi_{i,t-1}$ o antigo, e k uma constante que determina o grau de adaptação de modo a assegurar a convergência do processo iterativo, sendo aconselhável o uso do valor $1/p$ para a constante de adaptação.

Logo que novos dados começam a ser avaliados, $\hat{e}$ possível ajustar os parâmetros da equação auto-regressiva, assim os pesos variam de um período para outro.

3.5. O Método da Decomposição (D)

Um método clássico para séries temporais pressupõe que a série possa ser escrita em termos de seus componentes determinísticos e probabilísticos, como e.g., o que se nota em (65), que exprime a decomposição de Wold.

$$X_t = X'_t + X''_t \quad (65)$$

A decomposição de Wold traduz aditividade, porém no caso multiplicativo a decomposição é similar.

Se as partes X'_t e X''_t , que refletem os componentes determinísticos e probabilísticos, puderem ser expandidas em termos de cada componente isolado, o resultado é escrito conforme (66).

$$X_t = T_t + S_t + e_t \quad (66)$$

Nos métodos de decomposição (D), a idéia é isolar um ou mais componentes, trabalhando-se com os restantes. Com esta decomposição se fazem previsões individuais de cada uma das partes, reunindo-as a seguir para a previsão final.

Assim, o problema é modelar convenientemente os componentes determinísticos nos quais serão baseadas as previsões. Este tipo de procedimento usa estimação de parâmetros, necessária para que se elimine certos componentes da série, o que pode introduzir distorções nos resultados.

Quando se pretende, por exemplo, eliminar tendência, caso se estime este componente através de médias móveis, a estimativa obtida estará sujeita a efeitos de outros componentes, de modo mais explícito,

é difícil estimar um componente sem que esta estimativa seja afetada pelos outros.

Outro fato que torna o método pouco eficiente, dependendo do processo empregado, é o caso de séries quase-periódicas, ou seja, aquelas em que a sazonalidade não é inteira. Desta forma, recomenda-se que ao se usar o método da decomposição nestes casos, seja preferido estimar os componentes restantes, ou seja, não sazonais.

Vários métodos de decomposição são conhecidos, sendo que os modelos aqui apresentados poderão ser aplicados nas mais variadas maneiras dependendo das observações e critérios do usuário, não se restringindo aos casos mencionados nesta seção.

3.5.1. Decomposição por Alisamento (DN)

Considerando a decomposição de Wold, o que se pretende é isolar a parte aleatória dos componentes determinísticos restantes, modelando então estes últimos através de quaisquer técnicas.

O método, neste caso, consiste em eliminar o ruído, que se supõe o único componente aleatório, através de um processo de alisamento, desta forma a previsão se baseia nos componentes determinísticos.

Como e_t é por hipótese um processo aleatório puro, não haverá necessidade de reuni-lo ao resultado do ajuste, pois seu valor esperado é nulo.

Este tipo de procedimento é recomendado quando o componente de ruído se mostra bastante acentuado, porém, poderá acarretar

perda de informação, pois aproxima as observações a um padrão de comportamento mais "liso", ou seja, menos espalhado.

3.5.2. Decomposição por Regressão (DR)

Se o processo X_t pode ser descrito pela expressão (66), os componentes determinísticos serão modelados conforme (67) e (68), com m , o grau do polinômio a ser ajustado e s a sazonalidade.

$$T_t = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j \quad (67)$$

$$S_t = \sum_{j=1}^s \alpha_j d_{jt} \quad (68)$$

As variáveis d_{jt} , sazonais "dummies" (artificiais) com $\sum_{j=1}^s d_{jt}=1$, são expressas por

$$d_{jt} = \begin{cases} 0, & t - ns = j \quad (n \text{ positivo}) \\ 1, & t - ns \neq j \end{cases}$$

Impondo a restrição $\sum \alpha_j = 0$, o modelo será de posto completo, e reestruturado de modo que

$$X_t = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j D_{jt} + e_t \quad (69)$$

onde

$$D_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ corresponde ao mes } j \\ -1 & \text{se } t \text{ corresponde ao mes } s \\ 0 & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Reescrevendo o modelo (69) na forma matricial, se obtém a expressão (70), com W e γ particionados.

$$X = W\gamma + \varepsilon \quad (70)$$

onde $W = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \dots & n^m \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \dots & D_{s-1,1} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & \dots & D_{s-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1,n} & D_{2,n} & \dots & D_{s-1,n} \end{bmatrix}$$

Os estimadores para γ poderão ser encontrados pelo método dos mínimos quadrados ordinários, e são dados por

$$\hat{\gamma} = (W'W)^{-1}W'X \quad (71)$$

Testes corriqueiros em regressão serão aplicáveis, lembrando que o modelo de Gauss-Markov normal pressupõe erros independentes, homocedásticos com distribuição normal. Estas pressuposições deverão ser testadas, principalmente em trabalhos mais rigorosos.

3.6. Suavização (S)

Os métodos de suavização não são paramétricos, admitem que o comportamento da série é uma função suave do tempo e não oscila consideravelmente. Assim embora o comportamento da série seja assumido suave, os ruídos flutuam consideravelmente, formulando-se então modelos

de modo a reduzir os efeitos aleatórios.

Nestes métodos, os valores excêntricos são considerados extremamente afetados pela aleatoriedade. Ao suavizar a série seu padrão de comportamento poderá ser ressaltado e em seguida usado para previsões.

As grandes vantagens dos métodos são: sua grande flexibilidade tentando tratar conjuntamente as causas determinísticas e probabilísticas de variação, simplicidade, eficiência computacional e razoável acuracidade.

Entretanto, como os métodos não se baseiam em modelos probabilísticos explícitos, suas propriedades não são bem definidas, a inferência é limitada e a suavização por si não carrega um significado de previsão, trazendo um sentido mais descritivo que analítico.

O emprego de técnicas de suavização eliminando (parcialmente) a aleatoriedade pode introduzir periodicidades não presentes no processo original, segundo GRENANDER e ROSEMBLAT (1966), ou causar alterações de períodos na densidade espectral, mutilando a informação nos dados.

É necessário, então, cautela no emprego destas técnicas no que se refere à formulação dos modelos, selecionando efeitos indesejáveis.

3.6.1. Médias Móveis Simples e Linear (SI)

A técnica de médias móveis realiza pequenos ajustes a cada período, podendo ser aplicada a casos estacionários ou localmente compostas de nível e ruído.

$$X_t = \mu_t + e_t \quad (72)$$

O nível μ_t é desconhecido e por vezes varia lentamente através do tempo, são tomados conjuntos de valores sucessivos do processo, calculando-se uma média e usando-a como previsão para o próximo período.

A cada nova observação uma nova média é calculada, descartando-se a observação mais antiga. As médias móveis ao longo do tempo são então as estimativas dos níveis μ_t , devendo-se notar que são autocorrelacionadas.

$$\hat{\mu}_{t+1} = \hat{X}_{t(r)} = (X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-r+1})/r \quad (73)$$

podendo-se notar que

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{t-1} + (X_t - X_{t-r})/r, \quad \hat{X}_{t+h} = \hat{\mu}_t$$

ou,

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{X}_{t+h-1} + (X_t - X_{t-r})/r \quad (74)$$

Se os ruídos e_t são do tipo ruído branco, normais, a esperança e variância da previsão são dadas por (75) e (76), observando-se que as propriedades do método dependem do número de observações empregadas no cômputo das médias.

$$E(\hat{X}_{t+h}) = \frac{1}{r} E \left[\sum_{k=0}^{r-1} X_{t-k} \right] = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \mu_{t-k} \quad (75)$$

$$V(\hat{X}_{t+h}) = \frac{1}{r^2} V \left[\sum_{k=0}^{r-1} X_{t-k} \right] = \frac{\sigma^2}{r} \quad (76)$$

Na prática, a quantidade r é escolhida de modo a minimizar estatísticas pré-fixadas, como e.g., o erro quadrático médio de previsão a um passo (EQM).

$$EQM = \sum_{t=L+1}^n (X_t - \hat{X}_{t-1}(1))^2 / n-L = \sum_{t=L+1}^n (X_t - \hat{X}_t)^2 / n-L \quad (77)$$

$$r + 1 \leq L \leq n-1$$

A aplicação de um modelo de médias móveis puro a um conjunto de dados que apresente tendência fornecerá previsões que subestimam os valores reais. Para sanar este problema aplica-se novamente o modelo, então

$$S'_t = (1/r) \sum_{i=t-r+1}^t X'_i, \quad S''_t = (1/r) \sum_{i=t-r+1}^t S'_i \quad (78)$$

A seguir são computados $\hat{a}_t$ e $\hat{b}_t$, estimativas da tendência linear, e as previsões são calculadas de acordo com (79),

$$\hat{a}_t = S'_t + (S'_t - S''_t)$$

$$\hat{b}_t = (2/(r-1)) [S'_t - S''_t]$$

então se a tendência é linear,

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{a}_t + h\hat{b}_t \quad (79)$$

e o limite inferior para L será $2r+1$.

3.6.2. Suavização Exponencial Simples e Linear (S II)

Suavização exponencial em grande maioria dos casos é preferida ao método de médias móveis, pois neste último, n valores deverão ser avaliados ocupando considerável espaço de memória, também, os pesos atribuídos às observações anteriores a t são iguais ($1/r$).

No caso de médias móveis,

$$\hat{X}_{t+1} = (X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-r+1})/r$$

então

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + (X_t - X_{t-r})/r \quad (80)$$

A partir da equação (80), utilizando as hipóteses do modelo, ou seja, que o comportamento da série é uma função suave do tempo é possível supor $\hat{X}_t$ um estimador não viciado para X_{t-r} , o que é razoável em séries estacionárias, logo

$$\begin{aligned} \hat{X}_{t+1} &= \hat{X}_t + (X_t - \hat{X}_t)/r = X_t/r + (1 - 1/r)\hat{X}_t = \\ &= \alpha X_t + (1 - \alpha)\hat{X}_t, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned} \quad (81)$$

Assim, é atribuído um peso α à observação e um peso $(1-\alpha)$ à previsão, ambas mais recentes. Rearranjando a expressão (81) obtém-se

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha(X_t - \hat{X}_t) = \hat{X}_t + \alpha e_t \quad (82)$$

Esta relação mostra que a previsão para o instante $t+1$ inclui a previsão para o instante t e uma correção para o erro ocorrido na última previsão, corrigindo as previsões na direção contrária à do último erro cometido. Neste mesmo sentido pode ser desenvolvido um processo de autoajuste com correção automática para os erros.

Por outro lado, α diz respeito à aleatoriedade na série. Se a série for muito regular, o valor de α tende a crescer e quando se aproxima de 1, a nova previsão irá incluir um ajuste substancial do erro cometido na previsão anterior.

Desenvolvendo a relação de recorrência expressa em (81) obtêm-se,

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t+1} &= \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)[\alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\hat{X}_{t-1}] = \\ &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha)^2\hat{X}_{t-1} = \\ &= \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2X_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^{n-1}X_{t-(n-1)}\end{aligned}\quad (83)$$

verifica-se então, que os pesos aplicados e valores passados decrescem exponencialmente. No caso em que se pretende encontrar α que minimize o EQM expresso em (77), a estimação utilizada será não linear.

A equação (83) permite o cálculo das previsões sendo também considerada como uma equação de atualização de previsões. A esperança e variância da previsão no caso estacionário serão calculadas através de (84) e (85), quando $t \rightarrow \infty$ e se supõe erros normais, de média nula e variância σ_e^2 , independentes.

$$E(\hat{X}_{t+h}) = \alpha \sum_{k=0}^{t-1} (1-\alpha)^k \mu_{t-k} = \alpha \mu \sum_{k=0}^{t-1} (1-\alpha)^k = \mu(1-(1-\alpha)^t) \quad (84)$$

pois $\mu_{t-k} = \mu$, assim quando $t \rightarrow \infty$, $E(\hat{X}_{t+h}) = \mu$

e,

$$\begin{aligned} V(\hat{X}_{t+h}) &= V \left[\sum_{k=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^k X_{t-k} \right] = \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^2 (1-\alpha)^{2k} \sigma_e^2 = \\ &= \frac{2\sigma_e^2(1-(1-\alpha)^{2t})}{2-\alpha} \end{aligned} \quad (85)$$

quando $t \rightarrow \infty$, $V(\hat{X}_{t+h}) = (\alpha/2-\alpha))\sigma_e^2$

Portanto, o intervalo de confiança com coeficiente $100(1-\alpha)\%$ para as previsões poderá ser estabelecido através de (86).

$$\hat{X}_{t+h} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_e^2} \quad (86)$$

Admitindo-se que o comportamento da série é aleatório ao redor de um certo nível, conforme (87), o modelo envolverá reestimação de parâmetros, de maneira que ao final do período T se estime $b(\mu_t)$ através do período T-1.

$$X_t = b + e_t \quad (87)$$

Como b é estimado com base no período T-1,

$$e_T = X_T - \hat{b}_{(T-1)} \quad (88)$$

Se os desvios forem corrigidos através de uma constante α , $\hat{b}_{(T)}$ será chamado S_t . Reescrevendo (89) como (90), b será estimado de modo a minimizar S_e .

$$\hat{b}_{(T)} = \hat{b}_{(T-1)} + \alpha(X_t - \hat{b}_{(T-1)}) \quad (89)$$

$$S_T = S_{T-1} + \alpha(X_t - S_{T-1}) = \alpha X_t + (1-\alpha)S_{T-1} \quad (90)$$

$$S_e = \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} (X_t - \hat{b}_{(T)})^2, \quad 0 < \beta < 1. \quad (91)$$

Assim, encontrando $\hat{b}_{(T)}$, estimador de b , decorrido o período de tempo T , que minimiza S_e

$$\hat{b}_{(T)} = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \sum_{t=1}^T \beta^{T-1} X_t \quad (92)$$

Reescrevendo $\hat{b}_{(T)}$ e aplicando-se o limite para $T \rightarrow \infty$ é obtido o estimador $\hat{b}_{(T)}$. Chamando $\alpha = 1 - \beta$, da mesma forma chega-se a (94) como anteriormente.

$$\hat{b}_{(T)} = \frac{(1-\beta) X_t + \beta(1-\beta^{T-1}) \hat{b}_{(T-1)}}{1-\beta^T} \quad (93)$$

$$\hat{b}_{(T)} = (1-\beta)X_t + \beta(\hat{b}_{(T-1)})$$

$$S_T = \alpha X_t + (1-\alpha)S_{T-1} \quad (94)$$

Da mesma forma como se passou de médias móveis simples a médias móveis linear, é possível ir de suavização exponencial simples a suavização exponencial linear, representado por S II, assim

$$S'_t = \alpha X_t + (1-\alpha)S'_{t-1} \quad (95)$$

$$S''_t = \alpha S'_t + (1-\alpha)S''_{t-1}$$

Então as previsões serão computadas a partir de (96), com $\hat{a}_t$ e $\hat{b}_t$ conforme fornecidos,

$$\hat{X}_{t+h} = \hat{a}_t + h \hat{b}_t \quad (96)$$

$$\hat{a}_t = S'_t + (S'_t - S''_t) \quad , \quad \hat{b}_t = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S'_t - S''_t)$$

3.6.3. Os Modelos de Holt e/ou Winters (S III)

a) Suavização Exponencial Biparamétrica - Holt (S III a)

Trata-se de um método não sazonal, em princípio similar ao de Brown, biparamétrico porque usa duas constantes de suavização correspondendo a nível e tendência $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Mais flexível que aquele (Brown), tem por desvantagens dificuldades na escolha das constantes de suavização e inferências sobre média e variância da previsão.

Os valores de nível e tendência, bem como a previsão são fornecidos pelas expressões

$$\bar{X}_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(\bar{X}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (97)$$

$$\hat{T}_t = \beta(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \quad (98)$$

$$\hat{X}_{t+h} = \bar{X}_t + h\hat{T}_t \quad (99)$$

Nos modelos do tipo S III, as condições iniciais são determinadas através de um conjunto de partida de dados, as previsões são computadas para períodos posteriores a esse conjunto utilizado para ajuste.

Para o modelo de suavização exponencial biparamétrica o nível $\bar{X}_t$ é ajustado diretamente através da tendência no período anterior ($\hat{T}_{t-1}$), juntando-se o último suavizado $\bar{X}_{t-1}$. Assim $\bar{X}_t$ é trazido à mesma base dos dados mais recentes, a seguir se atualiza a tendência, colocando-a na forma de diferença entre os últimos valores observados.

Existe uma forte similaridade entre as expressões (98) e (81) que expressa suavização simples, a última atualiza a previsão, enquanto que a primeira, o faz com relação à tendência.

b) Modelo de Suavização Sazonal Aditivo - Holt e Winters
(S III b)

Os modelos sazonais (aditivo ou multiplicativo) de Holt e Winters se baseiam em equações de suavização, cada uma associada a um dos componentes. No sentido da forma de suavização se assemelham ao de Holt, e incluem três constantes de suavização em (0,1).

Quando se supõe aditividade para séries sazonais, a suavização é representada pelo conjunto das equações (100) a (103), $t=s+1, \dots, n$.

$$\bar{X}_t = \alpha(X_t - \hat{C}_{t-s}) + (1-\alpha)(\bar{X}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (100)$$

$$\hat{T}_t = \beta(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \quad (101)$$

$$\hat{C}_t = \gamma(X_t - \bar{X}_t) + (1-\gamma)\hat{C}_{t-s} \quad (102)$$

$$\hat{X}_{t+h} = (\bar{X}_t + \hat{T}_t h) + \hat{C}_{t+h-s} \quad (103)$$

A equação (101) é exatamente a de Holt para tendência, enquanto que a (102) é similar para sazonalidade, podendo ser interpretada

de modo análogo.

O valor suavizado $\bar{X}_t$ não sofre influência de sazonalidade, mas carrega consigo algumas influências aleatórias, motivo pelo qual a previsão não se encontra completamente destituída de aleatoriedade.

c) Modelo de Suavização Sazonal Multiplicativo Holt e Winters (S III c)

Na verdade, este se trata de um modelo misto em que o efeito multiplicativo é assumido no sentido de dependência entre tendência e sazonalidade, de modo que a série seja representada por

$$X_t = T_t S_t + e_t \quad (104)$$

Quando a tendência é supostamente linear, a equação (104) será reescrita na forma (105); se o componente de tendência é desnecessário, a_1 é suprimido do modelo levando em conta apenas os componentes restantes.

$$X_t = (a_0 + a_1 t) S_t + e_t \quad (105)$$

O procedimento é descrito pelas expressões (106) a (109) para $t=s+1, s+2, \dots$ desde que α, β e γ estejam no intervalo $(0,1)$.

$$\bar{X}_t = \alpha(X_t / \hat{S}_{t-s}) + (1-\alpha)(\bar{X}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \quad (106)$$

$$\hat{S}_t = \gamma(X_t / \bar{X}_t) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-s} \quad (107)$$

$$\hat{T}_t = \beta(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \quad (108)$$

$$\hat{X}_{t+h} = (\bar{X}_t + h\hat{T}_t)\hat{S}_{t+h-s} \quad (109)$$

3.7. Modelos de Box e Jenkins

Os modelos apresentados nesta seção são casos particulares de modelos de filtro linear, i.e., uma série temporal cujos valores sucessivos são dependentes, podendo ser vista como gerada por exemplo, através de combinações lineares de choques aleatórios independentes de média nula e variância σ_e^2 .

A operação se realiza mediante um operador linear chamado função de transferência, conforme pode ser visto no esquema (IV).

Representando o operador por $\theta(B)$, o modelo será escrito na forma (110).

$$X_t = \mu + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots = \mu + \theta(B) e_t \quad (110)$$

com $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots$

O processo X_t é linear e em geral apresenta média diferente de zero, assim nestes casos serão considerados os processos centrados. A variância e auto covariância do processo serão dadas por (111) e (112), quando $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2$ e $\sum_{k=0, \pm 1, 2, \dots} \theta_i \theta_{i+k}$ convergirem

$$V(X_t) = \sigma_e^2 \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 \quad (111)$$

$$\gamma_k = \sigma_e^2 \sum_{k=0, \pm 1, \dots} \theta_i \theta_{i+k} \quad (112)$$

Uma maneira ligeiramente diversa de tratar a série X_t se constitui em representá-la como gerada através de p de seus valores anteriores, utilizando um operador linear $\phi(B)$, na forma:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad (113)$$

$$= \phi_1 B(X_t) + \phi_2 B^2(X_t) + \dots + \phi_p B^p(X_t) + e_t$$

Se $\Phi(B)$ pode ser escrito de maneira (114), então o modelo será representado conforme (115)

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (114)$$

$$\Phi(B)X_t = e_t \quad (115)$$

Este modelo (115), é dito auto-regressivo de ordem p sendo representado por $AR(p)$, logo com $p=1$ o modelo $AR(1)$ será escrito conforme (116)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t \quad (116)$$

Aplicando o modelo $AR(1)$ para o instante $t-1$ e substituindo em (116), a seguir repetindo o procedimento para $t-2$ e assim sucessivamente se obtém a equação (117)

$$X_t = e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots \quad (117)$$

Chamando $\theta_q = \phi_1^q$, $q = 1, 2, \dots$, chega-se a

$$X_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots \quad (118)$$

ou melhor,

$$X_t = \Theta(B)e_t \quad (119)$$

O modelo descrito na equação (118) ou (119), em que X_t é expresso linearmente em função de valores passados de ruído, é chamado médias móveis.

Caso X_t seja expresso em termos de q valores passados de ruído, tem-se um modelo de médias móveis de ordem q , representado por $MA(q)$. Existe, como se pode notar, dualidade entre processos AR e MA, um processo $AR(p)$ corresponde a um $MA(\infty)$, e um $MA(q)$ está relacionado a um $AR(\infty)$.

Por outro lado, a equação (115) pode ser reescrita utilizando $1/(1-\phi_1 B)$, o operador inverso de $(1-\phi_1 B)$, que se for interpretado como a soma de termos de uma progressão geométrica de razão $\phi_1 B$ e primeiro termo um, levará do mesmo modo a (117)

$$X_t = \frac{1}{1-\phi_1 B} e_t$$

Considerando que

$$\phi(B)X_t = e_t \quad \text{e} \quad \theta(B)e_t = X_t$$

então

$$\phi(B)\theta(B) e_t = e_t \quad (120)$$

de modo que $\phi(B) = \theta^{-1}(B)$, o que pode ser utilizado para dado θ , se calcular ϕ e vice versa.

3.7.1. Estacionariedade e Invertibilidade

Representando um processo estocástico como resultado de uma operação linear através de um filtro cuja entrada é composta de ruído branco, então

$$X_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots \quad (121)$$

Se os ruídos são não correlacionados, suas funções de autocovariância e autocorrelação são as dadas a seguir e a função de autocovariância do processo linear, definido em termos de valores anteriores de ruído, é expressa por (122).

$$\gamma_e(k) = E(e_t, e_{t-k}) = \begin{cases} \sigma^2, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\rho_e(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \theta_{j+k} \quad (122)$$

No caso em que $k=0$, o processo terá variância finita se a série em (122) convergir, conforme foi visto em 3.1.1., a autocovariância e autocorrelação devem satisfazer algumas condições em processos estacionários.

Para um processo linear, no caso MA, $\theta(B)$ deverá convergir para $|B| \leq 1$, assim o filtro será dito estável e o processo estacionário, i.e. se $\theta(B)$ converge dentro ou sobre o círculo unitário.

Outra condição, e que independe da estacionariedade, é a de invertibilidade, facilmente compreendida supondo o modelo

$$X_t = (1 - \theta B) e_t \quad (123)$$

Quando $|\theta| \geq 1$, X_t que depende de seus valores passados com peso θ^k cresce juntamente com k , pois

$$e_t = (1 - \theta B)^{-1} X_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots + \theta^k B^k) (1 - \theta^{k+1} B^{k+1}) X_t$$

$$X_t = -\theta X_{t-1} - \theta^2 X_{t-2} \dots - \theta^k X_{t-k} + e_t + \theta^{k+1} e_{t-k-1} \quad (124)$$

Então $|\theta|$ deverá ser menor que um e a série invertível, o que acontece se $\Phi(B)$ converge para $|B| \leq 1$.

$$\Phi(B) = (1 - \theta B)^{-1} = \sum_{j=1}^k \theta^j B^j$$

Desta forma o processo definido em (125) é invertível se $\Phi(B)$ converge para $|B| \leq 1$, de modo geral um processo linear é estacionário se $\theta(B)$ converge para $|B| \leq 1$ e invertível se $\Phi(B)$ converge para $|B| \leq 1$.

$$\Phi(B)X_t = e_t \quad (125)$$

3.7.2. Modelos Lineares Estacionários e Não Estacionários

Tomando-se o modelo AR expresso em (126) se for possível colocá-lo na forma (127), então o processo AR pode ser visto como saída de um sistema cuja função de transferência é Φ^{-1} e entrada ruído branco.

$$\Phi(B)X_t = e_t \quad (126)$$

$$X_t = \frac{1}{\Phi(B)} e_t = \Phi^{-1}(B)e_t \quad (127)$$

Considerando apenas q valores para $\theta_i = \phi_i^{-1}$, pode-se escrever o modelo de médias móveis de ordem q (MA(q)), dado por (128) ou (129).

$$X_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (128)$$

$$X_t = \theta(B)e_t \quad (129)$$

A dualidade entre os modelos (126) e (129) é apresentada através dos itens i) a iv).

i) No modelo $AR(p)$, X_t pode ser representado como soma finita de p de seus valores anteriores ou soma infinita de ruídos, enquanto que no modelo $MA(q)$, X_t pode ser expresso como soma finita de q ruídos anteriores ou uma soma infinita de valores de X_t .

ii) O processo $MA(q)$ tem f.a.c. tendendo a zero ao redor de q ($\rho_k=0$, $k>q$), enquanto que para $AR(p)$ a f.a.c. é infinita em extensão, dominada por senoides e exponenciais amortecidas.

iii) Um processo $MA(q)$ não necessariamente satisfaz a restrição de estacionariedade, mas para ser invertível deverá ter as raízes de $\theta(B) = 0$ fora do círculo unitário. O $AR(p)$ nem sempre satisfaz invertibilidade, porém as raízes de $\phi(B) = 0$ deverão se localizar fora do círculo unitário, de modo a atingir estacionariedade.

iv) A f.a.c.i. para um processo $MA(q)$ é a mesma que para o inverso correspondente $AR(q)$.

Na prática, nem sempre a utilização de processos AR ou MA puros será suficiente para representar o comportamento de um sistema. Por vezes haverá a necessidade da inclusão de ambos os termos AR e MA no modelo obtendo-se uma representação adequada através de (130), que define um processo $ARMA(p,q)$.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)e_t \quad (130)$$

ou

$$X_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)e_t$$

A equação (130) define um processo estacionário se $\Phi(B)=0$ fornece raízes fora do círculo unitário e invertível se $\Theta(B)=0$ fornece raízes também fora da região compreendida pelo círculo unitário.

Reescrevendo o modelo (130), multiplicando-o por X_{t-k} e tomando seu valor esperado, obtêm-se (131), onde γ_{xe} é a covariância entre X_t e e_t , ou seja $\gamma_{xe}(k) = \text{cov}(X_{t-k}, e_t)$

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q} \\ \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{xe}(k) - \theta_1 \gamma_{xe}(k-1) - \dots - \\ &\quad + \theta_q \gamma_{xe}(k-q) \end{aligned} \quad (131)$$

De acordo com o modelo, X_t depende dos ruídos apenas até o instante $t-k$, portanto

$$\gamma_{xe}(k) = \begin{cases} 0 & k > 0 \\ \neq 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

Assim, a função de autocovariância do processo será dada por

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad k \geq q+1$$

logo

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k \geq q+1 \quad (132)$$

ou então

$$\Phi(B) \rho_k = 0 \quad k \geq q+1 \quad (133)$$

Um processo ARMA (p, q) se compõe de q autocorrelações $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ que dependem dos parâmetros relativos às partes AR e MA, os valores $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p-1}$ fornecerão informações para iniciar

as equações dadas por (133).

Quando $q-p < 0$, a estrutura de $\Phi(B)$, em seus valores iniciais retrata a f.a.c., que será uma mistura de exponenciais e senoides amortecidas. Nos casos em que $q-p \geq 0$, tem-se $q-p+1$ valores iniciais que seguirão comportamento diverso.

Grande parte das séries com as quais se depara na prática não são estacionárias, assim não podem ser representadas através de modelos estacionários.

Desde que estas séries apresentem não estacionariedade homogênea, supõe-se que as séries resultantes de operações de diferenciação sejam estacionárias (ou aproximadamente), considerando classes de modelos onde a série diferenciada seja um processo ARMA.

Tais modelos são chamados auto-regressivos-integrados-médias móveis, de ordem p, d e q e representados ARIMA (p, d, q) expressos por (134).

$$\Phi(B)W_t = \Theta(B)e_t \quad (134)$$

onde $W_t = \nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1-B^d)X_t$

Desta forma, a série de diferenças de ordem d de um processo não estacionário pode ser representada por um processo ARMA estacionário invertível.

Aqueles processos que, além das variações previstas pelos modelos ARIMA, apresentarem flutuações sazonais, poderão ser tratados através dos modelos ARIMA sazonais, ou seja, modelos SARIMA com período sazonal s , conforme (135).

$$\Phi(B)(1-B^d)(1-B^S)X_t = \Theta(B)e_t \quad (135)$$

3.7.3. Função de Autocorrelação Parcial (f.a.c.p.)

Seja o modelo AR(p) definido em (113) e equivalentemente representado em (115), com média nula, então, de modo similar a (131), multiplicando-se (113) por X_{t-k} , tomando-se o valor esperado e dividindo pela variância, obtêm-se

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (136)$$

Escrevendo a equação (136) para os valores de $k = 1, \dots, p$ obtêm-se o sistema descrito nas equações (137) e escrito matricialmente conforme (138), pois $\rho_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \rho(-k)$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \rho_0 \end{aligned} \quad (137)$$

se

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

e

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_p \\ \rho_1 & 1 & \rho_3 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_2 & \rho_3 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

então,

$$\rho = \underline{P} \underline{\Phi} \quad (138)$$

O sistema (138) exprime as mesmas equações (137), chamadas de Yule-Walker. Supondo ϕ_{kj} o j -ésimo coeficiente do modelo $AR(k)$, é obtido um sistema de equações fornecido por (139), cujas soluções para $k=1,2,\dots$ resultam em (140).

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \quad (139)$$

$$k = 1, 2, \dots, k$$

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad (140)$$

Os determinantes em (140) se referem a P_k matriz de autocorrelações de ordem K e P_k^* a matriz P_k , com a última coluna trocada pelo vetor de autocorrelações.

A função de autocorrelação parcial será o valor ϕ_{kk} compreendido como função do "lag" k , não nula se $K \leq p$, nula $k > p$ para um modelo $AR(p)$, com estimativas $\tilde{\phi}_{kk}$ aproximadamente independentes e

$$V(\tilde{\phi}_{kk}) \sim 1/n, \quad k > p \quad (141)$$

Uma forma de estimar a f.a.c.p. de um processo é constituída de estimar sucessivamente modelos AR de ordem $k=1,2,\dots$, ou então substituir em (139) as estimativas da f.a.c..

Reunindo as informações para os modelos AR, MA e ARMA, com relação a estacionariedade, invertibilidade e funções de autocorrelação, foi organizado o seguinte quadro de características que será de extrema importância na aplicação dos modelos:

	AR	MA	ARMA
Modelo	$\phi(B)X_t = e_t$	$X_t = \theta(B) e_t$	$\phi(B)X_t = \theta(B) e_t$
Estacionar.	raízes de $\phi(B)=0$ fora círculo unitário	estacionário	raízes de $\phi(B)=0$ fora círculo unitário
Invertibil.	invertível	raízes de $\theta(B)=0$ fora círculo unitário	raízes de $\theta(B)=0$ fora círculo unitário
f.a.c.	infinita	$\rho_k=0, K > q$	$\rho_k=0, k > q$
f.a.c.p.	$\phi_{kk}=0, k > p$	infinita	infinita
f.a.c.i.	$\rho_1(K)=0, k > p$	infinita	$\rho_1(K)=0, k > p$

3.7.4. O Sistema de Previsão

O sistema proposto por BOX e JENKINS (1968) basicamente envolve as fases de identificação, estimação, diagnose e obtenção de previsões.

Durante a identificação, são propostas classes de modelos através do uso das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial.

Se a série é não estacionária, o primeiro problema é determinar o grau de diferenciação d , que se supõe atingido quando a função de autocorrelação decresce rapidamente para $W_t = (1-B^d)X_t$.

Por outro lado, a série estará excessivamente diferenciada quando a variância de W_t tende a crescer rapidamente, a f.a.c. da série, X_t ou W_t , deve satisfazer, para um processo ARMA

$$\Phi(B)\rho_k = 0 \quad k > q \quad (142)$$

Mediante comparação da f.a.c. amostral e f.a.c. teórica, de mesmo modo para as demais funções de autocorrelação, realiza-se a identificação de um processo ARMA (p,q) , não sendo conhecidas f.a.c. e f.a.c.p. quando q e/ou $p > 2$.

Recomenda-se a utilização da f.a.c.i. conjuntamente, pois algumas características para processos MA são melhor percebidas por esta função. Assim a identificação se concentra no quadro fornecido em 3.7.3.

Técnicas diversas vem sendo desenvolvidas para determinação das ordens de um processo ARMA (p,q) , ou seja, o problema é similar a determinar as variáveis independentes em regressões múltiplas, porém é necessário dizer que não tentam encontrar a ordem exata do processo.

Essas técnicas envolverão estimativas iniciais de alguns parâmetros que poderão ser obtidas através da f.a.c. e serão, conforme mostram BOX e JENKINS (1968), únicas.

Um processo ARMA tem uma única estrutura de autocorrelações (autocovariâncias) mas o inverso não é válido, vários processos

diferentes podem ter a mesma estrutura de autocorrelações, um único expressará a série de modo estacionário e invertível.

Supondo-se um processo $MA(q)$, para obter uma estimativa de σ_e^2 quando os ruídos são processo Gaussiano de média nula e variância σ_e^2 , é possível calcular

$$\gamma_0 = \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) = c_0 \quad (143)$$

No caso de um processo $AR(p)$, as estimativas iniciais dos parâmetros ϕ , podem ser extraídas a partir das equações de Yule-Walker, com emprego das estimativas r , na forma

$$\hat{\Phi} = R_p^{-1} r_p \quad (144)$$

onde $\hat{\Phi}$ é o vetor das estimativas de ϕ , de ordem $p \times 1$. R é matriz das autocorrelações amostrais $p \times p$, e r de ordem $p \times 1$, vetor de autocorrelações estimadas.

A estimação propriamente dita dos parâmetros de um processo ARIMA recai em métodos de estimação não linear. Considerando $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ e $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$, o objetivo será encontrar Φ e Θ que minimizem $S(\Phi, \Theta)$, conforme

$$S(\Phi, \Theta) = \sum e_t^2 \quad (145)$$

onde

$$e_t = \Theta^{-1}(B)\Phi(B)W_t \quad (146)$$

O método de estimação é iterativo, e o primeiro ruído e_t dependerá de p valores anteriores ao mesmo instante t de ruídos, assim torna-se necessário escolher uma maneira de iniciar o procedimento.

O mais comum é fazer os valores de W_t , $-p+1 \leq t \leq 0$ e e_t , $-q+1 \leq t \leq 0$, iguais aos seus valores esperados incondicionados, ou seja, $W_t = 0$ para $-p+1 \leq t \leq 0$ e $e_t = 0$ quando $-q+1 \leq t \leq 0$.

Então serão estimados Φ e Θ através de processo iterativo, assumindo também que os ruídos são normais, independentes, de média nula e variância σ_e^2 .

Sob a hipótese de normalidade, as estimativas de máxima verossimilhança serão também de mínimos quadrados e no caso particular de um AR puro, que pode ser expresso como se nota em (147), as estimativas podem ser obtidas de modo similar aos casos de regressão.

$$W_t = \phi_1 W_{t-1} + \dots + \phi_p W_{t-p} + e_t, \quad W = (1-B^d)X_t$$

ou

$$W = W^* \Phi + \varepsilon \quad (147)$$

Porém, quando o modelo contém componentes MA, a equação (148) é não linear nos parâmetros e será estimada através de uma rotina não linear iterativa.

$$e_t = \Theta^{-1}(B) \Phi(B) W_t \quad (148)$$

A equação (148) é linearizada em torno de um valor inicial para Φ e Θ , utilizando os dois primeiros termos de uma série de Taylor, obtendo-se uma regressão linear sobre a equação linearizada e extraíndo estimativas para $\hat{\beta} = (\hat{\Phi} \hat{\Theta})$.

O processo é repetido iterativamente ao redor da estimativa obtida calculando-se vários vetores $\hat{\beta}_k$, $k=1, \dots, K$, até que após K iterações ocorra convergência, assim $\hat{\beta}_K$ é a estimativa final de Φ e Θ .

Valores iniciais β_0 devem ser sugeridos de modo a obter a convergência do processo iterativo, a f.a.c. amostral é usada neste sentido, através das equações de Yule-Walker para determinar $\Phi=(\phi_1 \dots \phi_p)$.

Pelas razões de que a f.a.c. amostral é somente uma estimativa da f.a.c. atual e não tão informativa quanto esta, o processo iterativo é necessário. Assim a estimativa final para β se baseia na série temporal atual, trazendo desta forma o máximo possível de informação.

Após o ajuste, a diagnose abrange uma análise de resíduos, provendo que os próprios resultados sugiram modificações no modelo. Como os ruídos foram assumidos normais e independentes, se as suposições do modelo forem válidas, os resíduos deverão seguir estas propriedades.

Particularmente, os resíduos serão aproximadamente não correlacionados, e r_k necessariamente estará próximo de zero para $k \geq 1$, sendo possível testar a hipótese de que as autocorrelações sejam nulas através do resultado de Bartlett, ou aplicar o teste baseado nos resultados de BOX e PIERCE (1970)

$$\chi_r^2 = D \sum_{k=1}^k r_k^2 (e_t) \quad (149)$$

A estatística de Box e Pierce, para um modelo ARIMA (p,d,q) tem distribuição aproximadamente χ^2 com $r = k - p - q$ graus de liberdade e $D = n - d$ representa o número de observações disponíveis para a estimação.

Como maneira de determinar a ordem de um modelo, dentro de uma classe identificada de modelos de Box e Jenkins seleciona-se aquele que minimiza o critério de informação de Akaike (AIC) normalizado expresso em (150),

$$AIC = n \ln \hat{\sigma}_e^2 + 2(p+q+1+\delta_{do}) \frac{n}{n-d} + n \ln 2\pi + n \quad (150)$$

onde

$$\delta_{do} = \begin{cases} 1 & , \quad d = 0 \\ 0 & , \quad d \neq 0 \end{cases}$$

Quando se deseja saber se realmente o modelo ajustado permanece inalterado durante um período prolongado de tempo, principalmente na suspeita de se verificarem mudanças no comportamento da série, é possível particioná-la.

Desta forma, cada uma das partes é trabalhada de modo independente comparando-se os ajustes obtidos, o que se baseia em que os modelos de Box e Jenkins são fixos ao longo do tempo. Assim os ajustes deverão se manter os mesmos, ou seja, a estrutura de comportamento inicial é mantida.

Em seguida, serão obtidas as previsões e o sistema pode se adaptar a qualquer outro sistema preditivo, como o descrito em 3.1.5.

Uma medida da preditibilidade de uma série, dados seus valores anteriores, será similar àquela comumente empregada em modelos regressivos. No contexto dos modelos ARIMA, a estatística R^2 será definida como se segue:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_e^2}{V(X)} \quad (151)$$

Para processos AR(p) onde γ_k é a autocovariância do processo, a variância será fornecida por (152)

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-1} + e_t$$

$$V(X_t) = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_i + \sigma_e^2 \quad (152)$$

logo, se R_p^2 é a estatística R^2 no caso AR(p)

$$1 - R_p^2 = \frac{\sigma_e^2}{V(X_t)} = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \rho_i$$

$$R_p^2 = \rho_p' \Phi_p \quad (153)$$

Através das equações de Yule-Walker em sua notação matricial fornecidas por (154), onde Γ_p é a matriz $\underline{P}$, no caso AR(p), é possível expressar R_p^2 como função de ρ_p somente, assim esta estatística será vista como medida de autocorrelação em séries temporais.

$$\rho_p = \Gamma_p \Phi_p \quad (154)$$

$$R_p^2 = \rho_p' \Gamma_p^{-1} \rho_p \quad (155)$$

As relações entre θ e as autocorrelações de um processo MA(q) são não lineares, o que torna difícil expressar R^2 fornecido por (156) em termos de ρ , o modelo será mais preditivo quanto menores forem os coeficientes θ .

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^q \theta_i^2}{1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2} \quad (156)$$

É possível aproximar um processo MA(q) por um AR(K), $k > q$ obtendo R_k^2 a partir de (157) e aplicando o limite conforme (158), porém este resultado não tem grande interesse prático, tratando-se de um resultado não informativo.

$$R_k^2 = \rho_k' R_k^{-1} \rho_k \quad (157)$$

$$R^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k^2 \quad (158)$$

No contexto dos modelos ARIMA, um pequeno valor para R^2 não significa baixo poder preditivo, porque de acordo com o método de estimação, o valor desta estatística se refere apenas aos valores atuais da série.

3.8. As Medidas SNR (Signal Regression) e ARSE (Auto-regressivo-Suavização Exponencial)

Os modelos suavizados e os de regressão costumam apresentar razoável desempenho no sentido do fornecimento de previsões razoáveis.

Devido à dificuldade que se tem encontrado em tomadas de decisão com relação a estas classes de modelos, foram estudadas algumas medidas, como o ARSE e SNR, de forma a serem obtidas informações anteriores ao ajuste destas classes.

De acordo com a seção 3.1.2, procura-se $P_{M_0} X_0$ em $M_0 = L_2((X_t)_{t \in T_0})$, a situação pode ser observada no esquema (VI), onde a notação é simplificada para $\hat{X}_t = X_0^*$ e $M_0 = H_t$, i.e., H_t o conjunto das combinações lineares de X_t até o instante t .

É possível tratar o problema de duas maneiras, a primeira se baseia em observar a "contribuição" do ruído com relação à observação X_t , na forma

$$\|X_t\|^2 = \|\hat{X}_t\|^2 + \|e_t\|^2$$

definindo-se SNR_H , no espaço H_t , obtêm-se

$$SNR_H = \|e_t\|^2 / \|X_t\|^2 \quad (159)$$

Utilizando-se o teorema das isometrias, o problema de calcular esta medida poderá ser transferido para o espaço das covariâncias, desta forma este problema se assemelha a um quociente de variâncias e se calcula SNR_c ou simplesmente SNR , cuja estimativa é dada por $\hat{SNR}$.

$$SNR = SNR_c = \sigma_{e(p)}^2 / \sigma_x^2$$

$$\hat{SNR} = QMRes(p) / \hat{V}(X_t)$$

O estimador para SNR envolve um quadrado médio de resíduos, onde é suposto um modelo autoregressivo ajustado. A regra de decisão se compõe de escolher o modelo autoregressivo à medida que SNR decresça.

Por outro lado, o modelo de suavização exponencial poderá ser comparado com o de auto-regressão. Sabe-se que o modelo de suavização exponencial fornece maior peso à última observação, em relação às demais anteriores, assim poderá ser aproximado por um modelo autoregressivo de ordem 1 (um).

$$\hat{X}_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)\hat{X}_t$$

ou

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{X}_t + \alpha e_t$$

Nos casos em que a série é muito regular, então a correção para a última previsão será desprezível, reduzindo-se o modelo suavizado a função da observação anterior, somente.

Uma medida da performance de um modelo suavizado exponencial, também decorrente para médias móveis, seria obtida através do quociente $ARSE_H$, definido conforme se segue.

$$ARSE_H = \|e_{t(s)}\|^2 / \|e_{t(p)}\|^2$$

A representação gráfica dos vetores $e_{t(s)}$, e $e_{t(p)}$ é encontrada no esquema VII, onde os vetores correspondem a ruídos nos casos suavizado e autoregressivo, respectivamente.

De modo similar ao SNR, foi possível calcular $ARSE_c$, a medida $ARSE_H$ definida no espaço das covariâncias, e que será dada em termos da variância dos ruídos para o modelo autoregressivo de ordem 1 (um), ou em termos da autocovariância de ordem um do processo.

$$ARSE_c = \sigma_{e(1)}^2 / \sigma_{e(p)}^2 = \sigma_x^2(1 - \rho_1^2) / \sigma_{e(p)}^2 \quad (160)$$

Assim, a estimativa para $ARSE_c$, ou simplesmente $ARSE$, será dada por $\widehat{ARSE}$ e o critério de preferência de modelos suavizados com relação a auto-regressivos se constitui de selecionar o suavizado quando $ARSE$ é pequeno, aproximando-se de 1 (um), enquanto se optará pelo autoregressivo à medida que o coeficiente cresça.

Torna-se necessário notar, que ambas as medidas descritas se assemelham grandemente a um teste F rotineiro, sendo estimadas através de quocientes de quadrados médios, porém, embora em alguns casos a normalidade seja cumprida, o mesmo não acontece com a independência.

$$\widehat{ARSE} = QMRes(1) / QMRes(p) = \widehat{V}(X_t)(1 - r_1^2) / QMRes(p)$$

3.9. Melhora e Misturas

As previsões fornecidas por alguns métodos, por vezes tendem a subestimar ou superestimar os valores reais de uma série.

Uma forma de melhorá-las constitui-se em considerar os resíduos de ajustes, processos auto-regressivos de ordem um (1), da seguinte maneira:

$$e_t = ae_{t-1} + \varepsilon_t$$

assim,

$$\hat{e}_{t+1} = \hat{a}(e_t - \hat{e}_t) = r_e(1)e_t$$

As previsões podem ser então melhoradas (A) através da expressão

$$\hat{X}'_{t+1} = \hat{X}_{t+1} + r_e(1)e_t \quad (161)$$

Outra maneira de tornar as previsões mais razoáveis, utilizada principalmente em dados econômicos, supõe a existência de uma relação linear entre a observação e a previsão fornecida por um determinado modelo. As previsões modificadas neste caso, foram computadas através da equação (162), onde a e b são determinados por mínimos quadrados ordinários (B)

$$\hat{X}'_{t+1} = a + b\hat{X}_{t+1} \quad (162)$$

Os modelos também tiveram suas previsões misturadas, assim, por vezes a melhor aproximação nem sempre será dada por um único modelo,

porém, por combinações lineares, no caso convexas, de previsões.

Considerando-se $\hat{W}_{t+1}$ e $\hat{Y}_{t+1}$ previsões fornecidas por dois modelos diversos para um mesmo processo X_t , as misturas podem ser calculadas conforme (163)

$$\hat{X}'_{t+1} = \alpha \hat{W}_{t+1} + (1-\alpha) \hat{Y}_{t+1}, \quad \alpha \in (0,1) \quad (163)$$

Houve a necessidade de supor que as esperanças dos dois modelos para W_t e Y_t sejam as mesmas e iguais à média populacional. Ainda, embora $\hat{W}_{t+1}$ e $\hat{Y}_{t+1}$ claramente não se tratem de estimadores independentes, foram considerados como tal.

O problema se compõe de encontrar o valor α^* tal que a variância da combinação linear convexa (163) fosse mínima

$$\begin{aligned} V [\alpha Y + (1-\alpha)W] &= \alpha^2 \sigma_y^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_w^2 + 2\alpha(1-\alpha) \text{cov}(y,w) = \\ &= \alpha^2 \sigma_y^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (164)$$

$$\frac{\partial V[\cdot]}{\partial \alpha} = 2\alpha \sigma_y^2 - 2(1-\alpha) \sigma_w^2$$

O valor α^* que minimiza a variância (164), é fornecido pela expressão (165). Tomando-se então como estimativas para as variâncias os EQM de cada modelo, é possível realizar as misturas de modelos dois a dois, e a variância da combinação linear pode ser então calculada com relação a α^* .

$$\alpha^* = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_y^2 + \sigma_w^2} \quad (165)$$

$$V[.] = (\sigma_w^2 \sigma_y^2) / (\sigma_w^2 + \sigma_y^2)$$

3.10. Materiais

A importância da Climatologia nas várias áreas da Agro-
nomia é um fator decisivo, o que motivou a escolha de uma série deste
tipo, no caso a série é de precipitações pluviais mensais no município
de Pindorama-SP.

Trata-se do período de janeiro de 1950 a abril de 1981,
em mm, dados estes fornecidos pelo Departamento de Climatologia Agrí-
cola do Instituto Agronômico de Campinas (Quadro 1).

Outro fator que influencia a escolha da série, é o obje-
tivo de estudar a performance dos modelos apresentados, especialmente
em séries muito regulares, como costumam ser principalmente séries cli-
matológicas.

Com relação às medidas ARSE e SNR, foram empregadas sê-
ries diversas, apenas para testar o desempenho de tais medidas, não se-
rão desta forma apresentadas análises rigorosas destas séries, uma vez
que isto acarretaria um acúmulo desnecessário de gráficos e resultados.

As séries utilizadas e que são de domínio público foram:

- consumo total de energia elétrica na região Rio-São Paulo em mil MWh, da LIGHT - Serviços de Eletricidade S.A., revista Conjuntura Econômica, junho de 79, na forma de 40 dados mensais referentes ao período janeiro de 76 a abril de 79 (1);

- produção nacional de cimento, em milhões ton., totalizando 40 dados anuais de 1931 a 1970, Sindicato Nacional da Indústria de Cimento e CACEX, Conjuntura Econômica de 74 (2);

- Índices gerais de custo de vida, tomada como base a média de 1948 = 100, Conjuntura Econômica, agosto de 82, sendo 39 dados durante o período de julho de 52 a setembro de 55 (3);

- Índices mensais de emprego na região da Grande São Paulo relativos a fevereiro de 77 até dezembro de 80, com um total de 47 dados, do Ministério do Trabalho/Centro de Documentação e Informática/SINE (4);

- arrecadações mensais de ICM no estado de São Paulo, em milhões de cruzeiros, sendo 40 dados a partir de janeiro de 76 a abril de 79, da Secretaria da Fazenda do Estado de São Paulo (5);

- Índices mensais de emprego no comércio no Estado de São Paulo, com 35 dados relativos ao período de fevereiro de 78 a dezembro de 80, do Ministério do Trabalho/Centro de Documentação e Informática/SINE, Anuário Estatístico de São Paulo, 1980 (6);

- consumo mensal de energia elétrica na indústria têxtil no eixo Rio-São Paulo, totalizando 40 observações de janeiro de 76 a abril de 79, Conjuntura Econômica, julho de 79 (7);

- produção de petróleo no Brasil, m/m^3 , com 40 observações de janeiro de 76 a abril de 79, PETROBRAS, Conjuntura Econômica, julho 79 (8).

Além das séries acima referidas, foram simuladas séries que obedeceram determinados modelos ARMA, somente para apreciar os resultados das medidas propostas.

Como suporte computacional, serão empregados a regressão "stepwise" (pseudo) do STP, o programa TSERIES de Box e Jenkins, os programas para SIII de MORETTIN e TOLOI (1981), adaptativo de MAKRIDAKIS e WHEELWRIGHT (1978), bem como uma série de recursos próprios para ajuste de diversos modelos e realização de testes.

4. RESULTADOS

Os resultados a seguir, até o item 4.4, são referentes à série climatológica, excetuando-se o item 4.5, em que todas as séries foram utilizadas, porém tal se deu apenas para que se evidenciasse o comportamento das medidas propostas.

4.1. Definição do Problema

O intuito foi o de analisar a série de precipitações pluviais mensais de Pindorama, pesquisando-se modelos para obtenção de previsões do tipo quantitativo, e verificação do emprego destes.

As previsões terão como horizonte de previsão 1(um)"lag", pois os erros de previsão a um passo são não correlacionados e tornam mais imediatas as inspeções gráficas do comportamento dos modelos.

No que se refere aos custos operacionais, não serão impostas restrições, preferindo-se discutí-los posteriormente.

4.2. Familiarização

Esta etapa do processo visa obter o máximo de informação com respeito à série em estudo, assim, realizando-se uma inspeção visual do gráfico da série (Figura 1), foi revelada a presença de sazonalidade com período $s = 12$, ausência de tendência e um forte componente de aleatoriedade.

Com relação à aditividade, aparentemente não existe uma forma de dependência entre as causas de variação, ou melhor, a variação sazonal mantendo-se aproximadamente inalterada, não demonstra a presença de efeitos multiplicativos que justifiquem expressar a série na forma

$$X_t = T_t S_t + e_t \quad (165)$$

Quando não se possui um conhecimento prévio com relação aos dados, é aconselhável a aplicação de testes para tendência e sazonalidade, porém, o profissional frequentemente detém informações com relação à natureza dos dados, sabendo se a série é sazonal, e/ou provida de tendência.

No caso de séries climatológicas é extremamente comum a ocorrência de séries sazonais, assim como as séries econômicas costumam apresentar sazonalidade e tendência determinísticas, porém, no intuito da realização de um trabalho mais estruturado, tais testes foram efetuados.

Inicialmente, estruturou-se um teste de aditividade, estimando a tendência ($\hat{T}_i$) através de médias móveis ($\hat{M}_{ij}$), calculando então

a amplitude sazonal anual ($\hat{S}_i$); caso estes componentes não se mostrem presentes, as estimativas de amplitudes sazonais anuais serão nulas e a tendência refletirá a média.

$$\hat{T}_i = (1/12) \sum_{j=1}^{12} \hat{M}_{ij} \quad i=2,3,\dots,29 \quad (166)$$

$$\hat{S}_i = (1/12) \sum_{j=1}^{12} |x_{ij} - \hat{M}_{ij}| \quad i=2,3,\dots,29 \quad (167)$$

$$\hat{M}_{ij} = (1/24)(x_{t+6} + 2 \sum_{j=-5}^5 x_{t+j} + x_{t-6}) \quad t=7,8,\dots,358$$

$$\hat{T}_1 = (1/6) \sum_{j=7}^{12} \hat{M}_{1j} \quad \hat{T}_{30} = (1/6) \sum_{j=1}^6 \hat{M}_{30j}$$

$$\hat{S}_1 = (1/6) \sum_{j=7}^{12} |x_{1j} - \hat{M}_{1j}| \quad \hat{S}_{30} = (1/6) \sum_{j=1}^6 |x_{30j} - \hat{M}_{30j}|$$

Os resultados obtidos podem ser encontrados no Quadro 2 correspondendo a Figura 5. A inspeção desse gráfico não indica um modelo multiplicativo. Neste caso seria obtida uma reta aproximada, inclinada.

Por outro lado, se o modelo é multiplicativo, então seu correspondente utilizando transformação logarítmica é aditivo, mas a inspeção visual de Y_t (Figura 2) não revelou estabilização da série, com relação a X_t .

$$Y_t = \ln(X_t) = \ln(S_t \cdot e_t) = S_t^* + e_t^*$$

Assumindo que o modelo é aditivo, um teste paramétrico para tendência e/ou sazonalidade pode seguir os moldes de uma análise

de variância para experimentos em blocos aleatórios, porém este procedimento é restrito, pois neste caso não há aleatorização.

Como alternativa é sugerido o uso de testes não paramétricos, mais especificamente o das sequências ou o teste baseado no coeficiente de correlação de Spearman para tendência, ou ainda o teste de Friedman para sazonalidade.

Uma análise de variância, cujos resultados podem ser encontrados no esquema abaixo, foi realizada, desprezando-se os quatro últimos dados, no intuito de manter inalterado o número de observações para todos os meses, o que não interfere nas conclusões e simplifica a análise.

Caus.de Var.	GL	S. Quadr.	Quadr. Med.	F
Anos (tend.)	29	113642,30	3918,70	1,05
Meses (saz.)	11	1933433,30	17566,66	46,95**
Resíduos	319	1194294,50	3743,87	
Total	359	3241370,10		

De acordo com o esquema de análise, o efeito dos anos (tend.) não foi significativo, assim pode-se assumir a ausência de tendência, o mesmo não acontecendo com o efeito dos meses, que reflete a sazonalidade, pois este se revelou altamente significativo.

Alternativamente, a tendência foi testada baseada no coeficiente de correlação de Spearman com R, o posto de X, utilizando aproximação normal e correção para empates. A estatística de teste foi

fornecida por r_1^* .

$$r_1 = \frac{12 \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3n(n+1)^2}{\sqrt{[n(n^2-1) - v'] [n(n^2-1) - u']}} \quad (168)$$

onde

$$v' = \sum_{i=1}^g v_i(v_i^2-1) \quad \text{e} \quad u' = \sum_{j=1}^h u_j(u_j^2-1) \quad (169)$$

com g e h , os números de grupos de empates para X e S , v_i e u_j , os números de observações nos grupos i de X , e j de S .

A aproximação normal é dada por

$$r_1^* = r_1 \sqrt{n-1} \quad (170)$$

Um outro teste não paramétrico foi aplicado para sazonalidade através do procedimento de Friedman. Este teste por se tratar de uma extensão do teste bilateral do sinal, tem como vantagem a ausência de exigência de casualização nos blocos. Considerando $k=12$ situações distintas, tem-se

$$\chi^2_{k-1} = \frac{12}{nk(k-1)} \sum_{i=1}^k R_i^2 - 3n(k+1)$$

onde R_i são somas de postos, n é o número de anos = 30, e K o número de "tratamentos" = 12.

$$C = 1 - \frac{\sum_j T_j}{nk(k^2-1)}$$

onde $T_j = \sum_i t_{ij}^3 - k$

t_{ij} número de observações empatadas no i -ésimo grupo, do j -ésimo bloco.

Os resultados obtidos nos testes foram:

$$r_1 = \frac{12 \times 0.1246177 \times 10^8 - 3 \times 364 \times 365^2}{\sqrt{[364(364^2 - 1) - 9504][364(364^2 - 1)]}}$$

$$= 4060000/48223334 = 0.0841916$$

$$r_1^* = 0.0841916 \sqrt{363} = 1.604 \quad (171)$$

$$x_{11}^2 = \frac{12}{30 \times 12 \times 11} 541202,5 - 3 \times 30 \times 13 = 470,00750$$

$$x_{11}^{2'} = \frac{470,00750}{1 - \frac{\sum_j \bar{T}_j}{nk(k^2 - 1)}} = 470,66577^* \quad (172)$$

Novamente, o efeito dos anos foi não significativo, enquanto que se deu o contrário com o dos meses, notando-se apenas a presença de sazonalidade como efeito determinístico significativo.

A seguir, a inspeção da função de autocorrelação mostra, em sua forma, novamente a presença da sazonalidade e estas autocorrelações, para vários "lags", rejeitam a hipótese de aleatoriedade.

Como se pode notar no Quadro 3 e Figura 6, a correlação existente entre a variável observada e a mesma defasada de um "lag" é 0,5032 aproximadamente, ou seja, existe uma correlação desta ordem entre uma observação e outra imediatamente seguinte.

O valor desta autocorrelação, bem como para os "lags" 2,4,5,6,7 ... são significativamente diferentes de zero, pois se encontram fora da faixa $\pm 2/\sqrt{n} = \pm 2/\sqrt{364} \approx 0,104$, assim estes resultados não traduzem aleatoriedade.

Uma maneira prática de estudar a influência da sazonalidade na série é composta de observar a série livre deste efeito. Assim, através de diferenciações, sem estimar este componente, também se analisa o componente restante, no caso, aleatoriedade.

Porém este método poderá introduzir distorsões. Uma forma de visualizar este fato se baseia em estudar a série como um experimento em blocos, neste caso o efeito dos blocos não foi significativo, então o modelo foi reestruturado e a série diferenciada fornecida por (173) será estudada através de (174).

$$W_t = X_t - X_{t-s} = X_t - X_{t-12} \quad (173)$$

$$X_t = Y_{ij} = m + s_j + e_{ij} \quad (174)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2, \dots, 12$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 31 \quad n_5 = \dots = n_{12} = 30$$

Reescrevendo a série W_t

$$W_t = X_t - X_{t-s} = Y_{ij} - Y_{i',j} = e_{ij} - e_{i',j} \quad (175)$$

Se o modelo é fixo, parâmetros não correlacionados, ruídos independentes, de média nula e variância σ_e^2 , então a variância na série diferenciada é maior que em X_t , o que em certos casos tende a mascarar o

comportamento dos componentes restantes.

Examinando a função de autocorrelação de W_t (Figura 6), a hipótese de aleatoriedade foi rejeitada para diversos "lags", especialmente aqueles múltiplos ou próximos de múltiplos de $s = 12$.

As conclusões nesta fase, se resumem no esquema descritivo de componentes (VIII), com relação ao qual serão postuladas classes de modelos.

Componentes na série X_t

	T_t	S_t	e_t
baixa	X		
média			
alta		X	X

VIII

4.3. Ajuste dos Modelos

De acordo com a seção 3.1.5, deverão ser postuladas classes de modelos que se reportarão às apresentadas neste trabalho, com relação ao esquema (VIII), os modelos a serem utilizados devem ser do tipo sazonal e suportar grande aleatoriedade.

Neste sentido, seriam propostas apenas as classes de modelos suavizados e ARIMA, ambas sazonais, porém, envolvendo todas as classes descritas, seriam escolhidos os modelos NI e NII, os de autoregressão, métodos de decomposição, suavização sazonal aditiva e modelos SARIMA.

Objetivando apenas maior contato com os modelos, foram ajustados modelos em todas as subclasses apresentadas, ainda que por vezes não se tratem dos mais adequados.

Os resultados das estatísticas EQM, THEIL e Box-Pierce serão encontrados no Quadro 23. As primeiras foram calculadas para toda a série, enquanto que o χ^2 foi calculado para $k = 50$ autocorrelações, excetuando-se neste quadro o modelo de Box e Jenkins.

4.3.1. Modelos Naive

As previsões para NI foram computadas a partir de (176) resultando $\hat{X}_{365} = 37,5$. O modelo acompanha o comportamento da série, mas com defasagem de um "lag", o que é razoável em termos descritivos, porém pouco acurado em suas previsões.

$$\hat{X}_{t+1} = X_t \quad (176)$$

Como pode ser visto no Quadro 5, as autocorrelações dos resíduos do ajuste rejeitam a hipótese de aleatoriedade, as observações defasadas de um, dois,... e assim por diante, "lags" estão significativamente correlacionadas.

Foi realizado o teste χ^2 , com 49 graus de liberdade, cujo valor foi aproximadamente 473,32 que, da mesma forma que a análise da f.a.c., rejeitou a hipótese de aleatoriedade.

No caso NII, o ajuste foi fornecido por (177) e deveria ter fornecido os melhores resultados nesta classe, porém forneceu como

previsão, por exemplo, para $\hat{X}_{365} = -155,1$, o que é incompatível para um valor de precipitação pluvial. Este fato pode ser explicado pela discussão em 4.2.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t \quad t = 14, 15, \dots \quad (177)$$

onde

$$W_t = \nabla_{12} X_t, \quad \hat{W}_{t+1} = W_t$$

Com relação ao NIII, as previsões foram calculadas através de (178), a performance do modelo neste caso não poderia ser boa, ($\hat{X} = -458,1$) pois a série trabalhada não necessita de duas diferenciações para ser estabilizada, assim estará excessivamente diferenciada e com sua variância inflacionada.

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t \quad (178)$$

com

$$\hat{W}_{t+1} = W_t \quad \text{e} \quad W_t = \nabla_1 \nabla_{12} X_t$$

Quando NIII puder ser indicado, estará sujeito a distorções de modo similar à encontrada para NII. Especialmente para estes dois modelos não se recomenda o ajuste nas situações em que a série demonstre um componente aleatório pronunciado.

Embora a série seja sazonal, o modelo sazonal nesta classe não se mostrou eficiente, revelando-se melhor o NI, porém, conforme se notou anteriormente, seus resíduos não foram aleatórios, tampouco suas previsões muito acuradas.

4.3.2. Decomposição

O alisamento do tipo AHAHA... consiste em tomar medianas sucessivas de A termos em sequência, reduzindo desta forma a influência de valores extremos, e em seguida calcular médias móveis de A pontos, cujo resultado é chamado Hannização.

Neste procedimento existe a tentativa de evidenciar um padrão de comportamento, restringindo a variação proveniente da aleatoriedade, empregando-se em seguida modelos a critério do usuário.

A série considerada perde A-1 elementos iniciais e a mecânica de cálculo fornece um último valor que poderá ser considerado uma previsão.

Tomando a série $\tilde{X}_t$ alisada (Figura 4), aproximadamente livre de aleatoriedade, foram ajustados modelos N com $\tilde{X}_t$ obtido por alisamento 3H, as previsões para DNI foram calculadas através da expressão (179).

$$\hat{\tilde{X}}_{t+1} = \tilde{X}_t \quad (179)$$

Embora o suporte computacional utilizado no alisamento não tenha sido, por vezes considerado eficiente, o erro quadrático médio foi bastante inferior ao caso em que o modelo foi utilizado na ausência de alisamento.

Entretanto, ainda que o EQM tenha apresentado uma queda, não deixou de se mostrar grande a distância entre observações imediatamente seguintes, o que como em NI, acarretou grande variabilidade.

Mencionando a seguir a função de autocorrelação dos resíduos do ajuste (Figura 9), a hipótese de aleatoriedade novamente foi rejeitada para diversos "lags", assim a pequena acuracidade do método, aliada à quebra da aleatoriedade, não recomendam o uso do modelo.

A decomposição para NII e NIII, ou seja DNII e DNIII, novamente forneceu, como no caso dos modelos puros, previsões negativas, o que é justificado pela aleatoriedade não ter sido completamente eliminada pelo alisamento.

Os ajustes foram similares aos realizados em N, apenas trocando X_t por $\hat{X}_t$. As conclusões também não sofreram alterações diversificando apenas no grau de acuracidade, que se liga ao grau de regularidade dos processos X_t e $\hat{X}_t$.

Voltando a atenção para o método de decomposição por regressão, a série $\hat{X}_t$ foi expressa de acordo com (180), com seus componentes definidos conforme (181) e (182), assumindo $m = 0$, pois a série é destituída de tendência.

$$\hat{X}_t = T_t + S_t + e_t \quad (180)$$

$$T_t = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j \quad (181)$$

$$S_t = \sum_{j=1}^s \alpha_j d_{jt} \quad (182)$$

onde α_j , d_{jt} , β_j e t^j são conforme 3.5.2.

O modelo foi reestruturado na forma (70) e obtidas estimativas de mínimos quadrados dadas por (71), com auxílio da regressão

"stepwise" (pseudo) da linguagem STP, para o modelo do tipo

$$X = W\gamma + \epsilon \quad (183)$$

Para seleção de variáveis, foram consideradas técnicas de identificação semelhantes às dos modelos ARIMA com o emprego da f.a.c.i., e escolhidas variáveis que forneceram incrementos de até 10^{-1} no coeficiente de determinação. Resultados minuciosos com relação à estimação e testes se encontram no Quadro 15, onde as variáveis $i=3, \dots, 11$ correspondem a α_i , $i=2, \dots, 10$, obtendo-se $\hat{X}_{365} = 56,3$.

O teste F revelou que a regressão foi significativa, ($F_{9,\infty, 0,05} = 1,88$), embora o coeficiente de determinação não se mostre muito elevado.

Examinando a função de autocorrelação dos resíduos (Quadro 7), a hipótese de aleatoriedade foi rejeitada para os "lags" 23 e 38, o último, por uma margem pequena. Por outro lado, o teste de Box e Pierce não rejeitou a mesma hipótese.

4.3.3. Suavização

Os modelos de médias móveis lineares envolveram conjuntos de 2 a $n/2 = 182$ elementos para cálculo das médias, selecionando o que forneceu o menor EQM. Assim, foi escolhido o modelo de médias móveis linear com $r=14$ elementos e obtidas previsões baseadas em

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \quad (184)$$

$$\hat{a}_t = S'_t + (S'_t - S''_t)$$

$$\hat{b}_t = (2/13)(S'_t - S''_t)$$

onde

$$S'_t = (1/14) \sum_{i=t-13}^t x_t, \quad S''_t = \sum_{i=t-13}^t S'_t$$

Sua função de autocorrelação para os resíduos somente não rejeitou a hipótese de aleatoriedade para os "lags" $k = 3 + 6c, c=0,1,\dots$ e a estrutura dessa função denotou um comportamento periódico ; claramente não aleatório, conforme Quadro 8.

O comportamento do modelo foi explicado pela subestimação (super) dos valores reais de séries com tendência positiva (negativa), assim para séries sazonais este comportamento se alterna, refletindo-se também na f.a.c. conforme Figura 11.

Os modelos de suavização exponencial linear inicialmente foram ajustados tentativamente, com a constante de suavização variando a partir de zero, com passo 0,1 até um, escolhendo intervalos em que o EQM foi minimizado. Trocando a escala para 0,01 e novamente buscando o mínimo EQM, selecionando a constante de suavização de modo similar a uma busca binária.

Desta forma se determinou o valor $\alpha = 0,01$ e as previsões foram computadas através das equações

$$\begin{aligned}
S'_t &= 0,01X_t + 0,99S'_{t-1} \\
S''_t &= 0,01S'_t + 0,99S''_{t-1} \\
\hat{a}_t &= S'_t + (S'_t - S''_t) \\
\hat{b}_t &= (0,01/0,99) \cdot (S'_t - S''_t) \\
\hat{X}_{t+1} &= \hat{a}_t + \hat{b}_t
\end{aligned} \tag{185}$$

As conclusões para f.a.c. dos resíduos do ajuste desse modelo foram similares às obtidas para o modelo de médias móveis linear. Esse fato pode ser explicado pelos modelos serem (ambos) apropriados para os casos em que se detecta unicamente tendência como componente determinístico, logo seus comportamentos são similares, embora o de suavização SII costume se mostrar mais acurado.

Os modelos suavizados de Holt e/ou Winters forneceram conjuntamente resultados compatíveis, o modelo para suavização biparamétrica de Holt foi ajustado de acordo com as expressões (186). Os modelos a seguir usaram 250 observações iniciais para ajuste

$$\begin{aligned}
\bar{X}_t &= 0,795X_t + 0,205(\bar{X}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \\
\hat{T}_t &= \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1} \\
\hat{X}_{t+1} &= \bar{X}_t + \hat{T}_t
\end{aligned} \tag{186}$$

Para o ajuste dos modelos SIII, o problema é determinar as constantes de suavização, o método foi similar ao utilizado para SII, com passo inicial 0,1. Porém, para os modelos de Holt e Winters, não se buscam constantes que minimizem certas estatísticas, mas vetores de constantes que o façam conjuntamente.

Serão apresentados os modelos ajustados sazonais aditivo e multiplicativo de Holt e Winters, e discutidos a seguir conjuntamente, por comporem métodos de suavização semelhantes. O modelo aditivo, recaiu nas expressões abaixo, para $t > 12$, obtendo-se $\hat{X}_{365}=50,2$.

$$\begin{aligned}\hat{T}_t &= \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1} \\ \bar{X}_t &= X_t - \hat{C}_{t-12} \\ \hat{C}_t &= 0,1655556(X_t - \bar{X}_t) + 0,8344444\hat{C}_{t-12} \\ \hat{X}_{t+1} &= (X_t + \hat{T}_t) + \hat{C}_{t-11}\end{aligned}\quad (187)$$

No que concerne ao ajuste do modelo multiplicativo, este foi obtido a partir de

$$\begin{aligned}\hat{T}_t &= \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1} \\ \bar{X}_t &= X_t / \hat{C}_{t-12} \\ \hat{C}_t &= 0,4506979(X_t / \bar{X}_t) + 0,5493021\hat{C}_{t-12} \\ \hat{X}_{t+1} &= (\bar{X}_t + \hat{T}_t) \hat{C}_{t-11}\end{aligned}\quad (188)$$

O ajuste do modelo de Holt, com relação à expressão (98) relativa à tendência, apresentou apenas uma estimativa de nível, o mesmo acontecendo com os demais modelos SIII, pois o componente de tendência não se encontra presente na série.

No que concerne à função de autocorrelação dos resíduos destes modelos, de acordo com o Quadro 9, esta rejeitou a hipótese de aleatoriedade. Para SIIIa observou-se um comportamento periódico, na forma de sequências de seis valores de mesmo sinal. O modelo multiplicativo também rejeitou a hipótese nula apresentando um comportamento

bastante interessante.

A partir do "lag" 6, até 42, com exceção do "lag" 9 todas as autocorrelações foram negativas, e positivas as demais, assim, houve uma grande concentração de valores negativos no centro dos 50 valores estimados, o que mais uma vez demonstra que a hipótese do modelo multiplicativo não é válida.

Com relação ao modelo aditivo, a análise da f.a.c. também rejeitou a hipótese de aleatoriedade (Figura 12), porém o mesmo não aconteceu quando se usou a estatística de Box e Pierce, o valor de χ^2 não foi significativo ao nível $\alpha = 0,05$ ($\chi^2_{47} \approx 63,981$ por extrapolação linear), conforme Quadro 23.

4.3.4. Auto-regressão

Foi utilizado o método adaptativo de MAKRIDAKIS bem como o programa proposto por este autor com pequenas alterações. Não se notou comportamento periódico na f.a.c. tão acentuado como nos métodos suavizados, porém, novamente a hipótese de aleatoriedade dos resíduos do ajuste foi rejeitada.

Uma forma de determinar a ordem das auto-regressões tanto no método adaptativo quanto no de regressão, se baseou na f.a.c.i., que de modo similar à f.a.c.p. identifica modelos auto-regressivos.

Tentando evitar a superparametrização dos modelos, fixou-se um máximo de doze (12) variáveis independentes, com relação às quais foram ajustados os modelos, de conformidade com o Quadro 15.

O método de regressão múltipla, para o ajuste do modelo de auto-regressão, serviu-se de um programa de regressão para estimar os parâmetros através da técnica "stepwise" (pseudo), com os mesmos critérios que a decomposição por regressão.

O ajuste obtido para a regressão (Quadro 15), foi fornecido por (189) com $F_{4,347} = 14,35460$, altamente significativo ($F_{4,\infty,0,05} = 2,37$), enquanto que a equação (190) foi empregada para o cálculo de previsões pelo método adaptativo.

$$\begin{aligned}\hat{\bar{X}}_{t+1} &= \sum_{j=1}^{12} b_j \tilde{\bar{X}}_{t+1-j} + m \\ \tilde{\bar{X}}_{t+1-j} &= \begin{cases} \bar{X}_{t+1-j} & , 1 - j > 0 \\ X_{t+1-j} & , 1 - j \leq 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (189)$$

onde

$$m = 92,95611$$

$$b_1 = 0,2596333$$

$$b_4 = -0,1586610$$

$$b_6 = -0,2407007$$

$$b_{12} = 0,285110$$

os coeficientes restantes foram considerados nulos, então $\hat{X}_{365} = 88,30$.

A equação obtida para o método de MAKRIDAKIS foi fornecida por (190), resultando $\hat{X}_{365} = 29,76$.

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{t+1} = & 0,220249X_t + 0,0859688X_{t-1} + 0,104885X_{t-2} - 0,0681206X_{t-3} + \\
& + 0,0493847X_{t-4} - 0,103052X_{t-5} - 0,015258X_{t-6} + \\
& + 0,0376203X_{t-7} + 0,134141X_{t-8} + 0,0303247X_{t-9} + \\
& + 0,209395X_{t-10} + 0,340735X_{t-11}
\end{aligned} \tag{190}$$

4.3.5. Modelos de Box e Jenkins

Mediante o emprego do programa TSERIES se procedeu a identificação do modelo. Conforme as conclusões da fase de familiarização, houve a necessidade de "estacionarizar" a série, utilizando-se então diferenciações de ordem 12 (doze), tendo sido suficiente uma única diferenciação. Empregou-se os últimos 300 dados no ajuste.

Em seguida, retomando o processo de identificação através da série diferenciada com respeito à sazonalidade, foram identificados modelos sazonais ARMA (24,0) e ARMA (0,23), além do modelo misto, através do exame das funções de autocorrelação (Quadro 3) e autocorrelação parcial, conforme Quadro 12.

A fase de estimação se desenvolveu de modo similar a uma regressão "forward", iniciando-se o processo através de um ARMA (0,12) sazonal, desta forma tomou-se em conta inicialmente problemas provenientes da diferenciação.

Após a inclusão do primeiro parâmetro no modelo, houve, de acordo com a f.a.c.p., a necessidade de incluir uma parte auto-regressiva no modelo, que não havia sido identificada inicialmente, relativa ao

"lag" 9 (nove) após a utilização de MA(12).

Posteriormente foi incluído um novo fator autoregressivo, de modo que o modelo final foi SARMA (23,12), mais explicitamente expresso no Quadro 22. Foi obtido $\hat{X}_{365} = 40,7$, podendo variar de zero a 159,4 para $\alpha = 0,05$.

O modelo ajustado é fornecido a seguir

$$(1 - 0,1618B^9 - 0,2256B^{23})(1 - B^{12})X_t = (1 + 0,8926B^{23})e_t$$

O AIC foi calculado de acordo com (191), visto ser utilizado apenas no intuito comparativo, com $d = 12$.

$$AIC = n \ln \hat{\sigma}_e^2 + 2(p+q+1+\delta_{do})[n/(n-d)] \quad (191)$$

i.e.

$$AIC = 300 \ln \hat{\sigma}_e^2 + 2(p+q+1) [300/288]$$

4.4. Comparação, Melhora e Misturas

Como se pode verificar (Quadro 23), os modelos que obtiveram melhor performance dentro de cada classe foram os inicialmente sugeridos, pois se tratavam daqueles apropriados à série em questão, em sua maioria.

Comparando então os modelos inicialmente sugeridos, excetuando-se os modelos de Box e Jenkins, o modelo suavizado se mostrou melhor que os de decomposição, regressão e naive. No que se refere à f. a.c. dos resíduos, a hipótese de aleatoriedade não foi rejeitada pela estatística de Box-Pierce, o mesmo não sucedeu com outros testes de

autocorrelação.

De modo similar, o χ^2 de Box-Pierce também não rejeitou a hipótese de aleatoriedade no modelo de decomposição por regressão, porém novamente a análise da f.a.c. trouxe conclusões discordantes.

Foram selecionados os modelos NI, SIIb, DR, RFA e de Box e Jenkins. Estes modelos, à exceção do modelo SARMA, apresentaram os mínimos EQM e THEIL, dentro das suas classes,

$$\text{THEIL} = \frac{\sum_t (X_{t+h} - \bar{X}_{t+h})^2}{\sum_t (X_t - X_{t-1})^2} \quad (192)$$

conforme Quadro 23, com medidas calculadas para toda a série disponível.

A melhora das previsões, realizada com 37 (trinta e sete) elementos de acordo com Quadro 17, não apresentou o efeito desejado para os modelos de decomposição e suavização, seus EQM's foram inflacionados após a aplicação das modificações A e B, enquanto que os restantes apresentaram melhoras apenas razoáveis, à exceção do modelo Naive.

Com relação às misturas de previsões, os modelos de Box e Jenkins juntamente ao suavizado, apresentaram a melhor performance, para um valor $\alpha = 0,5271822$, seguido das misturas: BJ-RFA, BJ-DR, SIIc-RFA e RFA-DR, conforme Quadro 19.

Os resultados obtidos nesta fase poderão ser encontrados no Quadro 17, em que foram utilizadas 37 previsões, ou alternativamente, no Quadro 18 onde os modelos são considerados em 100 previsões, excetuando-se o de Box e Jenkins, novamente com 37 previsões.

4.5. SNR e ARSE

Foram calculadas as medidas ARSE e SNR, para as séries propostas, incluindo-se também a série mensal de Pindorama, com os últimos 114 dados de precipitação pluvial, apenas.

Para as séries econômicas, os melhores modelos ajustados haviam sido em sua maioria de auto-regressão do tipo regressivo, de ordem 15. Alguns profissionais são da opinião de que se deve testar as medidas com ordem $n/3$, note-se que os modelos ajustados foram desta ordem.

Porém, por vezes tal ordem é excessiva, então com intuito comparativo, deve-se observar os resultados do Quadro 20 para a série (6), quando se calculou SNR e ARSE para as ordens 9 e 15 (nove e quinze).

Para a série climatológica, os coeficientes SNR e ARSE, mostraram-se inferiores a 1 (um), significando que a contribuição dos resíduos do ajuste do modelo RAR(23) comparados com a série observada foi pequena, enquanto que os ruídos obtidos através de suavização exponencial se revelaram ligeiramente inferiores aos fornecidos pela auto-regressão.

5. DISCUSSÃO

De modo geral, os modelos que apresentaram maior acuracidade de previsão, conforme Quadro 23, e melhor desempenho no que se refere à f.a.c. residual, foram os de Box e Jenkins e o modelo sazonal aditivo de Holt e Winters. Enquanto que o último não apresentou aleatoriedade nas autocorrelações, não se pode dizer que o modelo ARMA sazonal tenha se mostrado muito prático.

Ao mesmo tempo que as autocorrelações para o modelo suavizado não foram aleatórias (Quadro 9), o modelo acompanhou razoavelmente o desenvolvimento da série (Figura 16), mostrou-se também bastante prático computacionalmente e intuitivamente lógico.

O único modelo a não apresentar violações nas restrições, o modelo ARMA ajustado (Quadro 22), foi de difícil interpretação, não é desejável do ponto de vista prático, um modelo que relacione observações atuais, com observações defasadas de 9 e 23 "lags".

A parte de médias móveis que constou do modelo, foi justificada através de possíveis distorções de diferenciação, que podem ser explicadas pelo excesso de aleatoriedade, assim este fator corrige tais alterações e colabora na remoção de sazonalidade.

Por outro lado, do ponto de vista climatológico, não existem razões que justifiquem o modelo empregado, principalmente envolvendo relações para o "lag" 23, quando se supõe que o efeito sazonal foi tratado.

No que se refere ao critério utilizado para determinar a ordem do modelo (Quadro 22), mínimo AIC, este na verdade não especifica a ordem exata, porém tenta estabelecer um consenso de modo a que sejam obtidas pequenas variâncias com poucos parâmetros a serem estimados.

Em casos como escolha entre os modelos:

$$(1 - \phi_9 B^9 - \phi_{23} B^{23}) X_t = (1 + \theta_{12} B^{12}) e_t$$

e

$$(1 - B^{12}) X_t = (1 + \theta_9 B^9 + \theta_{12} B^{12} + \theta_{23} B^{23}) e_t$$

ambos os modelos tem mesmo número de parâmetros, f.a.c. aleatória para seus resíduos, e variâncias muito próximas, o que torna difícil escolher o melhor modelo.

Durante a fase inicial de identificação dos modelos, não houve evidências da necessidade de inclusão de parâmetros relativos ao "lag" 9 (nove) mediante a utilização da f.a.c. e f.a.c.p., este fato apenas surgiu após a estimação do primeiro parâmetro do modelo.

Porém, a f.a.c.i. (Quadro 4) rejeitava a hipótese de aleatoriedade para este "lag" sugerindo um componente auto-regressivo. Desta forma, embora se possa pensar que a inclusão de parâmetros no modelo haja motivado a necessidade deste parâmetro, apenas as funções f.a.c. e f.a.c.p. (Quadro 3 e Figura 12) não detectaram a não aleatoriedade para este "lag".

Deve-se ressaltar que as estimativas da f.a.c. e f.a.c.p. são de grandes variâncias para elevados valores de p , o que pode mascarar valores estimados (como "lag" 9) e dificultar a compreensão do comportamento da série e construção de modelos.

Outro problema na construção dos modelos deste tipo (ARIMA) é a interpretação das funções de autocorrelação no decorrer do ajuste. Após a identificação da série diferenciada, foram notadas autocorrelações significativas (Quadro 12), que pareciam sugerir inclusões de parâmetros, como por exemplo o "lag" 11 (onze), que deixaram de rejeitar aleatoriedade depois de incluídos parâmetros no modelo (Quadro 14) nem sempre referentes a estes "lags".

Desta forma, procurou-se incluir parâmetros um a um no modelo, obedecendo não somente a não aleatoriedade das autocorrelações, mas procurando levar em conta possíveis distorções.

Por outro lado, não são possíveis comparações entre a f.a.c. empírica obtida e a f.a.c. teórica para o modelo em questão, pois a última não é conhecida, este fator tornou extremamente difícil a fase de identificação do modelo.

A estatística de Box-Pierce neste modelo não rejeitou a hipótese de aleatoriedade (Quadro 22), da mesma forma que para o suavizado (Quadro 23), mas esta estatística não é consistente. Deve-se notar que este χ^2 somente considera a magnitude das autocorrelações, assim não rejeita a hipótese nula quando, por exemplo, as autocorrelações são pequenas, porém, apresentam comportamento periódico.

Por este motivo, preferiu-se utilizar análises mais rigorosas das funções de autocorrelação dos resíduos dos ajustes, a simplesmente verificar a estatística de Box-Pierce. Desta forma foi possível observar que, em vários casos, enquanto a f.a.c. não se mostrava aleatória, trazendo informações quanto a modificações no modelo, a estatística χ^2 não rejeitou aleatoriedade.

No intuito de evitar a superparametrização dos modelos, e na verdade, mantê-los dentro de padrões empregados em climatologia, foram fixadas 12 variáveis independentes como limite máximo para os modelos auto-regressivos.

Embora estes critérios pareçam lógicos, o modelo de regressão auto-regressivo ajustado, forneceu aleatoriedade através do χ^2 (Quadro 23), ao passo que o estudo da f.a.c. residual, revelou não aleatoriedade para o passo 23 (Quadro 10), mostrando que deveria ser utilizado um componente auto-regressivo da mesma forma que o modelo ARMA ajustado.

Entretanto, novamente, um modelo deste tipo não encontraria justificativas do ponto de vista climatológico, embora provavelmente

os resíduos do ajuste sofressem alguma melhora caso este parâmetro fosse incluído no modelo.

É interessante notar que, de acordo com o Quadro 23, pouca diferença foi detectada entre os modelos autoregressivos, isto porque não existem mudanças no padrão de desenvolvimento da série, o que teoricamente, no caso contrário, tornaria o modelo adaptativo bastante superior ao modelo de regressão.

No que concerne aos métodos de decomposição, a decomposição por regressão obteve uma performance razoável, isto porque os métodos de regressão costumam ser ótimos para sazonalidade determinística, apenas não se mostrando mais acurado neste caso, pelo excesso de aleatoriedade na série.

Apesar de haver sido usado uma única vez o processo de Hannização, e da pequena eficiência computacional da técnica utilizada, os resultados do método de decomposição através desta técnica filtraram parte dos ruídos, considerando que modelos pouco acurados conforme Quadro 23, sofreram razoável melhora, pois a série em questão é bastante aleatória.

Assim, é possível usar este procedimento até que se obtenha um comportamento menos regular, ou seja, continuar a Hannização chegando à obtenção de séries suficientemente "lisas", empregando a seguir o(s) modelo(s) desejado(s).

Realmente, a classe dos modelos Naive não forneceu resultados satisfatórios, porém o exame da f.a.c. residual para NII, constante

do Quadro 5, demonstra claramente distorsões de diferenciação, fortes efeitos aleatórios, de modo a fornecer indícios da necessidade de componentes de médias móveis (MA).

Por outro lado, o resultado do EQM de acordo com o Quadro 23, no ajuste para NI, mostra que cada observação se encontra bastante distante daquela imediatamente anterior, o que mais uma vez leva à presença de grandes variâncias nos dados. Assim, a quantidade de informações que os ajustes N carregam, justificam seu emprego.

Houveram mudanças nos erros quadráticos médios, quando calculados para toda a série ajustada, e para apenas as últimas previsões. Isto porque os modelos de Holt e Winters usam uma parte da série para o ajuste e a seguinte para previsões. O modelo adaptativo adapta os parâmetros ao longo do tempo, o que ocasiona algumas alterações, porém não são significativas a ponto de alterar comparativamente a performance dos modelos, de modo geral.

Com relação a aspectos computacionais, os métodos de regressão exigem que se possa dispor de programas adequados, o mesmo acontecendo com o de Box e Jenkins.

Conforme foi anteriormente mencionado, utilizou-se o STP para regressões, porém, em geral, os ajustes obtidos através deste programa nem sempre são razoáveis, devendo-se preferir, quando existirem condições, usar a regressão do SAS, que fornece melhores resultados.

Os modelos restantes não exigem programas sofisticados, podendo o usuário desenvolver seus próprios programas, de acordo com os

recursos de que disponha. De modo geral, os modelos suavizados de Holt e/ou Winters se mostram razoavelmente acurados, a um custo computacional, relativamente baixo, e de fácil programação.

O programa empregado para ajuste de modelos ARIMA, T SERIES, trabalha em três fases: identificação, estimação e previsão. A etapa de estimação se estende, pois são ajustados diversos modelos tentativamente.

Desta forma, à medida que o modelo se torna sofisticado, o custo do ajuste cresce, aumentando consideravelmente na fase de estimação; as demais, identificação e previsão, praticamente não se alteram.

No sentido da previsão obtida com relação ao comportamento do modelo, alguns comentários foram realizados no decorrer da aplicação, porém, é necessário algumas informações no caso de aumentar o horizonte de previsão (h). Serão então analisados os desenvolvimentos de alguns modelos, como exemplos.

Caso o modelo NI seja utilizado, fornecerá como previsão o último valor observado, então, para grandes valores de h , se obtém uma estimativa do nível atual da série, i.e., uma reta paralela ao eixo dos tempos, o que não será eficiente em séries com componentes determinísticos.

Os modelos suavizados tentam estabelecer um padrão de comportamento reduzindo o ruído, desta forma haverá um "achatamento" dos dados, e as previsões serão norteadas pelos componentes determinísticos.

De modo similar acontece com as técnicas de decomposição para aleatoriedade que pretendem eliminar ruído, enquanto que a decomposição por regressão mostrará desempenho razoável, isto porque a série é composta por sazonalidade determinística, apenas sendo prejudicado pelo excesso de variabilidade nos dados, que se reflete nos parâmetros ajustados.

Assim, para modelos que de alguma forma trabalhem com regressão, seria aconselhável utilizar técnicas de regressão robusta, porém não foram encontrados na literatura os desenvolvimentos destas técnicas aplicadas a modelos de séries temporais.

Os modelos ARIMA, para grandes valores de h , interferem no componente sazonal fornecendo resultados cada vez menos influenciados por este componente e mais próximos à tendência.

Deve-se então ressaltar, que o problema de obtenção de previsões para grandes horizontes mesmo em modelos de séries temporais, é difícil, dependendo principalmente da acuracidade do modelo.

Além de, por vezes, o modelo perder a influência de certos componentes, gradativamente ao longo do tempo, (como ARIMA - sazonalidade) os intervalos de confiança, quando possível construí-los, tem sua amplitude inflacionada.

Conforme apresentado na seção 3.1.2, e de acordo com as conclusões obtidas, o componente de aleatoriedade é de grande importância, tornando mais difícil a obtenção de previsões à medida que aumenta o grau de regularidade.

Desta forma, embora a primeira vista possa parecer menos razoável prever séries econômicas, as flutuações que nestas podem ser encontradas nem sempre atingem graus de regularidade extremamente pronunciados.

Nesta área, as flutuações não são excessivamente drásticas, existindo condições (como de mercado), que tem efeito prolongado e que mantêm uma forte estrutura de autocorrelações.

O mais comum neste setor, são mudanças de comportamento, que podem ser tratadas através de modelos específicos ou particionando-se a série, ou então apenas revelam mudanças de nível, admitindo o mesmo comportamento em toda sua extensão.

Porém, em climatologia, os fenômenos não apresentam um desenvolvimento rígido, flutuações extremas acontecem frequentemente, tornando mais difícil a realização do controle.

No sentido das medidas apresentadas, que tentam fornecer informações para tomadas de decisão anteriores ao ajuste de quaisquer modelos, foi observada uma eficiência razoável.

Com relação aos resultados obtidos (Quadro 20), baseados particularmente na série (6), foi verificada uma drástica variação quando se alterou o valor de p .

É claro que a medida que se amplia o número de parâmetros auto-regressivo no modelo, este tenderá a fornecer melhores estimativas, reduzindo os ruídos quando se trabalha a contento, verificou-se que $SNR \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow n/2$.

Porém, surgirá o problema da superparametrização, além de que se corre o risco de descartar um modelo suavizado razoável, optando por um autoregressivo que nem sempre será compatível.

No caso da série de Pindorama, poderia ser descartada a hipótese de modelos suavizados, em favor do regressivo.

Quando foi trabalhada a série climatológica, mesmo com a série diferenciada, os modelos SI e SII não se mostraram razoáveis, mesmo comparados apenas ao RAR.

É, portanto, bastante estranho dizer que o modelo de suavização exponencial possa ser melhor ou quase equiparado ao modelo autoregressivo (embora o modelo RAR escolhido para cálculo das medidas seja de ordem 23, maior que o utilizado). Assim, este resultado contraria os anteriormente obtidos.

Parece então, que a aproximação do modelo suavizado por um AR(1) não foi satisfatória, e ainda, se a decisão fosse baseada no ARSE, teria sido escolhido o modelo SI ou SII, em detrimento do de autoregressão, o que não seria acertado. O último se revelou melhor, além de que os modelos SI e SII não são aconselháveis no caso.

Ainda, esta medida (ARSE) não possibilita que se empreguem modelos de Holt e Winters, pois não fazem parte da comparação, possíveis modificações implicariam no ajuste do modelo que fosse indicado em cada caso, recaindo então no sistema preditivo proposto em 3.1.5.

Por outro lado, o ARSE e SNR, para as séries 8 e de Pin-dorama foram bastante pequenos, o que pode ser também explicado pela influência de sazonalidade.

A medida que os efeitos sazonais se tornam mais fortes, maior importância terão no modelo, e maiores serão as autocorrelações na série.

Caso seja utilizado o SNR neste tipo de série se deve considerar

$$\Phi(B)X_t = d + \Theta(B)e_t$$

assim, ajustar modelos autoregressivos à série $X_t - d$, onde d reflete a parte determinística.

6. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos permitem as seguintes conclusões:

a) quando o processo de familiarização revela baixa aleatoriedade na série, a performance dos modelos será razoável, porém ao se notar excessivo grau de regularidade, as previsões nem sempre serão suficientemente acuradas;

b) o modelo que obteve melhor desempenho foi o de Box e Jenkins (ARMA) e após o cálculo de previsões modificadas foi reduzido o EQM, embora pareça estranho relacionar uma observação e outra defasada de vinte e três "lags";

c) excetuando-se o modelo ARMA, o melhor dentre os estudados neste trabalho foi o de suavização sazonal aditivo de Holt e Winters;

d) os modelos Naive não se mostraram acurados, porém devem ser utilizados como complementação da fase de familiarização;

e) a técnica de alisamento AHAH... se revelou eficiente, devendo-se prosseguir a Hannização quando se objetiva eliminar maior grau de aleatoriedade na série.

f) os modelos de auto-regressão mostraram desempenho apenas razoável, enquanto que a decomposição por regressão não se mostrou eficiente pelo excesso de variabilidade nos dados;

g) a modificação e misturas não surtiram efeitos drásticos com relação ao uso dos modelos;

h) recomenda-se o valor de p , fornecido pelas autocorrelações, para o ajuste do modelo auto-regressivo no cálculo de ARSE e SNR, porém existem dificuldades em determinar valores limites para estas medidas em tomadas de decisão.

Quadro 1. Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP, janeiro,50/abril,81

362.000000	248.600000	301.200000	107.800000	42.700000	23.900000
230.800000	35.300000	103.800000	70.100000	54.300000	49.300000
130.100000	96.800000	96.800000	0.000000	131.200000	114.500000
37.700000	81.100000	121.000000	1.700000	48.300000	142.900000
42.100000	83.000000	0.000000	15.000000	7.500000	112.500000
17.700000	67.200000	0.000000	55.900000	43.900000	151.900000
0.000000	57.000000	8.000000	162.100000	78.200000	147.800000
30.000000	91.000000	1.700000	96.700000	65.700000	203.300000
8.000000	141.700000	93.300000	206.700000	21.500000	45.500000
103.400000	37.500000	144.400000	276.300000	282.200000	165.300000
70.700000	189.100000	235.000000	274.300000	286.200000	147.200000
159.700000	264.900000	215.900000	283.200000	170.800000	20.300000
200.500000	212.700000	158.400000	16.400000	72.700000	75.200000
217.100000	152.200000	208.200000	0.000000	55.000000	0.000000
254.700000	135.700000	11.360000	58.300000	0.000000	36.700000
20.500000	49.400000	8.700000	2.300000	109.100000	90.900000
-0.000000	14.900000	71.900000	0.600000	58.500000	63.500000
39.400000	125.800000	7.100000	88.500000	61.300000	162.400000
0.000000	0.000000	15.100000	131.000000	203.700000	309.100000
0.000000	70.200000	39.100000	196.400000	101.700000	234.100000
12.300000	157.000000	212.100000	210.200000	172.200000	190.100000
203.700000	39.300000	31.900000	123.300000	148.100000	167.300000
130.100000	118.400000	260.400000	81.300000	49.000000	4.800000
32.000000	225.500000	428.400000	75.500000	178.100000	115.700000
141.000000	204.000000	204.000000	25.900000	134.000000	18.200000
126.000000	164.100000	73.400000	3.500000	52.300000	76.800000
106.400000	79.900000	38.700000	21.200000	25.800000	0.300000
38.100000	155.200000	79.600000	3.700000	27.200000	79.000000
25.400000	72.400000	0.000000	60.100000	3.600000	85.700000
26.100000	23.900000	0.000000	48.800000	27.300000	148.000000
15.300000	5.400000	7.100000	121.900000	130.300000	449.900000
10.000000	63.200000	5.900000	91.900000	86.300000	141.100000
54.800000	149.000000	71.200000	144.700000	362.300000	173.200000
69.500000	98.000000	113.500000	74.800000	242.700000	138.300000
98.300000	156.300000	96.200000	184.700000	163.900000	73.700000
282.000000	272.100000	252.500000	93.600000	292.200000	67.700000
189.300000	195.100000	353.800000	80.900000	27.900000	0.000000
264.200000	135.900000	128.200000	10.800000	15.300000	15.500000
149.100000	35.400000	14.300000	24.700000	50.000000	27.700000
24.300000	11.800000	52.300000	6.700000	0.000000	156.600000
246.000000	28.500000	19.100000	5.200000	0.100000	111.700000
80.000000	1.000000	48.000000	24.600000	28.700000	212.800000
0.000000	43.300000	7.500000	157.000000	106.000000	355.600000
0.000000	25.700000	41.300000	235.800000	48.100000	239.600000
21.200000	163.900000	124.900000	118.100000	310.700000	201.400000
55.100000	113.900000	114.900000	257.500000	166.100000	129.300000
75.000000	111.400000	373.100000	291.700000	170.500000	231.000000
163.300000	242.200000	247.100000	109.300000	60.700000	38.400000
233.300000	363.100000	379.000000	34.800000	74.000000	73.500000
84.500000	49.900000	200.300000	24.900000	4.200000	0.000000
247.700000	21.100000	43.400000	49.900000	0.000000	15.300000
45.300000	68.700000	44.900000	16.900000	25.400000	75.500000
24.000000	53.900000	9.500000	65.500000	0.000000	54.700000
16.300000	1.000000	49.900000	96.300000	116.900000	164.900000
0.000000	14.000000	7.500000	138.200000	165.500000	252.100000
30.000000	1.000000	75.600000	109.800000	261.500000	219.400000
1.000000	131.800000	75.700000	167.200000	268.500000	156.300000
73.300000	265.300000	154.000000	167.600000	165.100000	238.800000
78.400000	142.500000	320.200000	126.900000	264.900000	37.500000
255.500000	381.000000	249.800000	157.600000	209.000000	37.500000
127.100000		144.500000	157.600000	77.900000	
		111.200000		124.700000

Figura 1. Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP, a partir de $t = 251$

Figura 2. Série de Logarítmos de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP, a partir de jan./71. Obs.- as observações entre 0 e 1 foram aproximadas para 1 (um)

Figura 3. série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP com diferenças $\nabla_{12,a}$ partir de $t = 251$

Figura 4. Série de Precipitações Pluviais Mensais no Município de Pindorama-SP e Série Alisada, a partir de t= 251

Quadro 2. Teste de Aditividade - Resultados Obtidos

$\hat{T}_i$	$\hat{S}_i$
89,61597	-28,98264
86,62083	6,020833
86,05417	0,1291656
105,3184	-4,426737
84,41563	6,334375
111,8510	-7,167708
122,8507	8,232638
110,1333	-5,833333
98,46736	-3,675695
118,1403	-5,265278
121,2139	12,72778
108,6392	-5,330903
93,83021	-7,296875
117,5344	9,973958
128,2948	5,530208
117,8535	-10,44514
107,0049	19,39514
73,44340	-9,085070
91,11146	-5,953125
100,8611	7,663889
101,9212	-13,44618
116,6340	14,48264
106,9045	-3,804514
103,9458	3,187500
110,2410	-0,4743061
133,4156	-0,9989579
110,4010	-0,3927088
121,8198	9,105208
131,1851	-6,443403
140,3569	12,85972

Figura 5. Teste de Aditividade

Quadro 3. Funções de Autocorrelação - Série Observada e Série Diferenciada

X_t	W_t	K
1,0000	1,0000	0
0,5032	0,0687	1
0,2588	0,0177	2
0,0184	0,0756	3
- 0,2886	- 0,0494	4
- 0,4565	- 0,0013	5
- 0,5517	0,0015	6
- 0,4447	0,0278	7
- 0,2789	0,0185	8
0,0231	0,0329	9
0,2461	0,0374	10
0,4524	- 0,1292	11
0,5687	- 0,5390	12
0,4712	- 0,0528	13
0,2347	- 0,0925	14
- 0,0434	- 0,1148	15
- 0,0268	0,0693	16
- 0,4476	- 0,0217	17
- 0,5292	- 0,0178	18
- 0,4371	0,0046	19
- 0,2688	- 0,0382	20
0,0045	- 0,0174	21
0,2137	- 0,0563	22
0,4986	0,1522	23
0,5847	0,0855	24
0,4645	0,0912	25
0,2722	0,1749	26
- 0,0252	0,0348	27
- 0,2716	- 0,0505	28
- 0,4295	0,0122	29
- 0,5061	- 0,0126	30
- 0,4373	- 0,0491	31
- 0,2399	0,0514	32
- 0,0122	- 0,0358	33
0,2247	- 0,0034	34
0,4394	- 0,0571	35
0,5345	- 0,0814	36
0,4003	- 0,1040	37
0,1864	- 0,1841	38
- 0,0318	0,0022	39
- 0,2447	- 0,0021	40
- 0,4185	- 0,0404	41
- 0,4648	0,0463	42
- 0,3941	0,0537	43
- 0,2376	- 0,0235	44
0,0213	0,0564	45
0,2349	0,0344	46
0,4162	- 0,0512	47
0,5478	0,1286	48
0,4186	0,0828	49
0,2415	0,1177	50

Figura 6. Funções de Autocorrelação - Série Observada, Logarítmos e Diferenciada

Quadro 4. Função de Autocorrelação Inversa - Série Observada e Série Diferenciada.

X_t	W_t
- 0,1223	- 0,1178
0,0116	0,0842
- 0,1116	- 0,1224
0,0970	0,1056
- 0,0275	- 0,0538
0,0905	0,6373
- 0,0351	- 0,0545
0,0565	0,0800
- 0,1247	- 0,1323
0,0523	0,0770
0,0055	- 0,0969
- 0,0244	0,6538
- 0,0880	- 0,1016
0,0277	0,0538
0,0399	0,0583
0,0077	0,0901
- 0,0122	- 0,0246
0,0453	0,1059
- 0,0356	- 0,0292
0,0487	0,0575
- 0,0411	- 0,0769
0,1137	0,0893
- 0,0940	- 0,0901
- 0,1019	0,3490
- 0,0618	- 0,0688
- 0,0327	0,0065
0,0267	- 0,0231
0,0416	0,0538
- 0,0267	- 0,0073
0,0087	0,0427
0,0031	0,0053
0,0042	0,0194
0,0059	- 0,0160
0,0228	0,0412
- 0,0139	- 0,0353
- 0,0775	0,1370
0,0498	- 0,0198
0,0659	0,0260
0,0195	- 0,0048
- 0,0260	0,0165

Figura 7. Funções de Autocorrelação Inversa - Série Observada e Diferenciada

Quadro 5. Modelos Naive - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes

I	II	III	K
1,0000	1,0000	1,0000	0
- 0,5019	- 0,3529	- 0,6764	1
0,0779	0,1100	0,1853	2
0,0764	0,1211	0,1254	3
- 0,2727	- 0,2794	- 0,2773	4
0,1670	- 0,0032	0,2411	5
- 0,0896	- 0,1765	- 0,1392	6
0,0659	- 0,0438	0,0734	7
- 0,0128	- 0,2160	- 0,0613	8
0,1041	0,2315	0,1015	9
- 0,0997	- 0,1066	- 0,1566	10
0,2031	0,0998	0,2656	11
- 0,3427	0,2960	- 0,2940	12
0,0506	- 0,0747	0,0871	13
0,0479	0,1452	0,1602	14
- 0,2331	- 0,0389	- 0,2889	15
0,2891	0,0007	0,3042	16
- 0,1539	- 0,1821	- 0,2166	17
0,0785	- 0,3583	0,1389	18
- 0,1157	- 0,1821	- 0,1161	19
0,0521	- 0,0915	0,0565	20
0,0608	0,1608	0,0862	21
- 0,2087	- 0,1412	- 0,2716	22
0,3306	0,2255	0,3624	23
- 0,2185	0,1403	- 0,2695	24
0,0647	0,0596	0,1022	25
0,0246	0,0238	0,0042	26
- 0,0111	0,0785	- 0,0395	27
0,0083	- 0,1205	0,0445	28
- 0,0260	- 0,0837	- 0,0360	29
0,0090	- 0,0884	0,0157	30
0,0128	- 0,1049	- 0,0119	31
0,0490	- 0,0307	0,0673	32
- 0,1407	- 0,0223	- 0,1604	33
0,1913	0,1023	0,2329	34
- 0,2198	- 0,0405	- 0,1939	35
0,0177	0,2258	- 0,0012	36
0,2119	0,0889	0,2306	37
- 0,2727	- 0,0832	- 0,3081	38
0,2008	0,1378	0,2399	39
- 0,0809	- 0,1738	- 0,1091	40
0,0146	- 0,0009	0,0394	41
- 0,0236	- 0,0198	- 0,0334	42
0,0195	- 0,0716	0,0365	43
- 0,0315	- 0,0747	- 0,0254	44
- 0,0226	0,0694	- 0,0397	45
0,0883	0,0084	0,1057	46
- 0,0612	0,0240	- 0,1371	47
0,1268	0,2599	0,1701	48
- 0,1283	- 0,1023	- 0,1550	49
0,0842	0,1277	0,0794	50

Figura 8. Funções de Autocorrelação de Resíduos dos Ajustes - Naive

Quadro 6. Decomposição/Naive - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes

DN I	DN II	DN III	K
1,0000	1,0000	1,0000	0
- 0,1443	- 0,3181	- 0,5965	1
0,0368	- 0,0650	0,0522	2
0,0232	0,0483	0,1537	3
- 0,2367	- 0,2403	- 0,2225	4
- 0,0742	0,0593	0,1562	5
- 0,2051	- 0,0516	- 0,0915	6
- 0,0886	0,0755	0,0829	7
- 0,1984	- 0,0149	- 0,0825	8
0,1111	0,1134	0,0836	9
0,0099	0,0153	- 0,0693	10
0,0823	0,1065	0,2034	11
0,4168	- 0,3410	- 0,2900	12
- 0,0148	- 0,0269	0,0856	13
0,0891	0,0666	0,0928	14
- 0,0579	- 0,0869	- 0,1753	15
- 0,0052	0,2246	0,2266	16
- 0,1757	- 0,0649	- 0,1596	17
- 0,1070	0,0633	0,1222	18
- 0,1763	- 0,1270	- 0,1363	19
- 0,1191	0,0413	0,0852	20
0,0371	- 0,0147	- 0,0101	21
0,0145	- 0,0420	- 0,0961	22
0,2022	0,1826	0,2285	23
0,2115	- 0,1978	- 0,2821	24
0,1125	0,1690	0,1884	25
0,0642	0,0364	0,0141	26
- 0,0543	- 0,1327	- 0,1348	27
- 0,0652	0,0532	0,0935	28
- 0,1018	- 0,0050	- 0,0097	29
- 0,1572	- 0,0381	- 0,0674	30
- 0,0914	0,1066	0,0874	31
- 0,0453	0,0211	0,0169	32
- 0,0686	- 0,1109	- 0,0953	33
0,0752	0,0107	0,0891	34
0,0914	- 0,1063	- 0,1029	35
0,2388	0,0508	0,0762	36
0,0475	0,0087	0,0119	37
0,0385	- 0,0677	- 0,1221	38
0,0611	0,1806	0,1851	39
- 0,1517	- 0,0615	- 0,1060	40
- 0,0605	- 0,0271	0,0058	41
- 0,1484	- 0,0031	0,0305	42
- 0,1277	- 0,0642	- 0,0362	43
- 0,0249	- 0,0265	- 0,0011	44
0,0155	0,0153	- 0,0435	45
0,0526	0,1684	0,1509	46
0,1383	- 0,0727	- 0,1657	47
0,1952	0,1207	0,1314	48
- 0,0185	- 0,0357	- 0,0476	49
0,0892	- 0,0612	- 0,0309	50

Figura 9. Autocorrelações de Resíduos dos Ajustes - Decomposição/Naive

Quadro 7. Decomposição por Regressão - Funções de Autocorrelação dos Resíduos do Ajuste

D R	K
1,0000	0
0,0781	1
- 0,0156	2
0,0859	3
- 0,0160	4
- 0,0128	5
- 0,0518	6
0,0183	7
0,0033	8
0,0964	9
- 0,0231	10
- 0,1879	11
0,0042	12
0,0374	13
- 0,0561	14
- 0,0621	15
0,0537	16
- 0,0422	17
- 0,0483	18
- 0,0206	19
- 0,0066	20
0,0373	21
- 0,0829	22
0,1318	23
0,0892	24
0,0883	25
0,0723	26
- 0,0056	27
- 0,0156	28
- 0,0232	29
- 0,0310	30
- 0,0552	31
0,0486	32
- 0,0005	33
- 0,0471	34
- 0,0062	35
0,0177	36
- 0,0269	37
- 0,1064	38
- 0,0134	39
0,0140	40
- 0,0166	41
0,0265	42
0,0109	43
0,0139	44
0,0571	45
- 0,0177	46
- 0,0389	47
0,0946	48
0,0633	49
0,0536	50

Figura 10. Função de Autocorrelação dos Resíduos do Ajuste - Decomposição por Regressão

Quadro 8. Modelos Suavizados. Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes

Suav. Expon. Lin.	Médias Móveis Lin.	K
1,0000	1,0000	0
0,4980	0,3860	1
0,2522	0,2023	2
0,0102	0,0259	3
- 0,2981	- 0,2218	4
- 0,4662	- 0,3327	5
- 0,5616	- 0,4159	6
- 0,4536	- 0,3465	7
- 0,2866	- 0,2286	8
0,0173	- 0,0214	9
0,2413	0,1252	10
0,4490	0,2552	11
0,5656	0,3462	12
0,4678	0,2787	13
0,2292	0,0557	14
- 0,0507	- 0,0532	15
- 0,2547	- 0,1976	16
- 0,4552	- 0,3442	17
- 0,5367	- 0,4017	18
- 0,4435	- 0,3129	19
- 0,2734	- 0,2252	20
0,0017	0,0059	21
0,2115	0,1279	22
0,4978	0,4174	23
0,5847	0,5016	24
0,4632	0,4254	25
0,2696	0,2481	26
- 0,0295	0,0103	27
- 0,2773	- 0,1643	28
- 0,4342	- 0,3100	29
- 0,5109	- 0,3589	30
- 0,4414	- 0,3223	31
- 0,2424	- 0,1610	32
- 0,0134	- 0,0391	33
0,2250	0,1311	34
0,4409	0,2635	35
0,5361	0,3747	36
0,4001	0,2670	37
0,1847	0,1124	38
- 0,0347	- 0,0482	39
- 0,2482	- 0,1848	40
- 0,4225	- 0,3295	41
- 0,4688	- 0,3215	42
- 0,3975	- 0,2751	43
- 0,2396	- 0,1914	44
0,0210	- 0,0012	45
0,2357	0,1319	46
0,4182	0,2976	47
0,5501	0,4419	48
0,4198	0,3767	49
0,2419	0,2323	50

Figura 11. Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes - S.E.L. e M.M.L.

Quadro 9. Modelos de Holt e/ou Winters - Autocorrelações dos Resíduos dos Ajustes

Não Sazonal	Sazonal Aditivo	Sazonal Mult.	K
1,0000	1,0000	1,0000	0
- 0,1516	- 0,0199	0,5914	1
0,1045	0,0853	0,5574	2
0,0845	0,0501	0,3572	3
- 0,3039	- 0,1071	0,1523	4
- 0,1135	0,0539	0,0988	5
- 0,2361	- 0,0759	- 0,0263	6
- 0,1412	0,0237	- 0,0056	7
- 0,2158	- 0,0513	- 0,0233	8
0,1935	0,0746	0,0377	9
- 0,0412	- 0,2455	- 0,0251	10
0,1709	- 0,0578	- 0,0063	11
0,3498	- 0,1116	- 0,0499	12
0,0276	- 0,1918	- 0,1018	13
0,1529	- 0,0649	- 0,0656	14
- 0,2014	- 0,1437	- 0,1150	15
- 0,0537	0,1128	- 0,0322	16
- 0,2241	- 0,0853	- 0,1126	17
- 0,1324	0,8511	- 0,0517	18
- 0,2468	- 0,0685	- 0,0854	19
- 0,1159	0,1288	- 0,0457	20
0,1327	0,1249	- 0,0762	21
- 0,0664	- 0,1205	- 0,1635	22
0,2696	0,2083	- 0,0943	23
0,2290	- 0,0388	- 0,2408	24
0,1107	0,0692	- 0,1407	25
0,0617	0,0033	- 0,1534	26
0,0628	0,0910	- 0,0835	27
- 0,1548	0,0711	- 0,0663	28
- 0,1410	0,0191	- 0,0594	29
- 0,1554	- 0,0118	- 0,0791	30
- 0,1562	- 0,0306	- 0,1026	31
- 0,0650	0,0279	- 0,1026	32
- 0,0161	- 0,1632	- 0,2233	33
0,1144	- 0,6692	- 0,1787	34
0,0360	- 0,1897	- 0,2413	35
0,2804	- 0,0060	- 0,2142	36
0,1384	0,0489	- 0,1461	37
- 0,0380	- 0,1807	- 0,1834	38
0,0977	0,0578	- 0,0939	39
- 0,1806	- 0,0406	- 0,1125	40
- 0,0718	0,0577	- 0,0374	41
- 0,1538	- 0,0325	- 0,0683	42
- 0,1283	0,0329	0,0223	43
- 0,0905	0,0680	0,0697	44
0,0641	0,0567	0,1436	45
0,0385	0,0775	0,2245	46
0,0953	0,0920	0,2046	47
0,2860	0,2260	0,2323	48
- 0,0229	0,0155	0,1434	49
0,1281	0,0724	0,1084	50

Figura 12. Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes - Modelos Suavizados de Holt e/ou Winters

Quadro 10. Modelos Auto-regressivos - Funções de Autocorrelação dos Resíduos dos Ajustes

Regressão	Adaptativo	K
1,0000	1,0000	0
- 0,0600	- 0,0136	1
- 0,0426	- 0,0634	2
0,1057	0,0065	3
0,0121	- 0,0448	4
- 0,1010	0,0150	5
0,0725	0,0187	6
0,0036	0,0492	7
- 0,1146	0,0326	8
0,0948	0,0027	9
0,0252	0,0129	10
- 0,1639	- 0,1578	11
0,0635	- 0,2876	12
0,0664	- 0,0191	13
- 0,0765	- 0,1201	14
- 0,0697	- 0,1018	15
0,0036	0,0621	16
- 0,0285	0,0100	17
- 0,1025	- 0,0106	18
- 0,0048	0,0316	19
- 0,0677	- 0,0523	20
- 0,0160	- 0,0326	21
- 0,0633	- 0,0965	22
0,1807	0,1421	23
0,1483	0,1179	24
0,0790	0,0703	25
0,1061	0,1124	26
- 0,0071	- 0,0042	27
- 0,0717	- 0,0507	28
0,0016	0,0292	29
- 0,0329	0,0014	30
- 0,0875	- 0,0199	31
0,0037	0,0391	32
- 0,0010	- 0,0341	33
- 0,0706	- 0,0463	34
0,0212	- 0,0425	35
0,1472	0,0154	36
- 0,0492	- 0,0881	37
- 0,0584	- 0,0145	38
- 0,0219	- 0,0314	39
- 0,0339	0,0045	40
- 0,0780	- 0,0276	41
0,0020	0,0574	42
- 0,0400	0,0382	43
- 0,0412	- 0,0209	44
0,0309	0,0303	45
0,0237	- 0,0049	46
0,0027	- 0,0459	47
0,1943	0,1480	48
0,0867	0,0685	49
0,0646	0,0695	50

Figura 13. Funções de Autocorrelação de Resíduos - Modelos de Auto-regressão

Quadro 11. Função de Autocorrelação Parcial da Série X_t

Quadro 12. Função de Autocorrelação Parcial da Série W_t

	VALOR	DESV. PADR.	T	-1.0	0.0	1.0
1	0,112	0,059	1,909	I		I
2	0,011	0,059	0,179	I	*	I
3	0,074	0,059	1,251	I	*	I
4	-0,077	0,059	-1,299	I	*	I
5	-0,008	0,059	-0,141	I	*	I
6	-0,065	0,059	-2,078	I	*	I
7	0,059	0,059	0,290	I	*	I
8	-0,029	0,059	-0,466	I	*	I
9	0,097	0,059	1,646	I	*	I
10	0,001	0,059	0,016	I	*	I
11	-0,100	0,059	-3,053	I	*	I
12	-0,537	0,059	-9,109	I	*	I
13	-0,030	0,059	-0,513	I	*	I
14	-0,058	0,059	-0,983	I	*	I
15	-0,000	0,059	-1,121	I	*	I
16	0,073	0,059	1,236	I	*	I
17	0,046	0,059	0,810	I	*	I
18	-0,017	0,059	-0,290	I	*	I
19	-0,050	0,059	-0,847	I	*	I
20	0,009	0,059	0,150	I	*	I
21	0,082	0,059	1,367	I	*	I
22	0,013	0,059	0,217	I	*	I
23	0,087	0,059	1,476	I	*	I
24	-0,306	0,059	-5,156	I	*	I

Quadro 13. F.A.C.dos Resíduos do Ajuste do Modelo ARMA

	VALOR	DESV.PADR.	T	-1.0	0.0	1.0
1	0,107	0,059	1,823	I	**	I
2	-0,027	0,060	-0,450	I	*	I
3	0,098	0,060	1,646	I	**	I
4	-0,022	0,060	-0,371	I	*	I
5	0,016	0,060	0,269	I	*	I
6	-0,040	0,060	-0,561	I	*	I
7	-0,003	0,060	-0,354	I	*	I
8	-0,007	0,060	-0,123	I	*	I
9	0,011	0,060	0,190	I	*	I
10	-0,007	0,060	-0,122	I	*	I
11	-0,027	0,060	-0,440	I	*	I
12	-0,053	0,060	-0,883	I	*	I
13	-0,002	0,061	-0,027	I	*	I
14	-0,086	0,061	-1,421	I	*	I
15	-0,068	0,061	-1,109	I	*	I
16	0,077	0,061	1,260	I	**	I
17	-0,005	0,062	-0,085	I	*	I
18	-0,052	0,062	-0,836	I	*	I
19	-0,042	0,062	-0,674	I	*	I
20	0,013	0,062	0,210	I	*	I
21	-0,004	0,062	-0,072	I	*	I
22	-0,095	0,062	-1,530	I	*	I
23	-0,012	0,062	-0,188	I	*	I
24	0,042	0,062	0,668	I	*	I

Quadro 14. F.A.C.P. dos Resíduos do Modelo ARMA Ajustado

	VALOR	DESV.PADR.	T	-1.0	0.0	1.0
1	0,107	0,059	1,823	I	***	I
2	-0,039	0,059	-0,659	I	*	I
3	0,107	0,059	1,811	I	***	I
4	-0,048	0,059	-0,809	I	*	I
5	0,033	0,059	0,562	I	*	I
6	-0,061	0,059	-1,034	I	*	I
7	0,019	0,059	0,323	I	*	I
8	-0,021	0,059	-0,360	I	*	I
9	0,029	0,059	0,495	I	*	I
10	-0,020	0,059	-0,345	I	*	I
11	-0,015	0,059	-0,263	I	*	I
12	-0,060	0,059	-1,013	I	*	I
13	0,017	0,059	0,281	I	*	I
14	-0,096	0,059	-1,629	I	***	I
15	-0,032	0,059	-0,537	I	*	I
16	0,076	0,059	1,291	I	*	I
17	-0,007	0,059	-0,121	I	*	I
18	-0,047	0,059	-0,797	I	*	I
19	-0,047	0,059	-0,799	I	*	I
20	0,021	0,059	0,356	I	*	I
21	-0,010	0,059	-0,175	I	*	I
22	-0,085	0,059	-1,445	I	***	I
23	0,004	0,059	0,060	I	*	I
24	0,038	0,059	0,641	I	*	I

Quadro 15. Ajustes de Regressões - Resultados Obtidos

Modelo	Variáveis	Coeficientes	Coef.Det.	Coef. Reg.M.	F
RAR	2	0,2596333	0.4814190	0.6938436	14.35
	5	-0,1586610			
	7	-0,2407007			
	13	0,2851102			
DR	3	116,9873	0.5931275	0.7701477	15.86
	4	97,63571			
	5	45,40668			
	6	-41,69978			
	7	-52,14054			
	8	-69,22721			
	9	-81,60054			
	10	-81,58721			
	11	-50,17722			

Obs.: gl para testes F, 347 e 354 respectivamente.

Quadro 16. Modelo ARMA Ajustado – Resultados Obtidos

Termo	Tipo	Ordem	Estimativa	Desv.Padrão	T	Limites 95% Inferior Superior
1	REG. AR	9	0,1618	0,0575	2,8159	0,0492 0,2744
2	REG. AR	23	0,2256	0,0591	3,8148	0,1097 0,3415
3	REG. MA	12	0,8926	0,0347	25,6936	0,8245 0,9607

Estatísticas Calculadas para os Resíduos

Média = 1,8947	R^2 (série trabalhada) = 0,5004
Desv.Padrão = 60,5808	R^2 (geral) = 0,6175
Desv.Padrão.Med. = 3,5698	Z (para teste) = 0,0609
Coef. Var. = 0,5308	

Quadro 17. Melhora de Previsões - Resultados Obtidos

		NAIVE	BOX JENKINS	SUAUVIZADO	REGRESSÃO	DECOMPOSIÇÃO
Antes	EQM	12323,28	3588,467	4001,068	4378,709	4369,481
	THEIL	1,000000	0,2911942	0,3246756	0,3553202	0,3545713
A-	EQM	11369,57	3591,153	4567,353	4311,304	4474,819
	THEIL	0,9226089	0,2914122	0,3706280	0,3498504	0,3631192
B-	EQM	9142,103	3247,741	5637,272	4147,049	5289,369
	THEIL	0,7418564	0,2635452	0,4574491	0,3365215	0,4292176

Obs.: uso de 37 previsões

Quadro 18. Melhoria de Previsões - Resultados Obtidos

		NAIVE	BOX JENKINS	SUAUZADO	REGRESSÃO	DECOMPOSIÇÃO
Antes	EQM	12323,28	3588,467	4001,068	4378,709	4369,481
	THEIL	1,000000	0,2911942	0,3246756	0,3553202	0,3545713
A-	EQM	10246,98	3591,153	3964,653	4143,523	4386,792
	THEIL	0,8315139	0,2914122	0,3217206	0,3362354	0,3559760
B-	EQM	8887,583	3247,741	5011,097	4235,759	4868,299
	THEIL	0,7212028	0,2635452	0,4066367	0,3437201	0,3950490

Obs.: uso de 37 previsões para ARMA e 100 para os demais

Quadro 19. Mistura de Previsões - Resultados Obtidos

	NAI-BJ	NAI-SUA	NAI-REG	NAI-DEC	BJ-SUAV
k	0,225523	0,245098	0,262167	0,261759	0,527182
EQM	4307,555	4987,215	5233,818	5448,795	3619,160
THEIL	0,349546	0,404698	0,424709	0,442154	0,293684

	BJ-REG	BJ-DEC	SUAV-REG	REG-DEC	SUAV-DEC
k	0,549593	0,549071	0,522532	0,522006	0,499472
EQM	3763,085	3797,692	3879,684	3947,093	4096,495
THEIL	0,305363	0,308172	0,316286	0,320295	0,332419

Quadro 20. Medidas SNR e ARSE - Resultados Obtidos

Séries	Mod.p/Calc.Med.	SNR	ARSE	CD
Pindorama	RAR(23)	0,04716	0,96342	0,049
1	RAR(12)	11,31272	12,71518	0,919
2	RAR(12)	324,37240	337,28180	0,997
3	RAR(12)	56,16411	47,42018	0,978
4	RAR(12)	36,03080	45,83745	0,973
5	RAR(12)	7,10120	8,39947	0,876
6	RAR(12)	26,01036	23,30096	0,963
6	RAR(9)	2,63202	3,11687	0,724
7	RAR(12)	1,31659	2,13458	0,568
8	RAR(12)	1,27704	0,76715	0,561

Quadro 2]. Séries Simuladas, com $\sigma_e^2 = 0,001$ e estacionárias, $n = 50$

Mod.		SNR _(p=15)	ARSE _(p=15)	C.Det.
AR(1)	0,25	0,695	1,746	0,410
	0,75	3,342	4,469	0,769
MA(1)	0,25	0,812	1,865	0,448
	0,75	1,034	2,094	0,508
AR(2)	(0,75, 0,75)	8,913	10,262	0,899
	(0,25, 0,1)	0,532	1,577	0,347
	(0,75, 0,1)	0,798	1,851	0,443
	(0,75, -0,75)	0,759	1,810	0,431
ARMA(1,1)	(0,25, 0,1)	0,117	1,150	0,105
	(0,75, 0,1)	2,265	3,360	0,693
	(0,25, 0,25)	0,708	1,751	0,415
	(0,75, 0,25)	2,233	3,328	0,691
	(0,75, 0,75)	0,493	1,537	0,330
ARMA(1,2)	(0,25, 0,25, 0,1)	0,288	1,326	0,224
	(0,75, 0,75, 0,1)	0,507	1,551	0,336
	(0,25, 0,25, 0,25)	0,381	1,421	0,276
	(0,75, 0,2, 0,75)	0,992	2,050	0,498
ARMA(2,1)	(0,25, 0,1, 0,1)	1,108	2,171	0,526
	(0,75, 0,1, 0,5)	0,835	1,888	0,454
	(0,75, 0,1, 0,9)	5,575	6,768	0,847
	(0,25, 0,25, 0,1)	0,405	1,446	0,287
	(0,25, 0,25, 0,9)	0,715	1,765	0,417
ARMA(2,2)	(0,25, 0,25, 0,25, 0,25)	0,223	1,259	0,183
	(0,75, 0,20, 0,25, 0,25)	1,677	2,755	0,626
	(0,25, 0,5, 0,25, 0,25)	0,269	1,307	0,212
	(0,25, 0,25, 0,75, 0,2)	1,049	2,109	0,512
	(0,75, 0,2, 0,75, 0,2)	0,914	1,970	0,477
	(0,25, 0,5, 0,75, 0,2)	0,676	1,725	0,403
	(0,25, 0,25, 0,25, 0,5)	0,841	1,895	0,457
	(0,75, 0,2, 0,25, 0,5)	1,629	2,706	0,619
	(0,25, 0,5, 0,5, 0,75)	0,781	1,833	0,438
MA(2)	(0,75, 0,1)	2,310	3,407	0,697
	(0,25, 0,1)	0,267	1,305	0,211

Quadro 22. Modelo ARMA. Determinação das ordens e diagnose

Parâmetros no Modelo	Autocor. $\neq 0$			AIC	S.D. ($\sigma/\sqrt{n}$)	BP
	3	9	23			
MA 12		x	x	4183,5698	62,4391	20,936
MA 12 AR 9	x		x	4180,5034	61,9055	19,084
MA 12 MA 9			x	4179,4276	61,7946	18,761
MA 12 AR 9 AR 11			x	4183,3463	61,9839	28,119
MA 12 MA 9 MA 11			x	4181,9954	61,8445	26,369
MA 12 AR 9 AR 11 AR 23				4172,5467	60,6672	17,170
MA 12 MA 9 MA 11 MA 23				4174,0962	60,8241	17,580
MA 12 AR 9 AR 23				4169,6081	60,5808	17,182 ^a
MA 12 MA 9 MA 23				4170,9665	60,7181	17,015

^a coeficientes: $(\phi_9, \phi_{23}, \theta_{12})' = (0,1618, 0,2256, 0,8926)$

Figura 14. Série Observada e Ajuste Naive I - a partir de $t = 251$

Figura 15. Série Observada e Ajustes Decomposição Naive e por Regressão, a partir de $t = 251$

Figura 16. Série Observada e Ajustes Sazonais de Holt e Winters, a partir de $t = 251$

Figura 17. Série Observada e Ajustes de Holt e Winters Aditivo, Suavização Exponencial Linear e Médias Móveis Linear, a partir de $t = 251$

Figura 18. Série Observada e Modelos de Auto-regressão Ajustados, a partir de $t = 251$

Figura 19. Série Observada e Modelo ARMA ajustado. Últimas 37 previsões

Figura 20. Série Observada, Modelo ARMA e Holt e Winters Ajustados. Últimas 37 previsões

Quadro 23. Modelos Ajustados - Resultados Obtidos

Clas- se	Sub- classe	Modelo Ajust.	EQM	THEIL	BP	r
N	NI	$\hat{X}_{t+1} = X_t$	8781,5181	1,000	473,319	49
		$\hat{W}_t = \nabla_{12} X_t$				
	NII	$\hat{W}_{t+1} = W_t$	13635,400	1,530	347,532	49
		$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t$				
	NIII	$W_t = \nabla_1 \nabla_{12} X_t$	39647,990	4,437	661,889	48
		$\hat{W}_{t+1} = W_t$				
		$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t$				
D	DNI	$\hat{X}_{t-1} = X_t$	7850,454	1,000	304,930	49
		$\hat{W}_{t-1} = W_t$				
	DNII	$\hat{W}_t = \nabla_{12} X_t$	10864,230	1,353	235,214	49
		$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t$				
	DNIII	$W_{t-1} = \nabla_1 \nabla_{12} X_t$	28059,650	3,485	407,871	48
		$\hat{W}_{t-1} = W_t$				
		$\hat{X}_{t+1} = \hat{W}_{t+1} + \hat{X}_t$				
	DR	$\hat{X}_t = 108,4768 + \sum \alpha_j d_{jt}$	3664,096	0,402	48,939	49
		$S'_t = (1/14) \sum_{t-13}^t X_t$				
	SI	$S''_t = \sum_{t-13}^t S'_t$	8263,154	0,904	12421,945	48
		$\hat{a}_t = 2S'_t - S''_t$ $\hat{b}_t = (2/13)(S'_t - S''_t)$ $\hat{X}_{t+1} = \hat{a}_t + \hat{b}_t$				

Quadro 23. Continuação

Clas- se	Sub- classe	Modelo Ajust.	EQM	THEIL	BP	r
S	SII	$S_t' = 0,01X_t + 0,99S_{t-1}'$	9117,097	0,999	2468,870	49
		$S_t'' = 0,01S_t' + 0,99S_{t-1}''$				
		$\hat{a}_t = 2S_t' - S_t''$				
		$\hat{b}_t = (1/99)(S_t' - S_t'')$				
	SIIIa	$\bar{X}_t = 0,795X_t + 0,205\bar{X}_{t-1} + 0,205\hat{T}_{t-1}$	9179,197	1,067	4321,492	48
		$\hat{T}_t = \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}$				
		$\bar{X}_{t+1} = \bar{X}_t + \hat{T}_t$				
S	SIIIb	$\hat{T}_t = \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}$	3316,336	0,30779	59,454	47
		$\bar{X}_t = X_t - \hat{C}_{t-s}$				
		$\hat{C}_t = 0,1655556(X_t - \bar{X}_t) + 0,8344444\hat{C}_{t-s}$				
		$\hat{X}_{t+1} = (\bar{X}_t + \hat{T}_t) + \hat{C}_{t-s+1}$				
	SIIIc	$\bar{X}_t = X_t / \hat{C}_{t-s}$	6281,953	0,502	558,269	47
		$\hat{T}_t = \bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}$				
		$\hat{C}_t = 0,450679(X_t / \bar{X}_t) + 0,5493021\hat{C}_{t-s}$				
		$\hat{X}_{t+1} = (X_t + \hat{T}_t) \hat{C}_{t-s+1}$				

Quadro 23. Continuação

Classe	Sub-classe	Modelo Ajust.	EQM	THEIL	BP	r
R	RAR	$\hat{X}_{t+1} = 92,95611 +$ $+ 0,2596333X_t +$ $- 0,1586610X_{t-3} +$ $- 0,2407007X_{t-5} +$ $- 0,285110X_{t-11}$	4976,585	0,553	106,465	45
	RFA	$\hat{X}_{t+1} = \sum_{i=t-12}^t X_i \phi_{i-t+p}$	4965,851	0,552	103,602	38

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, R.L. (1942). Distribution of the Serial Correlation Coefficient. Ann. Math. Stat., 13,1:18.
- ANDERSON, T.W. (1971). The Statistical Analysis of Time Series. Academic Press. New York.
- ANSLEY, C.F., SPIVEY, W.A. e WROBLESKI, W.J. (1977). A Class of Transformations for Box-Jenkins Seasonal Models, Appl.Stat. 26,2,173-177.
- ANSLEY, C.F., SPIVEY, W.A. e WROBLESKI, W.J. (1979). "Comments" In Seasonal Analysis of Economic Time Series. U.S.Dept.of Commerce, Bureau of The Census, 335-337.
- BARTLET, M.S. (1946). On The Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series. Jour.of the Roy. Stat . Soc. B,27-41.
- BLACKMAN, R.B. (1965) Time Series Analysis. Wiley. New York.

BHANSALLI, R.J. e DOWNHAM, D.Y. (1977). Some properties of The Order of an Autoregressive Model Selected By A Generalization of AKAIKE'S EPF Criterion. Biometrika, 64,3,547-551.

BOX, G.E.P., HILLMER S.C. e TIAO, G.C. (1979). In Seasonal Analysis of Time Series, Zellner, U.S.Dept. of Commerce, Bureau of The Census, 309-334.

BOX, G.E.P. e JENKINS, G.M. (1971). Time Series Analysis, Forecasting and Control. 2nd. Holden Day. S. Francisco.

BOX, G.E.P. e JENKINS, G.M. (1980). Some Recent Advanced in Forecasting and Control, Jour. of Roy. Stat. Soc., B,42,2, 91-107.

BOX, G.E.P. e TIAO, G.C. (1970). Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated-Moving Average Time Series. Jour. of the Amer. Stat. Assoc. 65,332,1509-1526.

BOX, G.E.P. e TIAO, G.C. (1976). Comparison of Forecast and Actuality, Appl. Stat., 25,3,195-200.

CAMPOS, H. (1979). Estatística Experimental Não Paramétrica. 3ª ed. ESALQ. USP.

CHATFIELD, C. (1977). Some Recent Developments in Time Series Analysis, Jour. of the Roy. Stat. Soc., 4,492-510.

CHATFIELD, C. (1978). The Holt-Winters Forecasting Procedure, Appl. Stat. 27,3,264-279.

CHATFIELD, C. (1979). Inverse Autocorrelations, Jour. of the Roy. Stat. Soc., 3,363-377.

- CLEVELAND, W. (1972). The Inverse Autocorrelations of a Time Series and Their Applications. Technometrics, 14,2,277-293.
- CLEVELAND, W. e TIAO, G.C. (1976). Decomposition of Seasonal Time Series: A Model for the Census X-LL Program. Jour. of the Amer. Stat. Assoc., 71,355,581-587.
- COHEN, K.J., MULLER, W. e PADBERG, M.W. (1971). Autoregressive Approaches to Disagregation of Time series Data. Appl. Stat., 26,2,173-177.
- FINDLEY, D.F. (1978). Applied Time Series Analysis, Academic Press. New York.
- FULLER, W.A. (1976). Introduction to Statistical Time Series. Wiley. New York.
- FULLER, W.A. e HASZA, D.P. (1981). Properties of Predictors for Autoregressive Models: The Maximum χ^2 Method., Journ. of the Amer. Statist. Assoc. 73,361,122-125.
- GRANGER, C.W.J. e NEWBOLD, J.P.(1977). Forecasting Economic Times Series. Academic Press. New York.
- HALMOS, P.R. (1950). Measure Theory. Academic Press. New York.
- HANNAN, E.J. (1975). Time Series Analysis. Chapman Hall. London.
- HOFFMANN, R. e VIEIRA, S. (1977). Análise de Regressão. Hucitec, SP.

- HOYOS, A. (1980). Processos Estocásticos e Previsão. IMPA. R. Janeiro.
- JANACEK, G. (1975). Estimation of the Minimum Mean Square Error of Prediction. Biomētrika, 62,1,175-180.
- JENKINS, G.M. e WATTS, D.G. (1968). Spectral Analysis and its Applications. S.Fco. Holden Day.
- KENDALL, M. e STUART, A. (1976). The Advanced Theory of Statistics. III, Griffin, 3nd, London.
- KOLMOGOROV, A.N. (1941). Stationary Sequences in Hilbert Spaces. Bull. Math. Univ., Moscou, 2,6,1-40.
- MAKRIDAKIS, S. e HIBON, M. (1979). Accuracy of Forecasting: An Empirical Investigation. Jour.of the Roy.Stat.Soc., 2,97-145.
- MAKRIDAKIS, S. e WHEELWRIGHT, S.C. (1978). Forecasting Methods And Applications, Wiley, New York.
- MANN, H.B. e WALD, A. (1943). On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equation. Econometrica, 11,173-220.
- McCLAVE, J.T. (1978). Estimating the Order of Autoregressive Models: The Max χ^2 Method. Jour. of the Amer.Stat.Assoc., 73,361,122-128.
- MONTGOMERY, D.C. e JOHNSON, L.A. (1976). Forecasting and Time Series Analysis. McGraw-Hill. New York.

- MORETTIN, P.A. e TOLOI, C.M.C. (1981). Modelos para Previsão de Séries Temporais. IMPA. R. Janeiro.
- MUTH, J.F. (1960). Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts. Jour. of the Amer.Stat.Assoc., 55,299-306.
- NELSON, C.R. (1976). The Interpretation of R^2 in Autoregressive-Moving Average Time Series Models. The Amer.Stat., 30,4,175-180.
- OZAKI, T. (1977). On the Order Determination of ARIMA Models, Appl.Stat., 26,3,290-301.
- PARZEN, E. (1967). Time Series Analysis Papers. Holden Day. S.Francisco.
- PARZEN, E. (1961). An Approach to Time Series Analysis. Ann. of Math.Stat. 32,951-989.
- PIERCE, D.A. (1970). A Duality Between Autoregressive and Moving Average Processes Concerning Their Least Squares Parameters Estimates. Ann. Math. Stat., 41,2,722-726.
- PIERCE, D.A. (1980). A Survey of Recent Developments in Seasonal Adjustment. The Amer. Stat., 34,3,125-133.
- PINDYCK, R.S. e RUBINFELD, D.L. (1976). Econometric Models and Economic Forecasts. McGraw-Hill. New York.

- QUENOUILLE, M.H. (1949). Aproximate Tests of Correlation in Time Series. Jour. of the Roy.Stat.Soc., B, 11,64-68.
- QUINN, B.G. (1980). Order Determination for a Multivariate Regression. Jour. Roy.Stat. Soc. 42,2,182-185.
- ROSENBLATT, M. (1963). Time Series Analysis. Wiley. London.
- YAMAMOTO, T. (1981). Predictions of Multivariate Autoregressive-Moving Average Models, Biometrika, 68,2,485-492.
- YULE, G.V. (1927). On a Method for Investigating Periodicities in Disturbed Series With Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. Philos.Trans. Roy.Soc., A, 226,267-298.
- WALKER, G. (1931). On Periodicity in Series of Related Terms. Proc. Roy. Soc., A, 131,518-532.
- WHEELWRIGHT, S.C. e MAKRIDADKIS, S. (1980). Forecasting Methods for Management. Wiley. New York.
- WIENER, N. (1949). The Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series With Engineering Applications. Technology Press. Cambridge.
- WOLD, H. (1949). A Large Sample Test For MA Processes. Jour. of The Roy. Stat.Soc, B, 11,237-305.